

ГУАП

КАФЕДРА № 42

ОТЧЕТ  
ЗАЩИЩЕН С ОЦЕНКОЙ \_\_\_\_\_  
ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

канд. техн. наук, доцент  
\_\_\_\_\_  
должность, уч. степень, звание

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

А.В. Аграновский  
\_\_\_\_\_  
инициалы, фамилия

ОТЧЕТ О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1

СИГНАЛЫ И ФИЛЬТРЫ

по курсу: ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА И ПЕРЕДАЧА СИГНАЛОВ

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ

СТУДЕНТ ГР. № 4329

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

Д.С. Шаповалова  
\_\_\_\_\_  
инициалы, фамилия

Санкт-Петербург 2025

## Содержание

1. Цель работы:.....	3
2. Задание:.....	3
3. Теоретические сведения:.....	3
3.1 Импульсы.....	3
3.2. Цифровые фильтры .....	4
3.3. Методы анализа фильтров .....	7
4. Выполнение задания:.....	8
5. Вывод: .....	12
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	13
ПРИЛОЖЕНИЕ А.....	14

## 1. Цель работы:

Познакомиться с основными видами сигналов и изучить методы анализа цифровых сигналов.

## 2. Задание:

Задания выполняются на компьютере с использованием любого языка высокого уровня:

### Задание 1

1. Сформируйте единичный импульс длиной 20 отсчетов.
2. Получите импульсные характеристики рассмотренных фильтров.
3. Постройте соответствующие графики.
4. Сравните с результатами расчета по представленным формулам.

### Задание 2

1. Определите единичный скачок длиной 20 отсчетов.
2. Получите импульсные характеристики рассмотренных фильтров.
3. Постройте соответствующие графики.
4. Сравните с результатами расчета по представленным формулам.

### Задание 3

1. Используя синусоидальные сигналы постоянной амплитуды и различной частоты, получите амплитудно-частотную характеристику фильтров.
2. Постройте соответствующие графики.
3. Сравните с результатами расчета по представленным формулам.

### Задание 4

1. Используя синусоидальные сигналы постоянной амплитуды с нулевой начальной фазой при различных частотах, получите фазо-частотную характеристику фильтров.
2. Постройте соответствующие графики.
3. Сравните с результатами расчета по представленным формулам.

## 3. Теоретические сведения:

### 3.1 Импульсы

Для исследования дискретных фильтров используют несколько типов входных сигналов:

Единичный импульс  $\delta[n]$  – сигнал, равный 1 при  $n = 0$  и 0 при всех остальных отсчётах. Он применяется для получения импульсной характеристики фильтра  $h[n]$ , которая полностью определяет поведение линейного дискретного фильтра.

Единичный скачок  $u[n]$  – сигнал, равный 1 при  $n \geq 0$  и 0 при  $n < 0$ . Он используется для построения переходной характеристики фильтра, показывающей реакцию фильтра на резкое изменение входного сигнала.

Гармонический сигнал  $x[n] = A \cdot \sin(\omega n + \varphi)$ , где  $A$  – амплитуда,  $\omega$  – частота,  $\varphi$  – начальная фаза. Такой сигнал применяется для изучения частотных характеристик фильтров, включая амплитудно-частотную (АЧХ) и фазо-частотную (ФЧХ).

При подаче гармонического сигнала на фильтр на выходе также появляется синусоида той же частоты, но с изменённой амплитудой и фазой.

### 3.2. Цифровые фильтры

#### **Основные характеристики фильтров:**

Импульсная характеристика  $h[n]$  – отклик фильтра на единичный импульс. Для линейного дискретного фильтра она полностью определяет его поведение.

Переходная характеристика – отклик фильтра на единичный скачок. Она позволяет понять, как быстро фильтр реагирует на изменение входного сигнала.

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) – зависимость коэффициента передачи фильтра от частоты входного сигнала. Показывает, какие частоты фильтр усиливает, а какие ослабляет.

Фазо-частотная характеристика (ФЧХ) – зависимость фазового сдвига сигнала на выходе от частоты. Сдвиг по фазе возникает из-за задержки фильтром входного сигнала.

#### **Виды фильтров:**

Дискретные фильтры первого порядка делятся на две основные категории: нерекурсивные (КИХ, FIR) и рекурсивные (БИХ, IIR). Они отличаются структурой, принципом работы и характером откликов на входные сигналы.

Нерекурсивные фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ, FIR) не содержат обратной связи. Это означает, что выход в каждый момент времени зависит исключительно от текущего и нескольких предыдущих входных значений. Например, простой КИХ-фильтр первого порядка описывается формулой:

$$y[n] = \frac{x[n] + x[n-1]}{2}.$$

Рисунок 1.1 – Формула КИХ-фильтра

Здесь выходной сигнал  $y[n]$  формируется как усреднение текущего и предыдущего входного значения  $x[n]$ . Благодаря отсутствию обратной связи импульсная характеристика КИХ-фильтра имеет конечную длину и полностью совпадает с набором коэффициентов

фильтра. Это делает такие фильтры стабильными и предсказуемыми: они быстро реагируют на изменения входного сигнала и не накапливают эффект от предыдущих отсчётов. Нерекурсивные фильтры широко применяются, когда требуется точное воспроизведение формы сигнала или равномерное усреднение, например, для сглаживания шумов.

