1. 分别求下面向量1-范数、2-范数和无穷范数 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

解：

$\|a_1\|_1 = 4, \|a_1\|_2 = \sqrt{6}, \|a_1\|_\infty = 2$

$\|a_2\|_1 = 2, \|a_2\|_2 = \sqrt{2}, \|a_2\|_\infty = 1$

$\|a_3\|_1 = 4, \|a_3\|_2 = \sqrt{6}, \|a_3\|_\infty = 2$

2. 证明函数$F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, F(x) = \sqrt{\langle x, x\rangle}$是向量范数。

解：

非负性：由内积的非负性可得$F(x) = \sqrt{\langle x, x\rangle} \geq 0$当且仅当$x = 0$时等号成立。

齐次性：设$\lambda \in \mathbb{R}$那么$F(\lambda x) = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle}$

三角不等式：设$x, y \in \mathbb{R}^n$，那么

$$\begin{aligned}
F(x+y) &= \sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} \\
&= \sqrt{\langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle} \\
&\leq \sqrt{\langle x, x\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle} + \langle y, y\rangle} \\
&= \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle} \\
&= F(x) + F(y)
\end{aligned}$$

3. 对任给的$x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{C}^3$，试问如下实值函数是否构成向量范数?
   1. $f_1(x) = |x_1|^4 + |x_2|^4 + |x_3|^4$,
   2. $f_2(x) = |x_1| + 3|x_2| + 2|x_3|$,

解：

1. 非负性：$|x_1|^4 + |x_2|^4 + |x_3|^4 \geq 0$

齐次性：令$c \in C$,$|cx_1|^4 + |cx_2|^4 + |cx_3|^4 = |c|^4(|x_1|^4 + |x_2|^4 + |x_3|^4)$

三角不等式：取$x = (1, 0, 0), y = (2, 0, 0)$则有

$$\begin{aligned}
&|1+2|^4 + |0|^4 + |0|^4 \\
=&81 \\
\geq&|1|^4 + |0|^4 + |0|^4 + |2|^4 + |0|^4 + |0|^4 \\
=&1 + 16 \\
=&17
\end{aligned}$$

不满足齐次性和三角不等式，所以$f_1(x)$不是向量范数。

2. 非负性：$|x_1| + 3|x_2| + 2|x_3| \geq 0$

齐次性：令$c \in C$,$|cx_1|+3|cx_2|+2|cx_3| = |c||x_1|+3|x_2|+2|x_3|$

三角不等式：令$x=(x_1,x_2,x_3)^T, y=(y_1,y_2,y_3)^T \in C^3$

则，$$\begin{aligned} &|x_1+y_1|+3|x_2+y_2|+2|x_3+y_3| \\ \le &|x_1|+3|x_2|+2|x_3|+|y_1|+3|y_2|+2|y_3| \end{aligned}$$

所以$f_2(x)$是向量范数。

4. 证明如下定义的函数$\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是内积。$\langle x,y\rangle := x_1y_1-(x_1y_2+x_2y_1)+2x_2y_2$

解：

$$\langle x,y\rangle = x_1y_1-(x_1y_2+x_2y_1)+2x_2y_2 = (\,x_1,x_2\,)\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

令矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$

非负性：因为A是正定矩阵。所以$\langle x,x\rangle\ge 0$当且仅当$x=0$时等号成立。

对称性：

$$\begin{aligned}\langle y,x\rangle &= (\langle y,x\rangle)^T \\ &= ((\,y_1,y_2\,)\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix})^T \\ &= (\,x_1,x_2\,)\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} \\ &= \langle x,y\rangle\end{aligned}$$

齐次性：设$\lambda\in R$

$$\begin{aligned}\langle \lambda x,y\rangle &= (\,\lambda x_1,\lambda x_2\,)\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} \\ &= \lambda(\,x_1,x_2\,)\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} \\ &= \lambda\langle x,y\rangle\end{aligned}$$

线性性：

$$\begin{aligned}\langle x+y,\ z\rangle &= (\,x_1+y_1,x_2+y_2\,)\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix} \\ &= (\,x_1,x_2\,)\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}+(\,y_1,y_2\,)\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix} \\ &= \langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle\end{aligned}$$

证毕

5. 分别求下面矩阵1-范数、2-范数和无穷范数 $A_1=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}-1&0\\1&2\end{pmatrix}$

解：

$$A_1^TA_1=\begin{pmatrix}2&2\\2&4\end{pmatrix}$$

$\lambda_{max}(A_1^T A_1) = 3+\sqrt{5}$

$\|A_1\|_1 = 2, \|A_1\|_2 = \sqrt{3+\sqrt{5}}, \|A_1\|_\infty = 3$

$A_2^T A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\|A_2\|_1 = 2, \|A_2\|_2 = \sqrt{3+\sqrt{5}}, \|A_2\|_\infty = 3$

6. 有些平时称之为“距离”的函数其实并不是数学意义上的距离，请判断以下两种所谓的“距离”是否是数学意义上的距离并说明理由。

   (1) 假设向量$a, b \in \mathbb{R}^n$，定义余弦距离为 $d(a,b) = 1-\cos\langle a,b\rangle$ 其中$\langle a,b\rangle$为向量a, b间的夹角。

