Reg. jazyky – II – TIN 8.10.2021

1. Navrhněte a formálně popište algoritmus pro konkatenaci reg. jazyků popsaných KA.

Vstup: KA $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_0^1, F_1)$ a

KA $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_0^2, F_2)$ takové, že $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, což lze předp. bez újmy obecnosti.

Výstup: KA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ takový, že $L(M) = L(M_1) . L(M_2)$.

Metoda:

1. $Q = Q_1 \cup Q_2$
2. $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
3. $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$ def. tak, že

$\forall q_1, q_2 \in Q \ \forall a \in \Sigma$:

$q_2 \in \delta(q_1, a) \iff$
$(\ q_2 \in \delta_1(q_1, a) \ \lor$
$q_2 \in \delta_2(q_1, a) \ \lor$
$(q_1 \in F_1 \land q_2 \in \delta_2(q_0^2, a)))$

alternativa k požadavku $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$:

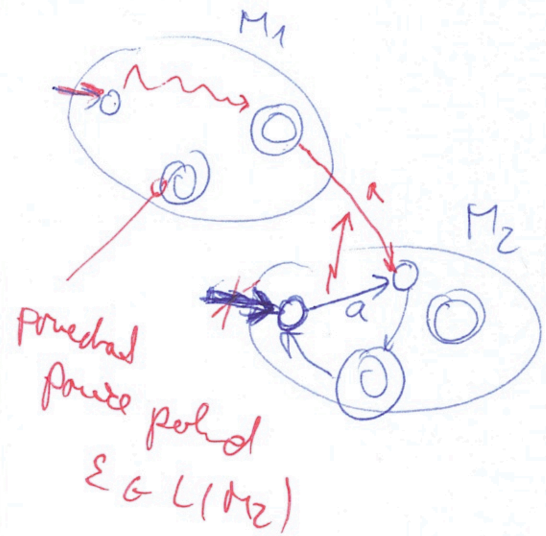
$Q = Q_1 \times \{1\} \cup Q_2 \times \{2\}$

např.

$Q_1 = Q_2 = \{q\}$

$Q = Q_1 \times \{1\} \cup Q_2 \times \{2\} = \{(q,1)\} \cup \{(q,2)\}$

Intuice



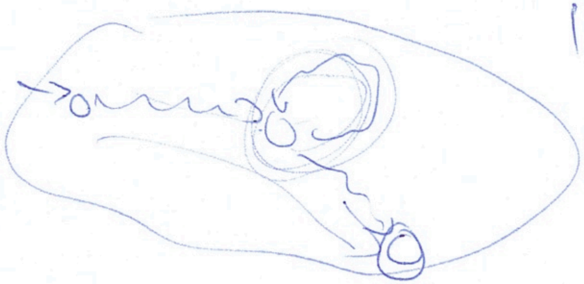
4. $q_0 = q_0^1$

5. $F = \begin{cases} F_2 & \text{pokud } \varepsilon \notin L(M_2) \\ F_1 \cup F_2 & \text{pokud } \varepsilon \in L(M_2) \end{cases}$ $\quad \|$ dk. $\quad q_0^2 \notin F_2$, $\quad q_0^2 \in F_2$

Pumping lemma

- $\forall \Sigma \; \forall L \subseteq \Sigma^* : L \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow$
  $\exists k > 0 : \forall w \in L : |w| \geq k \Rightarrow$
  $\exists x, y, z \in \Sigma^* : w = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq k \wedge \forall i \geq 0 : xy^iz \in L$.

$\ulcorner$ Důkaz (idea)
$\exists$ KA M:
$L = L(M)$



$|Q| = n \in \mathbb{N}^+$
$w \in L$
$|w| \geq n$

$\llcorner$

2. – Dokažte, že $L = \{ w \in \{a,b\}^* \mid |w| = \ell^2, \ell \geq 0 \} \notin \mathcal{L}_3$

Důkaz sporem: Předp., že $L \in \mathcal{L}_3$.

