تمارين وحلول

التمرين 1

■ قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

لتكن a وb وc وd أعدادا من المجموعة $\mathbb{Z}$ بحيث: $ad + bc \neq 0$

نفترض أن: $ad+bc$ يقسم الأعداد a وb وc وd

أثبت أن: $ad+bc=1$ أو $ad+bc=-1$

الحل

نضع: $p=ad+bc$ ؛ $p \neq 0$

لدينا: $p|a$ و$p|b$ و$p|c$ و$p|d$

ومنه يوجد α وβ وγ وλ من $\mathbb{Z}$ بحيث: $a = \alpha p$ و$b = \beta p$ و$c = \gamma p$ و$d = \lambda p$

إذن:
$$p = ad + bc = \alpha\lambda p^2 + \gamma\beta p^2$$
$$= p^2(\alpha\lambda + \gamma\beta)$$

يعني أن: $p^2|p$ ، ولدينا $p \neq 0$ ، إذن $p|1$

يعني أن $p=1$ أو $p=-1$

وبالتالي: $ad+bc=1$ أو $ab+bc=-1$

التمرين 2

2) ليكن a وb عددين صحيحين طبيعيين،
بين أن العدد $(a+2b)^4-a^4$ يقبل القسمة على 8.

الحل

ليكن a وb عنصرين من IN.

لنبين أن العدد $(a+2b)^4-a^4$ يقبل القسمة على 8

لدينا:
$$(a + 2b)^4 - a^4 = ((a + 2b)^2 - a^2)((a + 2b)^2 + a^2)$$
$$= (4ab + 4b^2)(2a^2 + 4ab + 4b^2)$$
$$= 8(ab + b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2)$$

وبما أن: $8 \equiv 0[8]$

فإن: $8(ab + b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2) \equiv 0[8]$

أي: $(a + 2b)^4 - a^4 \equiv 0[8]$،

يعني أن العدد $(a+2b)^4-a^4$ يقبل القسمة على 8.

التمرين 3

ليكن a وb عنصرين من IN بحيث: $a \geq 3$ و$b \geq 1$

إذا علمت باقي وخارج القسمة الإقليدية للعدد $a-1$ على b، فما هو باقي وخارج القسمة الأقليدية للعدد $a.b^n-1$ على b^{n+1} مع $n \in IN$.

الحل

بإنجاز القسمة الأقليدية للعدد $a-1$ على b، لدينا:

$$(\exists!\,(q,r) \in IN \times IN)\ ;\ a-1=bq+r \text{ و } 0 \leq r < b$$

حيث q هو الخارج وr هو الباقي

لنبين أن: $(\exists!\,(q',r') \in IN \times IN)\ /ab^n - 1 = q'b^{n+1} + r'$ و $0 \leq r' < b^{n+1}$

لدينا:

$$a - 1 = bq + r \Longleftrightarrow (a-1)b^n = b^{n+1}q + rb^n$$
$$\Longleftrightarrow ab^n - b^n = b^{n+1}.q + rb^n$$
$$\Longleftrightarrow ab^n - 1 = b^{n+1}.q + (r+1)b^n - 1$$

نضع: $q'=q$ و $r'=(r+1)b^n-1$

لنبين أن: $0 \leq (r+1)b^n - 1 < b^{n+1}$

لدينا: $0 \leq r < b \Rightarrow 1 \leq r+1 < b+1$

$$\Rightarrow 1 \leq r+1 \leq b$$

[نذكر أن: $(\forall\,(x,y) \in \mathbb{Z}^2)\ x \leq y \Longleftrightarrow x < y+1$]

إذن: $b^n \leq b^n(r+1) \leq b^{n+1}$

يعني أن: $b^n - 1 \leq b^n(r+1) - 1 \leq b^{n+1} - 1$

ومنه: $b^n - 1 \leq b^n(r+1) - 1 < b^{n+1}$

ولدينا: $b^n - 1 \geq 0$ لأن $b \geq 1$

وبالتالي: $0 \leq b^n(r+1) - 1 < b^{n+1}$

إذن الباقي هو: $r'=b^n(r+1)-1$ والخارج $q'=q$

التمرين 4

1- نضع: $A = \{n \in IN / n > 6\}$

حدد n من A بحيث: $n-6 \mid n+9$

2- حدد n من $\mathbb{Z}$ بحيث: $n - 3 \mid n^3 - 3$ ، $n \neq 3$

الحل

1– لنحدد n من A بحيث $n+9\,|\,n-6$: نضع $S = \{n \in A / n-6 | n-9\}$

ليكن n عنصرا من A، لدينا:

$$n-6|n+9 \Leftrightarrow \frac{n+9}{n-6} \in IN$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{15}{n-6} \in IN$$

$$\Leftrightarrow n-6/15$$

$$\Leftrightarrow n-6 \in \{1,3,5,15\}$$

$$\Leftrightarrow n \in \{7,9,11,\mathbb{Z}\}$$

إذن : $S = \{7,9,11,\mathbb{Z}\}$

2– لنحدد n من $\mathbb{Z}$ بحيث: $(n-3)/(n^3-3)$

ليكن n عنصرا من $\mathbb{Z}$ و $n \neq 3$

لدينا:

$$n-3/n^3-3 \Leftrightarrow \frac{n^3-3}{n-3} \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^3-27+24}{n-3} \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow n^2+3n+9+\frac{24}{n-3} \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow n-3/24 \Leftrightarrow n-3 \in Div(24)$$

بما أن: $Div(24) = \{1,2,3,4,6,8,12,24,-1,-2,-3,-4,-6,-8,-12,-24\}$

فإن الأعداد التي تحقق $n-3/n^3-3$ في $\mathbb{Z}$ هي

$$S = \{1,2,3,4,6,8,12,24,-1,-2,-3,-4,-6,-8,-12,-24\}$$

التمرين 5

ليكن a وb عنصرين من $\mathbb{Z}$

بين أن العدد $N=ab(a^2-b^2)$ يقبل القسمة على 3.

الحل

ليكن a وb عنصرين من $\mathbb{Z}$ لنبين أن: $3/N$

لدينا: $N=ab(a-b)(a+b)$

لدينا: $a=3p+r$ حيث $p \in \mathbb{Z}$ و $r \in \{0,1,2\}$

ولدينا: $b=3q+r'$ حيث $q \in \mathbb{Z}$ و $r' \in \{0,1,2\}$

إذا كان: $3|a$ أو $3|b$ فإن $3|N$

So cute v!

إذا كان: 3 لا يقسم a و3 لا يقسم b فإنه لدينا الحالات التالية:

حالة: (1) $\begin{cases} a = 3p + 1 \\ b = 3q + 1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a = 3p + 2 \\ b = 3q + 2 \end{cases}$

لدينا: $a-b=3(p-q)$، ومنه فإن: $3 \mid a - b$

إذن: $3 \mid N$

حالة: (2) $\begin{cases} a = 3p + 2 \\ b = 3q + 1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a = 3p + 1 \\ b = 3q + 2 \end{cases}$

لدينا: $a+b=3(p+q+1)$، ومنه: $3 \mid a + b$

إذن: $3 \mid N$

وبالتالي: 3 يقسم N لكل a وb من $\mathbb{Z}$.

التمرين 6

1- حل في المجموعة $IN \times IN$ المعادلة: $2xy+2x+y=99$

2- حل في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة: $xy+3x-5y=35$

الحل

1- لنحل في $IN \times IN$ المعادلة التالية: $2xy+2x+y=99$

لدينا:

$$2xy + 2x + y = 99 \iff 2xy + 2x + 1 + y = 100$$
$$\iff 2x(y + 1) + (y + 1) = 100$$
$$\iff (2x + 1)(y + 1) = 100$$

إذن: $2x+1$ و$y+1$ هما قاسمان موجبان للعدد 100

ولدينا مجموعة قواسم 100 الموجبة هي: $D^+_{100} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$

لتحديد x وy ندرج الجدول التالي:

$2x+1$	1	2	4	5	10	20	25	50	100
$y+1$	100	50	25	20	10	5	4	2	2
x	0			2			12		
y	99			19			3		

إذن مجموعة حلول المعادلة هي: $\{(0, 99) ; (2, 19) ; (12, 3)\}$

2- لنحل في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة: $xy+3x-5y=35$

لدينا: $xy + 3x - 5y = 35 \Longleftrightarrow x(y+3) - 5(y+3) = 20$

$\Longleftrightarrow (y+3) \times (x-5) = 20$

إذن $(x-5)$ و$(y+3)$ هما قاسمان للعدد 20

لتحديد x وy ندرج الجدول التالي:

$x-5$	1	2	4	5	10	20	-1	-2	-4	-5	-10	-20
$y+3$	20	10	5	4	2	1	-20	-10	-5	-4	-2	-1
x	6	7	9	10	15	25	4	3	1	0	-5	-15
y	17	7	2	1	-1	-2	-23	-13	-8	-7	-5	-4

إذن مجموعة حلول المعادلة في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ هي:

$\{(6,17);(7,7);(9,2);(10,1);(15,-1);(25,-2);(4,-23);(3,-13);(1,-8);$

$(0,-7);(-5,-5);(-15,-4)\}$

التمرين 6

7) حدد جميع الأزواج (x,y) من $IN^{*}\times IN^{*}$ التي تحقق ما يلي: $\dfrac{x+y}{x^2 - xy + y^2} = \dfrac{2}{7}$

الحل

نلاحظ أنه إذا كان (x,y) حلا للمعادلة المقترحة فإن الزوج (y,x) حلٌّ لها كذلك.

ليكن (x,y) من $IN^{*}\times IN^{*}$ مع $x \geq y$، بحيث: $\dfrac{x+y}{x^2 - xy + y^2} = \dfrac{2}{7}\ (1)$

لدينا: $\dfrac{x+y}{x^2 - xy + y^2} = \dfrac{2}{7} \Longleftrightarrow 7(x+y) = 2(x^2 - xy + y^2)$

ومنه فإن: $2/7(x+y)$

Beau

وبما أن: $2 \wedge 7 = 1$ وحسب مبرهنة $GAUSS$ فإن $2/x+y$

ومنه: $(\exists u \in IN^{*}) / x + y = 2u$

لدينا: $(\exists u \in IN^{*}) / x + y = 2u$ أي $x+y$ عدد زوجي

إذن $x-y$ عدد زوجي ومنه $(\exists v \in IN) / x - y = 2v$

وبالتالي المعادلة (1) تكافئ: $7u=3v^2+u^2$

لأن: $x+y=2u$ و$x-y=2v$ ومنه $x=u+v$ و$y=u-v$

أي إن: $x^2-xy+y^2=(x-y)^2+xy=4v^2+u^2-v^2=3v^2+u^2$

لدينا إذن: $7u = 3v^2 + u^2 \iff u(7-u) = 3v^2$

وبما أن: $v^2 \geq 0$ فإن: $7 - u \geq 0$ ومنه $1 \leq u \leq 7$

وبالتالي: $u \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$

إذا كان $u=1$ فإن $v^2=2$ وهذا غير ممكن لأن v عنصر من IN وباستعمال المتساوية $7u-u^2=3v^2$ لدينا الجدول التالي:

u	1	2	3	4	5	6	7
$3v^2$	6	10	12	12	10	6	0
v			2	2			0
(x,y)			$(5,1)$	$(6,2)$			$(7,7)$

ونتحقق من الأزواج أن التالية $(5,1)$ و$(6,2)$ و$(7,7)$ تحقق (1) وحسب الملاحظة المشار إليها فإن الأزواج التي تحقق $\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2} = \dfrac{2}{7}$

هي: $(5,1)$; $(1,5)$; $(6,2)$; $(7,7)$ و$(2,6)$.

■ الموافقة بترديد n المجموعة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ **التمرين 8**

8) حدد رقم الوحدات للعدد $N = 1987^{1991^{1983}}$

الحل

لتحديد رقم الوحدات للعدد N يكفي تحديد باقي القسمة الإقليدية للعدد N على 10.

لدينا: $1987 \equiv 7[10]$ و$1987^2 \equiv 9[10]$

و$1987^3 \equiv 3[10]$ و$1987^4 \equiv 1[10]$

ومنه فإن: $1987^{4k} \equiv 1[10]$ ، $1987^{4k+1} \equiv 7[10]$

$1987^{4k+2} \equiv 9[10]$ ، $1987^{4k+3} \equiv 3[10]$ لكل عنصر k من IN

لنحدد إذن باقي القسمة الأقليدية للعدد 1991^{1983} على 4.

IR

لدينا: $1991 \equiv 3[4]$ و$1991^2 \equiv 1[4]$

وبما أن 1983 عدد فردي فإن: $1991^{1983} \equiv 3[4]$

يعني أن $1991^{1983} = 3 + 4k$ حيث $k \in IN$

وبالتالي: $1987^{1991^{1983}} \equiv 3[10]$

يعني أن 3 هو رقم الوحدات للعدد N.

التمرين 9

بين أن العدد $(9518)^{42} - 4$ مضاعف للعدد 5

الحل

لدينا: $9518 \equiv 3[5]$

لنبحث عن مجموعة الأعداد n من IN بحيث يكون $3^n \equiv 1[5]$

لدينا: $3^0 \equiv 1[5]$

$3 \equiv 3[5]$

$3^2 \equiv 4[5]$

$3^3 \equiv 2[5]$

$3^4 \equiv 1[5]$

إذن باقي القسمة الإقليدية لـ 3^n على 5 مرتبط بباقي القسمة الإقليدية للعدد n على 4.

لدينا: $42=4\times10+2$

ومنه: $9518 \equiv 3[5] \Rightarrow (9518)^{42} \equiv (3)^{42}[5]$

$$\Rightarrow (9518)^{42} \equiv (3^4)^{10} \times 3^2[5]$$

وبما أن: $\begin{cases} (3^4)^{10} \equiv 1[5] \\ 3^2 \equiv 4[5] \end{cases}$

فإن: $(3^4)^{10} \times 3^2 \equiv 4[5]$

إذن: $(9518)^{42} \equiv 4[5]$

أي: $(9518)^{42} - 4 \equiv 0[5]$

وبالتالي: $(9518)^{42} - 4$ مضاعف للعدد 5.

التمرين 10

1- حدد بواقي القسمة الإقليدية على 7 للأعداد التالية:

$$5^7 \,;\, 5^6 \,;\, 5^5 \,;\, 5^4 \,;\, 5^3 \,;\, 5^2 \,;\, 5$$

2- حدد، تبعا لقيم العدد الصحيح الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7.

الحل

تذكير:

$\begin{pmatrix} x \equiv r[n] \\ 0 \le r < n-1 \end{pmatrix} \iff$ (r هو باقي القسمة الإقليدية لـ x على n)

1- لدينا:

$5 \equiv 5[7]$ إذن 5 هو باقي القسمة الإقليدية لـ 5 على 7.

$5^2 \equiv 4[7]$ إذن 4 هو باقي القسمة الإقليدية لـ 5^2 على 7.

$5^3 \equiv 6[7]$ إذن 6 هو باقي القسمة الإقليدية لـ 5^3 على 7

$5^4 \equiv 2[7]$ إذن 2 هو باقي القسمة الإقليدية لـ 5^4 على 7

$5^5 \equiv 3[7]$ إذن 3 هو باقي القسمة الإقليدية لـ 5^5 على 7

$5^6 \equiv 1[7]$ إذن 1 هو باقي القسمة الإقليدية لـ 5^6 على 7

$5^7 \equiv 5[7]$ إذن 5 هو باقي القسمة الإقليدية لـ 5^7 على 7

2- بملاحظة أن: $5^6 \equiv 1[7]$ يمكن اعتبار أن باقي القسمة الإقليدية لـ 5^n على 7 مرتبط بباقي القسمة الإقليدية لـ n على 6 وبالتالي لدينا 6 حالات.

