Příklad (ne)korektního a (ne)úplného systému

Pokus o velmi jednoduchý logický ***systém pro dokazování lichosti přirozených čísel***.

Příklad (ne)korektního a (ne)úplného systému

Pokus o velmi jednoduchý logický ***systém pro dokazování lichosti přirozených čísel***.

* ***Syntaxe***:
* ***Sémantika***:
* ***Deduktivní systém***:

Příklad (ne)korektního a (ne)úplného systému

Pokus o velmi jednoduchý logický ***systém pro dokazování lichosti přirozených čísel***.

- ***Syntaxe***:
  - 0 je term, t+1 je term pokud t je term, nic jiného není term.
  - *liché*(t) je formule, pokud t je term, nic jiného není formule.
- ***Sémantika***:
- ***Deduktivní systém***:

Příklad (ne)korektního a (ne)úplného systému

Pokus o velmi jednoduchý logický ***systém pro dokazování lichosti přirozených čísel***.

- ***Syntaxe***:
  - 0 je term, $t+1$ je term pokud t je term, nic jiného není term.
  - *liché*(t) je formule, pokud t je term, nic jiného není formule.
- ***Sémantika***:
  - pro term je definována funkcí $[\![.]\!]$ tak, že $[\![0]\!] = 0 \in \mathbb{N}$ a $[\![t+1]\!] = [\![t]\!] + 1$.
  - pro formuli, $\models$ *liché*(t) právě když $[\![t]\!]$ je liché číslo.
- ***Deduktivní systém***:

Příklad (ne)korektního a (ne)úplného systému

Pokus o velmi jednoduchý logický ***systém pro dokazování lichosti přirozených čísel***.

- ***Syntaxe***:
  - 0 je term, $t{+}1$ je term pokud t je term, nic jiného není term.
  - *liché*(t) je formule, pokud t je term, nic jiného není formule.
- ***Sémantika***:
  - pro term je definována funkcí $[\![.]\!]$ tak, že $[\![0]\!] = 0 \in \mathbb{N}$ a $[\![t{+}1]\!] = [\![t]\!] + 1$.
  - pro formuli, $\models$ *liché*(t) právě když $[\![t]\!]$ je liché číslo.
- ***Deduktivní systém***:
  - axiom *liché*$(0{+}1)$,
  - odvozovací pravidlo *liché*$(t) \vdash$ *liché*$(t{+}1{+}1)$.
  - příklad důkazu: *liché*$(0{+}1)$, *liché*$(0{+}1{+}1{+}1)$, *liché*$(0{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1)$

Příklad (ne)korektního a (ne)úplného systému

Pokus o velmi jednoduchý logický ***systém pro dokazování lichosti přirozených čísel***.

* ***Syntaxe***:
  - 0 je term, $t{+}1$ je term pokud t je term, nic jiného není term.
  - *liché*(t) je formule, pokud t je term, nic jiného není formule.
* ***Sémantika***:
  - pro term je definována funkcí $[\![.]\!]$ tak, že $[\![0]\!] = 0 \in \mathbb{N}$ a $[\![t{+}1]\!] = [\![t]\!] + 1$.
  - pro formuli, $\models$ *liché*(t) právě když $[\![t]\!]$ je liché číslo.
* ***Deduktivní systém***:
  - axiom *liché*$(0{+}1)$,
  - odvozovací pravidlo *liché*$(t) \vdash$ *liché*$(t{+}1{+}1)$.
  - příklad důkazu: *liché*$(0{+}1)$, *liché*$(0{+}1{+}1{+}1)$, *liché*$(0{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1)$

Nekorektní rozšíření systému:

Příklad (ne)korektního a (ne)úplného systému

Pokus o velmi jednoduchý logický ***systém pro dokazování lichosti přirozených čísel***.

- ***Syntaxe***:
  - 0 je term, $t{+}1$ je term pokud t je term, nic jiného není term.
  - *liché*(t) je formule, pokud t je term, nic jiného není formule.
- ***Sémantika***:
  - pro term je definována funkcí $[\![.]\!]$ tak, že $[\![0]\!] = 0 \in \mathbb{N}$ a $[\![t{+}1]\!] = [\![t]\!] + 1$.
  - pro formuli, $\models$ *liché*(t) právě když $[\![t]\!]$ je liché číslo.
- ***Deduktivní systém***:
  - axiom *liché*$(0{+}1)$,
  - odvozovací pravidlo *liché*$(t) \vdash$ *liché*$(t{+}1{+}1)$.
  - příklad důkazu: *liché*$(0{+}1)$, *liché*$(0{+}1{+}1{+}1)$, *liché*$(0{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1)$

Nekorektní rozšíření systému:

- Přidáme hloupý axiom *liché*(0). Potom $\vdash$ *liché*(0), ale $\not\models$ *liché*(0).

Příklad (ne)korektního a (ne)úplného systému

Pokus o velmi jednoduchý logický ***systém pro dokazování lichosti přirozených čísel***.

- ***Syntaxe***:
  - 0 je term, t+1 je term pokud t je term, nic jiného není term.
  - *liché*(t) je formule, pokud t je term, nic jiného není formule.
- ***Sémantika***:
  - pro term je definována funkcí $[\![.]\!]$ tak, že $[\![0]\!] = 0 \in \mathbb{N}$ a $[\![t{+}1]\!] = [\![t]\!] + 1$.
  - pro formuli, $\models$ *liché*(t) právě když $[\![t]\!]$ je liché číslo.
- ***Deduktivní systém***:
  - axiom *liché*(0+1),
  - odvozovací pravidlo *liché*(t) $\vdash$ *liché*(t+1+1).
  - příklad důkazu: *liché*(0+1), *liché*(0+1+1+1), *liché*(0+1+1+1+1+1)

Nekorektní rozšíření systému:

- Přidáme hloupý axiom *liché*(0). Potom $\vdash$ *liché*(0), ale $\not\models$ *liché*(0).
- Přidáme hloupé odvozovací pravidlo *liché*(t) $\vdash$ *liché*(t+1).
  Potom $\vdash$ *liché*(0+1+1), protože *liché*(0+1), *liché*(0+1+1) je důkaz, ale $\not\models$ *liché*(0+1+1).

Příklad (ne)korektního a (ne)úplného systému

Pokus o velmi jednoduchý logický ***systém pro dokazování lichosti přirozených čísel***.

