



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА _____ «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2 по курсу «Математическая статистика»

«Интервальные оценки»

Студент _____ Маслова Марина Дмитриевна

Группа _____ ИУ7-63Б

Оценка (баллы) _____

Преподаватель _____ Власов Павел Александрович

2022 г.

1 Задание

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

Содержание работы

1. Для выборки объема n из генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ
 - а) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$ и $S^2(\vec{x}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;
 - б) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $\bar{\mu}(\vec{x}_n)$ для γ -доверительного интервала для математического ожидания MX ;
 - в) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $\bar{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ для γ -доверительного интервала для дисперсии DX .
2. вычислить $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$ и $S^2(\vec{x}_n)$ для выборки из индивидуального варианта;
3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N — объема выборки индивидуального варианта:
 - а) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \bar{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N .
 - б) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x}_N)$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \bar{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N .

Содержание отчета

1. определение γ -доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины;
2. формулы для вычисления границ γ -доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины;
3. текст программы;
4. результаты расчетов и графики для выборки из индивидуального варианта (при построении графиков принять $\gamma = 0.9$).

2 Теоретическая часть

2.1 Определение γ -доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Пусть X — случайная величина, закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра θ .

Определение. Интервальной оценкой параметра θ уровня γ называется пара статистик $\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\bar{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\{\theta \in (\underline{\theta}(\vec{X}), \bar{\theta}(\vec{X}))\} = \gamma.$$

Определение. γ -доверительным интервалом для параметра θ называется реализация (выборочное значение) интервальной оценки уровня γ для этого параметра, то есть интервал $(\underline{\theta}(\vec{x}), \bar{\theta}(\vec{x}))$ с детерминированными границами.

2.2 Формулы для вычисления границ γ -доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Пусть $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, где μ и σ^2 — неизвестны.

Тогда для построения γ -доверительного интервала для μ используется центральная статистика

$$g(\vec{X}, \mu) = \frac{\mu - \bar{X}}{S(\vec{X})} \sqrt{n} \sim St(n-1),$$

и границы γ -доверительного интервала для μ вычисляются по формулам:

$$\underline{\mu}(\vec{X}) = \bar{X} - \frac{S(\vec{X}) t_{\frac{1+\gamma}{2}}^{(n-1)}}{\sqrt{n}},$$

$$\bar{\mu}(\vec{X}) = \bar{X} + \frac{S(\vec{X}) t_{\frac{1+\gamma}{2}}^{(n-1)}}{\sqrt{n}},$$

где $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$,

$$S(\vec{X}) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2},$$

$t_{\frac{1+\gamma}{2}}^{(n-1)}$ — квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ распределения Стьюдента с $n - 1$ степенями свободы,

n — объем выборки.

Для построения γ -доверительного интервала для σ^2 используется центральная статистика

$$g(\vec{X}, \sigma^2) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

и границы γ -доверительного интервала для σ^2 вычисляются по формулам:

$$\underline{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}^{(n-1)}},$$

$$\bar{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}^{(n-1)}},$$

где n — объем выборки,

$$S^2(\vec{X}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

$h_{\frac{1+\gamma}{2}}^{(n-1)}$ и $h_{\frac{1-\gamma}{2}}^{(n-1)}$ — квантили уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ и $\frac{1-\gamma}{2}$ соответственно распределения хи-квадрат с $n - 1$ степенями свободы.

3 Практическая часть