الحالة 1: $n \equiv 0[6]$ **(أي $n=6k$ مع $k \in IN$)**

لدينا: $5^n = 5^{6k} = (5^6)^k$

ومنه: $5^6 \equiv 1[7] \Rightarrow (5^6)^k \equiv 1^k[7]$

$\Rightarrow 5^n \equiv 1[7]$

إذن: 1 هو باقي القسمة الإقليدية لـ 5^n على 7 في هذه الحالة.

الحالة 2: $n \equiv 1[6]$ **(أي $n=6k+1$ مع $k \in IN$)**

لدينا: $5^n = 5^{6k+1} = (5^6)^k \times 5$ ، ومنه: $\begin{cases}(5^6)^k \equiv 1[7]\\ 5 \equiv 5[7]\end{cases} \Rightarrow 5^{6k+1} \equiv 5[7]$

$\Rightarrow 5^n \equiv 5[7]$

إذن: 5 هو باقي القسمة الإقليدية لـ 5^n على 7 في هذه الحالة.

الحالة 3: $n \equiv 2[6]$ **(أي $n=6k+2$ مع $k \in IN$)**

لدينا: $5^n = 5^{6k+2} = (5^6)^k \times 5^2$

ومنه: $\begin{cases}(5^6)^k \equiv 1[7]\\ 5^2 \equiv 4[7]\end{cases} \Rightarrow 5^{6k+2} \equiv 4[7]$

$\Rightarrow 5^n \equiv 4[7]$

إذن 4 باقي القسمة الإقليدية لـ 5^n على 7 في هذه الحالة.

الحالة 4: $n \equiv 3[6]$ **(أي $n=6k+3$ مع $k \in IN$)**

لدينا: $5^n = (5^6)^k \times 5^3$

ومنه : $\begin{cases}(5^6)^k \equiv 1[7] \\ 5^3 \equiv 6[7]\end{cases} \Rightarrow 5^{6k+3} \equiv 6[7]$

$\Rightarrow 5^n \equiv 6[7]$

إذن 6 هو باقي القسمة الإقليدية لـ 5^n على 7 في هذه الحالة

الحالة 5: $n \equiv 4[6]$ (أي $n=6k+4$ مع $k \in IN$)

لدينا: $5^n = (5^6)^k \times 5^4$

ومنه: $\begin{cases}(5^6)^k \equiv 1[7] \\ 5^4 \equiv 2[7]\end{cases} \Rightarrow 5^{6k+4} \equiv 2[7]$

$\Rightarrow 5^n \equiv 2[7]$

إذن 2 هو باقي القسمة الإقليدية لـ 5^n على 7 في هذه الحالة.

الحالة 6: $n \equiv 5[6]$ (أي $n=6k+5$ مع $k \in IN$)

لدينا: $5^n = (5^6)^k \times 5^5$

ومنه: $\begin{cases}(5^6)^k \equiv 1[7] \\ 5^5 \equiv 3[7]\end{cases} \Rightarrow 5^{6k+5} \equiv 3[7]$

$\Rightarrow 5^n \equiv 3[7]$

إذن 3 هو باقي القسمة الإقليدية لـ 5^n على 7 في هذه الحالة.

التمرين 11

احسب العدد الصحيح الطبيعي x في الحالتين التاليتين:

1- $(2601)^{187} \equiv x[11]$ و $0 \leq x < 11$

2- $(82324)^{625} \equiv x[7]$ و $0 \leq x < 7$

الحل

1- لدينا: $2601 \equiv 5[11]$

لنبحث عن مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية n بحيث يكون لدينا $5^n \equiv 1[11]$

لدينا: $5 \equiv 5[11]$

$5^2 \equiv 3[11]$

$5^3 \equiv 4[11]$

$5^4 \equiv 9[11]$

$5^5 \equiv 1[11]$

إذن باقي القسمة الإقليدية لـ 5^n على 11 مرتبط بباقي القسمة الإقليدية لـ n على 5.

لدينا: $187=5\times37+2$

$$5^{5} \equiv 1[11] \Rightarrow (5^{5})^{37} \equiv 1[11]$$

ومنه:
$$\Rightarrow (5^{5})^{37} \times 5^{2} \equiv 5^{2}[11]$$
$$\Rightarrow 5^{187} \equiv 3[11]$$

ومن جهة أخرى لدينا: $2601 \equiv 5[11] \Rightarrow (2601)^{187} \equiv (5)^{187}[11]$

إذن: $(2601)^{187} \equiv 3[11]$

وبالتالي: $x=3$

2- لدينا: $82324 \equiv 4[7]$

لنبحث عن مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية n بحيث يكون لدينا: $4^{n} \equiv 1[7]$

لدينا:
$$4 \equiv 4[7]$$
$$4^{2} \equiv 2[7]$$
$$4^{3} \equiv 1[7]$$

إذن باقي القسمة الإقليدية لـ 4^n على 7 مرتبط بباقي القسمة الإقليدية لـ n على 3.

لدينا: $625=3\times208+1$

ومنه:
$$4^{3} \equiv 1[7] \Rightarrow (4^{3})^{208} \equiv 1[7]$$
$$\Rightarrow (4^{3})^{208} \times 4^{1} \equiv 4^{1}[7]$$
$$\Rightarrow (4)^{625} \equiv 4[7]$$

ومن جهة أخرى لدينا: $82324 \equiv 4[7] \Rightarrow (82324)^{625} \equiv (4)^{625}[7]$

إذن: $(82324)^{625} \equiv 4[7]$

وبالتالي: $x=4$

التمرين 12

1- بين أن: $(\forall n \in IN); 10^{3n} \equiv 1[27]$:

2- نضع: $A=10^{100}+100^{10}$

حدد باقي القسمة الإقليدية للعدد A على 27.

الحل

1) لنبين أن: $(\forall n \in IN); 10^{3n} \equiv 1[27]$

ليكن n عنصرا من IN،

لدينا: $27\times37=999$، أي: $999 \equiv 0[27]$

ومنه: $1000 \equiv 1[27]$، أي: $10^3 \equiv 1[27]$

إذن: $10^{3n} \equiv 1[27]$

وبالتالي: $(\forall n \in IN); 10^{3n} \equiv 1[27]$

2) لنحدد باقي القسمة الإقليدية للعدد A على 27

لدينا: $A = 10^{100} + 10^{20} = 10^{3\times 33+1} + 10^{3\times 6+2}$

$= 10^{3\times 33} \times 10 + 10^{3\times 6} \times 10^2$

ولدينا، حسب السؤال 1) $10^{3\times 33} \equiv 1[27]$ و $10^{3\times 6} \equiv 1[27]$

ومنه: $A \equiv 10 + 10^2[27]$ أي: $A \equiv 110[27]$

وبما أن: $110 \equiv 3[27]$ فإن: $A \equiv 3[27]$

يعني أن العدد 3 هو باقي القسمة الإقليدية للعدد A على 27.

التمرين 13

بين أن لكل عنصر n من IN،

1) العدد $A=3^{2n+1}+2^{n+2}$ يقبل القسمة على 7.

2) العدد $B=3^{n+3}-4^{4n+2}$ يقبل القسمة على 11.

الحل

ليكن n عنصرا من IN

1) لنبين أن العدد $A=3^{2n+1}+2^{n+2}$ يقبل القسمة على 7، أي $A \equiv 0[7]$.

لدينا: $9 \equiv 2[7]$، أي: $3^2 \equiv 2[7]$، ومنه: $3^{2n} \equiv 2^n[7]$

إذن: $3^{2n+1} \equiv 3 \times 2^n[7]$

وبما أن: $3 \equiv -4[7]$ أي: $3 \equiv -2^2[7]$، فإن: $3 \times 2^n \equiv -2^{n+2}[7]$

ومنه: $3^{2n+1} \equiv -2^{n+2}[7]$، يعني: $3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 0[7]$

إذن العدد: $A=3^{2n+1}+2^{n+2}$ يقبل القسمة على 7.

2) لنبين أن العدد $B=3^{n+3}-4^{4n+2}$ يقبل القسمة على 11، أي: $B = 0[11]$

لدينا: $4 \equiv 4[11]$ و $4^2 \equiv 5[11]$ و $4^3 \equiv 9[11]$ و $4^4 \equiv 3[11]$

ومنه: $4^{4n} \equiv 3^n[11]$

وبما أن: $4^2 \equiv 5[11]$ و $3^3 \equiv 5[11]$ فإن: $4^2 \equiv 3^3[11]$

ومنه: $\begin{cases} 4^{4n} \equiv 3^n[11] \\ 4^2 \equiv 3^3[11] \end{cases} \Rightarrow 4^{4n} \times 4^2 \equiv 3^n \times 3^3[11]$

أي: $4^{4n+2} \equiv 3^{n+3}[11]$، يعني: $3^{n+3} - 4^{4n+2} \equiv 0[11]$

إذن العدد $B = 3^{n+3} - 4^{4n+2}$ يقبل القسمة على 11.

التمرين 14

1) ليكن a عنصرا من IN و $a \geq 2$
بين بالترجع أن: $(\forall n \in IN);(2a+1)^n(a+1)-1 \equiv 0[a]$
2) استنتج أن: $(\forall n \in IN);11^{n+2}-11^n-20 \equiv 0[100]$

الحل

1) لنبين بالترجع أن: $(\forall n \in IN);(2a+1)^n(a+1)-1 \equiv 0[a]$
لكل عنصر n من IN، نضع: $u_n=(2a+1)^n(a+1)-1$
، من أجل $n=0$، لدينا: $u_0=(2a+1)^0(a+1)-1=a$
ولدينا: $a \equiv 0[a]$
إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.
، ليكن n عنصرا من IN، نفترض أن $u_n \equiv 0[a]$، ونبين أن: $u_{n+1} \equiv 0[a]$.
لدينا:

$$u_n=(2a+1)^n(a+1)-1 \Rightarrow (2a+1)u_n=(2a+1)^{n+1}.(a+1)-2a-1$$
$$\Rightarrow (2a+1)u_n=\left((2a+1))^{n+1}.(a+1)-1\right)-2a$$
$$\Rightarrow (2a+1)u_n=u_{n+1}-2a$$

ومنه: $u_{n+1}=(2a+1)u_n+2a$
وبما أن: $u_n \equiv 0[a]$ و $a \equiv 0[a]$
فإن: $(2a+1)u_n \equiv 0[a]$ و $2a \equiv 0[a]$، إذن: $(2a+1)u_n+2a \equiv 0[a]$
أي: $u_{n+1} \equiv 0[a]$، يعني الخاصية صحيحة من أجل $n+1$
وبالتالي، حسب مبدإ الترجع: $(\forall n \in IN);u_n \equiv 0[a]$
أي: $(\forall n \in IN);(2a+1)^n(a+1)-1 \equiv 0[a]$
2) استنتاج

ليكن n عنصرا من IN، لدينا:

$$\begin{aligned}11^{n+2}-11^n-20 &= 11^n(11^2-1)-20\\ &= 11^n \times 120-20\\ &= 20(11^n \times 6-1)=20((2\times5+1)^n(5+1)-1)\end{aligned}$$

وحسب السؤال 1)، ومن أجل $a=5$، لدينا:
إذن: $(2\times5+1)^n.(5+1)-1 \equiv 0[5]$، أي: $11^n \times 6-1 \equiv 0[5]$
ومنه: $(\exists k \in IN)|11^n \times 6-1=5k$
يعني أن: $(\exists k \in IN)|11^{n+2}-11^n-20=20\times5k=100k$
وبالتالي: $11^{n+2}-11^n-20 \equiv 0[100]$
$(\forall n \in IN);11^{n+2}-11^n-20 \equiv 0[100]$

التمرين 15

لكل عنصر n من IN نضع : $u_n=n(n^2+5)$

بين أن $2|u_n$ و $3|u_n$

ثم استنتج أن $6|u_n$

الحل

• لنبين أن 2 يقسم u_n لكل n من IN

ليكن n عنصرا من IN

إذا كان $n \equiv 0[2]$ فإن: $n(n^2+5) \equiv 0[2]$ يعني أن 2 يقسم u_n

إذا كان $n \equiv 1[2]$ فإن: $n^2+5 \equiv 0[2]$

ومنه: $n(n^2+5) \equiv 0[2]$ يعني أن 2 يقسم u_n

وبالتالي 2 يقسم u_n لكل n من IN.

• لنبين أن 3 يقسم u_n لكل n من IN.

ليكن n عنصرا من IN.

إذا كان $n \equiv 0[3]$ فإن: $n(n^2+5) \equiv 0[3]$

يعني أن 3 يقسم u_n.

إذا كان $n \equiv 1[3]$ فإن: $n^2+5 \equiv 0[3]$ ومنه فإن $n(n^2+5) \equiv 0[3]$، يعني أن 3 يقسم u_n

إذا كان $n \equiv 2[3]$ فإن: $n^2+5 \equiv 0[3]$ ومنه فإن: $n(n^2+5) \equiv 0[3]$، يعني أن 3 يقسم u_n.

وبالتالي 3 يقسم u_n لكل n من IN.

• الاستنتاج:

ليكن n عنصرا من IN، لدينا: $2|u_n$ و $3|u_n$ و $2 \wedge 3 = 1$ إذن $2\times3|u_n$

أي: $6|u_n$ إذن 6 يقسم u_n لكل n من IN.

