Exercice 01:

1) Pour tout nombre complexe non nul z différent de i on pose : $h(z)=i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)$

a) Vérifier que : $h(z)=z \iff z^2-2iz-2=0$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): \quad z^2-2iz-2=0$

2) le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$

On désigne par a et b les solutions de l'équation (E) tels que $Re(a)=1$

Soit z un nombre complexe différent de i de a et de b et les points $M(z)$, $M'(h(z))$, $A(a)$ et $B(b)$.

a) Montrer que : $\frac{h(z)-a}{h(z)-b}=\frac{z-a}{z-b}$. b) En déduire que : $(\widehat{\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A}})\equiv\pi+(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}})\ [2\pi]$

3) a) Montrer que si les points M , A et B sont alignés alors les points M , A et B et M' sont alignés.

b) Montrer que si les points M , A et B ne sont pas alignés alors les points M , A et B et M' sont Cocycliques.

Exercice 01:

Soit m un nombre complexe.

Partie I : On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E_m): \quad z^2+(im+2)z+im+2-m=0$

1) a) Vérifier que $\Delta=(im-2i)^2$ est le discriminant de l'équation (E_m)

b) Donner, suivant les valeurs de m, l'ensemble des solutions de l'équation (E_m)

2) Pour $m=i\sqrt{2}$, écrire les deux racines de l'équation (E_m) sous la forme exponentielle.

Partie II : le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

On considère les points A, Ω, M et M' d'affixes respectifs $a=-1-i$, $\omega=i$, m et $m'=-im-1+i$.

1) Soit R la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme M en M'.

a) Vérifier que Ω est le centre de la rotation R.

b) Déterminer l'affixe b de B, où B est le point tel que $A=R(B)$.

2) a) Vérifier que : $m'-a=\frac{\omega-a}{\omega-b}(m-b)$.

b) En déduire que les points A, M et M' sont alignés si et seulement si les points A, B, Ω et M sont cocycliques.

c) Montrer que l'ensemble des points M tels que les points A, M et M' sont alignés est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 03:

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$

Soit M le point d'affixe le nombre complexe non nul z et M' le point d'affixe $z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$

1) Déterminer le nombre complexe z tel que les deux points M et M' soient confondus.

2) On suppose que le point M est différent des deux points A et B d'affixes respectifs 1 et -1.

Montrer que : $\frac{z'+1}{z'-1}=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$.

3) Soit (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$.

Montrer que : Si le point M appartient à (Δ), alors le point M' appartient à (Δ).

4) Soit (Γ) le cercle dont l'un des diamètres est le segment $[AB]$.

Montrer que : Si le point M appartient à (Γ), alors le point M' appartient à (AB).

Exercice 04:

Soit m un nombre complexe non nul.

Partie I :

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z :

$$(E):\ 2z^2-2(m+1+i)z+m^2+(1+i)m+i=0$$

1) Vérifier que le discriminant de l'équation (E_m) est $\Delta=(2im)^2$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m).

Partie II :

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$.

On suppose que $m\in C-\{0,1,i\}$ et on pose : $z_1=\dfrac{1+i}{2}(m+1)$ et $z_2=\dfrac{1-i}{2}(m+i)$

On considère les points A, B, M, M_1 et M_2 d'affixes respectifs 1, i, m, z_1 et z_2.

1) a) Vérifier que : $z_1=iz_2+1$

b) Montrer que M_1 est l'image de M_2 par la rotation de centre Ω d'affixe $\omega=\dfrac{1+i}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

2) a) Vérifier que : $\dfrac{z_2-m}{z_1-m}=i\dfrac{m-1}{m-i}$

3) a) Montrer que si les points M et M_1 et M_2 sont alignés , alors le point M appartient au cercle (Γ) dont l'un des diamètres est le segment $[AB]$.

b) Déterminer l'ensemble des points M tels que les points Ω, M, M_1 et M_2 sont cocycliques.

(remarquer que : $\dfrac{z_1-\omega}{z_2-\omega}=i$)

Exercice 05 :

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z :

$$(E):\ z^2-(1+\sqrt{3})(1+i)z+4i=0$$

1) a) Vérifier que $D=\left((\sqrt{3}-1)(1-i)\right)^2$ est le discriminant de l'équation (E)

b) Ecrire sous forme exponentielle chacune des solutions de l'équation (E)

2) le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

On considère les points A et B d'affixes respectifs $a=1+i\sqrt{3}$ et $b=\sqrt{3}+i$.

a) Montrer que l'ensemble (D) des points $M(z)$ tels que $z=\dfrac{1}{2}a\bar{z}$ est une droite passant par B.

b) Soient M et M' deux points d'affixes respectifs z et z' tels que $z'=a\bar{z}-b$ et .

