

ГУАП

КАФЕДРА № 42

ОТЧЕТ
ЗАЩИЩЕН С ОЦЕНКОЙ _____
ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

канд. техн. наук, доцент

должность, уч. степень, звание

подпись, дата

А.В. Аграновский

инициалы, фамилия

ОТЧЕТ О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №4

РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

по курсу: ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА И ПЕРЕДАЧА СИГНАЛОВ

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ

СТУДЕНТ ГР. № 4329

подпись, дата

Д.С. Шаповалова

инициалы, фамилия

Санкт-Петербург 2025

1. Цель работы:

Изучение разностных уравнений, программирование разностных уравнений.

2. Задание:

Выбранный вариант задания – 5.

Текст задания и числовые значения параметров представлены на рисунках 1.1.1-1.1.3:

2.2.1. Для вариантов 1–3: найдите коэффициенты $\{b_i\}$ и $\{a_i\}$ фильтра, который задан своей передаточной функцией.

$$H(z) = \frac{k(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)}.$$

Таблица 2.1

Числовые значения параметров k, z_1, z_2, p_1 и p_2					
Номер варианта	k	z_1	z_2	p_1	p_2
1	0,09316	-0,99868 +0,05141j	-0,99868 -0,05141j	+0,51743 +0,40197j	+0,51743 -0,40197j
2	0,44405	-0,99992 +0,01297j	-0,99992 -0,01297j	-0,28370 +0,48321j	-0,28370 -0,48321j
3	0,17534	-0,99946 +0,03280j	-0,99946 -0,03280j	+0,28602 +0,48265j	+0,28602 -0,48265j

Для вариантов 4–6: запишите передаточную функцию и найдите нули и полюса фильтра, который задан в виде блок-схемы (рис. 2.11). Значения a_1, a_2, b_0, b_1 и b_2 выберите из табл. 2.2.

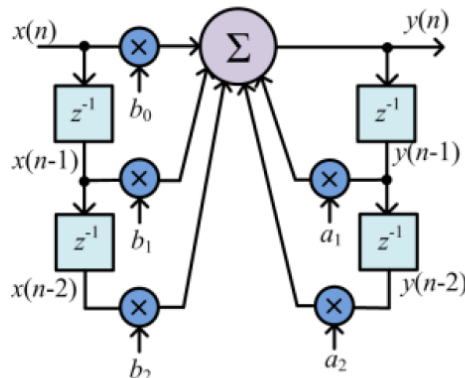


Рис. 2.11. Блок-схема линейной системы второго порядка

Таблица 2.2

Числовые значения параметров a_1, a_2, b_0, b_1 и b_2					
Номер варианта	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2
4	0,22888	2,06144	0,86232	0,19501	1,73566
5	0,06797	1,53449	0,67549	0,05196	1,35097
6	0,09241	1,63060	0,70587	0,07190	1,41295

Рисунок 1.1.1 – Задание, пункт 1.

2.2.2. Напишите функцию, реализующую разностное уравнение (2.1). На вход функции поступают коэффициенты $\{b_i\}$, $\{a_i\}$ и входной сигнал $x[n]$. С помощью написанной функции постройте импульсную характеристику для фильтра из задания 2.2.1.

Рисунок 1.1.2 – Задание, пункт 2.

2.2.3. Определите собственные частоты импульсной характеристики фильтра из задания 2.2.1 (см. формулу (2.3) и пояснение к ней). Найдите коэффициенты α и β из уравнения (2.4) с которыми колебания собственных частот входят в импульсную характеристику. Для этого вычислите $h(n)$ для любых двух значений n (например для $n = 0$ и 1) и составьте систему линейных уравнений относительно неизвестных α и β . Решите эту систему

Используя найденные значения α и β , постройте график $h(n)$ согласно уравнению (2.4) и сравните его с результатом из задания 2.2.2.

2.2.4. Найдите отклик фильтра из задания 2.2.1 при воздействии на вход единичного скачка $x(n) = u(n - n_0)$, $n = 1 \dots N$. Выбрав достаточное значение N , определите, к какому значению сходится выходной сигнал фильтра. Это значение называют устоявшимся режимом фильтра, а переменную часть характеристики – переходной характеристикой. В качестве n_0 возьмите номер своего варианта (т.е. если выполняете вариант №2, то $n_0 = 2$).

2.2.5. Вычислите отклик фильтра на следующие сигналы (таблица 2.3)*.

Таблица 2.3

Сигналы для воздействия на линейную систему

Номер варианта	Задание
1–2	Периодический прямоугольный сигнал с частотой 10 Гц и сигнал такой же формы с частотой 20 Гц. Частота дискретизации сигналов $f_s = 80$ Гц
3–4	Периодический треугольный сигнал с частотой 15 Гц и сигнал такой же формы с частотой 80 Гц. Частота дискретизации сигналов $f_s = 320$ Гц
5	Периодический пилообразный сигнал с частотой 20 Гц и сигнал такой же формы с частотой 110 Гц. Частота дискретизации сигналов $f_s = 440$ Гц
6	Периодический трапециевидный сигнал с частотой 18 Гц и сигнал такой же формы с частотой 130 Гц. Частота дискретизации сигналов $f_s = 520$ Гц

2.2.6. Вычислите частотную характеристику линейной системы из задания 2.2.1 по формуле

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{j\omega k}}{(1 + \sum_{k=1}^M a_k e^{j\omega k})}, \quad \omega \in [0 \dots \pi].$$

Постройте график $A(\omega) = |H(e^{j\omega})|$ и $\varphi(\omega) = \arg H(e^{j\omega})$. Функция $A(\omega)$ – это амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), а $\varphi(\omega)$ – фазо-частотная характеристика (ФЧХ).

