ГУАП

КАФЕДРА № 42

ОТЧЕТ
ЗАЩИЩЕН С ОЦЕНКОЙ ____________________

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

канд. техн. наук, доцент		А.В. Аграновский
должность, уч. степень, звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

ОТЧЕТ О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2

Восстановление непрерывных сигналов по дискретным измерениям. Теорема Котельникова.

по курсу: ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА И ПЕРЕДАЧА СИГНАЛОВ

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ

СТУДЕНТ ГР. №	4329		Д.С. Шаповалова
		подпись, дата	инициалы, фамилия

Санкт-Петербург 2025

1. Цель работы:

Изучить возможность восстановления значения непрерывного сигнала из значения непрерывного сигнала, из значений точных дискретных измерений.

2. Задание:

Задания выполняются на компьютере с использованием любого языка высокого уровня. Необходимо показать зависимость качества восстановления сигнала от величины интервала дискретизации Δt (то есть, фактически, от количества дискретных отсчётов, приходящихся на один период). Для этого необходимо:

1) показать процессы с высоким качеством восстановления заданного (в соответствие с номером варианта) непрерывного сигнала
2) показать процессы с низким качеством такого восстановления
3) показать примеры процессов, где сигнал фактически не восстанавливается.

Общее количество таких процессов должно быть не менее трёх.

Вариант задания выбран под номером 3:

3) фрагмент антисимметричной пилообразной функции с симметричными полуволнами и с периодом, немного меньшим, чем интервал наблюдения:

$$y(t) = 6\cdot\arcsin(\sin(\omega\cdot t)), \qquad \text{где} \quad \omega > \frac{2\pi}{N\cdot\Delta t},$$

Рисунок 1.1 – Вариант 3

3. Теоретические сведения:

Дискретизация сигнала.

Дискретизация заключается в представлении непрерывного сигнала $y(t)$ последовательностью его отсчётов во времени.

Пусть шаг дискретизации равен $\Delta\, t$, тогда дискретные значения сигнала:

$$y[k] \; = \; y(t)|_{t\,=\,k\,\Delta\,t}, \quad k \in Z, \tag{1}$$

Частота дискретизации:

$$f_s \; = \frac{1}{\Delta\, t}, \tag{2}$$

Теорема Котельникова (теорема отсчётов).

Теорема утверждает: если сигнал ограничен по спектру

$$|f| \leq \; f_{max}, \tag{3}$$

то он может быть полностью восстановлен по своим отсчётам, если выполняется условие:

$$f_s \geq \; 2 * \; f_{max}, \tag{4}$$

Здесь f_{max} – наивысшая частота спектра сигнала. Это условие также называют критерием Найквиста.

Формула восстановления сигнала.

Для непрерывного сигнала y(t), дискретизированного с шагом

$$\Delta t = \frac{1}{f_s}, \tag{5}$$

восстановление осуществляется по формуле:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y[k] \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t - k\Delta t}{\Delta t}\right),$$

где

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

Рисунок 1.2 – Формула восстановления дискретизированного сигнала

Данная формула – математическое выражение интерполяции Котельникова.

Явление алиасинга.

Если условие

$$f_s \geq 2 * f_{max}, \tag{6}$$

не выполняется, происходит наложение спектров, или алиасинг. Это приводит к искажению восстановленного сигнала: высокочастотные составляющие принимаются за более низкие.

Временной аналог — восстановленный сигнал сильно отличается от исходного.

Спектральные особенности выбранного сигнала.

Рассматриваемый сигнал варианта 3:

$$y(t) = 6 * arcsin\big(sin(\omega * t)\big), \tag{7}$$

имеет пилообразную форму. Его спектр содержит фундаментальную частоту

$$f_0 = \frac{\omega}{2 * \pi}, \tag{8}$$

а также все нечётные гармоники $(3f_0, 5f_0, 7f_0, \dots)$.

Теоретически спектр бесконечен, поэтому условие теоремы Котельникова строго не может быть выполнено. На практике используют понятие эффективной полосы частот f_{eff} – это диапазон, где сосредоточена основная часть энергии сигнала (например, 95–99%).

Тогда для хорошего восстановления требуется:

$$f_s \geq 2 * f_{eff}, \tag{9}$$

Период и количество отсчётов на период.