- Dle P.L. $\exists k > 0 \; \forall w \in L : |w| \geq k \Rightarrow$
  $\exists x, y, z \in \{a,b\}^* : w = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq k \wedge \forall i \geq 0 : xy^iz \in L$

- Uvažme libovolné $k > 0$ splňující výše uvedené a zvolme $w = a^{k^2} \in L$, $|a^{k^2}| = k^2 \geq k$
- Dle tvrzení P.L. tedy je možno w rozepsat takto

  $w = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq k \wedge \forall i \geq 0: xy^iz \in L$

  pro nějaké $x, y, z \in \{a, b\}^*$.
- Uvažme libovolné takové x, y, z a zvolme $i = 2$.
- Budeme zkoumat xy^2z:
  - Dle P.L., $xy^2z \in L$, tedy $|xy^2z| = l^2$ pro nějaké $l \in \mathbb{N}$
  - $|xy^2z| = |xyz| + |y| = k^2 + |y|$
  - z P.L.:
    - $y \neq \varepsilon$ a tedy $|y| > 0$
    - $|xy| \leq k$ a tedy $|y| \leq k$
  - Tedy $0 < |y| \leq k$ a tedy

    $$k^2 + 0 < \underbrace{k^2 + |y|}_{l^2} \leq k^2 + k < (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$$

    a $k > 0$
  - Tedy $k^2 < l^2 < (k+1)^2$ neboli l je přir. čísla nacházející se mezi 2 za sebou jdoucími přir. čísly.

To je spor, protože mezi dvěmi za sebou jdoucími přir. čísly žádné další není. $\square$

MyHill – Nerodova věta

Mějme $L \subseteq \Sigma^*$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

a) L je přijímán DKA.

$\Updownarrow$

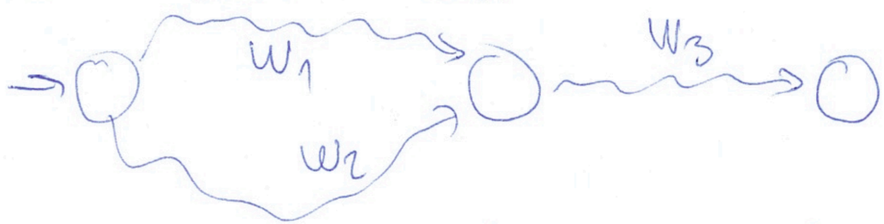
b) L je sjednocením některých ekv. tříd rozkladu $\Sigma^* / \sim$, kde $\sim \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ je pravá kongruence s kon. indexem.

ekv. $\sim \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ je pravou kongruencí jestliže:

$\Updownarrow$

$\forall w_1, w_2, w_3 \in \Sigma^* : w_1 \sim w_2 \Rightarrow w_1 w_3 \sim w_2 w_3$.

Intuice: ekv. třídy odpovídají přístupným řetězcům stavů DKA:



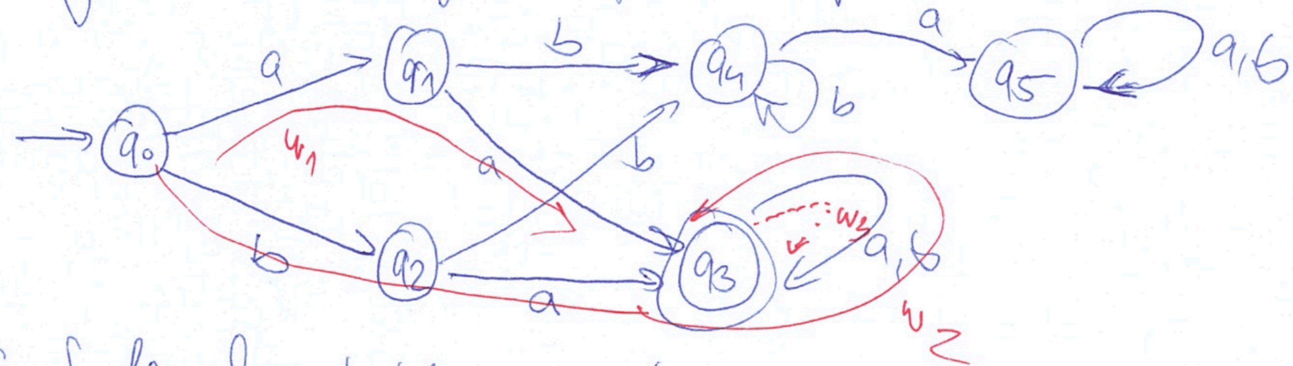
c) Relace pref. ekv. vůči L: $\sim_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ má kon. index.