2.2.7. Постройте АЧХ и ФЧХ линейной системы из задания 2.2.1

Рисунок 1.1.3 – Задание, пункты 3-7

3. Теоретические сведения:

1. Математический аппарат разностных уравнений

Линейные стационарные дискретные системы описываются разностными уравнениями вида:

$$a_0 y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N a_i y(n-i), \quad (1)$$

Данное уравнение представляет собой дискретный аналог линейного дифференциального уравнения, где последовательности $x(n)$ и $y(n)$ соответствуют входному и выходному сигналам системы. Коэффициенты b_i определяют вклад прямой связи, а a_i - обратной связи системы. Нормировка коэффициента $a_0 = 1$ является общепринятой практикой, что позволяет переписать уравнение в канонической форме:

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N a_i y(n-i), \quad (2)$$

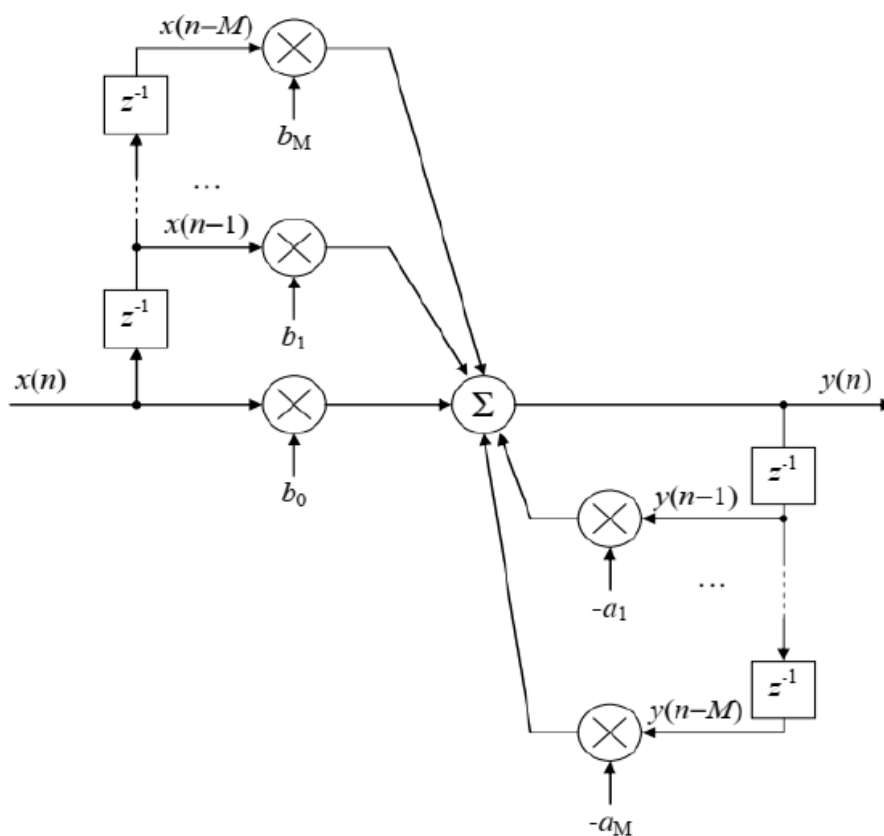


Рисунок 1.2.1 – Схема реализации разностного уравнения

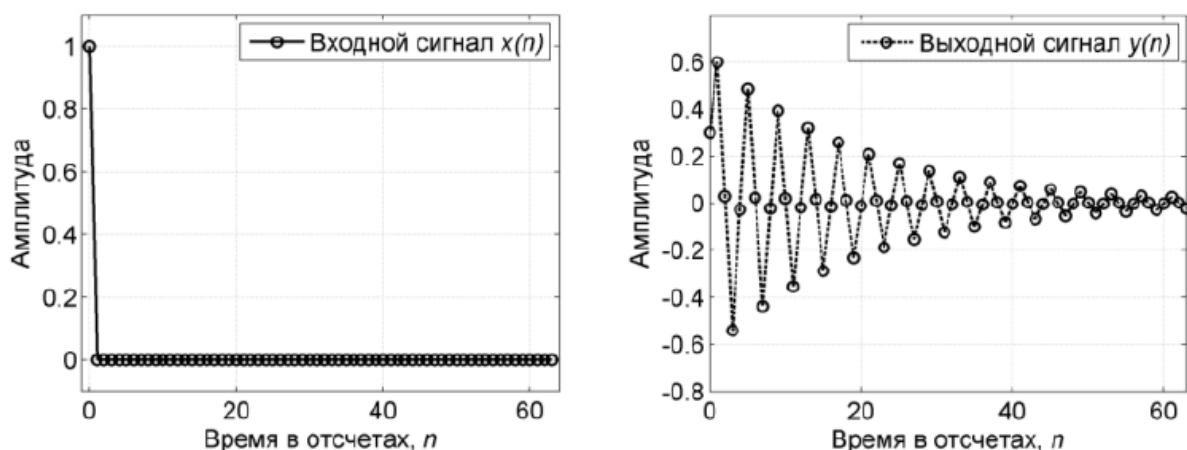


Рисунок 1.2.2 – Работа линейной системы

Импульсная характеристика

Системы, описываемые уравнением (2.1), делят на два класса:

- а) рекурсивные;
- б) нерекурсивные.

В *рекурсивных* системах выход $y[n]$ зависит как от входного сигнала $x[n]$ и его предыстории $x[n-i]$, так и от предыдущих выходных значений $y[n-i]$. В *нерекурсивных* системах выходной сигнал зависит только от входного сигнала и его предыстории. Другими словами, у нерекурсивных систем все коэффициенты a_i (кроме a_0) равны нулю.

Помимо задания коэффициентов $\{b_i\}$ и $\{a_i\}$ в выражении (2.1) линейную систему можно описать посредством ее *импульсной характеристики*. **Импульсная характеристика** – это временной сигнал, который генерирует система при подаче на ее вход дельта-импульса $\delta(n)$. Пример получения импульсной характеристики показан на рис. 2.2. Очевидно, что при подаче дельта-импульса на вход нерекурсивной системы ее выходной сигнал будет иметь конечную длительность, отчего такие системы называются системами с конечной импульсной характеристикой (КИХ). Для рекурсивных систем вследствие наличия обратной связи характерна бесконечная импульсная характеристика (БИХ).

Рисунок 1.3 – Импульсная характеристика

Собственная частота

Известно, что импульсная характеристика линейной системы может содержать колебания нескольких *собственных частот*. Эти собственные частоты определяются коэффициентами обратной связи $\{a_i\}$. Каждый корень характеристического полинома (p_i)

$$A(z) = 1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i} \quad (2.3)$$

дает свой вклад в импульсную характеристику вида $p_i^n u(n)$.

