Exercice :

$A(i)$; $B(-i)$ $\qquad f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$

$$Z \to \frac{iZ+1}{Z+i}$$

et $F : P \setminus \{B\} \to P$

$$M(Z) \to M'(f(Z))$$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : Z^3 f(Z^3) = i$

$$Z^3 f(Z^3) = i$$

$$\Rightarrow \quad Z^3 \left(\frac{iZ^3+1}{Z^3+i} \right) = i$$

$$\Rightarrow \quad Z^3(iZ^3+1) = i(Z^3+i)$$

$$\Rightarrow \quad iZ^6 + Z^3 - iZ^3 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{iZ^6 + (1-i)Z^3 + 1 = 0}$$

On pose $z = Z^3$

$$(E) \Leftrightarrow iz^2 + (1-i)z + 1 = 0$$

$$\Delta = (1-i)^2 - 4i$$

$$= -6i$$

$$= (1-i)^2 \times (\sqrt{3})^2$$

$$= (\sqrt{3} - i\sqrt{3})^2$$

donc $z_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ ou $z_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

ainsi $Z^3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ ou $Z^3 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)$ ou $Z^3 = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)(1-i)$

$= \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ ou $Z^3 = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

donc $Z^3 = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) e^{i\frac{\pi}{4}}$ ou $Z^3 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right) e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$

$\Rightarrow Z = \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}\, e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$ ou $Z = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$

On a $k \in \{0;1;2\}$

pour $k=0$ $Z = \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}\, e^{i\frac{\pi}{12}}$ ou $Z = \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}\, e^{i\frac{-\pi}{4}}$

pour $k=1$ $Z = \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ou $Z = \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}\, e^{i\frac{5\pi}{12}}$

pour $k=2$ $Z = \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}\, e^{i\frac{17\pi}{12}}$ ou $Z = \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}\, e^{i\frac{13\pi}{12}}$

2) <u>Déterminer le module et l'argument de $f(Z)$</u>

On pose $Z = e^{i\theta}$ et $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

On a $f(Z) = \frac{iZ+1}{Z+i} = \frac{ie^{i\theta}+1}{e^{i\theta}+i}$

$$= \frac{i(e^{i\theta}-i)}{e^{i\theta}+i}$$

$$= i\,\frac{\cancel{e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}\left(e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} - e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\right)}{\cancel{e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}\left(e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} + e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\right)}$$

$$= i\,\frac{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= -\tan\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$

et on a $\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow 0 < \frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) > 0$

d'où $\boxed{f(Z) = \left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right);0\right]}$

Scanné avec CamScanner

4) a) Mq: $f(z) - i = \dfrac{2}{z+i}$

$$f(z) - i = \frac{iz+1}{z+i} - i$$

$$= \frac{iz+1-iz+1}{z+i}$$

$$= \frac{2}{z+i}$$

b) Déterminer l'image du cercle $(\mathcal{C})$ de centre B et de rayon 1

$M(z) \in \mathcal{C} \iff BM = 1$

$\iff |z - z_B| = 1$

$\iff |z+i| = 1$

On a $f(z) - i = \dfrac{2}{z+i} \implies z+i = \dfrac{2}{f(z)-i}$

ainsi $M(z) \in \mathcal{C} \iff \left|\dfrac{2}{f(z)-i}\right| = 1$

$\iff |f(z) - i| = 2$

$\iff |z' - z_A| = 2$

$\iff AM' = 2$

$\iff M' \in \mathcal{C}'(A, 2)$

donc l'image du cercle $(\mathcal{C})$ de centre B et de rayon 1 et le cercle $(\mathcal{C}')$ de centre A et de rayon 2

5) a) Mq: $\forall z \neq -i$

$|f(z) - i| = |f(z) - 1| \iff |z - 1| = \sqrt{2}$.

$\forall z \neq -i$

on a : $|f(z) - i| = |f(z) - 1|$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{iz+1}{z+i} - i\right| = \left|\dfrac{iz+1}{z+i} - 1\right|$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{iz+1-iz+1}{z+i}\right| = \left|\dfrac{iz+1-z-i}{z+i}\right|$

$\Leftrightarrow 2 = |z(i-1) - (i-1)|$

$\Leftrightarrow |(i-1)(z-1)| = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\,|z-1| = 2$

$\Leftrightarrow |z-1| = \sqrt{2}$.

b) Déterminer l'image du cercle $(\mathscr{C}')$ de centre C et de rayon $\sqrt{2}$

$M'(z) \in (\mathscr{C}') \Leftrightarrow CM' = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |z' - z_C| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |z-1| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |f(z) - i| = |f(z) - 1|$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{f(z) - i}{f(z) - 1}\right| = 1$

$\Leftrightarrow |z' - z_A| = |z' - z_C|$

$\Leftrightarrow M'A = M'C$

donc le triangle $AM'C$ est isocèle en M

Ainsi l'image du cercle $(\mathscr{C}')$ de centre C et de rayon $\sqrt{2}$.

est le triangle $AM'C$ isocèle en M.

③

6) a) On a $f(z) = \frac{iz+1}{z+i} = \frac{i(z-i)}{z+i}$

b) * <u>Déduire que</u> $OM' = \frac{AM}{BM}$

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$: $f(z) = \frac{i(z-i)}{z+i}$

$$OM' = |z'| = |f(z)| = \left|\frac{i(z-i)}{z+i}\right|$$

$$= \frac{|i| \times |z-i|}{|z+i|}$$

$$= \frac{|z-z_A|}{|z-z_B|}$$

$$\boxed{OM' = \frac{AM}{BM}}$$

* <u>Déduire que</u> $(\vec{e_1}, \vec{OM'}) = (\vec{MB}, \vec{MA}) + \frac{\pi}{2} [2\pi]$

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ $f(z) = \frac{i(z-i)}{z+i}$

Si $z = i \Rightarrow f(z) = 0$

or on a $z_A = i$ donc $f(A) = 0$

si $z \neq i \Rightarrow f(z) = z' = \frac{i(z-i)}{z+i}$

donc $\arg(z') \equiv \arg\left(\frac{i(z-i)}{z+i}\right) [2\pi]$

$\Rightarrow \arg(z') \equiv \arg(i) + \arg\left(\frac{z-i}{z+i}\right) [2\pi]$

$\Rightarrow (\widehat{\Omega, \vec{OM}}) \equiv \frac{\pi}{2} + \arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) [2\pi]$

$\Rightarrow (\widehat{\Omega, \vec{OM}}) \equiv \frac{\pi}{2} + (\widehat{\vec{BM}, \vec{AM}}) [2\pi]$

$\Rightarrow (\widehat{\vec{e_1}, \vec{OM}}) \equiv \frac{\pi}{2} + (\vec{MB}, \vec{MA}) [2\pi]$

6) c) Déterminer l'image du cercle $(\mathcal{C}'')$ de diamètre $[AB]$

Soit $M(z) \in (\mathcal{C} \setminus \{B\})$

si $M = A$

$M = A \iff z = z_A = i$

$\iff z' = 0$

$\iff M' = O$.

donc $f(A) = O$.

si $M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$

$M \in (\mathcal{C} \setminus \{A, B\}) \iff (\widehat{\vec{MB}, \vec{MA}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

ou $(\widehat{\vec{MB}, \vec{MA}}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

$\iff (\widehat{\vec{MB}, \vec{MA}}) + \frac{\pi}{2} \equiv \pi [2\pi]$

ou $(\widehat{\vec{MB}, \vec{MA}}) + \frac{\pi}{2} \equiv 0 [2\pi]$

$\iff (\widehat{\vec{e_1}, \vec{OM'}}) \equiv \pi [2\pi]$ ou $(\vec{e_1}, \vec{OM'}) \equiv 0 [2\pi]$

$\iff \arg(z') \equiv \pi [2\pi]$ ou. $\arg(z') \equiv 0 [2\pi]$

$\iff z' \in \mathbb{R}^*_-$ ou $z' \in \mathbb{R}^*_+$

$\iff z' \in \mathbb{R}^*$.

$\iff M(z') \in (O, \vec{x} \setminus \{O\})$

Ainsi $f((\mathcal{C}) \setminus \{B\}) = (O, \vec{x})$

donc l'image du cercle est l'axe des réels