2007~2018 年高考真题汇编“椭圆”

1.【2011 文·4】椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$的离心率为（　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2.【2012 理·4 文·4】设F_1、F_2是椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$（$a>b>0$）的左、右焦点，$P$为直线$x=\frac{3a}{2}$上一点，$\Delta F_2PF_1$是底角为$30°$的等腰三角形，则$E$的离心率为（　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{5}$

3.【2018 文Ⅰ·4】已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1$的一个焦点为$(2,0)$，则$C$的离心率为

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

4.【2010 文·5】中心在远点，焦点在x轴上的双曲线的一条渐近线经过点（4,2），则它的离心率为

（A）$\sqrt{6}$　（B）$\sqrt{5}$　（C）$\frac{\sqrt{6}}{2}$　（D）$\frac{\sqrt{5}}{2}$

5.【2013 文Ⅱ·5】设椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，$P$是$C$上的点，$PF_2\perp F_1F_2$，$\angle PF_1F_2=30°$，则$C$的离心率为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6.【2015 文Ⅰ·5】已知椭圆E的中心为坐标原点，离心率为$\frac{1}{2}$，E的右焦点与抛物线C: $y^2=8x$，的焦点重合，A,B是C的准线与E的两个交点，则$|AB|$=(　　)

A．3　　B．6　　C．9　　D．12

7.【2016 文Ⅰ·5】直线l经过椭圆的一个顶点和一个焦点，若椭圆中心到l的距离为其短轴长的$\frac{1}{4}$，则该椭圆的离心率为（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

8.【2013 理Ⅰ·10】已知椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的右焦点为$F(3,0)$，过点$F$的直线交$E$于$A$，$B$两点．若$AB$的中点坐标为(1，－1)，则$E$的方程为(　　)

A．$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$　　B．$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$

C．$\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{18}=1$　　D．$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$

9.【2017 理Ⅲ· 10 文Ⅲ· 11】已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，（$a>b>0$）的左、右顶点分别为$A_1$，$A_2$，且以线段$A_1A_2$为直径的圆与直线$bx-ay+2ab=0$相切，则$C$的离心率为

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

10【2016 理Ⅲ· 11 文Ⅲ· 12】已知O为坐标原点，F是椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点，$A,B$分别为$C$的左，右顶点.$P$为$C$上一点，且$PF\perp x$轴.过点$A$的直线$l$与线段$PF$交于点$M$，与$y$轴交于点$E$.若直线$BM$经过$OE$的中点，则$C$的离心率为

（A）$\frac{1}{3}$　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）$\frac{2}{3}$　　（D）$\frac{3}{4}$

11.【2018 文Ⅱ·11】已知F_1，F_2是椭圆C的两个焦点，P是C上的一点，若$PF_1\perp PF_2$，且$\angle PF_2F_1=60°$，则C的离心率为

A．$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$　B．$2-\sqrt{3}$　C．$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　D．$\sqrt{3}-1$

12.【2017 文Ⅰ·12】设A、B是椭圆C：$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{m}=1$长轴的两个端点，若$C$上存在点$M$满足$\angle AMB$=120°，则$m$的取值范围是

A．$(0,1]\cup[9,+\infty)$　　B．$(0,\sqrt{3}]\cup[9,+\infty)$

C．$(0,1]\cup[4,+\infty)$　　D．$(0,\sqrt{3}]\cup[4,+\infty)$

13.【2011 理·14】在平面直角坐标系xOy中，椭圆C的中心为原点，焦点F_1,F_2在x轴上，离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$．过F_1的直线L交C于A,B两点，且$\triangle ABF_2$的周长为16，那么C的方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$.

14.【2015 理Ⅰ·14】一个圆经过椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$的三个顶点，且圆心在$x$轴的正半轴上，则该圆的标准方程为$(x-\frac{3}{2})^2+y^2=\frac{25}{4}$.

15.【2008 文·15】过椭圆$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$的右焦点作一条斜率为2的直线与椭圆交于$A$，$B$两点，$O$为坐标原点，则$\triangle OAB$的面积为________. $\frac{5}{3}$

16【2007 理·19】在平面直角坐标系xOy中，经过点$(0,\sqrt{2})$且斜率为k的直线l与椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$有两个不同的交点P和Q.

（1）求k的取值范围；

（2）设椭圆与x轴正半轴、y轴正半轴的交点分别为A，B，是否存在常数k，使得向量$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$与$\overrightarrow{AB}$共线？如果存在，求$k$值；如果不存在，请说明理由.

解：（1）由已知条件，直线l的方程为$y=kx+\sqrt{2}$，

代入椭圆方程得$\frac{x^2}{2}+(kx+\sqrt{2})^2=1$.

整理得$\left(\frac{1}{2}+k^2\right)x^2+2\sqrt{2}kx+1=0$　　①

直线l与椭圆有两个不同的交点P和Q等价于$\Delta=8k^2-4\left(\frac{1}{2}+k^2\right)=4k^2-2>0$，解得$k<-\frac{\sqrt{2}}{2}$或$k>\frac{\sqrt{2}}{2}$.

即k的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$.

（2）设$P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$，则$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$，

由方程①，$x_1+x_2=-\frac{4\sqrt{2}k}{1+2k^2}$.　　②

又$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2\sqrt{2}$.　　③

而$A(\sqrt{2},0)$，$B(0,1)$，$\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{2},1)$.

