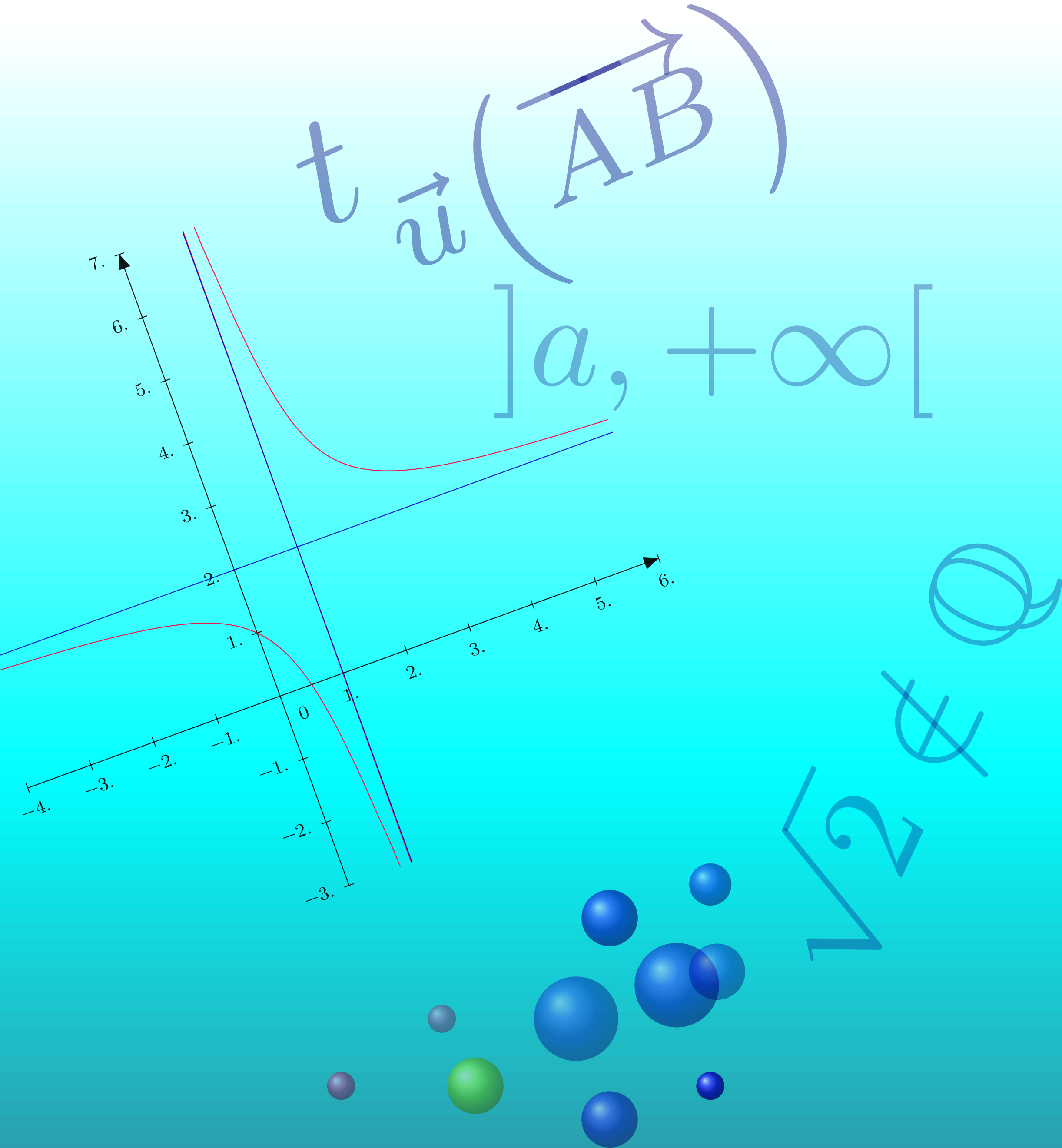
الأستاذ :احمذ اوبها اعلى

تصحيح الامتحان الوطني 2019 الدورة العادية

الثانية باك علوم رياضية



مادة الرياضيات

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2019
- الموضوع -

الصفحة	1 / 5

NS24

المادة	الرياضيات	مدة الانجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية : (أ) و (ب)	المعامل	9

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين 1 يتعلق بالبنيات الجبرية............................(3.5 ن)
- التمرين 2 يتعلق بالأعداد العقدية............................(3.5 ن)
- التمرين 3 يتعلق بالحسابيات..................................(3 ن)
- التمرين 4 يتعلق بالتحليل......................................(10 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

SM

التمرين 1: (3.5 نقطة)

نذكر أن $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي وأن $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية، صفرها المصفوفة المنعدمة $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

و وحدتها المصفوفة $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. ليكن $*$ قانون التركيب الداخلي المعرف في $\mathbb{C}$ بما يلي:

$$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)\ (\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2)\quad;\quad (x+yi)*(a+bi)=xa+(x^2b+a^2y)i$$

0.25 | 1- أ) بين أن القانون $*$ تبادلي في $\mathbb{C}$

0.5 | ب) بين أن القانون $*$ تجميعي في $\mathbb{C}$

0.25 | ج) بين أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا e يتم تحديده.

0.25 | د) ليكن $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$. بين أن العدد العقدي $x+yi$ يقبل العدد العقدي $\frac{1}{x}-\frac{y}{x^4}i$ مماثلا له بالنسبة للقانون $*$

2- نعتبر المجموعة الجزئية E للمجموعة $\mathbb{C}$ المعرفة بما يلي: $E=\{x+yi\,/\,x\in\mathbb{R}_+^*\ ;\ y\in\mathbb{R}\}$

0.25 | أ) بين أن E مستقر بالنسبة للقانون $*$ في $\mathbb{C}$

0.5 | ب) بين أن $(E,*)$ زمرة تبادلية.

3- نعتبر المجموعة الجزئية G للمجموعة E المعرفة بما يلي : $G=\{1+yi\,/\,y\in\mathbb{R}\}$

0.5 | بين أن G زمرة جزئية للزمرة $(E,*)$

4- نعتبر المجموعة $F=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}/\,x\in\mathbb{R}_+^*\ ;\ y\in\mathbb{R}\right\}$

0.25 | أ) بين أن F مستقر بالنسبة للقانون $\times$ في $M_2(\mathbb{R})$

0.5 | ب) ليكن φ التطبيق من E نحو F الذي يربط كل عدد عقدي $x+yi$ من E بالمصفوفة $M(x^2,y)=\begin{pmatrix}x^2&y\\0&x^2\end{pmatrix}$ من F . بين أن φ تشاكل تقابلي من $(E,*)$ نحو $(F,\times)$

0.25 | ج) استنتج أن $(F,\times)$ زمرة تبادلية.

التمرين 2: (3.5 نقطة)

ليكن m عددا **عقديا غير حقيقي** ($m\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$)

I- نعتبر في $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z المعرفة بما يلي: $(E)\ :\ z^2-(1+i)(1+m)z+2im=0$

0.25 | 1- أ) بين أن مميز المعادلة (E) غير منعدم.

0.5 ب) حدد z_1 و z_2 ، حلي المعادلة (E)

2- نفترض في هذا السؤال أن $m = e^{i\theta}$ حيث $0 < \theta < \pi$

0.5 أ) حدد معيار و عمدة للعدد $z_1 + z_2$

0.25 ب) بين أنه إذا كان $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ فإن $z_1 + z_2 = 2i$

II- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط التالية:

A النقطة ذات اللحق $a = 1+i$ ، B النقطة ذات اللحق $b = (1+i)m$ ، C النقطة ذات اللحق $c = 1-i$ ،

D صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و Ω منتصف القطعة $[CD]$.

0.5 1- أ) بين أن لحق النقطة Ω هو $\omega = \dfrac{(1-i)(1-m)}{2}$

0.25 ب) احسب $\dfrac{b-a}{\omega}$

0.5 ج) استنتج أن $(O\Omega) \perp (AB)$ و أن $AB = 2O\Omega$

2- المستقيم $(O\Omega)$ يقطع المستقيم (AB) في النقطة H ذات اللحق h

0.5 أ) بين أن $\dfrac{h-a}{b-a}$ عدد حقيقي وأن $\dfrac{h}{b-a}$ عدد تخيلي صرف .

0.25 ب) استنتج h بدلالة m

<u>التمرين 3</u>: (3 نقط)

نقبل أن 2969 (السنة الأمازيغية الحالية)**عدد أولي**.

ليكن n و m عددين صحيحين طبيعيين بحيث: $n^8 + m^8 \equiv 0 \quad [2969]$

1- نفترض في هذا السؤال أن **2969 لا يقسم** n

0.5 أ) باستعمال مبرهنة بوزو (BEZOUT)، بين أن: $(\exists u \in \mathbb{Z});\ u \times n \equiv 1 \ [2969]$

0.5 ب) استنتج أن: $(u \times m)^8 \equiv -1 \ [2969]$ و أن: $(u \times m)^{2968} \equiv -1 \ [2969]$ (لاحظ أن: $2968 = 8 \times 371$)

0.5 ج) بين أن 2969 لا يقسم $u \times m$

0.5 د) استنتج أنه لدينا أيضا: $(u \times m)^{2968} \equiv 1 \ [2969]$

0.5 2- أ) باستعمال النتائج السابقة، بين أن **2969 يقسم** n

0.5 ب) بين أن: $n^8 + m^8 \equiv 0 \ [2969] \ \Leftrightarrow \ n \equiv 0 \ [2969]$ و $m \equiv 0 \ [2969]$

الصفحة 4/5	NS24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2019 – الموضوع - مادة: الرياضيات – شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)	

التمرين 4 :(10 نقط)

الجزء I : نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=4x\left(e^{-x}+\frac{1}{2}x-1\right)$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$	0.5
2- أ) بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، و أن: $f'(x)=4\left(e^{-x}-1\right)\left(1-\ \ x\right)\quad;\quad(\forall x\in\mathbb{R})$	0.5
ب) ادرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم ضع جدول تغيراتها .	0.75
ج) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α في المجال $\left]\frac{3}{2},2\right[$ بحيث: $f(\alpha)=0$ (نأخذ: $e^{\frac{3}{2}}=4{,}5$)	0.5
د) تحقق أن: $e^{-\alpha}=1-\frac{\alpha}{2}$	0.25
3- أ) بتطبيق مبرهنة رول على الدالة f' ، بين أنه يوجد عدد حقيقي x_0 من المجال $]0,1[$ بحيث : $f''(x_0)=0$	0.5
ب) بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة f'' ، بين أنه، لكل عدد حقيقي x يخالف x_0 من المجال $[0,1]$ ، لدينا: $\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$	0.5
ج) استنتج أن $I\left(x_0,f(x_0)\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C)	0.25
4- أ) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C)	0.5
ب) مثل مبيانيا المنحنى (C) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ : $\lVert\vec{i}\rVert=\lVert\vec{j}\rVert=1cm$ و $f(1)=-0.5$ و غير مطلوب إنشاء النقطة I)	0.5
5- أ) تحقق أن: $f(x)\le 0\quad;\quad(\forall x\in]-\infty,\alpha])$	0.25
ب) بين أن: $\int_0^{\alpha}f(x)\,dx=\dfrac{2\alpha\left(\alpha^2-3\right)}{3}$ ، ثم استنتج أن : $\frac{3}{2}<\alpha\le\sqrt{3}$	0.75
ج) أحسب، بدلالة α و بوحدة cm^2 ، مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) و المستقيمات التي معادلاتها على التوالي: $y=0$ و $x=0$ و $x=\alpha$	0.5