التمرين 16

أثبت أن:

1- $n(n^6-1) \equiv 0[7]$ $(\forall n \in IN)$

2- $n(n^2-1) \equiv 0[6]$ $(\forall n \in IN)$

3- $4^n+6n-1 \equiv 0[9]$ $(\forall n \in IN)$

4- $3^{2n}-2^n \equiv 0[7]$ $(\forall n \in IN)$

الحل

1- نعتبر . المجموعة: $\mathbb{Z}/_7\mathbb{Z}=\{\bar{0};\bar{1};\bar{2};\bar{3};\bar{4};\bar{5};\bar{6}\}$

$\bar{n}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{n}^6$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\overline{n^6-1}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\overline{n(n^6-1)}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

إذن: $\overline{n(n^6-1)}=\bar{0}\quad(\forall n\in IN)$

أي: $n(n^6-1)\equiv 0[7]\quad(\forall n\in IN)$

2- نعتبر المجموعة $\mathbb{Z}/_6\mathbb{Z}=\{\bar{0};\bar{1};\bar{2};\bar{3};\bar{4};\bar{5}\}$

$\bar{n}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{n}^2$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$
$\overline{n^2-1}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\overline{n(n^2-1)}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

إذن: $\overline{n(n^2-1)}=\bar{0}\quad(\forall n\in IN)$

أي: $n(n^2-1)\equiv 0[6]\quad(\forall n\in IN)$

ملحوظة: (يمكن استعمال مبرهنة *Fermat* في السؤالين 1 و 2)

3- لنبين باستعمال البرهان بالترجع أن: $4^n+6n-1\equiv 0[9]\quad(\forall n\in IN)$

لدينا من أجل $n=0$ ؛ $4^0+6\times0-1=0$ و $0\equiv 0[9]$

ليكن n عنصرا من IN إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفترض أن: $4^n+6n-1\equiv 0[9]$

لنبين أن: $4^{n+1}+6(n+1)-1\equiv 0[9]$

لدينا: $4^{n+1}+6(n+1)-1=4.4^n+6n+5$

بما أن: $4^n+6n-1\equiv 0[9]$ فإن: $4^n+6n-1\equiv 9k\ /\ (\exists k\in IN)$ يعني أن: $4^n=9k-6n+1$

ومنه:

$$\begin{aligned}4^{n+1}+6(n+1)-1&=4.4^n+6n+5\\&=4(9k-6n+1)+6n+5\\&=36k-18n+9\\&=9(4k-2n+1)\\&=9k'\quad(k'=4k-2n+1)\end{aligned}$$

إذن: $4^{n+1}+6(n+1)-1\equiv 0[9]$

وبالتالي: الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

ومنه: $4^n+6n-1\equiv 0[9]\quad(\forall n\in IN)$

4- ليكن n من IN، لدينا: $3^{2n} = (3^2)^n = (9)^n$

ومنه: $9 \equiv 2[7] \Rightarrow (9)^n \equiv (2)^n[7]$

$\Rightarrow 3^{2n} - 2^n \equiv 0[7]$

إذن: $(\forall n \in IN)\, 3^{2n} - 2^n \equiv 0[7]$

التمرين 16

1- حل في المجموعة $\mathbb{Z}$ المعادلات التالية:

أ) $3x \equiv 4[5]$ ب) $2x \equiv 3[5]$ ج) $2x \equiv 4[6]$ د) $2x \equiv 3[6]$

2- حل في المجموعة IN المعادلة: $3^n + 4n + 1 \equiv 0[8]$

الحل

1- أ) لنحل في $\mathbb{Z}$ المعادلة $3x \equiv 4[5]$

لدينا: $3 \times 2 \equiv 1[5]$

ومنه: $3x \equiv 4[5] \Longleftrightarrow 2 \times 3x \equiv 8[5]$

$\Longleftrightarrow x \equiv 3[5]$

$\Longleftrightarrow x \equiv 3 + 5k\,; k \in IZ$

إذن: $S = \{3 + 5k\,; k \in \mathbb{Z}\}$

ب) لنحل في $\mathbb{Z}$ المعادلة $2x \equiv 3[5]$

لدينا: $2x \equiv 3[5] \Longleftrightarrow 6x \equiv 9[5]$

وبما أن: $6 \equiv 1[5]$ و $9 \equiv 4[5]$

فإن: $2x \equiv 3[5] \Longleftrightarrow x \equiv 4[5]$

$\Longleftrightarrow x = 4 + 5k\,; k \in \mathbb{Z}$

إذن: $S = \{4 + 5k\,; k \in \mathbb{Z}\}$

ج) لنحل في $\mathbb{Z}$ المعادلة $2x \equiv 4[6]$

ليكن x عنصرا من $\mathbb{Z}$ لدينا: $2x \equiv 4[6] \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\,; 2x = 4 + 6k$

$\Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\,; x = 2 + 3k$

إذن: $S = \{2 + 3k\,; k \in \mathbb{Z}\}$

د) لنحل في $\mathbb{Z}$ المعادلة $2x \equiv 3[6]$

لدينا: $2x \equiv 3[6] \Longleftrightarrow \bar{2}x = \bar{3}$ في $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

ولدينا: $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}\}$

نستعمل الجدول التالي الذي يحدد قيم $\bar{2}x$ في $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$، وذلك بتعويض المجهول x بعناصر المجموعة $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$

حسب هذا الجدول المعادلة لا تقبل حلول في $\mathbb{Z}$، أي $S = \phi$

2- لنحل في IN المعادلة: $3^n + 4n + 1 \equiv 0[8]$

لدينا: $3 \equiv 3[8]$ و $3^2 \equiv 1[8]$

ومنه: $3^{2k} \equiv 1[8]$ لكل k من IN

ليكن n عنصرا من IN

إذا كان $n \equiv 0[2]$ فإن: $3^n \equiv 1[8]$ و $4n \equiv 0[8]$

ومنه: $3^n + 4n + 1 \equiv 2[8]$

إذا كان: $n \equiv 1[2]$ فإن: $3^n \equiv 3[8]$ و $4n \equiv 4[8]$

ومنه: $3^n + 4n + 1 \equiv 0[8]$

وبالتالي فإن مجموعة حلول المعادلة $3^n + 4n + 1 \equiv 0[8]$ هي: $S = \{2k + 1 ; k \in IN\}$

التمرين 18

1- حل في المجموعة $\mathbb{Z}/_7\mathbb{Z}$

أ- $\bar{2}x = \bar{1}$ ؛ ب- $\bar{2}x = \bar{3}$

ج- $x^5 = \bar{1}$ ؛ د- $x^{20} = \bar{1}$

2- حدد جميع الأعداد الصحيحة الطبيعية n بحيث 7 يقسم $n^{20}-1$

الحل

1- لدينا: $\mathbb{Z}/_7\mathbb{Z} = \{\bar{0};\bar{1};\bar{2};\bar{3};\bar{4};\bar{5};\bar{6}\}$

نعوض المجهول x في المعادلات المقترحة بعناصر المجموعة $\mathbb{Z}/_7\mathbb{Z}$ فنحصل على الجدول التالي:

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
x^5	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$
x^{20}	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$

من خلال هذا الجدول لدينا النتائج التالية:

أ) مجموعة حلول المعادلة $\bar{2}x = \bar{1}$ هي: $\{\bar{4}\}$

ب) مجموعة حلول المعادلة $\bar{2}x = \bar{3}$ هي: $\{\bar{5}\}$

ج) مجموعة حلول المعادلة $x^5 = \bar{1}$ هي: $\{\bar{1}\}$

د) مجموعة حلول المعادلة $x^{20} = \bar{1}$ هي: $\{\bar{1};\bar{6}\}$

2) الأعداد الصحيحة الطبيعية n التي تحقق 7 يقسم $n^{20}-1$ هي التي تكتب على الشكل $n=1+7p$ أو $n=6+7p$ مع $p \in IN$. (لأن في هذه الحالة $n \equiv 1[7]$ أو $n \equiv -1[7]$ ومنه $n^{20} \equiv 1[7]$) تأكد من ذلك.

التمرين 19

حل النظمات التالية :

1- $\begin{cases} x + y = \bar{3} \\ x - y = \bar{5} \end{cases}$ في المجموعة $\mathbb{Z}/_{7}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/_{7}\mathbb{Z}$

2- $\begin{cases} \bar{2}x + \bar{3}y = \bar{1} \\ x - \bar{2}y = \bar{3} \end{cases}$ في المجموعة $\mathbb{Z}/_{6}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/_{6}\mathbb{Z}$

3- $\begin{cases} \bar{2}x - \bar{3}y = \bar{1} \\ x - \bar{3}y = \bar{m} \end{cases}$ في المجموعة $\mathbb{Z}/_{6}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/_{6}\mathbb{Z}$

ناقش حسب قيم العدد m في $\mathbb{Z}$.

الحل

1- لنحل في المجموعة $\mathbb{Z}/_{7}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/_{7}\mathbb{Z}$ النظمة : $\begin{cases} x + y = \bar{3} \\ x - y = \bar{5} \end{cases}$

لدينا :

$$\begin{cases} x + y = \bar{3} \\ x - y = \bar{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \bar{3} \\ x = y + \bar{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{2}y + \bar{5} = \bar{3} \\ x = y + \bar{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{2}y = \bar{5} \\ x = y + \bar{5} \end{cases}$$

لدينا الجدول التالي لحل المعادلة : $\bar{2}y = \bar{5}$

y	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}y$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$

ومنه : $\begin{cases} y = \bar{6} \\ x = \bar{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \bar{3} \\ x - y = \bar{5} \end{cases}$ ، إذن : $S = \{(\bar{4}, \bar{6})\}$

2- لنحل في المجموعة $\mathbb{Z}/_{6}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/_{6}\mathbb{Z}$ النظمة : $\begin{cases} \bar{2}x + \bar{3}y = \bar{1} \\ x - \bar{2}y = \bar{3} \end{cases}$

لدينا :

$$\begin{cases} \bar{2}x + \bar{3}y = \bar{1} \\ x - \bar{2}y = \bar{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{2}(\bar{2}y + \bar{3}) + \bar{3}y = \bar{1} \\ x = \bar{2}y + \bar{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \bar{1} \\ x = \bar{2}y + \bar{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \bar{5} \\ y = \bar{1} \end{cases}$$

إذن: $S=\{(\bar{5};\bar{1})\}$

3- لنحل في المجموعة $\mathbb{Z}/_{6}\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/_{6}\mathbb{Z}$ النظمة : $\begin{cases}\bar{2}x-\bar{3}y=\bar{1}\\ x-\bar{3}y=\overline{m}\end{cases}$

لدينا:
$$\begin{cases}\bar{2}x-\bar{3}y=\bar{1}\\ x-\bar{3}y=\overline{m}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\bar{2}x-\bar{3}y=\bar{1}\\ x=\bar{3}y+\overline{m}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\bar{2}(\bar{3}y+\overline{m})-\bar{3}y=\bar{1}\\ x=\bar{3}y+\overline{m}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\bar{2}\overline{m}+\bar{3}y=\bar{1}\\ x=\bar{3}y+\overline{m}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\bar{3}y=\bar{2}\overline{m}+\bar{5}\\ x=\bar{3}y+\overline{m}\end{cases}\quad ⊛$$

(1)

y	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{3}y$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$

(2)

$\overline{m}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}\overline{m}+\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$

ومنه: لدينا الحالات التالية :

الحالة (1) : إذا كان $\overline{m}=\bar{0}$ أو $\overline{m}=\bar{1}$ أو $\overline{m}=\bar{3}$ أو $\overline{m}=\bar{4}$

فإن: $S=\phi$

الحالة (2): إذا كان $\overline{m}=\bar{2}$ فإن ⊛ تصبح: $\begin{cases}\bar{3}y=\bar{3}\\ x=\bar{3}y+\bar{2}\end{cases}$

وبالاعتماد على الجدول (1) نجد الحلول التالية: $\begin{cases}y=\bar{1}\\ x=\bar{5}\end{cases}$ أو $\begin{cases}y=\bar{3}\\ x=\bar{5}\end{cases}$ أو $\begin{cases}y=\bar{5}\\ x=\bar{5}\end{cases}$

إذن إذا كان: $\overline{m}=\bar{2}$ فإن: $S=\{(\bar{5},\bar{1});(\bar{5},\bar{3});(\bar{5},\bar{5})\}$

الحالة (3): إذا كان $\overline{m}=\bar{5}$ فإن: ⊛ تصبح $\begin{cases}\bar{3}y=\bar{3}\\ x=\bar{3}y+\bar{5}\end{cases}$

وبالطريقة نفسها أي الاعتماد على الجدول (1) نجد الحلول التالية :

$\begin{cases}y=\bar{1}\\ x=\bar{2}\end{cases}$ أو $\begin{cases}y=\bar{3}\\ x=\bar{2}\end{cases}$ أو $\begin{cases}y=\bar{5}\\ x=\bar{2}\end{cases}$

إذن إذا كان: $\overline{m}=\bar{5}$ فإن: $S=\{(\bar{2},\bar{1});(\bar{2},\bar{3});(\bar{2},\bar{5})\}$

التمرين 20

حل المعادلات التالية :

1) $x^2 - \bar{2}x - \bar{2} = \bar{0}$ في المجموعة $\mathbb{Z}/_{5}\mathbb{Z}$.

2) $x^2 + \bar{2}x + \bar{2} = \bar{0}$ في المجموعة $\mathbb{Z}/_{5}\mathbb{Z}$.

3) $x^2 - x - \bar{1} = \bar{0}$ في المجموعة $\mathbb{Z}/_{5}\mathbb{Z}$.

4) $2x^2 - 3x - 2 \equiv 0\,[7]$ في المجموعة $\mathbb{Z}$.

الحل

1- لدينا : $\mathbb{Z}/_{5}\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$

بتعويض المجهول x في هذه المعادلة بعناصر المجموعة $\mathbb{Z}/_{5}\mathbb{Z}$ نحصل على الجدول التالي:

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$
$-\bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$x^2 - \bar{2}x - \bar{2}$	$-\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$

ومن خلال هذا الجدول فإن: $S = \phi$

2- لتكن (S) مجموعة حلول المعادلة $x^2 + \bar{2}x + \bar{2} = \bar{0}$ في $\mathbb{Z}/_{5}\mathbb{Z}$.

بتعويض المجهول x في هذه المعادلة بعناصر المجموعة $\mathbb{Z}/_{5}\mathbb{Z}$ نحصل على الجدول التالي:

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$
$\bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$x^2 + \bar{2}x + \bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

إذن: $S = \{\bar{1}; \bar{2}\}$

3- بتعويض المجهول x في هذه المعادلة بعناصر المجموعة $\mathbb{Z}/_{5}\mathbb{Z}$ نحصل على الجدول التالي:

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$
$-x$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$x^2 - x - \bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

إذن: $S = \{\bar{3}\}$

4- لدينا : $\mathbb{Z}/_{7}\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$

لحل في المجموعة $\mathbb{Z}$ المعادلة: $2x^2 - 3x - 2 \equiv 0[7]$

يكفي حل في المجموعة $\mathbb{Z}/_7\mathbb{Z}$ المعادلة: $\bar{2}x^2 - \bar{3}x - \bar{2} = \bar{0}$

بتعويض المجهول x في هذه المعادلة بعناصر المجموعة $\mathbb{Z}/_7\mathbb{Z}$ نحصل على الجدول التالي:

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}x^2$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$-\bar{3}x$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{2}x^2 - \bar{3}x - \bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$

ومنه:

$$2x^2 - 3x - 2 \equiv 0[7] \iff \bar{2}x^2 - \bar{3}x - \bar{2} = \bar{0}$$

$$\iff x = \bar{2} \text{ أو } x = \bar{3}$$

$$\iff x = 2 + 7k \text{ أو } x = 3 + 7k / k \in \mathbb{Z}$$

ومنه: $S = \{2 + 7k / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{3 + 7k / k \in \mathbb{Z}\}$

التمرين 21

أثبت أن:

1- $4^n - 3n - 1 \equiv 0[9]$ ؛ $(\forall n \in IN)$

2- $2^{2n+1} + 3^{2n+1} \equiv 0[5]$ ؛ $(\forall n \in IN)$

3- $2^{4n+1} + 5 \equiv 0[21]$ ؛ $(\forall n \in IN)$

الحل

1- لنبين أن $4^n - 3n - 1 \equiv 0[9]$ ؛ $(\forall n \in IN)$

لكل عنصر n من IN نضع: $u_n = 4^n - 3n - 1$

• استعمال الاستدلال بالترجع

من أجل $n=0$، لدينا: $u_0 = 0$، إذن $u_0 \equiv 0[9]$ (لأن $0 \equiv 0[9]$)

ليكن n عنصرا من IN.