所以$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$与$\overrightarrow{AB}$共线等价于$x_1+x_2=-\sqrt{2}(y_1+y_2)$，

将②③代入上式，解得$k=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由（1）知 $k<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $k>\frac{\sqrt{2}}{2}$，故没有符合题意的常数 k

17.【2008 理·20】在直角坐标系 xOy 中，椭圆 C_1：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点分别为 F_1，F_2． F_2 也是抛物线 C_2：$y^2=4x$ 的焦点，点 M 为 C_1 与 C_2 在第一象限的交点，且 $|MF_2|=\frac{5}{3}$．

（1）求 C_1 的方程；

（2）平面上的点 N 满足 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MF_1}+\overrightarrow{MF_2}$，直线 $l\parallel MN$，且与 C_1 交于 A，B 两点，若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，求直线 l 的方程．

解：（1）由 C_2：$y^2=4x$ 知 $F_2(1,0)$．

设 $M(x_1,\ y_1)$，M 在 C_2 上，因为 $|MF_2|=\frac{5}{3}$，

所以 $x_1+1=\frac{5}{3}$，得 $x_1=\frac{2}{3}$，$y_1=\frac{2\sqrt{6}}{3}$． M 在 C_1 上，

且椭圆 C_1 的半焦距 $c=1$，于是 $\begin{cases}\frac{4}{9a^2}+\frac{8}{3b^2}=1,\\ b^2=a^2-1.\end{cases}$ 消去 b^2 并整理得

$9a^4-37a^2+4=0$， 解得 $a=2$（$a=\frac{1}{3}$ 不合题意，舍去）．

故椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．

（2）由 $\overrightarrow{MF_1}+\overrightarrow{MF_2}=\overrightarrow{MN}$ 知四边形 MF_1NF_2 是平行四边形，其中心为坐标原点 O，因为 $l\parallel MN$，所以 l 与 OM 的斜率相同，

故 l 的斜率 $k=\frac{2\sqrt{6}}{3}\div\frac{2}{3}=\sqrt{6}$．设 l 的方程为 $y=\sqrt{6}(x-m)$．

由 $\begin{cases}3x^2+4y^2=12,\\ y=\sqrt{6}(x-m),\end{cases}$ 消去 y 得 $9x^2-16mx+8m^2-4=0$．

设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$x_1+x_2=\frac{16m}{9}$，$x_1x_2=\frac{8m^2-4}{9}$．

因为 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，所以 $x_1x_2+y_1y_2=0$．

$$\begin{aligned}x_1x_2+y_1y_2&=x_1x_2+6(x_1-m)(x_2-m)\\&=7x_1x_2-6m(x_1+x_2)+6m^2\\&=7\cdot\frac{8m^2-4}{9}-6m\cdot\frac{16m}{9}+6m^2=\frac{1}{9}(14m^2-28)=0.\end{aligned}$$

所以 $m=\pm\sqrt{2}$．此时 $\Delta=(16m)^2-4\times9(8m^2-4)>0$，

故所求直线 l 的方程为 $y=\sqrt{6}x-2\sqrt{3}$，或 $y=\sqrt{6}x+2\sqrt{3}$．

18.【2009 理·20 文·20】已知椭圆 C 的中心为直角坐标系 xOy 的原点，焦点在 s 轴上，它的一个顶点到两个焦点的距离分别是 7 和 1.

（1）求椭圆 C 的方程;

（2）若 P 为椭圆 C 上的动点，M 为过 P 且垂直于 x 轴的直线上的点，$\frac{|OP|}{|OM|}=\lambda$，求点 M 的轨迹方程，并说明轨迹是什么曲线.

解:(1)设椭圆长半轴长及半焦距分别为 a，c，由已知得

$\begin{cases}a-c=1\\ a+c=7\end{cases}$，解得 $a=4,c=3$，

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

（2）设 $M(x,y)$，其中 $x\in[-4,4]$。由已知 $\frac{|OP|^2}{|OM|^2}=\lambda^2$ 及点 P 在椭圆 C 上可得 $\frac{9x^2+112}{16(x^2+y^2)}=\lambda^2$。

整理得 $(16\lambda^2-9)x^2+16\lambda^2y^2=112$，其中 $x\in[-4,4]$。

（i）$\lambda=\frac{3}{4}$ 时。化简得 $9y^2=112$

所以点 M 的轨迹方程为 $y=\pm\frac{4\sqrt{7}}{3}(-4\le x\le4)$，轨迹是两条平行于 x 轴的线段。

（ii）$\lambda\ne\frac{3}{4}$ 时，方程变形为 $\frac{x^2}{\frac{112}{16\lambda^2-9}}+\frac{y^2}{\frac{112}{16\lambda^2}}=1$，其中 $x\in[-4,4]$

当 $0<\lambda<\frac{3}{4}$ 时，点 M 的轨迹为中心在原点、实轴在 y 轴上的双曲线满足 $-4\le x\le4$ 的部分。

当 $\frac{3}{4}<\lambda<1$ 时，点 M 的轨迹为中心在原点、长轴在 x 轴上的椭圆满足 $-4\le x\le4$ 的部分;

当 $\lambda\ge1$ 时，点 M 的轨迹为中心在原点、长轴在 x 轴上的椭圆.

19.【2010 文·20】设 F_1，F_2 分别是椭圆 E：$x^2+\frac{y^2}{b^2}=1$（$0<b<1$）的左、右焦点，过 F_1 的直线 l 与 E 相交于 A、B 两点，且 $|AF_2|$，$|AB|$，$|BF_2|$ 成等差数列.

（1）求 $|AB|$

（2）若直线 l 的斜率为 1，求 b 的值.