الجزء II: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي:

$$u_0<\alpha \quad \text{و} \quad u_{n+1}=f(u_n)+u_n\quad;\quad(\forall n\in\mathbb{N})$$

1-أ) بين بالترجع أن: $u_n < \alpha \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ (استعمل السؤال 5-أ) من الجزء I)	0.5
ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية.	0.25
2- **نفترض أن** $0 \le u_0$ و نضع: $g(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \quad ; \quad (\forall x \in \mathbb{R})$	
أ) بين أن: $g(x) > 0 \quad ; \quad (\forall x \in \mathbb{R})$ (نأخذ: $\ln 2 = 0.69$)	0.5
ب) باستعمال نتيجة السؤال السابق، بين أن: $0 \le u_n \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N})$	
(لاحظ أن: $f(x) + x = 4xg(x)$)	0.5
ج) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.	0.25
د) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	0.5
3- **نفترض أن** $u_0 < 0$	
أ) بين أن: $u_{n+1} - u_n \le f(u_0) \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N})$	0.5
ب) بين أن: $u_n \le u_0 + nf(u_0) \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N})$	0.5
ج) استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	0.25

انتهى

تصحيح الامتحان الوطني العلوم الرياضية 2019 الدورة العادية

تصحيح التمرين 1

1

أ. ليكن $x,y,a,b\in\mathbb{R}$

لدينا
$$\begin{aligned}(a+bi)*(x+yi)&=ax+\left(a^2y+x^2b\right)i\\&=xa+\left(x^2b+a^2y\right)i\\&=(x+yi)*(a+bi)\end{aligned}$$

ومنه القانون $*$ تبادلي في $\mathbb{C}$

ب. ليكن $x,y,a,b,u,v\in\mathbb{R}$

من جهة

$$\begin{aligned}\left[(a+bi)*(x+yi)\right]*(u+vi)&=\left[ax+\left(a^2y+x^2b\right]i\right)*(u+wi)\\&=axu+\left[a^2x^2v+u^2\left(a^2y+x^2b\right)\right]i\\&=axu+\left(a^2x^2v+u^2a^2y+u^2x^2b\right)i\end{aligned}$$

من جهة اخرى

$$\begin{aligned}(a+bi)*\left[(x+yi)*(u+vi)\right]&=(a+bi)*\left[xu+\left(x^2v+u^2y\right)i\right]\\&=axu+\left(a^2x^2v+a^2u^2y+x^2u^2b\right)i\end{aligned}$$

اذن القانون $*$ تجميعي في $\mathbb{C}$

ج. ليكن $z=x+iy$ و $e=a+ib$ بحيث القانون $*$ تبادلي في $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}z*e=z\quad&\Leftrightarrow\quad xa+(x^2b+a^2y)i=x+iy\\&\Leftrightarrow\quad xa=x \text{ و } x^2b+a^2y=y\\&\Rightarrow\quad a=1 \text{ و } b=0\end{aligned}$$

ومنه 1 هو العنصرالمحايد بالنسبة ل القانون $*$ في $\mathbb{C}$

د. ليكن $x,y\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(x+yi)*\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{x^4}i\right)&=x\times\frac{1}{x}+\left(x^2\left(\frac{-y}{x^4}\right)+\left(\frac{1}{x}\right)^2y\right)i\\&=1+\left(-\frac{y}{x^2}+\frac{y}{x^2}\right)i\\&=1\end{aligned}$$

بما أن القانون $*$ تبادلي في $\mathbb{C}$ فإن $\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{x^4}i\right)$ هو مماثل ل $(x+yi)$

2

$$E=\{x+yi/x\in\mathbb{R}_+^{\star};y\in\mathbb{R}\}$$

أ. لدينا $E \subset \mathbb{C}$ و $1 \in E$ إذن $E \neq \varnothing$

ليكن $z_1, z_2 \in E$ حيث $z_1 = x + yi$; $z_2 = a + bi$ et $x, a \in \mathbb{R}_+^\star$ et $y, b \in \mathbb{R}$

لدينا
$$\begin{aligned} z_1 * z_2 &= (x+yi) * (a+bi) \\ &= xa + \left(x^2 b + a^2 y\right) i \end{aligned}$$

بما أن $xa \in \mathbb{R}_+^\star$ و $\left(x^2 b + a^2 y\right) \in \mathbb{R}$ فإن $z_1 * z_2 \in E$ اي E جزء مستقر بالقانون $*$ في $\mathbb{C}$

ب. لدينا E جزء مستقر من $(\mathbb{C}, *)$

- بما أن $*$ تبادلي و تجميعي في $\mathbb{C}$ اذن $*$ تبادلي و تجميعي في E
- $e = 1 \in E$ العنصر المحايد بالنسبة ل $*$
- كل عنصر $x + yi$ من E يقبل مماثلا $\left(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^4} i\right)$ من E $\quad \left(\frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^\star\right)$

إذن $(E, *)$ زمرة تبادلية

3 $G = \{1 + yi / y \in \mathbb{R}\}$ لنبين أن G زمرة جزئية ل $(E, *)$

- $e = 1 \in G$ اذن $G \neq \varnothing$
- ليكن $z = 1 + yi$ و $z' = 1 + y'i$ من G

$$z * \left(\frac{1}{1} - \frac{y'}{1^4} i\right) = (1 + iy) * \left(1 - y'i\right) = 1 + \left(-y' + y\right) i \in G$$

إذن $(G, *)$ زمرة جزئية ل $(E, *)$

4 $F = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R}_+^\star ; y \in \mathbb{R} \right\}$

أ. لنبين أن F مستقرة بالنسبة للقانون $\times$ في $M_2(\mathbb{R})$

- لدينا $I = M(1, 0) \in F$ اذن $F \neq \varnothing$
- ليكن $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ عنصرين من F

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xa & xb + ya \\ 0 & xa \end{pmatrix} \\ &= M(xa, xb + ya) \in F \end{aligned}$$

لان $xa \in \mathbb{R}_+^\star$ و $xb + ya \in \mathbb{R}$ اذن F جزء مستقرمن $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

ب. لنبين أن φ تشاكل تقابلي من $(E, *)$ نحو $(F, \times)$

ليكن $z = x + yi, z' = a + bi$ من E حيث $x, a \in \mathbb{R}_+^\star$ و $y, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi\left(z \star z'\right) &= \varphi\left(xa + \left(x^2 b + a^2 y\right) i\right) \\ &= M\left((xa)^2, x^2 b + a^2 y\right) \\ &= M\left(x^2, y\right) \times M\left(a^2, b\right) \\ &= \varphi(z) \times \varphi\left(z'\right) \end{aligned}$$

ومنه φ تشاكل من $(E, *)$ نحو $(F, \times)$

ليكن $M(a, b)$ من F

$$\begin{aligned}\varphi(z)=M(a,b) &\Leftrightarrow M\left(x^2,y\right)==M(a,b)\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2 & y\\ 0 & x^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow x^2=a \text{ et } y=b\\ &\Leftrightarrow x=\sqrt{a} \text{ et } y=b \text{ car } x,a\in\mathbb{R}_+^\star\\ &\Leftrightarrow z=\sqrt{a}+bi\end{aligned}$$

اذن φ تشاكل تقابلي من $(E,*)$ نحو $(F,\times)$

ج. لدينا φ تشاكل من $(E,*)$ نحو $(F,\times)$

بما أن $(E,*)$ زمرة تبادلية فإن $(\varphi(E),\times)$ زمرة تبادلية

φ تقابل إذن شمولي أي $\varphi(E)=F$

و بالتالي $(F,\times)$ زمرة تبادلية

تصحيح التمرين 2

الجزء الاول

1

$$(E): z^2-(1+i)(1+m)z+2im=0$$

ا.

لدينا

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &=(1+i)^2(1+m)^2-8im\\ &=2i(1+m)^2-8im\\ &=2i(1+m^2+2m-4m)\\ &=2i(m-1)^2\\ &=[(1+i)(m-1)]^2\end{aligned}$$

لدينا $m\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ ومنه $m\neq 1$ أي $m-1\neq 0$ إذن $\Delta\neq 0$

ب. لدينا $\Delta=[(1+i)(m-1)]^2$ و بالتالي

$$z_1=\frac{(1+i)(m+1)+(1+i)(m-1)}{2}\quad =m(1+i)$$

$$z_2=\frac{(1+i)(m+1)-(1+i)(m-1)}{2}\quad =1+i$$

2 ا.

$$\begin{aligned}z_1+z_2 &= m(1+i)+(1+i)\\ &=(m+1)(1+i)\\ &=\left(1+e^{i\theta}\right)(1+i)\\ &=e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)\times\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\\ &=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\end{aligned}$$

لدينا $0<\theta<\pi \Leftrightarrow 0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)>0$

ومنه $|z_1+z_2|=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ و $\arg(z_1+z_2)\equiv\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\,[2\pi]$

ب. لدينا $z_1\times z_2=m(1+i)(1+i)=2im$

$$z_1\times z_2\in\mathbb{R}\Rightarrow m\in i\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2} \qquad (0<\theta<\pi)$$

$$\Rightarrow |z_1+z_2|=2 \quad \text{و} \quad \arg(z_1+z_2)\equiv\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$$

$$\Rightarrow z_1\times z_2=2e^{i\frac{\pi}{2}}=2i$$

الجزء الثاني

1 ا. لنبين أن $\omega=\frac{(1-i)(1-m)}{2}$

D صورة B بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$ اي

$$R(B)=D\Leftrightarrow d=e^{i\frac{\pi}{2}}d=i(1+i)m=(i-1)m$$

Ω وسط القطعة $[CD]$ إذن $\omega=\frac{c+d}{2}$ و بالتالي

$$\omega=\frac{c+d}{2}=\frac{(1-i)+m(i-1)}{2}=\frac{(1-i)(1-m)}{2}$$

ب. لنحسب $\frac{b-a}{\omega}$

$$\frac{b-a}{\omega}=\frac{(1+i)m-(1+i)}{\frac{(1-i)(1-m)}{2}}$$
$$=\frac{2(1+i)(m-1)}{(1-i)(1-m)}$$
$$=-\frac{2(1+i)}{1-i}$$
$$=-2i$$

إذن

$$\frac{b-a}{\omega}=-2i$$

ج. لدينا $\frac{b-a}{\omega}=-2i$

$$\frac{b-a}{\omega}=-2i\Rightarrow\begin{cases}\arg\left(\frac{b-a}{\omega-0}\right)=-\frac{\pi}{2}\\ \left|\frac{b-a}{\omega-0}\right|=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(AB)\perp(O\Omega)\\ AB=2O\Omega\end{cases}$$

2 ا. لنبين أن $\frac{h-a}{b-a}\in\mathbb{R}$ وأن $\frac{h}{b-a}\in i\mathbb{R}^{\star}$

لدينا المستقيم $(O\Omega)$ يقطع (AB) في H اي $H\in(AB)$ (A و B و H نقط مستقيمية) ومنه $\frac{h-a}{b-a}\in\mathbb{R}$

- $H \in (O\Omega)$ و $(AB) \perp (O\Omega)$ إذن $(AB) \perp (OH)$ أي $\dfrac{h}{b-a} \in i\mathbb{R}^\star$

ب. لدينا

$$\frac{h-a}{b-a} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{h-a}{b-a}\right)} = \frac{h-a}{b-a}$$

و

$$\frac{h}{b-a} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{h}{b-a}\right)} = -\frac{h}{b-a}$$

