- 선형종속과 선형독립 (linear dependent & linear independent)

- 벡터 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_N$ 들의 선형조합이 영벡터가 되도록 하는 계수 $C_1, C_2, C_3 \cdots C_N$이 존재하면 선형종속이라 한다. 단, $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_N$이 모두 0인 경우는 제외한다.

$$C_1 x_1, C_2 x_2, C_3 x_3, \cdots C_N x_N = 0$$

- 반대로, 벡터들의 선형조합이 0이 되는, 모두 0이 되는 계수가 존재하지 않으면 그 벡터들은 선형독립이라 한다. 즉, 벡터 $x_1, x_2, x_3 \cdots x_N$ 들의 선형조합이 영벡터이면 반드시 모든 계수가 모두 0일수밖에 없는 경우.

$$C_1 x_1, C_2 x_2, C_3 x_3 \cdots C_N x_N = 0$$

일때

$$C_1 \cdots C_N = 0 \text{ 인경우.}$$

예) 다음 벡터 x_1, x_2는 선형독립이다.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

벡터 x_1은 두 원소의 크기가 다른데, 벡터 x_2은 두 원소의 크기가 같기 때문에 어떤 계수를 사용해도 $C_1 x_1 + C_2 x_2 = 0$을 만들 수 없다.

하지만, 다음벡터 x_1, x_2, x_3는 선형종속이다.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

- 선형독립과 선형연립 방정식

결국 선형독립을 구하는 방법은 다음 선형 연립 방정식을 푸는 문제와 같다.

$$X_c = 0$$

다시 쓰면,

$$c = X^{-1} 0 = 0$$

- 랭크 (rank)

행렬의 열벡터 중 서로 독립인 열벡터의 최대개수를 열랭크라고 하고, 행벡터 중 서로 독립인 행벡터의 최대개수를 행랭크라고 한다.

예)

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

위의 행렬의 두 열벡터는 선형독립이기 때문에 열랭크는 2이다.

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

위의 행렬은 선형 종속이므로 열랭크인 3보다 작아야 한다.
열벡터 중 앞의 두개는 서로 독립이므로 X_2의 랭크는 2이다.

- ※ 행랭크와 열랭크는 항상 같다.
- ※ 행렬의 랭크는 열 개수와 행 개수 보다 커질 수 없다.
- ※ 위의 예인 X_1, X_2 처럼 랭크가 행의 개수와 열의 개수 중 작은 값과 같으면 풀랭크(full rank)라고 한다.

- 랭크와 역행렬

※ 정방행렬이 풀랭크이다 $\Longleftrightarrow$ 역행렬이 존재한다.

- 로우-랭크 행렬 (low-rank matrix)

- N차원 벡터 x 하나를 이용하여 만들어지는 다음과 같은 행렬을 랭크-1 행렬 이라고 한다.

선형독립

$$xx^T \in R^{N \times N}$$

- 이 행렬의 열벡터들은 x라고 하는 하나의 벡터를 x_1배, x_2배 … 한 벡터이므로 독립적인 열벡터는 1개이다. 그러므로 랭크-1 행렬의 랭크는 1이다.

$$xx^T = x[x_1, x_2, \cdots, x_n] = [x_1 x, x_2 x, \cdots, x_n x]$$

- 선형독립인 두개의 N차원 벡터 x_1, x_2를 이용하여 만든 다음과 같은 행렬은 랭크-2 행렬이라 한다. 위와 마찬가지로 랭크-2 행렬의 랭크는 2이다.

