VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta informačních technologií

Teoretická informatika (TIN) – 2021/2022

Domáca úloha číslo 2.

Marek Žiška **(xziska03)** Brno, 5. prosince 2021

1 Príklad

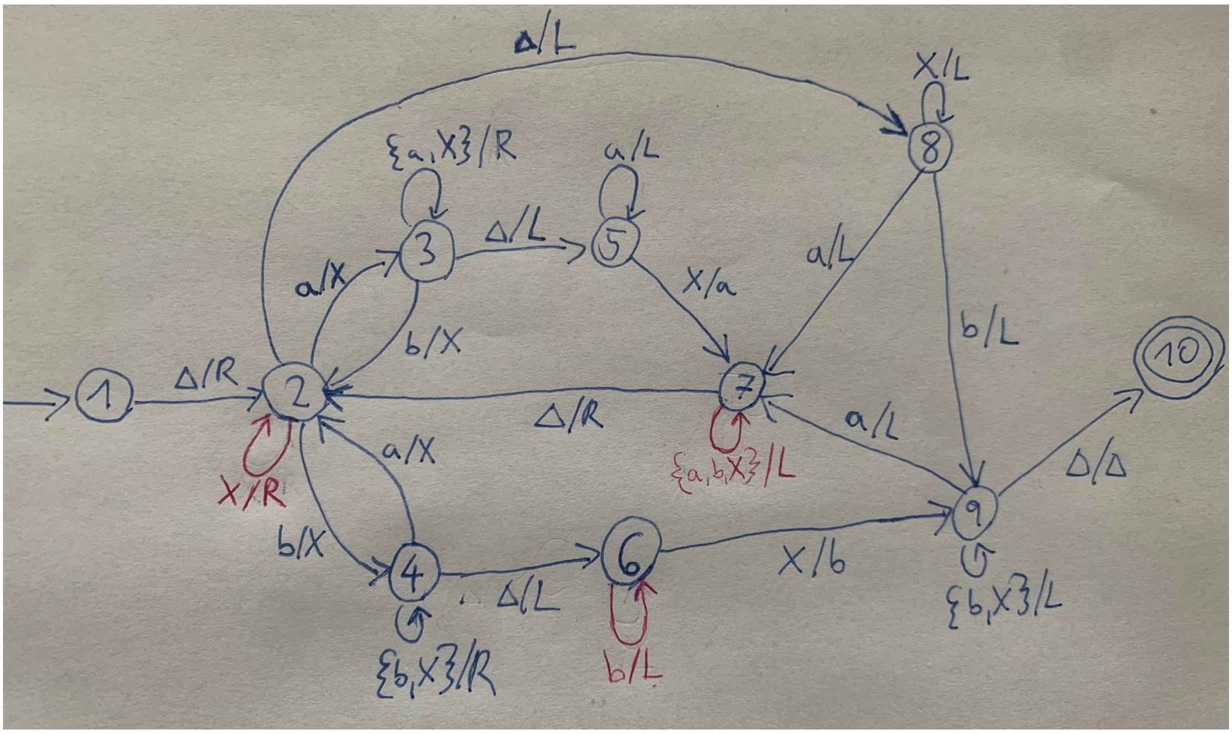
1.1 Zadanie

Doplňte 3 přechody do následujícího přechodového diagramu tak, aby výsledný Turingův stroj přijímal jazyk $L = \{w \in a, b * | \#a(w) < \#b(w)\}, kde\#x(w)$ značí počet výskytů symbolu x v řetězci (w). (Na přechodu můžete mít i množinu čtených symbolů, vizte třeba přechod $(3, \{a, X\}, R, 3)$ s očeka ávanou sémantikou.)