ومنه

$$\frac{h-a}{b-a} = \overline{\left(\frac{h-a}{b-a}\right)} = \overline{\left(\frac{h}{b-a}\right)} - \frac{\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}} = -\frac{h}{b-a} + \frac{\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}$$

و بالتالي

$$\frac{h-a}{b-a} + \frac{h}{b-a} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}} \Leftrightarrow \frac{2h}{b-a} = \frac{a}{b-a} + \frac{\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b-a} + \frac{\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}\right)(b-a)$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{\overline{m}-1}\right)(b-a)$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{\overline{m}-1}\right)(1+i)(m-1)$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m-1}{\overline{m}-1}\right)(1+i)$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{(1+i)(\overline{m}-m)}{2(\overline{m}-1)}$$

ومنه

$$h = \frac{(1+i)(\overline{m}-m)}{2(\overline{m}-1)}$$

تصحيح التمرين 3

1 ا. لنبين أن $(\exists u \in \mathbb{Z}); u \times n \equiv 1[2969]$

حسب مبرهنة بوزو $\left(\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2\right); nu + 2969v = 1$ ومنه $nu = 1 - 2969v$ إذن $u \times n \equiv 1[2969]$

و بالتالي $(\exists u \in \mathbb{Z}); u \times n \equiv 1[2969]$

ب. لنبين أن $(u \times m)^8 \equiv -1[2969]$ و أن $(u \times m)^{2968} \equiv -1[2969]$

$$\begin{aligned} n^8 + m^8 \equiv 0[2969] &\Rightarrow m^8 \equiv -n^8[2969] \\ &\Rightarrow (u \times m)^8 \equiv -(u \times n)^8[2969] \\ &\Rightarrow (u \times m)^8 \equiv -1[2969] \end{aligned}$$

لدينا $2968 = 8 \times 371$ و منه فإن $(u \times m)^{8\times 371} \equiv (-1)^{\times 371}[2969] \equiv -1[2969]$

اذن $(u \times n)^{2968} \equiv -1[2969]$

ج. لنبين أن 2969 لا يقسم $u \times m$

نفترض أن 2969 يقسم $u \times m$ اي $u \times m \equiv 0[2969] \Rightarrow (u \times m)^8 \equiv 0[2969]$

وهذا تناقض كون $(u \times m)^8 \equiv -1[2969]$

ومنه 2969 لا يقسم $u \times m$

د. لنستنتج أن $(u \times m)^{2968} \equiv 1[2969]$

بما أن 2969 لا يقسم $u \times m$ و حسب مبرهنة فيرما لدينا $(u \times m)^{2969-1} \equiv 1[2969]$

وبالتالي $(u \times m)^{2968} \equiv 1[2969]$

2 ا. لنبين أن 2969 يقسم n

نفترض أن 2969 لا يقسم n

حسب السؤال 1 -ب و 1 -ج فإن

$$\begin{cases} (u \times n)^{2968} \equiv -1[2969] \\ (u \times m)^{2968} \equiv 1[2969] \end{cases} \Rightarrow 1 \equiv -1[2969]$$

وهذا تناقض اي أن 2969 يقسم n

ب. لنبين أن $m \equiv 0[2969]$ و $n \equiv 0[2969] \Leftrightarrow n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$

- لنبين أن
$n \equiv 0[2969]$ و $m \equiv 0[2969] \Rightarrow n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$

$n \equiv 0[2969]$ و $m \equiv 0[2969] \Rightarrow n^8 \equiv 0[2969]$ و $m^8 \equiv 0[2969]$

$$\Rightarrow n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$$

- لنبين أن $n^8 + m^8 \equiv 0[2969] \Rightarrow n \equiv 0[2969]$ و $m \equiv 0[2969]$

$n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$ و 2969 يقسم $n \Rightarrow \begin{cases} n^8 + m^8 \equiv 0[2969] \\ n \equiv 0[2969] \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} n^8 + m^8 \equiv 0[2969] \\ n^8 \equiv 0[2969] \\ n \equiv 0[2969] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^8 \equiv 0[2969] \\ n \equiv 0[2969] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \equiv 0[2969] \quad (\text{لان 2696عدد اولي}) \\ n \equiv 0[2969] \end{cases}$$

اذن $m \equiv 0[2969]$ و $n \equiv 0[2969] \Leftrightarrow n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$

✍ تصحيح التمرين 4 ✍

الجزء الاول

$$f(x)=4x\left(\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}x-1\right)$$

1 لنحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

- (نضع $x=-t$) ; $f(x)=4x\left(\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}x-1\right)=-4t\left(\mathrm{e}^{t}-\frac{1}{2}t-1\right)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}-4t\left(\mathrm{e}^{t}-\frac{1}{2}t-1\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}-4t^2\left(\frac{\mathrm{e}^{t}}{t}-\frac{1}{2}-\frac{1}{t}\right)=-\infty$ (لان $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{t}}{t}=+\infty$)
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{t\to-\infty}-4t\left(\mathrm{e}^{t}-\frac{1}{2}t-1\right)=+\infty$ (لان $\lim\limits_{t\to-\infty}\mathrm{e}^{t}=0$)

2 ا. لدينا $x\longmapsto\frac{1}{2}x-1$ و $x\longmapsto\mathrm{e}^{-x}$ دلتان قابلتان لاشتقاق على $\mathbb{R}$

اي $x\longmapsto\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}x-1$ قابلة لاشتقاق على $\mathbb{R}$ بما أن $x\longmapsto 4x$ قابلة لاشتقاق على $\mathbb{R}$

فإن $x\longmapsto 4x\left(\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}x-1\right)$ قابلة لاشتقاق على $\mathbb{R}$

ولدينا

$$\begin{aligned}(\forall x\in\mathbb{R});f'(x)&=\left(4x\left(\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}x-1\right)\right)'\\&=(4x)'\left(\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}x-1\right)+4x\left(\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}x-1\right)'\\&=4\left(\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}x-1\right)+4x\left(-\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}\right)\\&=4\mathrm{e}^{-x}+4\times\frac{1}{2}x-4-4x\mathrm{e}^{-x}+4x\times\frac{1}{2}\\&=4\mathrm{e}^{-x}+4x-4-4x\mathrm{e}^{-x}+2x\\&=4\mathrm{e}^{-x}(1-x)-4x\mathrm{e}^{-x}\\&=4\mathrm{e}^{-x}(1-x)-4(1-x)\\&=4(1-x)\left(\mathrm{e}^{-x}-1\right)\end{aligned}$$

إذن $\forall x\in\mathbb{R} f'(x)=4\left(\mathrm{e}^{-x}-1\right)(1-x)$

ب. دراسة تغيرات الدالة f

لدينا $\forall x\in\mathbb{R} f'(x)=4\left(\mathrm{e}^{-x}-1\right)(1-x)$

اشارة $f'(x)$ هي اشارة $\left(e^{-x}-1\right)(1-x)$

$$\mathrm{e}^{-x}-1\geq0\Leftrightarrow\mathrm{e}^{-x}\geq1\Leftrightarrow -x\geq\ln 1\Leftrightarrow -x\geq0\Leftrightarrow x\leq0$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\mathrm{e}^{-x}-1$		$+$	0	$-$		$-$	
$\left(e^{-x}-1\right)(1-x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

جدول التغيرات

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f	$-\infty \nearrow$	0 $\searrow$	$\frac{4}{e}-2$ $\nearrow$	$+\infty$

ج. لنبين أن $\exists!\alpha \in \left]\frac{3}{2},2\right[\,;\,/\,f(\alpha)=0$

لدينا f قابلة لاشتقاق على $\mathbb{R}$ اذن f متصلة على $\left[\frac{3}{2},2\right]$

و f تزايدية قطعا على $\left[\frac{3}{2},2\right]$ اي f تقابل من $\left]\frac{3}{2},2\right[$ نحو $f\left(\left]\frac{3}{2},2\right[\right)$

$$f\left(\left]\frac{3}{2},2\right[\right)=\left]3.\frac{4-e^{\frac{3}{2}}}{2e^{\frac{3}{2}}},\frac{8}{e^2}\right[$$

لدينا $\frac{8}{e^2}>0$ و $3.\frac{4-e^{\frac{3}{2}}}{2e^{\frac{3}{2}}}<0$ اي $0\in f\left(\left]\frac{3}{2},2\right[\right)$

و بالتالي

$$\exists!\alpha \in \left]\frac{3}{2},2\right[\,;\,/\,f(\alpha)=0$$

د. لنبين أن $\mathrm{e}^{-\alpha}=1-\frac{\alpha}{2}$

$$\begin{aligned}
f(\alpha)=0 &\Leftrightarrow 4\alpha\left(\mathrm{e}^{-\alpha}+\frac{1}{2}\alpha-1\right)=0\\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\alpha}+\frac{1}{2}\alpha-1=0 \qquad (\text{لان } \alpha>0)\\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\alpha}=1-\frac{1}{2}\alpha
\end{aligned}$$

3 ا.
- f' متصلة على $[0,1]$ 　(جداء دالتين متصلتين على $[0,1]$)
- f' قابلة لاشتقاق على $[0,1]$ 　(جداء دالتين قابلتين لاشتقاق على $[0,1]$)
- $f'(0)=0$ و $f'(1)=0$

حسب مبرهنة رول يوجد x_0 من $]0,1[$ بحيث $f''(x_0)=0$

ب. ليكن I مجال مغلق طرفاه x و x_0 　$(x\in[0,1])$ و J مجال مفتوح طرفاه x و x_0

$$\begin{aligned}
\forall x\in\mathbb{R}, f''(x) &= \left(4\left(\mathrm{e}^{-x}-1\right)(1-x)\right)'\\
&= \left(4\left(\mathrm{e}^{-x}-1\right)\right)'(1-x)+4\left(\mathrm{e}^{-x}-1\right)(1-x)'\\
&= \left(-4\mathrm{e}^{-x}(1-x)-4\left(\mathrm{e}^{-x}-1\right)\right)\\
&= -4\mathrm{e}^{-x}+4x\mathrm{e}^{-x}-4\mathrm{e}^{-x}+4\\
&= 4x\mathrm{e}^{-x}-8\mathrm{e}^{-x}+4
\end{aligned}$$

ومنه فإن $\forall x\in\mathbb{R}\quad f'''(x)=4\mathrm{e}^{-x}-4x\mathrm{e}^{-x}+8\mathrm{e}^{-x}=4\mathrm{e}^{-x}(3-x)$

- f'' متصلة على
- f'' قابلة لاشتقاق على
- $\forall x\in]0,1[\quad f'''(x)>0$

وجسب مبرهنة التزايدات المنتهية فإن يوجد c من J بحيث $f''(x)-f''(x_0)=(x-x_0)f'''(c)$

$$f''(x)-f''(x_0)=(x-x_0)f'''(c)\Rightarrow \frac{f''(x)}{x-x_0}=f'''(c)\Rightarrow \frac{f''(x)}{x-x_0}>0$$

ج. لدينا $\forall x\in[0,1]\setminus\{x_0\}\ \dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$ اي $f''(x)$ و $x-x_0$ لهما نفس الاشارة

- $x>x_0\Rightarrow f''(x)>0$
- $x<x_0\Rightarrow f''(x)<0$

لدينا $f''(x_0)=0$ و f'' تغير اشارتها بجوار x_0 ; إذن $I\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ نقطة انعطاف المنحنى $\mathscr{C}_f$

