SDL — Logika — Cvičení

Příklad 1. Pro připomenutí, schémata axiomů VL:

$$\begin{array}{ll}
\text{(A1)} & A \to (B \to A) \\
\text{(A2)} & (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \\
\text{(A3)} & (\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)
\end{array}$$

Modus ponens: Z A a $(A \to B)$ odvodíme B.

Jsou následující sekvence formulí důkazem?

a) $((\neg D) \to C)$ z předpokladů $(A \to B)$, $(B \to C)$, A?

1. A
2. $A \to B$
3. B
4. $B \to C$
5. C
6. $C \to ((\neg D) \to C)$
7. $(\neg D) \to C$

Řešení: Áno, kroky dôkazu: předpoklad, předpoklad, MP(1,2), předpoklad, MP(3,4), A1, MP(5,6)

b) A z předpokladů $(A \to B)$, $(B \to A)$?

1. $A \to B$
2. $B \to A$
3. B
4. A

Řešení: Nie, 3 nie je ani predpoklad ani axiom/aplikácia MP.

c) A z předpokladů $\neg\neg A$, $(\neg A \to \neg A)$?

1. $\neg A \to \neg A$
2. $(\neg A \to \neg A) \to ((\neg A \to \neg\neg A) \to A)$
3. $\neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg A)$
4. $\neg\neg A$
5. $\neg A \to \neg\neg A$
6. $(\neg A \to \neg\neg A) \to A$
7. A

Řešení: Nie, 2 nie je ani predpoklad ani axiom/aplikácia MP.

Ak nie, prečo, ak áno, zdůvodněte všechny kroky důkazu.

Příklad 2. Doplňte tak, aby vznikl důkaz. Zdůvodněte všechny kroky důkazu.

a) B z předpokladů $\neg A$ a $\neg B \to A$.

1. $\neg A$
2. $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$
3. $\dots$
4. $\neg B \to \neg A$
5. $(\neg B \to A) \to B$
6. $\neg B \to A$
7. B

Řešení: Př, A1, A3: $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$, MP(1,2), MP(3,4), Př, MP(5,6)

b) C z předpokladů D a $\neg C \to \neg D$.

1. $\neg C \to \neg D$
2. $D \to (\neg C \to D)$
3. D
4. $\dots$
5. $(\neg C \to \neg D) \to ((\neg C \to D) \to C)$
6. $(\neg C \to D) \to C$
7. C

Řešení: Př, A1, Př, MP(2,3): $\neg C \to D$, A3, MP(5,1), MP(4,6)

c) $(A \to C)$ z předpokladů $(A \to B)$ a $(B \to C)$.

1. $\dots$
2. $B \to C$
3. $(B \to C) \to (A \to (B \to C))$
4. $A \to (B \to C)$
5. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
6. $\dots$
7. $(A \to C)$

Řešení: Př: $A \to B$, Př, A1, MP(2,3), A2, MP(4,5): $(A \to B) \to (A \to C)$, MP(6,1)

Příklad 3. Jak důkaz $A \to A$

1.	$A \to ((A \to A) \to A)$	A1
2.	$(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$	A2
3.	$(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$	MP(1,2)
4.	$A \to (A \to A)$	A1
5.	$A \to A$	MP(3,4)

z přednášky transformovat na důkaz $\neg A \to \neg A$?

Řešení: V důkazu $(A \to A)$ z přednášky je možné A nahradit za $\neg A$, vznikne důkaz $\neg A \to \neg A$.

Příklad 4. Formalizujte teorii ekvivalencí $\sim$. Uveďte příklad formule, která a) je b) není důsledkem této teorie.

Řešení:

$$\forall x\, x \sim x$$
$$\forall x \forall y (x \sim y \to y \sim x)$$
$$\forall x \forall y \forall z (x \sim y \wedge y \sim z \to x \sim z)$$

Příklad 5. Rozšírte teoriu ekvivalencí z prikladu 4 tak, aby

a) mala každá třída alespoň dva prvky.

Řešení: Do teorie z prikladu 4 pridame

$$\forall x \exists y (x \sim y \wedge x \neq y)$$

b) každá třída mala nanejvýš dva prvky.

Řešení: Do teorie z prikladu 4 pridame

$$\forall x \forall y \forall z ((x \sim y \wedge x \sim z) \rightarrow (x = y \vee x = z \vee y = z))$$

c) ekvivalence mala maximálně dve třídy rozkladu.