Рекурсивные фильтры с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ, IIR), напротив, содержат обратную связь. Выходной сигнал зависит не только от текущих и предыдущих входных значений, но и от предыдущих выходных значений. Типичный БИХ-фильтр первого порядка имеет вид:

$$y[n] = x[n] + a \cdot y[n - 1],$$

Рисунок 1.2 – Формула БИХ-фильтра

где  $a$  – коэффициент обратной связи. Благодаря этому эффект накопления предыдущих выходов делает импульсную характеристику бесконечной: даже после завершения подачи входного сигнала фильтр продолжает формировать отклик, постепенно затухая. Такая особенность придаёт БИХ-фильтрам «память», что проявляется в более инерционном поведении на единичный скачок и более плавной реакции на высокочастотные изменения. Рекурсивные фильтры часто используются там, где важна эффективная реализация фильтра с малым количеством коэффициентов и требуется определённое частотное усиление или подавление.

Различие между КИХ и БИХ фильтрами также проявляется в их частотных характеристиках. КИХ-фильтры действуют как усреднители соседних отсчётов, что делает их поведение более линейным и предсказуемым: они равномерно ослабляют или пропускают частоты в определённой полосе. БИХ-фильтры способны усиливать или ослаблять отдельные частоты более выражено, а фазовый сдвиг их выходного сигнала плавно зависит от частоты входа из-за обратной связи.

В целом, выбор между КИХ и БИХ фильтром зависит от требований задачи. КИХ-фильтры подходят, когда нужна стабильность и предсказуемость отклика, а БИХ-фильтры – когда важно компактное представление фильтра с возможностью накопления сигнала и гибкой настройки частотного отклика.

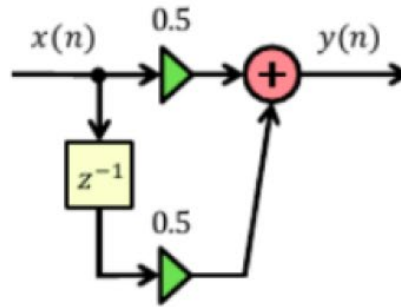


Рисунок 7 — Нерекурсивный фильтр первого порядка

фильтр первого порядка, изображенный на рисунке 7, представляет из себя арифметическое усреднение и описывается следующим линейным разностным уравнением:

$$y(n) = \frac{x(n) + x(n-1)}{2}.$$

Импульсная характеристика фильтра:

$$h(n) = \frac{\delta(n) + \delta(n-1)}{2}.$$

Переходная характеристика фильтра:

$$g(n) = \frac{u(n) + u(n-1)}{2}.$$

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) фильтра:

$$|H(e^{j\hat{\omega}})| = \sqrt{\frac{1 + \cos(\hat{\omega})}{2}}.$$

Фазочастотная характеристика (ФЧХ) фильтра:

$$\arg(H(e^{j\hat{\omega}})) = -\arctan\left(\frac{\sin(\hat{\omega})}{1 + \cos(\hat{\omega})}\right).$$

Рисунок 1.3 – Краткие теоретические сведения про КИХ фильтр

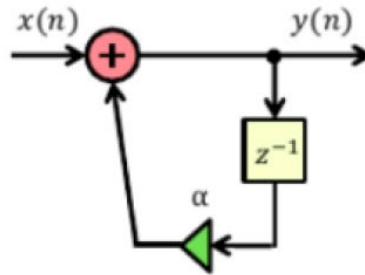


Рисунок 8 — Рекурсивный фильтр первого порядка

фильтр первого порядка представляет из себя систему «с памятью» (обратной связью) и описывается следующим линейным разностным уравнением:

$$y(n) = x(n) + ay(n - 1).$$

Импульсная характеристика фильтра:

$$h(n) = \delta(n) + ah(n - 1) = a^n u(n).$$

Переходная характеристика фильтра:

$$g(n) = u(n) + ag(n - 1) = \left( \frac{1}{1 - \alpha} - \frac{a^{n+1}}{1 - \alpha} \right) u(n).$$

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) фильтра (при  $\alpha > 0$  – фильтр низких частот, при  $\alpha < 0$  – фильтр верхних частот):

$$|H(e^{j\hat{\omega}})| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos(\hat{\omega}) + \alpha^2}}.$$

Фазочастотная характеристика (ФЧХ) фильтра:

$$\arg(H(e^{j\hat{\omega}})) = -\arctan\left(\frac{\alpha \cdot \sin(\hat{\omega})}{1 + \alpha \cdot \cos(\hat{\omega})}\right).$$

Рисунок 1.4 - Краткие теоретические сведения про БИХ фильтр

### 3.3. Методы анализа фильтров

Аналитический – расчет характеристик по формулам. Для КИХ и БИХ фильтров можно получить импульсные и переходные характеристики, АЧХ и ФЧХ с помощью соответствующих выражений.