Pref. ekv. $\sim_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ je ekv. taková, že

$\forall w_1, w_2 \in \Sigma^* : w_1 \sim_L w_2 \iff \left(\forall w_3 \in \Sigma^* : w_1 w_3 \in L \iff w_2 w_3 \in L \right)$

⌈ Intuice: w_1, w_2 jsou opět přísl. řetězce tentokrát v <u>min.</u> DKA ⌋

3. Mějme následující úplně def. DKA M:



Sestavte ekv. třídy pravé kongruence $\sim$ odpovídající M a vyjádřete $L(M)$ jako sjednocení několika ekv. tříd $\sim$.

- $L^{-1}(q_0) = \{\varepsilon\}$

$L^{-1}(q_1) = \{a\}$

$L^{-1}(q_2) = \{b\}$

$L^{-1}(q_3) = (a+b)\,a\,(a+b)^*$

$L^{-1}(q_4) = (a+b)\,b\,b^*$

$= (a+b)\,b^+$

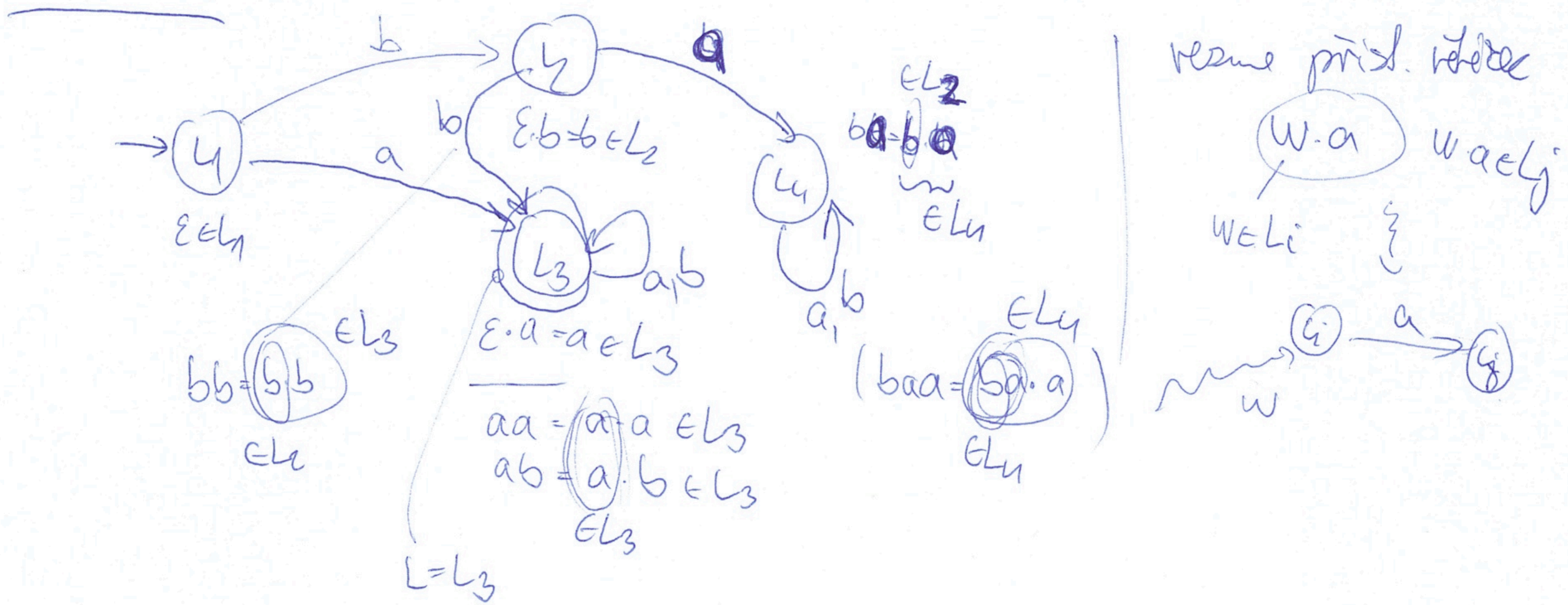
$L^{-1}(q_5) = (a+b)\,b^+\,a\,(a+b)^*$

| nechť $L^{-1}(q)$ značí příslušné řetězce stavu q: tedy $L^{-1}(q) = \{ w \in \Sigma^* \mid (q_0, w) \vdash^*_M (q, \varepsilon) \}$

[Pozn. všimněme si, že $\bigcup_{0\le i\le 5} L^{-1}(q_i) = (a+b)^*$]

– $L(M) = L^{-1}(q_3)$

4. Zkonstruujte min. úplně def. DKA k $\sim_L$ dané třídami: $L_1 = \{\varepsilon\}$, $L_2 = \{b\}$,
$L_3 = a(a+b)^* + bb(a+b)^*$
$L_4 = \{a,b\}^* \setminus (L_1 \cup L_2 \cup L_3)$, a taky, že $L = L_3$.



4. Dokažte pomocí Myhill – Nerodovy věty, že jazyk $L = \{ w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) \} \notin \mathcal{L}_3$.

Důkaz sporem:

- Předp., že $L \in \mathcal{L}_3$.
