Teoretická informatika (TIN) – 2021/2022
Úkol 3
(max. zisk 5 bodů – 10 bodů níže odpovídá 1 bodu v hodnocení předmětu)

1. Strýc Rudolf organizuje osmdesátiny dědy Adolfa. Oslava pro početnou rodinu bude v sále s mnoha stoly s různým počtem míst. Příbuzní Rudolfovi hlásí své dary pro dědu, někteří více, než jeden. Mnozí však hlásí stejné dary. Aby se předešlo trapným situacím, plánuje Rudolf rozesadit příbuzné ke stolům tak, aby u žádného neseděli příbuzní se stejným darem. Děda pak každý stůl navštíví ve vhodný okamžik, kdy bude od ostatních stíněn Rudolfovým hlasitým zpěvem. Zároveň je důležité, aby dědův stůl byl plně obsazen. Návrh zasedacího pořádku je tedy *Rudolfův problém*. Rudolf jr. složil zkoušku z IZP a tvrdí, že to nacéčkuje, a bude.

   Zařaďte co nejpřesněji Rudolfův problém do složitostní třídy. Jak dobře může fungovat řešení Rudolfa jr.?

   Nápovědu najdete zde:
   `https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_NP-complete_problems` 20 bodů

2. Mějme jazyk $L \in DTIME(n^3)$ nad abecedou Σ. *Superpalindrom jazyka* L je slovo formy $a_1 \cdots a_n a_n \cdots a_1, n \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $i : 1 \leq i \leq n$, $a_i \cdots a_n a_n \cdots a_i \in L$.
   Nechť M je jazyk slov w, která obsahují podslovo v délky alespoň $|w|/2$, jež je superpalindromem L, tedy $M = \{w = x.v.y \mid v \text{ je superpalindrom } L, |v| \geq |w|/2, x, y \in \Sigma^*\}$.
   Příkladem slova z jazyka M je $aaaa\,bcddcb\,bb$, za předpokladu, že $bcddcb$, $cddc$, dd i ϵ patří do L.
   Najděte co nejmenší $k, \ell, m \in \mathbb{N}$, aby platila následující tvrzení, a zdůvodněte, že platí:

   (a) $M \in DTIME(n^k)$. (pozor, nejpřímočařejší řešení není optimální)
   (b) $M \in NTIME(n^\ell)$.
   (c) $M \in DSPACE(n^m)$.

   Nemusíte dokazovat, že Vaše volby k, ℓ, m jsou opravdu optimální.

   20 bodů

3. Dokažte, že pro jakékoliv dané $p, m, k, \ell \in \mathbb{N}$ je

   (a) $\mathcal{O}(\log_k(n^p)) = \mathcal{O}(\log_\ell(n^m))$ (zopakujte si pravidla pro počítání s logaritmy)
   (b) $\mathcal{O}(n^k) \subset \mathcal{O}(n^{k+1})$ (ukažte oba vztahy, $\subseteq$ i $\not\supseteq$) 10 bodů