Экспериментальный – моделирование с помощью компьютера, например, с помощью Python. Позволяет построить графики импульсных и переходных характеристик, АЧХ и ФЧХ, которые затем сравниваются с теоретическими результатами.

#### 4. Выполнение задания:

##### Задание 1.

1. Построили график единичного импульса.

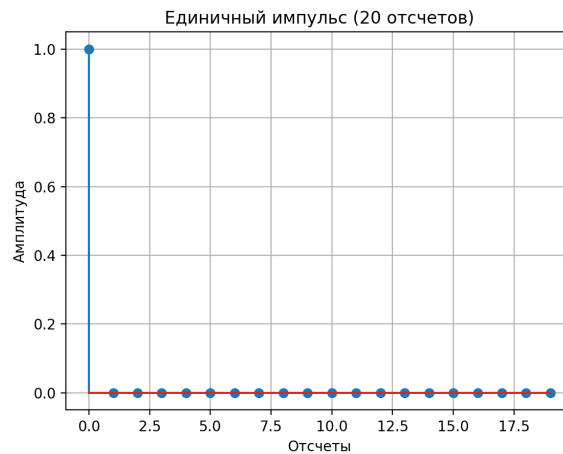


Рисунок 1.5 – Построенный график единичного импульса

2. Получили импульсные характеристики фильтров: нерекурсивного и рекурсивного.

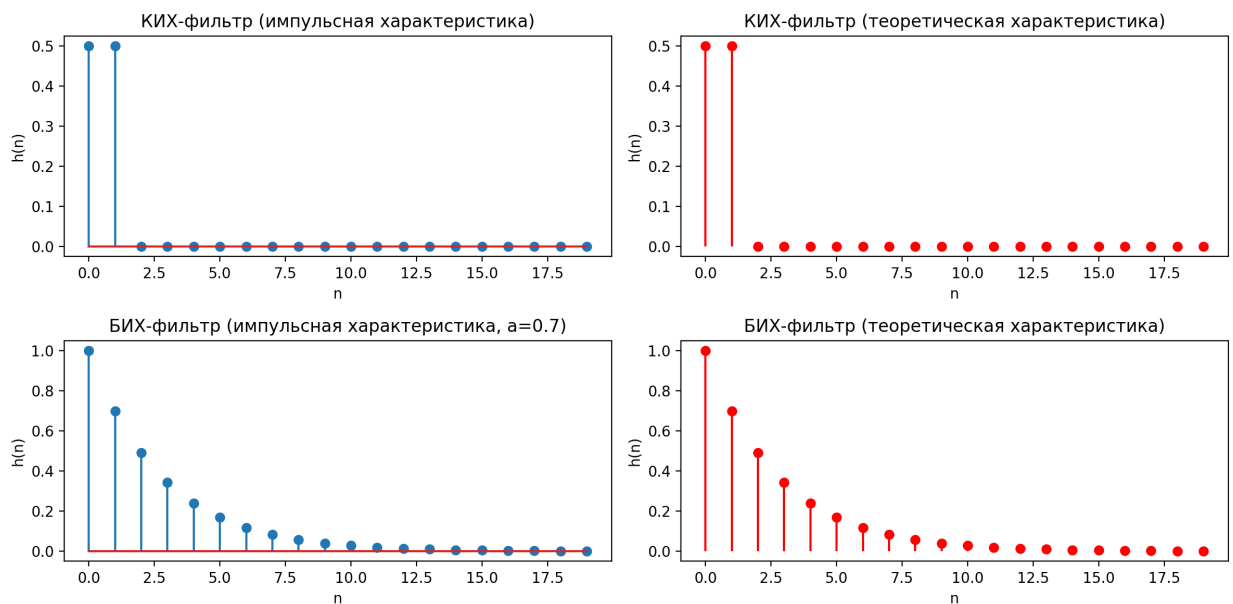


Рисунок 1.6 – Построенные графики импульсных характеристик фильтров

3. Сравним с результатами расчёта по формулам.

В результате сравнения работы фильтра и теоретических расчётов работы фильтра можем наблюдать как значения совпадают, что говорит о правильности работы фильтра.

##### Задание 2.

1. Определим единичный скачок длиной 20 отсчётов.



Мы построили график длиной 20, где начиная с нулевой абсциссы и заканчивая двадцатой стоят единицы, по математической формуле:

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Рисунок 2.1 – Формула единичного скачка



Рисунок 2.2 – График единичного скачка

А именно создали массив размера 20 и заполнили единицами, с помощью функции `np.ones(N)`.