Период сигнала:

$$T = \frac{2 * \pi}{\omega}, \tag{10}$$

Количество отсчётов, приходящихся на один период:

$$N_T = \frac{T}{\Delta t} = \frac{T}{T_{obs}/N} = \frac{N*T}{T_{obs}}, \tag{11}$$

Именно это число напрямую отражает качество восстановления: чем больше N_T, тем лучше воспроизводится форма исходного сигнала.

Оценка качества восстановления.

Для количественного анализа используется метрика среднеквадратичной ошибки (RMS):

$$E_{\mathrm{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left(y_{\mathrm{true}}(t_i) - y_{\mathrm{rec}}(t_i)\right)^2},$$

Рисунок 1.3 – Формула ошибки восстановления

где $y_{true}(t)$ – исходный сигнал, $y_{rec}(t)$ – восстановленный, (M) – количество точек сравнения.

Чем меньше E_{RMS}, тем выше качество восстановления.

4. Выполнение задания:

Для выполнения задания построим как минимум три графика, на которых изобразим исходный пилообразный сигнал, отсчёты, с помощью которых проведём дискретизацию сигнала и восстановленный сигнал, а также рассчитанную ошибку восстановления.

Ниже представлены графики, которые мы получили строя исходный непрерывный пилообразный сигнал, но с каждым построением изменяя количество отсчётов – частоту дискретизации сигнала.

Коротко о сигнале: имеет пилообразную форму, содержит множество гармонических составляющих, поэтому не ограничен по спектру.

Интервал наблюдения выбран равным:

$$T_{obs} = 2\pi, \tag{12}$$

Для восстановления сигнала использовалась теорема Котельникова и метод sinc-интерполяции.

Были рассмотрены различные значения числа отсчётов N на интервале, что соответствует разным шагам дискретизации:

$$\Delta t = \frac{T_{obs}}{N}, \tag{13}$$

Для каждого выбранного числа отсчётов – значения N – были выполнены следующие шаги:

- построен исходный непрерывный сигнал на плотной сетке точек
- вычислены дискретные отсчёты в выбранных точках:

$$t_k = k * \Delta t, \tag{14}$$

- по этим отсчётам восстановлен сигнал с использованием sinc-интерполяции
- на одном графике показаны исходный сигнал, дискретные отсчёты и восстановленный сигнал