Řešení: Do teorie z prikladu 4 pridame

$$\exists x \exists y \forall z (x \sim z \vee y \sim z)$$

d) ekvivalence mala jednu třídu rozkladu.

Řešení: Do teorie z prikladu 4 pridame

$$\forall x \forall y (x \sim y)$$

Příklad 6. Navrhněte teorii homomorfismů h z algeber s binární operací $+$ a unární operací f do algeber s operacemi $\bar{+}$ a $\bar{f}$. Uveďte příklad formule, která a) je b) není důsledkem této teorie.

Řešení:

$$\forall x \forall y (h(x + y) = h(x) \bar{+} h(y))$$
$$\forall x (h(f(x)) = \bar{f}(h(x)))$$

Příklad 7. Navrhněte teorii, která definuje binární predikát f jako totální funkci. Uveďte příklad formule, která a) je b) není důsledkem této teorie.

Řešení:

$$\forall x \forall y \forall z (f(x, y) \wedge f(x, z) \rightarrow y = z)$$
$$\forall x \exists y f(x, y)$$

Příklad 8. Rozšírte teoriu ekvivalencí z prikladu 4 tak, aby

a) mala každá třída alespoň dva prvky.

Řešení: Do teorie z prikladu 4 pridame

$$\forall x \exists y (x \sim y \wedge x \neq y)$$

b) každá třída mala nanejvýš dva prvky.

Řešení: Do teorie z prikladu 4 pridame

$$\forall x \forall y \forall z ((x \sim y \wedge x \sim z) \rightarrow (x = y \vee x = z \vee y = z))$$

c) ekvivalence mala maximálně dve třídy rozkladu.

Řešení: Do teorie z prikladu 4 pridame

$$\exists x \exists y \forall z (x \sim z \vee y \sim z)$$

d) ekvivalence mala jednu třídu rozkladu.

Řešení: Do teorie z prikladu 4 pridame

$$\forall x \forall y (x \sim y)$$

Příklad 9. Předpokládejme, že máme teorii $T_{\mathbb{Q}}$ racionálních čísel, která definuje běžné konstanty pro racionální čísla, $+$, $*$, a $<, \leq, \geq, >$. Jak ji rozšířit, abychom dostali teorie definující matematické struktury níže? Ukažte příklad struktury, která je/není modelem vaší teorie.

a) Binární vektory se sčítáním a násobením vektorů, jejich délku, pravoúhlost a rovnoběžnost. T.j., teorie bude definovat $+$ a $*$ pro sčítání a násobení vektorů, predikáty *orto* a *para* pravoúhlost a rovnoběžnost vektorů. Předpokládejte také, že máte k dispozici funkce l a p, které vracejí pravou respektive levou složku vektoru.

Řešení:

$$x + y = z \leftrightarrow (l(x) + l(y) = l(z) \wedge (p(x) + p(y) = p(z)))$$
$$|x| = z \leftrightarrow z * z = p(x) * p(x) + p(y) * p(y) \wedge z \geq 0$$
$$orto(x, y) \leftrightarrow l(x) * l(y) + p(x) * p(y) = 0$$
$$para(x, y) \leftrightarrow \exists z(l(x) = z * l(y) \wedge p(x) = z * p(y))$$

b) Celá čísla (t.j., jak definovat celá čísla na základě racionálních čísel?). T.j., chceme definovat predikát c tak, že $c(x)$ je platná v naší teorii, právě když x je celé číslo.

Řešení:

$$c(0)$$
$$\forall x(c(x) \leftrightarrow c(x + 1))$$
$$\forall x((c(x) \wedge 0 < d \wedge d < 1) \rightarrow \neg c(x + d))$$

c) Sčítání n-árních vektorů.

$$\forall u \forall v(u + v = w \leftrightarrow \forall i(c(i) \rightarrow s(u, i) + s(v, i) = s(w, i)))$$

Příklad 10. Navrhněte teorii, která specifikuje správnou činnost semaforu na jednokolejce. Signalizuje doprava a doleva červenou nebo zelenou, vlak může jet jen na zelenou, na červenou vlak z dané strany stojí, na zelenou může jet, vlaky by se neměly srazit, a semafor nesmí přestat fungovat.