## 2. Получили импульсные характеристики фильтров.

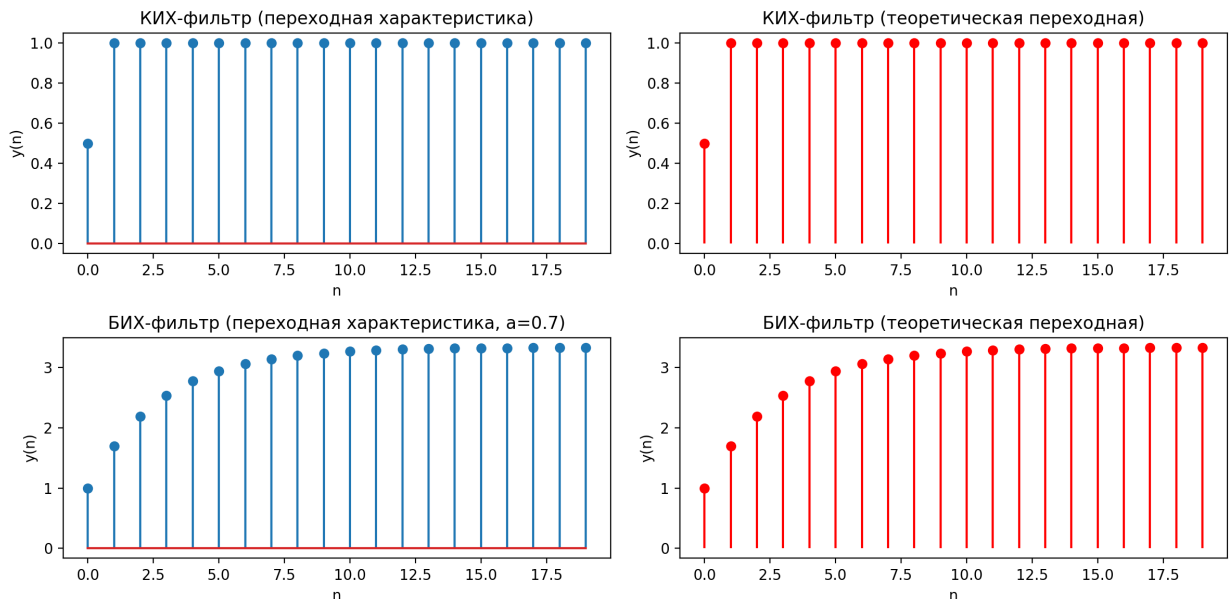


Рисунок 2.3 – Построенные графики фильтров для единичного скачка

## 3. Сравнив характеристики, можем понять, что результаты работы фильтров совпадают с теоретическими расчётами.

По результатам выполнения заданий 1 и 2 мы можем наблюдать различие в плавности у КИХ и БИХ фильтров – БИХ плавнее.

## Задание 3.

1. Получим АЧХ (амплитудно-частотную характеристику) фильтров, используя синусоидальные сигналы постоянной амплитуды и различной частоты.