解：（1）由椭圆定义知 $|AF_2|+|AB|+|BF_2|=4$

又 $2|AB|=|AF_2|+|BF_2|$，得 $|AB|=\frac{4}{3}$

（2）L 的方程式为 y=x+c,其中 $c=\sqrt{1-b^2}$

设 $A(x_1,\ y_1)$,$B(x_1,\ y_1)$,则 A，B 两点坐标满足方程组

$\begin{cases}y=x+c\\ x^2+\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$ 化简得 $(1+b^2)x^2+2cx+1-2b^2=0.$

则 $x_1+x_2=\frac{-2c}{1+b^2},x_1x_2=\frac{1-2b^2}{1+b^2}.$

因为直线 AB 的斜率为 1，所以 $|AB|=\sqrt{2}\,|x_2-x_1|$

即 $\frac{4}{3}=\sqrt{2}\,|x_2-x_1|$.则

$$\frac{8}{9}=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{4(1-b^2)}{(1+b^2)^2}-\frac{4(1-2b^2)}{1+b^2}=\frac{8b^4}{1+b^2}$$

解得 $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

20.【2010 理·20】设 F_1,F_2 分别是椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，过 F_1 斜率为 1 的直线 ℓ 与 E 相交于 A,B 两点，且 $|AF_2|,|AB|,|BF_2|$ 成等差数列.

（1）求 E 的离心率；

（2） 设点 $P(0,-1)$ 满足 $|PA|=|PB|$，求 E 的方程

解：（1）由椭圆定义知 $|AF_2|+|BF_2|+|AB|=4a$，

又 $2|AB|=|AF_2|+|BF_2|$，得 $|AB|=\frac{4}{3}a$

l 的方程为 $y=x+c$，其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$。

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 A、B 两点坐标满足方程组

$\begin{cases}y=x+c\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$，化简的 $(a^2+b^2)x^2+2a^2cx+a^2(c^2-b^2)=0$

则 $x_1+x_2=\frac{-2a^2c}{a^2+b^2},x_1x_2=\frac{a^2(c^2-b^2)}{a^2+b^2}$

因为直线 AB 斜率为 1，

所以 $|AB|=\sqrt{2}|x_2-x_1|=\sqrt{2\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]}$

得 $\frac{4}{3}a=\frac{4ab^2}{a^2+b^2}$，故 $a^2=2b^2$

所以 E 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

（2）设 AB 的中点为 $N(x_0,y_0)$，由（1）知

$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-a^2c}{a^2+b^2}=-\frac{2}{3}c$，$y_0=x_0+c=\frac{c}{3}$。

由 $|PA|=|PB|$，得 $k_{PN}=-1$，即 $\frac{y_0+1}{x_0}=-1$

得 $c=3$，从而 $a=3\sqrt{2},b=3$

故椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$

21.【2013 理Ⅰ·20 文Ⅰ·21】已知圆 M：$(x+1)^2+y^2=1$，圆 N：$(x-1)^2+y^2=9$，动圆 P 与圆 M 外切并且与圆 N 内切，圆心 P 的轨迹为曲线 C.

(1)求 C 的方程；

(2)l 是与圆 P，圆 M 都相切的一条直线，l 与曲线 C 交于 A，B 两点，当圆 P 的半径最长时，求$|AB|$.

解：（1）∵圆 P 与圆 M 外切且与圆 N 内切，

∴$|PM|+|PN|=(R+r_1)+(r_2-R)=r_1+r_2=4$，

由椭圆的定义可知，曲线C是以M，N为左右焦点，场半轴长为2，短半轴长为 $\sqrt{3}$ 的椭圆(左顶点除外)，其方程为

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(x\neq-2)$.

（2）对于曲线C上任意一点 P（x，y），

由于 $|PM|-|PN|=2R-2\leqslant2$，∴$R\leqslant2$，

当且仅当圆P的圆心为（2，0）时，R=2.

∴当圆P的半径最长时，其方程为 $(x-2)^2+y^2=4$，[来源:学&科&网Z&X&X&K]

当 l 的倾斜角为 90^0 时，则 l 与 y 轴重合，可得 $|AB|=2\sqrt{3}$.

当 l 的倾斜角不为 90^0 时，由 $r_1\neq R$ 知 l 不平行 x 轴，设 l 与 x 轴的交点为Q，则 $\frac{|QP|}{|QM|}=\frac{R}{r_1}$，可求得Q（-4，0），∴设 l：$y=k(x+4)$，

由 l 于圆M相切得 $\frac{|3k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$.

当 $k=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时，将 $y=\frac{\sqrt{2}}{4}x+\sqrt{2}$ 代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(x\neq-2)$ 并整理得 $7x^2+8x-8=0$，解得 $x_{1,2}=\frac{-4\pm6\sqrt{2}}{7}$，∴

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\frac{18}{7}$.

当 $k=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时，由图形的对称性可知 $|AB|=\frac{18}{7}$，

综上，$|AB|=\frac{18}{7}$ 或 $|AB|=2\sqrt{3}$.

22.【2013 理Ⅱ·20】平面直角坐标系 xOy 中，过椭圆 $M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 右焦点 F 的直线 $x+y-\sqrt{3}=0$ 交 M 于 A,B 两点，P 为 AB 的中点，且 OP 的斜率为 $\frac{1}{2}$.

（1）求 M 的方程；

（2）C,D 为 M 上的两点，若四边形 $ACBD$ 的对角线 $CD\perp AB$，求四边形 $ACBD$ 面积的最大值.

解：（1）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$，

则 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$，$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1$，

由此可得 $\frac{b^2(x_2+x_1)}{a^2(y_2+y_1)}=-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=1$.