نفترض أن: $u_n \equiv 0[9]$، لنبين أن $u_{n+1} \equiv 0[9]$

لدينا:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 4^{n+1} - 3(n+1) - 1 \\ &= 4^{n+1} - 3n - 4 \\ &= 4(4^n - 3n - 1) + 9n = 4u_n + 9n \end{aligned}$$

وبما أن: $u_n \equiv 0[9]$ فإن: $4u_n \equiv 0[9]$

ولدينا: $9n \equiv 0[9]$ ومنه: $4u_n + 9n \equiv 0[9]$ أي: $u_{n+1} \equiv 0[9]$

وبالتالي: $4^n - 3n - 1 \equiv 0[9]$ $(\forall n \in IN)$

2- لنبين أن: $2^{2n+1} + 3^{2n+1} \equiv 0[5]$ ؛ $(\forall n \in IN)$

الطريقة (1)

تذكر أن:

b و a عنصران من IR^* و n من IN $a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum_{k=0}^{n}a^k b^{n-k}$

ليكن n عنصرا من IN لدينا:

$$2^{2n+1}+3^{2n+1}=2^{2n+1}-(-3)^{2n+1}=(2+3)\sum_{k=0}^{2n}2^k(-3)^{2n-k}=5\alpha$$

حيث: $\alpha\in IN^*;\alpha=\sum_{k=0}^{2n}2^k(-3)^{2n-k}$ ؛ إذن 5 يقسم $2^{2n+1}+3^{2n+1}$

ومنه فإن: $(\forall n\in IN)\quad 2^{2n+1}+3^{2n+1}\equiv 0[5]$

الطريقة (2)

ليكن n عنصرا من IN. لدينا: $2^{2n+1}+3^{2n+1}=2.4^n+3.9^n$

وبما أن: $4\equiv -1[5]$ و $9\equiv -1[5]$

فإن: $4^n\equiv(-1)^n[5]$ و $9^n\equiv(-1)^n[5]$

ومنه: $2.4^n+3.9^n\equiv 5(-1)^n[5]$

ولدينا: $5\equiv 0[5]$

إذن: $5(-1)^n\equiv 0[5]$

يعني أن: $2.4^n+3.9^n\equiv 0[5]$

وبالتالي: $(\forall n\in IN)$ ؛ $2^{2n+1}+3^{2n+1}\equiv 0[5]$

3- لنبين أن $(\forall n\in IN)$ ؛ $2^{4^{n+1}}+5\equiv 0[21]$

لكل عنصر N من IN نضع: $u_n=2^{4^{n+1}}+5$

من أجل $n=0$ لدينا: $u_0=2^4+5=16+5=21$

إذن: $u_0\equiv 0[21]$

ليكن n عنصرا من IN،

نفترض أن: $u_n\equiv 0[21]$ لنبين أن: $u_{n+1}\equiv 0[21]$

$$u_{n+1}=2^{4^{n+2}}+5=\left(2^{4^{n+1}}\right)^4+5$$

$$u_{n+1}=(u_n-5)^4+5$$

$$u_{n+1}\equiv(-5)^4+5[21]$$

$(-5)^4\equiv 16[21]$ ومنه: $u_{n+1}\equiv 0[21]$

ومنه: $(2^{4n+1})^4\equiv -5[21]$

يعني أن: $u_{n+1}\equiv 0[21]$ إذن: $(\forall n\in IN)\,;\,u_n\equiv 0[21]$

التمرين 22

1) بين أن: $(\forall n \in IN) \; ; \; 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0[17]$

2) أ- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا،

حدد، تبعا لقيم n، بواقي القسمة الإقليدية للعددين 2^n و3^n على 7.

ب- حل في المجموعة IN المعادلة: $2^n + 3^n \equiv 0[7]$

3) أ- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا،

حدد، تبعا لقيم n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9،

ب- بين أن $(\forall n \in IN) \quad 2^{2n}.(2^{2n+1} - 1) \equiv 1[9]$

الحل

1- لنبين أن: $(\forall n \in IN) ; 3 \times 5^{2n+1} + 3^{3n+1} \equiv 0[17]$

ليكن n عنصرا من IN، لدينا: $8 + 1 \times 17 = 25$، أي: $5^2 = 2^3 + 17 \times 1$

أي: $5^2 \equiv 2^3[17]$، ومنه: $5^{2n} \equiv 2^{3n}[17]$

ولدينا: $3 \times 5 \equiv -2[17]$، إذن: $3 \times 5 \times 5^{2n} \equiv -2 \times 2^{3n}$

يعني: $3 \times 5^{2n+1} \equiv -2^{3n+1}[17]$، ومنه: $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0[17]$

إذن: $(\forall n \in IN) ; 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0[17]$

2- أ- ليكن n عنصرا من IN،

• لنحدد باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7، تبعا لقيم n.

لدينا: $2 \equiv 2[7]$ و$2^2 \equiv 4[7]$ و$2^3 \equiv 1[7]$،

ومنه لكل k من IN: $2^{3k} \equiv 1[7]$

نرمز بالرمز r لباقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.

إذا كان $n \equiv 0[3]$ فإن: $2^n \equiv 1[7]$، أي الباقي $r=1$

إذا كان $n \equiv 1[3]$ فإن: $2^n \equiv 2[7]$، أي الباقي $r=2$

إذا كان $n \equiv 2[3]$ فإن: $2^n \equiv 4[7]$، أي الباقي $r=4$

• لنحدد باقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 7.

لدينا: $3 \equiv 3[7]$ و$3^2 \equiv 2[7]$ و$3^3 \equiv 6[7]$ و$3^4 \equiv 4[7]$ و$3^5 \equiv 5[7]$ و$3^6 \equiv 1[7]$

ومنه: $(\forall k \in IN) ; 3^{6k} \equiv 1[7]$

نرمز بالرمز r لباقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 7، هذا الباقي مرتبط بباقي القسمة الاقليدية للعدد n على 6:

إذا كان $n \equiv 0[6]$ فإن: $3^n \equiv 1[7]$، أي الباقي $r=1$

إذا كان $n \equiv 1[6]$ فإن: $3^n \equiv 3[7]$، أي الباقي $r=3$.

إذا كان $n \equiv 2[6]$ فإن: $3^n \equiv 2[7]$، أي الباقي $r=2$.

إذا كان $n \equiv 3[6]$ فإن: $3^n \equiv 6[7]$، أي الباقي $r=6$.

إذا كان $n \equiv 4[6]$ فإن: $3^n \equiv 4[7]$، أي الباقي $r=4$.

إذا كان $n \equiv 5[6]$ فإن: $3^n \equiv 5[7]$، أي الباقي $r=5$.

ب- لنحل في IN المعادلة: $2^n + 3^n \equiv 0[7]$

حسب السؤال 2) أ-

لدينا: إذا كان $n \equiv 0[3]$ فإن: $2^n \equiv 1[7]$

إذا كان $n \equiv 3[6]$ فإن: $3^n \equiv 6[7]$

ولدينا: إذا كان $n \equiv 3[6]$ فإن: $n \equiv 0[3]$

إذن: $n \equiv 3[6] \Longleftrightarrow 2^n + 3^n \equiv 0[7]$ (تأكد من أن الحالات الأخرى لا تحقق $2^n + 3^n \equiv 0[7]$)

وبالتالي مجموعة المعادلة $2^n + 3^n \equiv 0[7]$ هي: $S = \{3 + 6k / k \in IN\}$

3) أ- ليكن n عددا طبيعيا،

لنحدد، تبعا لقيم n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9.

لدينا: $2 \equiv 2[9]$ و$2^2 \equiv 4[9]$ و$2^3 \equiv 8[9]$ و$2^4 \equiv 7[9]$ و$2^5 \equiv 5[9]$ و$2^6 \equiv 1[9]$

ومنه لكل k من IN: $2^{6k} \equiv 1[9]$

نرمز بالرمز r لباقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9، هذا الباقي مرتبط بباقي القسمة الإقليدية للعدد n على 6

إذا كان: $n \equiv 0[6]$ فإن: $2^n \equiv 1[9]$، أي الباقي $r=1$.

إذا كان: $n \equiv 1[6]$ فإن: $2^n \equiv 2[9]$، أي الباقي $r=2$.

إذا كان: $n \equiv 2[6]$ فإن: $2^n \equiv 4[9]$، أي الباقي $r=4$.

إذا كان: $n \equiv 3[6]$ فإن: $2^n \equiv 8[9]$، أي الباقي $r=8$.

إذا كان: $n \equiv 4[6]$ فإن: $2^n \equiv 7[9]$، أي الباقي $r=7$.

إذا كان: $n \equiv 5[6]$ فإن: $2^n \equiv 5[9]$، أي الباقي $r=5$.

ب) إذا كان $n \equiv 0[6]$

فإن $2^n \equiv 1[9]$ ومنه $2^{2n} \equiv 1[9]$ و$2^{2n+1} \equiv 2[9]$ إذن: $2^{2n+1} - 1 \equiv 1[9]$ و$2^{2n} \equiv 1[9]$

وبالتالي $2^{2n}(2^{2n+1} - 1) \equiv 1[9]$

نبين بالطريقة نفسها الحالات الأخرى

إذن: $2^{2n}(2^{2n+1} - 1) \equiv 1[9] \quad (\forall n \in IN)$

التمرين 23

1) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا،

حدد، تبعا لقيم n، بواقي القسمة الإقليدية للعددين 2^n و3^n على 5.

2) بين أن: $(2222)^{3333} + (3333)^{2222} \equiv 1[5]$

الحل

1) ليكن n عنصرا من IN.

• لنحدد، تبعا لقيم n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5.

لدينا: $2 \equiv 2[5]$ و $2^2 \equiv 4[5]$ و $2^3 \equiv 3[5]$ و $2^4 \equiv 1[5]$.

ومنه لكل k من IN: $2^{4k} \equiv 1[5]$

نرمز بالرمز r لباقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5، هذا الباقي مرتبط بباقي القسمة الإقليدية للعدد n على 4:

إذا كان $n \equiv 0[4]$ فإن $2^n \equiv 1[5]$، أي الباقي $r=1$.

إذا كان $n \equiv 1[4]$ فإن $2^n \equiv 2[5]$، أي الباقي $r=2$.

إذا كان $n \equiv 2[4]$ فإن $2^n \equiv 4[5]$، أي الباقي $r=4$.

إذا كان $n \equiv 3[4]$ فإن $2^n \equiv 3[5]$، أي الباقي $r=3$.

• لنحدد، تبعا لقيم n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5.

لدينا: $3 \equiv 3[5]$ و $3^2 \equiv 4[5]$ و $3^3 \equiv 2[5]$ و $3^4 \equiv 1[5]$

ومنه لكل k من IN: $3^{4k} \equiv 1[5]$

نرمز بالرمز r لباقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5، هذا الباقي مرتبط بباقي القسمة الإقليدية للعدد n على 4:

إذا كان $n \equiv 0[4]$ فإن $3^n \equiv 1[5]$، أي الباقي $r=1$.

إذا كان $n \equiv 1[4]$ فإن $3^n \equiv 2[5]$، أي الباقي $r=2$.

إذا كان $n \equiv 2[4]$ فإن $3^n \equiv 4[5]$، أي الباقي $r=4$.

إذا كان $n \equiv 3[4]$ فإن $3^n \equiv 3[5]$، أي الباقي $r=3$.

2) لنبين أن $(2222)^{3333} + (3333)^{2222} \equiv 1[5]$

• لدينا: $2222=2220+2$ ومنه: $2222 \equiv 2[5]$

إذن: $(2222)^{3333} \equiv 2^{3333}[5]$

وبما أن $3333=833\times4+1$، أي $3333 \equiv 1[4]$، فإن $2^{3333} \equiv 2[5]$

وبالتالي: $(2222)^{3333} \equiv 2[5]$ (1)

• لدينا: $3333=3330+3$ ومنه $3333 \equiv 3[5]$

إذن $(3333)^{2222} \equiv 3^{2222}[5]$

وبما أن $2222=555\times4+2$، أي $2222 \equiv 2[4]$، فإن $3^{2222} \equiv 4[5]$

وبالتالي: $(3333)^{2222} \equiv 4[5]$ (2)

إذن من (1) و(2) نستنتج أن: $(2222)^{3333} + (3333)^{2222} \equiv 1[5]$

التمرين 24

1) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا.
حدد، تبعا لقيم n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 13.
2) استنتج أن العدد $(2007)^{2008}-1$ يقبل القسمة على 13.
3) لكل n من IN، نضع : $A_n=1+5^n+5^{2n}+5^{3n}$. بين أن : $A_n \equiv 0[13]$ إذا وفقط إذا كان $n \not\equiv 0[4]$
4) بين أن : $31^{4n+1} + 18^{4n-1} \equiv 0[13]$; $(\forall n \in IN^*)$.

الحل

1) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا
لنحدد، تبعا لقيم n، بواقي القسمة الإقليدي للعدد 5^n على 13.
لدينا : $5 \equiv 5[13]$ و$5^2 \equiv 12[13]$ و$5^3 \equiv 8[13]$ و$5^4 \equiv 1[13]$
ومنه لكل k من IN : $5^{4k} \equiv 1[13]$
نرمز بالرمز r لباقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 13، هذا الباقي مرتبط بباقي القسمة الإقليدية للعدد n على 4:
إذا كان $n \equiv 0[4]$ فإن $5^n \equiv 1[13]$، أي الباقي $r=1$.
إذا كان $n \equiv 1[4]$ فإن $5^n \equiv 5[13]$، أي الباقي $r=5$.
إذا كان $n \equiv 2[4]$ فإن $5^n \equiv 12[13]$، أي الباقي $r=12$.
إذا كان $n \equiv 3[4]$ فإن $5^n \equiv 8[13]$، أي الباقي $r=8$.

2) استنتاج:
لدينا: $2007 \equiv 5[13]$ ، ومنه فإن : $(2007)^{2008} \equiv 5^{2008}[13]$
وبما أن: $2008 \equiv 0[4]$ ، فإن: $5^{2008} \equiv 1[13]$
إذن: $(2007)^{2008} \equiv 1[13]$ ، أي: $(2007)^{2008} - 1 \equiv 0[13]$
يعني أن العدد $(2007)^{2008}-1$ يقبل القسمة على 13.

3) لنبين أن: $A_n \equiv 0[13] \Longleftrightarrow n \not\equiv 0[13]$
ليكن n عنصرا من IN.
لدينا: $n \equiv 0[4] \Longleftrightarrow 5^n \equiv 1[4]$
$n \equiv 0[4] \Longleftrightarrow A_n \equiv 4[13]$
ومنه : $A_n \not\equiv 0[13]$
• $n \equiv 1[4] \Rightarrow 5^n \equiv 5[13]$ و$5^{2n} \equiv 12[13]$ و$5^{3n} \equiv 8[13]$
ومنه: $n \equiv 1[4] \Longleftrightarrow A_n \equiv 1 + 5 + 12 + 8[13]$
أي: $\Longleftrightarrow A_n \equiv 0[13]$
إذن: $n \equiv 1[4] \Longleftrightarrow A_n \equiv 0[13]$

• $n \equiv 2[4] \Rightarrow 5^n \equiv 12[13]$ و $5^{2n} \equiv 1[13]$ و $5^{3n} \equiv 12[13]$

ومنه: $n \equiv 2[4] \Longleftrightarrow A_n \equiv 1 + 12 + 1 + 12[13]$
$\Longleftrightarrow A_n \equiv 0[3]$

$n \equiv 3[4] \Rightarrow 5^n \equiv 8[13]$ و $5^{2n} \equiv 12[13]$ و $5^{3n} \equiv 5[12]$

ومنه: $n \equiv 3[4] \Longleftrightarrow A_n = 1 + 8 + 12 + 5[13]$
$\Longleftrightarrow A_n \equiv 0[3]$

إذن: $A_n \equiv 0[13] \Longleftrightarrow n \not\equiv 0[4]$

4) لنبين أن $(\forall n \in IN^*)\ ;\ 31^{4n+1} + 18^{4n-1} \equiv 0[13]$.

