Durée : 4 heures

Exercice 01 : (03 points)

⇨ On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation :

$$(E): 143u - 840v = 1 \ .$$

0,25 **1)- a)-** Vérifier que : $143 \times 47 - 840 \times 8 = 1$.

0,5 **b)-** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) en précisant les différentes étapes .

0,5 **c)-** Résoudre dans $\mathbb{Z}/840\mathbb{Z}$ l'équation : $(F): \overline{143} \times d = \overline{1}$.

2)- Soit n un entier naturel tel que : $n \wedge 899 = 1$.

0,25 **a)-** Montrer que : $n \wedge 29 = 1$ et $n \wedge 31 = 1$.

0,5 **b)-** En déduire que : $n^{840} \equiv 1[899]$.

1 **3)-** Déterminer un entier naturel n compris entre 100 et 1000 tel que : $n^{143} \equiv 2[899]$.

Exercice 02 : (03 points)

⇨ Pour tout x et y de l'intervalle $]0,1[$, on pose :

$$x * y = \frac{2xy}{(1-x)(1-y)+2xy} \ .$$

0,25 **1)-** Vérifier que $*$ est une loi de composition interne sur $]0,1[$.

2)- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = \dfrac{e^x}{2+e^x}$.

0,75 **a)-** Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0,1[$ et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

0,75 **b)-** Montrer que f est un homomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(]0,1[,*)$, puis en Déduire la structure de $(]0,1[,*)$ (On précisera son élément neutre et Le symétrique de tout $x \in]0,1[$) .

3)- On considère l'ensemble : $H = \left\{ \dfrac{3^n}{2+3^n} \ / \ n \in \mathbb{Z} \right\}$.

0,75 ✓ Montrer que $(H,*)$ est un sous groupe de $(]0,1[,*)$.

4)- Pour tout $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, on pose : $x^{(n)} = \underbrace{x * x * \dots * x}_{n \ fois}$ Où $x \in]0,1[$.

0,5 ✓ Exprimer $x^{(n)}$ en fonction de n et x , puis déterminer son symétrique Dans $(]0,1[,*)$.

Durée : 4 heures

Exercice 03 : (04 points)

✓ Les parties I et II sont indépendantes .

I- Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on considère l'équation :

$$(E): z^2 - \left[1 + m(1+i)\right]z + im^2 + m = 0 \text{ , où } m \in \mathbb{C}^* - \{i\} \text{ .}$$

0,5 **1)- a)-** Montrer que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = \left(1 + (i-1)m\right)^2$.

0,25 **b)-** En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E) .

0,75 **2)- a)-** Déterminer la nature des ensembles suivant :

$$(D) = \left\{M(m) \in (\mathrm{P}) \,/\, |1 + im| = |m|\right\}$$

$$\text{Et } (\Gamma) = \left\{M(m) \in (\mathrm{P}) \,/\, \arg(1 + im) \equiv \arg(m)[\pi]\right\} \text{ .}$$

0,5 **b)-** Ecrire sous forme trigonométrique l'affixe de chacun des points d'intersection de (D) et (Γ).

II- Dans le plan complexe (P), on considère les points $A(1)$ et $B(1+i)$ et soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{5\pi}{6}$, on pose : $A' = R(A)$ et $B' = R(B)$.

0,25 **1)-** Montrer que : $\overline{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}\right)} \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

2)- Soient E et F les milieux respectifs des segments $[AA']$ et $[BB']$.

0,5 **a)-** Montrer que : $\dfrac{z_E}{z_E - z_F} = i$, puis en déduire que $(OE) \perp (EF)$.

0,5 **b)-** Montrer que la droite (AA') coupe le segment $[BB']$ en F .

3)- Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de points définie par :

$$M_0(i) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}), M_{n+1} = R(M_n) \text{ .}$$

0,25 **a)-** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), aff(M_n) = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n.\pi}{6}\right)}$.

0,25 **b)-** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation : $(F): 12x - 5y = 3$.

0,25 **c)-** En déduire l'ensemble des entiers naturels n tel que : $M_n \in [Ox)$.

Durée : 4 heures

Exercice 04 : (05 points)

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ et f_n la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln(x-1) + \mathrm{P}_n(x) \text{ , où } \mathrm{P}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}.$$

0,5 **1)- a)-** Calculer $\lim\limits_{x\to 1^+} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

0,75 **b)-** Montrer que f_n est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que :

$$(\forall x \in]1,+\infty[), f_n'(x) = \frac{x^n}{x-1}.$$

Puis en déduire que la fonction f_n est une bijection de $]1,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

0,25 **2)- a)-** Montrer que l'équation $(E) : f_n(x) = 0$ admet une solution unique a_n dans L'intervalle $]1,+\infty[$.

0,5 **b)-** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}), f_n(a_{n+1}) = \dfrac{-a_{n+1}}{n+1}$, puis en déduire que La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*-\{1\}}$ est strictement décroissante .

0,75 **c)-** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}), \ln(n+1) \le \mathrm{P}_n(1)$, puis en déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}), 1 < a_n \le 1 + \frac{1}{n+1}.$$

0,25 **d)-** Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*-\{1\}}$ est convergente et préciser sa limite .

0,5 **3)- a)-** Déterminer la monotonie de la fonction f'_{n+1} sur l'intervalle $\left]1, 1+\dfrac{1}{n+1}\right]$.

0,75 **b)-** En appliquant le théorème des accroissements finis à f_{n+1} sur $[a_{n+1}, a_n]$

Montrer que : $a_{n+1} - 1 \le (n+1)(a_n - a_{n+1}) \le a_n - 1$.

0,25 **c)-** En déduire la limite suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} n.(a_n - a_{n+1})$.

0,5 **b)-** Vérifier que : $\dfrac{n.a_n + 1}{n+1} \le a_{n+1} \le \dfrac{(n+1)a_n + 1}{n+2}$

Puis donner un encadrement de a_3.

Durée : 4 heures

Exercice 05 : (05 points)

⇨ Soit F la fonction définie sur $\left[-1,+\infty\right[$ par :

$$F(-1)=\frac{1}{e} \text{ et } \left(\forall x\in \left]-1,+\infty\right[\right), F(x)=\int_x^{2x+1}\frac{e^t}{2t+1}dt .$$

0,25 — **1)-** Montrer que : $\left(\forall x\in \left]-1,+\infty\right[\right), \int_x^{2x+1}\frac{1}{t+1}dt=\ln 2$.

0,5 — **2)- a)-** Montrer que : $\left(\forall x\in \left]-1,+\infty\right[\right), e^x.\ln 2\le F(x)\le e^{2x+1}.\ln 2$.

0,25 — **b)-** Déduire que F est continue à droite en $x_0=-1$.

0,75 — **3)-** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$, puis déduire la nature de la branche infini De la courbe $\left(C_F\right)$ au voisinage de $+\infty$.

0,75 — **4)- a)-** Justifier soigneusement que F est dérivable sur $\left]-1,+\infty\right[$ et que :

$$\left(\forall x\in \left]-1,+\infty\right[\right), F'(x)=\frac{e^x\left(e^{x+1}-1\right)}{x+1}.$$

0,5 — **b)-** Dresser le tableau de variation de F en justifiant votre réponse .

0,75 — **5)- a)-** Montrer que : $\left(\forall x\in \left]-1,+\infty\right[\right), \frac{1}{e}\le\frac{F(x)-F(-1)}{x+1}\le e^{2x+1}$ (On pourra Utiliser le théorème des accroissements finis deux fois)

0,5 — **b)-** Déduire que F est dérivable à droite en $x_0=-1$, puis interpréter le résultat obtenu géométriquement .

0,75 — **c)-** Tracer la courbe $\left(C_F\right)$ dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Fin Du Sujet .