Nechť $\mathcal{F} = \{ f \mid f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \}$ je množina ~~to~~ totálních funkcí z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$

① Zapište množinu fun., jejichž obor hodnot obsahuje 0

$$F = \{ f \in \mathcal{F} \mid \exists n \in \mathbb{N}: f(n) = 0 \}$$

② Zapište mn. fun., které jsou konstantní

$$F = \{ f \in \mathcal{F} \mid \exists x \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}: f(n) = x \}$$

! Pozor na prohození kvantif.

③ Zapište mn. fun., které nejsou konstantní

$$F = \{ f \in \mathcal{F} \mid \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}: f(n_1) \neq f(n_2) \}$$

④ Uvažme relaci $R \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ def. následovně

$$\forall f, g \in \mathcal{F}: (f, g) \in R \iff \forall n \in \mathbb{N}: f(x) < g(x)$$

Rozhodněte a dokažte, zda R je tranzitivní:

$$(f_1, f_2) \in R \wedge (f_2, f_3) \in R \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{N}: f_1(x) < f_2(x)) \wedge (\forall x \in \mathbb{N}: f_2(x) < f_3(x))$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{N}: f_1(x) < f_3(x) \Rightarrow (f_1, f_3) \in R$$

(5) Uvažme relaci $R \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ def. následovně 2

$\forall f, g \in \mathcal{F}: (f,g) \in R \iff \exists x \in \mathbb{N}: f(x) < g(x)$

Rozhodněte a dokažte zda

a) R je asymetrická

b) R je tranzitivní

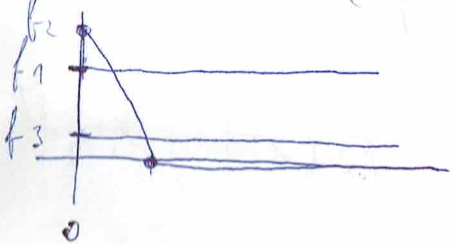
a) Musí platit, že $(f,g) \in R \Rightarrow (g,f) \notin R$

Toto ale neplatí. Uvažme např.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x = 0 \\ 0 & \text{pokud } x = 1 \\ x & \text{jinak} \end{cases} \quad \text{a} \quad g(x) = x$$

$f(1) < g(1) \Rightarrow (f,g) \in R$ a $f(0) > g(0) \Rightarrow (g,f) \in R$

b) Neplatí



$f_1(x) = 2 \quad \forall x \in \mathbb{N}$

$f_3(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{N} \Rightarrow (f_1, f_2) \in R \wedge (f_2, f_3) \in R \wedge (f_1, f_3) \notin R$

$f_2(0) = 3$

$f_2(x) = 0 \quad \forall x > 0$

DU [test z 2020]

Uvažme relaci $R \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ def násled.

$\forall f, g \in \mathcal{F}: \quad (f,g) \in R \iff \exists x_1, x_2 \in \mathbb{N}: (x_1 \leq x_2 \land \forall y \in \mathbb{N}: x_1 \leq y \leq x_2 : f(y) < g(y))$

„$f(y)$ je menší než $g(y)$ na nějakém intervalu"

Rozhodněte a dokažte, zda R je tranzitivní

Tranzitivní uzávěr relace R je nejmenší (z hlediska $\subseteq$) tranzitivní nadmnožina na R (značíme R^*)

(6) Nechť $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ t.ž. $R = \{(x, x+1) \mid x \in \mathbb{N}\}$

Určete R^*

$R^* = \{(x, x+y) \mid x, y \in \mathbb{N} \land y > 0\}$

(7) Určete relaci $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ t.ž. $R = R^*$

Například $R = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{N}\}$

Mohutnost (kardinalita) množin

konečná, nekonečná spočetná, nespočetná, ...

$\{1,2\}$ $\qquad$ $\mathbb{N}$ $\qquad$ $\mathbb{R}$ nebo také $2^{\mathbb{N}}$ $\;\to\; 2^{\mathbb{R}},\ 2^{2^{\mathbb{R}}} \ldots$

$\Downarrow$ klíčové pro CS $\qquad$ Cantorova věta

Množiny A, B mají stejnou mohutnost právě tehdy když existuje <u>bijektivní</u> funkce $f: A \to B$

injektivní $\wedge$ surjektivní

mn. konečných řetězců nad abecedou $\Sigma = \{a,b\}$ $\qquad$ revers slova w^R

(8) Nechť $\Sigma = \{a,b\}$. Uvažme funkci $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ def. jako $f(w) = w^R$

Rozhodněte a dokažte zda f je bijektivní

Důkaz surjektivity: $\underbrace{\forall w_1 \in \Sigma^*}_{\text{Musí platit, že}}$ $\exists w_2 \in \Sigma^*: f(w_2) = w_1$. Stačí užít $w_2 = w_1^R$ pak $f(w_1^R) = (w_1^R)^R = w_1$

Důkaz injektivity: $f(w_1) = f(w_2) \Rightarrow w_1^R = w_2^R \Rightarrow w_1 = w_2$

5

1) Rozhodněte a dokažte, zda množina sudých čísel (S) má stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$

Ano má. Nechť $f: \mathbb{N} \to S$ def. jako $f(x) = 2x$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$S = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$

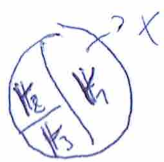
f je zřejmě bijektivní

Rozklad:

Nechť X je množina.

$Y = \{Y_1, Y_2, \dots\}$ je rozklad X pokud

- $Y \subseteq 2^X$ (rozklad je množina některých podmnožin X)
- $\bigcup_i Y_i = X$ (sjednocení těchto podmnožin dá množinu X)
- $Y_1, Y_2 \in Y \wedge Y_1 \neq Y_2 \Rightarrow Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ (tyto podmnožiny jsou po dvou disjunktní)



Rozklad X je typicky daná relací ekvivalence nad $X \times X$ (6)

(ref, sym, tran.)

$X/_R = \{ [a]_R \mid a \in X \}$

rozklad X podle R

$[a]_R = \{ b \in X \mid (a,b) \in R \}$

třída rozkladu, do které patří a

Index ~~rozkladu~~ = počet tříd rozkladu

---

(10) Uvažme relaci $R \subseteq N \times N$ def následovně

$\forall x, y \in N: (x,y) \in R \iff x \bmod 3 = y \bmod 3$ (alternativní zápis $x \equiv y \pmod 3$)

Určete $N/_R$

$N/_R = \{ [0]_R, [1]_R, [2]_R \} = \{ \{0, 3, 6, \dots\}, \{1, 4, 7 \dots\}, \{2, 5, 8 \dots\} \}$

Index je 3.

7

(11) Uvažme $\Sigma = \{a, b\}$. Najdi te relaci ekvivalence $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ t. ž.

a) Σ^*/R má nekonečný index

b) Σ^*/R má konečný index

(R není identita)

a) Například

$\forall w_1, w_2 \in \Sigma^* : (w_1, w_2) \in R \iff |w_1| = |w_2|$ (délka slova)

b) Například

$\forall w_1, w_2 \in \Sigma^* : (w_1, w_2) \in R \iff |w_1| \equiv |w_2| \pmod 3$

(12) Uvažme znovu množinu $\mathcal{F}$ (funkce z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$)

Najděte relaci ekvivalence R, která má index 3

Například

$\forall f, g \in \mathcal{F} : (f, g) \in R \iff f(0) \equiv g(0) \pmod 3$