因为 $x_1+x_2=2x_0$，$y_1+y_2=2y_0$，$\frac{y_0}{x_0}=\frac{1}{2}$，所以 $a^2=2b^2$.

又由题意知，M 的右焦点为($\sqrt{3}$，0)，故 $a^2-b^2=3$.

因此 $a^2=6$，$b^2=3$. 所以 M 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

（2）由 $\begin{cases}x+y-\sqrt{3}=0,\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 解析得 $\begin{cases}x=\frac{4\sqrt{3}}{3},\\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0,\\ y=\sqrt{3}.\end{cases}$

因此$|AB|=\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

由题意可设直线 CD 的方程为 $y=x+n$ $(-\frac{5\sqrt{3}}{3}<n<\sqrt{3})$，

设 $C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$.

由 $\begin{cases}y=x+n,\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得 $3x^2+4nx+2n^2-6=0$.

于是 $x_{3,4}=\frac{-2n\pm\sqrt{2(9-n^2)}}{3}$.因为直线 CD 的斜率为 1，所以

$|CD|=\sqrt{2}|x_4-x_3|=\frac{4}{3}\sqrt{9-n^2}$.由已知，四边形 $ACBD$ 的面积

$S=\frac{1}{2}|CD|\cdot|AB|=\frac{8\sqrt{6}}{9}\sqrt{9-n^2}$.当 $n=0$ 时，S 取得最大值，最大值为 $\frac{8\sqrt{6}}{3}$.所以四边形 $ACBD$ 面积的最大值为 $\frac{8\sqrt{6}}{3}$.

23.【2014 理 Ⅱ·20 文 Ⅱ·20】设 F_1，F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的左右焦点，M 是 C 上一点且 MF_2 与 x 轴垂直，直线 MF_1 与 C 的另一个交点为 N.

（1）若直线 MN 的斜率为 $\frac{3}{4}$，求 C 的离心率；

（2）若直线 MN 在 y 轴上的截距为 2，且 $|MN|=5|F_1N|$，求 a, b.

解：（1）由题意得：$F_1(-c,0)$，$M(c,\frac{b^2}{a})$，$\because MN$ 的斜率为 $\frac{3}{4}$，

$\therefore \frac{\frac{b^2}{a}}{2c}=\frac{3}{4}$，又 $a^2=b^2+c^2$，解得 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$ 或 -2（舍），

故直线 MN 的斜率为 $\frac{3}{4}$ 时，C 的离心率为 $\frac{1}{2}$.

（2）由题意知，点 M 在第一象限，$F_1(-c,0)$，$M(c,\frac{b^2}{a})$，

$\therefore$ 直线 MN 的斜率为：$\frac{b^2}{2ac}$，则 MN：$y=\frac{b^2}{2ac}x+2$；

$\because F_1(-c,0)$ 在直线 MN 上，$\therefore 0=\frac{b^2}{2ac}\times(-c)+2$，

得 $b^2=4a\cdots$①，

$\because |MN|=5|F_1N|$，$\therefore |MF_1|=4|F_1N|$，且 $\overrightarrow{MF_1}=(-2c,-\frac{b^2}{a})$，

$\therefore \overrightarrow{F_1N}=(-\frac{c}{2},-\frac{b^2}{4a})$，$\therefore N(-\frac{3c}{2},-\frac{b^2}{4a})$，

又 $\because N(-\frac{3c}{2},-\frac{b^2}{4a})$ 在椭圆 C 上，

$\therefore \frac{\frac{9c^2}{4}}{a^2}+\frac{\frac{b^4}{16a^2}}{b^2}=1\cdots\cdots$②，

联立①、②解得：$a=7$，$b=2\sqrt{7}$.

24.【2014 理 Ⅰ·20】已知点 A（0，-2），椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，F 是椭圆的焦点，直线 AF 的斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，O 为坐标原点.

(1)求 E 的方程；(2)设过点 A 的直线 l 与 E 相交于 P,Q 两点，当 ΔOPQ 的面积最大时，求 l 的方程.

解:(1) 设 $F\left(c,0\right)$，由条件知 $\frac{2}{c}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，得 $c=\sqrt{3}$，又 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 a=2，$b^2=a^2-c^2=1$，故 E 的方程 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）依题意当 $l\perp x$ 轴不合题意，故设直线 l：$y=kx-2$，

设 $P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$

将 $y=kx-2$ 代入 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，

得 $\left(1+4k^2\right)x^2-16kx+12=0$，

当 $\Delta=16(4k^2-3)>0$，即 $k^2>\frac{3}{4}$ 时，$x_{1,2}=\frac{8k\pm2\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}$

从而 $|PQ|=\sqrt{k^2+1}|x_1-x_2|=\frac{4\sqrt{k^2+1}\bullet\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}$，

又点 O 到直线 PQ 的距离 $d=\frac{2}{\sqrt{k^2+1}}$，

所以 Δ OPQ 的面积 $S_{\Delta OPQ}=\frac{1}{2}d|PQ|=\frac{4\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}$，

设 $\sqrt{4k^2-3}=t$，则 $t>0$，$S_{\Delta OPQ}=\frac{4t}{t^2+4}=\frac{4}{t+\frac{4}{t}}\le1$，

当且仅当 $t=2$，$k=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$ 等号成立，且满足 $\Delta>0$，

所以当 Δ OPQ 的面积最大时，l 的方程为：$y=\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$ 或 $y=-\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$.