4 ا. $f(x)=4x\left(e^{-x}+\frac{1}{2}x-1\right)=-4t\left(e^{t}-\frac{1}{2}t-1\right)$ نضع $(x=-t)$

بجوار $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{t\to-\infty}-4\left(e^{t}-\frac{1}{2}t-1\right)=-\infty$$

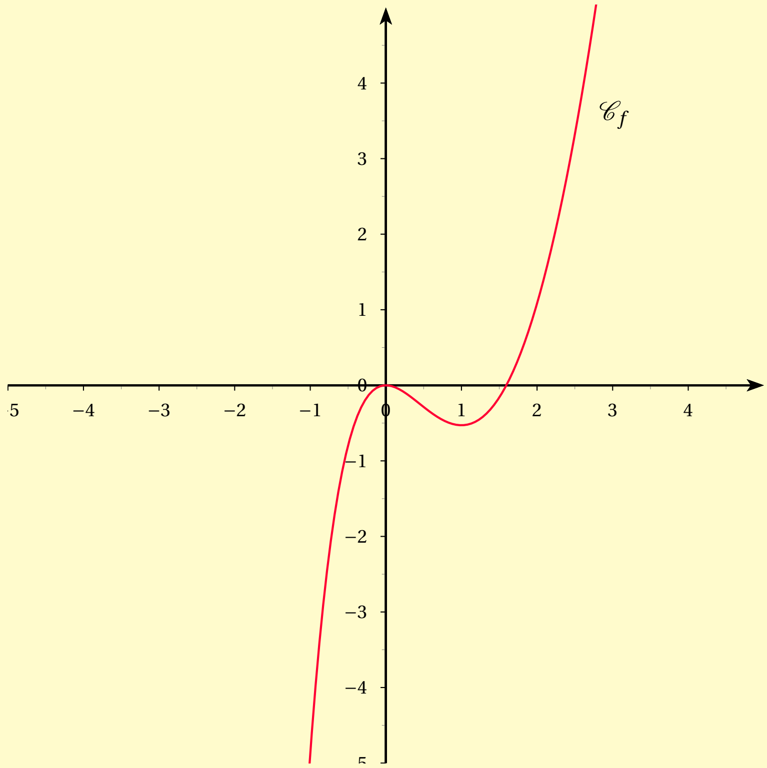
ومن $\mathscr{C}_f$ يقبل فرعا شلجميا إتجاه محور الاراتيب بجوار $+\infty$

بجوار $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{t\to+\infty}-4\left(e^{t}-\frac{1}{2}t-1\right)\lim_{t\to+\infty}-4t\left(\frac{e^{t}}{t}-\frac{1}{2}-1\right)=-\infty$$

ومن $\mathscr{C}_f$ يقبل فرعا شلجميا إتجاه محور الاراتيب بجوار $-\infty$

ب. التمثيل المبياني



5 ا. لنتحقق أن $(\forall x\in\left]-\infty,\alpha\right]);f(x)\leq 0$

نلاحظ مبيانيا ان $\mathscr{C}_f$ تحت محور الافاصيل على المجال $\left]-\infty,\alpha\right]$ اذن $(\forall x\in\left]-\infty,\alpha\right]);f(x)\leq 0$

ب.

$$\begin{aligned}
\int_0^\alpha f(x)dx &= \int_0^\alpha 4x\left(e^{-x}+\frac{1}{2}x-1\right)dx \\
&= \left[4x\left(-e^{-x}+\frac{1}{4}x^2-x\right)\right]_0^\alpha - \int_0^\alpha 4\left(-e^{-x}+\frac{1}{4}x^2-x\right)dx \\
&= \left[4x\left(-e^{-x}+\frac{1}{4}x^2-x\right)\right]_0^\alpha - 4\left[e^{-x}+\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^\alpha \\
&= 4\alpha\left(\frac{1}{4}\alpha^2-\alpha-e^{-\alpha}\right)-4e^{-\alpha}-\frac{1}{3}\alpha^3+2\alpha^2+4 \\
&= \alpha^3-4\alpha^2-4\alpha\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)-4e^{-\alpha}-\frac{1}{3}\alpha^3+2\alpha^2+4 \\
&= \alpha^3-4\alpha^2-4\alpha+2\alpha^2-4e^{-\alpha}-\frac{1}{3}\alpha^3+2\alpha^2+4 \\
&= \alpha^3-2\alpha^2-4\alpha-4e^{-\alpha}-\frac{1}{3}\alpha^3+2\alpha^2+4 \\
&= \alpha^3-2\alpha^2-4\alpha-4\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{1}{3}\alpha^3+2\alpha^2+4 \\
&= \frac{2}{3}\alpha^3-4\alpha-4+2\alpha+4 \\
&= \frac{2}{3}\alpha^3-2\alpha \\
&= \frac{2}{3}\alpha\left(\alpha^2-3\right)
\end{aligned}$$

إذن $\int_0^\alpha f(x)dx = \frac{2}{3}\alpha\left(\alpha^2-3\right)$

لنستنتج أن $\frac{3}{2} < \alpha \le \sqrt{3}$

لدينا $\quad (1) \quad \alpha \in \left]\frac{3}{2},2\right[$ و نعلم أن $\forall x \le \alpha, f(x) \le 0$

$$\begin{aligned}
\forall x \le \alpha, f(x) \le 0 &\Rightarrow \int_0^\alpha f(x)dx \le 0 \\
&\Rightarrow \frac{2}{3}\alpha\left(\alpha^2-3\right) \le 0 \\
&\Rightarrow \frac{2}{3}\alpha\left(\alpha^2-3\right) \le 0 \\
&\Rightarrow \left(\alpha^2-3\right) \le 0 \\
&\Rightarrow \alpha^2 \le 3 \\
&\Rightarrow \alpha \le \sqrt{3} \quad (2)
\end{aligned}$$

من (1) و (2) نستنتج أن $\quad \frac{3}{2} < \alpha \le \sqrt{3}$

ج. لنحسب مساحة الحيز المحصور بين C_f و المستقيمات التي معادلاتها على التوالي $y=0$ و $x=0$ و $x=\alpha$

$$\mathscr{A} = \int_0^\alpha |f(x)|dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| = -\int_0^\alpha f(x)dx \times cm^2 = \frac{2}{3}\alpha\left(3-\alpha^2\right)cm^2$$

الجزء الثاني

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 < \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) + u_n \end{cases}$

1 ا. لنبين بالترجع أن $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < \alpha$

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0 < \alpha$ (عبارة صحيحة)
- من أجل $n \in \mathbb{N}$ نفترض أن $u_n < \alpha$ و لنبين أن $u_{n+1} < \alpha$
لدينا $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$ وحسب الافتراض $u_n < \alpha$ أي $f(u_n) \le 0$
ومنه $u_{n+1} < \alpha$

- حسب مبدأ الترجع فإن $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < \alpha$

ب. لدينا $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$ وبالتالي $u_{n+1} - u_n = f(u_n)$ و حيث أن $f(u_n) \leq 0$ اي $u_{n+1} - u_n \leq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ اي المتتالية (u_n) تناقصية

2 ا. الدالتان $x \longrightarrow e^{-x}$, $x \longrightarrow \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ قابلتان لاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه دالة قابلة لاشتقاق على $\mathbb{R}$
ولدينا

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \left(e^{-x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)' = -e^{-x} + \frac{1}{2}$$

جدول التغيرات

- $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -e^{-x} + \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq e^{-x} \Leftrightarrow \ln\frac{1}{2} \geq -x \Leftrightarrow -\ln 2 \geq -x \Leftrightarrow \ln 2 \leq x$

x	$-\infty$		$\ln(2)$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$g(ln(2))$	$\nearrow$	

- اي $g(ln(2))$ قيمة دنيا للدالة g على $\mathbb{R}$ ومنه $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > g(ln(2)) \simeq 0,05$

ب. لنبين بالترجع أن $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n$

من أجل $n = 0$ لدينا $0 \leq u_0$ (عبارة صحيحة)

- من أجل $n \in \mathbb{N}$ نفترض أن $0 \leq u_n$ و لنبين أن $0 \leq u_{n+1}$
لدينا $u_{n+1} = f(u_n) + u_n = 4u_n g(u_n)$
وبما أن $0 \leq 4u_n$ و $g(u_n) \leq 0$ فإن $4u_n g(u_n) \leq 0$
ومنه $0 \leq u_{n+1}$
- حسب مبدأ الترجع فإن $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n$

ج. بما أن (u_n) تناقصية و مصغورة بالعدد 0 فإن (u_n) متقاربة

د. نضع $lim u_n = l$
لدينا $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = f(u_n)$
بما أن $lim u_n = l$ و f متصلة في l فإن $f(l) = 0$ يعني $l = 0$ او $l = \alpha$ وحيث أن $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_0$ ((u_n) تناقصية) اي $l \leq u_0 < \alpha$ و بالتالي $l = 0$

3 نفترض أن $u_0 < 0$

ا. لدينا $u_{n+1} = u_n + f(u_n)$
نعلم أن المتتالية (u_n) تناقصية اي $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_0$ وحيث أن f تزايدية قطعا على $]-\infty, 0[$ فإن $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) \leq f(u_0)$
و بالتالي $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq f(u_0)$

ب. لدينا $\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} - u_k \leq f(u_0)$

$$\begin{aligned}
u_{k+1} - u_k \leq f(u_0) &\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(u_0)\\
&\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq nf(u_0)\\
&\Rightarrow u_n + \sum_{k=1}^{n-1} u_k - u_0 - \sum_{k=1}^{n-1} u_k \leq nf(u_0)\\
&\Rightarrow u_n - u_0 \leq nf(u_0)\\
&\Rightarrow u_n \leq u_0 + nf(u_0)
\end{aligned}$$