Montrer que : $\dfrac{b^2}{(z'-b)(z-b)}=\dfrac{2}{|z-b|^2}$

c) En déduire que la droite (D) est la bissectrice de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}})$

Exercice 06 :

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

Soient les points $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ deux points du plan tels que les points O, M_1 et M_2 sont non alignés et deux à deux distincts et $M(z)$ le point d'affixe z vérifiant la relation : $z=\dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$

1) a) Montrer que : $\dfrac{z_1-z}{z_2-z}\times\dfrac{z_2}{z_1}=-1$

b) En déduire que le point M appartient au cercle circonscrit au triangle OM_1M_2.

2) Montrer que si $z_2=\overline{z_1}$, alors le point M appartient à l'axe des réels.

3) On suppose que M_2 est l'image de M_1 par la rotation R de centre O et d'angle $\alpha \in]0,\pi[$.

a) Calculer z_2 en fonction de z_1 et de α.

b) En déduire que le point M appartient à la médiatrice du segment $[M_1M_2]$.

4) Soit θ un réel donné de l'intervalle $]0,\pi[$.

On suppose que z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation : $t \in C$; $6t^2-(e^{i\theta}+1)t+(e^{i\theta}-1)=0$.

a) Sans calculer z_1 et z_2, vérifier que : $z=2\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$

b) Donner l'écriture trigonométrique du nombre complexe z en fonction de θ.

Exercice 07 :

On considère dans complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $(E):\ z^2-(1+i)z+2+2i=0$

1) a) Vérifier que $\Delta=(1-3i)^2$ est le discriminant de l'équation (E)

b) Déterminer z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ (on prendra z_1 l'imaginaire pur)

c) Montrer que $\dfrac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}.e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

2) le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points A et B d'affixes respectifs z_1 et z_2 .

a) Déterminer le nombre complexe e l'affixe du point E, milieu du segment $[AB]$.

b) Soit R la rotation de centre A d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, on pose $R(E)=C$. Montrer que : $z_C=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i$.

c) Soit D le point d'affixe $d=1+\dfrac{3}{2}i$. Montrer que le nombre $\left(\dfrac{z_2-d}{c-d}\right)\times\left(\dfrac{c-z_1}{z_2-z_1}\right)$ est réel , puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu .

Exercice 08 :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E):\ z^2-(5+i\sqrt{3})z+4+4i\sqrt{3}=0$

1) a) Vérifier que $\Delta=(3-i\sqrt{3})^2$ est le discriminant de l'équation (E)

b) Déterminer a et b les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ (sachant que $b \in \mathbb{R}$)

c) Vérifier que $b=(1-i\sqrt{3})a$.

2) le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points A et B d'affixes respectifs a et b .

a) Déterminer le nombre complexe b_1 l'affixe du point B_1 image du point O par la rotation R de centre A d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

b) Montrer que B est l'image de B_1 par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{3}$.

c) Soit C un point, d'affixe c, appartenant au cercle circonscrit au triangle OAB et différent de et de O et de A. Déterminer l'argument du nombre complexe $\dfrac{c}{c-a}$.

Exercice 09 :

Partie I :

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2+i=0$ (a est la solution de l'équation telle que $Re(a)>0$)

2) a) Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $1+a$

b) En déduire que $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

c) Vérifier que $(1+a)(1-a)=1+i$, en déduire la forme trigonométrique du nombre complexe $1-a$.

Partie II :

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, B, M et M' d'affixes respectifs a, $-a$, z et z' tels que $zz'+i=0$.

1) Soit N le point d'affixe $\bar{z}$, conjugué de z. Montrer que les droites (ON) et (OM) sont perpendiculaires.

2) a) Montrer que : $z'-a=i\dfrac{z-a}{az}$. b) Montrer que si $z\neq -a$, alors : $z'\neq -a$ et $\dfrac{z'-a}{z'+a}=-\dfrac{z-a}{z+a}$.

3) On suppose que les points A, B, M sont non alignés.
Montrer que le point M' appartient au cercle circonscrit au triangle ABM.

