ГУАП

КАФЕДРА № 42

ОТЧЕТ
ЗАЩИЩЕН С ОЦЕНКОЙ ____________________

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

канд. техн. наук, доцент		А.В. Аграновский
должность, уч. степень, звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

ОТЧЕТ О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №3

Непрерывные, дискретные и цифровые сигналы

по курсу: ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА И ПЕРЕДАЧА СИГНАЛОВ

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ

СТУДЕНТ ГР. №	4329		Д.С. Шаповалова
		подпись, дата	инициалы, фамилия

Санкт-Петербург 2025

1. Цель работы:

Практическое исследование этапов аналого-цифрового преобразования сигналов с использованием современных средств имитационного моделирования. Сравнительный анализ аналогового, дискретного и цифрового сигналов. Приобретение практических навыков применения программных средств имитационного моделирования цифровых сигналов.

2. Задание:

Для успешного выполнения работы необходимо:

1. Выполнить имитационное моделирование аналогового гармонического сиг нала одной частоты, описываемого функцией (1) на временном интервале $t \in [t_{min}; t_{max}]$использованием символьных переменных;
$$x(t) = A_0 + A\, Cos(2\pi f t + \varphi), \tag{1}$$
2. Построить график функции, описывающей аналоговый сигнал;
3. Выполнить моделирование аналого-цифрового преобразования с частотой дискретизации f_d и разрядностью b. Кодирование сигнала реализовать с помощью прямого, обратного или дополнительного кода;
4. Построить графики соответствующих функций для дискретного, квантованного и цифрового сигналов;
5. Оценить параметры шума квантования сигнала, построить гистограмму статистического распределения абсолютной погрешности квантования и сопоставить полученные результаты с теоретическими значениями.

Вариант задания выбран под номером 17:

17	$t_{min} = 18$ с; $t_{max} = 41$ с; $A = 7$ В; $A_0 = 1$ В; $f = 8$ Гц; $\varphi = \frac{\pi}{4}$; Код: прямой.

Рисунок 1.1 – Параметры для варианта 17

3. Теоретические сведения:

Дискретизация сигнала.

Дискретизация заключается в представлении непрерывного сигнала $y(t)$ последовательностью его отсчётов во времени.

Пусть шаг дискретизации равен Δt, тогда дискретные значения сигнала:

$$y[k] = y(t)|_{t = k\,\Delta t}, \quad k \in Z, \tag{1}$$

Частота дискретизации:

$$f_d = \frac{1}{\Delta t}, \tag{2}$$

Теорема Котельникова (теорема отсчётов).

Теорема утверждает: если сигнал ограничен по спектру

$$|f| \leq f_{max}, \tag{3}$$

то он может быть полностью восстановлен по своим отсчётам, если выполняется условие:

$$f_d \geq 2 * f_{max}, \tag{4}$$

Здесь f_{max} – наивысшая частота спектра сигнала.

Квантование.

Количество уровней квантования определяется по формуле:

$$\mathrm{N} = 2^{\mathrm{b}}, \tag{5}$$

где: b – разрядность.

Шаг квантования q задаётся шириной диапазона измеряемых значений:

$$q = \frac{x_{max} - x_{min}}{N-1}, \tag{6}$$

Ошибка квантования из-за округления значения дискретизированного сигнала определяется формулой:

$$\varepsilon(n) = x_k(n) - x_d(n), \tag{7}$$

где: $x_d(n)$ – дискретные значения исходного сигнала, $x_k(n)$ – квантованные значения.

Максимальная по модулю ошибка квантования равна:

$$|\varepsilon_{max}| = \frac{q}{2}, \tag{8}$$

Теоретическая дисперсия ошибки распределения (ошибка распределена равномерно на интервале $[-\frac{q}{2}, \frac{q}{2}]$) :

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{q^2}{12}, \tag{9}$$

Среднее значение ошибки при симметричном распределении равно нулю.