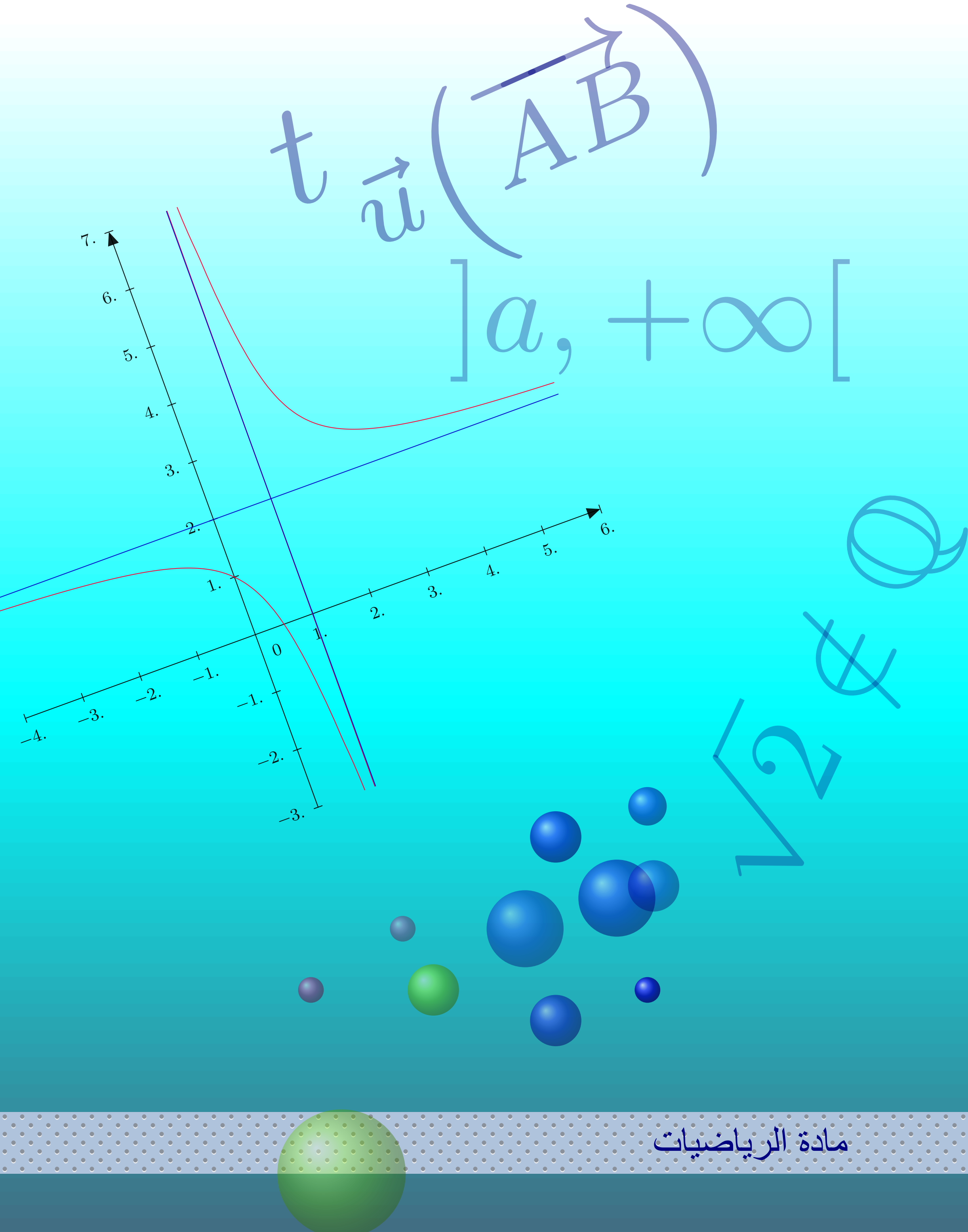
وبالتالي $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq nf(u_0) + u_0$

ج. لدينا $f(u_0) < 0$ إذن $\lim \quad nf(u_0) = -\infty$

اي $\lim \quad nf(u_0) = -\infty$ $u_0 +$ وبالتالي $lim u_n = -\infty$

الأستاذ :احمذ اوبها اعلى

تصحيح الامتحان الوطني 2019 الدورة الاستدراكية



مادة الرياضيات

الثانية باك علوم رياضية

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الصفحة
1 / 5

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2019
- الموضوع -

RS24

المادة	الرياضيات	مدة الانجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية : (أ) و (ب)	المعامل	9

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين 1 يتعلق بالأعداد العقدية..................................(3.5 ن)
- التمرين 2 يتعلق بالاحتمالات...(3 ن)
- التمرين 3 يتعلق بالبنيات الجبرية...............................(3.5 ن)
- التمرين 4 يتعلق بالتحليل..(10 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2019 – الموضوع
- مادة: الرياضيات – شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)

التمرين 1: (3.5 نقطة)

ليكن α عددا عقديا غير منعدم.

I- نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(E_\alpha) \quad : \quad z^2 - i\alpha\sqrt{3}z - \alpha^2 = 0$

1- أ) تحقق أن مميز المعادلة (E_α) هو: $\Delta = \alpha^2$ — 0.25

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E_α) — 0.5

2- علما أن $\alpha = |\alpha| e^{i\lambda}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)، اكتب حلي المعادلة (E_α) على الشكل الأسي. — 0.5

II- نفترض أن المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط Ω و M_1 و M_2 ذات الألحاق على التوالي α و $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ و $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ و ليكن R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

1- أ) بين أن $R(\Omega) = M_1$ و أن $R(M_1) = M_2$ — 0.5

ب) استنتج أن المثلثين $O\Omega M_1$ و OM_1M_2 متساويا الأضلاع. — 0.25

2- أ) تحقق أن: $z_1 - z_2 = \alpha$ — 0.25

ب) بين أن المستقيمين (ΩM_2) و (OM_1) متعامدان. — 0.5

ج) استنتج أن $O\Omega M_1M_2$ معين. — 0.25

3- بين أن لكل عدد حقيقي θ، العدد $Z = \frac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha} \div \frac{z_2 - |\alpha| e^{i\theta}}{z_1 - |\alpha| e^{i\theta}}$ حقيقي. — 0.5

التمرين 2: (3 نقط)

يحتوي كيس على n كرة مرقمة من 1 إلى n $(n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3)$. نسحب، الواحدة تلو الأخرى و بدون إحلال، جميع الكرات من هذا الكيس. لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس.

1- ما هو احتمال الحصول على الكرات 1 و 2 و 3 بالتتابع و في هذا الترتيب؟ — 1

2- ما هو احتمال الحصول على الكرات 1 و 2 و 3 في هذا الترتيب (سواء كانت متتابعة أم غير متتابعة)؟ — 1

3- نعتبر المتغير العشوائي X_n الذي يساوي العدد الضروري من السحبات للحصول على الكرات 1 و 2 و 3. — 1

حدد قانون احتمال المتغير X_n.

الصفحة 3/5	RS24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2019 – الموضوع - مادة: الرياضيات – شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)

التمرين 3: (3.5 نقطة)

نعتبر الفضاء المتجهي $(V_2,+,.)$ الذي بعده 2.

ليكن $(\vec{i},\vec{j})$ أساسا للفضاء V_2. نضع: $\vec{e_1}=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$ و $\vec{e_2}=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}$

ليكن $*$ قانون التركيب الداخلي المعرف في V_2 بما يلي:

$$\forall(x,y,x',y')\in\mathbb{R}^4\quad (x\vec{i}+y\vec{j})*(x'\vec{i}+y'\vec{j})=(xx'+yy')\vec{i}+(xy'+yx')\vec{j}$$

1- أ) بين أن $(\vec{e_1},\vec{e_2})$ أساس للفضاء V_2 — 0.25

ب) تحقق أن: $\vec{e_1}*\vec{e_1}=\vec{e_1}$ و $\vec{e_2}*\vec{e_2}=\vec{e_2}$ و $\vec{e_1}*\vec{e_2}=\vec{e_2}*\vec{e_1}=\vec{0}$ — 0.25

ج) بين أن: $\forall(X,X',Y,Y')\in\mathbb{R}^4\quad (X\vec{e_1}+Y\vec{e_2})*(X'\vec{e_1}+Y'\vec{e_2})=XX'\vec{e_1}+YY'\vec{e_2}$ — 0.25

2- أ) بين أن القانون $*$ تبادلي. — 0.25

ب) بين أن القانون $*$ تجميعي. — 0.25

ج) بين أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا. — 0.25

د) بين أن $(V_2,+,*)$ حلقة تبادلية واحدية. — 0.25

3- ليكن $\vec{u}\in V_2-\{\vec{0}\}$. نعتبر: $E_{\vec{u}}=\{\lambda\vec{u}\,/\,\lambda\in\mathbb{R}\}$

أ) بين أن $(E_{\vec{u}},+)$ زمرة جزئية للزمرة $(V_2,+)$ — 0.25

ب) بين أن $(E_{\vec{u}},+,.)$ فضاء متجهي جزئي للفضاء $(V_2,+,.)$ — 0.25

ج) بين أن: $E_{\vec{u}}$ مستقر بالنسبة للقانون $*$ $\Leftrightarrow$ الأسرة $(\vec{u}*\vec{u},\vec{u})$ مقيدة. — 0.5

4- نفترض أن: $\vec{u}*\vec{u}=\alpha\vec{u}$; $(\exists\alpha\in\mathbb{R}^*)$. نعتبر التطبيق $\varphi:\ \mathbb{R}^*\to E_{\vec{u}}$

$$x\mapsto\frac{x}{\alpha}\vec{u}$$

أ) بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E_{\vec{u}},*)$ — 0.5

ب) بين أن $(E_{\vec{u}},+,*)$ جسم تبادلي. — 0.25

التمرين 4: (10 نقط)

الجزء I : نعتبر الدالة g المعرفة على $I=]-1,+\infty[$ بما يلي: $g(x)=1+x^2-2x(1+x)\ln(1+x)$

1- أ) بين أن: $\lim\limits_{x\to-1^+}g(x)=2$ — 0.25

ب) بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ — 0.5

الصفحة 4/5	RS24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2019 – الموضوع - مادة: الرياضيات – شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)

2- بين أن g قابلة للاشتقاق على I ، و أن: $g'(x)=-2(1+2x)\ln(1+x)$ $(\forall x\in I)$	0.5

3- نعطي جدول تغيرات الدالة g:

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	2	$\searrow$	$\frac{5}{4}-\frac{\ln 2}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

أ) بين أنه يوجد عدد حقيقي موجب قطعا وحيد α بحيث: $g(\alpha)=0$	0.5
ب) تحقق أن: $\alpha<1$ (نأخذ: $\ln 2=0.7$)	0.25
ج) استنتج أن : $0<g(x)$ $(\forall x\in]-1,\alpha[)$ و أن: $g(x)<0$ $(\forall x\in]\alpha,+\infty[)$	0.5
الجزء II : نعتبر الدالة f المعرفة على $I=]-1,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$	
ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$	
1- أ) احسب $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.	0.5
ب) احسب $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.	0.5
2- أ) بين أن f قابلة للاشتقاق على I و أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2}$ $(\forall x\in I)$	0.75
ب) اعط جدول تغيرات الدالة f على I	0.5
ج) تحقق أن: $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ و أن: $f(x)\leq\dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ $(\forall x\in I)$	0.75
3- أ) حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الأفصول 0.	0.25
ب) بين أن: $\ln(1+x)<x$ $(\forall x>0)$	0.5
ج) استنتج أن: $f(x)<x$ $(\forall x>0)$	0.25
د) مثل مبيانيا (T) و (C).(نأخذ: $\alpha=0.8$ و $\Vert\vec{i}\Vert=\Vert\vec{j}\Vert=2cm$)	1

تصحيح الامتحان الوطني — SM — مادة الرياضيات

الصفحة 5 / 5	RS24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2019 – الموضوع - مادة: الرياضيات – شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)	

الجزء III : نضع $J=\int_0^1 f(x)\,dx$

1	1- أ) باستعمال تغيير المتغير: $t=\dfrac{1-x}{1+x}$ ، بين أن: $J=\dfrac{\pi}{8}\ln 2$
0.5	ب) حدد، بالسنتمر مربع، مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) و المستقيمات (T) و $x=0$ و $x=1$
1	2- باستعمال طريقة المكاملة بالأجزاء، احسب: $K=\int_0^1 \dfrac{\arctan(x)}{1+x}\,dx$

انتهى

تصحيح الامتحان الوطني — SM — مادة الرياضيات

تصحيح الامتحان الوطني العلوم الرياضية 2019 الدورة الاستدراكية

تصحيح التمرين 1

الجزء الاول

1

$$(E): z^2 - i\alpha\sqrt{3}z - \alpha^2 = 0$$

ا.