- ***Syntaxe***:
  - 0 je term, $t{+}1$ je term pokud t je term, nic jiného není term.
  - *liché*(t) je formule, pokud t je term, nic jiného není formule.
- ***Sémantika***:
  - pro term je definována funkcí $[\![.]\!]$ tak, že $[\![0]\!] = 0 \in \mathbb{N}$ a $[\![t{+}1]\!] = [\![t]\!] + 1$.
  - pro formuli, $\models$ *liché*(t) právě když $[\![t]\!]$ je liché číslo.
- ***Deduktivní systém***:
  - axiom *liché*$(0{+}1)$,
  - odvozovací pravidlo *liché*$(t) \vdash$ *liché*$(t{+}1{+}1)$.
  - příklad důkazu: *liché*$(0{+}1)$, *liché*$(0{+}1{+}1{+}1)$, *liché*$(0{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1)$

Neúplné a úplné rozšíření systému:

Příklad (ne)korektního a (ne)úplného systému

Pokus o velmi jednoduchý logický ***systém pro dokazování lichosti přirozených čísel***.

- ***Syntaxe***:
  - 0 je term, $t{+}1$ je term pokud t je term, nic jiného není term.
  - *liché*(t) je formule, pokud t je term, nic jiného není formule.
- ***Sémantika***:
  - pro term je definována funkcí $[\![.]\!]$ tak, že $[\![0]\!] = 0 \in \mathbb{N}$ a $[\![t{+}1]\!] = [\![t]\!] + 1$.
  - pro formuli, $\models$ *liché*(t) právě když $[\![t]\!]$ je liché číslo.
- ***Deduktivní systém***:
  - axiom *liché*$(0{+}1)$,
  - odvozovací pravidlo *liché*$(t) \vdash$ *liché*$(t{+}1{+}1)$.
  - příklad důkazu: *liché*$(0{+}1)$, *liché*$(0{+}1{+}1{+}1)$, *liché*$(0{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1)$

Neúplné a úplné rozšíření systému:

- Obohatíme systém o predikát sudosti:
  sudé(t) je formule pokud t je term. $\models$ *sudé*(t) právě když $[\![t]\!]$ je sudé číslo.

Příklad (ne)korektního a (ne)úplného systému

Pokus o velmi jednoduchý logický ***systém pro dokazování lichosti přirozených čísel***.

- ***Syntaxe***:
  - 0 je term, t+1 je term pokud t je term, nic jiného není term.
  - *liché*(t) je formule, pokud t je term, nic jiného není formule.
- ***Sémantika***:
  - pro term je definována funkcí $[\![.]\!]$ tak, že $[\![0]\!] = 0 \in \mathbb{N}$ a $[\![t{+}1]\!] = [\![t]\!] + 1$.
  - pro formuli, $\models$ *liché*(t) právě když $[\![t]\!]$ je liché číslo.
- ***Deduktivní systém***:
  - axiom *liché*(0+1),
  - odvozovací pravidlo *liché*(t) $\vdash$ *liché*(t+1+1).
  - příklad důkazu: *liché*(0+1), *liché*(0+1+1+1), *liché*(0+1+1+1+1+1)

Neúplné a úplné rozšíření systému:

- Obohatíme systém o predikát sudosti:
  sudé(t) je formule pokud t je term. $\models$ *sudé*(t) právě když $[\![t]\!]$ je sudé číslo.
- Systém není úplný. $\models$ *sudé*(0+1+1) ale $\nvdash$ *sudé*(0+1+1)

Příklad (ne)korektního a (ne)úplného systému

Pokus o velmi jednoduchý logický ***systém pro dokazování lichosti přirozených čísel***.

- ***Syntaxe***:
  - 0 je term, $t{+}1$ je term pokud t je term, nic jiného není term.
  - *liché*(t) je formule, pokud t je term, nic jiného není formule.
- ***Sémantika***:
  - pro term je definována funkcí $[\![.]\!]$ tak, že $[\![0]\!] = 0 \in \mathbb{N}$ a $[\![t{+}1]\!] = [\![t]\!] + 1$.
  - pro formuli, $\models$ *liché*(t) právě když $[\![t]\!]$ je liché číslo.
- ***Deduktivní systém***:
  - axiom *liché*$(0{+}1)$,
  - odvozovací pravidlo *liché*$(t) \vdash$ *liché*$(t{+}1{+}1)$.
  - příklad důkazu: *liché*$(0{+}1)$, *liché*$(0{+}1{+}1{+}1)$, *liché*$(0{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1)$

Neúplné a úplné rozšíření systému:

- Obohatíme systém o predikát sudosti:
  sudé(t) je formule pokud t je term. $\models$ *sudé*(t) právě když $[\![t]\!]$ je sudé číslo.
- Systém není úplný. $\models$ *sudé*$(0{+}1{+}1)$ ale $\nvdash$ *sudé*$(0{+}1{+}1)$
- Jak zúplnit?

Příklad (ne)korektního a (ne)úplného systému

Pokus o velmi jednoduchý logický ***systém pro dokazování lichosti přirozených čísel***.

- ***Syntaxe***:
  - 0 je term, t+1 je term pokud t je term, nic jiného není term.
  - *liché*(t) je formule, pokud t je term, nic jiného není formule.
- ***Sémantika***:
  - pro term je definována funkcí $[\![.]\!]$ tak, že $[\![0]\!] = 0 \in \mathbb{N}$ a $[\![t{+}1]\!] = [\![t]\!] + 1$.
  - pro formuli, $\models$ *liché*(t) právě když $[\![t]\!]$ je liché číslo.
- ***Deduktivní systém***:
  - axiom *liché*(0+1),
  - odvozovací pravidlo *liché*(t) $\vdash$ *liché*(t+1+1).
  - příklad důkazu: *liché*(0+1), *liché*(0+1+1+1), *liché*(0+1+1+1+1+1)

Neúplné a úplné rozšíření systému:

- Obohatíme systém o predikát sudosti:
  sudé(t) je formule pokud t je term. $\models$ *sudé*(t) právě když $[\![t]\!]$ je sudé číslo.
- Systém není úplný. $\models$ *sudé*(0+1+1) ale $\not\vdash$ *sudé*(0+1+1)
- Jak zúplnit? Přidáme pravidlo na dokazování sudosti: *liché*(t) $\vdash$ *sudé*(t+1).

Příklad (ne)korektního a (ne)úplného systému

Pokus o velmi jednoduchý logický ***systém pro dokazování lichosti přirozených čísel***.

