SDL – množiny, relace, fce

osobně platí! nepatří do mn-y

I. Množiny

- neformální definice: dobře definovaná kolekce různých objektů (kterým se říká prvky)
- zápis mn-y:
  - výčet $A = \{1, 2, a\}$

    složené závorky (ne kulaté, ne hranaté, ne lomené, ne bez závorek…)
  - Posloupnosti

    $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$

    $B = \{1, 2, \ldots\}$

    Posloupnost musí být zřejmá!
  - predikátem – charakteristická vlastnost prvků
    - $A = \{x \mid \phi(x)\}$ alternativně $\{x : \phi(x)\}$
    - $A = \{x \in D \mid \phi(x)\} \equiv \{x \mid x \in D \wedge \phi(x)\}$

      doména z níž čerpáme

      $\equiv \{x \mid x \in D, \phi(x)\}$

- Domínu je nutno psát kdykoliv hrozí nejasnost., např.

$\{ x \mid x > 10 \}$ – jedná se o $x \in \mathbb{R}$?
$x \in \mathbb{N}$?

- Např. $\{ x \mid x \notin x \}$ – neexistující "množina všech množin" !

- $B = \{ x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 10 \} =$
$= \{ x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \wedge x \leq 10 \} =$
$= \{ x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x, x \leq 10 \} = \{1, \dots, 10\}$

- $C = \{ x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} : x = 2 * y \} =$
$= \{ 0, 2, 4, \dots \}$

- Pozor: $D = \{ x \mid \exists x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 10 \}$ – není dobře definována – "soubor všech objektů"

- Lze také psát $E = \{ 2x + 1 \mid x \in \mathbb{N} \} = \{1, 3, 5, \dots\}$

(uvažujeme $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$)

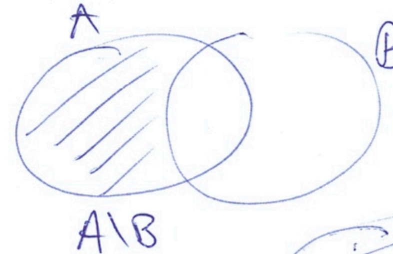
- Lze také $F = \{ 3x+1, 3x+2 \mid x \in \mathbb{N} \}$

- Nad mn-ami je definována řada operací: $\cup$, $\cap$, $\setminus$, Δ, ...

  rozdíl (pod $\setminus$); sym. diference (pod Δ)

  doplněk vůči universu U ($\bar{A} = U \setminus A$).

  - $A \setminus B = \{ x \in A \mid x \notin B \}$
  - $A \Delta B = \{ x \in A \cup B \mid x \notin A \cap B \}$



- Nad mn-ami máme dále definovánu řadu predikátů: $\in$, $\notin$, $\subset$, $\subseteq$, ...

  být vlastní podmnožina (pod $\subset$)

  - POZOR: - $x \in B$, NE $x \subseteq B$

    x je prvek B

- Existují axiomatizované formální teorie mn-n, např. ZFC, NBG, ...

II Kartézský součin

- pro $n \geq 1$ a množiny $A_1, \dots, A_n$:

$$A_1 \times \dots \times A_n = \prod_{1 \leq i \leq n} A_i = \{ (a_1, \dots, a_n) \mid \forall 1 \leq i \leq n : a_i \in A_i \}$$

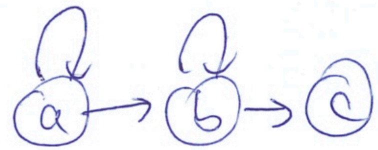
Pozn. $(a_1, \dots, a_n)$ lze chápat jako fci z $J: \{1, \dots, n\} \to \bigcup A_i$

takovou, že $\forall\, 1 \leq i \leq n : f(i) \in A_i$

- pro $n=0$: $\prod_{\emptyset} = \{()\}$ [pozn. $\{\emptyset\}$]
- lze i pro nekonečný počet mn-n
- Příklad: $\{1,2,3\} \times \{a,b\} = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$.
- $\{1,2,3\} \times \emptyset = \emptyset$ [$\neq \{\emptyset\}$]

