Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2
по курсу «Математическая статистика»

«Интервальные оценки»

Студент Маслова Марина Дмитриевна

Группа ИУ7-63Б

Оценка (баллы) ______

Преподаватель Власов Павел Александрович

2022 г.

1 Задание

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

Содержание работы

1. Для выборки объема n из генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ
   а) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$ и $S^2(\vec{x}_n)$ математического ожидания $\mathrm{M}X$ и дисперсии $\mathrm{D}X$ соответственно;
   б) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $\overline{\mu}(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания $\mathrm{M}X$;
   в) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $\overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для дисперсии $\mathrm{D}X$.
2. вычислить $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$ и $S^2(\vec{x}_n)$ для выборки из индивидуального варианта;
3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N — объема выборки индивидуального варианта:
   а) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.
   б) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x}_N)$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

Содержание отчета

1. определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины;
2. формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины;
3. текст программы;
4. результаты расчетов и графики для выборки из индивидуального варианта (при построении графиков принять $\gamma = 0.9$).

2 Теоретическая часть

2.1 Определение γ-доверительного итервала для значения параметра распределения случайной величины

Пусть X — случайная величина, закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра θ.

Определение. Интервальной оценкой параметра θ уровня γ называется пара статистик $\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\{\theta \in (\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X}))\} = \gamma.$$

Определение. γ-доверительным интервалом для параметра θ называется реализация (выборочное значение) интервальной оценки уровня γ для этого параметра, то есть интервал $(\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x}))$ с детерминированными границами.

2.2 Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайно величины

Пусть $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, где μ и σ^2 — неизвестны.

Тогда для построения γ-доверительного интервала для μ используется центральная статистика

$$g(\vec{X}, \mu) = \frac{\mu - \overline{X}}{S(\vec{X})}\sqrt{n} \sim St(n-1),$$

и границы γ-доверительного интервала для μ вычисляются по формулам:

$$\underline{\mu}(\vec{X}) = \overline{X} - \frac{S(\vec{X}) t^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}},$$

$$\overline{\mu}(\vec{X}) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}) t^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}},$$

где $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$,

$S(\vec{X}) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$,

$t^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}$ — квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы,

n — объем выборки.

Для построения γ-доверительного интервала для σ^2 используется центральная статистика

$$g(\vec{X}, \sigma^2) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

и границы γ-доверительного интервала для σ^2 вычисляются по формулам:

$$\underline{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}},$$

$$\overline{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h^{(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}},$$

где n — объем выборки,

$S^2(\vec{X}) = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$,

$h^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}$ и $h^{(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}$ — квантили уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ и $\frac{1-\gamma}{2}$ соответственно распределения хи-квадрат с $n-1$ степенями свободы.

3 Практическая часть

Листинг 3.1 – Текст программы

```
x = [11.89,9.60,9.29,10.06,9.50,8.93,9.58,6.81,8.69,9.62,...
     9.01,10.59,10.50,11.53,9.94,8.84,8.91,6.90,9.76,7.09,...
     11.29,11.25,10.84,10.76,7.42,8.49,10.10,8.79,11.87,8.77,...
     9.43,12.41,9.75,8.53,9.72,9.45,7.20,9.23,8.93,9.15,...
     10.19,9.57,11.09,9.97,8.81,10.73,9.57,8.53,9.21,10.08,...
     9.10,11.03,10.10,9.47,9.72,9.60,8.21,7.78,10.21,8.99,...
     9.14,8.60,9.14,10.95,9.33,9.98,9.09,10.35,8.61,9.35,...
     10.04,7.85,9.64,9.99,9.65,10.89,9.08,8.60,7.56,9.27,...
     10.33,10.09,8.51,9.86,9.24,9.63,8.67,8.85,11.57,9.85,...
     9.27,9.69,10.90,8.84,11.10,8.19,9.26,9.93,10.15,8.42,...
     9.36,9.93,9.11,9.07,7.21,8.22,9.08,8.88,8.71,9.93,...
     12.04,10.41,10.80,7.17,9.00,9.46,10.42,10.43,8.38,9.01];

n = length(x);

cnt = 0;

while !cnt
    fprintf('Введите gamma: ');
    [gamma, cnt] = scanf('%f', 1);

    if !cnt || gamma > 1 || gamma < 0
        tmp = scanf('%s', 'C');
        fprintf('%d\n', cnt);
        fprintf('gamma in [0, 1]\n');
        cnt = 0;
    endif
endwhile

fprintf('gamma = %.2f\n', gamma);

fprintf('\nЗадание 1.a/2\n');

function res = sample_mean(x)
    n = length(x);
    res = sum(x) / n;
endfunction

function res = unbiased_sample_variance(x)
    n = length(x);
    mu = sample_mean(x);

    res = sum((x - mu) .^ 2) / (n - 1);
endfunction