Для разностных уравнений второго порядка характерно наличие двух различных собственных частот. Вследствие чего их импульсная характеристика описывается выражением

$$h(n) = (\alpha p_1^n + \beta p_2^n) u(n). \quad (2.4)$$

Рисунок 1.4 – Собственная частота

Линейная система

Линейная система, описываемая уравнением (2.1), входит в более общий класс систем дискретного времени:

$$y[n] = L[x[n]].$$

Как же отличить линейную систему от любой другой? Существенным признаком линейной системы является выполнение **принципа суперпозиции**:

$$L[a_1x_1[n] + a_2x_2[n]] = a_1L[x_1[n]] + a_2L[x_2[n]].$$

Другое важное свойство линейных систем – это их **инвариантность** к сдвигу. Инвариантность означает, что если сигнал $x[n]$ вызывает отклик $y[n]$, то задержанный сигнал $x[n - k]$ будет вызывать задержанный отклик $y[n - k]$.

Рисунок 1.5 – Линейная система

2. Z-преобразование и передаточная функция

Для перехода в частотную область применяется Z-преобразование, определяемое как:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad (3)$$

Применяя Z-преобразование к разностному уравнению и используя свойство сдвига, получаем передаточную функцию системы:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}, \quad (4)$$

Для системы второго порядка передаточная функция принимает вид:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}, \quad (5)$$

3. Структурная реализация и анализ устойчивости

Цифровая система может быть реализована в прямой форме, где коэффициенты b_i и a_i непосредственно определяют структуру фильтра. Устойчивость системы является фундаментальным свойством, определяемым расположением полюсов передаточной функции. Полюса находятся как корни характеристического уравнения:

$$1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} = 0, \quad (6)$$

Критерий устойчивости формулируется следующим образом: система устойчива тогда и только тогда, когда все полюса передаточной функции лежат внутри единичной окружности на z-плоскости, то есть $|p_i| < 1$ для всех $i = 1, 2, \dots, N$.

Пример 2.3. Определение стабильности системы

Определить стабильность системы с коэффициентами $b_0 = 1$, $b_1 = 1$ и $a_1 = -0,5$ и изобразить схему, реализующую систему.

Вначале построим передаточную функцию согласно формуле (2.9):

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}}. \quad (2.11)$$

Затем преобразуем к виду (2.10):

$$H(z) = \frac{z + 1}{z - 0,5}. \quad (2.12)$$

Диаграмма нулей и полюсов для (2.12) показана на рис.2.9, из которой видно, что единственный полюс рассматриваемой системы $p_1 = 0,5$ лежит внутри единичной окружности и, следовательно, линейная система стабильна.

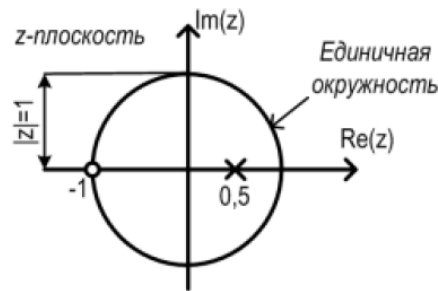


Рис. 2.9. Диаграмма нулей и полюсов

Рисунок 1.6 – Пример определения стабильности системы

4. Частотный анализ и свойства системы

Частотная характеристика системы получается подстановкой $z = e^{j\omega}$ в передаточную функцию:

$$H(e^{j\omega}) = H(z) |_{z=e^{j\omega}} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i e^{-j\omega i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i e^{-j\omega i}}, \quad (7)$$

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) определяется модулем комплексной функции:

$$A(\omega) = |H(e^{j\omega})|, \quad (8)$$

Фазо-частотная характеристика (ФЧХ) представляет собой аргумент:

$$\phi(\omega) = \arg[H(e^{j\omega})], \quad (9)$$

Частотная характеристика линейной системы

Для описания линейных систем в частотной области используется специальный входной сигнал:

$$x(n) = e^{j\omega n}, -\infty < n < \infty. \quad (2.14)$$

Если такая последовательность поступает на вход линейной системы с импульсной характеристикой $h(n)$, то на выходе появится последовательность

$$y(n) = \sum_{m=0}^M h(m) \cdot e^{j\omega(n-m)} = e^{j\omega n} \sum_{m=0}^M h(m) \cdot e^{-j\omega m} = x(n)H(e^{j\omega}).$$

Таким образом, при подаче на вход сигналов вида (2.14) выходной сигнал совпадает со входным с точностью до комплексного множителя $H(e^{j\omega})$. Этот комплексный коэффициент называется *частотной характеристикой системы* и выражается через ее импульсную характеристику следующим образом:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{m=0}^M h(m) \cdot e^{-j\omega m}.$$

Частотная характеристика является периодической функцией ω , причем ее период равен 2π . Эта периодичность связана со спецификой дискретного колебания: входная последовательность с частотой $(\omega + 2m\pi)$ ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$) не отличается от входной последовательности с частотой ω , т.е.

$$\tilde{x}(n) = e^{j(\omega+2m\pi)n} = e^{j\omega n} = x(n).$$

Поскольку $H(e^{j\omega})$ – периодическая функция, то для полного описания достаточно задать ее на любом интервале длиной 2π . Обычно для этой цели используют интервал $0 \leq \omega \leq 2\pi$.

Рисунок 1.7 – Частотная характеристика линейной системы

5. Временные характеристики и анализ откликов

Импульсная характеристика $h(n)$ является фундаментальной характеристикой системы и определяется как обратное Z-преобразование передаточной функции:

$$h(n) = Z^{-1}\{H(z)\}, \quad (10)$$

Для системы с простыми полюсами импульсная характеристика может быть представлена в виде суммы экспоненциальных составляющих:

$$h(n) = \sum_{i=1}^N \alpha_i p_i^n, \quad (11)$$

где коэффициенты α_i находятся из системы уравнений, составленной для начальных значений импульсной характеристики.

Переходная характеристика системы определяется как отклик на единичный скачок:

$$s(n) = \sum_{k=0}^n h(k), \quad (12)$$

6. Практические аспекты реализации и анализа

При программной реализации разностного уравнения используется рекуррентный алгоритм, учитывающий конечное число предыдущих отсчетов. Для анализа устойчивости вычисляются корни характеристического полинома с последующей проверкой их расположения относительно единичной окружности.