III. Relace

- relace na mn-ách $A_1, \dots, A_n$:
  $\rho \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$
- reprezentace relací:
  - množinově – např. $\rho = \{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c)\}$
    pro relaci na mn-ě $A = \{a,b,c\}$
    (tedy binární relace $\rho \subseteq A \times A$)
  - maticí
    $$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 1 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{array}$$
  - grafem



- vlastnosti binárních relací na mn-ě A:

Mějme relaci $\rho \subseteq A \times A$. Řekneme, že: $(x,y) \in \rho \equiv x \rho y$

a) ρ je souvislá : $\forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow x \rho y \vee y \rho x$

b) ρ je reflexivní : $\forall x \in A : x \rho x$

c) ρ je ireflexivní : $\forall x \in A : x \not\rho x$

d) ρ je symetrická : $\forall x, y \in A : x \rho y \Rightarrow y \rho x$

e) ρ je asymetrická : $\forall x, y \in A : x \rho y \Rightarrow y \not\rho x$

f) ρ je antisymetrická : $\forall x, y \in A : x \rho y \wedge y \rho x \Rightarrow x = y$

g) ρ je tranzitivní : $\forall x, y, z \in A : x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z$

- příklad: Jaké vlastnost má relace z výše uvedeného příkladu: není souvislá (např. $a \not\rho c \wedge c \not\rho a$), není reflex. ($c \not\rho c$), není ireflex. (např. $a \rho a$), není sym. (např. $a \rho b \wedge b \not\rho a$), není asym. (např. $a \rho a$), je antisym., není tranz. ($a \rho b \wedge b \rho c \wedge a \not\rho c$)

- <u>tranzitivní uzávěr binární relace na množině</u>

Mějme relaci $\rho \subseteq A \times A$. Tranzitivní uzávěr relace

ρ je relace $\rho^+ \subseteq A \times A$ taková, že

$\forall a,b \in A: \ a\rho^+ b \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists n \geq 1 \ \exists c_1, \ldots, c_n \in A:$

$a = c_1 \wedge (\forall 1 \leq i < n: \ c_i \rho c_{i+1}) \wedge b = c_n$

- Lze zkonstruovat Warshallovým algoritmem.
- Příklad: tranzitivní uzávěr pro výše uvedenou relaci repr. grafe.

- Reflexivní a tranzitivní uzávěr relace $\rho \subseteq A \times A$ je relace $\rho^* = \rho^+ \cup I_A$, kde $I_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$
- <u>Ekvivalence</u> – reflex., sym., tranzitivní relace na dané mn-ě.
  - Vytváří na A rozklad na ekvivalenční třídy $[a]$ pro $a \in A$.
    - ekv. třídy "pokrývají" A: $\bigcup_{a \in A} [a] = A$
    - ekv. třídy jsou disjunktní $\forall a,b \in A: [a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow a = b$

- intuitivně

- Je-li $\sim \subseteq A \times A$ ekvivalence na A, pak $A \backslash \sim$ je rozklad na A dle $\sim$, tedy $A \backslash \sim = \{ [a] \mid a \in A \}$

- příklad: $\equiv_3 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definovaná tak, že
  $\forall x, y \in \mathbb{N} : x \equiv_3 y \Leftrightarrow mod_3 x = mod_3 y$.
  Pak $\mathbb{N} \backslash \equiv_3 = \{ [0], [1], [2] \}$

$$[1] = \{1, 4, \dots\}$$

$$[0] = \{0, 3, 6, 9 \dots\} = [3] = [6]$$

- Pokud ekv. $\sim$ generuje <u>konečný rozklad</u>, pak říkáme, že $\sim$ má konečný index.

- <u>Ostré částečné uspořádání</u> (např. $\subset$)

ireflexivní, asymetrická, tranzitivní.

(Dona: neostré ~~úplné~~ částečné usp. (např. $\subseteq$),

ostré úplné usp. ($<$ na $\mathbb{R}$),

neostré úplné usp. ($\leq$ na $\mathbb{R}$)).

- kvaziuspořádání (pre-order): reflex., tranz.

tolerance: reflex., sym.

