Optymalizacja z ograniczeniami funkcji wielu zmiennych metodami bezgradientowymi

1. Cel ćwiczenia.

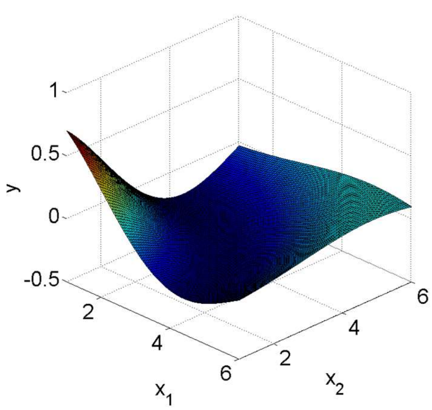
Celem ćwiczenia jest wykorzystanie bezgradientowych metod optymalizacji do wyznaczenia minimum funkcji celu uwzględniając ograniczenia.

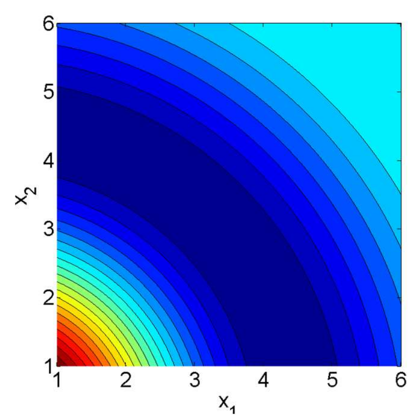
2. Testowa funkcja celu.

Funkcja celu dana jest wzorem:

$$f(x_1, x_2) = \frac{sin\left(\pi\sqrt{\left(\frac{x_1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\pi}\right)^2}\right)}{\pi\sqrt{\left(\frac{x_1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\pi}\right)^2}}$$

Jej wykres przedstawiony jest poniżej.





Ograniczenia określone są funkcjami:

$$g_1(x_1) = -x_1 + 1 \leq 0$$

$$g_2(x_2) = -x_2 + 1 \leq 0$$

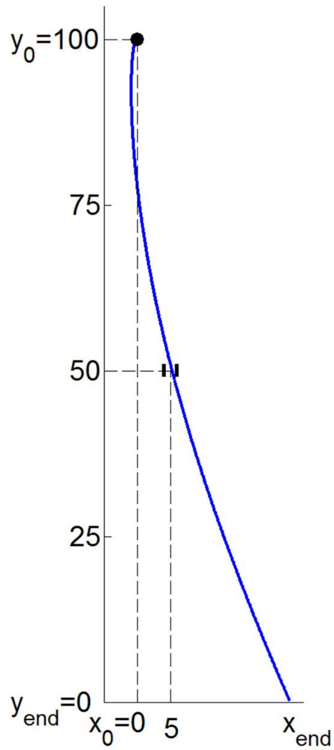
$$g_3(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a \leq 0$$

gdzie: a jest parametrem, którego wartość należy przyjąć równą:

- $a = 4$,
- $a = 4{,}4934$,
- $a = 5$.

3. Problem rzeczywisty.

Piłka o masie $m = 600g$ i promieniu $r = 12cm$ spada z wysokości $y_0 = 100m$ (początkowa prędkość w kierunku pionowym $v_{0y} = 0$). Piłka posiada poziomą prędkość początkową v_{0x} oraz rotację ω (początkowe położenie poziome $x_0 = 0$). Połączenie ruchu liniowego piłki z jej rotacją wywołuje efekt Magnusa powodujący występowanie siły, której kierunek i zwrot są zgodne z wektorem $\overrightarrow{v_p} \times \vec{\omega}$. Wektor $\overrightarrow{v_p}$ jest wektorem prędkości powietrza opływającego piłkę. Wektor ten jest przeciwnie skierowany niż wektor prędkości piłki. Przykładowa trajektoria lotu piłki przedstawiona jest na poniższym rysunku.



Równania ruchu piłki są następujące:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} + D_x + F_{Mx} = 0 \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} + D_y + F_{My} = -mg \end{cases}$$

gdzie: $g = 9{,}81 \, {}^{m}/_{s^2}$, D jest siłą oporu powietrza, F_M jest siłą Magnusa. Siły są wyrażone następującymi wzorami:

$$D_x = \frac{1}{2}C\rho S v_x|v_x|, \qquad D_y = \frac{1}{2}C\rho S v_y|v_y|$$

$$F_{Mx} = \rho v_y \omega \pi r^3, \qquad F_{My} = \rho v_x \omega \pi r^3$$

gdzie: $C = 0{,}47$ jest współczynnikiem oporu uzależnionym od kształtu, $\rho = 1{,}2 \, {}^{kg}/_{m^3}$ jest gęstością powietrza, $S = \pi r^2$.

Tarcie ruchu obrotowego piłki jest pominięte, tj. $\omega = const$.