ليكن n عنصرا من IN^* لدينا: $31 \equiv 5[13]$ و $18 \equiv 5[13]$ ومنه: $31^{4n+1} \equiv 5^{4n+1}[13]$

و $18^{4n-1} \equiv 5^{4n-1}[13]$

وبما أن $4n + 1 \equiv 1[4]$ و $4n - 1 \equiv 3[4]$

فإن $5^{4n+1} \equiv 5[13]$ و $5^{4n-1} \equiv 8[13]$، إذن $5^{4n+1} + 5^{4n-1} \equiv 0[8]$

أي $31^{4n+1} + 18^{4n-1} \equiv 0[13]$، وبالتالي $(\forall n \in IN^*)\ ;\ 31^{4n+1} + 18^{4n-1} \equiv 0[13]$

التمرين 25

ليكن n عنصرا من IN

1) بين أنه إذا كان $2^n \equiv 1[9]$ فإن $2^n \equiv 1[7]$

2) هل الاستلزام العكسي صحيح؟

الحل

1) لدينا $2 \equiv 2[9]$ و $2^2 \equiv 4[9]$ و $2^3 \equiv 8[9]$ و $2^4 \equiv 7[9]$ و $2^5 \equiv 5[9]$ و $2^6 \equiv 1[9]$

ومنه فإن $(\forall k \in IN)\ ;\ 2^{6k} \equiv 1[9]$

يعني أن $2^n \equiv 1[9] \Longleftrightarrow n \equiv 0[6]$

نفترض أن $2^n \equiv 1[9]$، لنبين أن $2^n \equiv 1[7]$

لدينا $2^n \equiv 1[9]$ يعني أن $n=6k$ مع k من IN.

وبما أن $2^{6k} \equiv (2^3)^{2k}$ و $2^3 \equiv 1[7]$

فإن: $2^{6k} \equiv 1[7]$ و $2^n \equiv 1[7]$

إذن $2^n \equiv 1[9] \Rightarrow 2^n \equiv 1[7]$

2) الاستلزام العكسي غير صحيح لأنه من أجل $n=3$ لدينا $2^3 \equiv 1[7]$ ولكن $2^3 \equiv 8[9]$.

التمرين 26

ليكن a وn عنصرين من IN بحيث $a \neq 1$

1) بين أن: $(a+1)^n - na - 1 \equiv 0[a^2]$

2) استنتج أن: $(\forall n \in IN^*)\ 4^n + 6n + 8 \equiv 0[9]$

الحل

إذا كان $n=1$ فإنه لدينا: $(a+1)^1-a-1=0$ و $0 \equiv 0[a^2]$

ومنه فإن: $(a+1)^1 - 1.a - 1 \equiv 0[a^2]$

إذا كان $n \geq 2$ فإن (حسب صيغة حدانية نيوتن):

$$(a+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k = 1 + na + a^2 C_n^2 + a^3 C_n^3 + \dots + anC_n^n$$

ومنه فإن: $(a+1)^n - na - 1 = a^2 C_n^2 + a^3 C_n^3 + \dots + a^n C_n^n$

$$= a^2(C_n^2 + aC_n^3 + \dots + a^{n-2}C_n^n)$$

وبما أن: $C_n^2 + aC_n^3 + \dots + a^{n-2}C_n^n$ عنصر من IN فإن a^2 يقسم $(a+1)^n-na-1$

يعني أن $(a+1)^n - na - 1 \equiv 0[a^2]$

2) الاستنتاج: ليكن n عنصرا من IN^*.

من أجل $a=3$، لدينا: $4^n - 3n - 1 \equiv 0[9]$

وبما أن $9n + 9 \equiv 0[9]$ فإن $(4^n - 3n - 1) + (9n + 9) \equiv 0[9]$

يعني أن: $4^n + 6n + 8 \equiv 0[9]$.

التمرين 27

بين أن: $(\forall a; b; c \in IN); a^3 + b^3 + c^3 \equiv 0[7] \Rightarrow abc \equiv 0[7]$

الحل

لتكن a وb وc عناصرَ من IN. نفترض أن: $abc \not\equiv 0[7]$

لنبين أن: $a^3 + b^3 + c^3 \not\equiv 0[7]$

لدينا $abc \not\equiv 0[7]$ يعني أن 7 لا يقسم abc.

وبما أن 7 عدد أولي فإن: 7 لا يقسم a و7 لا يقسم b و7 لا يقسم c.

يعني أن: $\bar{a} \neq \bar{0}$ و$\bar{b} \neq \bar{0}$ و$\bar{c} \neq \bar{0}$ في $\mathbb{Z}/_7\mathbb{Z}$.

- حساب المكعبات في $\mathbb{Z}/_7\mathbb{Z}$.

t	$-\bar{3}$	$-\bar{2}$	$-\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
t^3	$\bar{1}$	$-\bar{1}$	$-\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$-\bar{1}$

يعني أن: $t^3 \in \{-\bar{1}, \bar{1}\}$; $\left(\forall t \in \left(\mathbb{Z}/_6\mathbb{Z} - \{\bar{0}\}\right)\right)$

إذن في $\mathbb{Z}/_7\mathbb{Z}$ لدينا:

$$\begin{cases} \bar{a} \neq \bar{0} \\ \bar{b} \neq \bar{0} \\ \bar{c} \neq \bar{0} \end{cases} \Rightarrow (\overline{a^3}; \overline{b^3}; \overline{c^3}) \in \left(\{\bar{1}, -\bar{1}\}\right)^3$$

ومنه: $(\overline{a}^3 + \overline{b}^3 + \overline{c}^3) \in \{-\bar{3}, -\bar{1}, \bar{1}, \bar{3}\}$

يعني أن 7 لا يقسم $a^3+b^3+c^3$ أي $a^3 + b^3 + c^3 \not\equiv 0[7]$

وبالتالي: $a^3 + b^3 + c^3 \equiv 0[7] \Rightarrow abc \equiv 0[7]$

التمرين 28

1) حدد الأعداد n من $\mathbb{Z}$ بحيث يكون للقسمة الإقليدية ل n على 9 الخارج q والباقي q^2.

2) حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية n بحيث يكون للقسمة الإقليدية ل n على 27 الخارج q والباقي q^3.

3) أ- حدد، تبعا لقيم العدد الصحيح n، باقي القسمة الإقليدية للعدد n^2+3n+2 على 7.

ب- استنتج مجموعة الأعداد n من IN بحيث العدد n^2+3n+2 يقبل القسمة على 7.

ج- ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد $2005^2+3.2005+2$ على 7؟

الحل

1) لنحدد n من $\mathbb{Z}$ بحيث: $n=9q+q^2$ و $0 \leq q^2 < 9$ و $q \in ZI$

لدينا:

$$\begin{cases} 0 \leq q^2 < 9 \\ q \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq |q| < 3 \\ q \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow q \in \{0, 1, 2\}$$

ومنه فإن $n \in \{0, 10, -8, 22, -14\}$

2) لنحدد n من IN بحيث: $n=27q+q^3$ و $0 \leq q^3 < 27$ و $q \in ZI$

لدينا:

$$\begin{cases} 0 \leq q^3 < 27 \\ q \in IN \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq q < 3 \\ q \in IN \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow q \in \{0, 1, 2\}$$

ومنه $n \in \{0, 28, 62\}$

3) أ- لنحدد، تبعا لقيم n من IN، باقي القسمة الإقليدية للعدد n^2+3n+2 على 7.

لكل عنصر n من IN، نضع: $u_n=n^2+3n+2$

نلاحظ أن: $u_n(=n+1)(n+2)$

ليكن r باقي القسمة الإقليدية ل u_n على 7.

لدينا: $u_n \equiv r[7]$ مع $0 \leq r < 7$ و $r \in IN$

ومنه

* إذا كان $n \equiv 0[7]$ فإن $u_n \equiv 2[7]$ أي $r=2$
* إذا كان $n \equiv 1[7]$ فإن $(n+1) \equiv 2[7]$ و$(n+2) \equiv 3[7]$ إذن $u_n \equiv 6[7]$، أي $r=6$
* إذا كان $n \equiv 2[7]$ فإن $(n+1) \equiv 3[7]$ و$(n+2) \equiv 4[7]$

إذن $u_n \equiv 5[7]$، أي $r=5$

* إذا كان $n \equiv 3[7]$ فإن $(n+1) \equiv 4[7]$ و$(n+2) \equiv 5[7]$ إذن: $u_n \equiv 6[7]$، أي $r=6$
* إذا كان $n \equiv -1[7]$ فإن $n+1 \equiv 0[7]$ إذن $u_n \equiv 0[7]$، أي $r=0$
* إذا كان $n \equiv -2[7]$ فإن $n+2 \equiv 0[7]$

إذن $u_n \equiv 0[7]$، أي $r=0$

* إذا كان $n \equiv -3[7]$ فإن $n+2 \equiv -1[7]$ و$n+1 \equiv -2[7]$ ، إذن $u_n \equiv 2[7]$، أي $r=2$

ب) الاستنتاج

ليكن n عنصرا من IN، لدينا: $7 | n^2+3n+2 \iff n^2+3n+2 \equiv 0[7]$

$$\iff n \equiv 5[7] \text{ أو } n \equiv 6[7]$$

حسب نتائج السؤال السابق:

إذن: $\{n \in IN / 7 | n^2+3n+2\} = \{6+7k / k \in IN\} \cup \{5+7k / k \in IN\}$

ج- لنحدد r من $\{1;2;3;4;5;6\}$ حيث: $2005^2+3.2005+2 \equiv r[7]$

بما أن: $2005 \equiv 3[7]$ ، فإن: $2005^2+3.2005+2 \equiv 6[7]$

يعني أن 6 هو باقي القسمة الإقليدية للعدد: $2005^2+3.2005+2$ على 7 (بأخذ $n=2005$)

التمرين 29

بين أن: $(\forall n \in IN) \; ; \; 10^{3n+2}+4(-1)^n \equiv 0[52]$

الحل

لكل عنصر n من IN نضع: $u_n=10^{3n+2}+4(-1)^n$

من أجل $n=0$ ، لدينا: $u_0=10^2+4$ أي $u_0=104$

وبما أن: $104 \equiv 0[52]$ فإن $u_0 \equiv 0[52]$

ليكن n من IN.

نفترض أن $u_n \equiv 0[52]$؛ لنبين أن: $n_{n+1} \equiv 0[52]$

لدينا: $u_n \equiv 0[52] \Rightarrow 10^3 u_n \equiv 0[52]$

وبما أن:
$$\begin{aligned}10^3u_n &= 10^3.(10^{3n+2} + 4(-1)^n)\\ &= 10^{3(n+1)+2} + 10^3.4.(-1)^n\\ &= 10^{3(n+1)+2} + 4(-1)^{n+1} + 4(-1)^n(10^3+1)\\ &= u_{n+1} + 4(-1)^n(10^3+1)\end{aligned}$$

فإن: $u_{n+1} + 4(-1)^n(10^3+1) \equiv 0[52]$

ومنه فإنه يكفي أن يكون: $4(-1)^n(10^3+1) \equiv 0[52]$

لدينا: $52=4\times13$ و $4 \wedge 13 = 1$

بما أن $10^3 \equiv -1[13]$ فإن $13|10^3+1$

ومنه $(1)\ 13|4(-1)^n(10^3+1)$

لدينا: $4|(-1)^n4$ إذن $(2)\ 4|4(-1)^n(10^3+1)$

من (1) و(2) نستنتج أن $52|4(-1)^n(10^3+1)$ (لأن $4 \wedge 13 = 1$)

إذن: $u_{n+1} \equiv 0[52]$

وبالتالي فإن $(\forall n \in IN)\ ;\ 10^{3n+2} + 4(-1)^n \equiv 0[52]$.

التمرين 30

1) ليكن a وb وc عناصرَ من $\mathbb{Z}$ بحيث: $a^3 + b^3 + c^3 \equiv 0[3]$

بين أن: $a + b + c \equiv 0[3]$

2) ليكن a عنصرا من $\mathbb{Z}$ بحيث: $a \not\equiv 0[3]$

بين أن $a^3 \equiv 1[3]$ أو $a^3 \equiv -1[3]$

3) ليكن a وb وc عناصرَ من $\mathbb{Z}$ بحيث: $a^3 + b^3 + c^3 \equiv 0[9]$

بين أن أحد الأعداد a أوb أو c يقبل القسمة 3 على الأقل.

الحل

1) لنبين أن $a + b + c \equiv 0[3]$

لدينا: لكل n من $\mathbb{Z}$: $n^3 \equiv n[3]$

بالفعل: $n^3-n=n(n^2-1)=n(n-1)(n+1)$

ومنه:
$$\begin{aligned}n \equiv 0[3] &\Rightarrow n^3 - n \equiv 0[3]\\ n \equiv 1[3] &\Rightarrow n - 1 \equiv 0[3]\\ &\Rightarrow n^3 - n \equiv 0[3]\\ n \equiv -1[3] &\Rightarrow n + 1 \equiv 0[3]\\ &\Rightarrow n^3 - n \equiv 0[3]\end{aligned}$$

إذن $n^3 \equiv n[n]$ لكل n من $\mathbb{Z}$ (يمكن أيضا تطبيق مبرهنة فيرما).

لدينا: $a^3 \equiv a[3]$ و$b^3 \equiv b[3]$ و$c^3 \equiv c[3]$

ومنه: $a^3 + b^3 + c^3 \equiv a + b + c[3]$

ولدينا، حسب المعطيات: $a^3 + b^3 + c^3 \equiv 0[3]$، إذن: $a + b + c \equiv 0[3]$

2) لنبين أن: $a^3 \equiv 1[3]$ أو $a^3 \equiv -1[3]$

لدينا: $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}\} = \{\bar{0}; -\bar{1}; \bar{1}\}$

وبما أن $a \not\equiv 0[3]$، أي $a \notin \bar{0}$، فإن: $a^3 \equiv 1[3]$ أو $a^3 \equiv -1[3]$

إذن: $a^3 \equiv 1[3]$ أو $a^3 \equiv -1[3]$

3) لنبين أن أحد الأعداد a أو b أو c يقبل القسمة على 3 على الأقل.

نفترض أن: الأعداد a وb وc لا تقبل القسمة على 3، أي $a \not\equiv 0[3]$ و$b \not\equiv 0[3]$ و$c \not\equiv 0[3]$

لدينا، حسب السؤال السابق:

($a^3 \equiv -1[3]$ أو $a^3 \equiv 1[3]$) و($b^3 \equiv -1[3]$ أو $b^3 \equiv 1[3]$) و($c^3 \equiv -1[3]$ أو $c^3 \equiv 1[3]$)

ومنه، في $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$، لدينا: $a^3 + b^3 + c^3 \in \{-\bar{3}; -\bar{1}; \bar{1}; \bar{3}\}$

يعني أن $a^3 + b^3 + c^3 \not\equiv 0[3]$، أي 3 لا يقسم $a^3+b^3+c^3$، ومنه: 9 لا يقسم($a^3 + b^3 + c^3$) وهذا تناقض.

التمرين 31

لكل n من IN، نضع: $A_n=n(n^2-1)(n^2-4)$ و$B_n=n^5-n$

1) بين أن: $A_n \equiv 0[5]$

2) احسب A_n-B_n، ثم استنتج أن $B_n \equiv 0[5]$

3) ليكن a وb عنصرين من $\mathbb{Z}$.