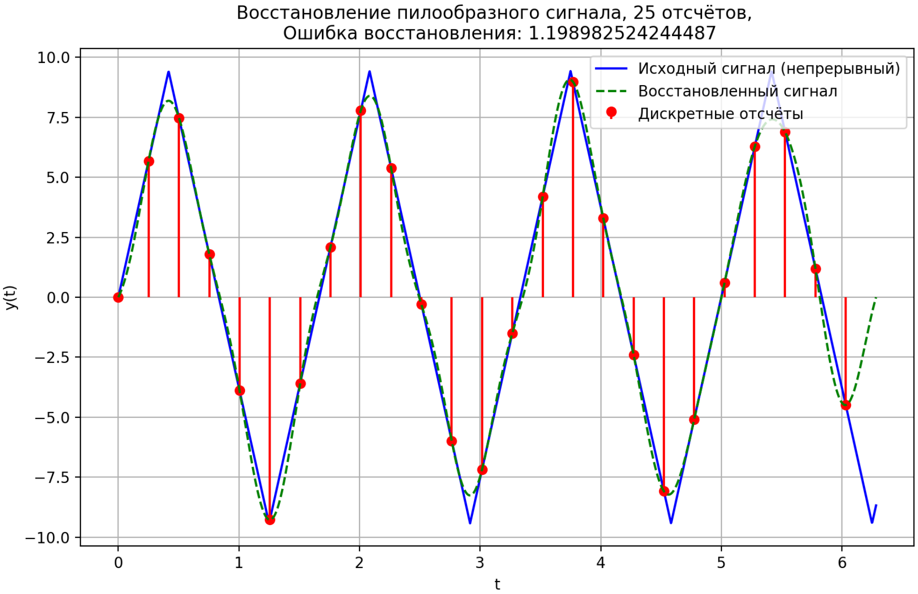

Рисунок 2.1 – Исходный и восстановленные сигналы, количество отсчётов = 25

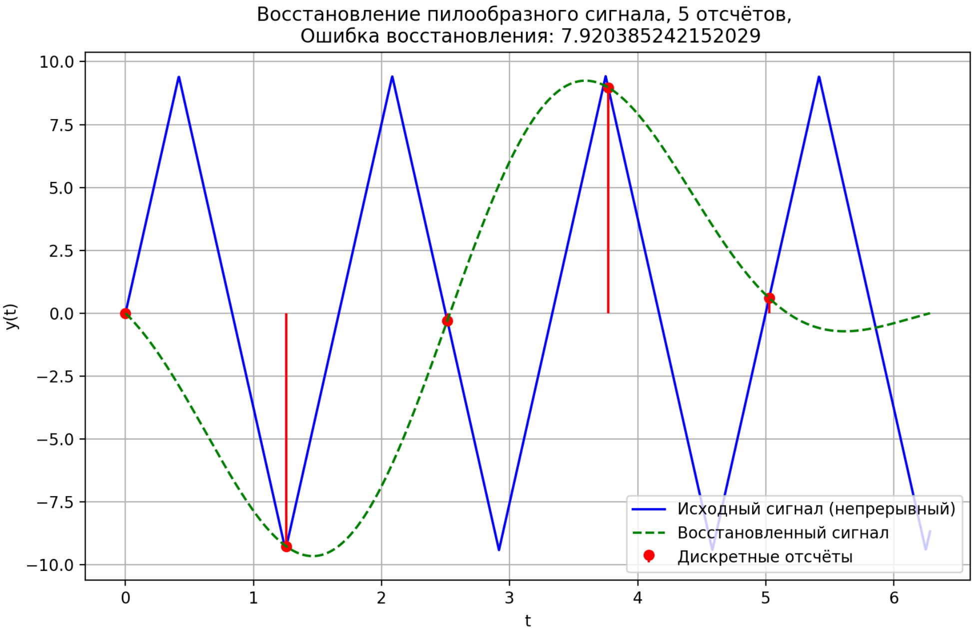

Рисунок 2.2 – Исходный и восстановленные сигналы, количество отсчётов = 5

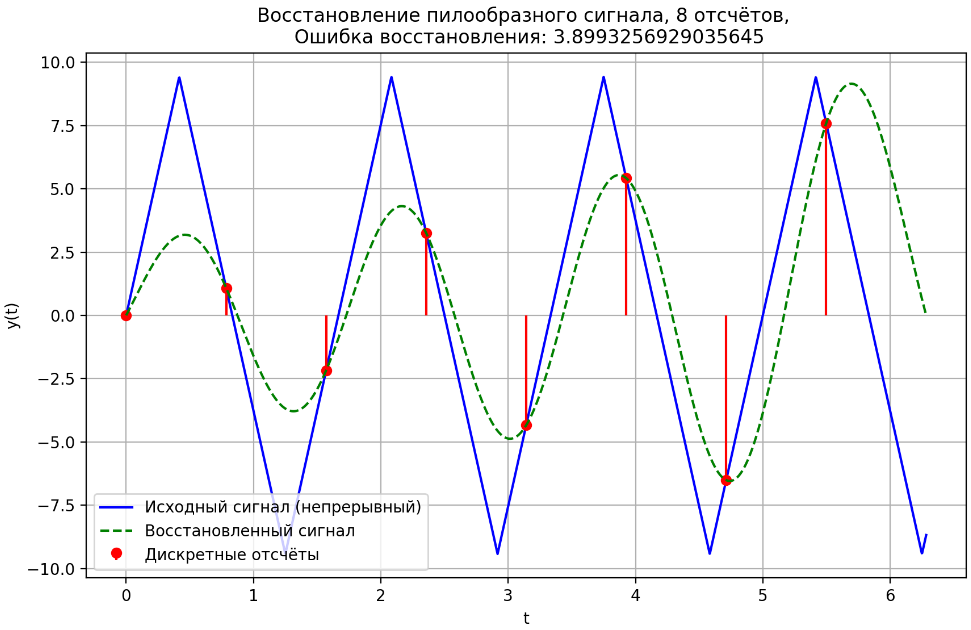

Рисунок 2.3 – Исходный и восстановленные сигналы, количество отсчётов = 8

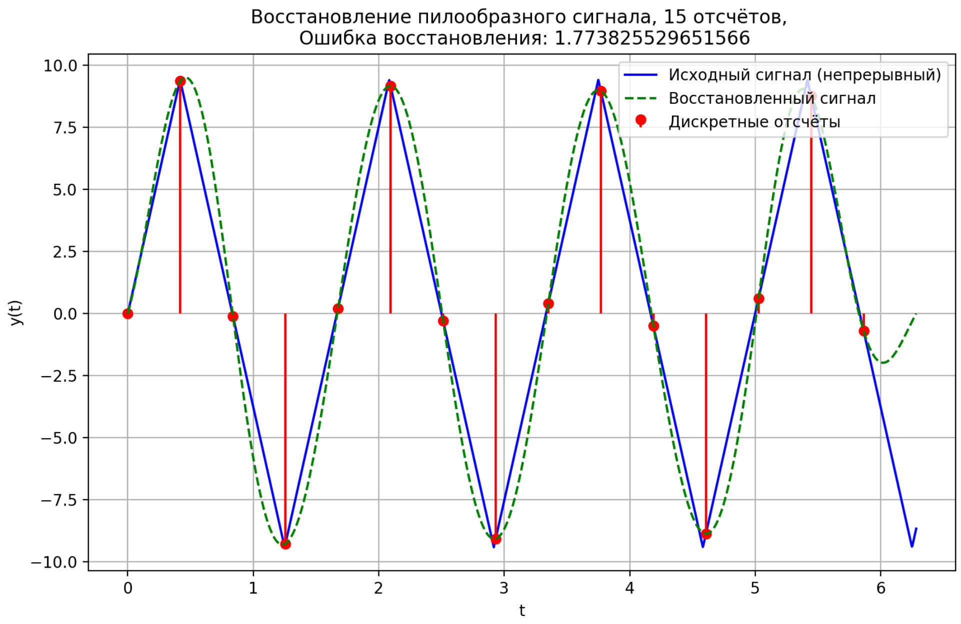

Рисунок 2.4 – Исходный и восстановленные сигналы, количество отсчётов = 15

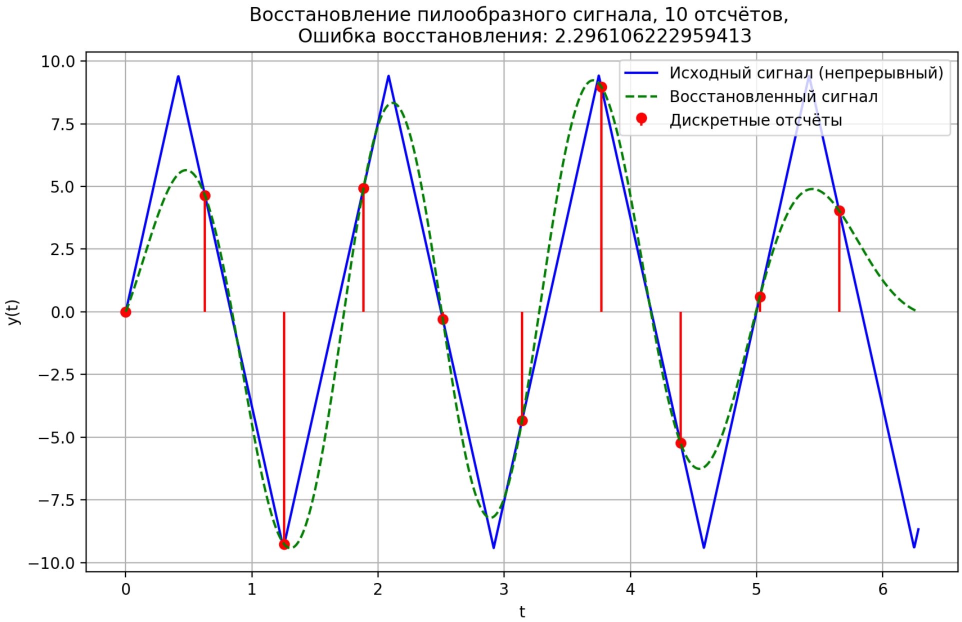

Рисунок 2.5 – Исходный и восстановленные сигналы, количество отсчётов = 10

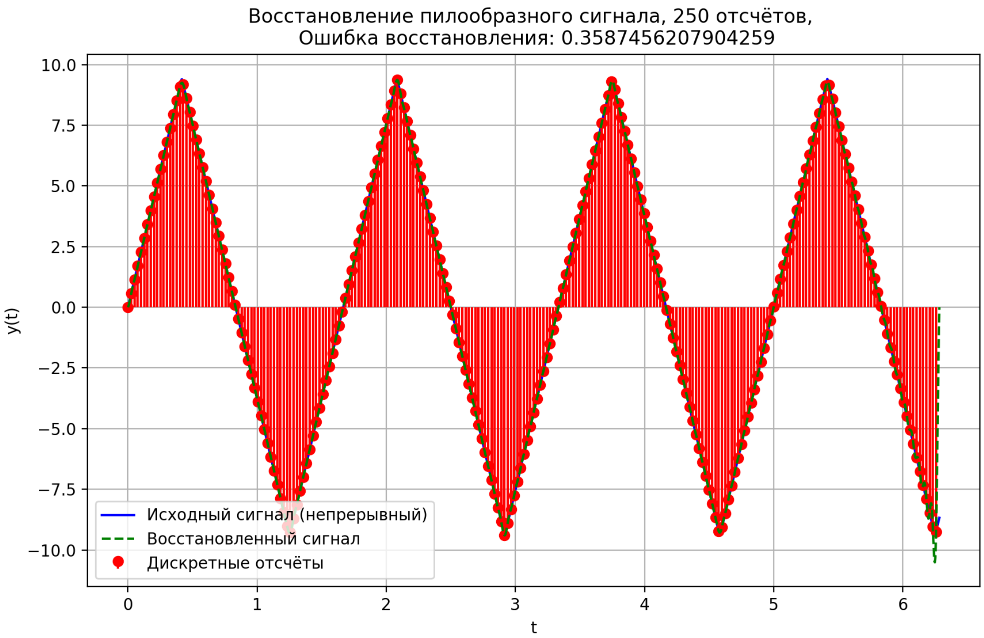

Рисунок 2.6 – Исходный и восстановленные сигналы, 250 отсчётов

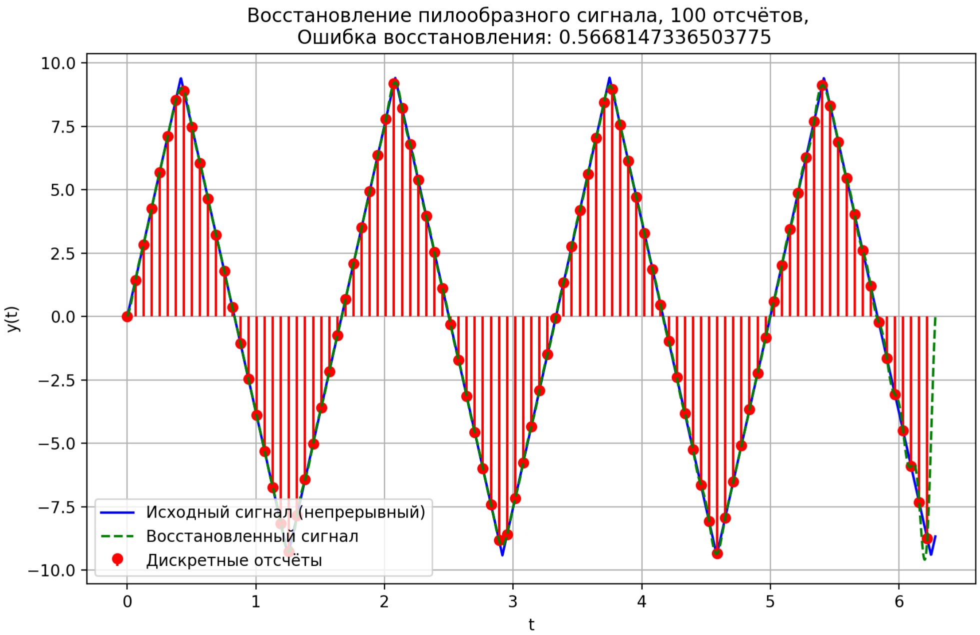

Рисунок 2.7 – Исходный и восстановленные сигналы, 100 отсчётов

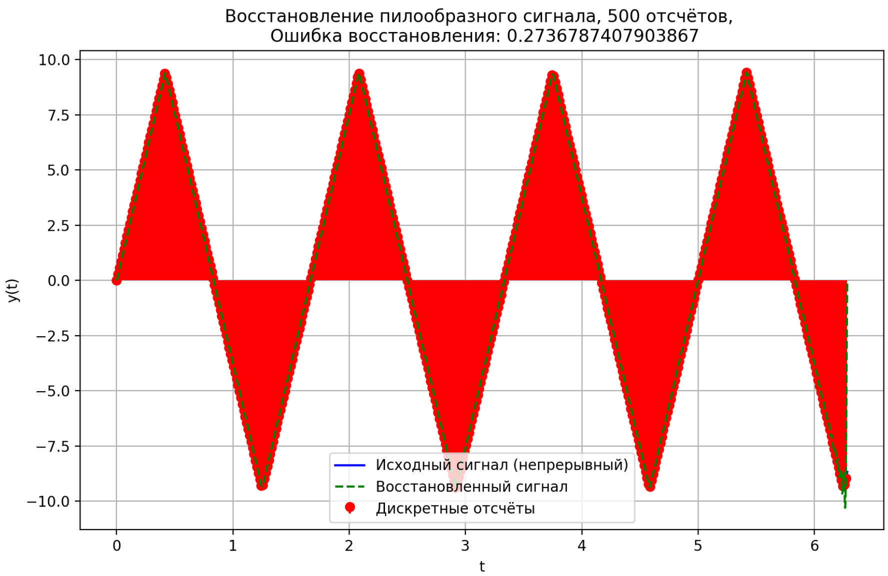

Рисунок 2.8 – И сходный и восстановленные сигналы, 500 отсчётов

