Cvičení TIN – nerozhodnutelnost

1. Uveďte klíčové myšlenky důkazu, že
$L_1 = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ je TS takový, že } |L(M)| \geq 2020 \} \notin REC$.

Základní myšlenky důkazu:

- redukci z HP charakterizovaného jazykem
$HP = \{ \langle M \rangle \# \langle w \rangle \mid M \text{ je TS, který na vstupu } w \text{ zastaví} \}$
- sestrojíme redukci $\sigma : \{0,1,\#\}^* \to \{0,1\}^*$. Ta každému $x \in \{0,1,\#\}^*$ přiřadí kód TS M_x ~~takového~~, že:
  1. M_x smaže svůj vstup z (něco jiného než x, w)
  2. zkontroluje, zda $x = \langle M \rangle \# \langle w \rangle$ pro nějaký TS M a jeho vstup w. Pokud ne, zamítne.
  3. Odsimuluje M na w. Pokud simulace cyklí, cyklí. Jinak přijme.

- σ lze implementovat úplným TS M_σ
- σ zachovává členství v jazyce, konečně:
  - $L(M_x) = \begin{cases} \Sigma^* & \text{iff } x = \langle M \rangle \# \langle w \rangle \text{, kde } M \text{ je TS, který na } w \text{ zastaví.} \\ \emptyset & \text{iff když } x \text{ nemá podobu } \langle M \rangle \# \langle w \rangle \text{, nebo } M \text{ na } w \text{ nezastaví.} \end{cases}$
  - $\forall x \in \{0,1,\#\}^* : \sigma(x) = \langle M_x \rangle \in L_1 \Leftrightarrow L(M_x) = \Sigma^* \Leftrightarrow$ $x = \langle M \rangle \# \langle w \rangle$, kde M je TS, který na w zastaví $\Leftrightarrow x \in HP$. $\square$

2. Uveďte základní myšlenky redukce, která dokazuje, že $L_2 = \{ \langle M_1 \rangle \# \langle M_2 \rangle \mid M_1 \text{ a } M_2 \text{ jsou TS takové, že } L(M_1) \cap L(M_2) \neq \emptyset \} \notin REC$.

Idea redukce z HP:

- redukce $\sigma : \{0,1,\#\}^* \to \{0,1,\#\}^*$ přiřadí každému $x \in \{0,1,\#\}^*$ kód $\langle M_x^1 \rangle \# \langle M_x^2 \rangle$, kde M_x^1 a M_x^2 jsou TS takové, že:

– M_x^2 je TS, který pro libovolný vstup z

zastaví. Tedy $L(M_x^2) = \Sigma^*$.

– M_x^1 je TS takový, že $\langle M_x^1 \rangle = \delta_{NEP}(x)$ –

kde δ_{NEP} je redukce z důkazu nerozh.

neprázdnosti jazyka TS.

Tedy $L(M_x^1) = \begin{cases} \emptyset & \text{– } x \text{ nemá tvar } \langle M\rangle\#\langle w\rangle, \text{ nebo } M \text{ na } w \text{ nezastaví} \\ \Sigma^* & \text{– } x = \langle M\rangle\#\langle w\rangle, \text{ kde } M \text{ na } w \text{ zastaví.} \end{cases}$