```

```
mu = sample_mean(x);
sqrS = unbiased_sample_variance(x);

fprintf('mu  = %5.4f\n', mu);
fprintf('S^2 = %5.4f\n', sqrS);

fprintf('\nЗадание 1.б\n');

function [lower_bound, upper_bound] = get_mx_confidence(x, gamma)
    sm = sample_mean(x);
    s  = sqrt(unbiased_sample_variance(x));
    n  = length(x);
    t  = tinv((1 + gamma) / 2, n - 1);

    lower_bound = sm - s * t / sqrt(n);
    upper_bound = sm + s * t / sqrt(n);
endfunction

[lower_mu, upper_mu] = get_mx_confidence(x, gamma);

fprintf('%.2f-доверительный интервал для математического ожидания\n', gamma);
fprintf('(%5.6f, %5.6f)\n', lower_mu, upper_mu);

fprintf('\nЗадание 1.в\n');

function [lower_bound, upper_bound] = get_dx_confidence(x, gamma)
    s2  = unbiased_sample_variance(x);
    n  = length(x);
    t_low  = chi2inv((1 + gamma) / 2, n - 1);
    t_up  = chi2inv((1 - gamma) / 2, n - 1);

    lower_bound = (n - 1) * s2 / t_low;
    upper_bound = (n - 1) * s2 / t_up;
endfunction

[lower_sigma2, upper_sigma2] = get_dx_confidence(x, gamma);

fprintf('%.2f-доверительный интервал для дисперсии\n', gamma);
fprintf('(%5.6f, %5.6f)\n', lower_sigma2, upper_sigma2);


fprintf('\nЗадание 3.а\n');
fprintf('График в отдельном окне\n');

hat_mu_x_N = zeros(n, 1) + mu;
hat_mu_x_n = zeros(n, 1);
low_mu = zeros(n, 1);
up_mu  = zeros(n, 1);
```

```

for i=1:n
    cur_x = x(1:i);
    hat_mu_x_n(i) = sample_mean(cur_x);
    [low_mu(i), up_mu(i)] = get_mx_confidence(cur_x, gamma);
endfor

h = figure();
set(h, 'numbertitle', 'off', 'name', 'Задание 3.a');
hold on;
plot(1:n, hat_mu_x_N, 'color', 'g', 'linewidth', 2);
plot(1:n, hat_mu_x_n, 'color', 'b', 'linewidth', 2);
plot(1:n, low_mu,     'color', 'm', 'linewidth', 2);
plot(1:n, up_mu,      'color', 'r', 'linewidth', 2);
l = legend('y = \mu_{hat}(x_N)', 'y = \mu_{hat}(x_n)',
           'y = \mu_{low}(x_n)', 'y = \mu_{up}(x_n)');
set(l, 'interpreter', 'tex', 'fontsize', 16);
grid;

fprintf('\nЗадание 3.б\n');
fprintf('График в отдельном окне\n');

begin = 4;

S_x_N = zeros(n - begin + 1, 1) + sqrS;
S_x_n = zeros(n - begin + 1, 1);
low_sig2 = zeros(n - begin + 1, 1);
up_sig2  = zeros(n - begin + 1, 1);

for i=begin:n
    cur_x = x(1:i);
    S_x_n(i-begin+1) = unbiased_sample_variance(cur_x);
    [low_sig2(i-begin+1), up_sig2(i-begin+1)] = get_dx_confidence(cur_x, gamma);
endfor

g = figure();
set(g, 'numbertitle', 'off', 'name', 'Задание 3.б');
hold on;
plot(1:n-begin+1, S_x_N,    'color', 'g', 'linewidth', 2);
plot(1:n-begin+1, S_x_n,    'color', 'b', 'linewidth', 2);
plot(1:n-begin+1, low_sig2, 'color', 'm', 'linewidth', 2);
plot(1:n-begin+1, up_sig2,  'color', 'r', 'linewidth', 2);
l = legend('z = S^2(x_N)', 'z = S^2(x_n)',
           'z = \sigma^2_{low}(x_n)', 'z = \sigma^2_{up}(x_n)');
set(l, 'interpreter', 'tex', 'fontsize', 16);
grid;
```