Для анализа зависимости качества восстановления от количества отсчётов построены графики при следующих значениях (N):

- (N = 25) – восстановление удовлетворительное, но видны искажения на резких фронтах;
- (N = 5) – очень низкая частота дискретизации, сильные искажения, сигнал фактически не восстанавливается;
- (N = 8) – наблюдается алиасинг, форма сигнала искажена;

- (N = 15) – качество лучше, чем при 8 отсчётах, но остаются заметные искажения;
- (N = 10) – сигнал заметно искажается, восстановление низкого качества;
- (N = 250) – высокая частота дискретизации, сигнал хорошо восстанавливается;
- (N = 100) – качество восстановления высокое, форма сигнала близка к оригиналу;
- (N = 500) – очень высокая частота дискретизации, восстановленный сигнал практически совпадает с исходным.

Анализ результатов.

- При малом числе отсчётов (N = 2, 5, 8, 10) условие теоремы Котельникова не выполняется: частота дискретизации недостаточна, в спектре появляются наложения гармоник (алиасинг), восстановленный сигнал искажён. Ошибка восстановления больше 2.
- При среднем числе отсчётов (N = 15, 25) качество улучшается, но остаются заметные ошибки. Ошибка восстановления в интервале от 1 до 2.
- При большом числе отсчётов (N = 100, 250, 500) сигнал восстанавливается с высоким качеством – графики исходного и восстановленного сигнала практически совпадают. Ошибка восстановления меньше 1.

Таким образом, проделанная работа показала, что качество восстановления сигнала напрямую зависит от частоты дискретизации: чем больше отсчётов приходится на один период, тем точнее сигнал совпадает с исходным. При слишком малом числе отсчётов теорема Котельникова нарушается, и восстановление становится невозможным.

5. Вывод:

В данной лабораторной работе было исследовано восстановление непрерывного сигнала по его дискретным отсчётам на примере функции варианта 3:

$$y(t) = 6 * arcsin\big(sin(\omega * t)\big), \qquad (15)$$

Основной целью являлось изучение зависимости качества восстановления от величины интервала дискретизации Δt и количества выборок на период сигнала.

В ходе экспериментов были рассмотрены три режима дискретизации:

- при большом числе отсчётов (100-500) на период удалось получить высокое качество восстановления – форма восстановленного сигнала практически совпадает с исходной;
- при среднем числе отсчётов (15-25) появились заметные искажения, особенно в областях быстрых изменений сигнала;
- при малом числе отсчётов (<15) наблюдался эффект алиасинга, и сигнал фактически не восстанавливался.

Таким образом, было наглядно подтверждено действие теоремы Котельникова: для корректного восстановления необходима частота дискретизации, как минимум, в два раза превышающая максимальную частоту спектра исходного сигнала.

