Tutorial 11

算法基础 Tutorial 11

1. 次模定义：$f: 2^V \to R$ 是次模，如果对所有的 $S, T \subseteq V$，有

$$f(S)+f(T) \geq f(S\cup T)+f(S\cap T)$$

证明 ⇒ $S \subseteq T$，$C \subseteq V \setminus T$，对集合 $S\cup C$ 与 T，

有 $f(S\cup C)+f(T) \geq f(S\cup C\cup T)+f((S\cup C)\cap T)$

$$= f(C\cup T)+f(S)$$

即 $f(S\cup C)-f(S) \geq f(T\cup C)-f(T)$

⇐：见反面，写在第4题后面.

2. Hill-climbing

$C=\phi$　　$\cancel{a}$ b $\cancel{c}$ $\cancel{d}$ $\cancel{e}$ f $\cancel{g}$ $\cancel{h}$ $\cancel{i}$ j k $\cancel{l}$

step1: $C = C\cup A_6 = A_6$　　$|A_6|=6$　$\{c,d,g,h,k,l\}$

step2: $f(A_6\cup\{\})-f(A_6)$

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
1	2	2	3	2	0	1	3

$(A_4=A_8)$

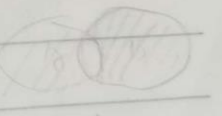
$C=\{A_6, A_4\}$ ~~或 $\{A_6, A_8\}$~~　$\{a,c,d,e,g,h,i,k,l\}$

step3: $f(C\cup\{\})-f(C)$

A_1	A_2	A_3	$\cancel{A_4}$	A_5	$\cancel{A_6}$	A_7	$\cancel{A_8}$
1	1	1		1		0	

$C=\{A_6, A_4, A_1\}$　　$|C|=10$

3. $f(A)$ 是次模 ∴ 对 $\forall A,B \in V$ 有 $f(A)-f(A\cap B) \geq f(A\cup B)-f(B)$



证明 a) $\forall A,B\in V$，有 $A^c, B^c \in V$，∵ f 是次模

∴ $f(A^c)+f(B^c) \geq f(A^c\cap B^c)+f(A^c\cup B^c)$

$$= f((A\cup B)^c)+f((A\cap B)^c)$$ ∴ $\bar{f}$ 是次模

~~∴ $\bar{f}(A)+\bar{f}(B) \geq \bar{f}(A\cup B)+\bar{f}(A\cap B)$ ∴~~

b) $g(A)=f(A\cap S)$

∵ $f(A\cap S)+f(B\cap S) \geq f(A\cap B\cap S)+f((A\cup B)\cap S)$

∴ $g(A)+g(B) \geq g(A\cap B)+g(A\cup B)$ ∴ g 是次模

Maxleaf

No.
Date

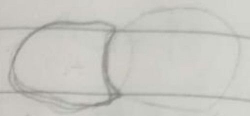
4. $f(S)=\sum_{i\in S} w_i$, $\forall S\subseteq N$

证明：对 $\forall A,B\subseteq N$

$f(A)=\sum_{i\in A} w_i$　$f(B)=\sum_{i\in B} w_i$　$f(A\cup B)=\sum_{i\in A\cup B} w_i$，$f(A\cap B)=\sum_{i\in A\cap B} w_i$

$f(A)-f(A\cap B)=\sum_{i\in A\setminus(A\cap B)} w_i$ ①　$f(A\cup B)-f(B)=\sum_{i\in(A\cup B)\setminus B} w_i$ ②

$\because A-(A\cap B)=(A\cup B)-B$



$\therefore$ ①=② 即 $f(A)-f(A\cap B)=f(A\cup B)-f(B)$

$\therefore f(S)$是次模

对 $\forall S,T$

1. $\Leftarrow$：令 $T\setminus S=\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$　$T_j=\{v_1,v_2,\cdots v_j\}$

$A_j=(S\cap T)\cup T_j$　$B_j=S\cup T_j$

$\because A_j\subseteq B_j$　$\{v_{j+1}\}$不在B_j中

$\therefore$ 则有 ~~$f(A_j\cup\{v_{j+1}\})-f(A_j)\geq f(B_j\cup\{v_{j+1}\})-f(B_j)$~~，$j=0,1,2\cdots k-1$

对 $j=1,2\cdots k-1$ 个不等式求和得

~~$f(S\cup T)+f(S\cap T)\leq f(S)+f(T)$ $(\forall S,T)$~~

$j=0$　$=f(A_2)$

$j=1$　$f(A_1\cup v_2)-f(A_1)\geq f(B_1\cup v_2)-f(B_1)$

$j=2$　$f(A_2\cup v_3)-\cancel{f(A_2)}\geq f(B_2\cup v_3)-\cancel{f(B_2)}$

$\vdots$

$\vdots$

$f(A_{k-1}\cup v_k)-\cancel{f(A_{k-1})}\geq f(B_{k-1}\cup v_k)-\cancel{f(B_{k-1})}$

$j=k$　$f(A_k)-f(A_1)\geq f(B_k)-f(B_1)$

$\Updownarrow$ $f(T)-f(S\cap T)\geq f(S\cup T)-f(S)$