VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
Fakulta informačních technologií

Teoretická informatika (TIN) – 2021/2022

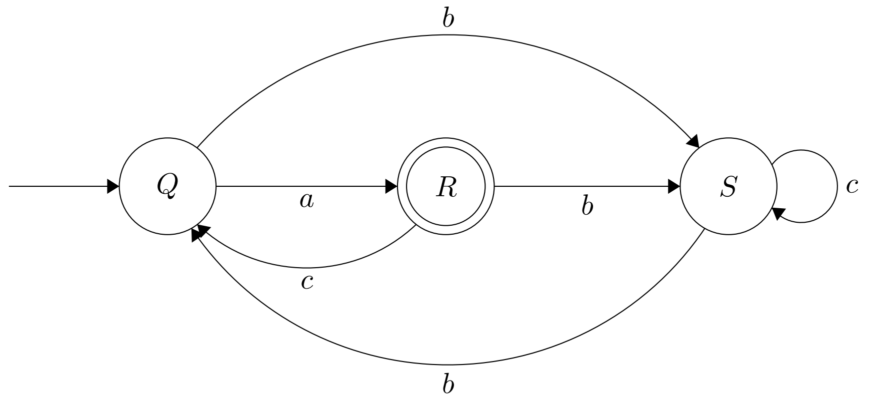
Domáca úloha číslo 1.

Marek Žiška **(xziska03)** Brno, 31. října 2021

1 Príklad

1.1 Zadanie

Uvažte NKA M_3 nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$ z obrázku 1:



Obrázek 1: NKA M_3

Řešením rovnic nad regulárními výrazy sestavte k tomuto automatu ekvivalentní regulární výraz.

Riešenie

Zostavíme rovnice pre jednotlivé stavy:

$$Q = aR + bS$$
$$R = cQ + bS + \varepsilon$$
$$S = cS + bQ$$

Postupním dosadzovaním a vykonávaním úprav nad sústavov rovníc sa dopracujeme k ekvivalentnému regulárnemu výrazu pre počiatočny stav Q:

$$S = \underbrace{c}_{p} S + \underbrace{bQ}_{q} = c^*bQ$$

$$R = cQ + \underbrace{bc^*bQ}_{S} + \varepsilon = (c + bc^*b)Q + \varepsilon$$

$$Q = a(\underbrace{(c + bc^*b) + \varepsilon}_{R}) + b(\underbrace{c^*bQ}_{S}) = abc^*bQ + acQ + bc^*bQ + a = (\underbrace{abc^*b + ac + bc^*b}_{p})Q + \underbrace{a}_{q} = \underline{\underline{(abc^*b + ac + bc^*b)^*a}}$$

2 Príklad

2.1 Zadanie

Mějme jazyk L_1 nad abecedou $\{a, b, c\}$ definovaný následovně:

$$L_1 = \{w | w \in \{a, b, c\}^* \wedge \#_a(w) > \#_b(w) \wedge \#_c(w) > 2$$

Dokažte, že jazyk $L1$ není regulární.

2.2 Riešenie

Predpokladajme, že jazyk $L1$ je regulární.

Pak dle Pumping Lemma:

$$\exists k > 0,\ \forall w \in L : |w| \geq k \Rightarrow \exists x, y, z \in \Sigma^* : w = xyz \ \wedge\ y \neq \varepsilon \ \wedge\ |xy| \leq k \ \wedge\ \forall i \geq 0 :\ xy^iz \in L$$

Uvažme libovolné $k > 0$ splňujíci výše uvedené a zvolme:

$$w = b^k a^{k+1} c^3 \in L_1,\ |b^k a^{k+1} c^3| = k + (k+1) + 3 \geq k$$

Podľa tvrdenia Pumping Lemma je možné reťazec w rozpísať ako:

$$w = xyz \ \wedge\ y \neq \varepsilon \ \wedge\ |xy| < k \ \wedge\ \forall i \geq 0 :\ xy^iz \in L$$

Uvažme dle Pumping Lemma libovolné rozdelenie w na x, y, z a zvolíme:

$$x = b^{l_1}, \qquad 0 \leq l_1 < k$$
$$y = b^{l_2}, \qquad 1 \leq l_2 < k,\ l_1 + l_2 \leq k$$
$$z = b^{k-l_1-l_2} a^{k+1} c^3, \quad \text{aby sme splnili } w = b^k a^{k+1} c^3 = xyz \wedge |xy| \leq k \wedge y \neq \varepsilon$$