- ***Syntaxe***:
  - 0 je term, $t{+}1$ je term pokud t je term, nic jiného není term.
  - *liché*(t) je formule, pokud t je term, nic jiného není formule.
- ***Sémantika***:
  - pro term je definována funkcí $[\![.]\!]$ tak, že $[\![0]\!] = 0 \in \mathbb{N}$ a $[\![t{+}1]\!] = [\![t]\!] + 1$.
  - pro formuli, $\models$ *liché*(t) právě když $[\![t]\!]$ je liché číslo.
- ***Deduktivní systém***:
  - axiom *liché*(0+1),
  - odvozovací pravidlo *liché*(t) $\vdash$ *liché*(t+1+1).
  - příklad důkazu: *liché*(0+1), *liché*(0+1+1+1), *liché*(0+1+1+1+1+1)

Neúplné a úplné rozšíření systému:

- Obohatíme systém o predikát sudosti:
  sudé(t) je formule pokud t je term. $\models$ *sudé*(t) právě když $[\![t]\!]$ je sudé číslo.
- Systém není úplný. $\models$ *sudé*(0+1+1) ale $\not\vdash$ *sudé*(0+1+1)
- Jak zůplnit? Přidáme pravidlo na dokazování sudosti: *liché*(t) $\vdash$ *sudé*(t+1).
  Už je úplný?

Příklad (ne)korektního a (ne)úplného systému

Pokus o velmi jednoduchý logický ***systém pro dokazování lichosti přirozených čísel***.

* ***Syntaxe***:
  - 0 je term, t+1 je term pokud t je term, nic jiného není term.
  - *liché*(t) je formule, pokud t je term, nic jiného není formule.
* ***Sémantika***:
  - pro term je definována funkcí $[\![.]\!]$ tak, že $[\![0]\!] = 0 \in \mathbb{N}$ a $[\![t{+}1]\!] = [\![t]\!] + 1$.
  - pro formuli, $\models$ *liché*(t) právě když $[\![t]\!]$ je liché číslo.
* ***Deduktivní systém***:
  - axiom *liché*(0+1),
  - odvozovací pravidlo *liché*(t) $\vdash$ *liché*(t+1+1).
  - příklad důkazu: *liché*(0+1), *liché*(0+1+1+1), *liché*(0+1+1+1+1+1)

Neúplné a úplné rozšíření systému:

* Obohatíme systém o predikát sudosti:
  sudé(t) je formule pokud t je term. $\models$ *sudé*(t) právě když $[\![t]\!]$ je sudé číslo.
* Systém není úplný. $\models$ *sudé*(0+1+1) ale $\nvdash$ *sudé*(0+1+1)
* Jak zúplnit? Přidáme pravidlo na dokazování sudosti: *liché*(t) $\vdash$ *sudé*(t+1).
  Už je úplný? Ne, zapoměli jsme 0. $\models$ *sudé*(0) ale $\nvdash$ *sudé*(0).

Příklad (ne)korektního a (ne)úplného systému

Pokus o velmi jednoduchý logický ***systém pro dokazování lichosti přirozených čísel***.

* ***Syntaxe***:
  - 0 je term, $t{+}1$ je term pokud t je term, nic jiného není term.
  - *liché*(t) je formule, pokud t je term, nic jiného není formule.
* ***Sémantika***:
  - pro term je definována funkcí $[\![.]\!]$ tak, že $[\![0]\!] = 0 \in \mathbb{N}$ a $[\![t{+}1]\!] = [\![t]\!] + 1$.
  - pro formuli, $\models$ *liché*(t) právě když $[\![t]\!]$ je liché číslo.
* ***Deduktivní systém***:
  - axiom *liché*$(0{+}1)$,
  - odvozovací pravidlo *liché*$(t) \vdash$ *liché*$(t{+}1{+}1)$.
  - příklad důkazu: *liché*$(0{+}1)$, *liché*$(0{+}1{+}1{+}1)$, *liché*$(0{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1)$

Neúplné a úplné rozšíření systému:

* Obohatíme systém o predikát sudosti:
  sudé(t) je formule pokud t je term. $\models$ *sudé*(t) právě když $[\![t]\!]$ je sudé číslo.
* Systém není úplný. $\models$ *sudé*$(0{+}1{+}1)$ ale $\nvdash$ *sudé*$(0{+}1{+}1)$
* Jak zúplnit? Přidáme pravidlo na dokazování sudosti: *liché*$(t) \vdash$ *sudé*$(t{+}1)$.
  Už je úplný? Ne, zapoměli jsme 0. $\models$ *sudé*(0) ale $\nvdash$ *sudé*(0). Přidáme axiom *sudé*(0).

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{sud\acute{e}(0),\ \ \forall x\, sud\acute{e}(x) \rightarrow \neg sud\acute{e}(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg sud\acute{e}(x) \rightarrow sud\acute{e}(x{+}1)\}$.

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{sudé(0),\ \ \forall x\, sudé(x) \rightarrow \neg sudé(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg sudé(x) \rightarrow sudé(x{+}1)\}$.

$$\mathcal{M}_1 : \quad 0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{+1} \cdots$$

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{sud\acute{e}(0),\ \ \forall x\, sud\acute{e}(x) \rightarrow \neg sud\acute{e}(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg sud\acute{e}(x) \rightarrow sud\acute{e}(x{+}1)\}$.

$$\mathcal{M}_1 : \quad \overset{\text{su}}{0} \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{+1} \cdots$$

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{sudé(0),\ \ \forall x\, sudé(x) \rightarrow \neg sudé(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg sudé(x) \rightarrow sudé(x{+}1)\}$.

$$\mathcal{M}_1 :\quad \overset{\text{su}}{0} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{1} \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{+1} \cdots$$

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{\mathit{sudé}(0),\ \ \forall x\, \mathit{sudé}(x) \to \neg \mathit{sudé}(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg \mathit{sudé}(x) \to \mathit{sudé}(x{+}1)\}$.

$$\mathcal{M}_1 : \quad \overset{\text{su}}{0} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{1} \xrightarrow{+1} \overset{\text{su}}{2} \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{+1} \cdots$$

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{sudé(0),\ \ \forall x\, sudé(x) \rightarrow \neg sudé(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg sudé(x) \rightarrow sudé(x{+}1)\}$.

$$\mathcal{M}_1 : \quad \overset{\text{su}}{0} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{1} \xrightarrow{+1} \overset{\text{su}}{2} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{3} \xrightarrow{+1} \cdots$$

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{sud\acute{e}(0),\ \ \forall x\, sud\acute{e}(x) \rightarrow \neg sud\acute{e}(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg sud\acute{e}(x) \rightarrow sud\acute{e}(x{+}1)\}$.

$$\mathcal{M}_1 :\quad \overset{\text{su}}{0} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{1} \xrightarrow{+1} \overset{\text{su}}{2} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{3} \xrightarrow{+1} \cdots$$

$$\mathcal{M}_1 \models T_{sud}$$

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{sud\acute{e}(0),\ \ \forall x\, sud\acute{e}(x) \rightarrow \neg sud\acute{e}(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg sud\acute{e}(x) \rightarrow sud\acute{e}(x{+}1)\}$.

$$\mathcal{M}_1:\quad \overset{\text{su}}{0} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{1} \xrightarrow{+1} \overset{\text{su}}{2} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{3} \xrightarrow{+1} \cdots$$