Листинг 3.2 – Результаты расчетов для выборки из индивидуального варианта

```
gamma = 0.90

Задание 1.а/2
mu   = 9.4872
S^2 = 1.2173

Задание 1.б
0.90-доверительный интервал для математического ожидания
(9.320200, 9.654134)

Задание 1.в
0.90-доверительный интервал для дисперсии
(0.995866, 1.527872)

Задание 3.а
График в отдельном окне

Задание 3.б
График в отдельном окне
```

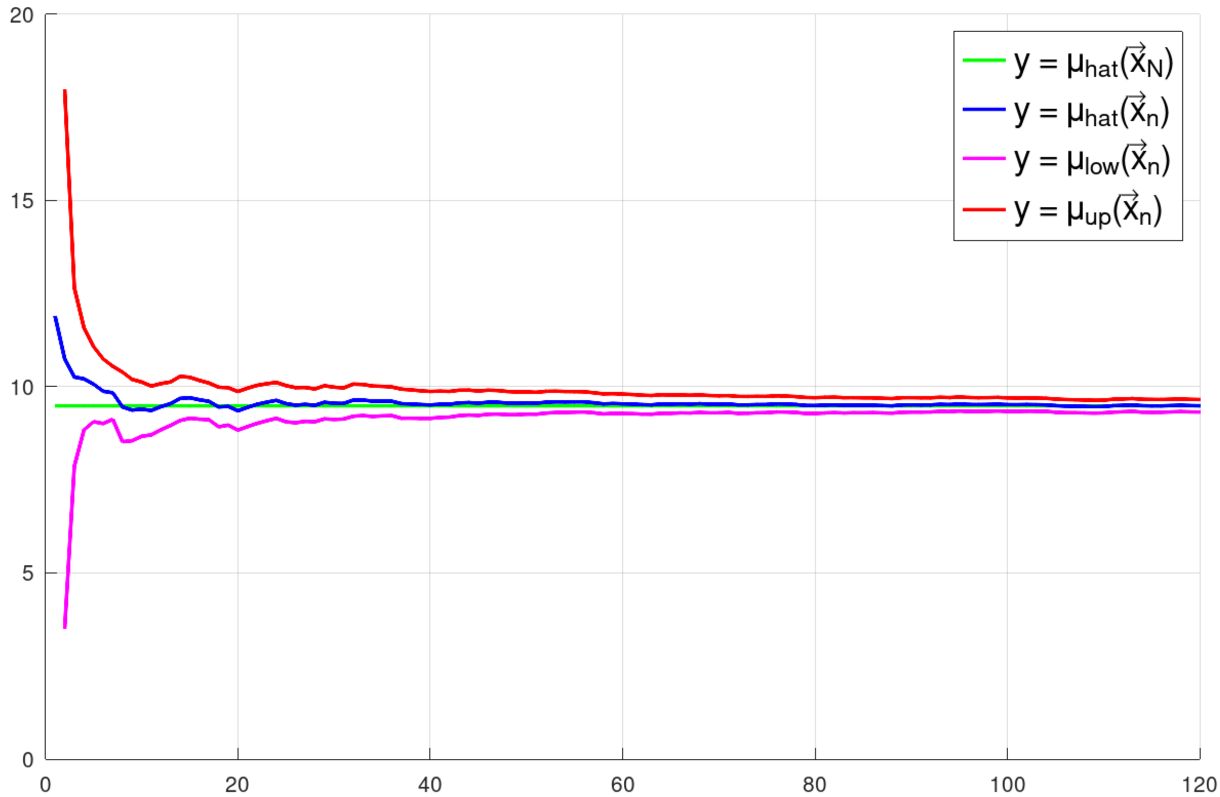

Рисунок 3.1 – Прямая $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$ и графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N

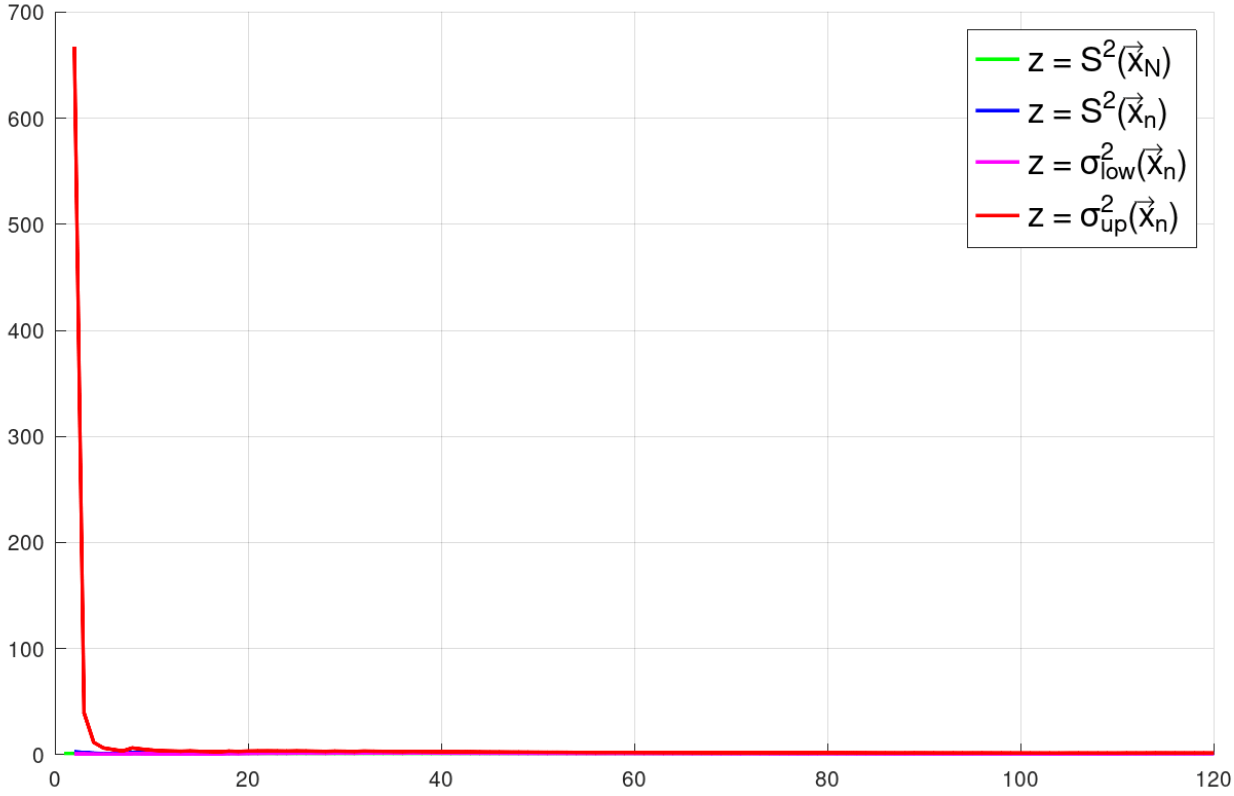

Рисунок 3.2 – Прямая $z = S^2(\vec{x}_N)$ и графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N