25.【2015 理 Ⅱ·20】已知椭圆 C：$9x^2+y^2=m^2\,(m>0)$，直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴，l 与 C 有两个交点 A，B，线段 AB 的中点为 M.

（1）证明：直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值；

（2）若 l 过点 $(\frac{m}{3},m)$，延长线段 OM 与 C 交于点 P，四边形 $OAPB$ 能否平行四边形？若能，求此时 l 的斜率；若不能，说明理由.

解：（1）设直线 $l:y=kx+b(k\ne0,b\ne0)$，

$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),M(x_M,y_M)$，将 $y=kx+b$ 代入 $9x^2+y^2=m^2$ 得 $(k^2+9)x^2+2kbx+b^2-m^2=0$，

故 $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-kb}{k^2+9}$，$y_M=kx_M+b=\frac{9b}{k^2+9}$.

于是直线 OM 的斜率 $k_{OM}=\frac{y_M}{x_M}=-\frac{9}{k}$，即 $k_{OM}\cdot k=-9$，

所以直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值.

（2）四边形 $OAPB$ 能为平行四边形，因为直线 l 过点 $(\frac{m}{3},m)$，

所以 l 不过原点且与 C 有两个交点的充要条件是 $k>0,k\ne3$，

由（1）得 OM 的方程为 $y=-\frac{9}{k}x$.

设点 P 的横坐标为 x_P，由 $\begin{cases}y=-\frac{9}{k}x\\9x^2+y^2=m^2\end{cases}$，

得 $x_P^2=\frac{k^2m^2}{9k^2+81}$，即 $x_P=\frac{\pm km}{3\sqrt{k^2+9}}$，

将点 $(\frac{m}{3},m)$ 的坐标代入 l 的方程得 $b=\frac{m(3-k)}{3}$，

因此 $x_M=\frac{k(k-3)m}{3(k^2+9)}$.

四边形 $OAPB$ 为平行四边形当且仅当线段 AB 与线段 OP 互相平分，即 $x_P=2x_M$，于是 $\frac{\pm km}{3\sqrt{k^2+9}}=2\times\frac{k(k-3)m}{3(k^2+9)}$，

解得 $k_1=4-\sqrt{7},k_2=4+\sqrt{7}$，因为 $k_i>0,k_i\ne3,i=1,2$，

所以当 l 的斜率为 $4-\sqrt{7}$ 或 $4+\sqrt{7}$ 时，四边形 $OAPB$ 为平行四边形.

26.【2015 文Ⅱ·20】已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，点（2，$\sqrt{2}$）在 C 上.

（1）求 C 的方程；

（2）直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴，l 与 C 有两个交点 A、B，线段 AB 的中点为 M，证明：直线 OM 的斜率与直线 l 的斜率的乘积为定值.

解：（1）由题意有 $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{4}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1$，

解得 $a^2=8,b^2=4$. 所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

（2）设直线 $l: y=kx+b(k\neq 0,b\neq 0)$，

$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),M(x_M,y_M)$.

将 $y=kx+b$ 代入 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 得

$(2k^2+1)x^2+4kbx+2b^2-8=0$，

故 $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-2kb}{2k^2+1},y_M=kx_M+b=\frac{b}{2k^2+1}$，

于是直线 OM 的斜率 $k_{OM}=\frac{y_M}{x_M}=-\frac{1}{2k}$，

即 $k_{OM}\cdot k=-\frac{1}{2}$，所以直线 OM 的斜率与直线 l 的斜率的乘积为定值.

27.【2016 理Ⅰ·20】设圆 $x^2+y^2+2x-15=0$ 的圆心为 A，直线 l 过点 $B(1,0)$ 且与 x 轴不重合，l 交圆 A 于 C,D 两点，过 B 作 AC 的平行线交 AD 于点 E.

（1）证明 $|EA|+|EB|$ 为定值，并写出点 E 的轨迹方程；

（2）设点 E 的轨迹为曲线 C_1，直线 l 交 C_1 于 M,N 两点，过 B 且与 l 垂直的直线与圆 A 交于 P,Q 两点，求四边形 $MPNQ$ 面积的取值范围.

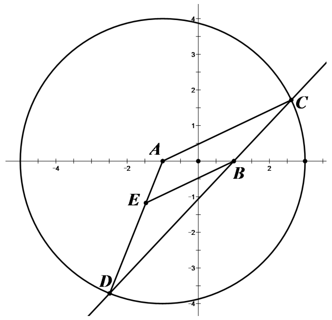
解：(1) 圆 A 整理为 $(x+1)^2+y^2=16$，A 坐标 $(-1,0)$，如图，

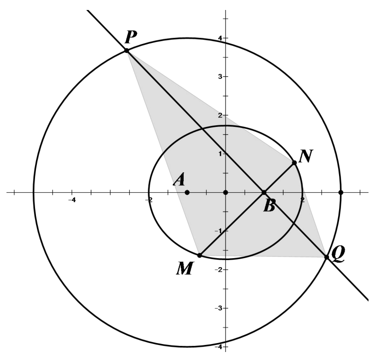
$\because BE/\!/AC$，则 $\angle C=\angle EBD$，由 $AC=AD$，则 $\angle D=\angle C$，

$\therefore \angle EBD=\angle D$，则 $EB=ED$，

$\therefore AE+EB=AE+ED=AD=4>|AB|$

根据椭圆定义为一个椭圆，方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，($y\neq 0$)；





(2) $C_1: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；设 $l: x=my+1$，因为 $PQ\perp l$，

设 $PQ: y=-m(x-1)$，$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases} x=my+1 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 可得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，则

$y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4},y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$，