Celem optymalizacji jest znalezienie takich wartości $v_{0x} \in [-10,10]\,{}^{m}/_{s}$ oraz $\omega \in [-10,10]\,{}^{rad}/_{s}$, które zapewnią największą wartość x_{end}. Dodatkowym ograniczeniem jest to, aby środek piłki minął punkt $(5,50)$ w odległości nie większej niż $2m$, tj. dla $y = 50m$ wartość $x \in [3, 7]m$. Symulację spadku piłki należy przeprowadzać dla czasu $t_0 = 0s$, $dt = 0{,}01s$, $t_{end} = 7s$. Należy zwrócić uwagę, że $x_{end} \neq x(t_{end})$.

W celu sprawdzenia poprawności implementacji modelu, można przeprowadzić symulację dla $v_{0x} = 5\,{}^{m}/_{s}$ oraz $\omega = 10\,{}^{rad}/_{s}$. Poprawne wartości wynoszą w przybliżeniu: $x_{end} \approx x(5.96s) \approx 41.41m$ oraz $x \approx 21.61m$ dla $y \approx 50m$.

4. Algorytmy optymalizacji.

Do wyznaczenia minimum funkcji celu należy zastosować metodę sympleks Neldera – Meada. Ograniczenia należy uwzględnić stosując:

a. dla testowej funkcji celu zewnętrzną oraz wewnętrzną funkcję kary,
b. dla problemu rzeczywistego zewnętrzną funkcję kary.

Funkcje kary należy wyznaczyć według wzorów:

- $S(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{n} \left(max\left(0, g_i(x_1, x_2)\right)\right)^2$ - dla zewnętrznej funkcji kary,
- $S(x_1, x_2) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{g_i(x_1, x_2)}$ - dla wewnętrznej funkcji kary.

5. Zadanie do samodzielnego wykonania.

a. Testowa funkcja celu.

Zadanie polega na wykonaniu 100 optymalizacji dla każdej wartości parametru a startując z losowego punktu początkowego (punkt startowy musi leżeć w obszarze dopuszczalnym). Dopuszczalny błąd optymalizacji nie powinien być większy niż 1e-3. Wyniki należy zestawić pliku xlsx w tabeli 1. Wartości średnie należy przedstawić w tabeli 2. W kolumnie r należy podać odległość punktu od początku układu współrzędnych.

b. Problem rzeczywisty.

Zadanie polega na przeprowadzeniu jednej optymalizacji. Wyniki należy zestawić w tabeli 3. Dla znalezionych wartości v_{0x} oraz ω należy przeprowadzić symulację, a jej wyniki wstawić do arkusza Symulacja. Na ich podstawie należy narysować wykres przedstawiający trajektorię lotu piłki.

6. Sprawozdanie.

Sprawozdanie powinno zostać przygotowane w formacie docx (lub doc) albo pdf i powinno zawierać parametry poszczególnych algorytmów, dyskusję wyników oraz wnioski. Dodatkowo, w sprawozdaniu należy umieścić kod zaimplementowanych metod, funkcję lab3 oraz funkcje wykorzystane do obliczenia funkcji celu i pochodnych podczas rozwiązywania równań różniczkowych. Wyniki optymalizacji należy przygotować w formacie xlsx (lub xls).

Pseudokod metody sympleks Neldera-Meada.

Dane wejściowe: punkt startowy $x^{(0)}$, długość boku sympleksu początkowego s, współczynniki α – odbicia , β – zawężenia, γ – ekspansji, δ – redukcji, dokładność rozwiązania ε, maksymalna liczba wywołań funkcji celu N_{max}

```
p^0 = x^(0)
for i = 1 to n do
     p^i = p^0 + s·e^i
end for
repeat
     oblicz wartości funkcji w wierzchołkach sympleksu p^0, p^1, …, p^n
     wyznacz p^min i p^max (min ≠ max)
     p̲ = (∑_{i≠max} p^i) / n
     p^odb = p̲ + α(p̲ - p^max)
     if f(p^odb) < f(p^min)then
          p^e = p̲ + γ(p^odb – p̲)
          if f(p^e) < f(p^odb) then
               p^max = p^e
          else
               p^max = p^odb
          end if
     else
          if f(p^min) ≤ f(p^odb) < f(p^max) then
               p^max = p^odb
          else
               p^z = p̲ + β(p^max - p̲)
               if f(p^z) ≥ f(p^max) then
                    fori = 0 to n do
                         ifi ≠ min then
                              p^i = δ(p^i + p^min)
                         end if
                    end for
               else
                    p^max = p^z
               end if
          end if
     end if
     if f_calls>N_max then
          return error
     end if
until max_{i=0,…,n}||p^min – p^i||_2 < ε
return x* = p^min
```

Pseudokod metody funkcji kary.

Dane wejściowe: punkt startowy $x^{(0)}$, współczynniki $c^{(1)} > 0$, współczynnik skalowania α, dokładność rozwiązania ε, maksymalna liczba wywołań funkcji celu N_{max}

```
i = 0
repeat
    i = i + 1
    wyznacz F^(i)(x) = f(x) + c^(i)S(x)
    wyznacz x^(i) dla F^(i) startując z x^(i-1)
    c^(i+1) = α·c^(i)
    if f_calls > N_max then
        return error
    end if
until ||x^(i) – x^(i-1)||_2 < ε
return x* = x^(i)
```