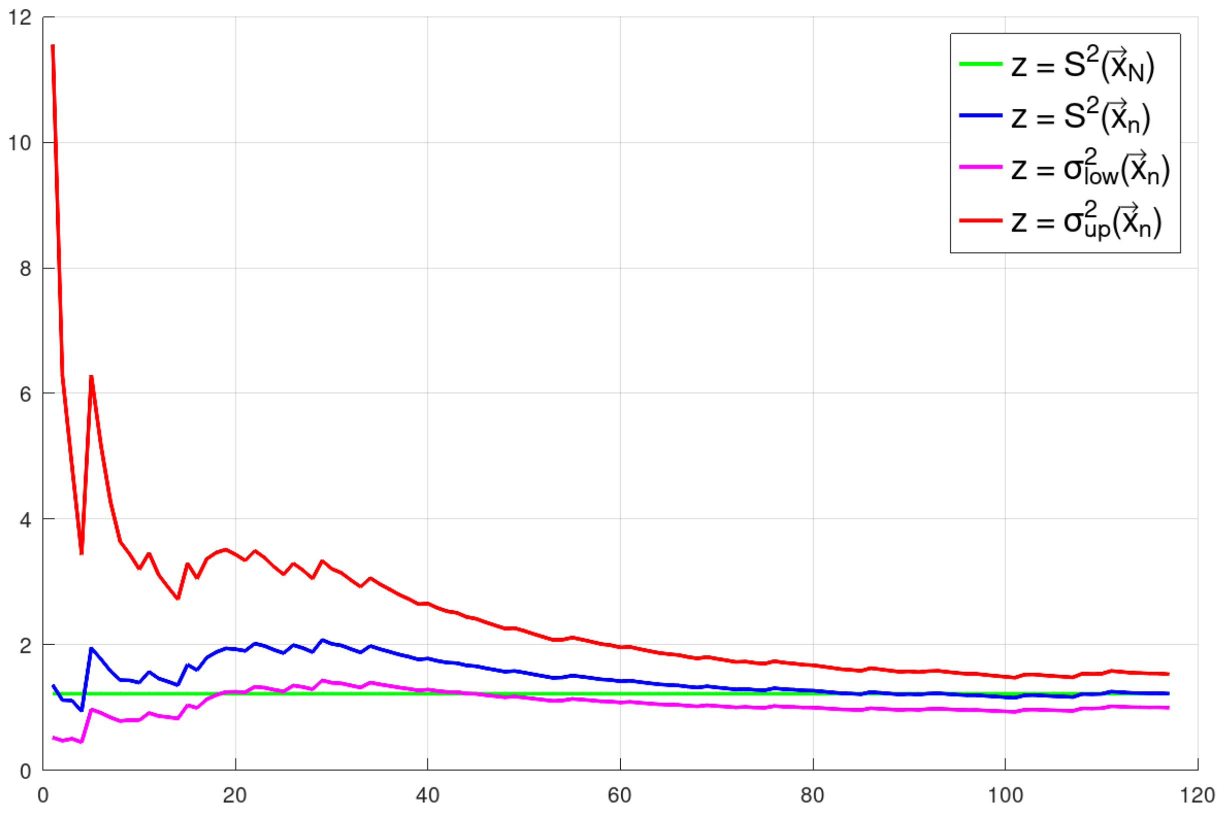

Рисунок 3.3 – Прямая $z = S^2(\vec{x}_N)$ и графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 4 до N