$|MN|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=\sqrt{1+m^2}\,\frac{\sqrt{36m^2+36(3m^2+4)}}{3m^2+4}=\frac{12(m^2+1)}{3m^2+4}$

圆心 A 到 PQ 距离 $d=\frac{|-m(-1-1)|}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{|2m|}{\sqrt{1+m^2}}$，

所以 $|PQ|=2\sqrt{|AQ|^2-d^2}=2\sqrt{16-\frac{4m^2}{1+m^2}}=\frac{4\sqrt{3m^2+4}}{\sqrt{1+m^2}}$，

$\therefore S_{MPNQ}=\frac{1}{2}|MN|\cdot|PQ|=\frac{1}{2}\cdot\frac{12(m^2+1)}{3m^2+4}\cdot\frac{4\sqrt{3m^2+4}}{\sqrt{1+m^2}}$

$=\frac{24\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{3m^2+4}}=24\sqrt{\frac{1}{3+\frac{1}{m^2+1}}}\in[12,8\sqrt{3})$

即四边形 $MPNQ$ 面积的取值范围为 $[12,8\sqrt{3})$.

28.【2016 文Ⅱ·21】已知 A 是椭圆 E: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左顶点，斜率为 k (k>0)的直线交 E 于 A,M 两点，点 N 在 E 上，$MA\perp NA$.

（Ⅰ）当$|AM|=|AN|$时，求△AMN 的面积；

（Ⅱ）当 $2|AM|=|AN|$时，证明：$\sqrt{3}<k<2$.

解：（Ⅰ）设 $M(x_1,y_1)$，则由题意知 $y_1>0$.

由已知及椭圆的对称性知，直线 AM 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$，

又 $A(-2,0)$，因此直线 AM 的方程为 $y=x+2$.

将 $x=y-2$ 代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 得 $7y^2-12y=0$，

解得 $y=0$ 或 $y=\frac{12}{7}$，所以 $y_1=\frac{12}{7}$.

因此 ΔAMN 的面积 $S_{\Delta AMN}=2\times\frac{1}{2}\times\frac{12}{7}\times\frac{12}{7}=\frac{144}{49}$.

（Ⅱ）将直线 AM 的方程 $y=k(x+2)(k>0)$ 代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

得 $(3+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-12=0$.

由 $x_1\cdot(-2)=\frac{16k^2-12}{3+4k^2}$ 得 $x_1=\frac{2(3-4k^2)}{3+4k^2}$，

故 $|AM|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1+2|=\frac{12\sqrt{1+k^2}}{3+4k^2}$.

由题设，直线 AN 的方程为 $y=-\frac{1}{k}(x+2)$，故同理可得

$|AN|=\frac{12k\sqrt{1+k^2}}{4+3k^2}$.

由 $2|AM|=|AN|$ 得 $\frac{2}{3+4k^2}=\frac{k}{4+3k^2}$，

即 $4k^3-6k^2+3k-8=0$.

设 $f(t)=4t^3-6t^2+3t-8$，则 k 是 $f(t)$ 的零点，

$f'(t)=12t^2-12t+3=3(2t-1)^2\geq 0$，所以 $f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

又 $f(\sqrt{3})=15\sqrt{3}-26<0, f(2)=6>0$，因此 $f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 有唯一的零点，且零点 k 在 $(\sqrt{3},2)$ 内，所以 $\sqrt{3}<k<2$.

29.【2016 理Ⅱ·20】已知椭圆 $E:\frac{x^2}{t}+\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点在 x 轴上，A 是 E 的左顶点，斜率为 k ($k>0$)的直线交 E 于 A，M 两点，点 N 在 E 上，$MA\perp NA$.

（Ⅰ）当 $t=4$，$|AM|=|AN|$时，求△AMN 的面积；

（Ⅱ）当 $2|AM|=|AN|$时，求 k 的取值范围.

解：(1)当 $t=4$ 时，椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，$A$ 点坐标为 $(-2,0)$，则直线 AM 的方程为 $y=k(x+2)$. 联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ y=k(x+2)\end{cases}$ 并整理得，$(3+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-12=0$，

解得 $x=-2$ 或 $x=-\frac{8k^2-6}{3+4k^2}$，

则 $|AM|=\sqrt{1+k^2}\left|-\frac{8k^2-6}{3+4k^2}+2\right|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{12}{3+4k^2}$，

因为 $AM\perp AN$，所以

$|AN|=\sqrt{1+\left(-\frac{1}{k}\right)^2}\cdot\frac{12}{3+4\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right)^2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{12}{3|k|+\frac{4}{|k|}}$，

因为 $|AM|=|AN|$，$k>0$，

所以 $\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{12}{3+4k^2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{12}{3k+\frac{4}{k}}$，整理得

$(k-1)(4k^2-k+4)=0$，因为 $4k^2-k+4=0$ 无实根，所以 $k=1$.

所以△AMN 的面积为 $\frac{1}{2}|AM|^2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+1}\cdot\frac{12}{3+4}\right)^2=\frac{144}{49}$.

(2)直线 AM 的方程为 $y=k(x+\sqrt{t})$，联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{t}+\frac{y^2}{3}=1\\ y=k(x+\sqrt{t})\end{cases}$ 并整理得，$(3+tk^2)x^2+2t\sqrt{t}k^2x+t^2k^2-3t=0$，

解得 $x=-\sqrt{t}$ 或 $x=-\frac{t\sqrt{t}k^2-3\sqrt{t}}{3+tk^2}$，

所以 $|AM|=\sqrt{1+k^2}\left|-\frac{t\sqrt{t}k^2-3\sqrt{t}}{3+tk^2}+\sqrt{t}\right|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{6\sqrt{t}}{3+tk^2}$，

所以 $|AN|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{6\sqrt{t}}{3k+\frac{t}{k}}$，因为 $2|AM|=|AN|$，

所以 $2\cdot\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{6\sqrt{t}}{3+tk^2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{6\sqrt{t}}{3k+\frac{t}{k}}$，

整理得 $t=\frac{6k^2-3k}{k^3-2}$.

