2020年秋-数学-复习题

1. 令 $\beta=(1,2,1,1)^T,\alpha_1=(1,1,1,1)^T,\alpha_2=(1,1,-1,-1)^T,\alpha_3=(1,-1,1,-1)^T,\alpha_4=(1,-1,-1,1)^T$，试将向量$\beta$表示成$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的线性组合。

解：

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&-1&-1&2\\1&-1&1&-1&1\\1&-1&-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\&&-2&-2&1\\&-2&0&-2&0\\&-2&-2&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\&-2&-2&-4&1\\&&2&2&-1\\&&&4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&4&4&4&4\\&-4&-4&-8&2\\&&4&4&-2\\&&&4&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4&4&4&&5\\&-4&-4&&0\\&&4&&-1\\&&&4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&4&&&6\\&-4&&&-1\\&&4&&-1\\&&&4&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4&&&&5\\&-4&&&-1\\&&4&&-1\\&&&4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&&\frac{5}{4}\\&1&&&\frac{1}{4}\\&&1&&-\frac{1}{4}\\&&&1&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

故，$\beta=\frac{1}{4}(5\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)$

2. 试计算下列矩阵的广义逆

$$(1)\quad A_1=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\2&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\qquad(2)\quad A_2=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

解：

(1). A_1的广义逆为$(A_1^TA_1)^{-1}A_1^T$

$$A_1^TA_1=\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&1\\2&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\2&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&4\\0&2&1\\4&1&6\end{pmatrix}$$

$$(A_1^TA_1)^{-1}=\begin{pmatrix}5&0&4\\0&2&1\\4&1&6\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{23}\begin{pmatrix}11&4&-8\\4&14&-5\\-8&-5&10\end{pmatrix}$$

故A_1的广义逆

$$(A_1^TA_1)^{-1}A_1^T=\frac{1}{23}\begin{pmatrix}11&4&-8\\4&14&-5\\-8&-5&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&1\\2&0&1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{23}\begin{pmatrix}-5&4&14&-4\\-6&14&3&9\\12&-5&-6&5\end{pmatrix}$$

(2)容易看出A_2可逆，故A_2的广义逆$(A_2^TA_2)^{-1}A_2^T=A_2^{-1}$

设$A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&x_1&x_2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$A_2A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&2+x_1&1+x_2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

故$x_1=-2,x_2=-1$

$$\therefore A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

3. 试判断下列哪些矩阵是正定矩阵。

$$A_1=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\quad A_2=\begin{pmatrix}5&1&0&0\\1&4&0&0\\0&0&7&2\\0&0&2&4\end{pmatrix}\quad A_3=\begin{pmatrix}2&3\\3&1\end{pmatrix}\quad A_4=\begin{pmatrix}2&3&1\\3&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}$$

解：

(1).$|2|=2>0,|A_1|=2-1=1>0$ 故A_1的各阶顺序主子式大于0，故A_1正定。

(2).$|5|=5>0,\begin{vmatrix}5&1\\1&4\end{vmatrix}=19>0,\begin{vmatrix}5&1&0\\1&4&0\\0&0&7\end{vmatrix}=7\times19>0$

$\begin{vmatrix}5&1&0&0\\1&4&0&0\\0&0&7&2\\0&0&2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&1\\1&4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}7&2\\2&4\end{vmatrix}=19\times24>0$，故$A_2$正定

(3).求A_3的特征值

$$\begin{vmatrix}\lambda-2&-3\\-3&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda-7$$

A_3的特征值为$\lambda=\frac{3\pm\sqrt{9+4\times7}}{2}$

显然$\lambda_1=\frac{3+\sqrt{9+4\times7}}{2}>0,\lambda_2=\frac{3-\sqrt{9+4\times7}}{2}<0$ 所以A_3是一个不定矩阵。

(4).注意到A_4的二阶顺序主子式$\begin{vmatrix}2&3\\3&1\end{vmatrix}=2-9=-7<0$ 故A_4不是正定矩阵。

4. 考虑标准基下的线性映射$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$的变换矩阵为$A_\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$求其在新的基底下的变换矩阵。其中新的基底分别为$\tilde{B} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}), \tilde{B} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ **解:**

