ГУАП

КАФЕДРА № 42

ОТЧЕТ
ЗАЩИЩЕН С ОЦЕНКОЙ ____________________

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

старший преподаватель		Т.А. Суетина
должность, уч. степень, звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

ОТЧЕТ О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №4

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И АПРОКСИМАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

по курсу: Техника аудиовизуальных средств информации

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ

СТУДЕНТ ГР. №	4329		Д.С. Шаповалова
		подпись, дата	инициалы, фамилия

Санкт-Петербург 2025

1. Цель работы:

Получить теоретические знания по методам интерполяции и аппроксимации, на практике реализовать полученные знания.

2. Задание:

В соответствие с исходными данными выполнить:

1. Линейную интерполяцию;
2. Аппроксимацию полиномом третьей степени, вычислить ошибку аппроксимации;
3. На одном графике представить результаты вычислений и сделать соответствующие выводы.

Таблица 1 - Исходные данные для 23 варианта:

x	-2,0	-1,2	-0,4	0,4	1,2	2,0	2,8	3,6
y	-1,72	-1,03	-0,61	-0,35	0,36	0,54	1,28	1,69
x	4,4	5,2	6,0	6,8	7,6			
y	2,07	2,52	2,93	3,59	4,04			

3. Ход работы:

Линейная интерполяция

Интерполяция — построение кривой, точно проходящей через набор базовых точек, на основе которых выполняется построение кривой.

Линейная интерполяция заключается в соединении точек с заданными координатами прямолинейными отрезками. Уравнения каждого отрезка полученной ломанной разные и определяются уравнением прямой проходящей через две точки:

$$\frac{y-y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} = \frac{x-x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \qquad (1)$$

где y_i и x_i, y_{i-1} и x_{i-1} – координаты границ отрезка $[(y_i, x_i), (y_{i-1}, x_{i-1})]$, y – значение функции прямой, x – аргумент функции прямой.

Если привести уравнение к стандартному виду линейной функции, получается выражение:

$$y = a_i x + b_i, \qquad (2)$$

где $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, a_i и b_i – коэффициенты прямой между i-ой и i-1-ой точками.

При этом коэффициенты определяются выражениями:

$$a_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \qquad (3)$$

$$b_i = y_{i-1} - a_i\, x_{i-1}, \qquad (4)$$

Был разработан алгоритм в Matlab, который реализует приведённые формулы: вычисление a_i, b_i для каждого отрезка; с помощью входящих в определённый отрезок значений x, вычисляются значения y.

a

1x13 double

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	0.8625	0.5250	0.3250	0.8875	0.2250	0.9250	0.5125	0.4750	0.5625	0.5125	0.8250	0.5625
2													

Рисунок 1 – Полученные значения коэффициента a_i

a b

1x13 double

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	0.0050	-0.4000	-0.4800	-0.7050	0.0900	-1.3100	-0.1550	-0.0200	-0.4050	-0.1450	-2.0200	-0.2350
2													

Рисунок 2 – Полученные значения коэффициента b_i

	A	B
1	-2	-1,72
2	-1,951758794	-1,67839196
3	-1,903517588	-1,63678392
4	-1,855276382	-1,595175879
5	-1,807035176	-1,553567839
6	-1,75879397	-1,511959799
7	-1,710552764	-1,470351759
8	-1,662311558	-1,428743719
9	-1,614070352	-1,387135678
10	-1,565829146	-1,345527638
11	-1,51758794	-1,303919598
12	-1,469346734	-1,262311558
13	-1,421105528	-1,220703518
14	-1,372864322	-1,179095477
15	-1,324623116	-1,137487437
16	-1,27638191	-1,095879397
17	-1,228140704	-1,054271357
18	-1,179899497	-1,019447236
19	-1,131658291	-0,994120603
20	-1,083417085	-0,96879397

Рисунок 3 – Полученные значения первых 20 координат

По полученным точкам была простроена интерполирующая ломанная, представленная на графике – результате работы (рисунок 7)

Аппроксимация

Аппроксимация – метод приближения, при котором для нахождения дополнительных значений, отличных от табличных данных, приближенная функция проходит не через узлы интерполяции, а между ними.