因为椭圆 E 的焦点在 x 轴，所以 $t>3$，即 $\frac{6k^2-3k}{k^3-2}>3$，

整理得 $\frac{(k^2+1)(k-2)}{k^3-2}<0$，解得 $\sqrt[3]{2}<k<2$.

30.【2017 理Ⅱ·20 文Ⅱ·20】设 O 为坐标原点，动点 M 在椭圆 C: $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上，过 M 作 x 轴的垂线，垂足为 N，点 P 满足 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.

（1）求点 P 的轨迹方程；

（2）设点 Q 在直线 $x=-3$ 上，且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$．证明：过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

解：（1）相关点法求轨迹：设 $M(x_0,y_0)$，$N(x_0,0)$，$P(x,y)$，

则：$\overrightarrow{NP}=(x-x_0,y)$，$\overrightarrow{NM}=(0,y_0)$．又 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$，

所以：$(x-x_0,y)=\sqrt{2}(0,y_0)$，则：$x=x_0,y=\sqrt{2}y_0$.

又 $M(x_0,y_0)$ 在椭圆 C 上，所以：$\frac{{x_0}^2}{2}+{y_0}^2=1$，

所以：$x^2+y^2=2$.

（2）设 $P(x_1,y_1)$，$Q(-3,y_2)$，$F(-1,0)$，

则 $\overrightarrow{OP}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{OQ}=(-3,y_2)$，$\overrightarrow{PQ}=(-3-x_1,y_2-y_1)$，

$\overrightarrow{PF}=(-1-x_1,-y_1)$．又 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$，

所以：$(x_1,y_1)\cdot(-3-x_1,y_2-y_1)=-3x_1-{x_1}^2+y_1y_2-{y_1}^2=1$.

又 $P(x_1,y_1)$ 在 $x^2+y^2=2$ 上，所以：$3x_1-y_1y_2=-3$.

又 $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{OQ}=(-1-x_1,-y_1)\cdot(-3,y_2)=3+3x_1-y_1y_2=0$.

所以：$\overrightarrow{PF}\perp\overrightarrow{OQ}$，即过 P 垂直于 OQ 的直线 l 过椭圆 C 的左焦点 F。

31.【2017 理Ⅰ·20】

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），四点 P_1（1,1），P_2（0,1），P_3（–1，$\frac{\sqrt{3}}{2}$），P_4（1，$\frac{\sqrt{3}}{2}$）中恰有三点在椭圆 C 上.

（1）求 C 的方程；

（2）设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A，B 两点.若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为–1，证明：l 过定点.

解：（1）根据椭圆对称性，必过 P_3、P_4，又 P_4 横坐标为 1，椭圆必不过 P_1，所以过 P_2，P_3，P_4 三点，将 $P_2(0,1)$，$P_3\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 代入椭圆方程得：$\begin{cases}\frac{1}{b^2}=1\\ \frac{1}{a^2}+\frac{\frac{3}{4}}{b^2}=1\end{cases}$，

解得 $a^2=4$，$b^2=1$，

∴椭圆 C 的方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）①当斜率不存在时，

设 $l:x=m$，$A(m,y_A)$，$B(m,-y_A)$，

$k_{P_2A}+k_{P_2B}=\frac{y_A-1}{m}+\frac{-y_A-1}{m}=\frac{-2}{m}=-1$，得 $m=2$，

此时 l 过椭圆右顶点，不存在两个交点，故不满足.

②当斜率存在时，设 $l:y=kx+b(b\neq1)$，

$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}y=kx+b\\ x^2+4y^2-4=0\end{cases}$，整理得

$(1+4k^2)x^2+8kbx+4b^2-4=0$，

$x_1+x_2=\frac{-8kb}{1+4k^2}$，$x_1\cdot x_2=\frac{4b^2-4}{1+4k^2}$，则

$k_{P_2A}+k_{P_2B}=\frac{y_1-1}{x_1}+\frac{y_2-1}{x_2}=\frac{x_2(kx_1+b)-x_2+x_1(kx_2+b)-x_1}{x_1x_2}$

$=\frac{\frac{8kb^2-8k-8kb^2+8kb}{1+4k^2}}{\frac{4b^2-4}{1+4k^2}}=\frac{8k(b-1)}{4(b+1)(b-1)}=-1$，又 $b\neq1$，

$\Rightarrow b=-2k-1$，此时 $\Delta=-64k$，

存在 k 使得 $\Delta>0$ 成立．∴直线 l 的方程为 $y=kx-2k-1$，

当 $x=2$ 时，$y=-1$，

所以 l 过定点 $(2,-1)$.

【2018 理Ⅰ·19】

设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F，过 F 的直线 l 与 C 交于 A,B 两点，点 M 的坐标为 $(2,0)$.

（1）当 l 与 x 轴垂直时，求直线 AM 的方程；

（2）设 O 为坐标原点，证明：$\angle OMA=\angle OMB$.

解：（1）由已知得 $F(1,0)$，l 的方程为 $x=1$.

由已知可得，点 A 的坐标为 $(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ 或 $(1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$.