$\mathcal{M}_1 \models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_2: \quad 0 \arrow[r, bend left, "+1"] & 1 \arrow[l, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{sudé(0),\ \ \forall x\, sudé(x) \rightarrow \neg sudé(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg sudé(x) \rightarrow sudé(x{+}1)\}$.

$$\mathcal{M}_1 :\quad \overset{\text{su}}{0} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{1} \xrightarrow{+1} \overset{\text{su}}{2} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{3} \xrightarrow{+1} \cdots$$

$$\mathcal{M}_1 \models T_{sud}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_2 : & \overset{\text{su}}{0} \arrow[r, bend left, "+1"] & 1 \arrow[l, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{sud\acute{e}(0),\ \ \forall x\, sud\acute{e}(x) \rightarrow \neg sud\acute{e}(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg sud\acute{e}(x) \rightarrow sud\acute{e}(x{+}1)\}$.

$$\mathcal{M}_1 :\quad \overset{\text{su}}{0} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{1} \xrightarrow{+1} \overset{\text{su}}{2} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{3} \xrightarrow{+1} \cdots$$

$$\mathcal{M}_1 \models T_{sud}$$

$$\mathcal{M}_2 :\quad \overset{\text{su}}{0} \underset{+1}{\overset{+1}{\rightleftarrows}} \overset{\neg\text{su}}{1}$$

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{sudé(0),\quad \forall x\, sudé(x) \rightarrow \neg sudé(x{+}1),\quad \forall x\, \neg sudé(x) \rightarrow sudé(x{+}1)\}$.

$$\mathcal{M}_1 : \quad \overset{\text{su}}{0} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{1} \xrightarrow{+1} \overset{\text{su}}{2} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{3} \xrightarrow{+1} \cdots$$

$\mathcal{M}_1 \models T_{sud}$

$$\mathcal{M}_2 : \quad \begin{tikzcd} \overset{\text{su}}{0} \arrow[r, bend left, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[l, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_2 \models T_{sud}$

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{sud\acute{e}(0),\ \ \forall x\, sud\acute{e}(x) \to \neg sud\acute{e}(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg sud\acute{e}(x) \to sud\acute{e}(x{+}1)\}$.

$$\mathcal{M}_1 :\quad \overset{\text{su}}{0} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{1} \xrightarrow{+1} \overset{\text{su}}{2} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{3} \xrightarrow{+1} \cdots$$

$$\mathcal{M}_1 \models T_{sud}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_2 :\quad \overset{\text{su}}{0} \arrow[r, bend left, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[l, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{M}_2 \models T_{sud}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_3 :\quad 0 \arrow[r, "+1"] & 1 \arrow[r, "+1"] & 2 \arrow[ll, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{\textit{sudé}(0),\ \ \forall x\, \textit{sudé}(x) \rightarrow \neg \textit{sudé}(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg \textit{sudé}(x) \rightarrow \textit{sudé}(x{+}1)\}$.

$$\mathcal{M}_1 : \quad \overset{\text{su}}{0} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{1} \xrightarrow{+1} \overset{\text{su}}{2} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{3} \xrightarrow{+1} \cdots$$

$\mathcal{M}_1 \models T_{sud}$

$$\mathcal{M}_2 : \quad \begin{tikzcd} \overset{\text{su}}{0} \arrow[r, bend left, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[l, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_2 \models T_{sud}$

$$\mathcal{M}_3 : \quad \begin{tikzcd} \overset{\text{su}}{0} \arrow[r, "+1"] & 1 \arrow[r, "+1"] & 2 \arrow[ll, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{sud\acute{e}(0),\ \ \forall x\, sud\acute{e}(x) \rightarrow \neg sud\acute{e}(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg sud\acute{e}(x) \rightarrow sud\acute{e}(x{+}1)\}.$

$$\mathcal{M}_1 : \quad \overset{\text{su}}{0} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{1} \xrightarrow{+1} \overset{\text{su}}{2} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{3} \xrightarrow{+1} \cdots$$

$\mathcal{M}_1 \models T_{sud}$

$$\mathcal{M}_2 : \quad \begin{tikzcd} \overset{\text{su}}{0} \arrow[r, bend left, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[l, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_2 \models T_{sud}$

$$\mathcal{M}_3 : \quad \begin{tikzcd} \overset{\text{su}}{0} \arrow[r, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[r, "+1"] & 2 \arrow[ll, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{sud\acute{e}(0),\ \ \forall x\, sud\acute{e}(x) \rightarrow \neg sud\acute{e}(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg sud\acute{e}(x) \rightarrow sud\acute{e}(x{+}1)\}$.

$$\mathcal{M}_1 :\quad \overset{\text{su}}{0} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{1} \xrightarrow{+1} \overset{\text{su}}{2} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{3} \xrightarrow{+1} \cdots$$

$$\mathcal{M}_1 \models T_{sud}$$

$$\mathcal{M}_2 :\quad \begin{tikzcd} \overset{\text{su}}{0} \arrow[r, bend left, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[l, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{M}_2 \models T_{sud}$$

$$\mathcal{M}_3 :\quad \begin{tikzcd} \overset{\text{su}}{0} \arrow[r, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[r, "+1"] & \overset{\text{su}}{2} \arrow[ll, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{sud\acute{e}(0),\ \ \forall x\, sud\acute{e}(x) \rightarrow \neg sud\acute{e}(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg sud\acute{e}(x) \rightarrow sud\acute{e}(x{+}1)\}$.

$$\mathcal{M}_1 :\quad \overset{\mathsf{su}}{0} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\mathsf{su}}{1} \xrightarrow{+1} \overset{\mathsf{su}}{2} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\mathsf{su}}{3} \xrightarrow{+1} \cdots$$

$\mathcal{M}_1 \models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_2 : & \overset{\mathsf{su}}{0} \arrow[r, bend left, "+1"] & \overset{\neg\mathsf{su}}{1} \arrow[l, bend left, "+1"]
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_2 \models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_3 : & \underset{\neg\mathsf{su}}{\overset{\mathsf{su}}{0}} \arrow[r, "+1"] & \overset{\neg\mathsf{su}}{1} \arrow[r, "+1"] & \overset{\mathsf{su}}{2} \arrow[ll, bend left, "+1"]
\end{tikzcd}$$

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{\textit{sudé}(0),\ \ \forall x\, \textit{sudé}(x) \rightarrow \neg \textit{sudé}(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg \textit{sudé}(x) \rightarrow \textit{sudé}(x{+}1)\}$.

$$\mathcal{M}_1:\quad \overset{\text{su}}{0} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{1} \xrightarrow{+1} \overset{\text{su}}{2} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{3} \xrightarrow{+1} \cdots$$