لدينا

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-i\alpha\sqrt{3})^2 - 4(-\alpha^2) \\ &= -3\alpha^2 + 4\alpha^2 \qquad = \alpha^2\end{aligned}$$

ب. لدينا $\Delta = \alpha^2$ و بالتالي

$$z_1 = \frac{i\alpha\sqrt{3}+\alpha}{2} \qquad = \alpha\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)$$

$$z_2 = \frac{i\alpha\sqrt{3}-\alpha}{2} \qquad = \alpha\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)$$

2 نعلم أن $\alpha = |\alpha|\, e^{i\lambda}$

لنكتب حلى المعادلة على شكل أسي

$$\begin{aligned}z_1 &= \alpha\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right) \\ &= |\alpha|\, e^{i\lambda} e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= |\alpha|\, e^{i\left(\lambda+\frac{\pi}{3}\right)}\end{aligned}$$

لدينا

$$\begin{aligned}z_2 &= \alpha\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right) \\ &= |\alpha|\, e^{i\lambda} e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)} \\ &= |\alpha|\, e^{i\left(\lambda+\frac{2\pi}{3}\right)}\end{aligned}$$

الجزء الثاني

1 ا. لدينا $M_2(Z_2)\ ,\ M_1(Z_1)\ ;\ \Omega(\alpha)$; R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$

لنبين أن $R(M_1) = M_2\ ;\ R(\Omega) = M_1$

$R(\Omega)=e^{i\frac{\pi}{3}}(\alpha-0)+0=\alpha e^{i\frac{\pi}{3}}=Z_1$ إذن $R(\Omega)=M_1$

$R(\Omega)=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(\alpha e^{i\frac{\pi}{3}}-0\right)+0=\alpha e^{i\frac{2\pi}{3}}=Z_2$ إذن $R(M_1)=M_2$

ب. لنستنتج أن المثلث $O\Omega M_1$ متساوي الاضلاع

لدينا $R(\Omega)=M_1$ أي $OM_1=O\Omega$ و $\left(\overrightarrow{O\Omega};\overrightarrow{OM_1}\right)=\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ و بالتالي $O\Omega M_1$ متساوي الاضلاع

لنستنتج أن المثلث OM_1M_2 متساوي الاضلاع

لدينا $R(M_1)=M_2$ أي $OM_1=OM_2$ و $\left(\overrightarrow{OM_1};\overrightarrow{OM_2}\right)=\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

و بالتالي OM_1M_2 متساوي الاضلاع

2 ا. لنتحقق أن $Z_1-Z_2=\alpha$

$$Z_1-Z_2=\left(\frac{1}{2}\alpha+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\alpha+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}\alpha+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\alpha-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\alpha$$

ب. لنبين أن

$(OM_1)\perp(\Omega M_1)$

لدينا

$$\begin{aligned}\frac{\alpha-Z_2}{Z_1}&=\frac{\alpha+\frac{1}{2}\alpha-\frac{\sqrt{3}i}{2}\alpha}{\alpha e^{i\frac{\pi}{3}}}\\&=\frac{\frac{3}{2}\alpha-\frac{\sqrt{3}i}{2}\alpha}{\alpha e^{i\frac{\pi}{3}}}\\&=\frac{\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)\alpha}{\alpha e^{i\frac{\pi}{3}}}\\&=\frac{\sqrt{3}\left(e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)}\right)}{e^{i\frac{\pi}{3}}}\\&=\sqrt{3}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)}\\&=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

إذن $arg\left(\frac{\alpha-Z_2}{Z_1}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

و بالتالي $(OM_1)\perp(\Omega M_1)$

ج. لنستنتج أن $O\Omega M_1M_2$ معين

لدينا $(OM_1)\perp(\Omega M_1)$ و نعلم أن $Z_1-Z_2=\alpha$ ومنه $M_1M_2=O\Omega$ و المثلثين $O\Omega M_1$; OM_1M_2 متساويا الاضلاع

و بالتالي $(OM_1)\perp(\Omega M_1)$ و $M_1M_2=O\Omega=OM_1=\Omega M_1$

إذن الرباعي $O\Omega M_1M_2$ معين

3 ليكن $\theta\in\mathbb{R}$ نضع $M_\theta=|\alpha|e^{i\theta}$

لدينا $OM_1=OM_2=OM_\theta=O\Omega$ إذن النقط M_1 وو M_2 و M_θ ; Ω نقط متداورة

أي $\frac{Z_2-|\alpha|e^{i\theta}}{Z_1-|\alpha|e^{i\theta}}\div\frac{Z_2-\alpha}{Z_1-\alpha}=Z\in\mathbb{R}^*$ و بالتالي Z عدد حقيقي

✍ تصحيح التمرين 2 ✍

يحتوي كيس على n كرة مرقمة من 1 إلى n $(n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$. نسحب الواحدة تلو الاخرى و بدون إحلال جميع كرات من هذا الكيس
ليكن Ω كون الامكانيات لدينا $card\,(\Omega) = n!$

1 نضع A : " الحصول على الكرات 1 و 2 و 3 بالتتابع و في هذا الترتيب "

لدينا

- عدد إمكانيات الحصول على الكرات 1 و 2 و 3 بالتتابع و في هذا الترتيب هو $n-2$;
- عدد إمكانيات الحصول على باقي الكرات هو $(n-3)!$

ومنه $$P\,(A) = \frac{card\,(A)}{card\,(\Omega)} = \frac{(n-2)\,(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n\,(n-1)}$$

2 نضع B : " الحصول على الكرات 1 و 2 و 3 في هذا الترتيب "

لدينا

- عدد إمكانيات الحصول على الكرات 1 و 2 و 3 في هذا الترتيب هو C_n^3 ;
- عدد إمكانيات الحصول على باقي الكرات هو $(n-3)!$

ومنه

$$P\,(B) = \frac{card\,(B)}{card\,(\Omega)} = \frac{C_n^3\,(n-3)!}{n!} = \frac{n!}{3!\,(n-3)!} \times \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{1}{3!}$$

3 ليكن X_n المتغير العشوائي الذي يساوي العدد الضروري من السحبات للحصول على الكرات 1 و 2 و 3

أي $X_n\,(\Omega) = \{\}3, 4, \cdots, n\}$: ليكن $k \in \ X_n\,(\Omega)$ لدينا

- عدد إمكانيات الحصول على إحدى الكرات 1 و 2 و 3 هو C_3^1 ;
- عدد إمكانيات الحصول على الكرتين المتبقيتين من 1 و 2 و 3 هو $2C_{k-1}^2$
- عدد إمكانيات الحصول على الكرات المتبقيتين في k كرة من الكيس (بعد الحصول على 1 و 2 و 3) هو A_{n-3}^{k-3}
- عدد إمكانيات الحصول على باقي الكرات هو $(n-k)!$

ومنه

$$\begin{aligned}
\forall k \in X_n\,(\Omega)\,; \quad P\,(X_n = k) &= \frac{card\,(X_n = k)}{card\,(\Omega)} \\
&= \frac{C_3^1 2C_{n-k}^2 A_{n-3}^{k-3}\,(n-k)!}{n!} \\
&= \frac{\frac{3!}{2!1!} \times 2\frac{(k-1)!}{2!(k-3)!} \times \frac{(n-3)!)}{((n-3)-(k-3))!} \times (n-k)!}{n!} \\
&= \frac{3\,(k-1)\,(k-2) \times (n-3)!}{n!} \\
&= \frac{3\,(k-1)\,(k-2)}{n\,(n-1)\,(n-2)}
\end{aligned}$$

✍ تصحيح التمرين 3 ✍

نعتبر الفضاء المتجهي $(V_2,+,.)$

ليكن $*$ قانون التركيب الداخلي المعرفة في V_2 بما يلي : $\forall\,(x,y,x',y')\in\mathbb{R}^4\ \left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)*\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}\right)=\left(xx'+yy'\right)\vec{i}+\left(xy'+yx'\right)\vec{j}$

1 ا. بين أن $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ أساس للفضاء V_2

لدينا $\vec{e}_1=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$; $\vec{e}_2=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}$

$$\det(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\end{vmatrix}=\frac{-1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{-1}{2}\neq 0$$

يعني $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ أساس للفضاء V_2

يمكن كذلك أن نبين أن الاسرة $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ أسرة مولدة أو الاسرة $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ أسرة حرة

ب. تحقق أن $\vec{e}_1*\vec{e}_1=\vec{e}_1$

$$\begin{aligned}\vec{e}_1*\vec{e}_1&=\left(\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}\right)*\left(\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}\right)\\&=\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\vec{i}+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\vec{j}\\&=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}\\&=\vec{e}_1\end{aligned}$$

تحقق أن $\vec{e}_2*\vec{e}_2=\vec{e}_2$

$$\begin{aligned}\vec{e}_2*\vec{e}_2&=\left(\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}\right)*\left(\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}\right)\\&=\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\vec{i}+\left(\frac{-1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{-1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\vec{j}\\&=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}\\&=\vec{e}_2\end{aligned}$$

تحقق أن $\vec{e}_1*\vec{e}_2=\vec{0}$

$$\begin{aligned}\vec{e}_1*\vec{e}_2&=\left(\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}\right)*\left(\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}\right)\\&=\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{-1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\vec{i}+\left(\frac{1}{2}\times\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\vec{j}\\&=\vec{0}\end{aligned}$$

تحقق أن $\vec{e}_2*\vec{e}_1=\vec{0}$

$$\begin{aligned}\vec{e}_2*\vec{e}_1&=\left(\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}\right)*\left(\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}\right)\\&=\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{-1}{2}\right)\vec{i}+\left(\frac{-1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\vec{j}\\&=\vec{0}\end{aligned}$$

ج. لنبين أن

$$\forall\,(X,X',Y,Y')\in\mathbb{R}^4\quad (X\vec{e}_1+Y\vec{e}_1)*\left(X'\vec{e}_1+Y'\vec{e}_2\right)=XX'\vec{e}_1+YY'\vec{e}_2$$

ليكن $(X,X',Y,Y')\in\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned}(X\vec{e}_1+Y\vec{e}_1)*\left(X'\vec{e}_1+Y'\vec{e}_2\right)&=\left(\left(\frac{X+Y}{2}\right)\vec{i}+\left(\frac{X-Y}{2}\vec{j}\right)\right)*\left(\left(\frac{X'+Y'}{2}\right)\vec{i}+\left(\frac{X'-Y'}{2}\vec{j}\right)\right)\\&=\left(\frac{X+Y}{2}\times\frac{X'+Y'}{2}+\frac{X-Y}{2}\times\frac{X'-Y'}{2}\right)\vec{i}+\left(\frac{X+Y}{2}\times\frac{X'-Y'}{2}+\frac{X-Y}{2}\times\frac{X'+Y'}{2}\right)\vec{j}\\&=\frac{XX'}{2}\vec{i}+\frac{YY'}{2}\vec{i}+\frac{XX'}{2}\vec{j}-\frac{YY'}{2}\vec{j}\\&=\frac{XX'}{2}\vec{i}+\frac{YY'}{2}\vec{i}+\\&=XX'\vec{e}_1+YY'\vec{e}_2\end{aligned}$$

2 ا. لنبين أن القانون $*$ تبادلي

ليكن $X,Y,X',Y'\in\mathbb{R}$

لدينا
$$\begin{aligned}(X\vec{e}_1+Y\vec{e}_1)*\left(X'\vec{e}_1+Y'\vec{e}_2\right) &= XX'\vec{e}_1+YY'\vec{e}_2\\ &= X'X\vec{e}_1+Y'Y\vec{e}_2\\ &= \left(X'\vec{e}_1+Y'\vec{e}_1\right)*(X\vec{e}_1+Y\vec{e}_2)\end{aligned}$$

