Exercice 1 (Rattrapage 2005)

$a \wedge b$ est le plus grand diviseur commun de a et b , $\overline{abc}_{(x)}$ est l'écriture du nombre abc avec le système de numération à base x

1) Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E):(x+1)^2 = 9+5y$
   A- soit (x,y) une solution de (E) montrer que $x \equiv 1[5]$ ou $x \equiv 2[5]$
   B- résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation
2) Montrer que $\forall k \in \mathbb{Z} - \{-1,3\}$:
   $(5k^2+4k-1) \wedge (5k+1) = (k-3) \wedge 8$
3) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système
   $\begin{cases} \overline{121}_{(x)} = \overline{59}_{(x)} \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{cases}$

Exercice2 (session normal 2019) 3points)

On admet que 2969 est un nombre premier ; soit n et m deux entiers naturels vérifiant $n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$

1) On suppose dans cette question que 2969 ne divise pas n
   A- en utilisant le théorème de BEZOUT montrer que : $(\exists u \in \mathbb{Z}); u \times n \equiv 1[2969]$
   B- En déduire que $(n \times m)^8 \equiv -1[2969]$ et que $(n \times m)^{2968} \equiv -1[2969]$
   (on remarque que $2968 = 8 \times 371$)
   C- montrer que 2969 ne divise pas $u \times m$
   D- en déduire qu'on a aussi $(n \times m)^{2968} \equiv 1[2969]$
2) A- En utilisant les résultats précédents montrer que 2969 divise n
   A- B- montrer que :
   $n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$
   $\Leftrightarrow n \equiv 0[2969]$ *et* $m \equiv 0[2969]$

Exercice 3 (session normal 2013) 3points

L'objectif de l'exercice la recherche des entiers naturels n strictement supérieur à 1 qui vérifient la propriété $(R): 3^n - 2^n \equiv 0[n]$

1) On suppose n vérifie la propriété (R) et soit p **le plus petit diviseur premier positif** de n
   A- Montrer que $3^n - 2^n \equiv 0[p]$ puis déduire que $p \geq 5$
   B- Montrer que $2^{p-1} \equiv 1[p]$ et $3^{p-1} \equiv 1[p]$
   C- Montrer qu'il existe un couple (a,b) de $\mathbb{Z}^2$ tel que $an - b(p-1) = 1$
   D- Soit r et q le reste et le quotient de la division euclidienne de a par $p-1$ $(a = q(p-1)+r)$ tel que $0 \leq r \prec p-1$ et $q \in \mathbb{Z}$ montrer qu'il existe un entier naturel k tel que $rn = k(p-1)$
2) Déduire de tout ce qui précède qu'il n'existe aucun entier naturel n strictement supérieur à 1 qui vérifie la propriété (R)

Exercice 4 (session normal 2014) 3points

Soit n de $\mathbb{N}^*$
On pose $a_n = 333.....31$ (n fois le chiffre 3)

1) Vérifier que les nombres a_1 et a_2 sont premiers
2) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $3a_n + 7 = 10^{n+1}$
3) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$: $10^{30k+2} \equiv 7[31]$
4) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$: $3a_{30k+1} \equiv 0[31]$ puis déduire que 31 divise a_{30k+1}
   Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: si $n \equiv 1[30]$ alors l'équation $a_n x + 31y = 1$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$