Exercice 10 :

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soit θ un nombre réel tel que $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[-\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z suivante : $(E):\ z^2-\sqrt{2}e^{i\theta}z+e^{2i\theta}=0$
   a) Vérifier que $\Delta=(i\sqrt{2}e^{i\theta})^2$ est le discriminant de l'équation (E)
   b) Ecrire sous forme trigonométrique les solutions z_1 et z_2 de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

2) On considère les points I, J, T_1, T_2 et A d'affixes respectifs 1, -1, $e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}$, $e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})}$ et $\sqrt{2}e^{i\theta}$.
   a) Montrer que les droites (OA) et (T_1T_2) sont perpendiculaires.
   b) Soit K le milieu du segment $[T_1T_2]$, montrer que les points O, K et A sont alignés.
   c) En déduire que la droite (OA) est la médiatrice du segment $[T_1T_2]$.

3) Soit R la rotation de centre T_1 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   a) Donner l'expression complexe de la rotation R.
   b) Vérifier que l'affixe du point B image du point I par la rotation R est : $b=\sqrt{2}e^{i\theta}+i$
   c) Montrer que les droites (IJ) et (AB) sont perpendiculaires.

4) Déterminer l'affixe du point C l'image du point A par la translation de vecteur $-\vec{v}$.

5) Montrer que le point A est le milieu du segment $[BC]$.

Exercice 11 :

Partie I : Soit a un nombre complexe différent de 1.
On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z

$$(E)\ :\ 2z^2-2(a-1)z+(a-1)^2=0$$

1) Montrer que $z_1=\dfrac{(a-1)(1+i)}{2}$ et $z_2=\dfrac{(a-1)(1-i)}{2}$ sont les solutions de l'équation (E).

2) On pose : $a=e^{i\theta}$ tel que $0<a<\pi$
   a) Montrer que $a-1=2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)}$
   b) En déduire la forme trigonométrique de chacune des solutions z_1 et z_2.

Partie II :

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On suppose que $Re(a)<0$ et on considère les points $A(a)$, $B(-i)$, $C(i)$ et $B'(1)$.

1) Déterminer les affixes de chacun des points J et K milieux respectifs des segment $[AC]$ et $[AB]$ en fonction de a.

2) Soit R_1 la rotation de centre J et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et R_2 la rotation de centre K et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   On pose : $C'=R_1(C)$ et $A'=R_2(A)$ et soient c' l'affixe de C' et a l'affixe de A.
   Montrer que : $a'=z_1$ et $c'=z_2$.

3) Calculer $\left(\frac{a'-c}{a-1}\right)$ en déduire que la droite (AB') est une hauteur dans le triangle $A'B'C'$.

Exercice 12 :

Partie I : Soit a un nombre complexe non nul.

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z

$$(E): \quad 2z^2-\left(3+i\sqrt{3}\right)az+\left(1+i\sqrt{3}\right)a^2=0$$

1) Vérifier que $\Delta=\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2a^2$ est le discriminant de l'équation (E)

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

Partie II : le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

On considère les points A, B et M d'affixes respectifs a, $b=ae^{\frac{i\pi}{3}}$ et z.

Soit R la rotation de centre M et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On pose : $A_1=R^{-1}(A)$ et $A_1=R^{1}(A)$

soient a_1 et b_1 les affixes respectifs de A_1 et B_1.

1) Vérifier que le triangle OAB est équilatéral.

2) a) Montrer que : $a_1=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ et $a_2=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

b) Montrer que le quadrilatère OA_1MB_1 est un parallélogramme..

Exercice 13 :

Les deux parties I et II sont indépendantes.

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

Partie I : On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E):\ z^2-4\left(1+\frac{2}{3}i\right)z+\frac{5}{3}+4i=0$

1) Vérifier que le nombre $z_1=1+\frac{2}{3}i$ est une solution de l'équation (E)

2) Montrer que la deuxième solution de l'équation (E) est $z_2=3z_1$

Partie II : On considère trois points deux à deux distincts A, B et Ω d'affixes respectifs a, b et ω

Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On pose : $P=R(A)$ et $B=R(Q)$

soient p et q les affixes respectifs de P et Q.

1) a) Montrer que : $p=\omega+e^{\frac{i\pi}{3}}(a-\omega)$ et $q=\omega+e^{\frac{-i\pi}{3}}(b-\omega)$.

b) Montrer que : $\dfrac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}=e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

c) Montrer que : $\dfrac{p-a}{q-b}=\left(\dfrac{\omega-a}{\omega-b}\right)e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

2) On suppose que : $\left(\dfrac{\omega-a}{\omega-b}\right)=e^{\frac{2i\pi}{3}}$

a) Montrer que est un $APQR$ parallélogramme.

b) Montrer que $\arg\left(\dfrac{b-a}{p-b}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$, en déduire que $APQR$ est un rectangle.