ومنه القانون $*$ تبادلي

ب. لنبين أن القانون $*$ تجميعي

ليكن $X,Y,X',Y'X'',Y''\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\left((X\vec{e}_1+Y\vec{e}_1)*\left(X'\vec{e}_1+Y'\vec{e}_2\right)\right)*\left(X''\vec{e}_1+Y''\vec{e}_2\right) &= \left(XX'\vec{e}_1+YY'\vec{e}_2\right)*\left(X''\vec{e}_1+Y''\vec{e}_2\right)\\ &== \left(XX'X''\vec{e}_1+YY'Y''\vec{e}_2\right)\\ &= (X\vec{e}_1+Y\vec{e}_2)*\left(X'X''\vec{e}_1+Y'Y''\vec{e}_2\right)\\ &= (X\vec{e}_1+Y\vec{e}_1)*\left(\left(X'\vec{e}_1+Y'\vec{e}_2\right)*\left(X''\vec{e}_1+Y''\vec{e}_2\right)\right)\end{aligned}$$

وبالتالي القانون $*$ تجميعي

ج. لدينا القانون $*$ تبادلي و نلاحظ أن $(X\vec{e}_1+Y\vec{e}_1)*(1\vec{e}_1+1\vec{e}_2)=(X\vec{e}_1+Y\vec{e}_1)$

إذن القانون $*$ يقبل العنصر $\vec{e}_1+\vec{e}_2$ عنصرا محايدا

د. لنبين أن $(V_2,+,*)$ حلقة تبادلية واحدية

لدينا • $(V_2,+)$ زمرة تبادلية لان $(V_2,+,.)$ فضاء متجهي

• القانون $*$ تبادلي

في V_2

• القانون $*$ تجميعي في V_2

• القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا

يبقى ان نبين أن القانون $*$ توزيعي بالنسبة ل $+$ في V_2

ليكن $X,Y,X',Y'X'',Y''\in\mathbb{R}$

من جهة

$$\begin{aligned}(X\vec{e}_1+Y\vec{e}_1)*\left(\left(X'\vec{e}_1+Y'\vec{e}_2\right)+\left(X''\vec{e}_1+Y''\vec{e}_2\right)\right) &= (X\vec{e}_1+Y\vec{e}_2)*\left(X'+X''\vec{e}_1+Y'Y''\vec{e}_2\right)\\ &= \left(XX'+XX''\right)\vec{e}_1+\left(YY'+YY''\right)\vec{e}_2\end{aligned}$$

من جهة أخرى

$$\begin{aligned}(X\vec{e}_1+Y\vec{e}_1)*\left(X'\vec{e}_1+Y'\vec{e}_2\right)+(X\vec{e}_1+Y\vec{e}_1)*\left(X''\vec{e}_1+Y''\vec{e}_2\right) &= \left(XX'\vec{e}_1+YY'\vec{e}_2\right)*\left(XX''\vec{e}_1+YY''\vec{e}_2\right)\\ &= \left(XX'+XX''\right)\vec{e}_1+\left(YY'+YY''\right)\vec{e}_2\end{aligned}$$

إذن القانون $*$ توزيعي بالنسبة ل $+$

و بالتالي $(V_2,+,*)$ حلقة تبادلية واحدية

3 ليكن $\vec{U}\in V_2-\{\vec{0}\}$. نعتبر : $E_{\vec{U}}=\{\lambda\vec{u}/\lambda\in\mathbb{R}\}$

ا. لنبين أن $\left(E_{\vec{U}},+\right)$ زمرة جزئية للزمرة $(V_2,+)$

• $\vec{0}=0\vec{U}\in E_{\vec{U}}\Longrightarrow E_{\vec{U}}\neq\emptyset$

• $E_{\vec{U}}\subset V_2$

• ليكن $V,W\in E_{\vec{U}}$ حيث $V=\alpha\vec{u}\,(\alpha\in\mathbb{R})$ و $W=\beta\vec{u}\left(\beta\in\mathbb{R}\right)$

لدينا $V-W=\alpha\vec{u}-\beta\vec{u}=\left(\alpha-\beta\right)\vec{u}$ و حيث $\alpha-\beta\in\mathbb{R}$ فإن $V-W\in E_{\vec{U}}$ أي $\left(E_{\vec{U}},+\right)$ زمرة جزئية للزمرة $(V_2,+)$

ب. لنبين أن $(E_{\vec{U}},+,.)$ فضاء متجهي جزئي للفضاء $(V_2,+,.)$

- $\emptyset \neq E_{\vec{U}} \subset V_2$
- ليكن $V,W \in E_{\vec{U}}$ حيث $V=\alpha\vec{u}\,(\alpha\in\mathbb{R})$ و $W=\beta\vec{u}\,(\beta\in\mathbb{R})$ و $\gamma\in\mathbb{R}$

$V+\gamma W=\alpha\vec{u}+\gamma\beta\vec{u}=(\alpha+\gamma\beta)\,\vec{u}$ و نعلم أن $\alpha+\gamma\beta\in\mathbb{R}$ إذن $V+\gamma W\in E_{\vec{U}}$

و بالتالي $(E_{\vec{U}},+,.)$ فضاء متجهي جزئي للفضاء $(V_2,+,.)$

ج. لنبين أن : $E_{\vec{U}}$ مستقر بالنسبة للقانون $*$ $\Leftrightarrow$ الأسرة $(\vec{u}*\vec{u},\vec{u})$ مقيدة

لنبين $\Leftarrow$

$E_{\vec{U}}$ مستقر بالنسبة للقانون $*$

- لدينا $\vec{u}=1\vec{u}$ إذن $\vec{u}\in E_{\vec{U}}$ و نستنتج أن $\vec{u}*\vec{u}=\beta\vec{u}\quad(\beta\in\mathbb{R}^*)$

وبالتالي الأسرة $(\vec{u}*\vec{u},\vec{u})$ مقيدة

- لنبين $\Longrightarrow$

نفترض أن الأسرة $(\vec{u}*\vec{u},\vec{u})$ مقيدة لدينا $\vec{u}=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2$

ليكن $U,V\in E_{\vec{U}}$ حيث $U=\alpha\vec{u},V=\beta\vec{u}$

$U*V=\alpha\vec{u}*\beta\vec{u}==(\alpha a\vec{e}_1+\alpha b\vec{e}_2)*(\beta a\vec{e}_1+\beta b\vec{e}_2)=(\alpha\beta a^2\vec{e}_1+\alpha\beta b^2\vec{e}_2)=\alpha\beta(\vec{u}*\vec{u})=\alpha\beta\gamma\vec{u}$

و حيث $(\alpha\beta\gamma\in\mathbb{R}^*)$ فإن

$U*V\in E_{\vec{U}}$ ومنه $E_{\vec{U}}$ مستقر بالنسبة للقانون $*$

و نكون قد بين أن $E_{\vec{U}}$ مستقر بالنسبة للقانون $*$ $\Leftrightarrow$ الأسرة $(\vec{u}*\vec{u},\vec{u})$ مقيدة

4 ليكن $\alpha\in\mathbb{R}^*$ نعتبر التطبيق

$$\begin{array}{rcl}\varphi:\mathbb{R}^* & \to & E_{\vec{U}}\\ x & \mapsto & \dfrac{x}{\alpha}\vec{u}\end{array}$$

ا. لنبين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E_{\vec{U}},*)$

ليكن $X,Y\in\mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned}\varphi(X)*\varphi(Y)&=\frac{x}{\alpha}\vec{u}*\frac{y}{\alpha}\vec{u}\\&=\frac{XY}{\alpha^2}\vec{u}*\vec{u}\\&=\frac{XY}{\alpha^2}\times\alpha\vec{u}\\&=\frac{XY}{\alpha^2}\vec{u}\\&=\varphi(X\times Y)\end{aligned}$$

و بالتالي φ تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E_{\vec{U}},*)$

لنبين أن φ تطبيق تقابلي

ليكن $\vec{v}\in E_{\vec{u}}-\{\vec{0}\}$ اذن $\exists\beta\in\mathbb{R}^*;\vec{v}=\beta\vec{u}$

$$\begin{aligned}\varphi(X)=\vec{v}\Leftrightarrow&\quad\frac{x}{\alpha}\vec{u}=\vec{v}\\\Leftrightarrow&\quad\frac{x}{\alpha}\vec{u}=\beta\vec{u}\\\Leftrightarrow&\quad\left(\frac{x}{\alpha}-\beta\right)\vec{u}=\vec{0}\\\Rightarrow&\quad X=\beta\times\alpha\end{aligned}$$

إذن

$$\forall\vec{v}\in E_{\vec{u}}-\{\vec{0}\}\quad\exists!X\in\mathbb{R}^*\;/\varphi(x)=\vec{v}$$

و بالتالي تطبيق تقابلي

ب. لنبين أن $(E_{\vec{u}},+,*)$ جسم تبادلي .

لدينا

- $(E_{\vec{u}},+)$ زمرة تبادلية
- φ تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E_{\vec{U}}-\{\vec{0}\},*)$ و $\varphi(\mathbb{R}^*,\times)=(E_{\vec{U}}-\{\vec{0}\},*)$ و نعلم أن $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة تبادلية أي $(E_{\vec{U}}-\{\vec{0}\},*)$ زمرة تبادلية
- القانون $*$ توزيعي بالنسبة ل $+$ في $E_{\vec{u}}$ لأن $E_{\vec{U}}$ مستقر بالنسبة للقانون $*$

خلاصة أن $(E_{\vec{u}},+,*)$ جسم تبادلي

تصحيح التمرين 4

الجزء الاول

نعتبر الدالة g المعرفة على $I=]-1,+\infty[$ بما يلي $g(x)=1+x^2-2x(1+x)\,ln(1+x)$

1 ا. لنبين أن $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x)=2$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1^+} g(x) &= \lim_{x\to-1^+} 1+x^2-2x(1+x)\,ln(1+x)\\ &= \lim_{t\to0^+} 1+(t-1)^2-2(t-1)\,t\,ln(t) && (t=1+x)\\ &= 2+2\times0=2 && \text{لان } \lim_{t\to0^+} t\,ln(t)=0\end{aligned}$$

ب. لنبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} g(x) &= \lim_{x\to+\infty} 1+x^2-2x(1+x)\,ln(1+x)\\ &= \lim_{t\to+\infty} 1+(t-1)^2-2(t-1)\,t\,ln(t) \quad (t=1+x)\\ &= \lim_{t\to+\infty} t^2\left(\frac{1}{t^2}+\frac{(t-1)^2}{t^2}\right)-2\frac{(t-1)\,t\,ln(t)}{t^2}\\ &= -\infty\end{aligned}$$

لان $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{(t-1)^2}{t^2}=\dfrac{(t-1)\,t\,ln}{t^2}=1$ و $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{t^2}=0$ و $\lim\limits_{t\to+\infty} ln(t)=+\infty$

2 بين أن g قابلة للاشتقاق على I و أن $g'(x)=-2(1+2x)\,ln(1+x)\quad(\forall x\in I)$

لدينا $g(x)=1+x^2-2x(1+x)\,ln(1+x)$

نعلم أن $x\longmapsto 1+x^2$ قابلة لاشتقاق على I (حدودية)

و $x\longmapsto 2x(1+x)\,ln(1+x)$ قابلة لاشتقاق على I (جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على I)

إذن g قابلة للاشتقاق على I

$$\begin{aligned}g'(x) &= \left(1+x^2-2x(1+x)\,ln(1+x)\right)'\\ &= \left(1+x^2-2\left(x+x^2\right)ln(1+x)\right)'\\ &= 2x-2\left[(1+2x)\,ln(1+x)+\left(x+x^2\right)\frac{(1+x)'}{1+x}\right]\\ &= 2x-2(1+2x)\,ln(1+x)-2x\\ &-2(1+2x)\,ln(1+x)\end{aligned}$$

ومنه $(\forall x\in I)\quad g'(x)=-2(1+2x)\,ln(1+x)$

3 ا. لنبين أن $\exists!\alpha\in\mathbb{R}^{+*};g(\alpha)=0$

لدينا $\frac{5}{4}-\frac{ln2}{2}=\frac{5-ln4}{4}>0$ والدالة g متصلة على $\mathbb{R}^{+*}$ و من خلال الجدول فإن الدالة تناقصية قطعا على $\mathbb{R}^{+*}$

لدينا $g(]0,+\infty[)=]-\infty,1[$ بما أن $0\in]-\infty,1[$ فإن $\exists!\alpha\in\mathbb{R}^{+*};g(\alpha)=0$

ب. لنتحقق أن $\alpha<1$

لدينا $g(0)=1>0$; $g(1)=2-4ln2=-0,04<0$ ومنه وحسب السؤال السابق فإن $\exists!\alpha\in]0,1[;g(\alpha)=0$

أي $\alpha<1$

ج. • على المجال $]\alpha,+\infty[$ الدالة g تقبل قيمة قصوى عند النقطة ذات الافصول α و بالتالي $\forall x\in]\alpha,+\infty[,;g(x)<g(\alpha)=0$

• على المجال $]-1,\alpha[$ الدالة g تقبل قيمة دنيا عند النقطة ذات الافصول α و بالتالي $\forall x\in]-1,\alpha[,;g(x)>g(\alpha)=0$

الجزء الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على I بما يلي $f(x)=\frac{ln(1+x)}{1+x^2}$ ليكن C_f منحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1 ا. لنحسب $\lim_{x\to-1^+}f(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1^+}f(x)&=\lim_{x\to-1^+}\frac{ln(1+x)}{1+x^2}\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{ln(t)}{1+(t-1)^2}\quad;(t=1+x)\\&=\lim_{t\to0^+}ln(t)\times\frac{1}{1+(t-1)^2}\\&=-\infty\end{aligned}$$

التأويل الهندسي

لدينا $\lim_{x\to-1^+}f(x)=-\infty$ ومنه C_f يقبل مقارب عمودي معادلته $x=1$

ب. لنحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-+\infty}f(x)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{ln(1+x)}{1+x^2}\\&=\lim_{t\to+\infty}\frac{ln(t)}{1+(t-1)^2},\quad(t=1+x)\\&=\lim_{t\to+\infty}\frac{ln(t)}{1+t^2-2t+1},\\&\lim_{t\to+\infty}\frac{ln(t)}{t^2}\times\frac{1}{1-2\frac{1}{t}+2\frac{1}{t^2}}\\&=0\end{aligned}$$

لان $\lim_{t\to+\infty}\frac{ln(t)}{t^2}=0$ و $\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{1-2\frac{1}{t}+2\frac{1}{t^2}}=1$

التأويل الهندسي

لدينا $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ ومنه C_f يقبل مقارب أفقي معادلته $y=0$ بجوار $+\infty$

2 ا. بين أن f قابلة للاشتقاق على I و أن $(\forall x\in I)\quad f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x)\left(1+x^2\right)^2}$

نعلم أن $f(x)=\frac{ln(1+x)}{1+x^2}$ و $x\longmapsto1+x^2$ قابلة لاشتقاق و لا تنعدم على I و $x\longmapsto ln(1+x)$ قابلة لاشتقاق على I

فنجد أن f قابلة للاشتقاق على I

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{ln(1+x)}{1+x^2}\right)' \\
&= \frac{(ln(1+x))'\left(1+x^2\right) - ln(1+x)\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2} \\
&= \frac{\frac{1+x^2}{1+x} - 2x\,ln(1+x)}{\left(1+x^2\right)^2} \\
&= \frac{\frac{1+x^2-2x(x+1)ln(1+x)}{1+x}}{\left(1+x^2\right)^2} \\
&= \frac{g(x)}{(1+x)\left(1+x^2\right)^2}
\end{aligned}$$

نخلص إلى أن $(\forall x \in I) \quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x)\left(1+x^2\right)^2}$

ب. جدول تغيرات الدالة f على I

لدينا $x \mapsto (1+x)\left(1+x^2\right)^2$ موجبة قطعا على المجال I إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ و بالتالي

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

ج. لنتحقق أن $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ و أن $(\forall x \in I)\ f(x) \leq \dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$

$$\begin{aligned}
g(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow 1+\alpha^2 - 2\alpha(1+\alpha)\,ln(1+\alpha) = 0 \\
&\Leftrightarrow 1+\alpha^2 = 2\alpha(1+\alpha)\,ln(1+\alpha) \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)} = \frac{ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2} \\
&\Leftrightarrow f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}
\end{aligned}$$

من خلال جدول التغيرات نلاحظ أن الدالة f تقبل قيمة قصوى عند النقطة ذات الافصول α

ومنه $(\forall x \in I)\ f(x) \leq f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$

3 **ا.** لنحدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الافصول 0

لدينا $f'(0) = 1\ ;\ f(0) = 0$

و علما أن $(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$ نحصل على $(T): y = x$

ب. لنبين أن $(\forall x > 0) \quad ln(1+x) < x$

نضع $h(x) = x - ln(1+x)$

لدينا h قابلة لاشتقاق على $]0,+\infty[$ و $\forall x \in]0,+\infty[; h'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$

على المجال $]0,+\infty[$ لدينا $x > 0$ و $x+1 > 0$ أي $\forall x \in]0,+\infty]\ h'(x) > 0$

ومنه h تزايدية قطعاعلى $]0,+\infty[$ فنجد أن $\forall x \in]0,+\infty[\ h(x) > h(0) = 0$

و بالتالي $(\forall x > 0) \quad ln(1+x) < x$

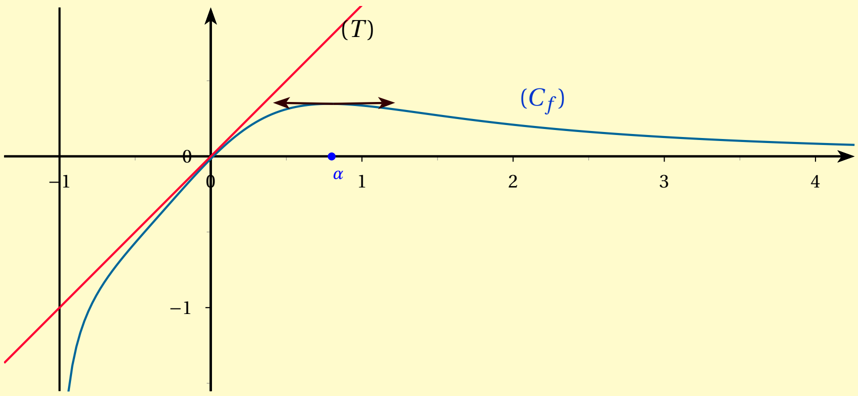
ج. استنتج أن $(\forall x>0)\quad f(x)<x$

ليكن $x\in\,]0,+\infty[$

$$\begin{aligned}
x>0 &\Leftrightarrow 1+x^2>1\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2}<1\\
&\Longrightarrow 0<\frac{1}{1+x^2}<1 \quad \text{و} \quad 0<ln(1+x)<x\\
&\Longrightarrow \frac{ln(1+x)}{1+x^2}<x\\
&\Longrightarrow f(x)<x
\end{aligned}$$

ومنه $(\forall x>0)\quad f(x)<x$

د. تمثيل الدالة f



الجزء الثالث

1 نضع $J=\int_0^1 f(x)dx$

ا. لنبين أن $J=\frac{\pi}{8}ln2$

نضع $t=\frac{1-x}{1+x}$ أي $x=0\Leftrightarrow t=1\ ;\ x=1\Leftrightarrow t=0$ و $t=\frac{1-x}{1+x}\Leftrightarrow x=\frac{1-t}{1+t}$

نستنتج أن $: dx=\frac{-2}{(1+t)^2}dt$ وأن $1+x=\frac{2}{1+t}$ $\quad 1+x^2=1+\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2=\left(\frac{2+2t^2}{(1+t)^2}\right)$

إذن

$$\begin{aligned}
J&=\int_0^1\frac{ln(1+x)}{1+x^2}dx\\
&=\int_1^0\frac{2)}{1+t}\times\frac{(1+t)^2}{2\left(1+t^2\right)}\times\frac{-2}{(1+t)^2}dt\\
&=\int_1^0 ln(2)\frac{-1}{1+t^2}dt-\int_1^0 ln(1+x)\frac{-1}{1+t^2}dt\\
&=\int_0^1 ln(2)\frac{1}{1+t^2}dt-\int_0^1 ln(1+x)\frac{1}{1+t^2}dt\\
&=\int_0^1 ln(2)\frac{1}{1+t^2}dt-J
\end{aligned}$$

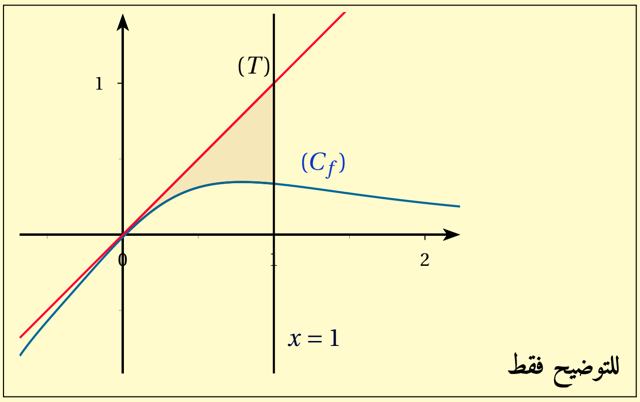
فنحصل على

$$\begin{aligned}
2J=\int_0^1 ln(2)\frac{1}{1+t^2}&\Leftrightarrow 2J=ln2\,[\arctan(x)]_0^1\\
&\Leftrightarrow 2J=\frac{\pi}{4}ln2\\
&\Leftrightarrow J=\frac{\pi}{8}ln2
\end{aligned}$$

خلاصة $\int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{8} ln2$

ب. لنحسب مساحة المستوى المحصور بين المنحنى C_f و المستقيمات (T) و $x=0$ و $x=1$ يعني حساب $\mathscr{A} = \int_0^1 |f(x)-x|\,dx(u.a)$

حسب السؤال 3 ج لدينا $\forall x>0\, f(x)<x$ فنحصل على $\mathscr{A} = \int_0^1 (x-f(x))\,dx \times 4cm^2$



$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_0^1 (x-f(x))\,dx4cm^2 \\
&= \left(\int_0^1 xdx - \int_0^1 f(x)\right)dx \times 4cm^2 \\
&= \left([\frac{x^2}{2}]_0^1 - J\right)4cm^2 \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}ln2\right)4cm^2 \\
&= \left(2-\frac{\pi}{2}ln2\right)cm^2
\end{aligned}$$

2 لنحسب بإستعمال المكاملة بالاجزاء $K = \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x}dx$

$$\begin{aligned}
K &= \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x}dx \\
&= \int_0^1 \arctan(x)\times(ln(1+x))' \\
&= [\arctan(x)\times ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{ln1+x}{1+x^2} \\
&= [\arctan(x)\times ln(1+x)]_0^1 - J \\
&= \frac{\pi}{4}\times ln2 - \frac{\pi}{8}ln2 \\
&= \frac{2\pi}{8}ln2 - \frac{\pi}{8}ln2 \\
&= \frac{\pi}{8}ln2
\end{aligned}$$