$\mathcal{M}_1 \models T_{sud}$

$$\mathcal{M}_2:\quad \begin{tikzcd} \overset{\text{su}}{0} \arrow[r, bend left, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[l, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_2 \models T_{sud}$

$$\mathcal{M}_3:\quad \begin{tikzcd} \overset{\text{su}}{\underset{\neg\text{su}}{0}} \arrow[r, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[r, "+1"] & \overset{\text{su}}{2} \arrow[ll, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_3 \not\models T_{sud}$

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{\mathit{sudé}(0),\ \ \forall x\, \mathit{sudé}(x) \rightarrow \neg \mathit{sudé}(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg \mathit{sudé}(x) \rightarrow \mathit{sudé}(x{+}1)\}$.

$$\mathcal{M}_1 :\quad \overset{\text{su}}{0} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{1} \xrightarrow{+1} \overset{\text{su}}{2} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{3} \xrightarrow{+1} \cdots$$

$\mathcal{M}_1 \models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_2 : & \overset{\text{su}}{0} \arrow[r, bend left, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[l, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_2 \models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_3 : & \overset{\text{su}}{0} \arrow[r, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[r, "+1"] & \overset{\text{su}}{2} \arrow[ll, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_3 \not\models T_{sud}$ $\quad \neg\text{su}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_4 : & 0 \arrow[loop right, "+1"] \end{tikzcd}$$

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{\mathit{sudé}(0),\ \ \forall x\, \mathit{sudé}(x) \to \neg \mathit{sudé}(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg \mathit{sudé}(x) \to \mathit{sudé}(x{+}1)\}$.

$$\mathcal{M}_1 : \quad \overset{\text{su}}{0} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{1} \xrightarrow{+1} \overset{\text{su}}{2} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{3} \xrightarrow{+1} \cdots$$

$\mathcal{M}_1 \models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_2 : & \overset{\text{su}}{0} \arrow[r, bend left, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[l, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_2 \models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_3 : & \overset{\text{su}}{\underset{\neg\text{su}}{0}} \arrow[r, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[r, "+1"] & \overset{\text{su}}{2} \arrow[ll, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_3 \not\models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_4 : & \overset{\text{su}}{0} \arrow[loop right, "+1"] \end{tikzcd}$$

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{\textit{sudé}(0),\ \ \forall x\, \textit{sudé}(x) \rightarrow \neg \textit{sudé}(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg \textit{sudé}(x) \rightarrow \textit{sudé}(x{+}1)\}.$

$$\mathcal{M}_1 :\quad \overset{\mathsf{su}}{0} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\mathsf{su}}{1} \xrightarrow{+1} \overset{\mathsf{su}}{2} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\mathsf{su}}{3} \xrightarrow{+1} \cdots$$

$$\mathcal{M}_1 \models T_{sud}$$

$$\mathcal{M}_2 :\quad \begin{tikzcd} \overset{\mathsf{su}}{0} \arrow[r, bend left, "+1"] & \overset{\neg\mathsf{su}}{1} \arrow[l, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{M}_2 \models T_{sud}$$

$$\mathcal{M}_3 :\quad \begin{tikzcd} \underset{\neg\mathsf{su}}{\overset{\mathsf{su}}{0}} \arrow[r, "+1"] & \overset{\neg\mathsf{su}}{1} \arrow[r, "+1"] & \overset{\mathsf{su}}{2} \arrow[ll, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{M}_3 \not\models T_{sud}$$

$$\mathcal{M}_4 :\quad \begin{tikzcd} \underset{\neg\mathsf{su}}{\overset{\mathsf{su}}{0}} \arrow[loop right, "+1"] \end{tikzcd}$$

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{sud\acute{e}(0),\ \ \forall x\, sud\acute{e}(x) \rightarrow \neg sud\acute{e}(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg sud\acute{e}(x) \rightarrow sud\acute{e}(x{+}1)\}$.

$$\mathcal{M}_1 : \quad \overset{\mathsf{su}}{0} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\mathsf{su}}{1} \xrightarrow{+1} \overset{\mathsf{su}}{2} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\mathsf{su}}{3} \xrightarrow{+1} \cdots$$

$$\mathcal{M}_1 \models T_{sud}$$

$$\mathcal{M}_2 : \quad \begin{tikzcd} \overset{\mathsf{su}}{0} \arrow[r, bend left, "+1"] & \overset{\neg\mathsf{su}}{1} \arrow[l, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{M}_2 \models T_{sud}$$

$$\mathcal{M}_3 : \quad \begin{tikzcd} \overset{\mathsf{su}}{\underset{\neg\mathsf{su}}{0}} \arrow[r, "+1"] & \overset{\neg\mathsf{su}}{1} \arrow[r, "+1"] & \overset{\mathsf{su}}{2} \arrow[ll, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{M}_3 \not\models T_{sud}$$

$$\mathcal{M}_4 : \quad \begin{tikzcd} \overset{\mathsf{su}}{\underset{\neg\mathsf{su}}{0}} \arrow[loop right, "+1"] \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{M}_4 \not\models T_{sud}$$

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{sudé(0),\ \ \forall x\, sudé(x) \rightarrow \neg sudé(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg sudé(x) \rightarrow sudé(x{+}1)\}.$

$$\mathcal{M}_1 :\quad \overset{\text{su}}{0} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{1} \xrightarrow{+1} \overset{\text{su}}{2} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{3} \xrightarrow{+1} \cdots$$

$\mathcal{M}_1 \models T_{sud}$

$$\mathcal{M}_2 :\quad \begin{tikzcd} \overset{\text{su}}{0} \arrow[r, bend left, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[l, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_2 \models T_{sud}$

$$\mathcal{M}_3 :\quad \begin{tikzcd} \overset{\text{su}}{0} \arrow[r, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[r, "+1"] & \overset{\text{su}}{2} \arrow[ll, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_3 \not\models T_{sud}$ $\neg$su

$$\mathcal{M}_4 :\quad \begin{tikzcd} \overset{\text{su}}{0} \arrow[loop right, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_4 \not\models T_{sud}$ $\neg$su

Sporná rozšíření:

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{sudé(0),\ \ \forall x\, sudé(x) \rightarrow \neg sudé(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg sudé(x) \rightarrow sudé(x{+}1)\}$.

$$\mathcal{M}_1:\quad \overset{su}{0} \xrightarrow{+1} \overset{\neg su}{1} \xrightarrow{+1} \overset{su}{2} \xrightarrow{+1} \overset{\neg su}{3} \xrightarrow{+1} \cdots$$

$\mathcal{M}_1 \models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_2: & \overset{su}{0} \arrow[r, bend left, "+1"] & \overset{\neg su}{1} \arrow[l, bend left, "+1"]
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_2 \models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_3: & \overset{su}{\underset{\neg su}{0}} \arrow[r, "+1"] & \overset{\neg su}{1} \arrow[r, "+1"] & \overset{su}{2} \arrow[ll, bend left, "+1"]
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_3 \not\models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_4: & \overset{su}{\underset{\neg su}{0}} \arrow[loop right, "+1"]
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_4 \not\models T_{sud}$