<u>Doplněk: Je či není $L_2 \in RE$ a proč?</u>

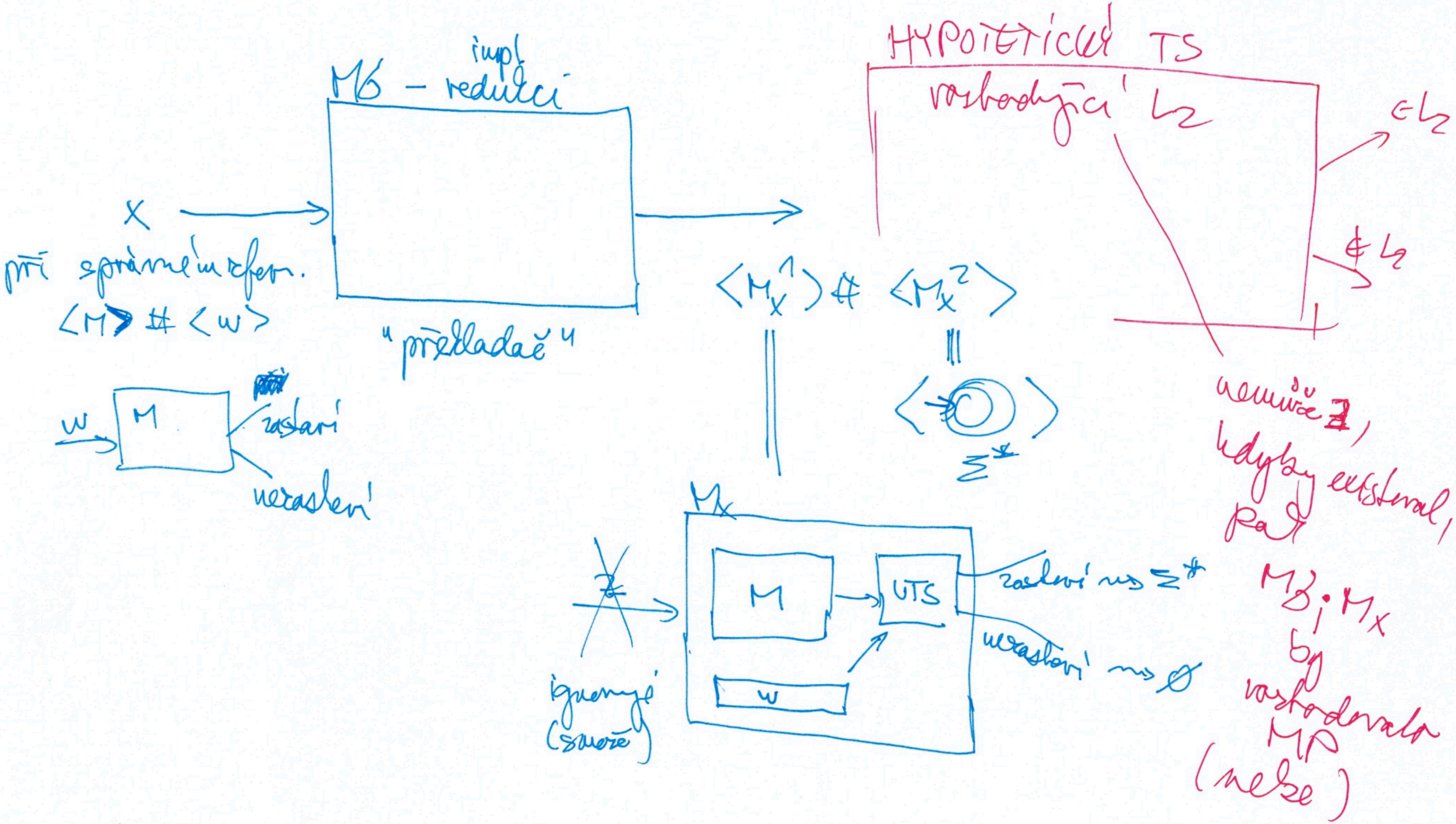
Ano, $L_2 \in RE$. Lze nalézt NTS M' rozhodující L_2 takto:

- M' uhodne řetězec w'
- M' ověří, že $w' \in L(M_1)$ a $w' \in L(M_2)$.

Indukce z nerozhodnutelnosti:

$HP = \{ \langle M \rangle \# \langle w \rangle \mid M$ je TS, který zastaví na $w \}$

$L_2 = \{ \langle M_1 \rangle \# \langle M_2 \rangle \mid M_1$ a M_2 jsou TS a $L(M_1) \cap L(M_2) \neq \emptyset \}$



