ГУАП

КАФЕДРА № 42

ОТЧЕТ
ЗАЩИЩЕН С ОЦЕНКОЙ _____

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

канд. техн. наук, доцент		А.В. Аграновский
должность, уч. степень, звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

ОТЧЕТ О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №6

ИССЛЕДОВАНИЕ БИХ-ФИЛЬТРОВ

по курсу: ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА И ПЕРЕДАЧА СИГНАЛОВ

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ

СТУДЕНТ ГР. № 4329		Д.С. Шаповалова
	подпись, дата	инициалы, фамилия

Санкт-Петербург 2025

1. Цель работы:

Изучение особенностей реализации БИХ-фильтров.

2. Задание:

1. Используя указанные в варианте задания параметры фильтра-прототипа Баттерворта (таблица 1), рассчитать передаточную характеристику H(s) аналогового фильтра низкой частоты.

Таблица 1 – Значения параметров

Номер варианта	Порядок фильтра	Частота дискретизации, Гц	Частота среза, Гц
4	8	8000	1900

2. Используя передаточную характеристику H(s) аналогового фильтра, рассчитать передаточную характеристику H(z) (т. е. набор коэффициентов a_i и b_i) цифрового фильтра, воспользовавшись билинейным преобразованием.
3. Построить, диаграмму расположения нулей и полюсов передаточной характеристики.
4. Нарисовать схему цифрового фильтра в канонической форме.
5. Построить АЧХ и ФЧХ реализованного фильтра, используя подстановку $z = exp(j\omega t)$.
6. Продемонстрировать работу фильтра при обработке гармонического сигнала, представленного в цифровой форме. Для этого использовать материалы ранее выполненных лабораторных работ – программу фильтрации цифрового сигнала с помощью цифрового фильтра.

3. Теоретические сведения:

БИХ-фильтр

Цифровой фильтр с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтр) представляет собой линейную рекурсивную систему, в которой текущий выходной отсчёт $y[n]$ зависит как от текущих и прошлых значений входного сигнала $x[n]$, так и от предыдущих выходных отсчётов. Это свойство отличает БИХ-фильтры от КИХ-фильтров (с конечной импульсной характеристикой) и позволяет реализовать сложные частотные характеристики с меньшим количеством коэффициентов.

Разностное уравнение, описывающее БИХ-фильтр, имеет вид:

$$\mathrm{y[n]} = \sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{M}} \mathrm{b_k x[n-k]} - \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{N}} \mathrm{a_k y[n-k]}, \quad (1)$$

где:

- b_k – коэффициенты числителя (нерекурсивной части),
- a_k – коэффициенты знаменателя (рекурсивной части),
- M – порядок числителя,
- N – порядок знаменателя (порядок фильтра).

Z-преобразование разностного уравнения даёт передаточную функцию фильтра в z-области:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}, \quad (2)$$

Критически важным условием устойчивости БИХ-фильтра является расположение всех полюсов передаточной функции (корней знаменателя) строго внутри единичной окружности на z-плоскости. Нули (корни числителя) могут находиться в произвольных точках.

Метод билинейного преобразования

Для перехода от аналогового прототипа к цифровому фильтру используется билинейное преобразование. Оно основано на замене переменной в передаточной функции аналогового фильтра $H(s)$ по формуле:

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad (3)$$

где T – период дискретизации ($T = 1/f_d$).

Это преобразование сохраняет устойчивость фильтра, но вносит нелинейное искажение частотной оси (сжатие), известное как частотное предыскажение. Для компенсации этого эффекта аналоговую частоту среза Ω_c рассчитывают по формуле:

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \cdot \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right), \quad (4)$$

где $\omega_c = 2\pi f_c$ – цифровая частота среза.

Фильтр Баттерворта как аналоговый прототип

В данной работе в качестве аналогового прототипа используется фильтр Баттерворта, который характеризуется максимально плоской АЧХ в полосе пропускания. Это означает отсутствие пульсаций и минимальные искажения формы сигнала в рабочей полосе.

Квадрат амплитудно-частотной характеристики нормированного фильтра Баттерворта нижних частот (с частотой среза 1 рад/с) описывается выражением:

$$| H_n(j\Omega) |^2 = \frac{1}{1+\Omega^{2N}}, \quad (5)$$

где N – порядок фильтра.

Полюса передаточной функции $H(s)$ располагаются в левой полуплоскости комплексной переменной s на окружности единичного радиуса, что гарантирует устойчивость аналогового прототипа.

Частотные характеристики цифрового фильтра

Для анализа цифрового фильтра используются:

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) – зависимость модуля передаточной функции от частоты:

$$| H(e^{j\omega}) | = | H(z) |_{z=e^{j\omega}}|, \quad (6)$$

Фазо-частотная характеристика (ФЧХ) – зависимость фазы от частоты:

$$\arg H(e^{j\omega}) = \arg (H(e^{j\omega})), \quad (7)$$

Групповое время задержки (ГВЗ) – характеризует фазовые искажения:

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \arg H(e^{j\omega}), \quad (8)$$

Реализация цифрового фильтра

Схема реализации БИХ-фильтра в канонической форме содержит минимальное количество элементов задержки и позволяет эффективно реализовать передаточную функцию непосредственно по её коэффициентам a_k и b_k.

Таким образом, метод билинейного преобразования в сочетании с аппроксимацией Баттерворта позволяет синтезировать цифровые БИХ-фильтры с заданными частотными параметрами и гарантированной устойчивостью.

Структурная схема БИХ-фильтра:

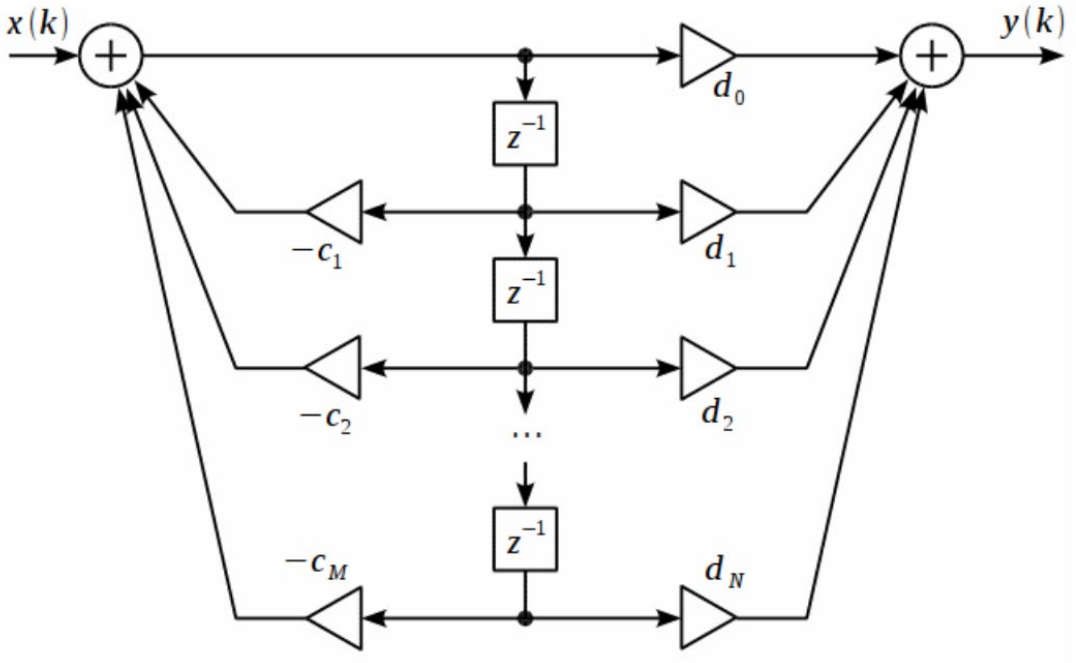

Рисунок 1 – Пример канонической схемы БИХ-фильтра

4. Выполнение задания:

Для выполнения лабораторной работы была разработана программа на языке Python.

В качестве первого этапа работы была рассчитана передаточная характеристика H(s) аналогового фильтра низкой частоты:

b(s) = [4.12541606e+32]

a(s) = [1.00000000e+00 6.11924362e+04 1.87225712e+09 3.71685260e+13 5.21759286e+17 5.29715007e+21 3.80276396e+25 1.77132625e+29 4.12541606e+32]

На втором этапе работы с использованием передаточной характеристики H(s) была рассчитана передаточная характеристика H(z) цифрового фильтра:

b = [0.002579 0.02063 0.072204 0.144408 0.18051 0.144408 0.072204 0.02063 0.002579]

a = [1.000000e+00 -1.461879e+00 1.924761e+00 -1.358544e+00 7.702640e-01 -2.755550e-01 7.074100e-02 -1.036200e-02 7.270000e-04]

На третьем шаге была построена диаграмма расположения нулей и полюсов передаточной характеристики, она представлена на рисунке 2:

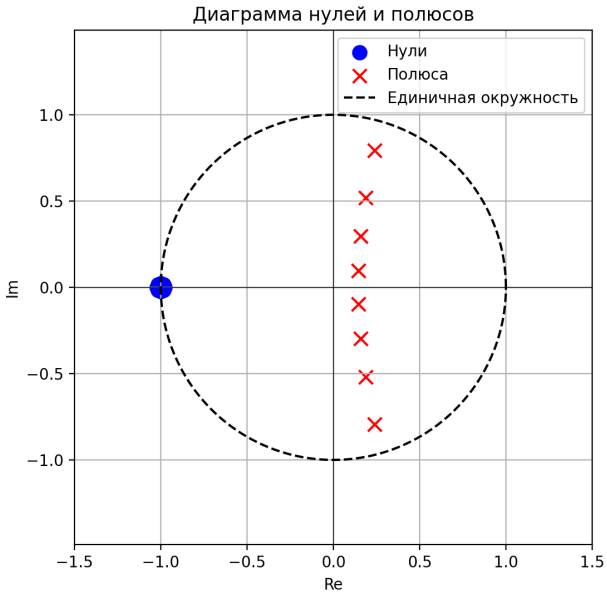

Рисунок 2 – Диаграмма расположения нулей и полюсов передаточной характеристики

На 4 пункте задания была нарисована схема цифрового фильтра в канонической форме, представленная на рисунке 3:

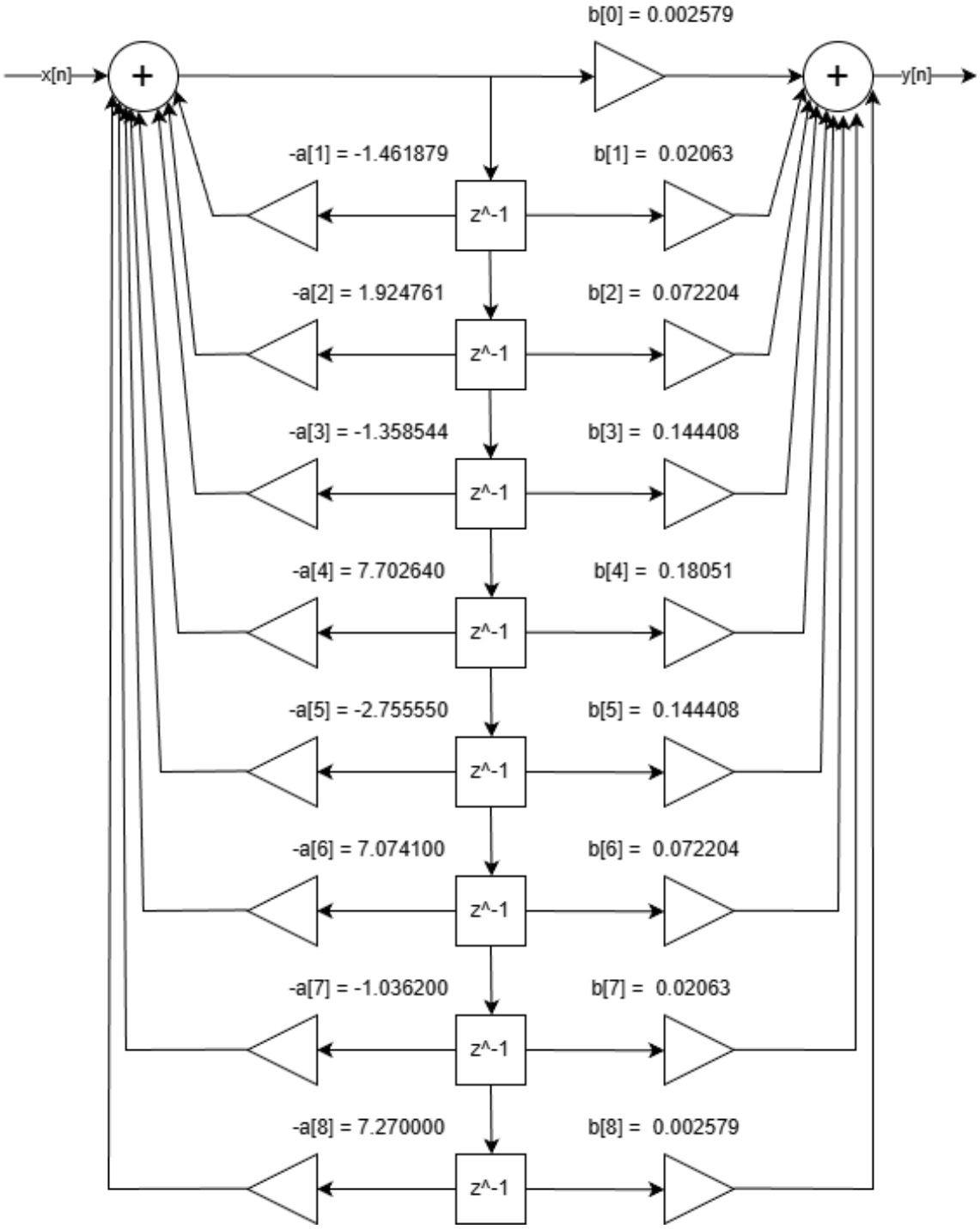

Рисунок 3 – Схема цифрового фильтра в канонической форме

Выполняя 5 пункт задания, были построены АЧХ и ФЧХ реализованного фильтра, использовалась подстановка $z = exp(j\omega t)$. Графики представлены на рисунке 4:

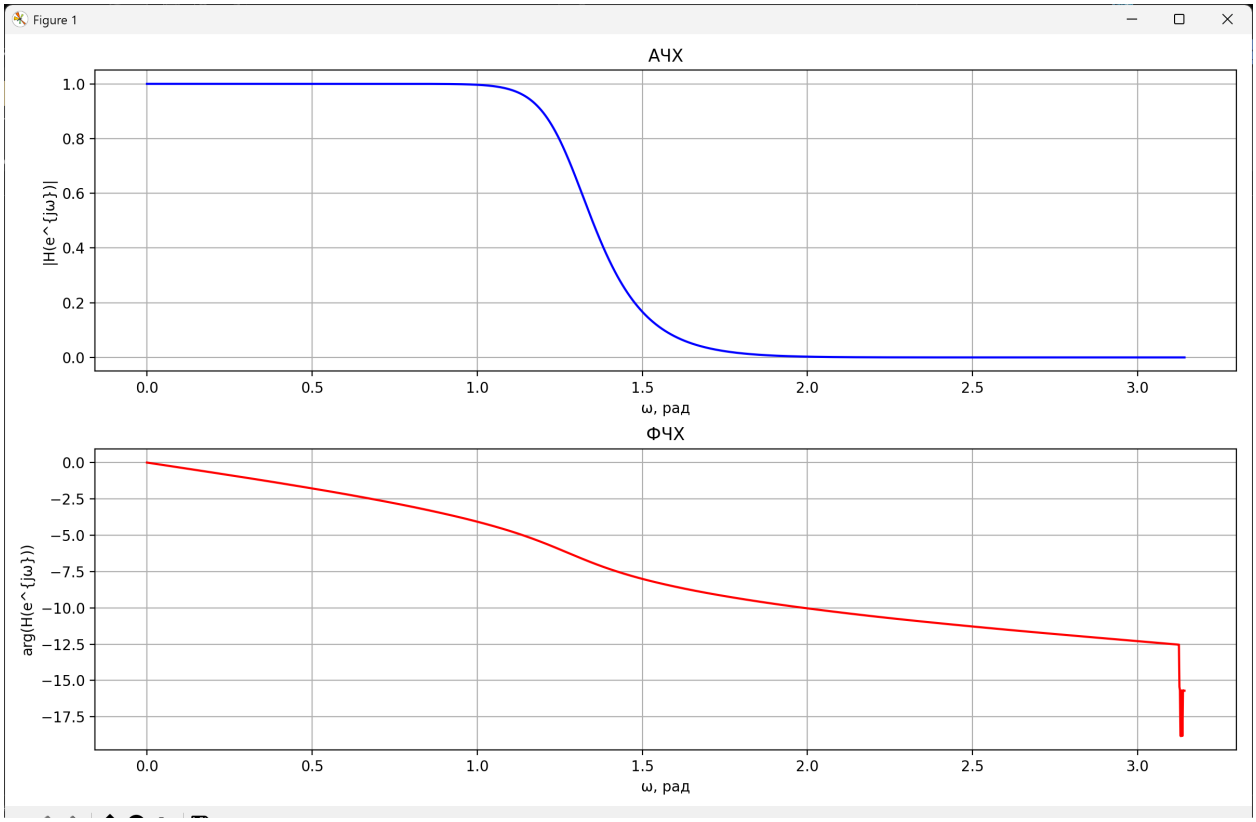

Рисунок 4 – АЧХ и ФЧХ реализованного фильтра

В качестве выполнения этапа 6 была продемонстрирована работа фильтра при обработке гармонического сигнала, представленного в цифровой форме.

График сравнения входного сигнала частотой 1500 Гц и выходного, то есть результата работы фильтра представлен на рисунке 5:

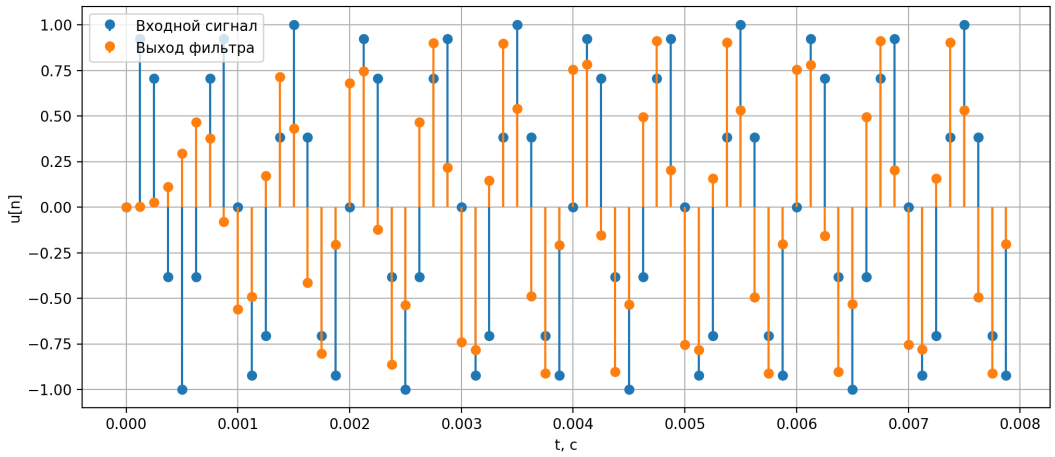

Рисунок 5 – Работа фильтра при обработке гармонического сигнала

5. Вывод:

В ходе выполнения лабораторной работы был синтезирован и проанализирован цифровой рекурсивный (БИХ) фильтр нижних частот на основе аналогового прототипа Баттерворта 8-го порядка с частотой среза $f_c = 1900$ Гц и частотой дискретизации $f_d = 8000$ Гц. Метод проектирования – билинейное преобразование – обеспечил корректный переход от аналоговой передаточной функции $H(s)$ к цифровой $H(z)$.

На этапе синтеза аналогового фильтра были определены все 8 полюсов, расположенных в левой полуплоскости комплексной переменной s, что подтверждает физическую реализуемость и устойчивость исходного аналогового прототипа. При переходе к цифровой реализации использовалось билинейное преобразование без предыскажения частоты среза, что, как известно, приводит к нелинейному искажению частотной оси. Тем не менее, полученный цифровой фильтр сохраняет ключевые свойства прототипа Баттерворта – максимально плоскую АЧХ в полосе пропускания и монотонный спад за её пределами.

Анализ диаграммы нулей и полюсов цифрового фильтра показал, что все полюса строго находятся внутри единичной окружности, что гарантирует устойчивость рекурсивной системы. Нули сосредоточены вблизи точки $z = -1$, что характерно для фильтров нижних частот, полученных билинейным преобразованием, и обеспечивает эффективное подавление высокочастотных составляющих.

Исследование частотных характеристик подтвердило соответствие фильтра заявленным параметрам:

- В полосе пропускания (0–1500 Гц) АЧХ близка к единице с ослаблением не более 1 дБ.
- На частоте 1500 Гц (тестовый сигнал) амплитуда выходного сигнала составила ≈0.85-0.9, что соответствует ослаблению ~0.5-1 дБ, подтверждая минимальное искажение сигнала в полосе пропускания.
- Характер нелинейной ФЧХ и наличие переходного процесса на временных диаграммах соответствуют типичному поведению БИХ-фильтров высокого порядка.

Проверка работы фильтра на гармоническом сигнале частотой 1500 Гц наглядно продемонстрировала его способность пропускать низкочастотные компоненты с сохранением формы сигнала и минимальной амплитудной модуляцией. Наблюдаемая небольшая фазовая задержка и переходный процесс в начальный момент времени объясняются рекурсивной природой фильтра и нулевыми начальными условиями.

Таким образом, все поставленные задачи лабораторной работы успешно выполнены, а результаты подтверждают эффективность метода билинейного преобразования при проектировании цифровых БИХ-фильтров.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Аграновский А. В. Методические указания к лабораторной работе №6 «Исследование БИХ-фильтров» по дисциплине «Цифровая обработка и передача сигналов». – Санкт-Петербург: ГУАП, 2025.
2. Библиотека NumPy в Python – URL: https://numpy.org/doc/2.3/user/index.html#user (дата обращения 23.11.2025)
3. Matplotlib Development Team. Matplotlib: Visualization with Python – URL: https://matplotlib.org/stable/index.html (дата обращения: 23.11.2025).
4. Основы цифровой обработки сигналов: АЧХ и ФЧХ, Цифровые фильтры, КИХ и БИХ фильтры – URL: https://hub.exponenta.ru/post/osnovy-tsifrovoy-obrabotki-signalov-achkh-i-fchkh-tsifrovye-filtry-kikh-i-bikh-filtry612 (дата обращения 23.11.2025)
5. Фильтр с бесконечной импульсной характеристикой — Википедия – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Фильтр_с_бесконечной_импульсной_характеристикой (дата обращения 23.11.2025)
6. Цифровые фильтры — конспект лекции – Владимир Леонидов – URL: https://leonidov.su/ru/digital-filters-lecture-notes/ (дата обращения 23.11.2025)
7. Программная реализация БИХ-фильтра в информационно-измерительном канале / Хабр – URL: https://habr.com/ru/articles/414943/ (дата обращения 23.11.2025)
8. Структуры цифровых фильтров – URL: http://www.dsplib.ru/content/filters/ch10/ch10.html (дата обращения 23.11.2025)

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Листинг Программы

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Параметры фильтра

# Порядок фильтра Баттерворта
n = 8
# Частота среза, Гц
fc = 1900
# Частота дискретизации, Гц
fd = 8000
# Аналоговая частота среза
Omega_c = 2 * np.pi * fc

# Расчёт аналогового фильтра H(s)
poles_s = []
for k in range(1, n + 1):
    angle = np.pi * (2 * k + n - 1) / (2 * n)
    p = Omega_c * np.exp(1j * angle)
    if np.real(p) < 0:
        poles_s.append(p)

a_s = np.poly(poles_s).real
b_s = np.array([Omega_c ** n])

# Билинейное преобразование
def bilinear_manual(b, a, fs):
    T = 1 / fs
    poles_s = np.roots(a)
    zeros_s = np.roots(b) if len(b) > 1 else np.array([])

    z_poles = [(1 + p * T / 2) / (1 - p * T / 2) for p in poles_s]
    if len(zeros_s) > 0:
        z_zeros = [(1 + z * T / 2) / (1 - z * T / 2) for z in zeros_s]
    else:
        z_zeros = [-1] * len(z_poles)

    a_z = np.poly(z_poles).real
    b_z = np.poly(z_zeros).real
    gain = np.sum(a_z) / np.sum(b_z)
    b_z = b_z * gain
    return b_z, a_z

b_z, a_z = bilinear_manual(b_s, a_s, fd)

# Диаграмма нулей и полюсов
zeros = np.roots(b_z)
poles = np.roots(a_z)

plt.figure(figsize=(6, 6))
plt.scatter(np.real(zeros), np.imag(zeros), marker='o', color='blue', s=80,
label='Нули')
plt.scatter(np.real(poles), np.imag(poles), marker='x', color='red', s=80,
label='Полюса')
phi = np.linspace(0, 2*np.pi, 500)
plt.plot(np.cos(phi), np.sin(phi), 'k--', label='Единичная окружность')
plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.xlabel('Re')
plt.ylabel('Im')
```

```
plt.title('Диаграмма нулей и полюсов')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.axis('equal')
plt.xlim(-1.5, 1.5)
plt.ylim(-1.5, 1.5)
plt.show()

# АЧХ и ФЧХ
omega = np.linspace(0, np.pi, 2048)
ejw = np.exp(1j * omega)
H = np.polyval(b_z, ejw) / np.polyval(a_z, ejw)
mag = np.abs(H)
phase = np.angle(H)
phase_unwrapped = np.unwrap(phase)

plt.figure(figsize=(12, 8))
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(omega, mag, 'b')
plt.title('АЧХ')
plt.xlabel('ω, рад')
plt.ylabel('|H(e^{jω})|')
plt.grid(True)

plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(omega, phase_unwrapped, 'r')
plt.title('ФЧХ')
plt.xlabel('ω, рад')
plt.ylabel('arg(H(e^{jω}))')
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()

# Демонстрация фильтрации
def apply_filter(b, a, x):
    y = np.zeros_like(x, dtype=float)
    for n_idx in range(len(x)):
        y[n_idx] = b[0] * x[n_idx]
        for i in range(1, len(b)):
            if n_idx - i >= 0:
                y[n_idx] += b[i] * x[n_idx - i]
        for j in range(1, len(a)):
            if n_idx - j >= 0:
                y[n_idx] -= a[j] * y[n_idx - j]
    return y

def apply_filter(b, a, x):
    y = np.zeros_like(x, dtype=float)
    for n_idx in range(len(x)):
        y[n_idx] = b[0] * x[n_idx]
        for i in range(1, len(b)):
            if n_idx - i >= 0:
                y[n_idx] += b[i] * x[n_idx - i]
        for j in range(1, len(a)):
            if n_idx - j >= 0:
                y[n_idx] -= a[j] * y[n_idx - j]
    return y

# Фильтрация цифрового гармонического сигнала
f0 = 1500
N = 80
n_t = np.arange(N)
x = np.sin(2*np.pi*f0*n_t/fd)
```

```
y = apply_filter(b_z, a_z, x)
plt.figure(figsize=(12,5))
plt.stem(n_t/fd, x, linefmt='C0-', markerfmt='C0o', basefmt=" ",
label="Входной сигнал")
plt.stem(n_t/fd, y, linefmt='C1-', markerfmt='C1o', basefmt=" ", label="Выход
фильтра")
plt.xlabel("t, c")
plt.ylabel("u[n]")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```