Sporná rozšíření:

- $\neg sudé(0)$: $T_{sud} \vdash sudé(0)$ a $T_{sud} \vdash \neg sudé(0)$

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{\mathit{sudé}(0),\ \ \forall x\, \mathit{sudé}(x) \rightarrow \neg \mathit{sudé}(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg \mathit{sudé}(x) \rightarrow \mathit{sudé}(x{+}1)\}$.

$$\mathcal{M}_1 :\quad \overset{\text{su}}{0} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{1} \xrightarrow{+1} \overset{\text{su}}{2} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{3} \xrightarrow{+1} \cdots$$

$\mathcal{M}_1 \models T_{sud}$

$$\mathcal{M}_2 :\quad \begin{tikzcd} \overset{\text{su}}{0} \arrow[r, bend left, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[l, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_2 \models T_{sud}$

$$\mathcal{M}_3 :\quad \begin{tikzcd} \underset{\neg\text{su}}{\overset{\text{su}}{0}} \arrow[r, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[r, "+1"] & \overset{\text{su}}{2} \arrow[ll, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_3 \not\models T_{sud}$

$$\mathcal{M}_4 :\quad \begin{tikzcd} \underset{\neg\text{su}}{\overset{\text{su}}{0}} \arrow[loop right, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_4 \not\models T_{sud}$

Sporná rozšíření:

* $\neg \mathit{sudé}(0)$: $T_{sud} \vdash \mathit{sudé}(0)$ a $T_{sud} \vdash \neg \mathit{sudé}(0)$
* $\mathit{sudé}(0{+}1)$: $T_{sud} \vdash \mathit{sudé}(0{+}1)$ a $T_{sud} \vdash \neg \mathit{sudé}(0{+}1)$

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{sud\acute{e}(0),\ \ \forall x\, sud\acute{e}(x) \rightarrow \neg sud\acute{e}(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg sud\acute{e}(x) \rightarrow sud\acute{e}(x{+}1)\}.$

$$\mathcal{M}_1 : \quad \overset{\text{su}}{0} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{1} \xrightarrow{+1} \overset{\text{su}}{2} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{3} \xrightarrow{+1} \cdots$$

$\mathcal{M}_1 \models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_2 : & \overset{\text{su}}{0} \arrow[r, bend left, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[l, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_2 \models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_3 : & \overset{\text{su}}{0} \arrow[r, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[r, "+1"] & \overset{\text{su}}{2} \arrow[ll, bend left, "+1"] \\ & \neg\text{su} & & \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_3 \not\models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_4 : & \overset{\text{su}}{0} \arrow[loop right, "+1"] \\ & \neg\text{su} \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_4 \not\models T_{sud}$

Sporná rozšíření:

- $\neg sud\acute{e}(0)$: $T_{sud} \vdash sud\acute{e}(0)$ a $T_{sud} \vdash \neg sud\acute{e}(0)$
- $sud\acute{e}(0{+}1)$: $T_{sud} \vdash sud\acute{e}(0{+}1)$ a $T_{sud} \vdash \neg sud\acute{e}(0{+}1)$

  $sud\acute{e}(0)$ $\qquad\qquad$ $(axiom)$

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{sud\acute{e}(0),\ \ \forall x\, sud\acute{e}(x) \rightarrow \neg sud\acute{e}(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg sud\acute{e}(x) \rightarrow sud\acute{e}(x{+}1)\}.$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_1: & \overset{\text{su}}{0} \arrow[r, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[r, "+1"] & \overset{\text{su}}{2} \arrow[r, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{3} \arrow[r, "+1"] & \cdots \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_1 \models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_2: & \overset{\text{su}}{0} \arrow[r, bend left, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[l, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_2 \models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_3: & \overset{\text{su}}{\underset{\neg\text{su}}{0}} \arrow[r, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[r, "+1"] & \overset{\text{su}}{2} \arrow[ll, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_3 \not\models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_4: & \overset{\text{su}}{\underset{\neg\text{su}}{0}} \arrow[loop right, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_4 \not\models T_{sud}$

Sporná rozšíření:

- $\neg sud\acute{e}(0)$: $T_{sud} \vdash sud\acute{e}(0)$ a $T_{sud} \vdash \neg sud\acute{e}(0)$
- $sud\acute{e}(0{+}1)$: $T_{sud} \vdash sud\acute{e}(0{+}1)$ a $T_{sud} \vdash \neg sud\acute{e}(0{+}1)$

$$\begin{array}{ll} sud\acute{e}(0) & (axiom) \\ \forall x\, sud\acute{e}(x) \rightarrow \neg sud\acute{e}(x{+}1) & (axiom) \end{array}$$

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{sud\acute{e}(0),\ \ \forall x\, sud\acute{e}(x) \rightarrow \neg sud\acute{e}(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg sud\acute{e}(x) \rightarrow sud\acute{e}(x{+}1)\}$.

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
 & \text{su} & \neg\text{su} & \text{su} & \neg\text{su} & \\
\mathcal{M}_1 : & 0 \arrow[r, "+1"] & 1 \arrow[r, "+1"] & 2 \arrow[r, "+1"] & 3 \arrow[r, "+1"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_1 \models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
 & \text{su} & \neg\text{su} \\
\mathcal{M}_2 : & 0 \arrow[r, bend left, "+1"] & 1 \arrow[l, bend left, "+1"]
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_2 \models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
 & \text{su} & \neg\text{su} & \text{su} \\
\mathcal{M}_3 : & 0 \arrow[r, "+1"] & 1 \arrow[r, "+1"] & 2 \arrow[ll, bend left, "+1"] \\
 & \neg\text{su} & &
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_3 \not\models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
 & \text{su} \\
\mathcal{M}_4 : & 0 \arrow[loop right, "+1"] \\
 & \neg\text{su}
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_4 \not\models T_{sud}$

Sporná rozšíření:

- $\neg sud\acute{e}(0)$: $T_{sud} \vdash sud\acute{e}(0)$ a $T_{sud} \vdash \neg sud\acute{e}(0)$
- $sud\acute{e}(0{+}1)$: $T_{sud} \vdash sud\acute{e}(0{+}1)$ a $T_{sud} \vdash \neg sud\acute{e}(0{+}1)$

$$\begin{array}{lr}
sud\acute{e}(0) & (axiom) \\
\forall x sud\acute{e}(x) \rightarrow \neg sud\acute{e}(x{+}1) & (axiom) \\
(\forall x sud\acute{e}(x) \rightarrow \neg sud\acute{e}(x{+}1)) \rightarrow & \\
\qquad (sud\acute{e}(0) \rightarrow \neg sud\acute{e}(0{+}1)) & (ax.subst.)
\end{array}$$