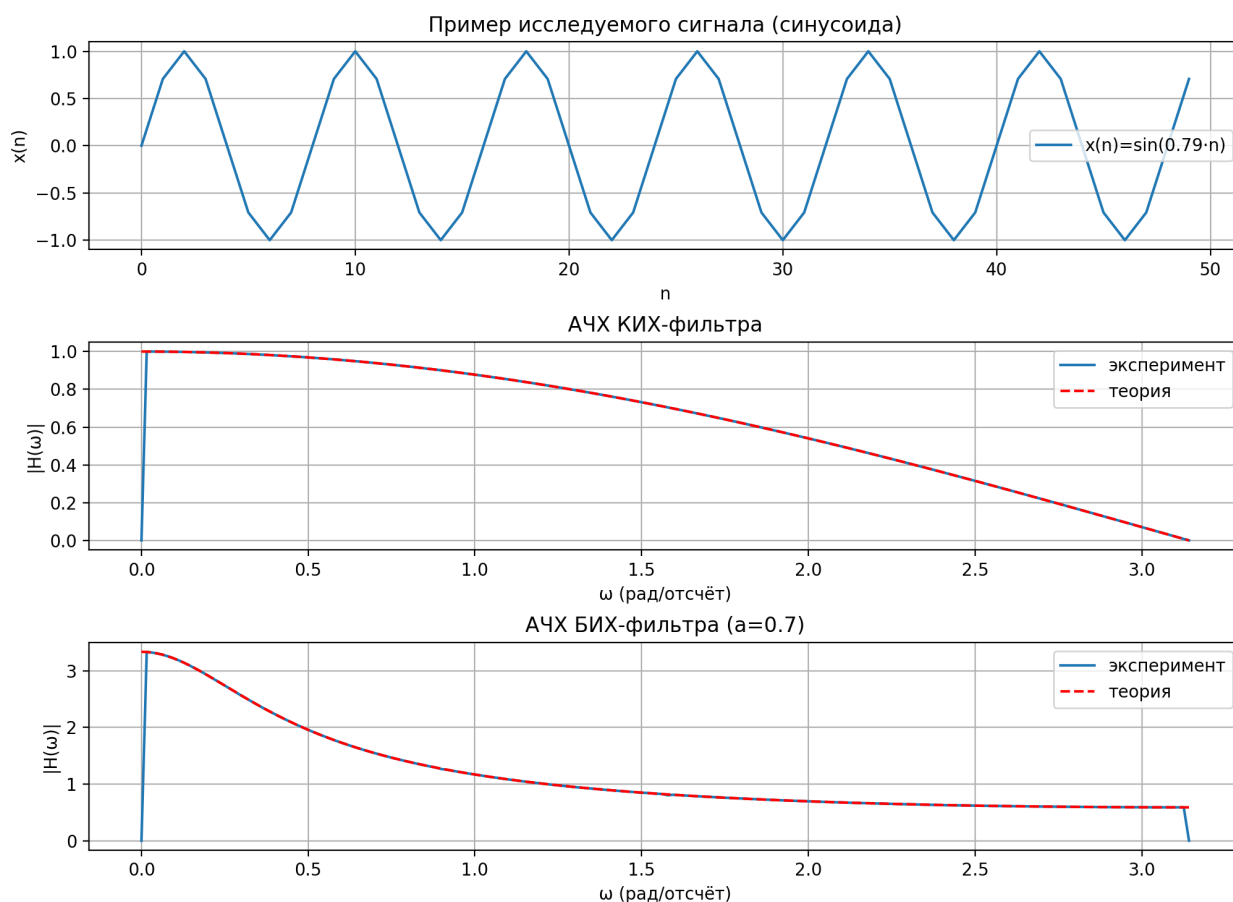


Рисунок 3.1 – Полученные графики

Приложенный график синусоиды приведён ради примера, в моделировании результатов работы фильтров используются синусоиды частот от 0, до  $\pi$ .

Графики АЧХ фильтров отображают работу КИХ и БИХ фильтров для синусоидального сигнала. А точнее: КИХ – АЧХ =  $|\cos(\omega/2)|$ , он же низкочастотный фильтр: на нулевой частоте пропускает полностью, к  $\pi/\pi \rightarrow$  затухание. А в случае БИХ – форма экспоненциально-зависимая, причём усиление на низких частотах сильнее, чем на высоких.

2. Сравним полученные значения.

На полученных графиках можно увидеть, что теоретические расчёты (представлены красным пунктиром) совпадают с результатом работы фильтров.

#### Задание 4.

1. Используем синусоидальные сигналы постоянно амплитуды с нулевой начальной фазой при различных частотах. Получим фазо-частотную характеристику фильтров. Построим графики, на одной сетке для наглядности масштаба.