Riešenie

Doplníme turingov stroj o chýbajúce prechody(viz 1). A následne demonstrujeme běh TS na slove *abaabbbba*.
Demonstrace běhu TS na slove *abaabbbba*:

$\delta(2, \Delta\underline{a}baabbbba\Delta^w, 1) \vdash \delta(3, \Delta\underline{X}baabbbba\Delta^w, 1) \vdash^2 \delta(2, \Delta X\underline{X}aabbbba\Delta^w, 2) \vdash^2 \delta(3, \Delta XX\underline{X}abbbba\Delta^w, 3) \vdash^3$
$\delta(4, \Delta XXXa\underline{X}bbba\Delta^w, 5) \vdash^5 \delta(3, \Delta XXXaXbbb\underline{X}\Delta^w, 9) \vdash^{16} \delta(3, \Delta XXX\underline{X}XbbbX\Delta^w, 4) \vdash^3$
$\delta(2, \Delta XXXXX\underline{X}bbX\Delta^w, 6) \vdash^2 \delta(4, \Delta XXXXXX\underline{X}bX\Delta^w, 7) \vdash^5 \delta(9, \Delta XXXXXXXXb\underline{b}\Delta^w, 9) \vdash^9$
$\delta(10, \underline{\Delta}XXXXXXXXbb\Delta^w, 0)$



Obrázek 1: Turingův stroj přijímající jazyk L.

2 Príklad

2.1 Zadanie

Operátor *vepsání*(tzv. *wedge*) $\triangleleft : \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow 2^{\Sigma^*}$ je definován pro slova $u = u_1 u_2 \ldots u_n$ a w tak, že:

$$u \triangleleft w = \{u_1 \ldots u_i w u_{i+1} \ldots u_n \mid 0 \leq i \leq n\}$$

Operátor je rozšířen na jazyky následujícím způsobem: $L_1 \triangleleft L_2 = \bigcup \{w_1 \triangleleft w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$. Například $\{aa\} \triangleleft \{bb\} = \{bbaa, abba, aabb\}$. Dokažte, že množina rekurzivně vyčíslitelných jazyků je uzavřena na $\triangleleft$.

2.2 Riešenie

- Budiž dány RE jazyky $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ a vepsání $\triangleleft : \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow 2^{\Sigma^*}$
- Pretože L_1, L_2 je RE, $\exists$ TS M_1,M_2 také, že $L(M_1) = L_1$ a $L(M_2) = L_2$
- Na to aby aby bola operace $L_1 \triangleleft L_2$ uzavřena, musí existovať TS, ktorý by dokázal simulovat túto operáciu.
- Zostrojíme teda NTS M' taký, že $L(M') = L(M_1) \triangleleft L(M_2) = L'$, ktorý bude fungovať nasledovne:

- M' nedeterministicky rozdelí svoj vstup w' na 3 reťazce tak, že $w' = \{u_1 \ldots u_i w u_{i+1} \ldots u_n \mid 0 \leq i \leq n\}$ označme $x = \{u_1 \ldots u_i \mid 0 \leq i \leq n\}$ a $y = \{u_{i+1} \ldots u_n \mid 0 \leq i \leq n\}$ a platí že $w \in L_2, x, y \in L_1$

- TS M' zapíše na druhú pásku reťazec w

- TS M' na druhej páske odsimuluje TS M_2, ak TS M_2 cyklí, cyklí i TS M'. Ak TS M_2 príjme, TS M' pokračuje dál, jinak odmítne.

- TS M' zapíše na tretiu pásku konkatenaci reťazcov $x \cdot y$, zadefinové výše.

- TS M' na tretej páske odsimuluje TS M_1, ak TS M_1 cyklí, cyklí i TS M'. Ak TS M_1 príjme, príjme i TS M', jinak odmítne.

3 Príklad

3.1 Zadanie

Je dána abeceda Σ a jazyky $S, L \subseteq \Sigma^*$. Turingův stroj M nad abecedou Σ rozhoduje jazyk L modulo S, pokud pro všechna slova $w \in \Sigma^* \backslash S$ (i) zastaví a (ii) přijímá w právě tehdy, když $w \in L$ (tj. chování na slovech z S nás nezajímá). Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení:

- A) - Existuje nekonečný jazyk S takový, že halting problem (HP) je rozhodnutelný modulo S.
- B) - Pro všechny jazyky S je HP rozhodnutelný modulo S.
- C) -Existuje konečný jazyk S takový, že HP je rozhodnutelný modulo S. Nápověda: pro některý z důkazu je vhodné upravit dukaz nerozhodnutelnosti HP z prednášek.