3. Uveďte zákl. myšlenku redukce ukazující, že

$L_3 = \{ \langle M \rangle \mid M$ je TS takový, že $|L(M) \cap \{a, b\}| = 1 \} \notin REC$

tedy: $(a \in L(M) \lor b \in L(M)) \land$
$\neg(a \in L(M) \land b \in L(M))$

- Idea redukce z MP:
  - Lze užít analogickou redukci jako u příkladu (a tedy u problému neprázdnosti), M_x se bude lišit pouze v tom, že:
    - M_x nezačne smazáním pásky, ale místo toho ověří, zda jeho vstup $z =$ "a". Výsledek si zapamatuje v řídicím stavu řízení
    - Následuje kontrola spr. formování x, ...
    - Pokud simulace M na w skončí, M_x přijme, pokud měl původně na vstupu "a". Jinak odmítne.
- Tedy $L(M_x) = \begin{cases} \{a\} & \text{iff } x = \langle M \rangle \# \langle w \rangle \text{, kde TS } M \text{ na } w \text{ zastaví} \\ \emptyset & \text{otherwise.} \end{cases}$

DOPLNĚK: Platí $L_3 \in RE$? Proč?

NE: lze ukázat redukcí z co-HP ($= \{\langle M\rangle\#\langle w\rangle \mid M$ na w nezastaví$\}$), základní myšlenka. Redukce δ přiřadí $x \in \{0,1,\#\}^*$ kód TS M_x takového, že:

- Pokud má M_x na svém vstupu „a", přijme. (Tedy $L(M_x) \supseteq \{a\}$.)
- Smaže vstup.
- Posoudí, zda $x = \langle M\rangle\#\langle w\rangle$ pro TS M a vstup w. Pokud ne, přijme (tedy $L(M_x) = \Sigma^*$).
- Simuluje M na w. Pokud cyklí, cyklí (tedy $L(M_x) = \{a\}$). Jinak přijme (tedy $L(M_x) = \Sigma^*$).

- Tedy $\forall x \in \{0,1,\#\}^*$:

$$\delta(x) = \langle M_x\rangle \in L_3 \Leftrightarrow L(M_x) = \{a\} \Leftrightarrow$$

$x = \langle M\rangle\#\langle w\rangle$ a M na w nezastaví $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in$ co-HP. $\square$

4. Ukažte, že $L_4 = \{ \langle M \rangle \mid M$ je TS takový, že $L(M) \in \mathcal{L}_2 \} \notin RE$.

- Idea redukce z co-MP pro správně zform. vstupy $\langle M \rangle \# \langle w \rangle$:

CO-MP		L_4
a) NE $\langle M \rangle \# \langle w \rangle$ zastaví	$\longmapsto$	NE $L(M_x) \notin \mathcal{L}_2$
b) ANO $\langle M \rangle \# \langle w \rangle$ nezastaví	$\longmapsto$	ANO $L(M_x) \in \mathcal{L}_2$

- Lze redukovat podobně jako u problému neregularity na demo-cvičení:
  - M_x se podívá, zda jeho vstup $z \in \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Zapamatuje si výsledek v kon. st. řízení.
  - smaže vstup.
  - Pokud x nemá do vstupu $\langle M \rangle \# \langle w \rangle$, pak pokud $z \in \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$, přijme, jinak odmítne.

- Jinak $x = \langle M \rangle \# \langle w \rangle$ a M_x odsimuluje M na w. Pokud cyklí, cyklí!
- Jinak M_x přijme, pokud $z \in \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Jinak odmítne.

- Tedy $L(M_x) = \begin{cases} \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\} & \text{iff } x \text{ nemá podobu } \langle M \rangle \# \langle w \rangle, \text{ nebo } M \text{ na } w \text{ zastaví!} \\ \emptyset & \text{jinak.} \end{cases}$

- Tedy $\forall x \in \{0,1,\#\}^*$: $\sigma(x) = \langle M_x \rangle \in \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow L(M_x) = \emptyset \Leftrightarrow x = \langle M \rangle \# \langle w \rangle$ a M na w nezastaví $\Leftrightarrow x \in$ co-MP. $\square$

5. Ukažte, že
$L_5 = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ je TS takový, že } L(M) \notin \mathcal{L}_2 \} \notin RE$.

- Redukce z co-MP velmi podobná jako u problému neregularity.
- M_x bude pracovat následovně:
  - M_x se podívá na svůj vstup z a pokud $z \in \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$, přijme (tedy $L(M_x) \supseteq \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$)

– M_x smaže vstup.
– Pokud x nemá správnou strukturu
$\langle M \rangle \# \langle w \rangle$, přijme (tedy $L(M_x) = \Sigma^*$).
– Jinak spustí simulaci M na w.
Pokud cyklí, cyklí (tedy $L(M_x) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$)
– Jinak přijme: $L(M_x) = \Sigma^*$. $\square$

6. Dokažte nebo vyvraťte (a následně korigujte), zda platí násl. tvrzení:

$\forall L_1 \subseteq \Sigma_1^* \; \forall L_2 \subseteq \Sigma_2^* : \; L_1, L_2 \in REC \Rightarrow L_1 \leq L_2$
(L_1 se redukuje na L_2)

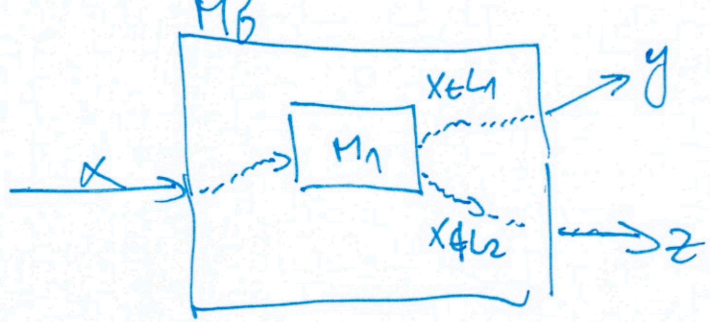
– Hypotéza – platí.
– Zkusme dokázat:
– $L_1, L_2 \in REC \Rightarrow \exists$ úplné TS M_1 a M_2 rozhodující L_1 a L_2.
– Pak M, TS provádějící redukci, může postupovat tak, že pro $\forall x \in \Sigma_1^*$ odsimuluje M_1 na x a pokud přijme, pak vypíše jeden pevně zvolený řetězec $\in L_2$.

Pak M_σ vrátí libovolný, pevně zvolený řetězec $z \notin L_2$.

⌈ Idea:

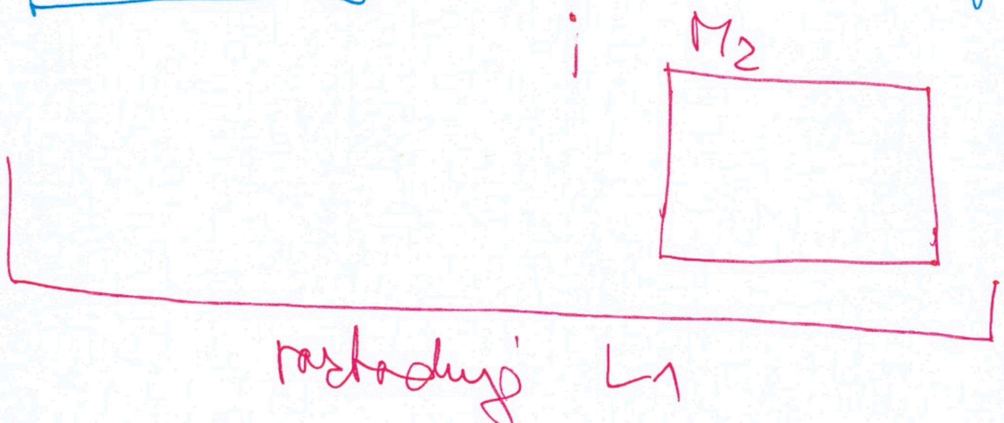
a) $x \in L_1 \longmapsto \sigma(x) \in L_2$
ANO ANO

b) $x \notin L_1 \longmapsto \sigma(x) \notin L_2$
NE NE



$y \in L_2$ (např. $\Sigma_2 = \{a, b\}$, $L_2 = \{aa, bb\}$, pak $y = aa$, $z = ab$

$z \notin L_2$



⌊

→ KDE JE PROBLÉM?

