Dénombrement

➢ Cardinal d'un ensemble :

Soit E un ensemble fini
Le **cardinal** de E est le nombre d'éléments de E, on le note $\boldsymbol{card\ E}$

Soit A et B deux parties d'un ensemble fini
$Card\left(A\cup B\right)=CardA+CardB-Card\left(A\cap B\right)$

➢ Principe fondamental du dénombrement :

Soit une expérience peut être réalisée en p choix $\left(p\in\mathbb{N}^*\right)$

Si le premier choix peut être réalisé en n_1 façons différentes

et le second choix peut être réalisé en n_2 façons différentes

.
.
.

et le p-ème choix peut être réalisé en n_p façons différentes

alors le nombre façons différentes de réaliser cette expérience
est ***le produit :*** $n_1\times n_2\times n_3\times\ldots\times n_p$

➢ Les nombres : $n!$, A_n^p et C_n^p

$n!=n\times\left(n-1\right)\times\left(n-2\right)\times\ldots\times2\times1$	
$A_n^p=\dfrac{n!}{\left(n-p\right)!}$	$C_n^p=\dfrac{n!}{p!\left(n-p\right)!}$
$C_n^{p-1}+C_n^p=C_{n+1}^p$	$C_n^p=C_n^{n-p}$
$C_n^n=1$	$C_n^{n-1}=n$

➢ Types de tirages :

On tire $\boldsymbol{p}$ objets parmi $\boldsymbol{n}$ objets

Type de tirage:	Nombre de tirages possible est :	L'ordre :
simultané	$C_n^p \quad \left(p\le n\right)$	n'a pas d'importance
Successif avec remise	n^p	est important
Successif sans remise	$A_n^p \quad \left(p\le n\right)$	est important

Probabilités

Probabilités d'un ensemble fini:

La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent, on la note $p(A)$

Propriétés :

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire

L'événement:	Probabilités:
A	$0 \leq p(A) \leq 1$
$\overline{A}$	$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
$A \cup B$	$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
	$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ (si A et B sont incompatibles)

S'il y a **équiprobabilité** alors pour tout événement A de Ω, on a :

$$p(A) = \frac{cardA}{card\,\Omega} = \frac{nombre\ des\ cas\ favorables}{nombre\ des\ cas\ possibles}$$

Loi d'une variable de probabilité aléatoire:

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire

Pour définir la loi de probabilité de la variable X sur Ω on suit les étapes suivantes :

1) On détermine $X(\Omega) = \{x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X

2) On calcule pour chaque valeur x_i sa probabilité $p_i = p(X = x_i)$ avec $i \in \{1; 2; \ldots; n\}$

3) On résume la loi de probabilité de la variable X par le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Probabilité conditionnelle :

Soit A et B deux événements liés à une même expérience aléatoire tel que: $p(A) \neq 0$

La probabilité de l'événement B sachant que A est réalisé est le nombre :

$$p_A(B) = p\left(B/A\right) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Evénements indépendants :

Soit A et B deux événements liés à une même expérience aléatoire

A et B **sont indépendants** $\Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

L'espérance, la variance et l'écart - type d'une variable aléatoire:

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est définie par le tableau suivant:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$p\left(X = x_i\right)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

L'espérance mathématique de la variable X	$E\left(X\right) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + x_3 \times p_3 + ... + x_n \times p_n$
La variance de la variable X	$V\left(X\right) = E\left(X^2\right) - \left[E\left(X\right)\right]^2$
L'écart -type de la variable X	$\sigma\left(X\right) = \sqrt{V\left(X\right)}$

Epreuve répétée :

Soit p la probabilité d'un événement A, lors d'une expérience aléatoire

si on répète n fois l'épreuve dans des conditions identiques

alors la probabilité de réalisation de A exactement k fois durant les n épreuves est :

$$C_n^k \left(p\right)^k \left(1 - p\right)^{n-k} \qquad \left(k \leq n\right)$$

Loi binomiale :

Soit p la probabilité d'un événement A, lors d'une expérience aléatoire

on répète n fois l'épreuve dans des conditions identiques

si la variable aléatoire X, égale au nombre de réalisation de A durant les n épreuves

alors la loi de probabilité de la variable X est donnée par :

$$\forall k \in \left\{0;1;2;...;n\right\} \qquad p\left(X = k\right) = C_n^k \times p^k \times \left(1 - p\right)^{n-k}$$

On dit que la variable X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p et on a

$$E\left(X\right) = n \times p \quad \text{et} \quad V\left(X\right) = np\left(1 - p\right)$$