أ- بين أن: $(a + b)^5 - a^5 - b^5 \equiv 0[5]$

ب- استنتج أن: $a + b \equiv 0[5] \Leftrightarrow a^5 + b^5 \equiv 0[5]$

ج- حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية p بحيث: $p^5 + 32 \equiv 0[5]$ و$0 \le p \le 20$

الحل

1) لنبين أن $A_n \equiv 0[5]$

ليكن n عنصرا من IN، لدينا: $A_n=n(n^2-1)(n^2-4)$

إذا كان $n \equiv 0[5]$ فإن $n(n^2 - 1)(n^2 - 4) \equiv 0[5]$ أي $A_n \equiv 0[5]$

إذا كان $n \equiv 1[5]$ فإن $n^2 \equiv 1[5]$، أي $n^2 - 1 \equiv 0[5]$

ومنه: $n(n^2 - 1)(n^2 - 4) \equiv [5]$، أي $A_n \equiv 0[5]$

إذا كان $n \equiv 2[5]$ فإن $n^2 \equiv 4[5]$، أي $n^2 - 4 \equiv 0[5]$

ومنه: $n(n^2-1)(n^2-4) \equiv [5]$ ، أي $A_n \equiv 0[5]$

إذا كان $n \equiv 3[5]$ فإن $n^2 \equiv 9[5]$ أي $n^2-4 \equiv 0[5]$

ومنه: $n(n^2-1)(n^2-4) \equiv 0[5]$، أي $A_n \equiv 0[5]$

إذن، لكل n من IN: $A_n \equiv 0[5]$

2) حساب A_n-B_n

لدينا:
$$\begin{aligned}A_n-B_n &= n(n^2-1)(n^2-4)-(n^5-n)\\ &= n(n^2-1)(n^2-4)-n(n^4-1)\\ &= n(n^2-1)(n^2-4)-n(n^2-1)(n^2+1)\\ &= n(n^2-1)(n^2-4-n^2-1) = -5n(n^2-1)\end{aligned}$$

إذن: $A_n-B_n=-5n(n^2-1)$

• استنتاج:

لدينا $5 \equiv 0[5]$ ومنه: $-5n(n^2-1) \equiv 0[5]$

أي $A_n - B_n \equiv 0[5]$

وبما أن $A_n \equiv 0[5]$ فإن $A_n-(A_n-B_n) \equiv 0[5]$ أي: $B_n \equiv 0[5]$.

3) أ- لنبين أن $(a+b)^5-a^5-b^5 \equiv 0[5]$

لدينا:
$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= \sum_{k=0}^{5} C_5^k a^{5-k}.b^k\\ &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\\ &= a^5+b^5+5(a^4b+2a^3b^2+2a^2b^3+ab^4)\end{aligned}$$

ومنه: $(a+b)^5-a^5-b^5=5(a^4b+2a^3b^2+2a^2b^3+ab^4)$

وبما أن العدد $a^4b+2a^3b^2+2a^3b^2+2a^2b^3+ab^4$ ينتمي إلى $\mathbb{Z}$،

فإن: 5 يقسم $(a+b)^5-a^5-b^5$

يعني أن: $(a+b)^5-a^5-b^5 \equiv 0[5]$

ب- استنتاج:

لدينا: $(a+b)^5-a^5-b^5 \equiv 0[5]$، أي $(a+b)^5 \equiv a^5+b^5[5]$

ومنه: $a^5+b^5 \equiv 0[5] \Longleftrightarrow (a+b)^5 \equiv 0[5]$

وبما أن 5 عدد أولي فإن: $(a+b)^5 \equiv 0[5] \Longleftrightarrow a+b \equiv 0[5]$

إذن: $a^5+b^5 \equiv 0[5] \Longleftrightarrow a+b \equiv 0[5]$

ج- تحديد الأعداد الصحيحة الطبيعية p.

ليكن p عنصرا من IN، لدينا: $32=2^5$،

ومنه :
$$\begin{cases} p^5 + 2^5 \equiv 0[5] \\ 0 \le p \le 20 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} p^5 + 32 \equiv 0[5] \\ 0 \le p \le 20 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} p + 2 \equiv 0[5] \\ 2 \le p + 2 \le 18 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow p + 2 \in \{5;10;15\}$$
$$\Longleftrightarrow p \in \{3;8;13\}$$

إذن الأعداد الصحيحة الطبيعية التي تحقق: $p^5 + 32 \equiv 0[5]$ و$0 \le p \le 20$ هي 3 و8 و13.

التمرين 32

حل في المجموعة $\mathbb{Z}$ نظمة المعادلات التالية :
$$(E): \begin{cases} x \equiv 2[7] \\ x \equiv 1[8] \\ x \equiv 3[9] \end{cases}$$

الحل

ليكن x عنصرا من $\mathbb{Z}$، لدينا :
$$\begin{cases} x \equiv 2[7] \\ x \equiv 1[8] \\ x \equiv 3[9] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (\exists k \in \mathbb{Z}) / x = 2 + 7k \quad (1) \\ (\exists k' \in \mathbb{Z}) / x = 1 + 8k' \quad (2) \\ (\exists k'' \in \mathbb{Z}) / x = 3 + 9k'' \quad (3) \end{cases}$$

إذن إذا كان x حلا للنظمة (E)، فإن k و k' حلول للمعادلة : $2+7k=1+8k'$

يعني أن: $8k'-1=7k$ (حسب (1) و(2))

ويكون لدينا k' وk'' حلول للمعادلة التالية (حسب (2) (3)) $1+8k'=3+9k''$ أي $8k'-2=9k''$

ومنه لدينا :
$$\begin{cases} 8k' - 1 = 7k \\ 8k' - 2 = 9k'' \end{cases}$$
، يعني أن :
$$\begin{cases} 72k' - 9 = 63k \\ 56k' - 14 = 63k'' \end{cases}$$

يعني أن :
$$\begin{cases} 63 | 72k' - 9 \\ 63 | 56k' - 14 \end{cases}$$
ومنه : $63 | 16k' + 5$

وبما أن $16k' + 5 \equiv 0[63] \Longleftrightarrow 16k' \equiv -5[63]$ ، فإن $k' \equiv -20[63]$ لأن: ($64 \equiv 1[63]$)
$$\Longleftrightarrow 64k' \equiv -20[63]$$

إذن $(\exists q \in \mathbb{Z}) \ / \ k' = -20 + 63q$

وبالتالي: $q \in \mathbb{Z} \quad ; \quad x = 1 + 8(-20 + 63q) = -159 + 504q$

عكسيا: إذا كان $x=-159+504q$ مع q من $\mathbb{Z}$ فإن:
$$\begin{cases} x \equiv 2[7] \\ x \equiv 1[8] \\ x \equiv 3[9] \end{cases}$$

إذن مجموعة حلول (E) هي: $S = \{-159 + 504q \ / \ q \in \mathbb{Z}\}$

ملحوظة: يكفي أيضا تحديد حلٍّ خاص x_0 للنظمة ثم نستنتج أن حلول النظمة هي الأعداد:
$x_0 + (7 \times 8 \times 9)q = x_0 + 504q$ (حيث $q \in \mathbb{Z}$)

التمرين 33

1) ليكن n عنصرا من $\mathbb{Z}$. أثبت أن:

أ- إذا كان n فرديا فإن: $n^2 \equiv 1[8]$

ب- إذا كان n زوجيا فإن: $n^2 \equiv 0[8]$ أو $n^2 \equiv 4[8]$

2) حل في المجموعة $IN\times IN$ المعادلة التالية: $8x+1=y^2$

3) بين أن لكل n من $\mathbb{Z}$ حيث n فردي لدينا: $n^4 \equiv 1[16]$

الحل

1) ليكن n عنصرا من $\mathbb{Z}$

أ- لنبين أن $n \equiv 1[2] \Rightarrow n^2 \equiv 1[8]$

نفترض أن n عدد فردي،

لدينا: $n=2p+1$، حيث p من $\mathbb{Z}$

ومنه : $n^2=(2p+1)^2=4p^2+4p+1=4p(p+1)+1$

وبما أن: $p(p+1) \equiv 0[2]$ فإن $p(p+1)=2k$ حيث k من $\mathbb{Z}$.

إذن: $n^2 = 8k+1$; $k \in ZI$، يعني أن: $n^2 \equiv 1[8]$

ب- لنبين أن: $n \equiv 0[2] \Rightarrow (n^2 \equiv 0[8]$ أو $n^2 \equiv 4[8])$

طريقة 1:

نفترض أن n عدد زوجي.

لدينا $n=2p$، حيث p من $\mathbb{Z}$ ومنه فإن $n^2=4p^2$.

يعني أن $n^2 \equiv 0[4]$، إذن $n^2=4k$، حيث k من $\mathbb{Z}$.

- إذا كان k فرديا أي $k=2k'+1$ مع k' من $\mathbb{Z}$ فإن $n^2=8k'+4$ إذن: $n^2 \equiv 4[8]$
- إذا كان k زوجيا أي $k=2k''$ مع k'' من $\mathbb{Z}$، فإن $n^2=8k''$ إذن $n^2 \equiv 0[8]$

طريقة 2:

إذا كان n عددا زوجيا فإن: $n \equiv 0[8]$ أو $n \equiv 2[8]$ أو $n \equiv 4[8]$ أو $n \equiv 6[8]$

وبما أن $2^2 \equiv 4[8]$ و $6^2 \equiv 4[8]$ و $4^2 \equiv 0[8]$

فإن $n^2 \equiv 0[8]$ أو $n^2 \equiv 4[8]$

2) لنحل في المجموعة $IN\times IN$ المعادلة: $8x+1=y^2$. ليكن (x,y) عنصرا من IN^2 بحيث: $y^2=8x+1$

بما أن $8x+1$ عدد فردي فإن y^2 عدد فردي، ومنه y عدد فردي.

إذن: $y^2 \equiv 1[8]$ ، حسب السؤال 1) أ).

نضع: $y=2k+1$ مع k من IN.

لدينا: $y^2=(2k+1)^2=1+4k+4k^2$

ومنه: $8x=y^2-1=4k+4k^2$

يعني أن: $2x=k(k+1)$ أي $x=\frac{k(k+1)}{2}$ ، علما أن $k(k+1)$ عدد زوجي.

إذن $(x,y)=\left(\frac{k(k+1)}{2},2k+1\right)$، حيث k من IN

عكسيا نتحقق من أن كل زوج $\left(\frac{k(k+1)}{2},2k+1\right)$ يحقق المعادلة المقترحة.

إذن مجموعة حلول المعادلة $y^2=8x+1$ في IN^2 هي: $S=\left\{\left(\frac{k(k+1)}{2},2k+1\right)/k \in IN\right\}$

3) ليكن n عنصرا من $\mathbb{Z}$ بحيث n فردي.

لنبين أن: $n^4 \equiv 1[16]$

لدينا n عدد فردي إذن: $n^2 \equiv 1[8]$، حسب السؤال 1– أ)

ومنه فإن: $n^2=1+8k$ حيث k من $\mathbb{Z}$.

ولدينا: $n^4=(1+8k)^2$

$=1+16k+64k^2=16(k+4k^2)+1$

نضع: $p=k+4k^2$ فيكون لدينا: $n^4=16p+1$; $p \in \mathbb{Z}$ ، إذن: $n^4 \equiv 1[6]$.

التمرين 34

■ *PPMC— PGCD*

1) ليكن a عددا صحيحا طبيعيا.

نضع: $A=35a+57$ و$B=45a+76$

أثبت أن: $A \wedge B=1$ أو $A \wedge B=19$

الحل

نضع: $d=A \wedge B$ مع $d \geq 1$

لدينا:
$$\begin{cases} d/A \\ d/B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|35a+57 \\ d|45a+76 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} d|315a+513(1) \\ d|315a+532(2) \end{cases}$$
$$\Rightarrow d|19 \qquad ((2)-(1))$$
$$\Rightarrow d=1 \text{ أو } d=19$$

التمرين 35

ليكن a و b من المجموعة IN^* بحيث $a \wedge b = 1$ أثبت أن:

1) $(3a+4b) \wedge (4a+5b) = 1$

2) $(4a+15b) \wedge (3a+11b) = 1$

3) $(a+2b) \wedge (2a+b) = 1$ أو $(a+2b) \wedge (2a+b) = 3$

الحل

1) نضع: $d = (3a+4b) \wedge (4a+5b)$ مع $d \geq 1$

لدينا:

$$\begin{cases} d|3a+4b \\ d|4a+5b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|12a+16b & (1) \\ d|12a+15b & (2) \\ d|15a+20b & (3) \\ d|16a+20b & (4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d|b & ((1)-(2)) \\ d|a & ((4)-(3)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow d|a \wedge b$$

$$\Rightarrow d|1 \quad (a \wedge b = 1 \text{ لأن})$$

$$\Rightarrow d = 1$$

2) نضع: $d(4a+15b) \wedge (3a+11b)$ مع $d \geq 1$

لدينا:

$$\begin{cases} d|4a+15b \\ d|3a+11b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|12a+45b & (1) \\ d|12a+44b & (2) \\ d|44a+165b & (3) \\ d|45a+165b & (4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d|b & ((1)-(2)) \\ d|a & ((4)-(3)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow d|a \wedge b$$

$$\Rightarrow d|1$$

$$\Rightarrow d = 1$$

3) نضع: $d = (a+2b) \wedge (2a+b)$ مع $d \geq 1$

لدينا:

$$\begin{cases} d|a+2b \\ d|2a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|a+2b & (1) \\ d|4a+2b & (2) \\ d|2a+b & (3) \\ d|2a+4b & (4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d|3a & ((2)-(1)) \\ d|3b & ((4)-(3)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow d|3a \wedge 3b$$

$$\Rightarrow d|3(a \wedge b)$$

إذن: $d|3$ (لأن $a \wedge b = 1$)

وبالتالي: $d=3$ أو $d = 1$ ، (لأن 3 عدد أول و $d \geq 1$)

التمرين 36

1) بين أن: $(\forall n \in IN)\ ;\ (n^2 + 4n + 1) \wedge (n + 4) = 1$

2) أ– أنشر $(n^2+1)^2$ و $(n^2+1)^3$، حيث $n \in IN$

ب– استنتج أن: $(\forall n \in IN)\ ;\ (n^4 + 2n^2 + 1) \wedge (n^4 + 3n^2 + 3) = 1$

الحل

1) ليكن n من IN. لنبين أن: $(n^2 + 4n + 1) \wedge (n + 4) = 1$

لدينا: $n^2+4n+1=n(n+4)+1$

ومنه: $1.(n^2+4n+1)-n.(n+4)=1$

يعني أن: $(\exists u, v \in \mathbb{Z}) / u(n^2 + 4n + 1) + v(n + 4) = 1$

إذن، حسب مبرهنة $BEZOUT$، $(n^2 + 4n + 1) \wedge (n + 4) = 1$

2) أ– لدينا: $(n^2+1)^2=n^4+2n^2+1$ ، و $(n^2+1)^3=n^6+3n^4+3n^2+1$

ب– الاستنتاج

ليكن n من IN، لدينا: $(n^2+1)^3=n^6+3n^4+3n^2+1$

$=n^2(n^4+3n^2+3)+1$

ومنه: $(n^2+1).(n^4+2n^2+1)-n^2.(n^4+3n^2+3)=1$

يعني أن: $(\exists u, v \in \mathbb{Z}) / u(n^4 + 2n^2 + 1) + v(n^4 + 3n^2 + 3) = 1$

إذن: $(n^4 + 2n^2 + 1) \wedge (n^4 + 3n^2 + 3) = 1$ (وذلك حسب مبرهنة $BEZOUT$)

التمرين 37

لكل عنصر n من $\mathbb{Z}$ نضع: $d = (2n - 1) \wedge (9n + 4)$

حدد القيم الممكنة للعدد d، مع تحديد n من $\mathbb{Z}$ في كل حالة ممكنة.