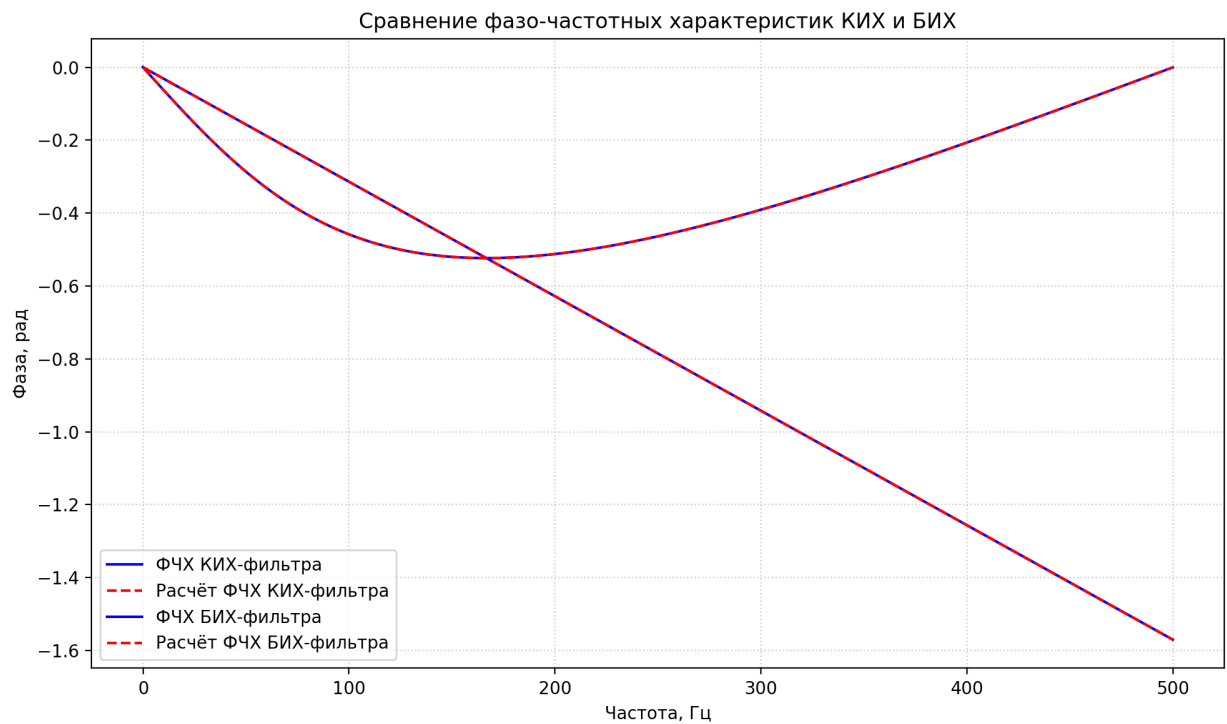


Рисунок 4.1 – Графики ФЧХ КИХ и БИХ фильтров

По графикам можно понять, что КИХ фильтр вызывает задержку примерно на половину отсчета, в то время как БИХ фильтр демонстрирует плавный фазовый сдвиг, увеличивающийся с частотой. Происходящее соответствует свойствам рекурсивных фильтров, у которых выход зависит от предыдущих значений.

2. Сравним полученные результаты с теоретическими расчётами.

В данном случае также результат работы фильтра совпадает с теоретическими расчётами.

## 5. Вывод:

В данной работе мы были изучены дискретные фильтры первого порядка: нерекурсивный (КИХ) и рекурсивный (БИХ). Для исследования использовались три типа входных сигналов: единичный импульс, единичный скачок и синусоидальный сигнал. Это позволило наглядно проследить реакцию каждого фильтра на различные воздействия и сравнить результаты с теоретическими расчетами.

Экспериментальные импульсные характеристики совпали с аналитическими. У КИХ-фильтра импульсная характеристика имеет конечную длину и повторяет коэффициенты фильтра, тогда как у БИХ-фильтра импульсная характеристика бесконечна, так как текущий выход зависит от предыдущих значений. При подаче единичного импульса на выходе БИХ-фильтра наблюдается затухающая последовательность, что отражает накопительный эффект рекурсивного фильтра.

Анализ реакции на единичный скачок показал различия в переходных процессах. КИХ-фильтр быстро достигает установившегося значения, а БИХ-фильтр медленно накапливает отклик, демонстрируя «память» и инерционное поведение.

При исследовании частотных характеристик применялся гармонический сигнал. Входной сигнал имел постоянную амплитуду и фазу, но изменялась его частота. АЧХ показала, что БИХ-фильтр усиливает низкочастотные составляющие и ослабляет высокочастотные, тогда как КИХ-фильтр усредняет соседние отсчёты, демонстрируя более линейное поведение.

Фазо-частотная характеристика показала задержку сигнала относительно входного. На БИХ-фильтре сдвиг по фазе увеличивается плавно с ростом частоты, что отражает накопительный эффект рекурсии, а у КИХ-фильтра фазовый сдвиг более предсказуемый.

В целом, проведённая работа позволила проверить соответствие экспериментальных результатов с теорией. Все полученные характеристики — импульсные, переходные, АЧХ и ФЧХ — подтвердили правильность аналитических расчетов и наглядно показали различия между КИХ и БИХ фильтрами.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Методические указания к лабораторной работе №1 "Сигналы и фильтры" по курсу "Цифровая обработка и передача сигналов". – СПб.: ГУАП, 2025. – 5 с.
2. В.А. Волохов – Методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу «Цифровая обработка сигналов» / Волохов В.А., Махныткина О.В., Мещеряков И.Д., Шуранов Е.В – СПб: Университет ИТМО, 2021 – 60с.
3. Библиотека NumPy в Python – URL: <https://numpy.org/doc/2.3/user/index.html#user> (дата обращения 21.09.2025)
4. Основы цифровой обработки сигналов: АЧХ и ФЧХ, Цифровые фильтры, КИХ и БИХ фильтры – URL: <https://hub.exponenta.ru/post/osnovy-tsifrovoy-obrabotki-signalov-achkh-i-fchkh-tsifrovye-filtry-kikh-i-bikh-filtry612> (дата обращения 21.09.2025)
5. Фильтр с бесконечной импульсной характеристикой — Википедия – URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Фильтр\\_с\\_бесконечной\\_импульсной\\_характеристикой](https://ru.wikipedia.org/wiki/Фильтр_с_бесконечной_импульсной_характеристикой) (дата обращения 21.09.2025)
6. Цифровые фильтры — конспект лекции – Владимир Леонидов – URL: <https://leonidov.su/ru/digital-filters-lecture-notes/> (дата обращения 21.09.2025)
7. Matplotlib Development Team. Matplotlib: Visualization with Python – URL: <https://matplotlib.org/stable/index.html> (дата обращения: 11.09.2025).

