SNL cvičení - Logika

Výroková logika

1. Převeďte pomocí algebraických úprav následující formuli do DNF: $(X \vee Y) \wedge (X \rightarrow \neg(Y \wedge Z))$

2. Převeďte pomocí algebraických úprav následující formuli do CNF:
   $(X \leftrightarrow Y) \vee (X \rightarrow Z)$

3. Formalizujte ve výrokové logice a dokažte, že platí následující:
   a. Pokud je víkend, státní svátek, nebo pandemie, fakulta je zavřená.
   b. Pokud je fakulta zavřená, studenti i učitelé mají radost.
   c. Studenti nemají radost.
   d. Tudíž není víkend.

4. Nechť Φ je množina všech formulí výrokové logiky. Určete, zda jsou relace $\Rightarrow$ (logický důsledek) a $\Leftrightarrow$ (logická ekvivalence) relacemi uspořádání nebo ekvivalence na Φ.

Predikátová logika

5. Uvažujte jazyk predikátové logiky 1. řádu s
   - funkčními symboly $\{f_{/2}, g_{/1}, h_{/0}\}$ a
   - predikátovým symbolem $\{p_{/1}\}$ (uvažujte i $=_{/2}$ jako "*vestavěný*" predikátový symbol*)* a
   - množinu proměnných $\{x, y, z, \ldots\}$

   Určete
   - zda následující zápisy jsou formulemi daného jazyka (dle striktní syntaxe) a
   - které ze zápisů jsou termy.

   a. $f(x, y)$
   b. $f(x) = f(h)$
   c. $f(x, y) = f(y, z)$
   d. $g(x, y) = g(y, z)$
   e. $p(f(x, g(g(g(g(g(g(h))))))))$
   f. $g(x) \wedge p(x = f(x, y))$
   g. $\forall x(p(g(x)))$
   h. $\exists f(x)$
   i. $\exists x \in \mathbb{N}\ (p(x))$
   j. $\forall x(p(f(x, y)) \wedge ((g(x) = f(x, h) \rightarrow \neg(x = h))))$

6. Najděte volné proměnné $\{x, y, \ldots\}$ v následujících formulích:
   a. $p(x) \wedge \neg r(y, a)$
   b. $\exists x\big(\ p(x) \rightarrow \exists y(\neg q(f(x), y, f(y)))\ \big)$
   c. $\exists x(p(x)) \rightarrow \exists y(\neg q(f(x), y, f(z)))$
   d. $\exists x(p(y)) \rightarrow \exists y(\neg q(f(x), y, f(y)))$
   e. $\forall x\big(\ p(x) \rightarrow \exists y(\neg q(f(x), y, f(y)))\ \big)$

7. Uvažujte jazyk predikátové logiky 1. řádu s jediným predikátovým symbolem $\in_{/2}$ teorie množin a dvěma konstantními funkčními symboly $b_{/0}$ a $c_{/0}$. Formalizujte pomocí uzavřených formulí následující výroky:
   a. b je podmnožinou c
   b. b a c jsou disjunktní množiny
   c. sjednocení b a c pokrývá univerzum

8. Uvažujte jazyk predikátové logiky 1. řádu s jediným predikátovým symbolem $E_{/2}$ teorie grafů ($E(x, y)$ vyjadřuje, že existuje hrana z x do y). Formalizujte následující výroky:
   a. existuje cesta délky 4 z x do y
   b. x a y tvoří spolu s dalším uzlem cyklus délky 3
   c. x, y a z tvoří kliku velikosti 3

9. Uvažujte jazyk predikátové logiky 1. řádu teorie grup, konkrétně jazyk s jediným funkčním symbolem $\{\cdot_{/2}\}$ a jediným ("*vestavěným*") predikátovým symbolem $=_{/2}$. Formalizujte následující výroky:
   a. Existuje maximálně jeden neutrální prvek.
   b. Pokud existuje levý neutrální prvek a pravý neutrální prvek, pak se rovnají.
   c. Operace $\cdot$ není asociativní.
   d. Ke každému prvku existuje právě jeden inverzní prvek.
   e. Pokud je $\cdot$ asociativní, pak se levé a pravé inverzní prvky rovnají.
   f. Nechť $f_{/1}$ a $g_{/1}$ jsou unární predikátové symboly označující, že jejich argument patří do množiny M_f, resp. M_g. Formalizujte tvrzení:
      i. $(M_f, \cdot)$ je podgrupoid $(M_g, \cdot)$.
      ii. $(M_f, \cdot)$ je Abelova grupa.

10. Uvažujte jazyk predikátové logiky L s funkčními symboly $\{a_{/0}, b_{/0}, c_{/0}, d_{/0}\}$ a predikátovými symboly $\{E_{/1}, M_{/2}, S_{/2}\}$. Dále uvažujte realizaci I jazyka L s doménou $D_I = \{1, 3, 5, 15\}$, kde
    - predikátový symbol E je interpretován jako "*je sudé*" (tj. $\alpha_I(E) = \emptyset$)
    - symbol M jako "*je násobkem*" (tj. $\alpha_I(M) = \{(1,1), (3,1), (3,3), (5,1), (5,5), (15,1), (15,5), (15,15)\}$) a
    - S jako "*je ostře menší než*" (tj. $\alpha_I(S) = \{(1,3), (1,5), (1,15), (3,5), (3,15), (5,15)\}$).

    Dále platí $\alpha_I(a) = 1, \alpha_I(b) = 3, \alpha_I(c) = 5$ a $\alpha_I(d) = 15$.
    Určete, zda následující výroky platí v I:
    a. $\exists y(E(y))$
    b. $\forall x(\neg E(x))$
    c. $\forall x(M(x, a))$
    d. $\forall x(M(x, b))$
    e. $\exists x(M(x, d))$
    f. $\exists x(S(x, a))$
    g. $\forall x(E(x) \to M(x, a))$
    h. $\forall x \exists y(S(x, y))$
    i. $\forall x \exists y(M(x, y))$
    j. $\forall x(M(x, b) \to S(x, c))$
    k. $\forall x \forall y(S(x, y) \to \neg S(y, x))$
    l. $\forall x(M(x, c) \vee S(x, c))$

11. Najděte modely následujících formulí (nad jazykem daným implicitně dle výskytu symbolů ve formulích) a pro každou formuli najděte i realizaci, která není model (pokud taková existuje).
    a. $\forall x \forall y \big(\, p(x,x) \wedge (p(x,y) \leftrightarrow p(y,x))\, \big)$
    b. $\exists x (p(x, f(y)))$
    c. konjunkce následujících formulí:
        i. $\forall x \forall y \forall z \big(\, (p(x,y) \wedge p(y,z)) \to p(x,z)\, \big)$
        ii. $\forall x \forall y \big((p(x,y) \wedge p(y,x)) \to x = y)$
        iii. $\forall x \exists y \big((p(x,y) \wedge \neg(x = y))$
    d. $\forall x \forall y (S(x) = S(y) \to x = y) \quad \wedge \quad \exists x (\forall y (\neg (S(y) = x)))$