الحل

• تحديد قيم d:

ليكن n عنصرا من $\mathbb{Z}$، لدينا: $d_n \in IN^*$

لدينا: $\begin{cases} d|2n - 1 \\ d|9n + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|18n - 9 \\ d|18n + 8 \end{cases}$

$\Rightarrow d|17$

بما أن 17 عدد أولي و $d \in IN^*$ فإن $d=1$ أو $d=17$

• تحديد قيم n من $\mathbb{Z}$ بحيث : $d=17$

ليكن n عنصرا من $\mathbb{Z}$ لدينا :
$$\begin{cases}17|2n-1\\17|9n+4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}17|8n-4\\17|9n+4\end{cases}$$
$$\Rightarrow 17|n+8$$
$$\Rightarrow n \equiv -8[17]$$

يعني أن: $(\forall n \in \mathbb{Z})\ ;\ d=17 \Rightarrow n \equiv 9[17]$

عكسيا: لنبين أن: $(\forall n \in \mathbb{Z})\ ;\ n \equiv 9[17] \Rightarrow d=17$

ليكن n عنصرا من $\mathbb{Z}$ بحيث: $n \equiv 9[17]$

لدينا $n \equiv 9[17] \Rightarrow 9n \equiv 81[17]$
$$\Rightarrow 9n \equiv -4[17]$$
$$\Rightarrow 17|9n+4$$

ومنه: $(\exists k \in \mathbb{Z}^*) ; 9n+4 = 17k$

ولدينا: $n \equiv 9[17] \Rightarrow 2n \equiv 18[17]$
$$\Rightarrow 2n \equiv 1[17]$$
$$\Rightarrow 17|2n-1$$

ومنه فإن: $(\exists k' \in \mathbb{Z}^*)|2n-1 = 17k'$

إذن: $d_n = 17k \wedge 17k' = 17(k \wedge k')$

وبما أن: $\begin{cases}18n-9 = 9.17k'\\18n+8 = 2.17k\end{cases}$

فإن $17(-9k'+2k)=17$ أي $2k-9k'=1$

إذن حسب مبرهنة BEZOUT لدينا: $k \wedge k' = 1$

وبالتالي $d=17$

خلاصة:

$$(\forall n \in \mathbb{Z})\ ;\ n \equiv 9[17] \Longleftrightarrow (2n-1) \wedge (9n+4) = 17$$
$$(\forall n \in \mathbb{Z})\ ;\ n \not\equiv 9[17] \Longleftrightarrow (2n-1) \wedge (9n+4) = 1$$

التمرين 38

ليكن n عنصرا من $\mathbb{Z}$، نضع : $\delta_n = PGCD(2n+8; 3n+15)$

1) بين أن: $\delta_n|6$

2) حدد مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية n بحيث $\delta_n = 6$

الحل

1) لنبين أن: $\delta_n | 6$

لدينا: $\begin{cases} \delta_n | 2n+8 \\ \delta_n | 3n+15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta_n | 6n+24 \\ \delta_n | 6n+30 \end{cases}$

$\Rightarrow \delta_n | (6n+30) - (6n+24)$

$\Rightarrow \delta_n | 6$

إذن: $\delta_n | 6$

2) لنحدد مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية n بحيث $\delta_n = 6$

ليكن n من $\mathbb{Z}$، لدينا: $\delta_n = 6 \Rightarrow \begin{cases} 6 | 2n+8 \\ 6 | 3n+15 \end{cases}$

$\Rightarrow 2n+8 \equiv 0[6]$ و $3n+15 \equiv 0[6]$

$\Rightarrow 2n \equiv 4[6]$ و $3n \equiv 3[6]$ $(*)$

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}/_{6}\mathbb{Z}$، الجدول التالي لتحديد قيم n التي تحقق العبارة $(*)$.

$\overline{n}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{2n}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$
$\overline{3n}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$

من خلال الجدول السابق، لدينا: $\delta_n = 6 \Rightarrow n \equiv 5[6]$

عكسيا إذا كان $n \equiv 5[6]$ فإنه لدينا: $2n+8 \equiv 0[6]$ و $3n+15 \equiv 0[6]$

أي: $6 | 2n+8$ و $6 | 3n+15$

ومنه: $6 | \delta_n$ وبما أن: $\delta_n | 6$ فإن: $\delta_n = 6$

إذن: $\delta_n = 6 \Leftrightarrow n \equiv 5[6]$

التمرين 39

لكل n من IN^*، نضع: $A = n^2+3$ و $B = n+2$

1) بين أن: $A \wedge B = (n+2) \wedge 7$

2) حدد قيمة n بحيث يكون العدد $\dfrac{n^2+3}{n+2}$ عددا صحيحا طبيعيا.

الحل

1) لنبين أن: $A \wedge B = (n+2) \wedge 7$

نضع: $d = A \wedge B$ و $\delta = (n+2) \wedge 7$

لدينا: $\begin{cases} d|A \\ d|B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|n^2+3 \\ d|(n+2)^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} d|n^2+3 \\ d|n^2+4n+4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d|4n+1 \\ d|n+2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d|4n+1 \\ d|4n+8 \\ d|n+2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d|7 \\ d|n+2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d|(n+2) \wedge 7$$

(أ) $\Rightarrow d|\delta$

ولدينا من جهة أخرى:

$$\begin{cases} \delta|n+2 \\ \delta|7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta|n^2+2n & (1) \\ \delta|-2n-4 & (2) \\ \delta|7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta|n^2-4 & ((1)+(2)) \\ \delta|n+2 \\ \delta|7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta|n^2+3 \\ \delta|n+2 \end{cases}$$

(ب) $\Rightarrow \delta|(n^2+3) \wedge (n+2)$

$$\Rightarrow \delta|d$$

من (أ) و(ب) نستنتج أن: $\delta = d$ إذن: $A \wedge B = (n+2) \wedge 7$

2) لنحدد قيمة n بحيث يكون $\dfrac{n^2+3}{n+2} \in IN$

لدينا: $\dfrac{n^2+3}{n+2} \in IN \Rightarrow n+2|n^2+3$

وبما أن: $n+2|n+2$ فإن: $n+2|(n^2+3) \wedge (n+2)$

ومنه: $n+2|(n+2) \wedge 7$ (حسب السؤال الأول)

إذن: $n+2|7$

يعني أن: $n+2=7$ أو $n+2=1$

لدينا: $n \in IN^*$، إذن: $n=5$

وبالتالي يكون $\dfrac{n^2+3}{n+2} \in IN$ إذا كان $n=5$.

التمرين 40

1) حل في IN^2 المعادلة $a^2-b^2=51$

2) استنتج حلول النظمة $\begin{cases}(x;y) \in IN^2 \\ x^2 - y^2 = 7344 \\ x \wedge y = 12\end{cases}$

الحل

1) لنحل في IN^2 المعادلة $a^2-b^2=51$

لدينا: $a^2 - b^2 = 51 \iff (a-b)(a+b) = 51$

ولدينا القواسم الموجبة للعدد 51 هي 17,3,1 و51.

وبما أن: $0<a-b<a+b$ فإن: $\begin{cases}a - b = 3 \\ a + b = 17\end{cases}$ أو $\begin{cases}a - b = 1 \\ a + b = 51\end{cases}$

إذن: $(a,b)=(10,7)$ أو $(a,b)=(26,25)$

2) لنستنتج حلول النظمة: $\begin{cases}(x;y) \in IN^2 \\ x^2 - y^2 = 7344 \\ x \wedge y = 12\end{cases}$

لدينا: $x \wedge y = 12$ ومنه يوجد (a,b) من IN^2 بحيث $x=12a$ و$y=12b$ و $a \wedge b = 1$

ومنه: $x^2 - y^2 = 7344 \iff 12^2(a^2 - b^2) = 7344$

$\iff a^2 - b^2 = 51$

وحسب السؤال (1) فإن: $(a,b)=(26,25)$ أو $(a,b)=(10,7)$

وبالتالي: $(x,y)=(312,300)$ أو $(x,y)=(120,84)$

إذن مجموعة حلول النظمة هي: $S=\{(120,84),(312;300)\}$

التمرين 41

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.

نضع: $a=5n^2+7$ و$b=n^2+2$ ، وليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين a وb.

1) بين أن d يقسم 3.

2) بين أن: $d = 3 \iff n^2 \equiv 1[3]$

3) استنتج d تبعا لقيم العدد الصحيح الطبيعي n.

الحل

1) لنبين أن d يقسم 3.

لدينا: $\begin{cases}d|a \\ d|b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}d|5n^2 + 7 \\ d|5n^2 + 10\end{cases}$

$\Rightarrow d|3$

إذن d يقسم 3.

2) لنبين أن: $d = 3 \iff n^2 \equiv 1[3]$

لدينا: $n^2 \equiv 1[3] \Rightarrow 5n^2 + 7 \equiv 0[3]$ و $n^2 + 2 \equiv 0[3]$

$\Rightarrow 3|5n^2 + 7$ و $3|n^2 + 2$

$\Rightarrow 3|(5n^2 + 7) \wedge (n^2 + 2)$

$\Rightarrow 3|d$

وبما أن: $d|3$ حسب السؤال 1) فإن: $d=3$ ، إذن: $n^2 \equiv 1[3] \Rightarrow d = 3$

عكسيا: $d = 3 \Rightarrow 3|5n^2 + 7$ و $3|n^2 + 2$

$\Rightarrow 5n^2 + 7 \equiv 0[3]$ و $n^2 + 2 \equiv 0[3]$

$\Rightarrow 5n^2 \equiv 2[3]$ و $n^2 \equiv 1[3]$

$\Rightarrow n^2 \equiv 1[3]$

إذن: $d = 3 \iff n^2 \equiv 1[3]$

3) لنستنتج d تبعا لقيم n.

لدينا حسب السؤال 1) $d|3$ يعني أن $d=1$ أو $d=3$

وحسب السؤال 2)، لدينا: $d = 3 \iff n^2 \equiv 1[3]$

وبما أن: $n^2 \equiv 1[3] \iff n \equiv 1[3]$ أو $n \equiv 2[3]$

فإن:
- $d=3$ إذا كان $n \equiv 1[3]$ أو $n \equiv 2[3]$
- $d=1$ إذا كان $n \equiv 0[3]$.

التمرين 42

لكل عنصر n من IN و $n \geq 5$ نضع: $a=n^3-n^2-12n$ و $b=2n^2-7n-4$

1) بين أن: $(n-4)|a$ و $(n-4)|b$

2) نضع: $\alpha = 2n + 1$ و $\beta = n + 3$ و $d = \alpha \wedge \beta$

أ- حدد علاقة بين α و β غير مرتبطة بالعدد n، ثم استنتج أن d قاسم للعدد 5.

ب- بين أن العددين α و β يقبلان القسمة على 5 إذا وفقط إذا كان العدد 5 قاسما للعدد $n-2$.

تحقق من أن: $n \wedge (2n + 1) = 1$ ثم استنتج أن: $n(n + 3) \wedge (2n + 1) = (n + 3) \wedge (2n + 1)$

4) أ- حدد، تبعا لقيم n، وبدلالة n، القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

ب- تحقق من النتائج المحصل عليها في الحالتين: $n=11$ و $n=12$.

الحل

1) لنبين أن: $n-4$ يقسم a ويقسم b.

لدينا: $a=n^3-n^2-12n=n(n^2-n-12)=n(n+3)(n-4)$

ومنه العدد a قابل للقسمة على $n-4$ أي: $n-4|a$

ولدينا: $b=2n^2-7n-4$

$$=2n^2-8n+n-4$$
$$=2n(n-4)+(n-4)=(n-4)(2n+1)$$

ومنه العدد b قابل للقسمة على $n-4$ أي: $n-4|b$

2) أ- • لدينا: $2\beta=2n+6$ و $\alpha=2n+1$ ، ومنه: $2\beta-\alpha=5$

• لدينا: $d=\alpha\wedge\beta$ ومنه: $d|\alpha$ و $d|\beta$ إذن: $d|2\beta-\alpha$ يعني أن: $d|5$

وبما أن 5 عدد أولي و $d\in IN^*$ فإن: $d=1$ أو $d=5$

ب- لنبين أن: $5|n-2 \iff (5|\alpha$ و $5|\beta)$

لدينا: $5|\alpha \iff 5|\alpha+5$

$\iff 5|2\beta$ (لأن $\alpha+5=2\beta$)

وبما أن: $5\wedge 2=1$ فإن: $5|2\beta \iff 5|\beta$

إذن: $5|\alpha \iff 5|\beta$

ولدينا: $5|\beta \iff 5|n-2+5$

$\iff 5|n-2$

وبالتالي: $(5|\alpha \iff 5|n-2)$ و $(5|\beta \iff 5|n-2)$

3) لنبين أن: $n\wedge(2n+1)=1$

لدينا: $(2n+1)(1)-(-2)(n=1$

يعني أن: $(\exists u,v\in Z)/u(2n+1)+v.n=1$

يعني أن: $n\wedge(2n+1)=1$ ، حسب مبرهنة $BEZOUT$

4) أ- تحديد $a\wedge b$ ، بدلالة n وحسب قيم n.

ليكن n عنصرا من IN و $n\geq 5$ لدينا: $a=(n-4)n(n+3)$ و $b=(n-4)(2n+1)$

ومنه فإن: $a\wedge b=(n-4)(n(n+3)\wedge(2n+1))$

وبما أن: $n\wedge(2n+1)=1$

فإن: $(2n+1)\wedge n(n+3)=(2n+1)\wedge(n+3)$

$$=\alpha\wedge\beta$$

تذكر أن: $x\wedge y=1\Rightarrow x\wedge yz=x\wedge z$

إذن: $a\wedge b=(n-4)(\alpha\wedge\beta)$

وحسب السؤال 2) ب- لدينا: $\alpha\wedge\beta=5 \iff n\equiv 2[5]$

وبالتالي لدينا:

• إذا كان $n\equiv 2[5]$ و $n\in IN$ و $n\geq 5$ فإن: $a\wedge b=5(n-4)$

• إذا كان $n\equiv r[5]$ مع $r\in\{0,1,3,4\}$ حيث $n\in IN$ و $n\geq 5$ فإن: $a\wedge b=n-4$

ب- • إذا كان $n=11$ أي $n \equiv 1[5]$ فإن: $a \wedge b = (11-4) = 7$

بالفعل لدينا: $\begin{cases} a = 7 \times 11 \times 14 = 2 \times 7^2 \times 11 \\ b = 7 \times 23 \end{cases}$

ومنه فإن: $a \wedge b = 7$

• إذا كان $n=12$ أي $n \equiv 2[5]$ فإن: $a \wedge b = 5(12-4) = 40$

بالفعل لدينا: $\begin{cases} a = 8 \times 12 \times 15 = 40 \times 36 \\ b = 8 \times 25 = 40 \times 5 \end{cases}$

ومنه فإن: $a \wedge b = 40(5 \wedge 36) = 40 \times 1 = 40$

التمرين 43

1) ليكن a وb عنصرين من $\mathbb{Z}^*$ وq عنصرا من $\mathbb{Z}$.

بين أن: $a \wedge b = b \wedge (a - bq)$

2) ليكن n عنصرا من $\mathbb{Z}$ حيث: $n \neq -4$

بين أن: $(n^2 - n - 10) \wedge (n+4) = (n+4) \wedge 10$

3) حدد الأعداد الصحيحة النسبية n التي تحقق مايلي: $n+4$ يقسم n^2-n-10.