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Листинг Программы

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# -----
# 1. Единичный импульс
# -----
N = 20
delta = np.zeros(N)
delta[0] = 1 # импульс в нуле

# -----
# 2. КИХ-фильтр
#  $y(n) = (x(n) + x(n-1)) / 2$ 
# -----
h_kih = np.zeros(N)
for n in range(N):
    if n == 0:
        h_kih[n] = delta[n] / 2
    else:
        h_kih[n] = (delta[n] + delta[n-1]) / 2

# Теоретическая импульсная характеристика КИХ
h_kih_theory = np.zeros(N)
h_kih_theory[0] = 0.5
h_kih_theory[1] = 0.5

# -----
# 3. БИХ-фильтр
#  $y(n) = x(n) + a y(n-1)$ 
# -----
a = 0.7 # коэффициент
h_bih = np.zeros(N)
for n in range(N):
    if n == 0:
        h_bih[n] = delta[n]
    else:
        h_bih[n] = delta[n] + a * h_bih[n-1]

# Теоретическая импульсная характеристика БИХ
h_bih_theory = np.array([a**n for n in range(N)])
h_bih_theory[0] = 1

# -----
# 4. Графики
# -----
plt.figure(figsize=(12,6))

plt.subplot(2,2,1)
plt.stem(h_kih)
plt.title("КИХ-фильтр (импульсная характеристика)")
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("h(n)")

plt.subplot(2,2,2)
plt.stem(h_kih_theory, linefmt='r-', markerfmt='ro', basefmt=' ')
plt.title("КИХ-фильтр (теоретическая характеристика)")
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("h(n)")

plt.subplot(2,2,3)
```

```

plt.stem(h_bih)
plt.title(f"БИХ-фильтр (импульсная характеристика, a={a})")
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("h(n)")

plt.subplot(2,2,4)
plt.stem(h_bih_theory, linefmt='r-', markerfmt='ro', basefmt=' ')
plt.title("БИХ-фильтр (теоретическая характеристика)")
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("h(n)")

plt.tight_layout()
plt.show()

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

N = 20
# -----
# 1. Единичный скачок
# -----
u = np.ones(N)

# -----
# 2. КИХ-фильтр:  $y(n) = (x(n) + x(n-1)) / 2$ 
# -----
y_kih = np.zeros(N)
for n in range(N):
    if n == 0:
        y_kih[n] = u[n] / 2
    else:
        y_kih[n] = (u[n] + u[n-1]) / 2

# Теоретическая переходная характеристика КИХ
y_kih_theory = np.ones(N)
y_kih_theory[0] = 0.5

# -----
# 3. БИХ-фильтр:  $y(n) = x(n) + a y(n-1)$ 
# -----
a = 0.7
y_bih = np.zeros(N)
for n in range(N):
    if n == 0:
        y_bih[n] = u[n]
    else:
        y_bih[n] = u[n] + a * y_bih[n-1]

# Теоретическая переходная характеристика БИХ
# Формула:  $y(n) = (1 - a^{(n+1)}) / (1 - a)$ 
y_bih_theory = np.array([(1 - a**(n+1))/(1-a) for n in range(N)])

# -----
# 4. Графики
# -----

plt.figure(figsize=(12,6))

plt.subplot(2,2,1)
plt.stem(y_kih)
plt.title("КИХ-фильтр (переходная характеристика)")
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("y(n)")

```

```

plt.subplot(2,2,2)
plt.stem(y_kih_theory, linefmt='r-', markerfmt='ro', basefmt=' ')
plt.title("КИХ-фильтр (теоретическая переходная)")
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("y(n)")

plt.subplot(2,2,3)
plt.stem(y_bih)
plt.title(f"БИХ-фильтр (переходная характеристика, a={a})")
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("y(n)")

plt.subplot(2,2,4)
plt.stem(y_bih_theory, linefmt='r-', markerfmt='ro', basefmt=' ')
plt.title("БИХ-фильтр (теоретическая переходная)")
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("y(n)")

'''
plt.stem(u)
plt.title(f"Единичный скачок длиной 20 отсчётов")
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("y(n)")
'''

plt.tight_layout()
plt.show()

```

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

N = 200 # длина сигнала для измерения
freqs = np.linspace(0, np.pi, 200) # частоты от 0 до pi
a = 0.7 # коэффициент для БИХ

amp_kih = []
amp_bih = []

for w in freqs:
    n = np.arange(N)
    x = np.sin(w * n)

    # КИХ
    y_kih = np.zeros(N)
    for i in range(N):
        if i == 0:
            y_kih[i] = x[i] / 2
        else:
            y_kih[i] = (x[i] + x[i - 1]) / 2
    amp_kih.append(np.max(np.abs(y_kih[int(N / 2):])))

    # БИХ
    y_bih = np.zeros(N)
    for i in range(N):
        if i == 0:
            y_bih[i] = x[i]
        else:
            y_bih[i] = x[i] + a * y_bih[i - 1]
    amp_bih.append(np.max(np.abs(y_bih[int(N / 2):])))

amp_kih = np.array(amp_kih)
amp_bih = np.array(amp_bih)