Exercice 13 :

Les deux parties I et II sont indépendantes.

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Partie I :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): iz^2 + (2-i)az - (1+i)a^2 = 0$, où a est un complexe non nul.

1) Déterminer z_1 et z_2 solutions de l'équation (E).

2) a) vérifier que : $z_1 z_2 = a^2(i-1)$.

b) Montrer que : ($z_1 z_2$ est un réel) $\Longleftrightarrow$ $\arg(a) = \frac{-3\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right]$

Partie II : Soit c un nombre complexe non nul et c un nombre complexe non nul.

1) On considère les points A, B, C, D et M d'affixes respectifs : 1, $(1+i)$, c, ic et z.

a) Montrer que : (A, D et M sont alignés) $\Longleftrightarrow$ $(ic+1)z + (ic-1)\bar{z} = 2ic$

b) Montrer que : $(AD) \perp (OM)$ $\Longleftrightarrow$ $(ic+1)z - (ic-1)\bar{z} = 0$

2) Soit h l'affixe du point H la projection orthogonale du point O sur la droite (AD)

a) Montrer que : $h - (1+i) = \frac{i}{c}(h-c)$

b) En déduire que : $(BH) \perp (CH)$

Exercice 14 :

Partie I : On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$

1) Montrer que le nombre $-2i$ est une solution de l'équation (E)

2) Déterminer les deux nombres complexes α et β tels que :

$(\forall z \in \mathbb{C}): \quad z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = (z+2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$

a) Déterminer les deux racines carrées du nombre complexe $(5-12i)$

b) Résoudre dans l'équation (E).

Partie II : le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points deux à deux A, B et C d'affixes respectifs $a = -1+3i$, $b = -2i$ et $c = 2+i$.

1) Montrer que ABC est un triangle rectangle et isocèle de sommet C

2) Soit R_1 la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et R_2 la rotation de centre A et d'angle $\frac{-2\pi}{3}$.

Soit M un point du plan d'affixe z On pose : $M_1 = R_1(M)$ et $M_2 = R_2(M)$

a) Vérifier que l'expression analytique de la rotation R_1 est : $z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z - \sqrt{3} - i$

b) Déterminer z_2 affixe de M_1 en fonction de z.

c) En déduire que I, milieu du segment $[M_1M_2]$ est un point fixe.

Exercice 15 :

Les deux parties I et II sont indépendantes.

Partie I : Soit m un nombre complexe non nul.

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E_m): \; z^2 + [(1-i)m - 4]z - im^2 - 2(1-i)m + 4 = 0$

1) Vérifier que $z_1 = 2 - m$ est une solution de l'équation (E_m).

2) Soit z_2 la deuxième solution de l équation (E_m).

a) Montrer que : ($z_1 z_2 = 1$ $\Longleftrightarrow$ $im^2 + 2(1-i) - 3 = 0$)

b) Déterminer la valeur de m tel que $z_1 z_2 = 1$

Partie II :

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application δ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d affixe z' tel que : $z' = -z + 2$.

Soit la rotation R de centre Ω d'affixe $\omega = 1 + i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et z'' l'affixe du point M'' image du point M par la rotation R.

1) a) Montrer que l'application δ est la symétrie centrale de centre le point K d'affixe 1.
   b) Montrer que $z'' = iz + 2$.
2) On suppose que le point M est distinct du point O, origine du repère et soit A le point d affixe 2.
   a) Calculer $\frac{z'' - 2}{z - 2}$, en déduire la nature du triangle $AM'M''$
   b) Déterminer l'ensemble des points M tels que les points A, Ω, et M'' soient cocycliques.

Exercice 16 :

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): z^2 - 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$
   a) Vérifier que le nombre $a = 1 + i(2 - \sqrt{3})$ est une solution de l'équation (E).
   b) En déduire b la deuxième solution de l'équation (E).
2) a) Montrer que $a^2 = 4(2 - \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$.
   b) Ecrire a sous forme trigonométrique.
3) On considère les points A, B et C d'affixes respectifs a, b et $c = 2i + 2e^{\frac{\pi}{7}}$.
   Soit le cercle (Γ) dont $[AB]$ est l'un de ses diamètres.
   a) Déterminer ω l'affixe du point Ω, centre du cercle (Γ)
   b) Montrer que O et C sont deux points du cercle (Γ).
   c) Montrer que le complexe $\frac{c - a}{c - b}$ est imaginaire pur.