- Pak ho lze reprezentovat DKA
- Dle M.-N. věty pak $\sim_L$ má konečný index.
- Dá se nahlédnout, že
  $\forall\, w_1, w_2 \in \Sigma^*\ \forall d \geq 0$:
  $\#_a(w_1) - \#_b(w_1) = d \ \wedge$
  $\#_a(w_2) - \#_b(w_2) \neq d$, pak
  $w_1 \not\sim_L w_2$.
  Konečně $w_1 b^d \in L$, ale $w_2 b^d \notin L$.
- Je přitom jasné, že pro každé $d \geq 0$ nalezneme nějaký řetězec w takový, že $\#_a(w) - \#_b(w) = d$.
- Je tedy zřejmé, že $\sim_L$ musí mít nekonečný počet ekv. tříd. SPOR.

Operace "shuffle" $\parallel : \Sigma^* \times \Sigma^* \to 2^{\Sigma^*}$ def. tak, že

- $\forall w \in \Sigma^* : \varepsilon \parallel w = w \parallel \varepsilon = \{w\}$
- $\forall w_1, w_2 \in \Sigma^* \; \forall a, b \in \Sigma$:

  $$a w_1 \parallel b w_2 = \{a\}(w_1 \parallel b w_2) \cup \{b\}(a w_1 \parallel w_2)$$

- zobecnění $\parallel$ na jazyky:

  $$\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : L_1 \parallel L_2 = \bigcup_{\substack{w_1 \in L_1 \\ w_2 \in L_2}} w_1 \parallel w_2$$

5. Sestrojte a formálně popište alg. pro $\parallel$ nad RJ popsanými KA.

Vstup: KA $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_0^1, F_1)$ a
KA $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_0^2, F_2)$.

Výstup: KA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ takový, že $L(M) = L(M_1) \parallel L(M_2)$.