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{sud\acute{e}(0),\ \ \forall x\, sud\acute{e}(x) \rightarrow \neg sud\acute{e}(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg sud\acute{e}(x) \rightarrow sud\acute{e}(x{+}1)\}$.

$$\mathcal{M}_1 : \quad \overset{\text{su}}{0} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{1} \xrightarrow{+1} \overset{\text{su}}{2} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{3} \xrightarrow{+1} \cdots$$

$\mathcal{M}_1 \models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_2 : \quad \overset{\text{su}}{0} \arrow[r, bend left, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[l, bend left, "+1"]
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_2 \models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_3 : \quad \underset{\neg\text{su}}{\overset{\text{su}}{0}} \arrow[r, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[r, "+1"] & \overset{\text{su}}{2} \arrow[ll, bend left, "+1"]
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_3 \not\models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_4 : \quad \underset{\neg\text{su}}{\overset{\text{su}}{0}} \arrow[loop right, "+1"]
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_4 \not\models T_{sud}$

Sporná rozšíření:

- $\neg sud\acute{e}(0)$: $T_{sud} \vdash sud\acute{e}(0)$ a $T_{sud} \vdash \neg sud\acute{e}(0)$
- $sud\acute{e}(0{+}1)$: $T_{sud} \vdash sud\acute{e}(0{+}1)$ a $T_{sud} \vdash \neg sud\acute{e}(0{+}1)$

$$\begin{array}{lr}
sud\acute{e}(0) & (axiom) \\
\forall x\, sud\acute{e}(x) \rightarrow \neg sud\acute{e}(x{+}1) & (axiom) \\
(\forall x\, sud\acute{e}(x) \rightarrow \neg sud\acute{e}(x{+}1)) \rightarrow & \\
\qquad (sud\acute{e}(0) \rightarrow \neg sud\acute{e}(0{+}1)) & (ax.subst.) \\
sud\acute{e}(0) \rightarrow \neg sud\acute{e}(0{+}1) & (MP)
\end{array}$$

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{sud\acute{e}(0),\ \ \forall x\, sud\acute{e}(x) \to \neg sud\acute{e}(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg sud\acute{e}(x) \to sud\acute{e}(x{+}1)\}$.

$$\mathcal{M}_1 : \quad \overset{su}{0} \xrightarrow{+1} \overset{\neg su}{1} \xrightarrow{+1} \overset{su}{2} \xrightarrow{+1} \overset{\neg su}{3} \xrightarrow{+1} \cdots$$

$\mathcal{M}_1 \models T_{sud}$

$$\mathcal{M}_2 : \quad \begin{tikzcd} \overset{su}{0} \arrow[r, bend left, "+1"] & \overset{\neg su}{1} \arrow[l, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_2 \models T_{sud}$

$$\mathcal{M}_3 : \quad \begin{tikzcd} \overset{su}{0} \arrow[r, "+1"] & \overset{\neg su}{1} \arrow[r, "+1"] & \overset{su}{2} \arrow[ll, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_3 \not\models T_{sud}$ $\neg$su

$$\mathcal{M}_4 : \quad \begin{tikzcd} \overset{su}{0} \arrow[loop right, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_4 \not\models T_{sud}$ $\neg$su

Sporná rozšíření:

- $\ast$ $\neg sud\acute{e}(0)$: $T_{sud} \vdash sud\acute{e}(0)$ a $T_{sud} \vdash \neg sud\acute{e}(0)$
- $\ast$ $sud\acute{e}(0{+}1)$: $T_{sud} \vdash sud\acute{e}(0{+}1)$ a $T_{sud} \vdash \neg sud\acute{e}(0{+}1)$

$$\begin{array}{ll}
sud\acute{e}(0) & (axiom) \\
\forall x\, sud\acute{e}(x) \to \neg sud\acute{e}(x{+}1) & (axiom) \\
(\forall x\, sud\acute{e}(x) \to \neg sud\acute{e}(x{+}1)) \to & \\
\qquad (sud\acute{e}(0) \to \neg sud\acute{e}(0{+}1)) & (ax.subst.) \\
sud\acute{e}(0) \to \neg sud\acute{e}(0{+}1) & (MP) \\
\neg sud\acute{e}(0{+}1) & (MP)
\end{array}$$

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{\mathit{sudé}(0),\ \ \forall x\, \mathit{sudé}(x) \rightarrow \neg \mathit{sudé}(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg \mathit{sudé}(x) \rightarrow \mathit{sudé}(x{+}1)\}$.

$$\mathcal{M}_1 : \quad \overset{\text{su}}{0} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{1} \xrightarrow{+1} \overset{\text{su}}{2} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{3} \xrightarrow{+1} \cdots$$

$\mathcal{M}_1 \models T_{sud}$

$$\mathcal{M}_2 : \begin{tikzcd} \overset{\text{su}}{0} \arrow[r, bend left, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[l, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_2 \models T_{sud}$

$$\mathcal{M}_3 : \begin{tikzcd} \underset{\neg\text{su}}{\overset{\text{su}}{0}} \arrow[r, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[r, "+1"] & \overset{\text{su}}{2} \arrow[ll, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_3 \not\models T_{sud}$

$$\mathcal{M}_4 : \begin{tikzcd} \underset{\neg\text{su}}{\overset{\text{su}}{0}} \arrow[loop right, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_4 \not\models T_{sud}$

Sporná rozšíření:

- $\neg \mathit{sudé}(0)$: $T_{sud} \vdash \mathit{sudé}(0)$ a $T_{sud} \vdash \neg \mathit{sudé}(0)$
- $\mathit{sudé}(0{+}1)$: $T_{sud} \vdash \mathit{sudé}(0{+}1)$ a $T_{sud} \vdash \neg \mathit{sudé}(0{+}1)$

$$\begin{array}{lr}
\mathit{sudé}(0) & (\mathit{axiom}) \\
\forall x \mathit{sudé}(x) \rightarrow \neg \mathit{sudé}(x{+}1) & (\mathit{axiom}) \\
(\forall x \mathit{sudé}(x) \rightarrow \neg \mathit{sudé}(x{+}1)) \rightarrow & \\
\qquad (\mathit{sudé}(0) \rightarrow \neg \mathit{sudé}(0{+}1)) & (\mathit{ax.subst.}) \\
\mathit{sudé}(0) \rightarrow \neg \mathit{sudé}(0{+}1) & (\mathit{MP}) \\
\neg \mathit{sudé}(0{+}1) & (\mathit{MP})
\end{array}$$

- $\forall x \forall y\, x = y$: Vynucuje jednoprvkovou doménu. Takový model ale T_{sud} nemá. Nemá model $\Rightarrow$ je sporná.