Экспериментальное исследование включает:

- Построение импульсной характеристики системы
- Анализ переходных процессов при ступенчатом воздействии
- Исследование реакции на гармонические и полигармонические сигналы
- Построение и анализ амплитудно-фазовых характеристик

4. Выполнение задания:

Пункт 1 – определение коэффициентов фильтра:

Для варианта 5 использовались параметры с рисунка 1.1:

$$a_1 = 0.06797$$

$$a_2 = 1.53449$$

$$b_0 = 0.67549$$

$$b_1 = 0.05196$$

$$b_2 = 1.35097$$

По структурной схеме фильтра второго порядка была составлена передаточная функция: $H(z) = (b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}) / (1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2})$

Вычислены нули и полюса передаточной функции, как корни полиномов числителя и знаменателя передаточной функции, соответственно:

Функция с подставленными параметрами:

$$H(z) = (0.67549z^2 + 0.05196z + 1.35097) / (z^2 + 0.06797z + 1.53449)$$

Нули – это корни уравнения числителя = 0:

$$0.67549z^2 + 0.05196z + 1.35097 = 0$$

$$\text{Нули: } z_1 \approx -0.0385 + 1.4016j, z_2 \approx -0.0385 - 1.4016j$$

Дискриминант $D = b_1^2 - 4b_0b_2 = 0.05196^2 - 4 \times 0.67549 \times 1.35097 \approx -3.65 < 0$, поэтому нули комплексно-сопряженные.

Полюса – это корни уравнения знаменателя = 0:

$$z^2 + 0.06797z + 1.53449 = 0$$

$$\text{Полюса: } p_1 \approx -0.03399 + 1.2387j, p_2 \approx -0.03399 - 1.2387j$$

Дискриминант $D = a_1^2 - 4a_0a_2 = 0.06797^2 - 4 \times 1 \times 1.53449 \approx -6.13 < 0$, поэтому полюса также комплексно-сопряженные.

Проведен анализ устойчивости:

$$|p_1| = |p_2| \approx 1.239 > 1$$

Вывод: фильтр неустойчив

Пункт 2 – реализация разностного уравнения и импульсная характеристика:

Была написана функция, реализующая разностное уравнение, и построена импульсная характеристика, представленная на рисунке 2.1:

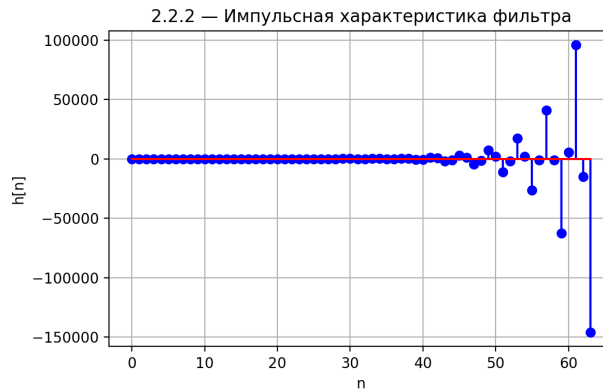


Рисунок 2.1 – Импульсная характеристика фильтра

На вход реализованной функции поступают коэффициенты b_i, a_i и входной сигнал $x[n]$, представляющий собой единичный импульс.

В итоге получена расходящаяся импульсная характеристика, подтверждающая неустойчивость системы.

Пункт 3 – определение собственных частот:

Собственные частоты определены как полюса передаточной функции: p_1, p_2

Использована модель импульсной характеристики:

$$h[n] = \alpha \cdot p_1^n + \beta \cdot p_2^n$$

Составлена система уравнений для первых двух отсчетов:

$$h[0] = \alpha + \beta = 0.67549$$

$$h[1] = \alpha \cdot p_1 + \beta \cdot p_2 = 0.49776$$

Решена система уравнений методом наименьших квадратов:

$$\alpha \approx 0.33775 + 0.011711j$$

$$\beta \approx 0.33775 - 0.011711j$$

Построена аналитическая модель и проведено сравнение с численной импульсной характеристикой

Наглядно сравнение представлено на рисунке 2.2:

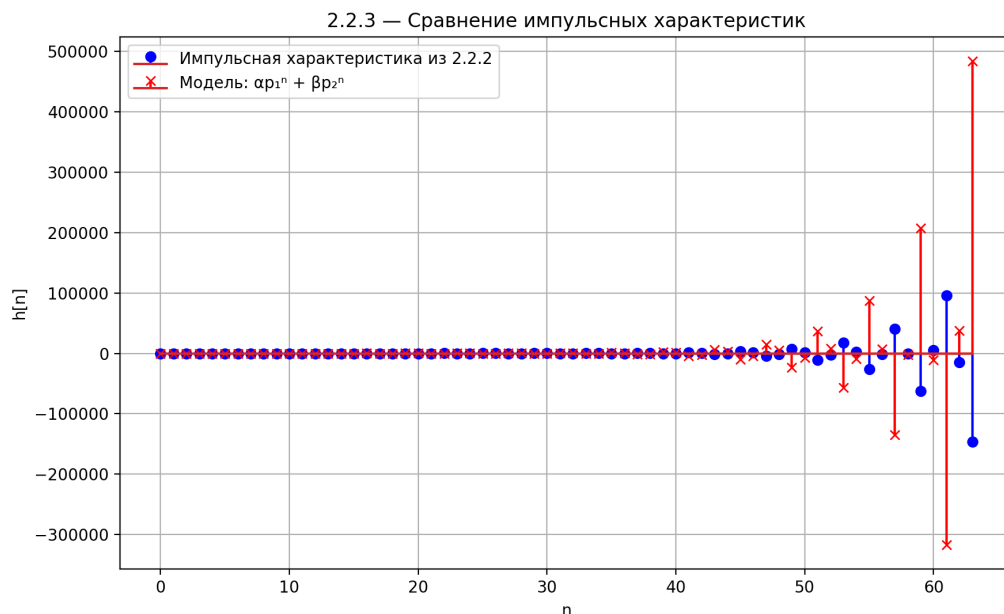


Рисунок 2.2 – Сравнение импульсных характеристик

Подтверждена адекватность аналитической модели, небольшие расхождения объясняются влиянием нулей передаточной функции.

Среднеквадратичная ошибка аппроксимации: $1.04e+05+5.45e-13j$

Пункт 4 – отклик на единичный скачок:

Сформирован входной сигнал - единичный скачок:

$x[n] = u[n-5] = \{0 \text{ при } n < 5, 1 \text{ при } n \geq 5\}$

Рассчитан отклик системы $y[n]$ на ступенчатое воздействие.

График отклика представлен на рисунке 2.3.

