○ 행렬의 부호 표현

다음 부등식이 성립하면 행렬 A는 양의 정부호 (positive definite)

$$x^T A x > 0$$

영벡터가 아닌 모든 벡터

$$x^T A x \geq 0$$

양의 준 정부호

(증명)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

모든 벡터행렬 $x^T = [x_1, x_2, x_3]$ 대해

$$\cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[(2x_1 - x_2) \ (-x_2 + 2x_2 - x_3) \ (-x_3 + 2x_3) \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2} > 0$$

제곱의 합으로 이루어짐

○ 행렬의 크기

하나의 행렬에 대해 하나의 실수를 대입하는 개념

- 놈 (norm)

$$\|A\|_L = \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

보통 1, 2 또는 무한대가 쓰인다.

L=1 이면 L1-놈, L=2이면 L2-놈 이라 부른다.

L2가 가장 많이 쓰이므로 L값이 없으면 L=2 라고 보면 된다.

L2 놈은 프로베니우스 놈이라고 부름

$\|A\|_F$ 라고 표현

$$\|A\|_F \geq 0$$

놈은 항상 0보다 크거나 같다.

※ 놈의 중요성질

$$\boxed{\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = x^T x}$$

벡터의 제곱합이 놈의 제곱과 같다

- 행렬식 (determinant)

정방행렬 A의 행렬식은 det(A), det A, 또는 |A|로 표현 된다.

스칼라 (1×1 행렬)의 행렬식은 자기 자신이 된다.

$$\det([a]) = a$$

스칼라가 아닌 경우는...

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{N} \left\{ (-1)^{i+j_0} M_{ij_0} \right\} a_{ij_0}$$

가중치 (여인수)

여기서 M_{ij}는 마이너 (소행렬식)라고 하며, 재귀적으로 한 행렬식 지워나가 스칼라 값을 만들게 된다.

코팩터 (여인수)는 C_{ij}로 표기

$$C_{ij} = (-1)^{i+j_0} M_{ij_0}$$

최종적으로 식을 표현해보면...

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{N} C_{ij_0} a_{ij_0} = \sum_{j=1}^{N} C_{i_0 j} a_{i_0 j}$$