Řešení:

$$\forall t(cervenaVpravo(t) \vee zelenaVpravo(t)) \wedge (cervenaVlevo(t) \vee zelenaVpravo(t))$$
$$\forall t(jedeZprava(t) \rightarrow zelenaVpravo(t))$$
$$\forall t(jedeZleva(t) \rightarrow zelenaVlevo(t))$$
$$\forall t(\neg zelenaVlevo(t) \vee zelenaVpravo(t))$$

Příklad 11. Navrhněte teorii, která specifikuje činnost síťové tiskárny. Když v čase t přijde požadavek na tisk souboru f, tedy $P(f, t)$, tisk se v budoucnu provede, tedy $T(f, t')$, pokud dřív nepřijde požadavek na zrušení, tedy $Z(f, t')$, a tisk nemůže začít, pokud mu nepředchází platný požadavek.

Řešení:

1. $\forall t \forall f\ (P(f, t) \rightarrow (\exists t'\ t' > t \wedge (T(f, t') \vee Z(f, t'))))$
2. $\forall t \forall f\ (T(f, t) \rightarrow (\exists t'\ t' < t \wedge P(f, t') \wedge (\forall t''\ (t' \leq t'' \leq t) \rightarrow \neg Z(f, t''))))$

Příklad 12. Je teorie s následujícími dvěma axiomy a s jazykem s predikátovým symbolem $<$, funkčním symbolem f, konstantou 0 a s rovností (a) sporná, (b) úplná? Zdůvodněte.

a)

1. $\forall x(x < 0 \vee 0 < x)$
2. $\exists y(\neg y < 0 \wedge \neg 0 < y)$

Řešení: Je sporná. 1. hovorí že každý prvok je v relácii s 0 zatiaľ čo 2. hovorí že nejaký prvok nie je v relácii s 0, nemá model. Sporná je vždy úplná.

b)

$$\begin{aligned}&1.\quad \forall x(x < 0 \vee 0 < x)\\ &2.\quad \exists y(\neg y < 0 \vee \neg 0 < y)\end{aligned}$$

Řešení: Není sporná, má model $\mathcal{M}$, kde $D_{\mathcal{M}} = \{a, b\}$, $\alpha_{\mathcal{M}}(0) = \{a\}$ a $\alpha_{\mathcal{M}}(<) = \{(a, b), (a, a)\}$. Není úplná, má ještě model $\mathcal{M}'$, kde $D'_{\mathcal{M}} = \{a, b, c\}$, $\alpha_{\mathcal{M}}(0) = \{a\}$ a $\alpha_{\mathcal{M}'}(<) = \{(a, b), (a, c), (a, a)\}$, a jsou rozlišitelné formulí $\varphi : \exists x\exists y\exists z(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$, kde $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ a $\mathcal{M}' \models \varphi$.

Příklad 13. Je teorie s následujícími dvěma axiomy a s jazykem s predikátovým symbolem $<$, funkčním symbolem f, konstantou 0 a s rovností (a) sporná, (b) úplná? Zdůvodněte.

a)

$$\begin{aligned}&1.\quad \forall x\forall y((f(x) = 0 \wedge f(y) = 0) \rightarrow x = y)\\ &2.\quad \neg\exists x(f(x) \neq 0)\end{aligned}$$

Řešení: Není sporná, má model $\mathcal{M}$, kde $D_{\mathcal{M}} = \{a\}$, $\alpha_{\mathcal{M}}(0) = \{a\}$ a $\alpha_{\mathcal{M}}(f) = \{(a, a)\}$. Je úplná, je to její jediný model (1. hovorí že na nulu sa zobrazí maximálně jeden prvok a 2. hovorí že všetky prvky sa zobrazia na 0).

b)

$$\begin{aligned}&1.\quad \forall x\forall y((f(x) = 0 \wedge f(y) = 0) \rightarrow x = y)\\ &2.\quad \exists x(f(x) \neq 0)\end{aligned}$$

Řešení: Není sporná, má model $\mathcal{M}$, kde $D_{\mathcal{M}} = \{a, b\}$, $\alpha_{\mathcal{M}}(0) = \{a\}$ a $\alpha_{\mathcal{M}}(f) = \{(a, b), (b, b)\}$. Není úplná, má ještě model $\mathcal{M}'$, kde $D'_{\mathcal{M}} = \{a, b, c\}$, $\alpha_{\mathcal{M}}(0) = \{a\}$ a $\alpha_{\mathcal{M}'}(f) = \{(a, b), (b, b), (c, c)\}$, a jsou rozlišitelné formulí $\varphi : \exists x\exists y\exists z(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$, kde $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ a $\mathcal{M}' \models \varphi$.