- co když $L_2 \in \{\emptyset, \Sigma^*\}$?
- Pro tyto případy <u>NELZE</u> zvolit $y \in L_2$ a $z \notin L_2$.
  Nejsme schopni odlišit "ANO" a "NE".
- Výše uvedené je vlastně důkaz tvrzení:

$$\forall L_1 \subseteq \Sigma_1^* \; \forall L_2 \subseteq \Sigma_2^* : \; L_1, L_2 \in REC \;\wedge\; L_1 \notin \{\emptyset, \Sigma_1^*\} \;\wedge\; L_2 \notin \{\emptyset, \Sigma_2^*\} \Rightarrow L_1 \le L_2 . \qquad \square$$

7. Ukažte diagonalizací, že $\mathcal{L}_1 \subset REC$
(LOA) (úplné TS)

- Uvažme $CLOA = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w$ je kód LOA, které používají symbol "x" jako symbol konce pásky $\}$

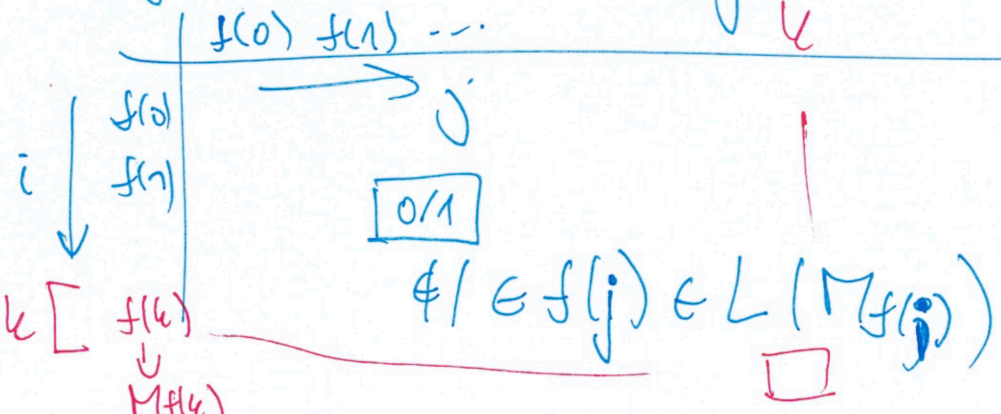
- $CLOA \subseteq$ mn-y kódů všech TS, tudíž CLOA je spočetná mn-a (konečné mn-u všech kódů TS lze uspořádat lexikograficky).

- Existuje bijekce $f: \mathbb{N} \to CLOA$

- Zaveďme si notaci $\underline{M_{f(n)}}$ pro LOA s kódem $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$

- Uvažme binární matici $A: CLOA \times CLOA \to \{0,1\}$ kde $\forall i,j \in CLOA: A[i,j] = 1 \iff f(j) \in L(M_{f(i)})$

k (*)



- Uvažme jazyk $L = \{ w \in \text{CLOA} \mid w \notin L(M_{\underline{w}}) \}$
- Ukážeme, že $L \notin \mathcal{L}_1$ – sporem.
- Předp., že $L \in \mathcal{L}_1$
- Pak $\exists k : L = L(M_{f(k)})$
- Pokud $A(f(k), f(k)) = \underline{1}$, pak $f(k) \in L(M_{f(k)})$ a tedy $L \neq L(M_{f(k)})$, protože L obsahuje kódy LOA, které nepřijímají svůj kód. Současně ale $L = L(M_{f(k)})$, což je spor.
- Pokud $\underline{A(f(k), f(k)) = 0}$. Pak dle def. L $\underbrace{\underbrace{f(k)}_{w} \in \underline{L = L}(M_{f(k)})}$. Tedy $A(f(k), f(k)) = \underline{1}$. spor.

  $\Rightarrow \underline{f(k) \in L(M_{f(k)})}$
- Tedy $L \notin \mathcal{L}_1$.
- Zbývá ukázat, že $L \in \text{REC}$. Konečně lze navrhnout úplný TS, který ověří, zda jeho vstup w je LOA používající x jako ukončovací pásky. Následně odsimuluje běh LOA s kódem w na řetězci w, přičemž používá známou konstrukci pro detekci příp. cyklení M_w na w.

pokud Mw přijme, přijme. Jinak odmítne.

Tento TS evidentně přijímá/rozhoduje L a je to úplný TS.

(POZOR: pro uchování počtu kroků, po kterých začíná Mw nutně cyklit je obecně třeba více prostoru, než poskytuje |w| ~~[illegible]~~ samotné pásky a tudíž se nejedná o LOA). $\square$