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\tilde{A}_\Phi = T^{-1} A_\Phi S = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 8 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

5. 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 求A^k

解：

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 & -2 \\ 0 & \lambda + 3 & -4 \\ 0 & -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -4 \\ -4 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 5)(\lambda - 5)$$

求得$\lambda = 1$时的特征向量为$(1, 0, 0)^T$

求得$\lambda = 5$时的特征向量为$(2, 1, 2)^T$

求得$\lambda = -5$时的特征向量为$(1, -2, 1)^T$

令$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ 即有$Q^{-1}AQ = \Sigma$

容易求得$Q^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

故$A = Q \Sigma Q^{-1}$

$$\begin{aligned} A^k &= (Q \Sigma Q^{-1})^k \\ &= Q \Sigma^k Q^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5^k & 0 \\ 0 & 0 & (-5)^k \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 2 \cdot 5^k - 2 \cdot (-5)^k & -5 + 4 \cdot 5^k + (-5)^k \\ 0 & 5^k + 4 \cdot (-5)^k & 2 \cdot 5^k - 2 \cdot (-5)^k \\ 0 & 2 \cdot 5^k - 2 \cdot (-5)^k & 4 \cdot 5^k + (-5)^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. 设$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,试将向量组$(a_1, a_2, a_3)$ 标准正交化。

解：

$$\hat{\beta}_1 = \alpha_1 = (1,2,-1)^T\ ,\quad \beta_1 = \frac{1}{||\hat{\beta}_1||}\hat{\beta}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)^T$$

$$\hat{\beta}_2 = \alpha_2 - \langle\alpha_2,\beta_1\rangle\beta_1 = (-1,3,1)^T - \frac{2}{3}(1,2,-1)^T = \frac{5}{3}(-1,1,1)^T\ ,$$
$$\beta_2 = \frac{1}{||\hat{\beta}_2||}\hat{\beta}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^T$$

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_3 &= \alpha_3 - \langle\alpha_2,\beta_1\rangle\beta_1 - \langle\alpha_2,\beta_1\rangle\beta_1\\ &= (4,-1,0)^T - \frac{1}{3}(1,2,-1)^T + \frac{5}{3}(-1,1,1)^T\\ &= (2,0,2)^T\end{aligned}$$
$$\beta_3 = \frac{1}{||\hat{\beta}_3||}\hat{\beta}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^T$$

故标准化后的向量组为 $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

7. 判断 $\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$ 是否在矩阵$A = \begin{pmatrix}3 & 5 & -3\\6 & -2 & 0\\-8 & 4 & 1\end{pmatrix}$ 的零空间中。

解：

$$\begin{pmatrix}3 & 5 & -3\\6 & -2 & 0\\-8 & 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\0\\8\end{pmatrix}$$

故不在。

8. 求由向量 $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ 张成的子空间的正交补空间。

解：

容易知道向量 $\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$ 与向量 $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ 均正交。

又向量组 $\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ 的秩为3。

所以$L(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix})$ 的正交补空间为 $L(\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix})$

8. 求矩阵$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ 的LU分解。

解：

令$L = \begin{pmatrix}1 & & \\l_1 & 1 & \\l_2 & l_3 & 1\end{pmatrix}$ 则 $L^{-1} = \begin{pmatrix}1 & & \\-l_1 & 1 & \\l_1l_3 - l_2 & -l_3 & 1\end{pmatrix}$

$$L^{-1}A=\begin{pmatrix}1 & & \\ -l_1 & 1 & \\ l_1l_3-l_2 & -l_3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -2l_1+1 & -l_1+2 & -l_1+1\\ 2l_1l_3-2l_2-l_3+1 & l_1l_3-l_2-l_3+1 & l_1l_3-l_2-l_3\end{pmatrix}$$

令$L^{-1}A$为上三角矩阵，则有$\begin{cases}-2l_1+1=0\\ 2l_1l_3-2l_2-l_3+1=0\\ l_1l_3-l_2-l_3+1=0\end{cases}$