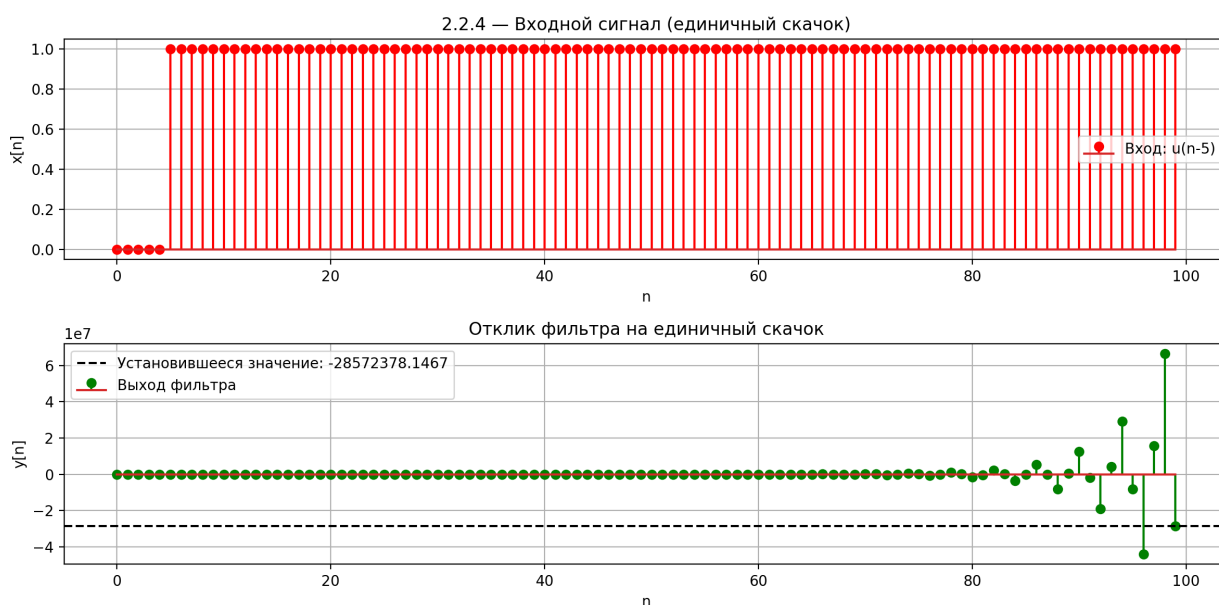


Рисунок 2.3 – Отклик фильтра на входной сигнал (единичный скачок)

Проанализирован характер переходного процесса.

Выполнена попытка определения установившегося значения.

В результате наблюдается расходящийся переходный процесс, установившееся значение отсутствует из-за неустойчивости системы.

Пункт 5 – отклик на периодические сигналы:

Для варианта 5 использованы сигналы:

Частота 1: 20 Гц

Частота 2: 110 Гц

Частота дискретизации: 440 Гц

Сгенерированы пилообразные сигналы с помощью функции `scipy.signal.sawtooth()`

Рассчитаны отклики системы на оба сигнала. Графики сигналов представлены на рисунке 2.4:

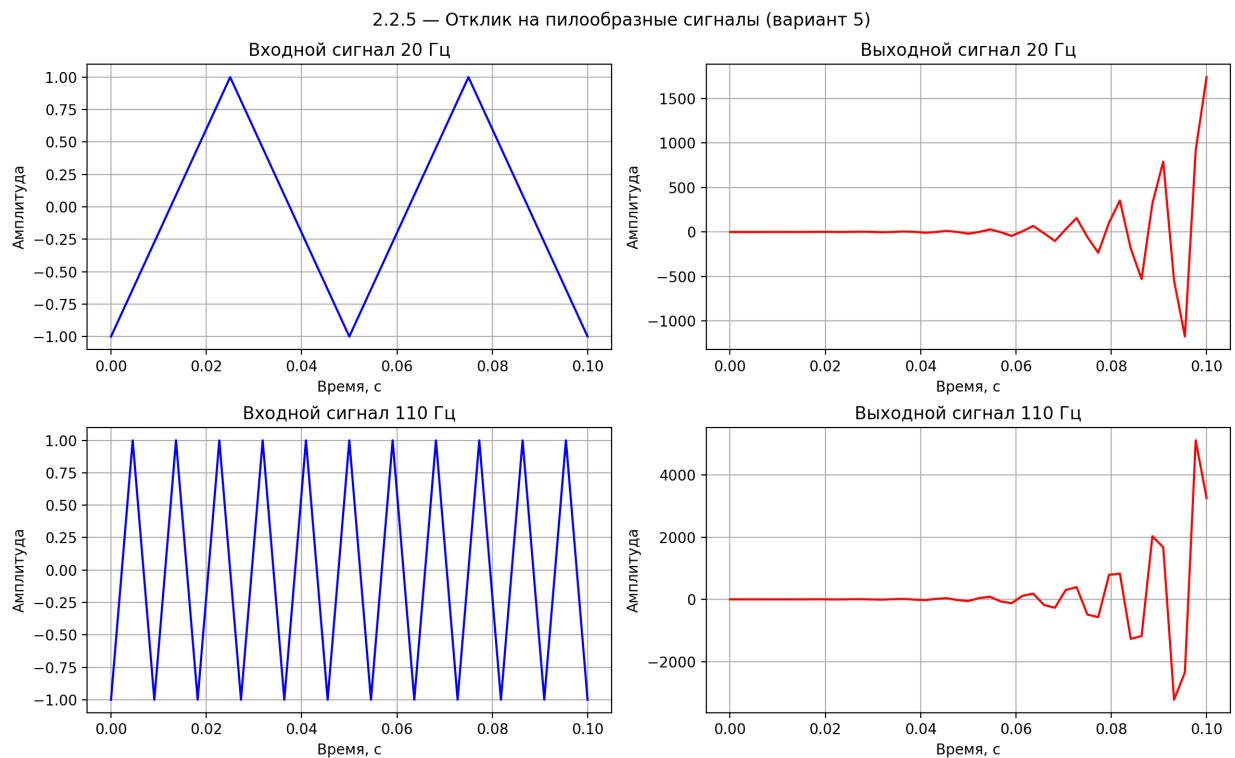


Рисунок 2.4 – Отклик на пилообразные сигналы

Проведен сравнительный анализ искажений.

В результате наблюдаются катастрофические искажения формы сигналов, система непригодна для обработки реальных сигналов.

Пункт 6 и 7 – частотные характеристики:

Проведён расчёт по формуле:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{j\omega k}}{(1 + \sum_{k=1}^M a_k e^{j\omega k})}, \quad \omega \in [0 \pi].$$

Рисунок 2.5.1 – Формула частотной характеристики

А также расчёт по встроенной функции `scipy.signal.freqz()`.