Среднеквадратичная ошибка (Mean Squared Error, MSE) позволяет оценить усреднённое квадратичное отклонение восстановленного сигнала от исходного и вычисляется по формуле

$$MSE = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} (x(t_i) - \hat{x}(t_i)\,)^2, \tag{10}$$

где $\mathrm{x}(t_i)$ – значение исходного сигнала в момент времени t_i, $\hat{x}(t_i)$ – значение восстановленного сигнала, а M – число точек наблюдения.

Цифровое кодирование квантованных уровней.

После квантования каждый уровень $x_q[n]$необходимо закодировать в двоичной форме, чтобы его можно было хранить и передавать в цифровой системе.

Способы кодирования:

Прямой код:

Структура кода: один старший бит – знак (0 – положительный, 1 – отрицательный), остальные $(b-1)$ бит – величина (модуль амплитуды).

Преимущество – простота определения знака.

Недостатки:

- Два представления нуля ($+0$ и -0).
- Меньшая устойчивость к арифметическим операциям (сложнее суммировать сигналы).

Обратный код

Для отрицательных чисел берется побитовое отрицание положительной величины.

Преимущество – упрощает некоторые арифметические операции.

Недостаток – также два нуля (+0 и -0).

Дополнительный код:

Для отрицательных чисел к положительному представлению добавляется 1 после побитового отрицания.

Преимущества:

- Устраняет проблему двойного нуля.
- Арифметические операции (сложение, вычитание) реализуются проще.
- Широко используется в современных цифровых системах.

Прямой код в контексте АЦП

Если сигнал квантован и представлен в прямом коде, процесс кодирования выполняется следующим образом:

1. Определяется знак квантованного уровня: $s = 0$ для $x_q[n] \geq 0$, $s = 1$ для $x_q[n] < 0$.

2. Определяется модуль амплитуды $|\ x_q[n]\ |$ и сопоставляется с ближайшим числовым индексом уровня (0 до $2^{b-1} - 1$).
3. Полученный индекс записывается в $b - 1$ бит.
4. Итоговый двоичный код формируется как s+ $b - 1$ бит величины.

4. Выполнение задания:

Первоначально было выполнено имитационное моделирование аналогового гармонического сигнала одной частоты, описываемого формулой (1).

Полученный сигнал представлен в заданном промежутке времени [18;41] и в промежутке [18;19] для наглядности на рисунках 2.1 и 2.2, соответственно:

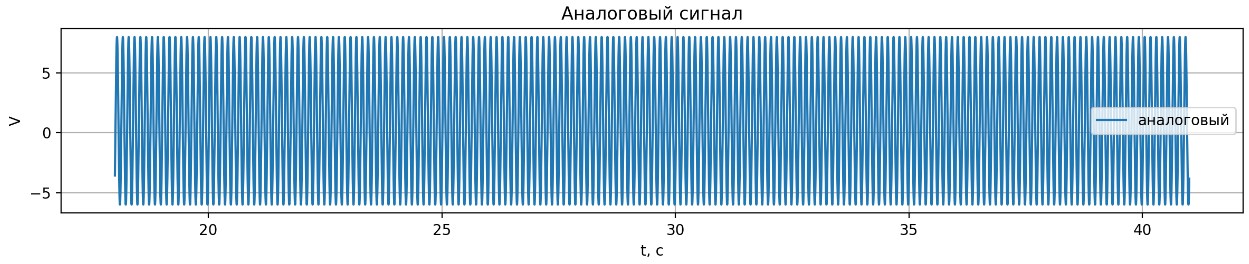

Рисунок 2.1 – Аналоговый сигнал

Рисунок 2.2 – Аналоговый сигнал в увеличенном масштабе

Далее проведена дискретизация по времени.