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{sudé(0),\ \ \forall x\, sudé(x) \rightarrow \neg sudé(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg sudé(x) \rightarrow sudé(x{+}1)\}$.

$$\mathcal{M}_1 :\quad \overset{su}{0} \xrightarrow{+1} \overset{\neg su}{1} \xrightarrow{+1} \overset{su}{2} \xrightarrow{+1} \overset{\neg su}{3} \xrightarrow{+1} \cdots$$

$\mathcal{M}_1 \models T_{sud}$

$$\mathcal{M}_2 :\quad \begin{tikzcd} \overset{su}{0} \arrow[r, bend left, "+1"] & \overset{\neg su}{1} \arrow[l, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_2 \models T_{sud}$

$$\mathcal{M}_3 :\quad \begin{tikzcd} \underset{\neg su}{\overset{su}{0}} \arrow[r, "+1"] & \overset{\neg su}{1} \arrow[r, "+1"] & \overset{su}{2} \arrow[ll, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_3 \not\models T_{sud}$

$$\mathcal{M}_4 :\quad \begin{tikzcd} \underset{\neg su}{\overset{su}{0}} \arrow[loop right, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_4 \not\models T_{sud}$

$*$ T_{sud} není úplná. Proč? :

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{sud\acute{e}(0),\ \ \forall x\, sud\acute{e}(x) \rightarrow \neg sud\acute{e}(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg sud\acute{e}(x) \rightarrow sud\acute{e}(x{+}1)\}$.

$$\begin{array}{ccccccccc} & \text{su} & & \neg\text{su} & & \text{su} & & \neg\text{su} & \\ \mathcal{M}_1: & 0 & \xrightarrow{+1} & 1 & \xrightarrow{+1} & 2 & \xrightarrow{+1} & 3 & \xrightarrow{+1} \cdots \end{array}$$

$\mathcal{M}_1 \models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd} & \text{su} & \neg\text{su} \\ \mathcal{M}_2: & 0 \arrow[r, bend left, "+1"] & 1 \arrow[l, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_2 \models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd} & \text{su} & \neg\text{su} & \text{su} \\ \mathcal{M}_3: & 0 \arrow[r, "+1"] & 1 \arrow[r, "+1"] & 2 \arrow[ll, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_3 \not\models T_{sud}$ $\neg$su

$$\begin{tikzcd} & \text{su} \\ \mathcal{M}_4: & 0 \arrow[loop right, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_4 \not\models T_{sud}$ $\neg$su

* T_{sud} není úplná. Proč? :

$$\varphi : \exists x \exists y \exists z\, x \neq y \wedge y \neq z \wedge x = z$$

(doména má alespoň tři prvky)

$\mathcal{M}_1 \models \varphi$ ale $\mathcal{M}_2 \models \neg\varphi$
Tedy $T_{sud} \not\models \varphi$ a $T_{sud} \not\models \neg\varphi$.
Z úplnosti PL: $T_{sud} \nvdash \varphi$ a $T_{sud} \nvdash \neg\varphi$.
Tedy T_{sud} není úplná.

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{sud\acute{e}(0),\ \ \forall x\, sud\acute{e}(x) \rightarrow \neg sud\acute{e}(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg sud\acute{e}(x) \rightarrow sud\acute{e}(x{+}1)\}$.

$$\mathcal{M}_1:\quad \overset{\text{su}}{0} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{1} \xrightarrow{+1} \overset{\text{su}}{2} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{3} \xrightarrow{+1} \cdots$$

$\mathcal{M}_1 \models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_2: & \overset{\text{su}}{0} \arrow[r, bend left, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[l, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_2 \models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_3: & \overset{\text{su}}{\underset{\neg\text{su}}{0}} \arrow[r, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[r, "+1"] & \overset{\text{su}}{2} \arrow[ll, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_3 \not\models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_4: & \overset{\text{su}}{\underset{\neg\text{su}}{0}} \arrow[loop right, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_4 \not\models T_{sud}$

- T_{sud} není úplná. Proč? :

$$\varphi : \exists x \exists y \exists z\, x \neq y \wedge y \neq z \wedge x = z$$
(doména má alespoň tři prvky)

$\mathcal{M}_1 \models \varphi$ ale $\mathcal{M}_2 \models \neg\varphi$
Tedy $T_{sud} \not\models \varphi$ a $T_{sud} \not\models \neg\varphi$.
Z úplnosti PL: $T_{sud} \nvdash \varphi$ a $T_{sud} \nvdash \neg\varphi$.
Tedy T_{sud} není úplná.

- Jak ji rozšířit tak, aby byla úplná a stále bezesporná?

Příklad (beze)sporné a (ne)úplné teorie

Teorie sudosti $T_{sud} = \{sud\acute{e}(0),\ \ \forall x\, sud\acute{e}(x) \rightarrow \neg sud\acute{e}(x{+}1),\ \ \forall x\, \neg sud\acute{e}(x) \rightarrow sud\acute{e}(x{+}1)\}$.

$$\mathcal{M}_1:\quad \overset{\text{su}}{0} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{1} \xrightarrow{+1} \overset{\text{su}}{2} \xrightarrow{+1} \overset{\neg\text{su}}{3} \xrightarrow{+1} \cdots$$

$\mathcal{M}_1 \models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_2: & \overset{\text{su}}{0} \arrow[r, bend left, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[l, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_2 \models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_3: & \overset{\text{su}}{\underset{\neg\text{su}}{0}} \arrow[r, "+1"] & \overset{\neg\text{su}}{1} \arrow[r, "+1"] & \overset{\text{su}}{2} \arrow[ll, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_3 \not\models T_{sud}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_4: & \overset{\text{su}}{\underset{\neg\text{su}}{0}} \arrow[loop right, "+1"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}_4 \not\models T_{sud}$

* T_{sud} není úplná. Proč? :

$$\varphi : \exists x \exists y \exists z\, x \neq y \wedge y \neq z \wedge x = z$$

(doména má alespoň tři prvky)

$\mathcal{M}_1 \models \varphi$ ale $\mathcal{M}_2 \models \neg\varphi$
Tedy $T_{sud} \not\models \varphi$ a $T_{sud} \not\models \neg\varphi$.
Z úplnosti PL: $T_{sud} \nvdash \varphi$ a $T_{sud} \nvdash \neg\varphi$.
Tedy T_{sud} není úplná.

* Jak ji rozšířit tak, aby byla úplná a stále bezesporná?
Přidáme axiom $\neg\varphi$: doména má nanejvýš dva prvky.
Jediný takový model je $\mathcal{M}_2$.
Má jen jeden model $\Rightarrow$ ja úplná.