   (2) 假设S1, S2分别表示两个字符串，定义S1, S2的编辑距离$d(S_1,S_2)$为由S_1转成S_2所需的最少编辑操作次数。其中一次编辑操作可以是：将S1中的一个字符替换成另一个字符；在S1中插入一个字符；在S1中删除一个字符。 例如kitten和sitting的编辑距离是3。将kitten变为sitting的最小处理方式如下：

   kitten → sitten （将k替换为s）

   sitten → sittin （将e替换为i）

   sittin → sitting（尾部插入g）

解：

(1)设$a=(1,0), b=(1,1), c=(0,1)$ 则 $d(a,b) = d(b,c) = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}, d(a,c) = 1$，故 $d(a,b)+d(b,c) = 2-\sqrt{2} > 1 = d(a,c)$ 所以不满足三角不等式。

所以不是距离。

(2) 非负性：$d(S_1,S_2) = 0$当且仅当$S_1 = S_2$ 显然成立。

对称性：假设将S_1变成S_2的最少编辑方式为$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 那么存在将S_2变成S_1的一种编辑方式为$\bar{a}_n, \ldots, \bar{a}_2, \bar{a}_1$ ，其中如果a_i是插入一个字符，$\bar{a}_i$则是删除改字符，如果a_i是删除一个字符，$\bar{a}_i$则是插入改字符，如果a_i是将一个字符替换为另一个，$\bar{a}_i$则是将另一个字符替换回来，并且不存在比该方式更短的编辑方式。因为如果存在$\bar{b}_k, \ldots, \bar{b}_2, \bar{b}_1$ ，且 $k<n$那么$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 就不是S_1变成S_2的最少编辑方式。

所以$d(S_1,S_2) = d(S_2,S_1)$

三角不等式：对任意的S_1, S_2, S_3 如果将S_1变成S_2的最少编辑方式为$a_1, a_2, \ldots, a_n$,将S_2变成S_3的最少编辑方式为$b_1, b_2, \ldots, b_m$，那么存在将S_1编辑为S_3的一种方式$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m$ 所以 $d(S_1,S_3) \le d(S_1,S_2)+d(S_2,S_3)$

7.求矩阵$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$的行空间、列空间、零空间和左零空间。

解：

先对矩阵$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$进行初等变换。

$$\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&4&1\\4&2&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&0\\&6&1\\&-6&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&0\\&6&1\\&&\end{pmatrix}$$

所以该矩阵的秩为2.

所以行空间为$span\{(1,-1,0)^T,(2,4,1)^T\}$

列空间为$span\{(1,2,4)^T,(-1,4,2)^T\}$

零空间为$span\{(1,1,-6)^T\}$

左零空间为$span\{(2,1,-1)^T\}$

8.求由向量$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$张成的子空间的正交补空间。

解：

容易知道向量$\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$与向量$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$均正交。

又向量组$\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$的秩为3。

所以$L(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix})$的正交补空间为$L(\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix})$

9.写出一个与子空间$span\{(1,2,1)^T\}$正交的子空间。

解：答案不唯一。

- $span\{(1,-1,1)^T\}$
- $span\{(1,0,-1)^T\}$
- $span\{k_1(1,-1,1)^T+k_2(1,0,-1)^T\}$
- $span\{(1,-1,1)^T,(1,0,-1)\}$
  10.求向量$(1,1,1)^T$投影到一维子空间$span\{(1,-1,1)^T\}$的正交投影。

解：

首先求得投影矩阵

$$P_\pi=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\tag{1}$$

向量$(1,1,1)^T$投影到一维子空间$span\{(1,-1,1)^T\}$的正交投影为

$$P_\pi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

11.求向量$(1,1,1)^T$投影到仿射空间$span\{(1,-1,1)^T,(1,1,0)^T\}+(1,2,1)^T$的正交投影。

解：

先求$(0,-1,0)^T$到子空间$span\{(1,-1,1)^T,(1,1,0)^T\}$的投影。

同样先求投影矩阵

$$\begin{aligned} P_\pi &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \\ & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

得到$(0,-1,0)^T$到子空间$span\{(1,-1,1)^T,(1,1,0)^T\}$的投影。

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

最后求得向量$(1,1,1)^T$投影到仿射空间$span\{(1,-1,1)^T,(1,1,0)^T\}+(1,2,1)^T$的正交投影为

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \tag{4}$$

12.已知三维空间中的数据集($\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$) 被降维到一维直线上分别为 ($\begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1.5 \\ 3 \\ 1.5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$) 。求投影矩阵。

解：

可以看出数据点被投影到$span\{(1,2,1)^T\}$上，故投影矩阵为

$$P_\pi = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

13.设$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,试将向量组$(a_1,a_2,a_3)$标准正交化。

解：

$\hat{\beta}_1 = \alpha_1 = (1, 2, -1)^T$ ， $\beta_1 = \frac{1}{||\hat{\beta}_1||}\hat{\beta}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)^T$

$\hat{\beta}_2 = \alpha_2 - \langle\alpha_2, \beta_1\rangle\beta_1 = (-1, 3, 1)^T - \frac{2}{3}(1, 2, -1)^T = \frac{5}{3}(-1, 1, 1)^T$,
$\beta_2 = \frac{1}{||\hat{\beta}_2||}\hat{\beta}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)^T$

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_3 &= \alpha_3 - \langle\alpha_2, \beta_1\rangle\beta_1 - \langle\alpha_2, \beta_1\rangle\beta_1 \\ &= (4, -1, 0)^T - \frac{1}{3}(1, 2, -1)^T + \frac{5}{3}(-1, 1, 1)^T \\ &= (2, 0, 2)^T\end{aligned}$$

$\beta_3 = \frac{1}{||\hat{\beta}_3||}\hat{\beta}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^T$

故标准化后的向量组为 $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$