Exercice 17 :

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) a) Déterminer les racines carrées du complexe $3 + 4i$
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): 4z^2 - 10iz - 7 - i = 0$
2) Soient a et b les deux solutions de l'équation (E) tel que $Re(a) = 0$ et soient les deux points A et B d'affixes respectifs a et b.
   a) Vérifier que : $\frac{b}{a} = 1 - i$
   b) En déduire que le triangle AOB est isocèle rectangle en A.
3) Soit C un point d'affixe c différent de A et D l'image du point B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$

   Soit K l'image du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$.
   a) Déterminer c en fonction du nombre complexe d affixe du point A.
   b) Déterminer en fonction de c le nombre complexe k affixe du point K.
   c) Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe $\frac{k - c}{a - c}$, en déduire la nature du triangle ACK.

Exercice 18 :

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soit u un nombre complexe différent de $(1-i)$

1) a) Développer $(iu-1-i)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $(E):\ z^2-2(u+1-i)z+2u^2-4i=0$

2) Soient les points $A\left((1+i)u-2i\right)$, $B\left((1-i)u+2\right)$, $U(u)$ et $\Omega(2-2i)$.

a) Déterminer k l'affixe du point K milieu du segment $[AB]$, puis déterminer le vecteur de la translation qui transforme U en K.

b) Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$. Montrer que : $R(A)=B$.

c) En déduire que les droites (ΩA) et (AB) sont perpendiculaires.

d) A partir du point U expliquer une méthode de construction des points A et B.

3) On pose $u=(1+i)a-2i$ tel que $a\in\mathbb{R}$.

a) Déterminer les affixes des vecteurs en $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AU}$ en fonction de a.

b) En déduire que les points A, B et U sont alignés.

Exercice 19 :

Soit m un nombre complexe différent de 1.

Partie I : On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z :

$$(E_m):\quad z^2-(1-i)(m+1)z-i(m^2+1)=0$$

1) a) Vérifier que $\Delta=\left[(1+i)(m-1)\right]^2$ est le discriminant de l'équation (E_m)

b) Résoudre l'équation (E_m).

c) Déterminer les deux valeurs de m sous forme algébrique pour que le produit des solutions de l'équation (E_m) soit égal à 1.

2) On pose $z_1=1-im$ et $z_2=m-i$.

Dans le cas $m=e^{i\theta}$ et $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$, écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

Partie II : le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

On considère les points M, M_1 et M_2 d'affixes respectifs m, $z_1=1-im$ et $z_2=m-i$.

1) Déterminer l'ensemble des points M tels les points M, M_1 et M_2 soient alignés.

2) a) Démontrer que la transformation R qui associe à tout point $M(z)$ le point $M'(z')$ tel que : $z'=1-iz$ est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

b) Démontrer que le nombre $\dfrac{z_2-z_1}{z_2-m}$ est imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(m)+\mathrm{Im}(m)=1$.

c) En déduire l'ensemble des points M tels que les points Ω, M, M_1 et M_2 sont cocycliques.

Exercice 20 :

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On considère l'application r qui à tout point $M(z)$ associe le point $M_1(z_1)$ tel que : $z_1=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z+\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$.

Et l'application h qui à tout point $M(z)$ associe le point $M_2(z_2)$ tel que : $z_2=2z+3i$. On pose : $F=hor$

1) Déterminer la nature de chacune des applications r et h.

2) On considère les points $\Omega(i)$ et $A(a)$ tel que a est un complexe donné différent de i.

On pose : $B=F(A)$, $C=F(B)$ et $D=F(C)$.

a) Montrer que si le point $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par l'application F alors $z'-i=2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z-i)$.

b) Vérifier que Ω est le seul point vérifiant $F(\Omega)=\Omega$

3) a) Déterminer en fonction du nombre complexe $\mathbf{a}$, les nombres complexes $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ et $\mathbf{d}$ affixes respectifs des points $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$.

b) Montrer que les points Ω, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$ sont alignés.

c) Montrer que le point Ω est le barycentre du système pondéré $\{(B,4);(C,2);(D,1)\}$

d) Déterminer l'ensemble des points $\mathbf{A(a)}$ pour que le point $\mathbf{D}$ appartienne à l'axe des réels (des abscisses).

Exercice 21 :

Soit $\mathbf{a}$ un nombre complexe non nul et $\overline{a}$ son conjugué.

Partie I : On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_a) d'inconnue $\mathbf{z}$

$$(E_a): \quad iz^2+(a+\overline{a}-i)z-\overline{a}-ia\overline{a}=0$$

1) a) Vérifier que $\Delta=(a-\overline{a}-i)^2$ est le discriminant de l'équation (E_a)

b) Résoudre l'équation (E_a).

2) Montrer que $\mathbf{a}$ est solution de l'équation (E_a) si et seulement si $\mathbf{Re(a)=Im(a)}$. :

Partie II : le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On suppose que $\mathbf{Re(a)=Im(a)}$

On considère les points $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ d'affixes respectifs $\mathbf{a}$, $i\overline{a}$ et $(1+ia)$.

1) On pose : $z=\dfrac{(1+ia)-a}{i\overline{a}-a}$.

a) Vérifier que : $\overline{z}=\dfrac{(i-1)\overline{a}-i}{i\overline{a}-a}$

b) Montrer que les points $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ sont alignés si et seulement si $\mathbf{Im(a)}=\dfrac{1}{2}$

2) On suppose dans cette question que $\mathbf{Im(a)}\neq\dfrac{1}{2}$.

Soit R_1 la rotation de centre $\mathbf{A}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et R_2 la rotation de centre $\mathbf{A}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

On pose : $R_1(B)=B'$ et $\quad = \quad$. Soit $\mathbf{E}$ le milieu de $[BC]$.

a) Déterminer b' et c' les affixes respectifs des points B' et .

b) Montrer que les droites (AE) et $(B'C')$ et que $B'C'=2AE$.

Exercice 22 :

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère l'ensemble $(H)=\left\{M(z)\in(P)\ /\ z^2+\overline{z}^2-|z|^2=1\right\}$

1) a) Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble (H).

b) Montrer que (H) est une hyperbole et déterminer son centre, ses sommets et ses asymptotes dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

c) Construire (H).

2) $M(a)$ et $M(b)$ sont deux points de (H). On pose $\varphi(a,b)=a\overline{b}+\overline{a}b-\overline{ab}$

a) Montrer que $M(\varphi(a,b))\in(H)$

b) Montrer que $\varphi(a,1)=1$ et que $\varphi(a,\overline{a})=1$

3) L'ensemble est muni de la loi de composition interne $(*)$ telle que pour tout $M(a)$ et $M(b)$ de (H) : $M(a)*M(a)=M(\varphi(a,b))$. Montrer que $((H),*)$ est un groupe commutatif.

Exercice 22 :

Soit $\mathbf{a}$ un nombre complexe non nul.

Partie I :

1) a) Vérifier que le nombre $\mathbf{u = a + i}$ est une solution de l'équation :

$$\mathbf{(E)\ :\ z^2 - (1+a)(1+i)z + (1+a^2)i = 0}$$

b) Déterminer $\mathbf{v}$ la deuxième solution de l'équation $\mathbf{(E)}$.

2) On suppose que $|\mathbf{a}| = \mathbf{1}$.

a) Montrer que : $\dfrac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}$.

b) Vérifier que : $\mathbf{u^2 = a\left[(a - \bar{a}) + 2i\right]}$

c) En déduire que : $\mathbf{\arg(u) = \arg(a) + \frac{\pi}{4}[\pi]}$

3) Montrer que : $|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \geq \mathbf{2}$

Partie II : le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\mathbf{O}, \vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2\right)$.

Soit $\mathbf{m}$ un nombre réel strictement plus grand que $\mathbf{2}$. $(\mathbf{E_m})$ est l'ensemble des points $\mathbf{M(a)}$ du plan complexe tel que : $|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| = \mathbf{m}$

1) Montrer que l'ensemble est ellipse de centre $\mathbf{O}$ origine du repère.

2) On pose : $\mathbf{a = x + iy}$ où $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont deux nombres réels.

a) Montrer que l'équation cartésienne de l'ellipse $(\mathbf{E_m})$ est : $\mathbf{x^2 + \left(1 - \frac{4}{m^2}\right)y^2 = \frac{m^2}{4} - 1}$

b) Construire l'ellipse $(\mathbf{E_4})$.

c) Soient les points $\mathbf{A\left(\sqrt{3}\right)}$ et $\mathbf{B(2i)}$ sommets de l'ellipse $(\mathbf{E_4})$. Montrer que la droite $(\mathbf{AB})$ est tangente à l'ellipse $\left(\mathbf{E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}}\right)$.