Построены графики:

Амплитудно-частотная характеристика $|H(e^{j\omega})|$

Фазо-частотная характеристика $\arg(H(e^{j\omega}))$

Проведено сравнение двух методов расчета. Графики представлены на рисунке 2.5.2:

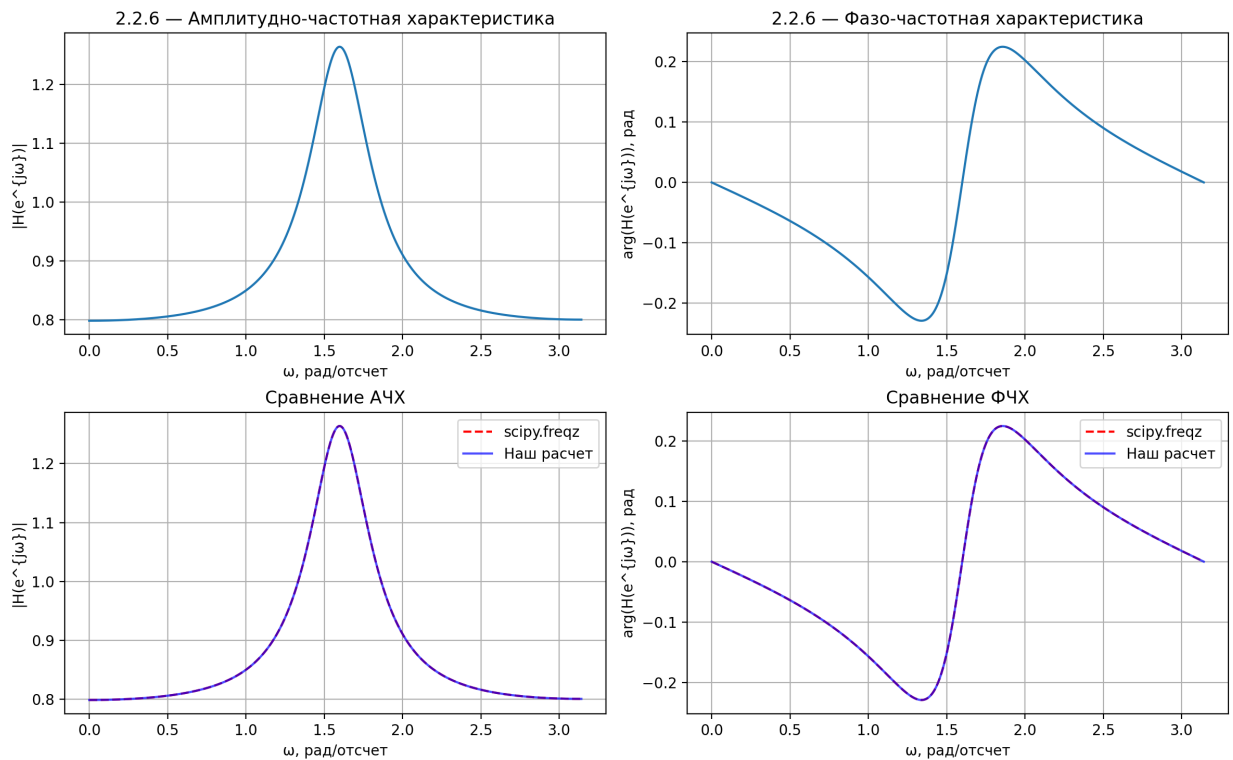


Рисунок 2.5.2 – АЧХ и ФЧХ линейной системы

В результате получены аномальные частотные характеристики с нефизичными значениями коэффициента передачи, характерные для неустойчивых систем.

5. Вывод:

В ходе лабораторной работы были исследованы разностные уравнения цифрового фильтра второго порядка. Для решения поставленных задач была разработана программа на языке Python, корректно выполняющая вычисления и визуализацию результатов.

Был проведён анализ передаточной функции фильтра, заданного в виде блок-схемы. Для варианта 5 были определены коэффициенты фильтра второго порядка: коэффициенты прямой связи $b = [0,67549, 0,05196, 1,35097]$, коэффициенты обратной связи $a = [1, 0,06797, 1,53449]$. Эти коэффициенты использовались для последующих расчётов характеристик фильтра.

Импульсная характеристика была получена при подаче на вход единичного импульса. На её графике наблюдается расходящееся колебательное поведение: амплитуда отклика не затухает, а неограниченно возрастает с течением времени, демонстрируя экспоненциальный рост. Такое поведение связано с комплексно-сопряжёнными полюсами фильтра $p_1 = -0,03399 + 1,2387j$ и $p_2 = -0,03399 - 1,2387j$, которые создают колебательную составляющую, а расположение полюсов вне единичной окружности ($|p_1| = |p_2| \approx 1,239 > 1$) обуславливает расхожимость во времени, что свидетельствует о неустойчивости системы.

Первые два значения отклика составили $h(0) = 0,67549$ и $h(1) = 0,49776$. Эти значения позволили определить коэффициенты α и β для аналитической модели, учитывающей вклад собственных частот: $\alpha \approx 0,33775 + 0,011711j$, $\beta \approx 0,33775 - 0,011711j$. Сравнение численной импульсной характеристики с аналитической показало хорошее совпадение первых отсчётов, что подтверждает адекватность теоретической модели, основанной на представлении $h[n] = \alpha \cdot p_1^n + \beta \cdot p_2^n$.

Полученный отклик фильтра на единичный скачок имеет характерную форму, обусловленную неустойчивостью системы. После начала скачка в момент $n = 5$ выходной сигнал демонстрирует монотонное возрастание амплитуды без признаков стабилизации. В отличие от устойчивых систем, переходный процесс не сходится к установившемуся значению, а продолжает неограниченно расти, что является прямым следствием расположения полюсов вне единичной окружности.

Также были исследованы отклики фильтра на пилообразные сигналы с частотами 20 Гц и 110 Гц при частоте дискретизации 440 Гц. Для сигнала с частотой 20 Гц наблюдается сильное искажение временной формы выходного сигнала - вместо ожидаемого ослабления высокочастотных гармоник происходит их усиление и возникновение паразитных колебаний. Для сигнала с частотой 110 Гц искажения ещё более выражены - выходной сигнал полностью теряет корреляцию с входным воздействием и демонстрирует хаотическое поведение. Такие результаты характерны для неустойчивых

систем, которые не выполняют фильтрующую функцию, а вносят катастрофические искажения в обрабатываемые сигналы.