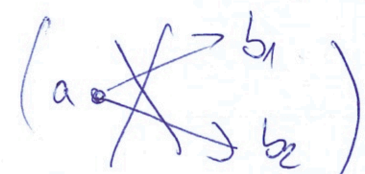
IV funkce

implicitní

- Relace $f \subseteq A \times B$ je (totální) funkcí, jestliže

a) $\forall a \in A \ \exists b \in B : (a,b) \in f$ (píšeme též, že $f(a)=b$)

a b) $\forall a \in A \ \forall b_1, b_2 \in B : f(a)=b_1 \wedge f(a)=b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$

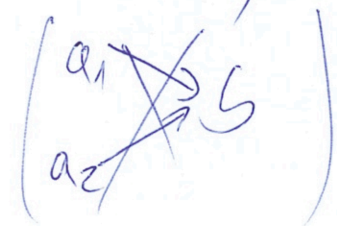


Pro parciální fce nepožadujeme bod (a).

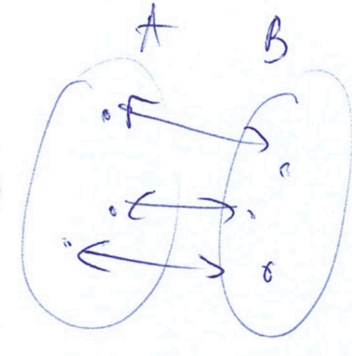
- injekce $f : A \to B$:

jednoznačná f-ce

$\forall a_1, a_2 \in A \ \forall b \in B : f(a_1) = b \wedge f(a_2) = b \Rightarrow a_1 = a_2$



- surjekce (zobrazení na množinu) $f: A \to B$ je fce taková že $\forall b \in B \ \exists a \in A: f(a) = b$



- bijekce (jednojednoznačná): injekce a surjekce
- Kardinalita mn-n $|A|$
  - konečné mn-y: počet prvků
  - $|A| \leq |B|$ – existuje injekce z A do B
  - $|A| = |B|$ – existuje bijekce mezi A a B
  - spočetná množina – existuje bijekce s $\mathbb{N}$
  - pro konečné mn-y A,B: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
- potenční množina mn-y A je množina 2^A tvořená všemi podmnožinami A, tedy $2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$.

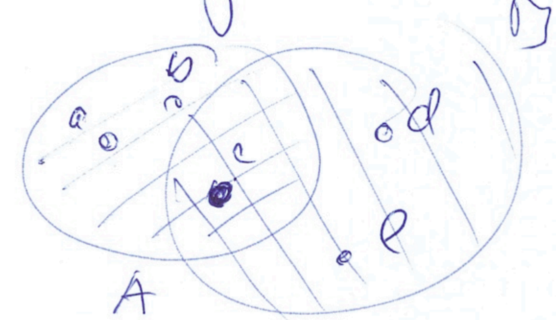
  Pro konečné A platí: $|2^A| = 2^{|A|}$

  (např. $2^{\{a,b\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$)

  $|2^{\{a,b\}}| = 2^{|\{a,b\}|} = 2^2 = 4$.

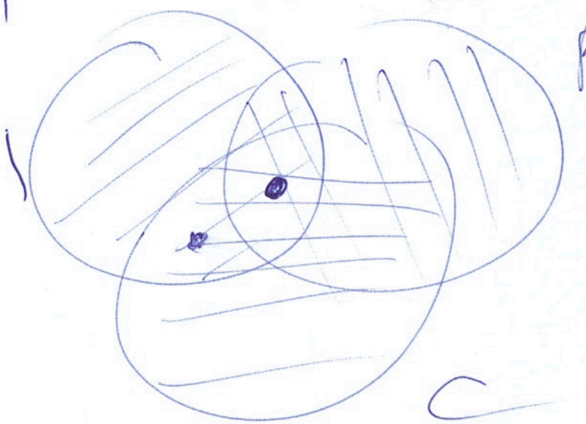
- př.
  $2^\emptyset = \{\emptyset\}$
  $|2^\emptyset| = 2^{|\emptyset|} = 2^0 = 1$

- Princip inkluse a exkluse pro konečné množiny



- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

- $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$
$\quad - |A \cap B| - |A \cap C|$
$\quad - |B \cap C|$
$\quad + |A \cap B \cap C|$



- $\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{I-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$

$n \geq 1$