선형 연립방정식 (연립 1차 방정식)

복수의 미지수를 포함하는 복수의 선형 방정식

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2M} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}$$

$$\underset{(\text{계수행렬})}{A} \qquad \underset{(\text{미지수벡터})}{x} \qquad \underset{(\text{상수벡터})}{b}$$

$$Ax = b$$

역행렬 (Inverse Matrix)

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda_N \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & \cdots & & 0 \\ \vdots & \frac{1}{\lambda_2} & & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \frac{1}{\lambda_N} \end{bmatrix}$$

- 역행렬의 계산

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{N,1} \\ \vdots & \ddots & \\ C_{1N} & \cdots & C_{N,N} \end{bmatrix}$$

코팩터 행렬 / 코팩터 행렬의 전치행렬은 어드조인트 행렬

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

- 미지수의 수와 방정식의 수

1. 방정식의 수가 미지수의 수와 같다. (N=M)
2. 방정식의 수가 미지수의 수보다 적다 (N<M)
3. 방정식의 수가 미지수의 수보다 많다. (N>M)

예) 1. $Ax = b$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$
$$Ix = A^{-1}b$$
$$x = A^{-1}b$$

2.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

이때 x_2가 어떤값이 되더라도 x_1, x_3의 값은 결정된다.
아래는 선형연립방정식의 해가되는 벡터들이다.

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots$$

3. 방정식의 수가 미지수의 수보다 많을 때는 2번과 반대로 모든 조건을 만족하는 해가 하나도 존재하지 않을 수도 있다.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad\quad &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

위의 방정식을 동시에 만족하는 해는 $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ 인데 이 값은 4번째 방정식을 만족하지 못한다.

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$

따라서, 4개의 방정식을 모두 만족하는 해는 존재하지 않는다.

실제 데이터를 사용해 예측모형을 만드는 경우 3번의 사례가 가장 많다.
그래서 일반적인 선형방정식을 푸는 방법으로는 가중치 벡터를 구할 수 없다.

- 최소자승문제

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad\quad &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4.1 \approx 4 \end{aligned}$$

$x_1 = x_2 = x_3$ 에 1을 대입하면, 여전히 비슷하게 찾을 수 있다.

따라서 미지수의 개수보다 방정식의 갯수가 많아서 선형 연립 방정식으로 풀 수 없는 문제는 좌변과 우변의 차이를 최소화 하는 문제로 바꾸어 풀 수 있다. 여기서 예측값과 목표값의 차이를 잔차라 한다. $\underset{\text{예측값}}{4} \approx \underset{\text{목표값}}{4.1}$

$$e = Ax - b$$

잔차는 벡터이므로 최소자승문제에서는 벡터의 크기중에서 벡터의 놈을 최소화 하는 문제로 푼다.

$$x = \arg\min_x e^T e = \arg\min_x (Ax - b)^T (Ax - b)$$