Частота дискретизации была выбрана равная 100 Гц, исходя из требований теоремы Котельникова, по формуле (4) была высчитана минимальная подходящая $f_{d,min} = 2 \cdot 8 = 16$ Гц, так как в нашем случае частота гармонического сигнала $f = 8$ Гц. Чтобы уменьшить искажения ступенчатой аппроксимации (эффект лестницы), улучшить визуализацию на графиках, снизить вероятность наложения спектров (алиасинга) из-за неточностей генерации и квантования, была выбрана в использование $f_d = 100$ Гц

Полученный дискретный сигнал показан на рисунках 3.1 и 3.2:

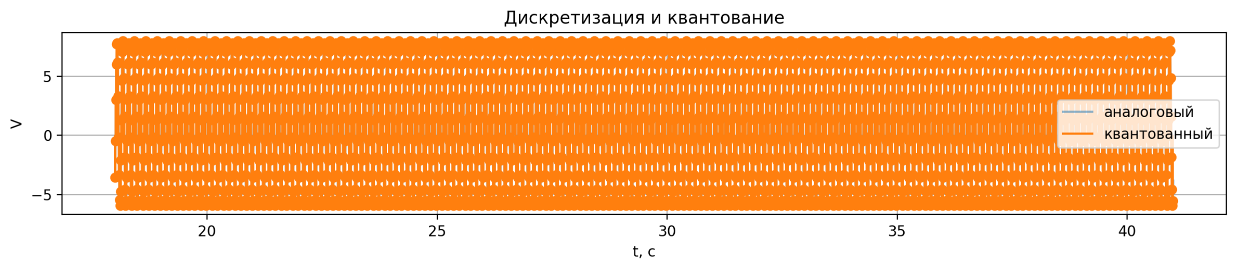

Рисунок 3.1 – Дискретизированный сигнал

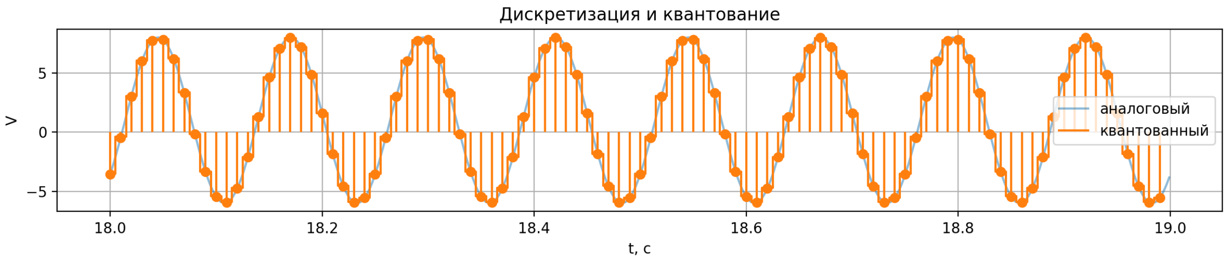

Рисунок 3.2 – Дискретизированный сигнал в увеличенном масштабе

Второй этап выполнения работы представляет из себя квантование сигнала по уровню. Была выбрана разрядность b = 8 бит, что даёт 256 уровней квантования. Шаг квантования рассчитан по формуле (6), $q\ =\ \frac{8-(-6)}{256-1} = \frac{14}{255}\ \approx 0.0549\text{В}$