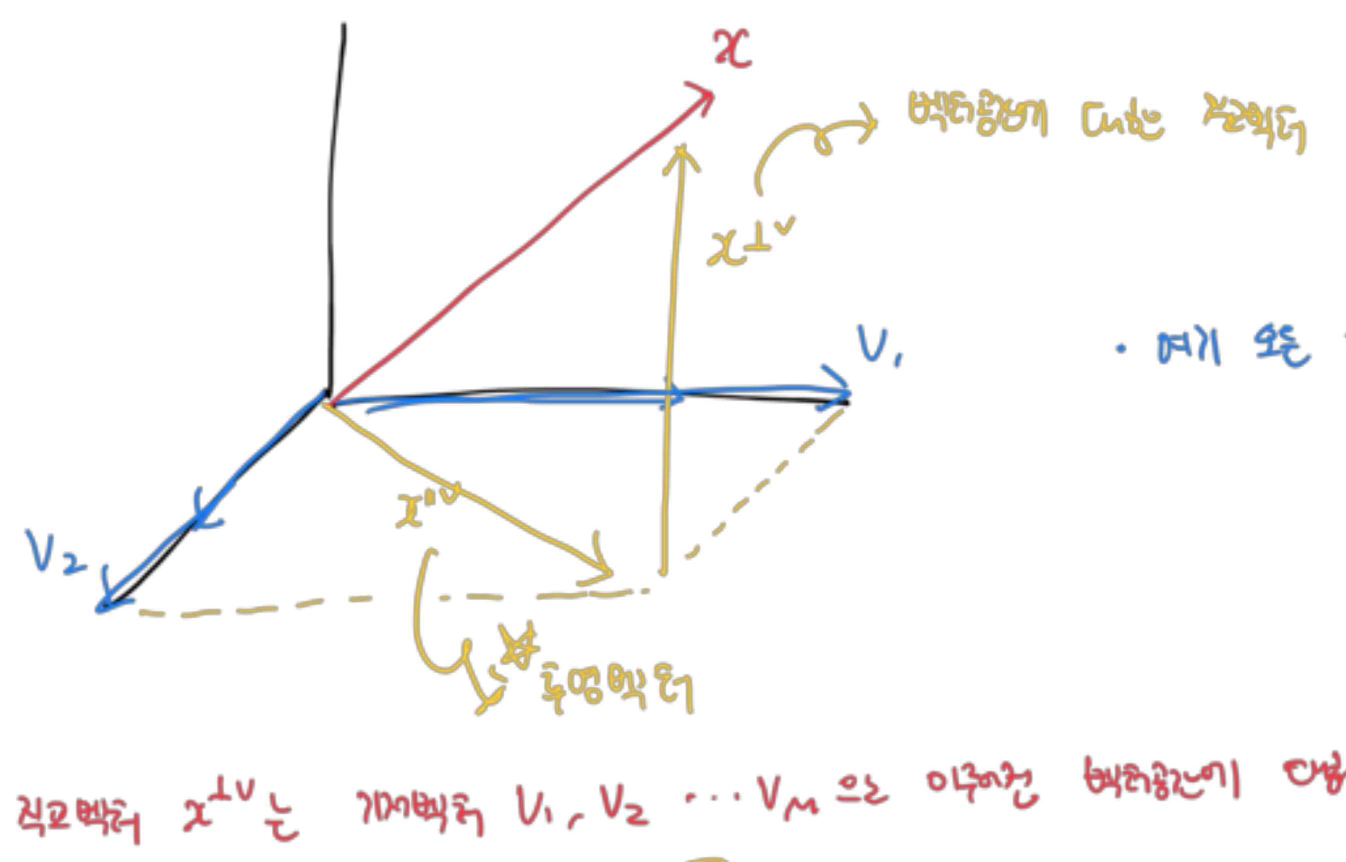
이러한 행렬들을 가리켜 로우-랭크 행렬 (low-rank matrix)라고 한다.

- 벡터공간과 기저벡터 (vector space & basis vector)

- 여러개의 벡터를 선형조합을 하면 다른 벡터를 만들 수 있다. 벡터 N개가 선형독립인 경우, 이 벡터들을 선형조합하여 만들어지는 모든 벡터의 집합을 벡터공간이라고 하고, 이 벡터공간의 차원을 N이라고 한다. 그리고 그 벡터들을 벡터공간의 기저벡터라 한다.
벡터공간에서는 차원이 길이가 아닌 "기저벡터의 수"로 정의 된다.

※ 만약 N차원 벡터 N개 $x_1, x_2, x_3 \cdots x_N$이 선형독립이어서 기저벡터를 이룬다면, 이 기저벡터를 선형조합하여 모든 N차원 벡터는 만들 수 있다.

- 벡터공간의 투영



- 여기 모든 벡터들은 선형독립.

※ 직교벡터 $x^{\perp V}$는 기저벡터 $V_1, V_2 \cdots V_M$으로 이루어진 벡터공간에 대해 직교한다.
※ 이 사실로부터 벡터 x의 프로젝션 $x^{\parallel V}$은 기저벡터 $V_1, V_2 \cdots V_M$으로 이루어진 벡터공간의 모든 벡터중에서 가장 x와 가까운 벡터라는 것은 알 수 있다.