所以 AM 的方程为 $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}$ 或 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}$.

……5 分

（2）方法一

当 l 与 x 轴垂直时，由（1）知 $\angle OMA=\angle OMB$，…6 分

当 l 与 x 轴不垂直时，设直线 l 的方程：$y=k(x-1)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，……7 分

把 $y=k(x-1)$ 代入 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$

得 $(2k^2+1)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{2k^2+1}$，…………8 分

直线 MA，MB 的斜率和

$k_{MA}+k_{MB}=\dfrac{y_1}{x_1-2}+\dfrac{y_2}{x_2-2}=\dfrac{k(x_1-1)}{x_1-2}+\dfrac{k(x_2-1)}{x_2-2}$，…………9 分

$=\dfrac{k[2x_1x_2-3(x_1+x_2)+4]}{(x_1-2)(x_2-2)}$，…………10 分

因为 $2x_1x_2-3(x_1+x_2)+4=\dfrac{4k^2-4}{2k^2+1}-\dfrac{12k^2}{2k^2+1}+4$，

$=\dfrac{4k^2-4-12k^2+8k^2+4}{2k^2+1}=0$ ……11 分

即 $k_{MA}+k_{MB}=0$，故 MA，MB 的倾斜角互补，

所以 $\angle OMA=\angle OMB$，

综上所述 $\angle OMA=\angle OMB$. …………12 分

（2）方法二

当 l 与 x 轴重合时，$\angle OMA=\angle OMB=0^0$，……6 分

当 l 与 x 轴不重合时，设直线 l 的方程：$x=my+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，……7 分

把 $x=my+1$ 代入 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$

得 $(m^2+2)y^2+2my-1=0$，

所以 $y_1+y_2=\dfrac{-2m}{m^2+2}$，$y_1y_2=-\dfrac{1}{m^2+2}$，…………8 分

直线 MA，MB 的斜率和

$k_{MA}+k_{MB}=\dfrac{y_1}{x_1-2}+\dfrac{y_2}{x_2-2}=\dfrac{y_1}{my_1-1}+\dfrac{y_2}{my_2-1}$，…………9 分

$=\dfrac{2my_1y_2-(y_1+y_2)}{(my_1-1)(my_2-1)}$，…………10 分

因为 $2mx_1y_2-(y_1+y_2)=-\dfrac{2m}{m^2+2}+\dfrac{2m}{m^2+2}=0$，……11 分

即 $k_{MA}+k_{MB}=0$，故 MA，MB 的倾斜角互补，

所以 $\angle OMA=\angle OMB$，

综上所述 $\angle OMA=\angle OMB$. …………12 分

【2018 理Ⅲ·20 文Ⅲ·20】已知斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 交于 A，B 两点，线段 AB 的中点为 $M(1,m)(m>0)$.

（1）证明：$k<-\dfrac{1}{2}$；

（2）设 F 为 C 的右焦点，P 为 C 上一点，且 $\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\mathbf{0}$. 证明：$|\overrightarrow{FA}|$，$|\overrightarrow{FP}|$，$|\overrightarrow{FB}|$ 成等差数列，并求该数列的公差.

解：（1）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{3}=1,\dfrac{x_2^2}{4}+\dfrac{y_2^2}{3}=1$.

两式相减，得 $\dfrac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{4}+\dfrac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{3}=0$，

即 $\dfrac{x_1+x_2}{4}+\dfrac{y_1+y_2}{3}\cdot\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=0$，

又 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k$，得 $\dfrac{x_1+x_2}{4}+\dfrac{y_1+y_2}{3}\cdot k=0$.

由题设知 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=1,\dfrac{y_1+y_2}{2}=m$，于是 $k=-\dfrac{3}{4m}$.①

由题设得 $0<m<\dfrac{3}{2}$，故 $k<-\dfrac{1}{2}$.

（2）由题意得 $F(1,0)$，设 $P(x_3,y_3)$，则

$(x_3-1,y_3)+(x_1-1,y_1)+(x_2-1,y_2)=(0,0)$.

由（1）及题设得

$x_3=3-(x_1+x_2)=1,y_3=-(y_1+y_2)=-2m<0$.

又点 P 在 C 上，所以 $m=\dfrac{3}{4}$，从而 $P(1,-\dfrac{3}{2})$，$|\overrightarrow{FP}|=\dfrac{3}{2}$.

于是 $|\overrightarrow{FA}|=\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1-1)^2+3(1-\dfrac{x_1^2}{4})}=2-\dfrac{x_1}{2}$.

同理 $|\overrightarrow{FB}|=2-\dfrac{x_2}{2}$.

所以 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=4-\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)=3$.

故 $2|\overrightarrow{FP}|=|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|$，即 $|\overrightarrow{FA}|,|\overrightarrow{FP}|,|\overrightarrow{FB}|$ 成等差数列.

设该数列的公差为 d，则

$2|d|=||\overrightarrow{FB}|-|\overrightarrow{FA}||=\dfrac{1}{2}|x_1-x_2|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$.②

将 $m=\dfrac{3}{4}$ 代入①得 $k=-1$.

所以 l 的方程为 $y=-x+\dfrac{7}{4}$，代入 C 的方程，并整理得

$7x^2-14x+\dfrac{1}{4}=0$. 故 $x_1+x_2=2,x_1x_2=\dfrac{1}{28}$，

代入②解得 $|d|=\dfrac{3\sqrt{21}}{28}$.

所以该数列的公差为 $\dfrac{3\sqrt{21}}{28}$ 或 $-\dfrac{3\sqrt{21}}{28}$.