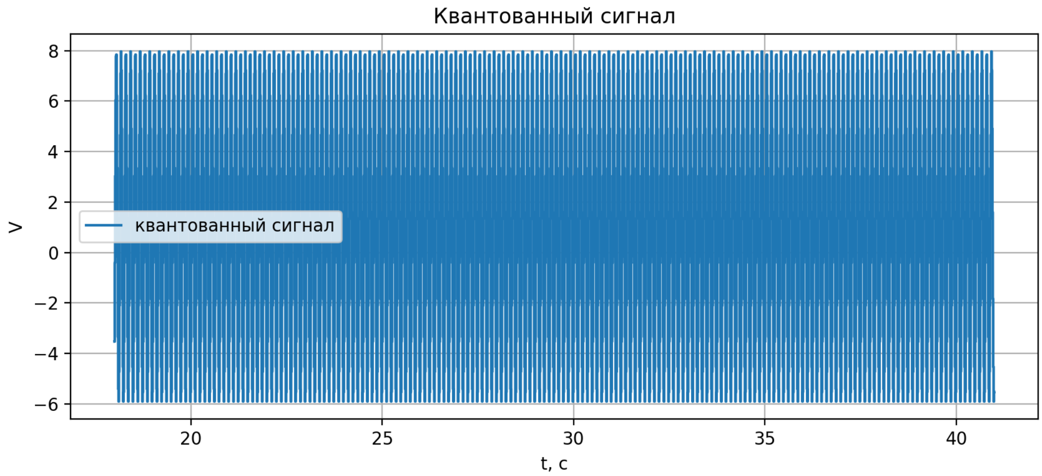

Рисунок 4.1 – Квантованный сигнал

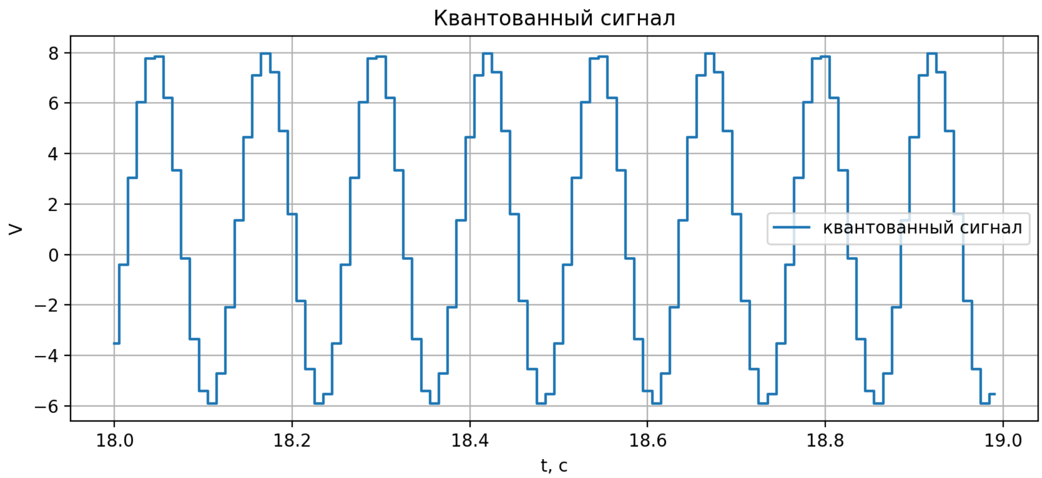

Рисунок 4.2 – Квантованный сигнал, масштаб увеличен

Третий этап выполнения задания: реализовано цифровое кодирование квантованных уровней. При кодировке был использован прямой код: 1-й бит – знак (1 = отрицательное значение, 0 = ноль/положительное), оставшиеся b−1 бит – модуль (целое число, соответствующее уровню). Цифровой сигнал в разном масштабе представлен на рисунках 5.1-5.2:

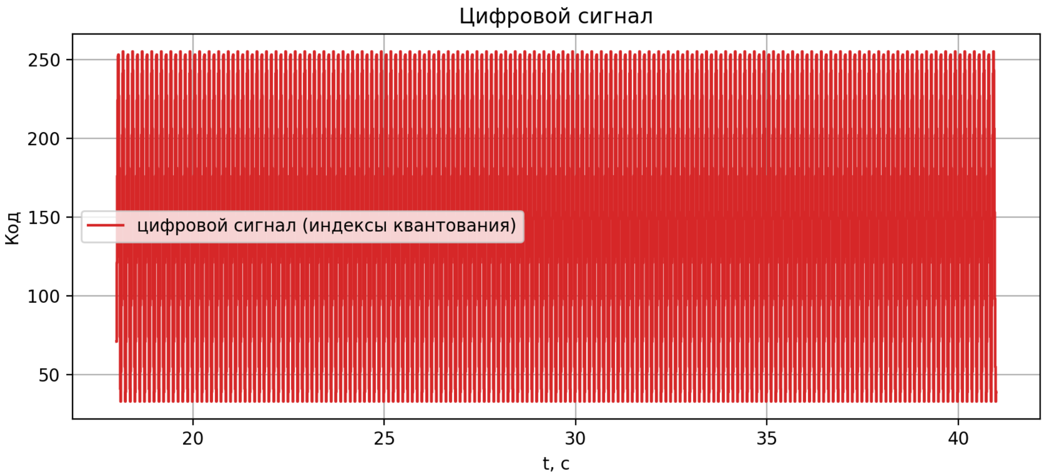

Рисунок 5.1 – Цифровой сигнал

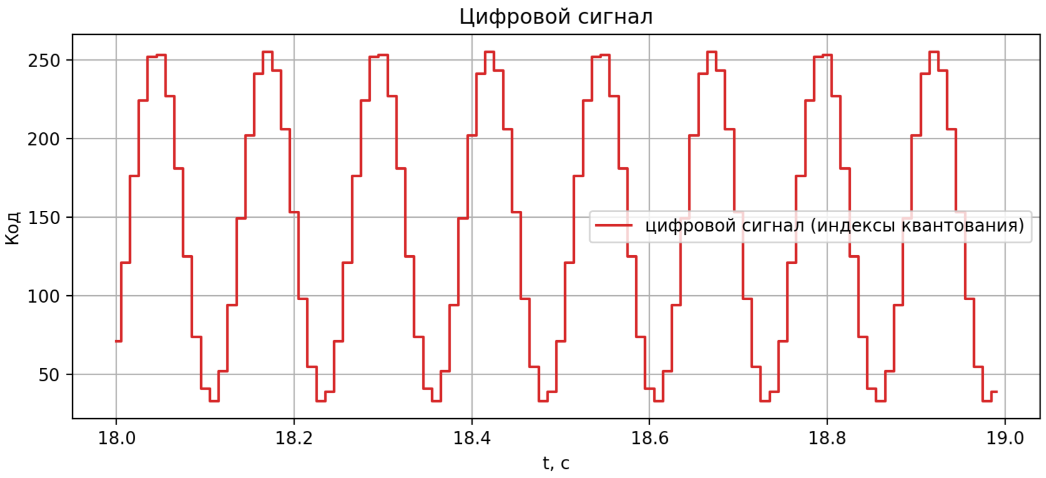

Рисунок 5.2 – Цифровой сигнал, масштаб увеличен

Четвёртый этап – оценка шума квантования сигнала. Был построен график ошибки квантования, на промежутке всего квантования сигнала и в увеличенном масштабе для наглядности (рисунки 6.1-6.2):

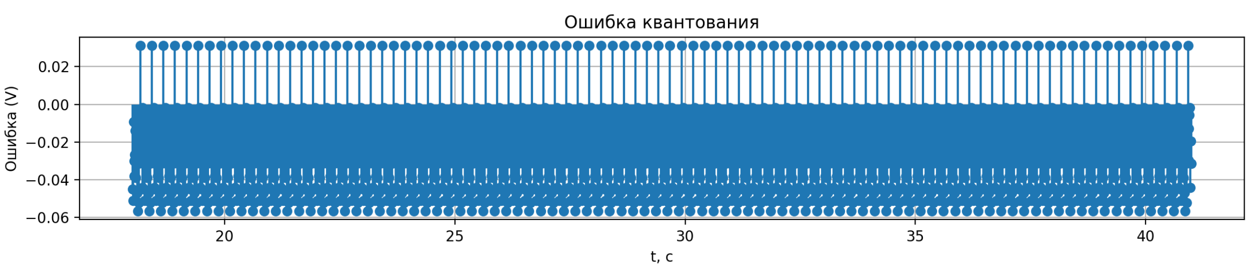

Рисунок 6.1 – График ошибки квантования

Рисунок 6.2 – График ошибки квантования, масштаб увеличен

А также построена гистограмма статистического распределения абсолютной погрешности квантования (рисунок 7):

