2 Bac Sc Maths	Structures algébriques	Prof : ZA Said

❖ Loi de composition interne :

- ✓ $*$ est une loi de composition interne dans un ensemble E $\Leftrightarrow \forall(x;y)\in E^2\,;x*y\in E$
- ✓ S une partie stable de $(E;*)\Leftrightarrow S\subset E$ et $\forall(x;y)\in S^2;x*y\in S$
- ✓ $*$ est associative dans $(E;*)$ $\Leftrightarrow \forall(x;y;z)\in E^3;(x*y)*z=x*(y*z)$
- ✓ $*$ est commutative dans $(E;*)\Leftrightarrow \forall(x;y)\in E^2;x*y=y*x$
- ✓ e est l'élément neutre dans $(E\,;*)$ $\Leftrightarrow\ e\in E$ et $\forall x\in E\,;x*e=e*x=x$
- ✓ x admet un symétrique dans $(E\,;*)$ $\Leftrightarrow \exists x'\in E\,;x*x'=x'*x=e$(où e est le neutre)
- ✓ $(x*y)'=y'*x'$
- ✓ a est régulier ou simplifiable dans $(E\,;*)$ $\Leftrightarrow \forall(x;y)\in E^2\,;\begin{cases}x*a=y*a\Rightarrow x=y\\ a*x=a*y\Rightarrow x=y\end{cases}$
- ✓ La loi T est distributive par rapport à la loi $*$ dans E $\Leftrightarrow \forall(x;y;z)\in E^3;\begin{cases}xT(y*z)=(xTy)*(xTz)\\(y*z)Tx=(yTx)*(yTz)\end{cases}$

❖ Homomorphisme :

- ✓ Une application f est un homomorphisme ou morphisme de $(E;*)$ vers $(F;T)$ $\Leftrightarrow \forall(x;y)\in E^2;f(x*y)=f(x)\,T\,f(y)$
- ✓ L'homomorphisme de $(E;*)$ vers $(E;*)$ est un endomorphisme
- ✓ Morphisme bijective de $(E;*)$ vers $(F;T)$ est un isomorphisme
- ✓ L'isomorphisme de $(E;*)$ vers $(E;*)$ s'appelle automorphisme
- ✓ Soit f un morphisme de $(E;*)$ vers $(F;T)$ on a donc :
  - $f(E)$ est une partie stable dans $(F;T)$.
  - $*$ est associative dans $(E;*)$ $\Rightarrow T$ est associative dans $(f(E);T)$
  - $*$ est commutative dans $(E;*)$ $\Rightarrow T$ est commutative dans $(f(E);T)$
  - e est l'élément neutre dans $(E;*)$ $\Rightarrow f(e)$ est l'élément neutre dans $(f(E);T)$
  - x'est le symétrique de x dans $(E;*)$ $\Rightarrow f(x')$est le symétrique de $f(x)$ dans $(f(E);T)$

❖ Matrices

- ✓ $\mathbb{M}_2(\mathbb{R}):\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+x&b+y\\c+z&d+t\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+bz&ay+bt\\cx+dz&cy+dt\end{pmatrix}$$

- ✓ $\mathbb{M}_3(\mathbb{R}):\quad \lambda.\begin{pmatrix}r&s&t\\u&v&w\\x&y&z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda.r&\lambda.s&\lambda.t\\\lambda.u&\lambda.v&\lambda.w\\\lambda.x&\lambda.y&\lambda.z\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}r&s&t\\u&v&w\\x&y&z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+r&b+s&c+t\\d+u&e+v&f+w\\g+x&h+y&i+z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}r&s&t\\u&v&w\\x&y&z\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}ar+bu+cx&as+bv+cy&at+bw++cz\\dr+eu+fx&ds+ev+fy&dt+ew++fz\\gr+hu+ix&gs+hv+iy&gt+hw++iz\end{pmatrix}$$

- ✓ $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
- ✓ $0_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et $0_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

❖ Groupe :

- ✓ $(G;*)$ un groupe $\Leftrightarrow\begin{cases}*\ est\ associative\\ *\ possède\ un\ neutre\\ tout\ élément\ \ de\ G\ est\ symétrisable\end{cases}$
- ✓ $(G;*)$ est un groupe commutatif si $*$ est commutative
- ✓ Tous les éléments d'un groupe sont symétrisables
- ✓ $(H;*)$ sous-groupe de $(G;*)\Leftrightarrow\begin{cases}H\neq\phi\\ \forall(x;y)\in H^2;x*y'\in H\end{cases}$

  $avec\ y'$ est le symétrie de y dans $(G;*)$
- ✓ f morphisme surjective d'un groupe $(G\,;*)$ vers $(F\,;T)$ $\Rightarrow (F;T)$ est un groupe

❖ Anneau et corps :

- ✓ $(A;*;T)$ est un anneau $\Leftrightarrow\begin{cases}(A;*)groupe\ commutatif\\ T\ est\ associative\\ T\ est\ distributive\ par\ rapport\ à *\end{cases}$
- ✓ $(A;*;T)$ est un anneau unitaire si T possède un neutre
- ✓ $(A;*;T)$ est un anneau commutatif si T est commutative
- ✓ $(K;*;T)$ est un corps$\Leftrightarrow\begin{cases}(K;*)groupe\ commutatif\\ (K-\{e\};T)groupe\\ T\ est\ distributive\ par\ rapport\ à *\end{cases}$
- ✓ $(K;*;T)$ est un corps commutatif si T est commutative

❖ Exemples usuels :

- ✓ $(k;+;\times)$ tel que $K\in\{\mathbb{Q};\mathbb{R};\mathbb{C}\}$ est un corps commutatif
- ✓ $(\mathbb{M}_n;+;\times)$ est un anneau unitaire non commutatif $(n\in\{2;3\})$
- ✓ $(\mathbb{Z}\,/\,n\mathbb{Z};+;\times)$ est un anneau unitaire commutatif
- ✓ $(\mathbb{Z}\,/\,p\mathbb{Z};+;\times)$ est un corps commutatif si p est premier

❖ Espace vectoriel réel :

- ✓ "." est une loi de composition externe dans E à coefficients réels $\Leftrightarrow \forall(\alpha,x)\in\mathbb{R}\times E;\alpha.x\in E$
- ✓ $(E;+;.)$ Est un réel espace vectoriel $(\mathbb{R}ev)\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}(E;+)\ groupe\ commutatif\\ (\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2);(\forall(x;y)\in E^2)\begin{bmatrix}(\alpha+\beta).x=\alpha.x+\beta.x\\ \alpha.(x+y)=\alpha.x+\alpha.y\\ (\alpha\beta).x=\alpha.(\beta.x)\\ 1.x=x\end{bmatrix}\end{cases}$$

- ✓ $(F;+;.)$ sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{R}ev\ (E\,;+\,;.)$ $\Leftrightarrow\begin{cases}F\subset E\ et\ F\neq\phi\\ (\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2);(\forall(x;y)\in F^2):\alpha.x+\beta.y\in F\end{cases}$
- ✓ $B=(e_1;e_2;\dots;e_n)$ famille libre dans un $\mathbb{R}ev\ (E\,;+\,;.)$ $\Leftrightarrow\left(\sum_{i=1}^{n}a_i.e_i=0\Rightarrow a_i=0\forall i\in\{1;2;\dots;n\}\right)$
- ✓ $B=(e_1;e_2;\dots;e_n)$ famille génératrice dans un $\mathbb{R}ev\ (E\,;+\,;.)$ $\Leftrightarrow(\forall x\in E)(\exists(a_1;a_2;\dots;a_n)\in\mathbb{R}^n);x=\sum_{i=1}^{n}a_i.e_i$
- ✓ $B=(e_1;e_2;\dots;e_n)$ est une base de le $\mathbb{R}ev\ (E\,;+\,;.)$ $\Leftrightarrow B$ est génératrice et libre $(\dim(E)=card(B))$
- ✓ $\begin{cases}card(B)=\dim(E)\\ B\ est\ libre\ ou\ génératrice\end{cases}\Rightarrow B\ une\ base\ de\ E$
- ✓ $(\mathbb{R};+;.)$ et $(\mathbb{R}^2;+;.)$ et $(\mathbb{R}^3;+;.)$ et $(\mathbb{C};+;.)$et $(\mathbb{M}_2;+;.)$ et$(\mathbb{M}_3;+;.)$ Sont des $\mathbb{R}ev$