```



```

# --- Теоретические АЧХ ---
amp_kih_theory = np.abs(np.cos(freqs / 2))
amp_bih_theory = 1 / np.sqrt(1 - 2 * a * np.cos(freqs) + a ** 2)

# -----
# График исследуемого сигнала (пример:  $\omega = \pi/4$ )
# -----
n = np.arange(N)
w_test = np.pi / 4
x_test = np.sin(w_test * n)

plt.figure(figsize=(12, 8))

plt.subplot(3, 1, 1)
plt.plot(n[:50], x_test[:50], label=f"x(n)=sin({w_test:.2f}·n)")
plt.title("Пример исследуемого сигнала (синусоида)")
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("x(n)")
plt.grid()
plt.legend()

# --- АЧХ КИХ ---
plt.subplot(3, 1, 2)
plt.plot(freqs, amp_kih, label="эксперимент")
plt.plot(freqs, amp_kih_theory, 'r--', label="теория")
plt.title("АЧХ КИХ-фильтра")
plt.xlabel(" $\omega$  (рад/отсчёт)")
plt.ylabel("|H( $\omega$ )|")
plt.legend()
plt.grid()

# --- АЧХ БИХ ---
plt.subplot(3, 1, 3)
plt.plot(freqs, amp_bih, label="эксперимент")
plt.plot(freqs, amp_bih_theory, 'r--', label="теория")
plt.title(f"АЧХ БИХ-фильтра (a={a})")
plt.xlabel(" $\omega$  (рад/отсчёт)")
plt.ylabel("|H( $\omega$ )|")
plt.legend()
plt.grid()

plt.tight_layout()
plt.show()

```

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.signal import freqz, lfilter

# -----
# Параметры
# -----
Fs = 1000          # Частота дискретизации, Гц
N_per = 2048       # Длина синусоидального сигнала
freqs_count = 5    # Количество исследуемых частот
a = 0.5            # Коэффициент для IIR-фильтра

# Частоты (рад/отсчёт) — не начиная с 0, иначе будет константа
omega = np.linspace(0.1, np.pi, freqs_count)
freqs_hz = omega * Fs / (2 * np.pi)

n = np.arange(N_per)

```

```

# -----
# Подготовка сигналов и фильтров
# -----
signals = []
firs = []
iirs = []

# FIR:  $y[n] = (x[n] + x[n-1]) / 2$ 
b_fir = np.array([0.5, 0.5])
a_fir = np.array([1])

# IIR:  $y[n] = x[n] + a * y[n-1]$ 
b_iir = np.array([1])
a_iir = np.array([1, -a])

for w in omega:
    x = np.sin(w * n)
    signals.append(x)

    # Фильтрация FIR
    y_fir = lfilter(b_fir, a_fir, x)
    firs.append(y_fir)

    # Фильтрация IIR
    y_iir = lfilter(b_iir, a_iir, x)
    iirs.append(y_iir)

# -----
# Частотный отклик фильтров
# -----
w, h_fir = freqz(b_fir, a_fir, worN=2048)
_, h_iir = freqz(b_iir, a_iir, worN=2048)

freqs = w * Fs / (2 * np.pi) # Перевод в Гц

# -----
# Фазовые характеристики
# -----
phi_fir_freqz = np.unwrap(np.angle(h_fir))
phi_iir_freqz = np.unwrap(np.angle(h_iir))

# Аналитические формулы для фаз
phi_fir_analytic = np.unwrap(np.arctan2(-np.sin(w), 1 + np.cos(w)))
phi_iir_analytic = np.unwrap(-np.arctan2(a * np.sin(w), 1 - a * np.cos(w)))

# -----
# Построение графика
# -----
plt.figure(figsize=(10, 6))

# FIR
plt.plot(freqs, phi_fir_freqz, color='blue', label="ФЧХ КИХ-фильтра")
plt.plot(freqs, phi_fir_analytic, color='red', linestyle='--', label="Расчёт ФЧХ КИХ-фильтра")

# IIR
plt.plot(freqs, phi_iir_freqz, color='blue', label="ФЧХ БИХ-фильтра")
plt.plot(freqs, phi_iir_analytic, color='red', linestyle='--', label="Расчёт ФЧХ БИХ-фильтра")

plt.title("Сравнение фазо-частотных характеристик КИХ и БИХ")
plt.xlabel("Частота, Гц")

```

```
plt.ylabel("Фаза, рад")  
plt.legend()  
plt.grid(True, linestyle=":", alpha=0.6)  
plt.tight_layout()  
plt.show()
```