Для выполнения аппроксимации использован полином третьей степени вида:

$$F(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, \tag{5}$$

где A, B, C и D – коэффициенты полинома.

Для нахождения коэффициентов используется система линейных уравнений:

$$\begin{cases} \mathrm{D}n + \mathrm{C}\sum x_i + B\sum x_i^2 + A\sum x_i^3 = \sum y_i \\ \mathrm{D}\sum x_i + \mathrm{C}\sum x_i^2 + \mathrm{B}\sum x_i^3 + \mathrm{A}\sum x_i^4 = \sum x_i y_i \\ \mathrm{D}\sum x_i^2 + \mathrm{C}\sum x_i^3 + \mathrm{B}\sum x_i^4 + \mathrm{A}\sum x_i^5 = \sum x_i^2 y_i, \\ \mathrm{D}\sum x_i^3 + \mathrm{C}\sum x_i^4 + \mathrm{B}\sum x_i^5 + \mathrm{A}\sum x_i^6 = \sum x_i^3 y_i \end{cases} \tag{6}$$

где y_i и x_i – координаты заданных точек.

Для её решения пользуемся методом Гаусса для решения системы линейных уравнений. Для этого необходимо составить расширенную матрицу системы:

$$M|R = \left[\begin{array}{cccc|c} \mathrm{n} & \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \sum x_i^5 & \sum x_i^2 y_i \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \sum x_i^5 & \sum x_i^6 & \sum x_i^3 y_i \end{array}\right], \tag{7}$$

Значения полученных матриц, полученные в результате решения в Matlab (рисунки 4-6):

M | P | R

4x4 double

	1	2	3	4
1	13	36.4000	218.4000	1.2638e+03
2	36.4000	218.4000	1.2638e+03	8.1420e+03
3	218.4000	1.2638e+03	8.1420e+03	5.3899e+04
4	1.2638e+03	8.1420e+03	5.3899e+04	3.6804e+05
5				

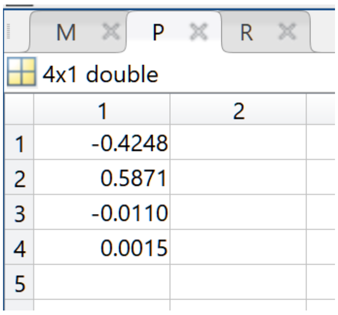
Рисунок 4 – Матрица коэффициентов левой части системы

M | P | R

4x1 double

	1	2
1	15.3100	
2	110.8680	
3	639.1472	
4	4.1933e+03	
5		
6		

Рисунок 5 – Вектор правой части системы



	1	2
1	-0.4248	
2	0.5871	
3	-0.0110	
4	0.0015	
5		

Рисунок 6 – Вектор неизвестных (полученных коэффициентов полинома)

В итоге полученный полином выглядит подобным образом:

$$F(x) = 0{,}0015x^3 - 0{,}0110x^2 + 0{,}5871x - 0{,}4248, \tag{8}$$

Значения этой функции были также нанесены на график (рисунок 7).

Ошибка аппроксимации была вычислена по формуле среднеквадратической ошибки:

$$\mathrm{E} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - y_i)^2}{n+1}}, \tag{9}$$

где $f(x_i)$ – значения аппроксимирующей функции в точках x_i.

Результат вычислений: E = 0,0918.

Значение ошибки было умножено на среднее значение y, чтобы получить значение относительной ошибки – примерно 5%.

Результат работы – отрисованные графики полученных интерполяционной ломанной и аппроксимирующей кривой – представлены на рисунке 7:

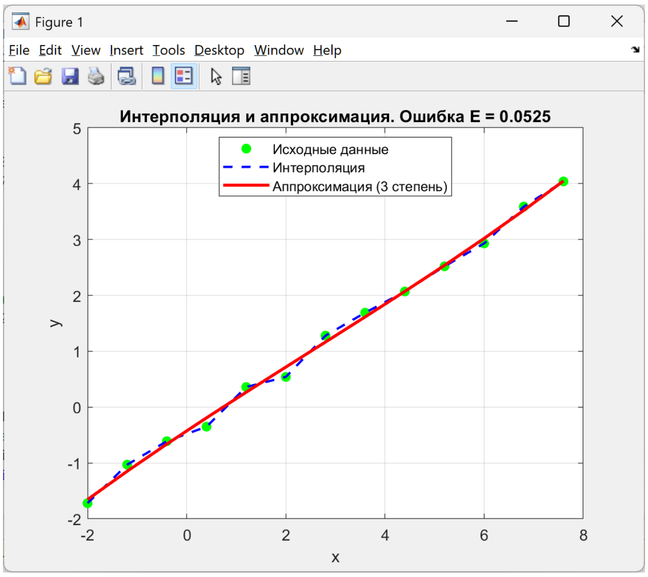


Рисунок 7 – Результаты вычислений на одном графике

Вывод

В данной работе мы подробно на практике рассмотрели методы линейной интерполяции и аппроксимации полиномом третьей степени.

Кусочно-линейная интерполяция точно воспроизводит исходные точки, но даёт ломаную, менее гладкую зависимость. В отличие от неё, кубический полином обеспечивает гладкую кривую, отражающую общий тренд данных, не требуя точного прохождения через заданные точки.

Среднеквадратическая ошибка аппроксимации в 5% находится в допустимых пределах, что подтверждает эффективность метода для анализа общей тенденции, тогда как интерполяция предпочтительна для точного восстановления значений.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Листинг Программы

```
clc; clear; close all;

% Данные
x = [-2.0 -1.2 -0.4 0.4 1.2 2.0 2.8 3.6 4.4 5.2 6.0 6.8 7.6];
y = [-1.72 -1.03 -0.61 -0.35 0.36 0.54 1.28 1.69 2.07 2.52 2.93 3.59 4.04];

% Массив для интерполированной функции
x_interp = linspace(min(x), max(x), 200);
y_interp = zeros(size(x_interp));

% Для каждого интервала ищем a_i и b_i и вычисляем y
for i = 2:length(x)
    a(i) = (y(i) - y(i-1)) / (x(i) - x(i-1));
    b(i) = y(i-1) - a(i) * x(i-1);
end

for j = 1:length(x_interp)
    % ищем, в какой интервал попадает x_interp(j)
    for i = 2:length(x)
        if x_interp(j) >= x(i-1) && x_interp(j) <= x(i)
            y_interp(j) = a(i) * x_interp(j) + b(i);
            break
        end
    end
end
writematrix([x_interp' y_interp'], 'interpolation_data.xlsx', 'Sheet', 1, 'Range',
'A1');

% Аппроксимация


n = length(x);

% Суммы степеней
S0 = n;
S1 = sum(x);
S2 = sum(x.^2);
S3 = sum(x.^3);
S4 = sum(x.^4);
S5 = sum(x.^5);
S6 = sum(x.^6);

T0 = sum(y);
T1 = sum(x .* y);
T2 = sum(x.^2 .* y);
T3 = sum(x.^3 .* y);

% Матрица и правая часть
M = [S0 S1 S2 S3;
     S1 S2 S3 S4;
     S2 S3 S4 S5;
     S3 S4 S5 S6];

R = [T0; T1; T2; T3];

% Решение системы
P = M\R;  % [A; B; C; D]
```

```matlab
A = P(4); B = P(3); C = P(2); D = P(1);

% Построение аппроксимирующей кривой
y_approx = A*x.^3 + B*x.^2 + C*x + D;

% Ошибка аппроксимации
E = sqrt(sum((y_approx - y).^2) / (n + 1));
E_rel = E / mean(abs(y));

% Графики
figure;
plot(x, y, 'go', 'MarkerFaceColor', 'g', 'DisplayName', 'Исходные данные'); hold on;
plot(x_interp, y_interp, 'b--', 'LineWidth', 1.5, 'DisplayName', 'Интерполяция');
plot(x, y_approx, 'r-', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'Аппроксимация (3 степень)');
legend('Location','best');
xlabel('x'); ylabel('y');
title(sprintf('Интерполяция и аппроксимация. Ошибка E = %.4f', E_rel));
grid on;
```