Následne podľa Pumping Lemma:

$$\forall i \geq 0 :\ xy^iz \in L$$

Uvažme $i = 3$:

$$xy^3z = \underbrace{b^{l_1}}_{x} \underbrace{b^{l_2*3}}_{y} \underbrace{b^{k-l_1-l_2} a^{k+1} c^3}_{z} = b^{k+2l_2} a^{k+1} c^3$$

Z toho, že $b^{k+2l_2} b^{k+1} c^3, 1 \leq l_2 < k$ a dle definice L_1 plynie, že $\#_b(w) < \#_a(w) = k + 2l_2 < k + 1$, neboli $l_2 < 1$, ale vieme že $l_2 \geq 1$, tedy tadle podmínka neplatí. Spor. $\square$

3 Príklad

3.1 Zadanie

S využitím Myhill-Nerodovy věty dokažte, že jazyk

$$L_2 = \{xw \mid x \in \{0,1\}, w \in \{a,b\}^* \wedge \ (\#_a(w) \ mod\ 2 = x)\}$$

je regulární. Postupujte následovně: sestrojte relaci pravé kongruence s konečným indexem a ukažte, že jazyk $L2$ je sjednocením některýchh tříd rozkladu $\{0,1,a,b\}*/\sim$.

3.2 Riešenie

- Predpokladajme že L_2 je regulární. Teda môžeme povedať, že je príjmaný deterministickým konečným automatom, povedzme značeným ako A.

- Z toho vyplýva že L musí byť sjednocením niektorých tried rozkladu určeného pravou kongruencí Σ^* s konečným indexom.

- Pre daný jazyk L_2 príjmaným konečným automatom A, zkonstruujeme pravou kongruenci $\sim$, ako binárnu reláciu $\sim \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$, takovou že odpovída A:

Majme $\Sigma = \{0,1,a,b\}$, potom pre $u, v \in \Sigma^*, u \sim v \Leftrightarrow$
$(u = v = \varepsilon) \vee$
$(\forall x_1, x_2 \in \{0,1\}, \forall w_1, w_2 \in \Sigma^* : u \neq x_1w_1 \wedge v \neq x_2w_2 \wedge (u \ \neq \ v \ \neq \varepsilon)) \vee$
$(\exists a_1, a_2 \ \in \ \{0,1\}, \exists w_3, w_4 \ \in \ \{a,b\}^* \ : \ u \ = \ a_1w_3 \wedge v \ = \ a_2w_4 \wedge ((\#_a(w_3) \ mod2 \ = \ \#_a(w_4) \ mod2 \ = \ a_1) \wedge (\#_a(w_3) \ mod2 = \#_a(w_4) \ mod2 = a_2))))$

- Ukážeme že $\sim$ má potrebné vlastnosti:

- Relace $\sim$ má konečný index, keďže dokážeme skonštruovať rozklad s konečným počtom tried, tedy dokážeme zostrojiť i automat kde jednotlivé triedy predstavujú stavy automatu. Rozklad $\{0,1,a,b\}*/\sim$:
  $\forall u, v \in \Sigma^*, a \in \Sigma \ : \ u \sim v \Rightarrow ua \sim va$
  - $[\varepsilon]_\sim \quad \Leftrightarrow (u \ = \ v \ = \varepsilon)$
  - $[x]_\sim \quad \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in \{0,1\}, \forall w_1, w_2 \in \Sigma^* : u \neq x_1w_1 \wedge v \neq x_2w_2 \wedge (u \ \neq \ v \ \neq \varepsilon))$

  Nasledujúce triedy predpokladajú $\exists a_1, a_2 \in \{0,1\}, \exists w_3, w_4 \in \{a,b\}^*$
  - $[0,S]_\sim \Leftrightarrow (a_1 = 0 \wedge a_2 = 0 \wedge u = a_1w_3 \wedge v = a_2w_4 \wedge (\#_a(w_3) \ mod2 = \#_a(w_4) \ mod2 = a_1 = a_2))$
  - $[1,S]_\sim \Leftrightarrow (a_1 = 1 \wedge a_2 = 1 \wedge u = a_1w_3 \wedge v = a_2w_4 \wedge (\#_a(w_3) \ mod2 = \#_a(w_4) \ mod2 \neq a_1 \neq a_2))$
  - $[0,L]_\sim \Leftrightarrow (a_1 = 0 \wedge a_2 = 0 \wedge u = a_1w_3 \wedge v = a_2w_4 \wedge (\#_a(w_3) \ mod2 = \#_a(w_4) \ mod2 \neq a_1 \neq a_2))$
  - $[1,L]_\sim \Leftrightarrow (a_1 = 1 \wedge a_2 = 1 \wedge u = a_1w_3 \wedge v = a_2w_4 \wedge (\#_a(w_3) \ mod2 = \#_a(w_4) \ mod2 = a_1 = a_2))$