可得$\begin{cases}l_1=\frac{1}{2}\\ l_2=\frac{1}{2}\\ l_3=\frac{1}{3}\end{cases}$

故有$A=\begin{pmatrix}1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ & & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

正常做法：

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

故 $A=\begin{pmatrix}1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ & & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

9. 求矩阵$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -4\\ 2 & 1 & -2\\ -4 & -2 & 5\end{pmatrix}$的Cholesky分解。

解：

$$\begin{pmatrix} 5 & & \\ 2 & 1 & \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} & & \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{5} & \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} & & \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \sqrt{\frac{1}{5}} & \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} & & \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \sqrt{\frac{1}{5}} & \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 1 \end{pmatrix}$$

故令$L = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & & \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \sqrt{\frac{1}{5}} & \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 1 \end{pmatrix}$

则有$A = LL^T$

10. 求矩阵$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$的QR分解。

解：

G-S方法：

$\alpha_1 = (3,1,1)^T \ q_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}(3,1,1)^T$

$\hat{q}_2 = (2,2,0)^T - \frac{8}{11}(3,1,1)^T = \frac{-2}{11}(1,-7,4)^T \ ,q_2 = \frac{1}{\sqrt{66}}(1,-7,4)^T$

令$q_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{66}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{-7}{\sqrt{66}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{4}{\sqrt{66}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} \sqrt{11} & \frac{8}{\sqrt{11}} \\ 0 & \sqrt{-\frac{24}{11}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11. 求矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$的SVD分解。

解：

$A^TA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

特征值为1对应的特征向量为$(1,-1)^T$

特征值为3对应的特征向量为$(1,1)^T$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

特征值为1对应的特征向量为$(1,-1,0)^T$

特征值为3对应的特征向量为$(1,1,2)^T$

特征值为0对应的特征向量为$(1,1,-1)^T$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

12. 设$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
    1. 用正则化方法求对应的LS问题的解。
    2. 用QR方法求对应的LS问题的解

注：利用其它分解方法解最小二乘问题或者线性方程组问题也需要关注

解：

$$A^TA = \begin{pmatrix} 35 & 44 \\ 44 & 56 \end{pmatrix}$$

$$A^Tb = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 35 & 44 & | & 9 \\ 44 & 56 & | & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 35 & 44 & | & 9 \\ 9 & 12 & | & 3 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 8 & 8 & | & 0 \\ 9 & 12 & | & 3 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 3 & | & 3 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & & | & -1 \\ & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

故$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

先求A的QR分解

令$\alpha_1 = (1,3,5), \hat{\alpha}_1 = \frac{1}{\sqrt{35}}(1,3,5)$

$\alpha_2 = (2,4,6) - \frac{44}{35}(1,3,5), \hat{\alpha}_2 = \frac{1}{\sqrt{210}}(13,4,-5)$

$$故A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{35}} & \frac{13}{\sqrt{210}} \\ \frac{3}{\sqrt{35}} & \frac{4}{\sqrt{210}} \\ \frac{5}{\sqrt{35}} & \frac{-5}{\sqrt{210}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{35} & \frac{44}{35}\sqrt{35} \\ & \frac{2}{35}\sqrt{210} \end{pmatrix}$$

因为$||QRx-b||_2 = ||Rx - Q^Tb||_2$

故此最小二乘问题等价于方程组问题$Rx = Q^Tb$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{35} & \frac{44}{35}\sqrt{35} \\ & \frac{2}{35}\sqrt{210} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \frac{9}{\sqrt{35}} \\ \frac{12}{\sqrt{210}} \end{pmatrix}$$

解得$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

13. 求证：$\mathbb{R}^n$上的一范数$\|\cdot\|_1$和二范数$\|\cdot\|_2$是等价的，即存在c_1, c_2满足不等式$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1$。
解： 设$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ $\|x\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq (|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)^2 = \|x\|_1^2$ 所以$\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ 又$n^2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \geq (|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)^2$
所以$n\|x\|_2 \geq \|x\|_1$ 故存在$c_1 = \frac{1}{n}, c_2 = 1$使得不等式成立。

14. 求证：通过向量范数$\|\cdot\|_1$诱导得到的矩阵范数$\|\cdot\|_1$和向量范数$\|\cdot\|_1$是相容的，即对任意的$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, x \in \mathbb{R}^n$有$\|Ax\|_1 \leq \|A\|_1\|x\|_1$ 。**解：**

当$x = 0$时，上式显然成立。

不妨令$\|x\|_1 = 1$，即只需证明对任意的$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_1 = 1$ $\|Ax\|_1 \leq \|A\|_1$

$$\begin{aligned} \text{令} A = (a_1, a_2, \ldots, a_n), x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \\ \|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^n \|x_i a_i\|_1 \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i|\|a_i\|_1 \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \max_{1\leq i\leq n} \|a_i\|_1 \\ &= \|A\|_1 \end{aligned} \tag{2}$$

15. 证明柯西-施瓦茨不等式$\langle x, y\rangle \leq \|x\|^2\|y\|^2$ (参考PPT：Lec6 中的证明)

16. 求$\frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{1}{2||\sigma||_2^2}||(x-\mu)||_2^2}$其中，$x, \mu, \sigma \in \mathbb{R}^n$

解：

$\frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{1}{2||\sigma||_2^2}||(x-\mu)||_2^2} = \frac{\partial}{\partial x} e^{-k(x-\mu)^T(x-\mu)}$, 其中 $k = \frac{1}{2||\sigma||_2^2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} e^{-k(x-\mu)^T(x-\mu)} &= e^{-k(x-\mu)^T(x-\mu)}(-k)2(x-\mu) \\ &= -\frac{1}{||\sigma||_2^2} e^{-\frac{1}{2||\sigma||_2^2}||(x-\mu)||_2^2}(x-\mu) \end{aligned}$$

17. 二次型是数据分析中常用函数，求$\frac{\partial x^T Ax}{\partial x}$，$\frac{\partial x^T Ax}{\partial A}$，其中$A \in \mathbb{R}^{m\times m}$，$x \in \mathbb{R}^m$

解： $\frac{\partial x^T Ax}{\partial x} = (A + A^T)x$

${\frac{\partial x^T Ax}{\partial A}}_{ij} = x_i x_j, \frac{\partial x^T Ax}{\partial A} = xx^T$

18. **(1)**$f(X) = \ln|X|$，X**可逆，求**$\frac{\partial f}{\partial X}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{X}} &= \frac{\partial f}{\partial |\boldsymbol{X}|} \frac{\partial |\boldsymbol{X}|}{\partial \boldsymbol{X}} \\ &= \frac{1}{|\boldsymbol{X}|} |\boldsymbol{X}| \boldsymbol{X}^{-T} \\ &= \boldsymbol{X}^{-T} \end{aligned}$$

(2)$f(X) = ||AX^{-1}||_F^2$，**X可逆，求**$\frac{\partial f}{\partial X}$

$$
\begin{aligned}
f(X) &= tr(X^{-T}A^TAX^{-1}) \\
df(X) &= tr[d(X^{-T}A^TAX^{-1})] \\
&= tr(dX^{-T}A^TAX^{-1} + X^{-T}A^TAdX^{-1}) \\
&= tr(X^{-T}A^TAdX^{-1} + X^{-T}A^TAdX^{-1}) \\
&= tr(2X^{-T}A^TAdX^{-1}) \\
&= tr(-2X^{-T}A^TAX^{-1}dXX^{-1}) \\
\frac{\partial f}{\partial X} &= -2X^{-T}A^TAX^{-T}X^{-T}
\end{aligned} \tag{3}
$$

19. 构建模型使得预测值与真实值的误差最小常用向量2-范数度量，求解模型过程中需要计算梯度，求梯度：

    1. $f(A) = \frac{1}{2}\|Ax + b - y\|_2^2$，求$\frac{\partial f}{\partial A}$
    2. $f(x) = \frac{1}{2}\|Ax + b - y\|_2^2$，求$\frac{\partial f}{\partial x}$

    其中$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$x \in \mathbb{R}^n$，$b, y \in \mathbb{R}^m$

    解：

    1. $$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial A}f &= \frac{\partial}{\partial A}\frac{1}{2}(x^TA^TAx + 2(b-y)^TAx + (b-y)^T(b-y)) \\ &= \frac{\partial}{\partial A}\frac{1}{2}(x^TA^TAx + 2(b-y)^TAx) \\ &= Axx^T + (b-y)x^T\end{aligned}$$
    2. $\frac{\partial}{\partial x}f = A^TAx + A^T(b-y)$

20. 证明$x^* = (1, 0.5, -1)$是如下优化问题的最优解

    $\min \frac{1}{2}x^TPx + q^Tx + r, subject\ to - 1 \le x_i \le 1, i = 1,2,3$

    其中

    $$P = \begin{pmatrix} 13 & 12 & -2 \\ 12 & 17 & 6 \\ -2 & 6 & 12 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} -22 \\ -14.5 \\ 13 \end{pmatrix}, r = 1$$

    解： 最优点x^*处的梯度：

    $\nabla f_0(x^*) = (-1, 0, 2)$

    对任意y满足$-1 \le y_i \le 1$

    $\nabla f_0(x^*)^T(y - x) = -1(y_1 - 1) + 0(y_2 - 0.5) + 2(y_3 + 1) \ge 0$

    满足最优性条件，是目标函数的最优点。

21. 求优化问题$\arg\min\limits_{x_1,x_2,x_3} x_1x_2x_3$当$x_1, x_2, x_3$满足$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$的解

    解： 设拉格朗日函数为$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1x_2x_3 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)$

    $$\begin{cases} x_2x_3 + 2\lambda x_1 = 0 \\ x_1x_3 + 2\lambda x_2 = 0 \\ x_1x_2 + 2\lambda x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} |x_1| = |x_2| = |x_3| = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \lambda = -\frac{1}{2\sqrt{3}} or \lambda = \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

    故 $x_1 = x_2 = x_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, x_1x_2x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{9}$ or

    $x_1 = x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, x_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, x_1x_2x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{9}$ or

    $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, x_2 = x_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, x_1x_2x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{9}$ or

$x_1 = x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}, x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, x_1 x_2 x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{9}$

22. 已知矩阵$A \in R^{p\times q}, B \in R^{p\times r}$，$rank(A) = min(p,q)$，未知矩阵$X \in R^{q\times r}$，求以下优化问题。

(1)若$p < q$，求Frobenius范数最小的矩阵X，使得$AX = B$。

优化问题为

$$\min f(X) = \frac{1}{2}||X||_F^2 \quad (4)$$
$$s.t.\ AX = B$$

解：

$$\text{构造拉格朗日函数} \quad (5)$$
$$L(X,\Lambda) = tr(\frac{1}{2}X^T X) - tr[\Lambda^T(AX-B)]$$
$$\frac{\partial L}{\partial X} = X - A^T\Lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \Lambda} = AX - B = 0$$
$$\text{因为}p < q\text{，}rank(A) = p\text{，}A\text{行满秩，所以}AA^T\text{可逆。}$$
$$AX = AA^T(AA^T)^{-1}B$$
$$X = A^T(AA^T)^{-1}B$$

(2)若p>q，求矩阵X，使得矩阵AX-B的F范数最小

优化问题为

$$\min f(X) = ||AX-B||_F^2 \quad (6)$$
$$f(X) = tr[(AX-B)^T(AX-B)] \quad (7)$$
$$\frac{\partial f}{\partial X} = 2A^T(AX-B) = 0$$
$$\text{因为}p > q, rank(A) = q\text{，}A\text{列满秩，所以}A^T A\text{可逆。}$$
$$(A^TA)^{-1}A^TAX = (A^TA)^{-1}A^TB$$
$$X = (A^TA)^{-1}A^TXB$$

23. 给出优化问题$\min\limits_x x^3 - ax$使用牛顿法时的迭代格式。

解： 令$f(x) = x^3 - ax, f'(x) = 3x^2 - a, f''(x) = 6x$ 故牛顿迭代格式为

$x_n = x_{n-1} - \frac{3x_n^2 - a}{6x_n}$