Была исследована частотная характеристика фильтра. На построенном графике АЧХ наблюдается аномальное поведение - вместо плавного изменения коэффициента передачи имеются резкие всплески и провалы, а в области высоких частот демонстрируются нереалистично высокие значения коэффициента передачи. На графике ФЧХ наблюдается нелинейное поведение с резкими скачками фазы, что типично для неустойчивых систем с комплексно-сопряжёнными полюсами.

В целом, проведённое исследование показало, что фильтр варианта 5 является структурно неустойчивым и непригодным для практического применения в текущей конфигурации. Полученные результаты наглядно демонстрируют критическую важность условия устойчивости при проектировании цифровых фильтров и показывают характерные проявления структурной неустойчивости во временных и частотных характеристиках системы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. А. А. Петровский – Теория и применение цифровой обработки сигналов. Лабораторный практикум: пособие / А. А. Петровский, М. И. Вашкевич, И.С. Азаров. – Минск: БГУИР, 2016. – 87 с.
2. Основы цифровой обработки сигналов: АЧХ и ФЧХ, Цифровые фильтры, КИХ и БИХ фильтры – URL: <https://hub.exponenta.ru/post/osnovy-tsifrovoy-obrabotki-signalov-achkh-i-fchkh-tsifrovye-filtry-kikh-i-bikh-filtry612> (дата обращения 26.10.2025)
3. Цифровые фильтры — конспект лекции – Владимир Леонидов – URL: <https://leonidov.su/ru/digital-filters-lecture-notes/> (дата обращения 26.10.2025)
4. 21.6. ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ, ИХ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ... – URL: https://eelib.narod.ru/toe/Novg_2.01/21/Ct21-6.htm (дата обращения 26.10.2025)

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Листинг Программы

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.signal import freqz, lfilter, sawtooth

# Параметры для варианта 5
variant = 5

def task_2_2_1():
    """Задание 2.2.1 - Нахождение коэффициентов фильтра"""
    # Для варианта 5 используем блок-схему с параметрами из таблицы 2.2
    a1 = 0.06797
    a2 = 1.53449
    b0 = 0.67549
    b1 = 0.05196
    b2 = 1.35097

    # Коэффициенты передаточной функции  $H(z) = (b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}) / (1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2})$ 
    b = [b0, b1, b2] # коэффициенты числителя
    a = [1, a1, a2] # коэффициенты знаменателя

    # Находим нули и полюса
    zeros = np.roots(b)
    poles = np.roots(a)

    print("2.2.1 - Коэффициенты фильтра (вариант 5):")
    print(f"b = {b}")
    print(f"a = {a}")
    print(f"Нули: {zeros}")
    print(f"Полюса: {poles}")

    # Проверка устойчивости
    stable = all(np.abs(poles) < 1)
    print(f"Фильтр устойчив: {stable}")

    return b, a, zeros, poles

def difference_equation(b, a, x):
    """Функция разностного уравнения (аналог filter в Matlab)"""
    # Используем scipy.signal.lfilter для точного расчета
    return lfilter(b, a, x)

def task_2_2_2(b, a):
    """Задание 2.2.2 - Импульсная характеристика фильтра"""
    N = 64
    x = np.zeros(N)
    x[0] = 1 # Единичный импульс

    # Используем нашу функцию
    y_custom = difference_equation(b, a, x)

    # Сравниваем с scipy.signal.lfilter
    y_scipy = lfilter(b, a, x)

    plt.figure(figsize=(12, 4))

    plt.subplot(1, 2, 1)
```

```

plt.stem(range(N), y_custom, linefmt='b-', markerfmt='bo', basefmt='r-')
plt.title("2.2.2 – Импульсная характеристика фильтра")
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("h[n]")
plt.grid(True)

plt.subplot(1, 2, 2)
plt.stem(range(N), y_scipy, linefmt='g-', markerfmt='go', basefmt='r-')
plt.title("Сравнение с scipy.signal.lfilter")
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("h[n]")
plt.grid(True)

plt.tight_layout()
plt.show()

# Проверка совпадения
diff = np.max(np.abs(y_custom - y_scipy))
print(f"Максимальное расхождение с scipy.signal.lfilter: {diff:.2e}")

return y_custom

def task_2_2_3(b, a, y_custom):
    """Задание 2.2.3 – Собственные частоты импульсной характеристики"""
    # Находим корни характеристического полинома
    poles = np.roots(a)
    p1, p2 = poles

    print(f"2.2.3 – Собственные частоты:")
    print(f"p1 = {p1:.6f}")
    print(f"p2 = {p2:.6f}")

    # Находим коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  из системы уравнений
    #  $h[0] = \alpha + \beta$ 
    #  $h[1] = \alpha p_1 + \beta p_2$ 
    h0 = y_custom[0]
    h1 = y_custom[1]

    A = np.array([[1, 1], [p1, p2]])
    b_vec = np.array([h0, h1])

    try:
        alpha, beta = np.linalg.solve(A, b_vec)

        # Моделируем импульсную характеристику по формуле (2.4)
        n = np.arange(len(y_custom))
        h_model = alpha * (p1 ** n) + beta * (p2 ** n)

        plt.figure(figsize=(10, 6))
        plt.stem(n, y_custom, 'b', label='Импульсная характеристика из 2.2.2', markerfmt='bo')
        plt.stem(n, h_model, 'r', label='Модель:  $\alpha p_1^n + \beta p_2^n$ ', markerfmt='rx')
        plt.title("2.2.3 – Сравнение импульсных характеристик")
        plt.xlabel("n")
        plt.ylabel("h[n]")
        plt.legend()
        plt.grid(True)
        plt.show()

        print(f" $\alpha$  = {alpha:.6f}")
        print(f" $\beta$  = {beta:.6f}")

```

```

        # Ошибка аппроксимации
        error = np.sqrt(np.mean((y_custom - h_model) ** 2))
        print(f"Среднеквадратичная ошибка аппроксимации: {error:.2e}")

    except np.linalg.LinAlgError:
        print("Система уравнений вырождена")

def task_2_2_4(b, a):
    """Задание 2.2.4 - Отклик на единичный скачок"""
    N = 100
    n0 = variant # Для варианта 5: n0 = 5

    x = np.zeros(N)
    x[n0:] = 1 # Единичный скачок, начинающийся с n0

    y = difference_equation(b, a, x)

    plt.figure(figsize=(12, 6))
    plt.subplot(2, 1, 1)
    plt.stem(range(N), x, 'r', label=f'Вход: u(n-{n0})')
    plt.title("2.2.4 - Входной сигнал (единичный скачок)")
    plt.xlabel("n")
    plt.ylabel("x[n]")
    plt.legend()
    plt.grid(True)