Metoda:

1. $Q = Q_1 \times Q_2$
2. $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

3. $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$ def. tak, že

$\forall q_1^1, q_2^1 \in Q_1 \ \forall q_1^2, q_2^2 \in Q_2$

$\forall a \in \Sigma$:

$$(q_2^1, q_2^2) \in \delta((q_1^1, q_1^2), a)$$

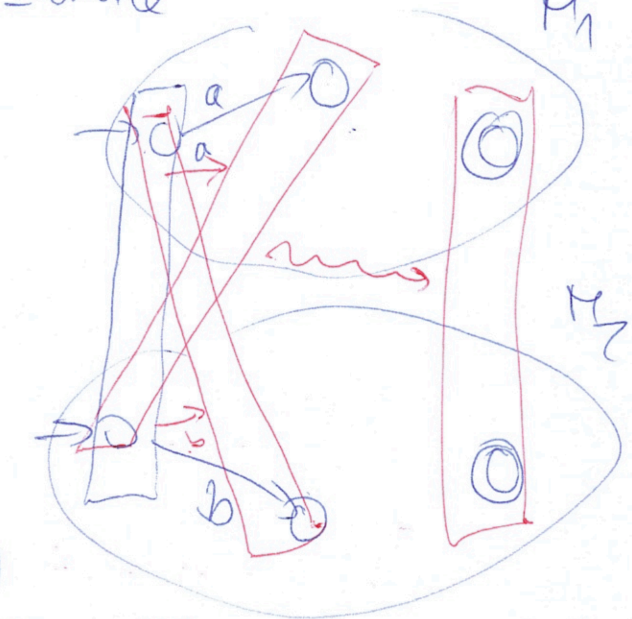
$$\Longleftrightarrow$$

$$((q_2^1 \in \delta_1(q_1^1, a) \land q_1^2 = q_2^2)$$
$$\lor (q_1^1 = q_2^1 \land q_2^2 \in \delta_2(q_1^2, a)))$$

4. $q_0 = (q_0^1, q_0^2)$

5. $F = F_1 \times F_2$.

Intuice



pozn. pro průnik nad KA lze adaptovat tak, že KA M_1 i M_2 dělají krok současně

příklad shuffle:

$ab \parallel cd = \{abcd, acbd, acdb, cdab, cabd, cadb\}$

– takže volbu i na $i = (k+1)! + 1$ [... i, protože musí platit pro $\forall i \geq 0$]

– Pak $l! = k! + |y|((k+1)! + 1 - 1)$

$$l! = k! + |y|(k+1)k! = k!(1+|y|(k+1))$$

Aby rovnost mohla platit, musí mít:

$$l \cdot (l-1) \cdot \ldots \cdot (k+1) \cdot k! = k!(1 + |y|(k+1)) \quad \Big/ \text{ vykrátíme } k!,\ k>0$$

$$l \cdot (l-1) \cdot \ldots \cdot (k+1) = 1 + |y|(k+1)$$

– Protože levá strana je dělitelná $k+1$, pravá strana musí být také dělitelná $k+1$.

– Tedy $1 + |y|(k+1)$ je dělitelné $(k+1)$.

– $|y|(k+1)$ je dělitelné beze zbytku $(k+1)$. Aby nevznikl zbytek musí být 1 dělitelné $(k+1)$. Ovšem $k+1 > 1$, protože $k>0$, ale 1 je dělitelná pouze 1.

SPOR. $\square$

6. Dokažte pomocí P.L., že $L = \{ a^{n!} \mid n \in \mathbb{N} \} \notin \mathcal{L}_3$.

Důkaz sporem.

- Předp., že $L \in \mathcal{L}_3$.
- Uvažme libovolné $k > 0$ dle P.L. — takové musí existovat!
- Zvolme $w = a^{k!} \in L$, $|a^{k!}| = k! \geq k$.
- Dle P.L. $\exists x, y, z \in \{a\}^* : a^{k!} = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq k \wedge$
  $\forall i \geq 0 : xy^i z \in L$.
- Uvažme libovolné x, y, z splňující výše uvedené a uvažme libovolné $i > 1$.
- Zkoumejme $|xy^i z| = |xyz| + |y^{i-1}|$ lze učinit, neboť $i > 1$.
  $= |a^{k!}| + |y| \cdot (i-1)$.
  $= k! + |y|(i-1)$
- Protože $xy^i z \in L$, pak $|xy^i z| = l!$ pro nějaké $l \geq 0$.
- Tedy $l! = k! + |y|(i-1)$