Рисунок 7 – Гистограмма абсолютной ошибки квантования

Полученные графики были проанализированы и результаты были сопоставлены с теоретическими значениями:

Теоретические значения:

Максимальная по модулю ошибка квантования (формула (8)) $|\varepsilon_{\max}| = \frac{q}{2} \approx$ 0,02745 В

Теоретическая дисперсия (формула (9)) $\sigma_\varepsilon^2 = \frac{q^2}{12} \approx 0.000251$ В^2

Теоретическое стандартное отклонение ошибки $\sigma_\varepsilon \approx 0.0181$ В

Эмпирическая оценка:

Используя смоделированные дискретные значения сигнала и его квантованные уровни, была вычислена ошибка квантования для каждого отсчёта.

$\sigma_{\text{эмпирическая}} \approx 0.019596$ В

Экспериментальная максимальная погрешность = 0.0270 В (что меньше, чем теоретический максимум)

Экспериментальная дисперсия = 0.000243 $В^2$

Среднее значение погрешности = 0.001094 В

Эти значения хорошо согласуются с теоретическими расчётами ($\sigma_\varepsilon^2 = 0.000325$ $В^2$, $\sigma_\varepsilon \approx 0.0181$ В), что подтверждает правильность модели квантования и реализации АЦП с выбранной разрядностью.

5. Вывод:

В ходе лабораторной работы было проведено практическое исследование этапов аналого-цифрового преобразования гармонического сигнала.

Основные результаты и наблюдения:

1. **Аналоговый сигнал** $x(t) = A_0 + A\cos(2\pi f t + \varphi)$ успешно сгенерирован на временном интервале $t \in [18; 41]$ с заданными параметрами $A = 7\ \text{В}, A_0 = 1\ \text{В}, f = 8\ \text{Гц}, \varphi = 4$ радиан. График показал непрерывную гармоническую форму сигнала.
2. **Дискретизация сигнала** с частотой $f_d = 100$ Гц продемонстрировала соответствие теоремы Котельникова (частота дискретизации более чем в два раза превышает максимальную частоту сигнала), что позволило корректно восстановить форму сигнала без искажений.
3. **Квантование и цифровое кодирование** выполнено с разрядностью $b = 8$ бит и использованием прямого кода. Ступенчатый график квантованных уровней показал потерю информации на уровне деталей сигнала, характерную для дискретного представления.
4. **Ошибка квантования**. Экспериментальная максимальная погрешность = 0.0270 В меньше, чем теоретический максимум = $0{,}02745$ В. Эмпирическая дисперсия ошибки квантования $\sigma_{\text{эмпирическая}} \approx 0.0184\ \text{В}$ близка к теоретической $\sigma_\varepsilon \approx 0.0181\ \text{В}$, что подтверждает корректность проведённого эксперимента.
5. **Гистограмма абсолютной ошибки квантования** показала равномерное распределение ошибки на интервале $[-\frac{q}{2}, \frac{q}{2}]$, что полностью согласуется с теоретическим предположением для равномерного квантования.