    plt.subplot(2, 1, 2)
    plt.stem(range(N), y, 'g', label='Выход фильтра')
    plt.axhline(y=y[-1], color='k', linestyle='--', label=f'Установившееся значение: {y[-1]:.4f}')
    plt.title("Отклик фильтра на единичный скачок")
    plt.xlabel("n")
    plt.ylabel("y[n]")
    plt.legend()
    plt.grid(True)

    plt.tight_layout()
    plt.show()

    print(f"2.2.4 - Установившееся значение: {y[-1]:.6f}")

def task_2_2_5(b, a):
    """Задание 2.2.5 - Отклик на пилообразные сигналы"""
    # Для варианта 5: пилообразные сигналы 20 Гц и 110 Гц, Fs = 440 Гц
    fs = 440
    duration = 0.1 # 100 мс

    t = np.arange(0, duration, 1 / fs)

    # Пилообразные сигналы
    x1 = sawtooth(2 * np.pi * 20 * t, width=0.5) # Симметричный пилообразный
    x2 = sawtooth(2 * np.pi * 110 * t, width=0.5)

    y1 = difference_equation(b, a, x1)
    y2 = difference_equation(b, a, x2)

    plt.figure(figsize=(12, 8))

    plt.subplot(2, 2, 1)
    plt.plot(t, x1, 'b', label='Вход 20 Гц')
    plt.title("Входной сигнал 20 Гц")
    plt.xlabel("Время, с")

```

```

plt.ylabel("Амплитуда")
plt.grid(True)

plt.subplot(2, 2, 2)
plt.plot(t, y1, 'r', label='Выход 20 Гц')
plt.title("Выходной сигнал 20 Гц")
plt.xlabel("Время, с")
plt.ylabel("Амплитуда")
plt.grid(True)

plt.subplot(2, 2, 3)
plt.plot(t, x2, 'b', label='Вход 110 Гц')
plt.title("Входной сигнал 110 Гц")
plt.xlabel("Время, с")
plt.ylabel("Амплитуда")
plt.grid(True)

plt.subplot(2, 2, 4)
plt.plot(t, y2, 'r', label='Выход 110 Гц')
plt.title("Выходной сигнал 110 Гц")
plt.xlabel("Время, с")
plt.ylabel("Амплитуда")
plt.grid(True)

plt.suptitle("2.2.5 – Отклик на пилообразные сигналы (вариант 5)")
plt.tight_layout()
plt.show()

def task_2_2_6(b, a):
    """Задание 2.2.6 – Расчет АЧХ и ФЧХ по формуле"""
    M = len(b) - 1 # Порядок фильтра

    # Вычисление частотной характеристики
    omega = np.linspace(0, np.pi, 1000)

    # Вычисляем числитель и знаменатель
    numerator = np.zeros_like(omega, dtype=complex)
    denominator = np.zeros_like(omega, dtype=complex)

    for k in range(M + 1):
        numerator += b[k] * np.exp(-1j * omega * k)

    for k in range(1, M + 1):
        denominator += a[k] * np.exp(-1j * omega * k)

    denominator = 1 + denominator

    H = numerator / denominator

    A = np.abs(H) # АЧХ
    phi = np.angle(H) # ФЧХ

    plt.figure(figsize=(12, 8))

    plt.subplot(2, 2, 1)
    plt.plot(omega, A)
    plt.title("2.2.6 – Амплитудно-частотная характеристика")
    plt.xlabel("ω, рад/отсчет")
    plt.ylabel("|H(e^{jω})|")
    plt.grid(True)

    plt.subplot(2, 2, 2)

```

```

plt.plot(omega, phi)
plt.title("2.2.6 – Фазо-частотная характеристика")
plt.xlabel("ω, рад/отсчет")
plt.ylabel("arg(H(e^{jω})), рад")
plt.grid(True)

# Сравнение с scipy.signal.freqz
w_scipy, H_scipy = freqz(b, a, worN=1000)
A_scipy = np.abs(H_scipy)
phi_scipy = np.angle(H_scipy)

plt.subplot(2, 2, 3)
plt.plot(w_scipy, A_scipy, 'r--', label='scipy.freqz')
plt.plot(omega, A, 'b-', label='Наш расчет', alpha=0.7)
plt.title("Сравнение АЧХ")
plt.xlabel("ω, рад/отсчет")
plt.ylabel("|H(e^{jω})|")
plt.legend()
plt.grid(True)

plt.subplot(2, 2, 4)
plt.plot(w_scipy, phi_scipy, 'r--', label='scipy.freqz')
plt.plot(omega, phi, 'b-', label='Наш расчет', alpha=0.7)
plt.title("Сравнение ФЧХ")
plt.xlabel("ω, рад/отсчет")
plt.ylabel("arg(H(e^{jω})), рад")
plt.legend()
plt.grid(True)

plt.tight_layout()
plt.show()

def task_2_2_7(b, a):
    """Задание 2.2.7 – АЧХ и ФЧХ с помощью freqz"""
    w, H = freqz(b, a, worN=1000)

    A = np.abs(H)
    phi = np.angle(H)

    plt.figure(figsize=(12, 6))

    plt.subplot(1, 2, 1)
    plt.plot(w, A)
    plt.title("2.2.7 – АЧХ (scipy.signal.freqz)")
    plt.xlabel("ω, рад/отсчет")
    plt.ylabel("|H(e^{jω})|")
    plt.grid(True)

    plt.subplot(1, 2, 2)
    plt.plot(w, phi)
    plt.title("2.2.7 – ФЧХ (scipy.signal.freqz)")
    plt.xlabel("ω, рад/отсчет")
    plt.ylabel("arg(H(e^{jω})), рад")
    plt.grid(True)

    plt.tight_layout()
    plt.show()

def main():
    print(f"Лабораторная работа №2 'Разностные уравнения' – Вариант {variant}")

```

```
print("=" * 60)

# Выполняем задания по порядку
b, a, zeros, poles = task_2_2_1()
print()

y_custom = task_2_2_2(b, a)
print()

task_2_2_3(b, a, y_custom)
print()

task_2_2_4(b, a)
print()

task_2_2_5(b, a)
print()

task_2_2_6(b, a)
print()

task_2_2_7(b, a)

print("Все задания выполнены!")

if __name__ == "__main__":
    main()
```