1.现有4个文档： I know. You know. I know that you know. I know that you know that I know. 试计算，该文本各个单词的TF-IDF值。

解：

$\text{TF}_{列,行}$	I	You(you)	know	that
文档1	0.5		0.5	
文档2		0.5	0.5	
文档3	0.2	0.2	0.4	0.2
文档4	0.25	0.125	0.325	0.25

	I	You(you)	know	that
IDF	$\ln(4/3)$	$\ln(4/3)$	0	$\ln(2)$

$\text{TF-IDF}_{列,行}$	I	You(you)	know	that
文档1	0.5$\ln(4/3)$		0	
文档2		0.5$\ln(4/3)$	0	
文档3	0.2$\ln(4/3)$	0.2$\ln(4/3)$	0	0.2 $\ln(2)$
文档4	0.25$\ln(4/3)$	0.125$\ln(4/3)$	0	0.25$\ln(2)$

2.现有一个数据集有5个数据，分别被分类在$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$,而一个模型给出的评分分别为$\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$,试给出此时模型给各个数据的概率评分以及交叉熵损失的值。

解：

x	$\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$
$p(x)$	$\begin{pmatrix}0.0025\\0.9975\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.0003\\0.9997\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.7311\\0.2689\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.0180\\0.9820\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.8808\\0.1192\end{pmatrix}$
$l(x)$	0.0025	0.0003	1.3133	4.0181	0.1269

总的交叉熵损失为$L=5.4612$

3.设A,B为两可逆矩阵，令$X=\begin{pmatrix}O & A\\B & O\end{pmatrix}$求$X^{-1}$。

解：

解法一：

令$X^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

$XX^{-1}=\begin{pmatrix} AA_{21} & AA_{22} \\ BA_{11} & BA_{12} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$

故$X^{-1}=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$

解法二：

$\begin{pmatrix} O & A & I & O \\ B & O & O & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} B & O & O & I \\ O & A & I & O \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & O & O & B^{-1} \\ O & I & A^{-1} & O \end{pmatrix}$

所以$X^{-1}=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$

4.求解线性方程组$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

解：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -6 & -5 & -11 \\ 0 & -7 & -10 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ & 1 & 5 & 6 \\ & -7 & -10 & 17 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ & 1 & 5 & 6 \\ & & 25 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ & 1 & & 1 \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

所以$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5.证明：$\mathbb{R}^{m\times m}$中的对称矩阵按照矩阵的加法与数乘在数域$\mathbb{R}$上构成一个线性空间。（如果矩阵A是对称矩阵，则有$A^T=A$。）

解：

设$A_1,A_2\in\mathbb{R}^{m\times m}$是对称矩阵，$a,b\in R$。

则$(aA_1+bA_2)^T=(aA_1)^T+(bA_2)^T=aA_1+bA_2$

所以aA_1+bA_2仍是$\mathbb{R}^{m\times m}$上的对称矩阵。

故$\mathbb{R}^{m\times m}$中的对称矩阵按照矩阵的加法与数乘在数域$\mathbb{R}$上构成一个线性空间。

6.令$\beta=(1,2,1,1)^T,\alpha_1=(1,1,1,1)^T,\alpha_2=(1,1,-1,-1)^T,$
$\alpha_3=(1,-1,1,-1)^T,\alpha_4=(1,-1,-1,1)^T$，试将向量$\beta$表示成$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的线性组合。

解：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & -2 & -2 & 1 \\ & -2 & 0 & -2 & 0 \\ & -2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & -2 & -2 & -4 & 1 \\ & & 2 & 2 & -1 \\ & & & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ & -4 & -4 & -8 & 2 \\ & & 4 & 4 & -2 \\ & & & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & & 5 \\ & -4 & -4 & & 0 \\ & & 4 & & -1 \\ & & & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 4 & & & 6 \\ & -4 & & & -1 \\ & & 4 & & -1 \\ & & & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & & & & 5 \\ & -4 & & & -1 \\ & & 4 & & -1 \\ & & & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & & \frac{5}{4} \\ & 1 & & & \frac{1}{4} \\ & & 1 & & -\frac{1}{4} \\ & & & 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

故，$\beta = \frac{1}{4}(5\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4)$

7.设$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \epsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,试求$a$在基$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$下的坐标。

解：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & -2 & -2 & 1 \\ & -2 & 0 & -2 & -2 \\ & -2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & -2 & -2 & -4 & -1 \\ & & 2 & 2 & -1 \\ & & & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & & 1 \\ & -2 & -2 & & 1 \\ & & 2 & & -2 \\ & & & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & & & 3 \\ & -2 & & & -1 \\ & & 2 & & -2 \\ & & & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & & & & 2 \\ & 2 & & & 1 \\ & & 2 & & -2 \\ & & & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

