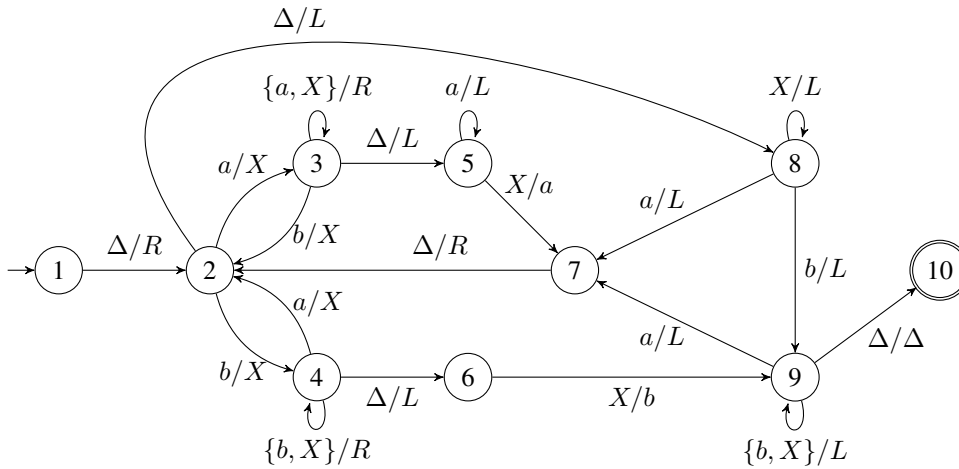


**Teoretická informatika (TIN) – 2021/2022**

**Úkol 2**

(max. zisk 5 bodů – 10 bodů níže odpovídá 1 bodu v hodnocení předmětu)

1. Doplňte 3 přechody do následujícího přechodového diagramu tak, aby výsledný Turingův stroj přijímal jazyk  $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) < \#_b(w)\}$ , kde  $\#_x(w)$  značí počet výskytů symbolu  $x$  v řetězci  $w$ . (Na přechodu můžete mít i množinu čtených symbolů, vizte třeba přechod  $(3, \{a, X\}, R, 3)$  s očekávanou sémantikou.)



Demonstrujte běh výsledného TS na slově *abaabbbba* (není potřeba vypisovat všechny konfigurace, stačí jen ty, kde se změnil stav TS nebo obsah pásky).

10 bodů

2. Operátor *vepsání* (tzv. *wedge*)  $\triangleleft: \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow 2^{\Sigma^*}$  je definován pro slova  $u = u_1 u_2 \dots u_n$  a  $w$  tak, že

$$u \triangleleft w = \{u_1 \dots u_i w u_{i+1} \dots u_n \mid 0 \leq i \leq n\}.$$

Operátor je rozšířen na jazyky následujícím způsobem:  $L_1 \triangleleft L_2 = \bigcup \{w_1 \triangleleft w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$ . Například  $\{aa\} \triangleleft \{bb\} = \{bbaa, abba, aabb\}$ . Dokažte, že množina rekursivně vyčíslitelných jazyků je uzavřena na  $\triangleleft$ .

10 bodů

3. Je dána abeceda  $\Sigma$  a jazyky  $S, L \subseteq \Sigma^*$ . Turingův stroj  $M$  nad abecedou  $\Sigma$  rozhoduje jazyk  $L$  modulo  $S$ , pokud pro všechna slova  $w \in \Sigma^* \setminus S$  (i) zastaví a (ii) přijímá  $w$  právě tehdy, když  $w \in L$  (tj. chování na slovech z  $S$  nás nezajímá). Dokažte nebo vyvráťte následující tvrzení:

- (a) Existuje nekonečný jazyk  $S$  takový, že *halting problem* (*HP*) je rozhodnutelný modulo  $S$ .
- (b) Pro všechny jazyky  $S$  je *HP* rozhodnutelný modulo  $S$ .
- (c) Existuje konečný jazyk  $S$  takový, že *HP* je rozhodnutelný modulo  $S$ .

Nápověda: pro některý z důkazů je vhodné upravit důkaz nerozhodnutelnosti *HP* z přednášek.

15 bodů

4. Uvažujte jazyk  $L_{\text{prime}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \{a^p \mid p \text{ je prvočíslo}\}\}$ , kde  $\langle M \rangle$  značí binární řetězec kódující TS  $M$ . Dokažte pomocí redukce, že jazyk  $L_{\text{prime}}$  není ani částečně rozhodnutelný. Pro redukci lze použít libovolný z následujících problémů (žádný z nich není ani částečně rozhodnutelný):

- *co-HP*,
- problém univerzality jazyka TS  $M$  („platí, že  $L(M) = \Sigma^*$ “).

Stačí slovně popsat princip redukce, není potřeba konstruovat TS.

15 bodů