Итак, исследование показало, что качественное цифровое представление сигнала достигается при частоте дискретизации, превышающей вдвое максимальную частоту сигнала, и при достаточной разрядности АЦП. Квантование неизбежно вносит шум, но его параметры (максимальная ошибка, дисперсия, форма распределения) согласуются с теорией, что подтверждает правильность проведения работы и позволяет использовать полученные знания для анализа и проектирования систем аналого-цифровой обработки сигналов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Сотников А.А. – Имитационное моделирование сигналов информационно-управляющих систем: практикум / А.А.Сотников, Т.А.Ким, И.А.Розанов. – СПб.: Наукоемкие технологии, 2022. – 147с.
2. Библиотека NumPy в Python – URL: https://numpy.org/doc/2.3/user/index.html#user (дата обращения 21.09.2025)
3. Matplotlib Development Team. Matplotlib: Visualization with Python – URL: https://matplotlib.org/stable/index.html (дата обращения: 11.09.2025).
4. SkyPro. MSE и MAE: ключевые метрики для оценки точности прогнозирования – URL: https://sky.pro/wiki/analytics/mse-i-mae-klyuchevye-metriki-dlya-otsenki-tochnosti-prognozirovaniya/ (дата обращения: 28.09.2025).
5. Средние ошибки и их квадраты / Хабр – URL: https://habr.com/ru/articles/823644/ (дата обращения: 28.09.2025)
6. Простыми словами про метрики в ИИ. Регрессия. MSE, RMSE, MAE, R-квадрат, MAPE / Хабр – URL: https://habr.com/ru/articles/820499/ (дата обращения: 28.09.2025)
7. Основы цифровой обработки сигналов – URL: https://hub.exponenta.ru/post/osnovy-tsos-teorema-kotelnikova-atsp-i-tsap484 (дата обращения: 12.10.2025)

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Листинг Программы

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd

# ==============================
# 1. ИНИЦИАЛИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ
# ==============================
# Заданные параметры сигнала
t_min = 18.0
t_max = 41.0
A = 7.0
A0 = 1.0
f = 8.0         # Гц
phi = 4.0       # рад

# Параметры АЦП
f_d = 100.0     # Гц (частота дискретизации)
b = 8           # бит (разрядность)
code_type = "прямой"  # тип кода

# ==============================
# 2. ГЕНЕРАЦИЯ СИГНАЛОВ
# ==============================
def generate_signals(t_min, t_max, A, A0, f, phi, f_d, dt_high=0.001):
    # Временные массивы
    t_high = np.arange(t_min, t_max, dt_high)
    t_samp = np.arange(t_min, t_max, 1.0 / f_d)
    # Аналоговый сигнал
    x_high = A0 + A * np.cos(2 * np.pi * f * t_high + phi)
    x_samp = A0 + A * np.cos(2 * np.pi * f * t_samp + phi)
    return t_high, x_high, t_samp, x_samp

# ==============================
# 3. КВАНТОВАНИЕ
# ==============================
def quantize_signal(x_samp, b):
    xmin = np.min(x_samp)
    xmax = np.max(x_samp)
    Vref = max(abs(xmin), abs(xmax))    # симметричный диапазон
    Vmin, Vmax = -Vref, Vref

    levels = 2 ** b
    Delta = (Vmax - Vmin) / levels

    q_index = np.round((x_samp - Vmin) / Delta).astype(int)
    q_index = np.clip(q_index, 0, levels - 1)

    x_quant = Vmin + (q_index + 0.5) * Delta
    return x_quant, q_index, Vmin, Vmax, Delta

# ==============================
# 4. КОДИРОВАНИЕ (ПРЯМОЙ КОД)
# ==============================
def sign_magnitude_code(q_index, b):
    levels = 2 ** b
    mid = levels // 2
    codes = []
    for idx in q_index:
        sign = 1 if idx < mid else 0
        if sign == 1:
```

```
            mag_idx = mid - 1 - idx
        else:
            mag_idx = idx - mid
        mag_bits = format(int(mag_idx), f'0{b-1}b')
        code = str(sign) + mag_bits
        codes.append(code)
    return codes

# ==============================
# 5. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ
# ==============================
def plot_all(t_high, x_high, t_samp, x_samp, x_quant, quant_error):
    fig, axs = plt.subplots(3, 1, figsize=(12, 10), constrained_layout=True)

    # Аналоговый сигнал
    axs[0].plot(t_high, x_high, label='аналоговый')
    axs[0].set_title("Аналоговый сигнал")
    axs[0].set_xlabel("t, c")
    axs[0].set_ylabel("V")
    axs[0].grid(True)
    axs[0].legend()

