- 고윳값과 고유벡터
  - 정방행렬 A에 대해 다음식을 만족하는 영벡터가 아닌 열벡터 v, 실수 λ를 찾을 수 있다고 가정하자.

$$Av = \lambda v$$

  - 이식은 다음과 같이 변형 할수 있다.

$$Av - \lambda v = (A - \lambda I)v = 0$$

(고윳값: λ, 고유벡터: v)

  - 위 식을 만족하는 실수 λ를 고윳값(eigenvalue), 벡터 v를 고유벡터(eigenvector)라 한다.

예)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$ 에 대해 다음 스칼라 값과 벡터는

각각 고윳값, 고유벡터가 된다.

$$\lambda = -1$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Av = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda v$$

- 어떤 벡터 v가 고유벡터가 되면 이 벡터에 실수를 곱한 벡터 cv, 즉 v와 같은 방향이 같은 벡터는 모두 고유벡터가 된다.

- 보통 고유벡터를 표시할때는 길이가 1인 단위벡터가 되도록 다음처럼 정규화 한다. (normalization)

$$\frac{v}{\|v\|}$$

- 따라서 위 행렬 A의 고윳값-고유벡터는 다음처럼 나타낸다.

$$\lambda = -1$$

$$v = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.7071 \\ 0.7071 \end{bmatrix}$$

- 특성방정식(characteristic equation)
  - 특성방정식은 이용해 고윳값을 구할수 있다. $\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$

예)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$ 에 대한 특성방정식은...

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) \\
&= \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & -3-\lambda \end{bmatrix} \\
&= (1-\lambda)(-3-\lambda) + 4 \\
&= \lambda^2 + 2\lambda - 3 + 4 \\
&= \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0
\end{aligned}$$

인수분해를 사용하여 특성방정식을 풀면...

$$\begin{aligned}
&\lambda^2 + 2\lambda + 1 \\
&= (\lambda + 1)^2 \\
&= -1 \rightarrow \text{고윳값 (중복 고윳값)}
\end{aligned}$$

예2)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det(B - \lambda I) &= \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) \\
&= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (2-\lambda)(1-\lambda) - 6 \\
&= \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \\
&= (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0 \\
&= \underbrace{+4 \text{ or } -1}_{\text{고윳값}}
\end{aligned}$$

예3)

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\det\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) \\
&= \det\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \\
&= \lambda^2 + 1 = 0 \\
&= 0 \rightarrow \text{고윳값이 존재하지 않는다}
\end{aligned}$$

- 고윳값의 대각 행렬
  - 중복된 고윳값을 각각 별개로 생각하고, 복소수인 고윳값도 고려한다면, N차원 정방행렬의 고윳값은 항상 N개 이다.
  - 앞의 예제에서 행렬들의 대각합(trace)와 행렬식이 고윳값과 어떤 관계가 있을까!

$$tr(A) = 1 + (-3) = -2$$

$$\det(A) = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-2) = 1$$

  - 고윳값이 중복된 고윳값 이므로 (-1)

$$\boxed{\lambda_1 + \lambda_2} = -2 = \boxed{tr(A)}$$

$$\boxed{\lambda_1 \times \lambda_2} = 1 = \boxed{\det(A)}$$ 가 성립한다.

  - 정리하자면... 어떤 행렬의 고윳값이 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \cdots \lambda_N$이라 하면 모든 고윳값의 곱은 행렬식의 값과 같고, 모든 고윳값의 합은 대각합과 같다.

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{N} \lambda_i$$

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i$$

- 고유벡터의 계산
  - 고윳값을 알면 고유벡터를 구할수 있다.

$$(A - \lambda I)v = 0$$

예)

$$\begin{bmatrix} 1+1 & -2 \\ 2 & -3+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2v_1 - 2v_2 = 0$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2$$

- 대각화

고윳값 분해