4) أ- ما القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين $n+4$ وn^2-n-10؟

ب- حدد المجموعة A المعرفة بمايلي: $A = \{n \in \mathbb{Z} - \{-4\} / (n^2 - n - 10) \wedge (n+4) = 5\}$

الحل

1) ليكن a وb من $\mathbb{Z}^*$ وq من $\mathbb{Z}$

لنبين أن: $a \wedge b = b \wedge (a - bq)$

نضع: $d_1 = a \wedge b$ و$d_2 = b \wedge (a - bq)$ ؛ $d_1, d_2 \in IN^*$

لدينا:

$$\begin{cases} d_1 | a \\ d_1 | b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 | a \\ d_1 | bq \end{cases} \Rightarrow d_1 | a - bq$$

ومنه: $(d_1 | b$ و $d_1 | a - bq) \Rightarrow d_1 | b \wedge (a - bq)$ ، يعني أن: $d_1 | d_2$

ولدينا:

$$\begin{cases} d_2 | b \\ d_2 | a - bq \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_2 | bq \\ d_2 | a - bq \end{cases} \Rightarrow d_2 | a$$

ومنه: $(d_2 | b$ و $d_2 | a) \Rightarrow d_2 | a \wedge b$

يعني أن: $d_2 | d_1$

وبالتالي: $d_1 | d_2$ و$d_2 | d_1$ ، d_1 وd_2 عنصران من IN^*.

إذن: $d_1 = d_2$ أي: $a \wedge b = b \wedge (a - bq)$

2) ليكن n عنصرا من $\mathbb{Z}$ و$n \neq -4$

لنبين أن: $(n^2-n-10)\wedge(n+4)=(n+4)\wedge 10$

نأخذ: $a=n^2-n-10$ و $b=n+4$ و $a,b\in Z^*$

لدينا:

$$a=n^2-n-10$$
$$=(n^2-n-20)+10$$
$$=(n-5)(n+4)+10=(n-5)b+10$$

يعني أن: $a-(n-5)b=10$

وحسب السؤال 1) نستنتج أن: $(q=n-5)$

$a\wedge b=b\wedge(a-bq)=b\wedge 10$ ، يعني أن: $(n^2-n-10)\wedge(n+4)=(n+4)\wedge 10$

3) لنحدد n من $\mathbb{Z}$ بحيث $n+4$ يقسم n^2-n-10

ليكن n عنصرا من $\mathbb{Z}$ مع $n\neq-4$

لدينا: $n+4|n^2-n-10 \Leftrightarrow (n+4)\wedge(n^2-n-10)=|n+4|$

$$\Leftrightarrow (n+4)\wedge(10=|n+4|$$
$$\Leftrightarrow |n+4|/10$$
$$\Leftrightarrow |n+4|\in\{1,2,5,10\}$$

ومنه مجموعة الأعداد n من $\mathbb{Z}$ بحيث $n+4$ يقسم n^2-n-10 هي: $\{-3,-5,-2,-6,1;-9,6;-14\}$

4) أ- ليكن n عنصرا من $\mathbb{Z}$ مع $n\neq-4$

نضع: $d\in IN^*\ ;\ d=(n^2-n-10)\wedge(n+4)$

لنحدد القيم الممكنة للعدد d.

لدينا: $(n^2-n-10)\wedge(n+4)=(n+4)\wedge 10$

ومنه: $d=(n+4)\wedge 10$ ، إذن: d قاسم موجب للعدد 10.

يعني أن: $d\in\{1,2,5,10\}$

ب- تحديد المجموعة A

ليكن n عنصرا من $\mathbb{Z}-\{-4\}$ ، لدينا:

$$n\in A \Leftrightarrow (n^2-n-10)\wedge(n+4)=5$$
$$\Leftrightarrow (n+4)\wedge 10=5$$

إذن: $5|n+4$ و n عدد فردي.

إذن لو كان $5/n+4$ و $2/n$ فإن: $5/n+4$ $2/n+4$.

ومنه: $10|n+4$ لأن: $2\wedge 5=1$ ، فيكون لدينا: $(n+4)\wedge 10=10$

وبالتالي: $n\in A \Rightarrow (n\equiv 1[2]$ و $n+4\equiv 0[5])$

$$\Rightarrow (n\equiv 1[2]\text{ و } n\equiv -4[5])$$

عكسيا:

ليكن n عنصرا من $\mathbb{Z}-\{-4\}$.

نفترض أن: $n \equiv 1[2]$ و$n \equiv -4[5]$

لدينا: $n \equiv -4[5] \iff (\exists k \in Z)/n + 4 = 5k$

ومنه فإن: $(n + 4) \wedge 10 = 5(k \wedge 2)$

ولدينا: $k \wedge 2 = 1$، إذن لو كان $k \wedge 2 \neq 1$ فإن: $2|k$

فيكون $2|n + 4$ (لأن $5k=n+4$) أي: $2|n$ وهذا غير ممكن إذن: $(n + 4) \wedge 10 = 5$

وبالتالي: $A = \{n \in Z/n \equiv 1[2]$ و $n \equiv -4[5]\}$

$=\{n = -4 + 5k/k \equiv 1[2]\} = \{n = 1 + 10p/p \in \mathbb{Z}\}$

التمرين 44

ليكن x وy وz عناصر من IN بحيث: $3x-7y-24z=0$

بين أن العدد 21 يقسم $y(x-z)$.

الحل

لنبين أن 21 يقسم $y(x-z)$

لدينا: $3x - 7y - 24z = 0 \iff 3(x - 8z) = 7y$

ومنه فإن: 3 يقسم $7y$

وبما أن: $3 \wedge 7 = 1$ فإنه حسب مبرهنة $GAUSS$، 3 يقسم y.

يعني أن: $(\exists p \in IN)/y = 3p$ (1)

إذن: $3x - 7y - 24z = 0 \iff 3x - 21p - 24z = 0$

$$\iff x - 7p - 8z = 0$$

$$\iff x - z = 7(p + z)$$

ومنه: 7 يقسم $x-z$ يعني أن: $(\exists q \in IN/x - z = 7q)$ (2)

من (1) و(2) نستنتج أن: $y(x-z)=21pq$ وبالتالي: 21 يقسم $y(x-z)$

التمرين 45

1) ليكن a وb عنصرين من $\mathbb{Z}^*$ بحيث: $a \wedge b = 1$

حدد العدد c من $\mathbb{Z}^*$ بحيث $a|bc$ و$b|ac$ و$c|ab$

2) حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية a وb وc بحيث:

$$\begin{cases} a \wedge b = 12 \\ b \wedge c = 18 \\ a + b + c = 102 \end{cases}$$

1) لنحدد العدد c بحيث: $a|bc$ و$b|ac$ و$c|ab$

لدينا: $a|bc$ و$a \wedge b = 1$ إذن حسب مبرهنة $GAUSS$ فإن: $a|c$

وكذلك لدينا: $b|ac$ و$b \wedge a = 1$ إذن: $b|c$

ومنه فإن: $a|c$ و$b|c$ و$a \wedge b = 1$ إذن: $ab|c$

ولدينا حسب المعطيات $c|ab$

إذن: $|c| = |ab|$ يعني أن: $c=ab$ أو $c=-ab$

2) لدينا: $a \wedge b \wedge c = (a \wedge b) \wedge (b \wedge c)$

وبما أن: $a \wedge b = 12$ و$b \wedge c = 18$ فإن: $a \wedge b \wedge c = 12 \wedge 18 = 6(2 \wedge 3) = 6$

ومنه: $(\exists x, y, z \in IN^*) / a = 6x$ و $b=6y$ و$c=6z$ مع: $x \wedge y \wedge z = 1$

ولدينا: $6(x + y + z) = 102 \Leftrightarrow a + b + c = 102$

$$\Leftrightarrow x + y + z = 17$$

وبما أن: $a \wedge b = 12 \Leftrightarrow 6(x \wedge y) = 12$

$$\Leftrightarrow x \wedge y = 2$$

و $b \wedge c = 18 \Leftrightarrow 6(y \wedge z) = 18$

$$\Leftrightarrow y \wedge z = 3$$

فإن 2 يقسم y و3 يقسم y ولدينا: $2 \wedge 3 = 1$، إذن 6 يقسم y.

إذن: $y=6$ أو $y=12$ (لأن $x+y+z=17$)

إذا كان: $y=12$ فإن: $x+z=5$

ومنه: $z=5-x$ و$z \geq 1$ إذن: $x \in \{1, 2, 3, 4\}$

ويجب أن يكون x عددا زوجيا لأن $x \wedge y = 2$

إذن: $x=2$ أو $x=4$

ومنه: $(x,z)=(2,3)$ لأن من أجل $z=1$ الشرط غير محقق.

ومنه: $(x,y,z)=(2,12,3)$ و$(a,b,c)=(12,72,18)$

إذا كان: $y=6$ فإن: $x+z=11$ فإنه وفق الشروط التالية: $1 \leq x \leq 10$ وx عدد زوجي وz مضاعف للعدد 3 نحصل على $(x, z) \in \{(2, 9), (8, 3)\}$

ومنه: $(x, y, z) \in \{(2, 6, 9), (8, 6, 3)\}$

إذن: $(a, b, c) \in \{(12, 36, 54), (48, 36, 18), (12, 72, 18)\}$

التمرين 46

ليكن a وb عنصرين من المجموعة $\mathbb{Z}^*$ بحيث: $a \wedge b = 1$ و$a+b$ فردي.

أثبت أن: $(a^2 + b^2) \wedge (a + b) = 1$

الحل

نضع: $d = (a^2 + b^2) \wedge (a + b)$

لدينا: $\begin{cases} d|a + b \\ d|a^2 + b^2 \end{cases} \Rightarrow d|(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$

$\Rightarrow d|2ab$

ومنه: $\begin{cases} d|a + b \\ d|2ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|2a(a + b) - 2ab \\ d|2b(a + b) - 2ab \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} d|2a^2 \\ d|2b^2 \end{cases}$

$\Rightarrow d|2(a^2 \wedge b^2)$

$\Rightarrow d|2(a \wedge b)^2$

$\Rightarrow d|2$

وبالتالي: $d=2$ أو $d=1$ وبما أن: $a+b$ فردي فإن: $d=1$.

التمرين 47

ليكن a وb عنصرين من IN بحيث: $a \wedge b = 1$

أثبت أن: $(a^2 - ab + b^2) \wedge (a + b) \leq 3$

الحل

نضع: $d = (a^2 - ab + b^2) \wedge (a + b)$

لدينا: $\begin{cases} d|a^2 - ab + b^2 \\ d|a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|a^2 - ab + b^2 \\ d|(a + b)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|a^2 - ab + b^2 & (1) \\ d|a^2 + 2ab + b^2 & (2) \end{cases}$

$\Rightarrow d|3ab \qquad ((2) - (1))$

ومن جهة أخرى لدينا:

$\begin{cases} d|3ab \\ d|a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|3ab \\ d|3a^2 + 3ab & (\times 3a) \\ d|3ab + 3b^2 & (\times 3b) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} d|3a^2 \\ d|3b^2 \end{cases}$

$\Rightarrow d|3a^2 \wedge 3b^2$

$\Rightarrow d|3(a \wedge b)^2$

$\Rightarrow d|3(a \wedge b)^2$

$\Rightarrow d|3$

$\Rightarrow d \leq 3$

التمرين 48

ليكن a وb عنصرين من المجموعة $\mathbb{Z}^*$.

أثبت أن: $(a^2+b^2)\wedge ab=(a\wedge b)^2$

الحل

نضع: $d=a\wedge b$ حيث $d\in IN^*$.

لدينا: $(\exists\alpha,\beta\in\mathbb{Z}^*)/a=\alpha d\,;b=\beta d\,;\alpha\wedge\beta=1$

ومنه: $(a^2+b^2)\wedge ab=(\alpha^2d^2+\beta^2d^2)\wedge(\alpha\beta d^2)$

$$=d^2((\alpha^2+\beta^2)\wedge(\alpha\beta))$$

إذن يكفي أن نبين أن: $(\alpha^2+\beta^2)\wedge(\alpha\beta)=1$ علما أن: $\alpha\wedge\beta=1$

ليكن x عنصرا من $\mathbb{Z}^*$ بحيث $x|\alpha^2+\beta^2$ و $x|\alpha\beta$

لدينا: $\begin{cases}x|\alpha\beta\\x|\alpha^2+\beta^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x|\alpha\beta^2\\x|\alpha^3+\beta^2\alpha\end{cases}$

$$\Rightarrow x|\alpha^3$$

وبالمثل نبين أن: $x|\beta^3$

ومنه: $\begin{cases}x|\alpha^3\\x|\beta^3\end{cases}\Rightarrow x|\alpha^3\wedge\beta^3$

$$\Rightarrow x|(\alpha\wedge\beta)^3$$

$$\Rightarrow x|1$$

$\Rightarrow x=1$ أو $x=-1$

إذن: $(\alpha\beta)\wedge(\alpha^2+\beta^2)=1$

وبالتالي: $(\forall(a,b)\in(\mathbb{Z}^{*2}))\ (a^2+b^2)\wedge ab=(a\wedge b)^2$

التمرين 49

ليكن a وb وc عناصر من المجموعة $\mathbb{Z}^*$ بحيث $a\wedge b=1$.

أثبت أن: $a\wedge bc=a\wedge c$

الحل

نضع: $d_1=a\wedge c$ و$d_2=a\wedge bc$ مع $d_1\geq1$ و $d_2\geq1$

لدينا: $\begin{cases}d_1|a\\d_1|c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d_1|a\\d_1|bc\end{cases}$

$$\Rightarrow d_1|a\wedge bc$$

$$\Rightarrow d_1|d_2\qquad(1)$$

لنبين أن: $d_2|d_1$

الطريقة 1:

لدينا: $a \wedge b = 1$ إذن حسب مبرهنة $BEZOUT$:

$$(\exists(u,v) \in Z^2) / au + bv = 1$$

ومنه: $(\exists(u,v) \in Z^2) / acu + bcv = c$

لدينا: $d_2 = a \wedge bc \Rightarrow \begin{cases} d_2|a \\ d_2|bc \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} d_2|acu \\ d_2|bcv \end{cases}$$

$$\Rightarrow d_2|acu + bcv$$

$$\Rightarrow d_2|c$$

إذن: $d_2|a$ و$d_2|c$ ومنه: $d_2|a \wedge c$ ، أي: $d_2|d_1$ (2)

من (1) و(2) نستنتج أن: $d_1 = d_2$

إذن إذا كان $a \wedge b = 1$ فإن: $a \wedge bc = a \wedge c$

الطريقة 2:

$$\begin{cases} d_2|a \\ d_2|bc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_2|ac \\ d_2|bc \end{cases} \Rightarrow d_2|ac \wedge bc = c(a \wedge b) = c$$

ومنه: $\begin{cases} d_2|c \\ d_2|a \end{cases}$ إذن: $d_2|a \wedge c = d_1$

التمرين 50

ليكن x وy عنصرين من المجموعة IN^*.

بين أن: $x \wedge y = (x + y) \wedge (x \vee y)$

الحل

• لنبين أن: $(\forall(a,b) \in IN^{*2})\ a \wedge b = 1 \Rightarrow (a + b) \wedge ab = 1$

لدينا: $a \wedge b = 1$ ونضع: $d = (a + b) \wedge ab$

لدينا:

$$\begin{cases} d|a + b \\ d|ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|a^2 + ba & (xa) \\ d|ab + b^2 & (xb) \\ d|ab \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d|a^2 = a^2 + ab - ab \\ d|b^2 = b^2 + ab - ab \end{cases}$$

$$\Rightarrow d|a^2 \wedge b^2$$

$$\Rightarrow d|(a \wedge b)^2$$

$$\Rightarrow d|1$$

$$\Rightarrow d = 1$$