    # Дискретный + квантованный
    axs[1].plot(t_high, x_high, 'C0', alpha=0.5, label='аналоговый')
    axs[1].stem(t_samp, x_samp, markerfmt='C1o', linefmt='C1-', basefmt=" ")
    axs[1].step(t_samp, x_quant, where='mid', label='квантованный',
linewidth=1.5)
    axs[1].set_title("Дискретизация и квантование")
    axs[1].set_xlabel("t, c")
    axs[1].set_ylabel("V")
    axs[1].grid(True)
    axs[1].legend()

    # Ошибка квантования
    axs[2].stem(t_samp, quant_error, basefmt=" ")
    axs[2].set_title("Ошибка квантования")
    axs[2].set_xlabel("t, c")
    axs[2].set_ylabel("Ошибка (V)")
    axs[2].grid(True)

    plt.show()
# ==============================
# Квантованный сигнал (отдельно)
# ==============================
def plot_quantized_signal(t_samp, x_quant):
    plt.figure(figsize=(10,4))
    plt.step(t_samp, x_quant, where='mid', label='квантованный сигнал',
linewidth=1.5)
    plt.title("Квантованный сигнал")
    plt.xlabel("t, c")
    plt.ylabel("V")
    plt.grid(True)
    plt.legend()
    plt.show()

# ==============================
# Цифровой сигнал (отдельно, по индексам квантования)
# ==============================
def plot_digital_signal(t_samp, q_index):
    plt.figure(figsize=(10,4))
    plt.step(t_samp, q_index, where='mid', label='цифровой сигнал (индексы
квантования)', color='C3')
    plt.title("Цифровой сигнал")
```

```
    plt.xlabel("t, c")
    plt.ylabel("Код")
    plt.grid(True)
    plt.legend()
    plt.show()

# ==============================
# 6. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
# ==============================
def quantization_statistics(x_samp, x_quant, Delta):
    error = x_samp - x_quant
    abs_error = np.abs(error)
    mse = np.mean(error ** 2)
    std = np.std(error)
    theoretical_var = (Delta ** 2) / 12
    theoretical_std = np.sqrt(theoretical_var)

    print("=== Статистика квантования ===")
    print(f"MSE (эмпирическая): {mse:.6f} В²")
    print(f"σ (эмпирическая): {std:.6f} В")
    print(f"Теоретическая дисперсия Δ²/12: {theoretical_var:.6f} В²")
    print(f"Теоретическая σ: {theoretical_std:.6f} В")

    # Гистограмма ошибок
    plt.figure(figsize=(8, 4))
    plt.hist(abs_error, bins=30)
    plt.title("Гистограмма абсолютной ошибки квантования |e|")
    plt.xlabel("|e|, В")
    plt.ylabel("Частота")
    plt.grid(True)
    plt.show()

# ==============================
# ГЛАВНЫЙ БЛОК ПРОГРАММЫ
# ==============================
if __name__ == "__main__":
    # 1. Генерация сигналов
    t_high, x_high, t_samp, x_samp = generate_signals(t_min, t_max, A, A0, f,
phi, f_d)

    # 2. Квантование
    x_quant, q_index, Vmin, Vmax, Delta = quantize_signal(x_samp, b)

    # 3. Кодирование
    codes = sign_magnitude_code(q_index, b)

    # (опционально) первые 12 отсчётов в таблицу
    df = pd.DataFrame({
        "t, c": t_samp[:12],
        "x_samp, V": x_samp[:12],
        "x_quant, V": x_quant[:12],
        "q_index": q_index[:12],
        "code (прямой)": codes[:12]
    })
    print("\n=== Первые 12 отсчётов ===")
    print(df.to_string(index=False))

    # 4. Построение графиков
    quant_error = x_samp - x_quant
    plot_all(t_high, x_high, t_samp, x_samp, x_quant, quant_error)

    # Квантованный сигнал
    plot_quantized_signal(t_samp, x_quant)
```

```
# Цифровой сигнал
plot_digital_signal(t_samp, q_index)

# 5. Статистика
quantization_statistics(x_samp, x_quant, Delta)
```