故，$\alpha = \epsilon_1 + 0.5\epsilon_2 - \epsilon_3 + 0.5\epsilon_4$

故α在 基$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$下的坐标为$(1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$。

8.记数域$\mathbb{R}$上的对称矩阵按照矩阵的加法与数乘构成的线性空间为V。证明：映射 $\sigma_Q : V \to V, \sigma_Q(A) = Q^T AQ$为线性映射。其中$Q$为正交矩阵，即$Q^T Q = I$

解：

设$A_1, A_2 \in V, a, b \in \mathbb{R}$那么

$$\begin{aligned}\sigma_Q(aA_1 + bA_2) &= Q^T(aA_1 + bA_2)Q \\ &= Q^T(aA_1)Q + Q^T(bA_2)Q \\ &= aQ^T A_1 Q + bQ^T A_2 Q \\ &= a\sigma_Q(A_1) + b\sigma_Q(A_2)\end{aligned}$$

所以映射$\sigma_Q : V \to V, \sigma_Q(A) = Q^T AQ$为线性映射。

9.判断$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$是否在矩阵$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 6 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$的零空间中。

解：

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 6 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

所以$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$不在矩阵$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 6 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$的零空间中。

10.求矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$对应二次型的标准型。

解：

(注意本题最终结果不唯一，只要最终主对角线上正值元素个数、负值元素个数、零元素个数正确即可)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11.试判断下列哪些矩阵是正定矩阵。

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

解：

(1).$|2|=2>0,|A_1|=2-1=1>0$ 故A_1的各阶顺序主子式大于0，故A_1正定。

(2).$|5|=5>0,\begin{vmatrix}5&1\\1&4\end{vmatrix}=19>0,\begin{vmatrix}5&1&0\\1&4&0\\0&0&7\end{vmatrix}=7\times19>0$

$\begin{vmatrix}5&1&0&0\\1&4&0&0\\0&0&7&2\\0&0&2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&1\\1&4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}7&2\\2&4\end{vmatrix}=19\times24>0$，故$A_2$正定

(3).注意到A_3的二阶顺序主子式$\begin{vmatrix}2&3\\3&1\end{vmatrix}=2-9=-7<0$ 故A_3不是正定矩阵。

(4).注意到A_4的二阶顺序主子式$\begin{vmatrix}2&3\\3&1\end{vmatrix}=2-9=-7<0$ 故A_4不是正定矩阵。

12.求矩阵$A=\begin{pmatrix}1&4&2\\0&-3&4\\0&4&3\end{pmatrix}$的特征值与对应的特征向量。

解：

$$\begin{vmatrix}\lambda-1&-4&-2\\0&\lambda+3&-4\\0&-4&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda+3&-4\\-4&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-5)(\lambda+5)$$

当$\lambda=1$时

$$\begin{vmatrix}0&-4&-2\\0&4&-4\\0&-4&-2\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}0&2&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{vmatrix}$$

所以特征值1对应的特征向量为$(1,0,0)^T$

当$\lambda=5$时

$$\begin{vmatrix}4&-4&-2\\0&8&-4\\0&-4&2\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}2&-2&-1\\0&2&-1\\0&0&0\end{vmatrix}$$

所以特征值5对应的特征向量为$(2,1,2)^T$

当$\lambda=-5$时

$$\begin{vmatrix}-6&-4&-2\\0&-2&-4\\0&-4&-8\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}3&2&1\\0&1&2\\0&0&0\end{vmatrix}$$

所以特征值-5对应的特征向量为$(1,-2,1)^T$

14. 设A,B为任意两个n阶方阵，证明：AB和BA具有相同的特征多项式，即
$|\lambda E-AB|=|\lambda E-BA|$

解：

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -A & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda E & B \\ \lambda A & \lambda E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda E & B \\ O & \lambda E-AB \end{pmatrix} \tag{1}$$
$$\begin{pmatrix} \lambda E & B \\ \lambda A & \lambda E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & O \\ -A & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda E-BA & B \\ O & \lambda E \end{pmatrix}$$

又

$$\det\left(\begin{pmatrix} E & O \\ -A & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda E & B \\ \lambda A & \lambda E \end{pmatrix}\right)=\det\left(\begin{pmatrix} \lambda E & B \\ \lambda A & \lambda E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & O \\ -A & E \end{pmatrix}\right) \tag{2}$$

所以

$$\begin{vmatrix} \lambda E & B \\ O & \lambda E-AB \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda E-BA & B \\ O & \lambda E \end{vmatrix} \tag{3}$$
$$|\lambda E-AB|=|\lambda E-BA|$$