算法 2 正确性证明

证明. 首先考虑 $k' = k / M$ 的情况，这个时候如果构造出来的 G_w 存在最大流为 k 的解，那么根据定理 2 就可以找到一种可行的分配方案，而且最大执行次数为 k / M，因为任何一种分配方案的最大执行次数都是在 $[k / M, k]$ 中取值的，而 k / M 已经是最小的了，那么这种情况下，最大执行次数的最小值就是 k / M。

如果 $k' = k / M$ 时，如果构造出来的 G_w 不存在存在最大流为 k 的解，依次取 $k / M+1$，$k / M+2...$，假设 q 是第一次满足 q 不存在最大流为 k 的解而 $q+1$ 存在最大流为 k 的解的整数，由定理 1 可知，因为 q 不满足存在最大流为 k 的解，所以最大执行次数大于 q，由于 $q+1$ 存在最大流为 k 的解，这个时候 G_w 中的节点 $Node_j$ 与汇点 E 之间如果不存在存在一条边，它的流量等于最大通量为 $q+1$，那可以边的最大通量收缩为 q，这时候原来最大流为 k 的解仍然成立，与前面的矛盾，因此这样的边必定存在，也就确定了最大执行次数不超过 $q+1$。综合起来可以确定最大操作次数就为 $q+1$。

下面证明这样的 q 只出现一次，采用反证法。如果存在一个 r 使得 $q+1<r\le k$，r 是不存在最大流为 k 的解而 $r+1$ 存在最大流为 k 的解的整数，既然 r 对应的 G_w 不存在最大流为 k 的解，但是 $q+1$ 存在，对于由 $q+1$ 构造出来的 G_w，将节点 $Node_j$ 与汇点 E 之间的最大通量扩容为 r，原来的解仍然成立，因此就导出了矛盾，这样的 r 不存在，则 q 只会出现一次。证明这个的目的是为了在寻找这样 k' 时候可以采用二分查找进行效率的优化。 证毕.

定理 4. 从 $[L_{min}, k+L_{max}]$ 中依次从小到大遍历整数, 对于每次取到的数 k'，如果以 $c_{max}=k'$ 构造出来的 G_w^* 不存在最大流为 $k+\sum_{i=1}^{M} L_i$ 的解，但是以 $c_{max}= k'+1$ 构造出来的 G_w^* 存在最大流为 $k+\sum_{i=1}^{M} L_i$ 的解，那么最大执行次数 k_{max} 的最小值不超过 $k'+1$，而且满足这种情况的 k' 必定存在且只会出现一次。

证明. 先记 $k+\sum_{i=1}^{M} L_i = Sum$。

首先证明这样的 k' 一定存在。当 $k'=L_{min}$ 的时候，这个时候 G_w^* 汇点的流入容量的最大值只有 $ML_{min} < Sum$，这种情况下最大流为 Sum 的问题肯定无解，当 $k' = k+L_{max}$，任何一个节点的流入量都小于 $k+L_{max}$，因此最大流问题必定有解。所以一定能够找到一个 k' 满足要求。

如果能够找到满足要求的 k'，因为以 $c_{max} =k'+1$ 构造出来的 G_w^* 有最大流为 Sum 的解，而且从节点到汇点至少有一条边的流量达到了 $k'+1$，否则由 $c_{max}=k'$ 构造出来的 G_w^* 有最大流也有解。那么由定理 3 可以知道，存在一种对应的分配方案，它的最大操作数 k_{max} 不超过

$k'+1$。

最后证明 k'的唯一性。采用反证法，假设存在另一个整数 r 使得$k'+1<r<k+L_{max}$，有 $c_{max}=r$ 构造出来的G_w^*不存在最大流为 *Sum* 的解，但是以$c_{max}=r+1$构造出来的G_w^*存在最大流为 *Sum* 的解，那么因为 $k'+1$ 存在解，如果将 $k'+1$ 放宽到 r 的话原来的解也成立，因此有了矛盾。所以 k'是唯一的。 证毕.