c)

$$\begin{aligned}&1.\quad \forall x(f(x) = 0 \rightarrow x = 0)\\ &2.\quad f(0) \neq 0\end{aligned}$$

Řešení: Je sporná. 1. hovorí že na 0 sa zobrazí len 0 zatiaľ čo 2. hovorí že 0 sa nezobrazí na 0, nemá model. Sporná je vždy úplná.

d)

$$\begin{aligned}&1.\quad \forall x(f(x) = 0 \rightarrow x = 0)\\ &2.\quad \forall x(f(x) = 0)\end{aligned}$$

Řešení: Není sporná, má model $\mathcal{M}$, kde $D_{\mathcal{M}} = \{a\}$, $\alpha_{\mathcal{M}}(0) = \{a\}$ a $\alpha_{\mathcal{M}}(f) = \{(a, a)\}$. Je úplná, je to její jediný model (1. hovorí že na nulu sa zobrazí len nula a 2. hovorí že všetky prvky sa zobrazia na 0).

e)

$$\begin{aligned}&1.\quad \exists x\forall y(x = f(y))\\ &2.\quad \forall x(f(x) = 0)\end{aligned}$$

Řešení: Není sporná, má model $\mathcal{M}$, kde $D_{\mathcal{M}} = \{a\}$, $\alpha_{\mathcal{M}}(0) = \{a\}$ a $\alpha_{\mathcal{M}}(f) = \{(a, a)\}$. Není úplná, má ještě model $\mathcal{M}'$, kde $D'_{\mathcal{M}} = \{a, b\}$, $\alpha_{\mathcal{M}}(0) = \{a\}$ a $\alpha_{\mathcal{M}'}(f) = \{(a, a), (b, a)\}$, a jsou rozlišitelné formulí $\varphi : \forall x\forall y\, x = y$, kde $\mathcal{M} \models \varphi$ a $\mathcal{M}' \models \neg\varphi$.

f)

$$\begin{aligned}&1.\quad \forall x\exists y(x = f(y))\\ &2.\quad \forall x(f(x) = 0)\end{aligned}$$

Řešení: Není sporná, má model $\mathcal{M}$, kde $D_{\mathcal{M}} = \{a\}$, $\alpha_{\mathcal{M}}(0) = \{a\}$ a $\alpha_{\mathcal{M}}(f) = \{(a, a)\}$. Je úplná, je to její jediný model (1. hovorí že na každý prvok sa niečo musí zobraziť a 2. hovorí že všetky prvky sa zobrazia na 0).

g)

$$\begin{aligned}&1.\quad \exists x\forall y(f(x) = f(y))\\ &2.\quad \forall x(f(x) = x)\end{aligned}$$

Řešení: Není sporná, má model $\mathcal{M}$, kde $D_{\mathcal{M}} = \{a\}$, $\alpha_{\mathcal{M}}(0) = \{a\}$ a $\alpha_{\mathcal{M}}(f) = \{(a, a)\}$. Je úplná, je to její jediný model (1. hovorí že všetko sa zobrazí na rovnaký prvok a 2. hovorí že všetky prvky sa zobrazia na seba).

h)

$$
\begin{aligned}
&1.\quad \forall x \exists y (f(x) = f(y)) \\
&2.\quad \forall x (f(x) = x)
\end{aligned}
$$

Řešení: Není sporná, má model $\mathcal{M}$, kde $D_{\mathcal{M}} = \{a\}$, $\alpha_{\mathcal{M}}(0) = \{a\}$ a $\alpha_{\mathcal{M}}(f) = \{(a, a)\}$. Není úplná, má ještě model $\mathcal{M}'$, kde $D'_{\mathcal{M}} = \{a, b\}$, $\alpha_{\mathcal{M}}(0) = \{a\}$ a $\alpha_{\mathcal{M}'}(f) = \{(a, a), (b, b)\}$, a jsou rozlišitelné formulí $\varphi : \forall x \forall y\, x = y$, kde $\mathcal{M} \models \varphi$ a $\mathcal{M}' \models \neg\varphi$.