3.2 Riešenie

3.2.1 A

Stačí zvoliť $S = \Sigma^*$, keďže Σ^* je nekonečný jazyk a spĺňa $S \subseteq \Sigma^*$. Následne turingův stroj M nad abecedou Σ rozhoduje jazyk HP modulo S, protože pro všechna slova $w \in \Sigma^* \backslash S$ zastaví a rozhodne že $w \in HP$ nebo ne.

3.2.2 B

Stačí zvoliť $S = \varnothing$, keďže $\varnothing$ spĺňa $S \subseteq \Sigma^*$. Následne turingův stroj M nad abecedou Σ nerozhoduje jazyk HP modulo S, protože HP je sam o sebe nerozhodnutelný, takže ani turingův stroj M neni schopny pre všechna slova $w \in \Sigma^* \backslash S$ zastaviť a rozhodnout že $w \in HP$ nebo ne.

3.2.3 C

4 Príklad

4.1 Zadanie

Uvažujte jazyk $L_{\text{prime}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \{a^p \mid p \text{ je prvočíslo } \}\}$, kde $\langle M \rangle$ značí binární řetězce kódující TS M. Dokažte pomocí redukce, že jazyk L_{prime} není ani částečne rozhodnutelný. Pro redukci lze použít libovolný z následujících problémů(žádný z nich není ani částečne rozhodnutelný):

- $co - HP$
- problém univerzality jazyka TS M ("platí že $L(M) = \Sigma^*$")

Stačí slovně popsat princip redukce, není potřeba konstruovat TS.

4.2 Riešenie

- stačí ukázať že L' lze redukovat na $co - HP$
- Požadovanou redukciou je funkcia $\sigma : \{0, 1, \#\}^* \to \{0, 1\}^*$ definovaná ako:

$$\sigma(\ \langle M \rangle \# \langle w \rangle\ ) \ = \ \langle M' \rangle$$

- Teda priradí pre každé $w' \in \{0, 1, \#\}$ kód TS M', pracujúceho nasledovne:
    - M' najskôr overí, či jeho vstup $z \in \{a^p \mid p$ je prvočíslo $\}$. Čo si zapamätá vo svojom stavovom řízení.
    - Následne zmaže svoju pásku a zapíše na ní w'
    - Ak x nemá strukturu $\langle M \rangle \# \langle w \rangle$, potom ak $z \in \{a^p \mid p$ je prvočíslo $\}$, príjme, inak odmietne.
    - Jinak odsimuluje M na w. Ak cyklí, cyklí. Jinak pokud $z \in \{a^p \mid p$ je prvočíslo $\}$ príjme, inak odmietne.

- Snadno sa dá nahliadnúť, že sa dá implementovať úplný TS
- Platí:

$$L(M') = \begin{cases} \varnothing & \text{pokud } x = \langle M \rangle \# \langle w \rangle, \text{ kde } M \text{ na } w \text{ nezastaví} \\ \{a^p \mid p \text{ je prvočíslo}\} & \text{inak} \end{cases}$$

Teda pre $\forall x \in \{0, 1, \#\}$ platí:

$$\begin{gathered} \sigma(x) = \langle M' \rangle \ \in L_{prime} \Leftrightarrow \\ L\left(M'\right) \in \{a^p \mid p \text{ je prvočíslo } \} \Leftrightarrow \\ L\left(M'\right) = \varnothing \Leftrightarrow \\ x = \langle M \rangle \# \langle w \rangle \text{ a } M \text{ na } w \text{ nezastaví } \Leftrightarrow \\ x \in \text{ co-HP} \end{gathered}$$