Особенность выбранного сигнала состоит в том, что он не ограничен по спектру – пилообразная форма содержит бесконечное число гармоник. Поэтому строгое выполнение теоремы Котельникова невозможно. Однако практический анализ спектра показывает, что основная часть (около 99%) энергии сосредоточена в конечной полосе частот. Для данного сигнала с $\omega = 1.2$ фундаментальная частота составляет $f_0 \approx 0.19$ Гц, но значимые гармоники поднимаются существенно выше. Практически приемлемым условием является выбор частоты дискретизации не менее чем $f_s \approx 2 * f_{eff}$, где f_{eff} – эффективная наивысшая частота, содержащая основную энергию сигнала. В наших опытах хорошее восстановление достигалось при $f_s \approx 31.8$ Гц (200 отсчётов на интервал 2π, тогда как при меньших значениях наблюдались серьёзные искажения.

В целом работа показала, что качество восстановления непрерывных сигналов напрямую зависит от частоты дискретизации. Теорема Котельникова справедливо задаёт необходимое условие, но для сигналов с бесконечным спектром важно использовать понятие эффективной полосы частот. Проведённые эксперименты наглядно продемонстрировали, что уменьшение частоты дискретизации приводит к деградации восстановления вплоть до полной утраты исходной формы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Аграновский А. В. Методические указания к лабораторной работе № 2 «Восстановление непрерывного сигнала по дискретным отсчётам. Теорема Котельникова» по дисциплине «Цифровая обработка и передача сигналов». – Санкт-Петербург: ГУАП, 2025.
2. П.В. Новиков – Задания к лабораторным работам по курсу “Системы цифровой обработки сигналов” – М.: МАИ, 2017. – 40 с.
3. Библиотека NumPy в Python – URL: https://numpy.org/doc/2.3/user/index.html#user (дата обращения 21.09.2025)
4. Matplotlib Development Team. Matplotlib: Visualization with Python – URL: https://matplotlib.org/stable/index.html (дата обращения: 11.09.2025).
5. SkyPro. MSE и MAE: ключевые метрики для оценки точности прогнозирования – URL: https://sky.pro/wiki/analytics/mse-i-mae-klyuchevye-metriki-dlya-otsenki-tochnosti-prognozirovaniya/ (дата обращения: 28.09.2025).
6. Пилообразный сигнал – URL: https://studfile.net/preview/9690421/page:5/ (дата обращения: 28.09.2025)
7. Mathway | Графический калькулятор – URL: https://www.mathway.com/ru/Graph (дата обращения: 28.09.2025)
8. Средние ошибки и их квадраты / Хабр – URL: https://habr.com/ru/articles/823644/ (дата обращения: 28.09.2025)
9. Простыми словами про метрики в ИИ. Регрессия. MSE, RMSE, MAE, R-квадрат, MAPE / Хабр – URL: https://habr.com/ru/articles/820499/ (дата обращения: 28.09.2025)

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Листинг Программы

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Вариант 3: антисимметричная пилообразная функция
def signal(t, omega=np.pi*1.2):  # можно менять omega
    return 6 * np.arcsin(np.sin(omega * t))

# Восстановление по теореме Котельникова
def reconstruct_signal(t, samples, Ts):
    y_rec = np.zeros_like(t)
    k = np.arange(len(samples))
    for i in range(len(t)):
        y_rec[i] = np.sum(samples * np.sinc((t[i] - k * Ts) / Ts))
    return y_rec

# Основные параметры
T_obs = 2 * np.pi         # интервал наблюдения
N = 25                    # количество отсчётов (можно менять)
Ts = T_obs / N            # шаг дискретизации
t_cont = np.linspace(0, T_obs, 2000)    # "идеальное" время
t_samp = np.arange(0, T_obs, Ts)        # дискретные моменты времени

# Исходный сигнал
y_true = signal(t_cont)
y_samp = signal(t_samp)

# Восстановленный сигнал
y_rec = reconstruct_signal(t_cont, y_samp, Ts)

# Ошибка восстановления
rms = np.sqrt(np.mean((y_true - y_rec)**2))

# Построение графиков
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(t_cont, y_true, 'b', label="Исходный сигнал (непрерывный)")
plt.stem(t_samp, y_samp, linefmt='r-', markerfmt='ro', basefmt=" ",
label="Дискретные отсчёты")
plt.plot(t_cont, y_rec, 'g--', label="Восстановленный сигнал")
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("y(t)")
plt.title(f"Восстановление пилообразного сигнала, {N} отсчётов, \n Ошибка
восстановления: {rms}")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```