- L_2 dokážeme vyjadriť zjednotením tried rozkladu $[0,S]_\sim$ a $[1,L]_\sim$, tedy platí i náš predpoklad že L_2 je regulární.

$$L_2 = [0,S]_\sim \ \cup \ [1,L]_\sim$$

4 Príklad

4.1 Zadanie

Mějme jazyk L_3 nad abecedou $\{a,b,c,\#\}$ definovaný následovně:

$$L_3 = \{w_1\#w_2 \mid w_1, w_2 \in \{a,b,c\}^* \wedge \ (\#_a(w_1) = \#_b(w_2) \vee \#_a(w_1) = \#_c(w_2))\}$$

- Sestrojte bezkontextovou gramatiku $G3$ takovou, že $L(G3) = L3$.

- Ke gramatice $G3$ sestrojte RZA $P3$ takový $P3$ provádí syntaktickou analýzu $L3$ shora dolu.

4.2 Riešenie

Pre jazyk L_3 zostavíme gramatiku $G_3 = \{N, T, P, S\}$, kde:

1. $N = \{S, X, B, Z, C\}$
2. $T = \{a, b, c, \#\}$
3. P:

$$
\begin{array}{l}
S \to X \mid Z \\
X \to aXB \mid bX \mid cX \mid \# \\
B \to b \mid aB \mid cB \mid Ba \mid Bc \\
Z \to aZC \mid bZ \mid cZ \mid \# \\
C \to c \mid aC \mid bC \mid Ca \mid Cb
\end{array}
$$

4. $S = \{S\}$

Ku gramatike G_3 zostrojíme RZA P_3 vykonávajúci syntaktickú analýzu zhora dole ako:
$P_3 = (\{q\}, \{a, b, c, \#\}, \{S, X, B, Z, C, a, b, c, \#\}, \delta, q, S, \emptyset)$, kde

$$
\begin{array}{lcl}
\delta(q, \varepsilon, S) & = & \{(q, X),\ (q, Z)\} \\
\delta(q, \varepsilon, X) & = & \{(q, aXB),\ (q, bX),\ (q, cX),\ (q, \#)\} \\
\delta(q, \varepsilon, B) & = & \{(q, b),\ (q, aB),\ (q, cB),\ (q, Ba),\ (q, Bc)\} \\
\delta(q, \varepsilon, Z) & = & \{(q, aZC),\ (q, bZ),\ (q, cZ),\ (q, \#)\} \\
\delta(q, \varepsilon, C) & = & \{(q, c),\ (q, aC),\ (q, bC),\ (q, Ca),\ (q, Cb)\} \\
\delta(q, a, a) & = & \{(q, \varepsilon)\} \\
\delta(q, b, b) & = & \{(q, \varepsilon)\} \\
\delta(q, c, c) & = & \{(q, \varepsilon)\} \\
\delta(q, \#, \#) & = & \{(q, \varepsilon)\}
\end{array}
$$

$(q, a\#bcc, S) \vdash (q, a\#bcc, X) \vdash (q, a\#bcc, aXB) \vdash (q, \#bcc, XB) \vdash (q, \#bcc, \#B) \vdash (q, bcc, B) \vdash (q, bcc, Bc) \vdash (q, bcc, Bcc) \vdash (q, bcc, bcc) \vdash (q, cc, cc) \vdash (q, c, c) \vdash (q, \varepsilon, \varepsilon)$

5 Príklad

5.1 Zadanie

Mějme jazyk L_4 nad abecedou $\{a, b, 0, 1, \#\}$ definovaný následovně:

$$L_4 = \{w_1 \# w_2 x \mid w_1, w_2 \in \{a, b\}^* \wedge\ (w_1 = w_2^R \wedge x = 0) \vee (|w_1| < |w_2| \wedge x = 1)\}$$

Sestrojte deterministický zásobníkový automat $P4$ takový, že $L(P4) = L4$.

5.2 Riešenie

Ku jazyku L_4 zostrojíme DZA P_4, aby spĺňal zadanú požiadavku že $L(P4) = L4$, a to nasledovne:

$$P_4 = (\{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}, \{a, b, 0, 1, \#\}, \{Z, a, b, c, \#\}, \delta, Q_0, Z, Q_4), \text{ kde}$$

prechodová funkce δ je definovaná nasledujúcim automatom: