التمرين 85

1) فكك العدد 469 إلى جداء عوامل أولية.
2) حدد الأزواج $(x;y)$ من عددين صحيحين طبيعيين بحيث: $x^3-y^3=469$

الحل

1) $469=7\times67$ و7 عدد أولي و67 عدد أولي.
أي إن تفكيك 469 إلى جداء عوامل أولية هو: 7×67.
2) لنحدد $(x;y)$ من IN^2 بحيث: $x^3-y^3=469$
لدينا: $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$
بما أن: $x\in IN$ و $y\in IN$، فإن: $x-y\leq x$ و $x^2+xy+y^2\geq x$
إذن: $x-y\leq x^2+xy+y^2$
ومنه: $x^3-y^3=469 \iff \begin{cases}x-y=1\\x^2+xy+y^2=469\end{cases}$ أو $\begin{cases}x-y=7\\x^2+xy+y^2=67\end{cases}$

$\iff \begin{cases}x=y+1\\(y+1)^2+y(y+1)+y^2=469\end{cases}$ أو $\begin{cases}x=y+7\\(y+7)^2+y(y+7)+y^2=67\end{cases}$

$\iff \begin{cases}x=y+1\\3y^2+3y-468=0\end{cases}$ أو $\begin{cases}x=y+7\\3y^2+21y-18=0\end{cases}$

حلول المعادلة $3y^2+3y-468=0$ هي: $-13;12$.
وحلول المعادلة $3y^2+21y-18=0$ لا تنتمي إلى IN.
ومنه: $x^3-y^3=469 \iff \begin{cases}x=13\\y=12\end{cases}$
وبالتالي الزوج $(13;12)$ هو الزوج الوحيد من IN^2 الذي يحقق المعادلة $x^3-y^3=469$

التمرين 86

1) ليكن p عددا أوليا، حدد جميع الأعداد الصحيحة النسبية α بحيث $\alpha^2\equiv 0[p^2]$.
2) استنتج جميع الأعداد الصحيحة النسبية x التي تحقق: $(E): x^2+18x+32\equiv 0[49]$

الحل

1) لنحدد α من $\mathbb{Z}$ بحيث $\alpha^2\equiv 0[p^2]$
لدينا: $\alpha^2\equiv 0[p^2] \iff p^2|\alpha^2$
ولدينا: $p|p^2$ و $p^2|\alpha^2$ ومنه: $p|\alpha^2$
وبما أن: p أولي فإن: $p|\alpha$

إذن: $\alpha = kp$; $(\exists k \in \mathbb{Z})$

2) لنستنتج جميع الأعداد الصحيحة النسبية x التي تحقق $x^2 + 18x + 32 \equiv 0[49]$

لدينا: $(x+9)^2=x^2+18x+81$ و $81 \equiv 32[49]$

ومنه: $x^2 + 18x + 32 \equiv 0[49] \iff x^2 + 18x + 81 \equiv 0[49]$

$\iff (x+9)^2 \equiv 0[7^2]$

وحسب السؤال 1) فإن: $x+9 \equiv 0[7]$ ؛ إذن: $x + 9 = 7k$; $(\exists k \in \mathbb{Z})$

وبالتالي حلول المعادلة (E) هي الأعداد النسبية: $x=-9+7k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

التمرين 87

ليكن p عددا أوليا موجبا وn عنصرا من $\mathbb{Z}$ بحيث: $n^3 \equiv 1[p]$ و$n \not\equiv 1[p]$ و $p \geq 2$

أثبت أن: $(n+1)^6 \equiv 1[p]$

الحل

ليكن p عددا أوليا موجبا وn عنصرا من $\mathbb{Z}$ بحيث: $n^3 \equiv 1[p]$ و$n \not\equiv 1[p]$

لدينا: $n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$

ولدينا: $n^3 \equiv 1[p] \iff n^3 - 1 \equiv 0[p]$

$\iff p | n^3 - 1$

و$n \not\equiv 1[p] \iff n - 1 \not\equiv 0[p]$

$\iff$ p لا يقسم $n-1$

وبما أن p عدد أولي وp لا يقسم $n-1$ فإن $p \wedge (n-1) = 1$

وبالتالي: $p | (n-1)(n^2+n+1)$ و $p \wedge (n-1) = 1$

إذن: حسب مبرهنة $GAUSS$، $p | n^2 + n + 1$

ومنه فإن: $(n+1) \equiv -n^2[p]$ ؛ إذن: $(n+1)^6 \equiv n^{12}[p]$

ولدينا: $n^3 \equiv 1[p] \Rightarrow n^{12} \equiv 1[p]$ ؛ ومنه فإن: $(n+1)^6 \equiv 1[p]$

التمرين 88

1) كيف يُكتب قاسم موجب للعدد 630 ؟

2) حدّد الأعداد الطبيعية x التي تحقق: $x \vee y = M(x, 18) = 630$

الحل

1) لنحدد كتابة القواسم الموجبة للعدد 630:

لدينا: $630=2^1\times3^2\times5^1\times7^1$

ومنه فإن كل قاسم موجب d للعدد 630 يكتب على الشكل: $d=2^a\times3^b\times5^c\times7^d$

حيث a وb وc وd أعداد صحيحة طبيعية تحقق: $0 \leq a \leq 1$ و$0 \leq b \leq 2$ و$0 \leq c \leq 1$

و$0 \leq d \leq 1$

2) لنحدد الأعداد الصحيحة الطبيعية التي تحقق: $M(x,18)=630$.

تذكر أن: $x = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ... \times p_n^{\alpha_n}$ و$y = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times ... \times p_n^{\beta_n}$ حيث x وy عددان صحيحان طبيعيان مفككان إلى جداء من عوامل أولية.

لدينا: $x \vee y = M(x;y) = p_1^{\max(\alpha_1;\beta_1)} \times p_2^{\max(\alpha_2;\beta_2)} \times ... \times p_n^{\max(\alpha_n;\beta_n)}$

نضع: $x=2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$ حيث a وb وc وd أعداد صحيحة طبيعية.

لدينا: $18=2^1 \times 3^2 \times 5^0 \times 7^0$ و$630=2^1 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1$

$M(x;18) = 630 \Rightarrow x = 2^a \times 3^b \times 5^1 \times 7^1 / 0 \leq a \leq 1$ و $0 \leq b \leq 2$

$\Rightarrow x = 2^0 \times 3^0 \times 5^1 \times 7^1$ أو $x=2^0 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$ أو $x=2^1 \times 3^0 \times 5^1 \times 7^1$

$x=2^0 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1$ أو $x=2^1 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$ أو $x=2^1 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1$

إذن الأعداد الصحيحة الطبيعية x التي تحقق: $M(x;18)=630$ هي: 35 و105 و70 و315 و210 و630.

التمرين 89

ليكن p عددا أوليا بحيث $p \geq 5$.

1) بين أن: $(\exists k \in IN^* \; ; \; p = 6k - 1)$ أو $(\exists k \in IN^* \; ; \; p = 6k + 1)$

2) استنتج أن: $p^2 \equiv 1[24]$.

الحل

1) لدينا: $(\forall n \in IN)(\exists! r \in \{0,1,2,3,4,5\}) \; ; \; n \equiv r[6]$

إذن كل عدد صحيح طبيعي يكتب على الشكل $6k+r$ حيث $r \in \{0;1;2;3;4;5\}$

وبما أن p أولي و$p \geq 5$، فإن p لا يقبل القسمة على 2 ولا على 3.

ومنه: p لا يمكن أن يكتب على الشكل: $6k$ أو $6k+2$ أو $6k+3$ أو $6k+4$

وبالتالي: $p=6k+1$ أو $p=6k+5$

وبما أن $p \geq 5$ فإن $k \in IN^*$، ويمكن كتابة: $6k+5=6(k+1)-1$

إذن: $(\exists k \in IN^* \; ; \; p = 6k + 1)$ أو $(\exists k \in IN^* \; ; \; p = 6k - 1)$

2) لنبين أن: $p^2 \equiv 1[24]$:

حسب السؤال 1) p يكتب على الشكل $6k-1$ أو على الشكل: $6k+1$، حيث: $k \in IN^*$

الحالة (1) إذا كان $p=6k+1$

فإن: $p^2-1=(6k+1)^2-1=36k+12k=12k(3k+1)$

يكفي أن نبين أن العدد $k(3k+1)$ زوجي.

• إذا كان k زوجي فإن: $k(3k+1)$ زوجي.

• إذا كان k فردي فإن: $(\exists p_0 \in IN)\ ;\ k = 2p_0 + 1$

ومنه: $k(3k+1)=(2p_0+1)(6p_0+4)=2(2p_0+1)(3p_0+2)$

إذن: $k(3k+1)$ زوجي أيضا.

وبالتالي مهما يكن k من IN^* العدد $k(3k+1)$ زوجي.

إذن: $(\exists m \in IN^*)\ ;\ k(3k+1) = 2m$ وبالتالي: $p^2-1=24m$، يعني أن: $p^2 \equiv 1[24]$

الحالة (2) إذا كان $p=6k-1$

فإن: $p^2-1=36k-12k=12k(3k-1)$

إذا كان k زوجيا فإن: $k(3k-1)$ زوجي.

إذا كان k فرديا فإن: $(\exists q \in IN)\ ;\ k = 2q + 1$

ومنه: $k(3k-1)=(2q+1)(6q+2)=2(3q+1)(2q+1)$

إذن: $k(3k-1)$ زوجي.

وبالتالي: $(\exists m \in IN^*)\ ;\ k(3k-1) = 2m$

ومنه: $(\exists m \in IN^*)\ ;\ p^2 - 1 = 24m$؛ أي: $p^2 \equiv 1[24]$

وبالتالي في جميع الحالات لدينا: $p^2 \equiv 1[24]$

التمرين 90

ليكن p عنصرا من IN.

1) بين أنه إذا كان p و$8p-1$ عددين أوليين فإن العدد $8p+1$ غير أولي.

2) بين أنه إذا كان p عددا أوليا و$p \neq 3$ فإن العدد $8p^2+1$ غير أولي.

الحل

1) لنبين أنه إذا كان p و$8p-1$ عددين أوليين فإن $8p+1$ غير أولي.

إذا كان $p=2$ فإن $8p-1=15$ و15 غير أولي.

إذا كان $p=3$ فإن $8p-1=23$ و23 عدد أولي، ولدينا $8p+1=25$ عدد غير أولي.

ليكن p عددا أوليا بحيث $p \geq 5$، نفترض أن $8p-1$ عدد أولي.

لدينا p عدد أولي و$p>3$ ومنه فإن $p \not\equiv 0[3]$، ويبقى لدينا: $p \equiv 1[3]$ أو $p \equiv 2[3]$.

بما أن $8p-1$ عدد أولي فإن $p \not\equiv 2[3]$

لأنه لو كان $p \equiv 2[3]$ سيكون لدينا $8p - 1 \equiv 0[3]$ أي $8p-1$ غير أولي.

إذن: $p \equiv 1[3]$ وبالتالي فإن $8p + 1 \equiv 0[3]$

يعني أن $8p+1$ عدد غير أولي، لأن 3 قاسم فعلي للعدد $8p+1$.

2) ليكن p عددا أوليا و $p \neq 3$.

لنبين أن $8p^2+1$ غير أولي.

إذا كان: $p=2$ فإن $8p^2+1=33$، غير أولي.

إذا كان: $p>3$ فإن $p \equiv 1[3]$ أو $p \equiv 2[3]$

ومنه فإن: $8p^2+1 \equiv 9[3]$ أو $8p^2+1 \equiv 33[3]$

وبما أن: $9 \equiv 0[3]$ و $33 \equiv 0[3]$ فإن: $8p^2+1 \equiv 0[3]$

يعني أن: 3 يقسم $8p^2+1$ و $3<8p^2+1$

ومنه فإن: $8p^2+1$ غير أولي.

التمرين 91

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث: $n \geq 2$ و n يقسم $(n-1)!+1$

بين أن العدد n أولي.

الحل

ليكن n عنصرا من IN و $n \geq 2$ بحيث n يقسم $(n-1)!+1$

لنبين أن العدد n أولي.

الطريقة 1:

لدينا n يقسم $(n-1)!+1$، يعني أن: $(\exists k \in IN^* / (n-1)!+1 = kn$

يعني أن: $(\exists k \in IN^*) / nk-(n-1)! = 1$

إذن: $(\forall a \in \{2,3,...,n-1\})\ ;\ n.k - a\left(\dfrac{(n-1)!}{a}\right) = 1$

يعني أن: $(\forall a \in \{2,3,...,n-1\})\ ;\ n \wedge a = 1$ (حسب مبرهنة $BEZOUT$) ومنه n أولي.

الطريقة 2:

ليكن q عنصرا من $\mathbb{Z}$ بحيث: q يقسم n و $|q| \neq 1$

لنبين أن: $|q| = n$

لدينا: $q|n$ ومنه فإن: $|q||n$، إذن: $|q| \leq n$

وبما أن: $n|(n-1)!+1$ فإن: $|q||(n-1)!+1$

- إذا كان $1<|q|<n$ فإن: $|q||(n-1)!$

إذن: $\begin{cases} |q||(n-1)! \\ |q||(n-1)!+1 \end{cases} \Rightarrow |q||1$

ومنه فإن: $|q|=1$، وهذا تناقض مع كون $|q|\neq 1$؛ وبالتالي فإن: $|q|=n$

إذن: $|q|=1$ أو $|q|=n$ ؛ $(\forall q\in\mathbb{Z})$; $|q|\,|\,n \Rightarrow |q|=n$

وهذا يعني أن العدد n أولي.

التمرين 92

ليكن n عنصرا من $IN-\{0,1\}$.

بين أنه إذا كان 5^n-3^n عددا أوليا فإن n عدد أولي.

الحل

ليكن n عنصرا من $IN-\{0,1\}$.

لتبيين أنه إذا كان 5^n-3^n عددا أوليا فإن n عدد أولي.

يكفي أن نبين:

إذا كان n عددا غير أوليا فإن 5^n-3^n عدد غير أولي.

نفترض أن العدد n غير أولي ومنه: $(\exists p,q\in IN-\{0,1\})\,/n=p.q$

يعني أن للعدد n قواسم فعلية، $n\neq p$ و $n\neq q$ لأن $p\neq 1$ و $q\neq 1$

ومنه:

$$\begin{aligned}5^n-3^n &= 5^{pq}-3^{pq}\\ &=(5^p)^q-(3^p)^q\\ &=(5^p-3^p).\sum_{k=0}^{q-1}(5^p)^k.(3^p)^{q-1-k}\end{aligned}$$

تذكر أن:

$$\begin{aligned}a^p-b^p &= (a-b)(a^{p-1}+a^{p-2}.b+\ldots+ab^{p-2}+b^{p-1})\\ &=(a-b).\sum_{k=0}^{p-1}a^k.b^{p-1-k}\end{aligned}$$

وبما أن: $(5^p-3^p)=2.\sum_{k=0}^{p-1}5^k.3^{p-1-k}$ فإن: $5^p-3^p\geq 2$

ولدينا: $\sum_{k=0}^{q-1}(5^p)^k.(3^p)^{q-1-k}\geq 2$

إذن: $(\exists a,b\in IN-\{0,1\})\,/5^n-3^n=a.b$

حيث: $b=\sum_{k=0}^{q-1}(5^p)^k.(3^p)^{q-1-k}$ و $a=5^p-3^p$

وبالتالي فإن: 5^n-3^n عدد غير أولي.

التمرين 93

1) حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية x بحيث: $x\vee 15=720$

2) حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية x بحيث: $x\wedge 5880=84$

الحل

1) لنحدد الأعداد الصحيحة الطبيعية x بحيث: $x \vee 15 = 720$

لدينا: $720=2^4\times3^2\times5$، تفكيك 720 إلى جداء من عوامل أولية.

ليكن x عنصرا من IN بحيث: $x \vee 15 = 720$، لدينا: $x \vee 15 = 720 \Rightarrow x | 720$

ومنه فإن x يكتب على الشكل: $x = 2^{\alpha} \times 3^{\beta} \times 5^{\gamma}$

حيث α وβ وγ أعداد صحيحة طبيعية مع: $\alpha \leq 4$ و$\beta \leq 2$ و$\gamma \leq 1$

وبما أن:
$$x \vee 15 = (2^{\alpha} \times 3^{\beta} \times 5^{\gamma}) \vee (3 \times 5)$$
$$= 2^{\sup(\alpha,0)} \times 3^{\sup(\beta,1)} \times 5^{\sup(\gamma,1)}$$
$$= 2^4 \times 3^2 \times 5^1$$

فإنه لدينا: $\sup(\alpha,0) = 4 \Rightarrow \alpha = 4$

$\sup(\beta,1) = 2 \Rightarrow \beta = 2$

$\sup(\gamma,1) = 1 \Rightarrow \gamma = 1$ أو $\gamma = 0$

إذن الأعداد الصحيحة الطبيعية التي تحقق: $x \vee 15 = 720$ هي: $x=2^4\times3^2\times5^0$ أو $x=2^4\times3^2\times5$.

2) لنحدد الأعداد الصحيحة الطبيعية x بحيث: $x \wedge 5880 = 84$

ليكن x عنصرا من IN^*، لدينا: $x \wedge 5880 = 84 \iff \left(\frac{x}{84}\right) \wedge \left(\frac{5880}{84}\right) = 1$

$$\iff \left(\frac{x}{84}\right) \wedge 70 = 1$$

- بما أن : $84=2^2\times3\times7$ ، التفكيك إلى جداء من عوامل أولية، و84 يقسم x فإنه يوجد a من IN^* بحيث: $x=84\times a=2^2\times3\times7\times a$

ولدينا: $70=2\times5\times7$ و $a \wedge 70 = 1$

إذن تفكيك a إلى جداء من عوامل أولية يكون على شكل: $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ أو $a=1$

حيث: $\alpha_i \in IN^*$ و$p_i \in IP^* - \{2,5,7\}$

(يمكن أن يحتوي تفكيك a على العدد 3)

ويكون لدينا: $x \wedge 5880 = (2^2 \times 3 \times 7 \times a) \wedge (2^2 \times 3 \times 5 \times 7) = 2^2 \times 3 \times 7 = 84$

وبالتالي فإن الأعداد المطلوبة هي: $x = 2^2 \times 3^n \times 7\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}\right)$، حيث: $n \in IN^*$ و$p_i \in IP^+ - \{2,3,5,7\}$ و $\alpha_i \in IN$.

التمرين 94

ليكن p عددا أوليا بحيث: $p \geq 5$

1) أ- بين أن: $p^2 \equiv 1[3]$ وأن: $2^p \equiv 2[3]$

ب- استنتج أن العدد p^2+2^p ليس أوليا.

2) بين أنه إذا كان p^2+2^p عددا أوليا فإن: $p=3$.

الحل

1) أ- • لنبين أن: $p^2 \equiv 1[3]$

بما أن p عدد أولي و$p \geq 5$ فإن: $p \equiv 1[3]$ أو $p \equiv -1[3]$ إذن: $p^2 \equiv 1[3]$

• لنبين أن: $2^p \equiv 2[3]$

لدينا p عدد أولي و$p \geq 5$ ومنه فإن p عدد فردي،

إذن: $(\exists k \in IN^*) / p = 2k+1$

ولدينا: $2^p=2^{2k+1}=(2^2)^k\times 2$

وبما أن: $2^2 \equiv 1[3]$ فإن: $2^{2k} \equiv 1[3]$

إذن: $2^{2k+1} \equiv 2[3]$ يعني أن: $2^p \equiv 2[3]$

ب- الاستنتاج:

لدينا: $p^2 \equiv 1[3]$ و$2^p \equiv 2[3]$

ومنه فإن: $2^p + p^2 \equiv 0[3]$، يعني أن: 3 يقسم 2^p+p^2

إذن: 2^p+p^2 يقبل قاسما فعليا، وبالتالي فإن: p^2+2^p غير أولي.

2) لدينا حسب السؤال 1) ب)، p أولي و$p \geq 5$ تستلزم 2^p+p^2 غير أولي،

ومنه فإن الاستلزام المضاد بالعكس هو: 2^p+p^2 عدد أولي يستلزم $p<5$.

نفترض أن 2^p+p^2 أولي، ومنه: $p<5$.

وبما أن p أولي وموجب فإن: $p=2$ أو $p=3$.

• من أجل $p=2$ لدينا: $2^2+2^2=8$ و8 عددي غير أولي.

• من أجل $p=3$ لدينا: $2^2+3^2=17$ عدد أولي.

إذن: إذا كان p^2+2^p عددا أوليا فإن $p=3$.

التمرين 95

ليكن n عنصراً من IN^*، نرمز للعدد الأولي من الرتبة n بالرمز p_n

(مثلا: $p_1=2$ و$p_2=3$ و$p_3=5$...)

1) إذا كان: $n \geq 2$، بين أن: $p_n \leq (p_1 \times p_2 \times ... \times p_{n-1}) + 1$

2) استنتج أنه لكل n من $IN^*-\{1\}$، $p_n \leq (p_{n-1})^{n-1} + 1$

ب- بين بالترجع، أن: $(\forall n \in IN^*); p_n \leq 2^{2^{n-1}}$

الحل

1) نفترض أن $n \geq 2$، ونبين أن: $p_n \leq (p_1 \times p_2 \times ... \times p_{n-1}) + 1$

بما أن مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية فإن p_n موجود لكل n من IN^*.

نستعمل الاستدلال بالخلف.

نفترض أن: $p_n > (p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_{n-1}) + 1$

إذن: $\exists i \in \{1;2;\ldots;n-1\}: p_i \Big| \prod_{k=1}^{n-1} p_k + 1$

وبما أن: $p_i \Big| \prod_{k=1}^{n-1} p_k$ فإن: $p_i | 1$ وهذا تناقض مع كون p_i عددا أوليا.

إذن: $p_n \le (p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_{n-1}) + 1$

2) أ- لنستنتج أن: $(\forall n \in IN^* - \{1\}); p_n \le (p_{n-1})^{n-1} + 1$

لدينا: $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_{n-1}$

ومنه: $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_{n-1} \le (p_{n-1})^{n-1}$

إذن: $1 + p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_{n-1} \le (p_{n-1})^{n-1} + 1$

وحسب السؤال 1)

$$p_n \le p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_{n-1} + 1$$

وبالتالي: $p_n \le (p_{n-1})^{n-1} + 1$

ب- لنبين بالترجع أن: $(\forall n \in IN^*); p_n \le 2^{2^{n-1}}$

لدينا: $p_1 = 2$ و $2^{2^{1-1}} = 2$، ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=1$.

ليكن $n \in IN^*$، نفترض أن: $\forall k \in \{1;2;\ldots;n\}; p_k \le 2^{2^{k-1}}$.

ونبين أن: $p_{n+1} \le 2^{2^n}$

حسب السؤال 1)، لدينا: $p_{n+1} \le p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n + 1$

وحسب افتراض الترجع: $\forall k \in \{1;2;\ldots;n\}; p_k \le 2^{2^{k-1}}$

إذن: $p_{n+1} \le 2^{1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}} + 1$

وبما أن: $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = \dfrac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$ و $1 \le 2^{2^n - 1}$

فإن: $p_{n+1} \le 2^{2^n - 1} + 2^{2^n - 1}$

إذن: $p_{n+1} \le 2^{2^n}$، وبالتالي حسب مبدإ الترجع: $(\forall n \in IN^*); p_n \le 2^{2^{n-1}}$

التمرين 96

a و b عنصران من IN^* بحيث: $a \wedge b = 1$ و ab مربع كامل.

بين أن كل من a و b مربع كامل.

الحل

ليكن a و b عنصرين من IN^* بحيث: $a \wedge b = 1$ و ab مربع كامل.

لدينا: $ab = \alpha^2$ حيث α من IN^*.

إذا كان: $ab=1$ فإن: $a=1$ و$b=1$، يعني أن كُلاً من a وb مربع كامل.

نفترض أن: $ab \neq 1$، فيكون لدينا: $\alpha \neq 1$

نعتبر $\alpha = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$، تفكيك α إلى جداء من عوامل أولية بحيث: $\alpha_i \in IN^*$ و $p_i \in IP^*$ و $p_1<p_2<...<p_k$

لدينا: $ab = \left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}\right)^2 = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} ... p_k^{2\alpha_k}$

$(\forall i \in \{1, 2, ..., k\})$; $p_i | ab \Rightarrow p_i | a$ أو $p_i | b$

ولا يوجد أي عدد أولي p_i مع $1 \leq i \leq k$، يقسم a وb في الوقت نفس لأن: $a \wedge b = 1$

إذن كل من a وb يكتب على الشكل: $a=a'^2$ و$b=b'^2$ حيث: $a' \wedge b' = 1$

بمعنى أن كُلاً من a وb مربع كامل.

التمرين 97

I- 1) ليكن n عنصراً من $IN^*-\{1\}$،

أ- بين أن: $n!+2$ و$n!+3$ و... و$n!+n$ ليست أعداداً أولية.

ب- استنتج ستة أعداد صحيحة متتابعة غير أولية.

2) بصفة عامة، ليكن p عنصرا من $IN^*-\{1\}$،

حدد p عدداً صحيحاً متتابعاً (كلها غير منعدمة) غير أوليٍّ.

II- ليكن n عنصراً من $IN^*-\{1\}$،

ليكن p_1 وp_2 و... وp_r جميع الأعداد الأولية المختلفة الأصغر من أو تساوي n.

1) نضع: $M=p_1 \times p_2 \times ... \times p_r$

بين أن الأعداد $M+2$ و$M+3$ و... و$M+n$ ليست أولية.

2) استنتج ستة أعداد صحيحة متتابعة وكلها غير أولية.

قارن هذه الأعداد مع تلك التي حصلت عليها في $(I-2)$.

الحل

I- ليكن n عنصرا من $IN^*-\{1\}$،

أ- ليكن $k \in \{2; 3; ...; n\}$

لدينا: $n! = n \times (n-1) \times ... \times k \times (k-1) \times ... \times 2 \times 1$

ومنه: $n! + k = k[n(n-1) \times ... \times (k-1) \times ... \times 2 \times 1 + 1]$

إذن: $n!+k$ عدد غير أولي.

وبالتالي: الأعداد $n!+2; n!+3; ...; n!+n$ أعداد غير أولية.

ب- لنحدد ستة أعداد صحيحة متتابعة غير أولية.

لهذا يكفي أن نأخذ $n=7$ ومنه الأعداد: $7!+2; 7!+3; 7!+4; 7!+5; 7!+6; 7!+7$

أي: $5042; 5043; 5044; 5045; 5046; 5047$ هي ستة أعداد متتابعة غير أولية.

2) ليكن p عنصراً من $IN^*-\{1\}$، ليكن: $k \in \{2; 3; ...; p+1\}$

لدينا: $(p+1)!=(p+1)\times p\times\ldots\times k\times(k-1)\times\ldots\times 2\times 1$

ومنه: $(p+1)!+k=k((p+1)p\times\ldots\times(k-1)\ldots 2\times 1+1)$

إذن: $(p+1)!+k$ عدد غير أولي.

وبالتالي الأعداد $(p+1)!+2;(p+1)!+3;\ldots;(p+1)!+(p+1)$ هي p عدد متتابع غير أولي.

II– ليكن n عنصراً من $IN^*-\{1\}$،

1) لدينا: $M=p_1\times p_2\times\ldots\times p_r$

لنبين أن الأعداد: $M+2;M+3;\ldots;$ و$M+n$ ليست أعداداً أولية.

ليكن: $k \in \{2; 3; ...; n\}$

إذا كان k أولياً فإن: $\exists i \in \{1; 2; ...; r\}\ ;\ k = p_i$

وبما أن: $p_i | M$ فإن: $p_i | M+k$، ومنه: $M+k$ عدد غير أولي.

إذا كان k غير أولي فإن: $\exists i \in \{1; 2; ...; r\}\ ;\ p_i | k$ (لأن: $2<k<n$) و $p_i | M$ ومنه: $p_i | M+k$ أي $M+k$ عدد غير أولي.

وبالتالي: الأعداد $M+2;M+3;M+4;\ldots;M+n$ أعداد غير أولية.

2) نضع: $M=2\times 3\times 5\times 7$

لدينا: $M+2;M+3;M+4;M+5;M+6;M+7$

أي: $212;213;214;215;216;217$ هي ستة أعداد متتابعة غير أولية.

وهذه اللائحة أصغر من اللائحة المحصل عليها في الجزء I– 2).

التمرين 98

1) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا و$n \geq 2$

بين أن لكل k من $\{2;3;\ldots;n\}$ العدد $N_k=k+n!$ غير أولي.

ثم أعط 2003 من الأعداد المتتابعة وغير الأولية.

2) ليكن p من IN^*، حدد p من الأعداد المتتابعة وغير الأولية.

الحل

1) ليكن k عنصرا من $\{2;3;\ldots;n\}$

لنبين أن العدد $k+n!$ غير أولي.

لدينا:
$$k + n! = k + n(n-1) \times ... \times (k+1)k(k-1) \times ... \times 2 \times 1$$
$$= k(1 + n(n-1)... \times (k+1)(k-1) \times ... \times 2 \times 1)$$

يعني أن k قاسم للعدد $k+n!$.

ولدينا $1<k<k+n!$، إذن k قاسم فعلي للعدد $k+n!$، وبالتالي فإن $k+n!$ غير أولي.

أعط 2003 من الأعداد المتتابعة وغير الأولية.

نأخذ $n=2004$ الأعداد $p_k=(2004)!+k$ مع : $k \in \{2;3;4;...;2004\}$

كلها غير أولية حسب السؤال السابق، وعددها 2003.

2) ليكن p عنصرا من IN^*

حسب السؤال 1) الأعداد التالية: $(p+1)!+2$ و$(p+1)!+3$ و... و$(p+1)!+(p+1)$

أعداد غير أولية وعددها p.

ملحوظة: أصغر لائحة من 6 أعداد متتابعة وغير أولية هي: 91;92;93;94;95;96.

التمرين 99

1) ليكن p عددا أوليا و$p \geq 5$

بين أن العدد p يكتب على الشكل: $6k+1$ أو على الشكل $6k+5$، حيث: $k \in IN$.

2) نعتبر E مجموعة الأعداد الأولية التي تكتب على الشكل $6k+5$، حيث: $k \in IN$.

نفترض أن E مجموعة منتهية، وليكن p العنصر الأكبر في E.

أ- بين أن جداء m عدد على شكل $6k+1$ يكتب على الشكل $6k+1$ حيث: $m \in IN$ و$m \geq 2$

ب- نضع: $N=(2\times3\times5\times...\times p)-1$

بين أنه يوجد عنصر q من المجموعة E يقسم N.

ج- استنتج أن E مجموعة غير منتهية.

الحل

1) لنبين أن: $p \equiv 1[6]$ أو $p \equiv 5[6]$

لدينا: $(\forall n \in \mathbb{Z});(\exists! r \in \{0;1;2;3;4;5\}) / n \equiv r[6]$

وبما أن الأعداد التي تكتب على الشكل $6k;6k+2;6k+3$ و$6k+4$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ أعداد غير أولية فإن:

$p \equiv 1[6]$ أو $p \equiv 5[6]$

2) أ- لتكن $q_1;q_2;...$ وq_m أعداداً تكتب على الشكل: $1+6k$

لدينا: $q_i \equiv 1[6]$ لكل i من $\{1,2,...,m\}$، ومنه فإن: $q_1.q_2...q_m \equiv 1[6]$

يعني أن: $(\exists k \in IN);q_1.q_2...q_m = 1+6k$

ب- لنبين أن: $(\exists q \in E);q | N$

لدينا: $N=(2\times3\times5\times...\times p)-1=(6\times5\times...\times p)-1$

ومنه فإن: $N \equiv -1[6]$ أي: $N \equiv 5[6]$

لدينا: $N>p$ و$N \equiv 5[6]$ (أي: $N=6k+5$; $k \in IN$)

وبما أن p هو العنصر الأكبر في E فإن N غير أولي؛

إذا كانت جميع القواسم الأولية للعدد N تكتب على الشكل $1+6k$، فإنه حسب السؤال 2) أ)

سيكون لدينا: $N \equiv 1[6]$ وهذا تناقض مع كون $N \equiv 5[6]$

وبالتالي فإنه يوجد عنصر q أولي بحيث: $q<p$ و$q \equiv 5[6]$ وq يقسم N.

يعني أن: $(\exists q \in E); q|N$

ج- الاستنتاج:

لدينا: $q|2 \times 3 \times ...p$ و $q|N$ ومنه فإن: $q|(2 \times 3 \times 5 \times ... \times p) - N$ أي: $q|1$ وهذا تناقض.

إذن مجموعة E غير منتهية.

التمرين 100

I- ليكن p عددا أوليا بحيث: $p \geq 3$، تحقق من أن: $p \equiv 1[4]$ أو $p \equiv 3[4]$

II- لتكن E مجموعة الأعداد الأولية التي تكتب على الشكل: $4k+3$ حيث: $k \in IN$

نريد البرهان على أن E مجموعة غير منتهية، لهذا نستعمل الاستدلال بالخلف، بحيث نفترض أن E مجموعة منتهية.، ونضع: $E = \{p_1, p_2, ..., p_r\}$

1) إذا كان r عدداً زوزجياً، نعتبر العدد: $a=p_1p_2...p_r+2$

أ- بين أن: $a \equiv 3[4]$؛

ب- بين أن كل قاسم أولي للعدد a لا ينتمي إلى E.

ج- استنتج أن: $a \equiv 1[4]$.

2) إذا كان r عدداً فردياً، نعتبر العدد: $b=p_1p_2...p_r+4$

أ- بين أن: $b \equiv 3[4]$؛

ب- بين أن: $b \equiv 1[4]$؛

3) استنتج مما سبق أن E مجموعة غير منتهية.

الحل

I- لنتحقق من أن: $p \equiv 1[4]$ أو $p \equiv 3[4]$

لدينا p عدد أولي و$p \geq 3$ ومنه فإن: p عدد فردي؛ يعني أن $p=2k+1$ حيث: $k \in IN^*$

- إذا كان k زوجياً أي: $m \in IN^*; k = 2m$، فإن: $p=4m+1$ إذن: $p \equiv 1[4]$
- إذا كان k فردياً أي: $m \in IN^*; k = 2m + 1$، فإن: $p=4m+3$ إذن: $p \equiv 3[4]$

II- 1) أ- لنبين أن: $a \equiv 3[4]$

لدينا: $(\forall i \in \{1, 2, ..., r\}); p_i \equiv 3[4]$، ومنه فإن: $p_1 \times p_2 \times ... \times p_r = 3^r[4]$

وبما أن: $3 \equiv 3[4]$ و$3^2 \equiv 1[4]$ فإنه لدينا: $3^n \equiv 1[4]$، إذا كان n زوجياً.

$3^n \equiv 3[4]$، إذا كان n فردياً.

ومنه فإن $3^r \equiv 1[4]$ لأن r عدد زوجي يعني أن: $p_1 \times p_2 \times ... \times p_r = 1[4]$

ولدينا: $2 \equiv 2[4]$ إذن: $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_r + 2 = 3[4]$ ، يعني أن: $a \equiv 3[4]$

ب- لنبين أن كل قاسم أولي للعدد a لا ينتمي إلى E.

لدينا: $a \in IN^* - \{1\}$ ومنه فإن a يقبل قاسما أوليا موجبا،

نفترض أن: $1 \leq \alpha \leq r\,;(\exists p_\alpha \in E)\,;\, p_\alpha | a$

إذن: $p_\alpha | a$ و $p_\alpha | p_1.p_2 \ldots p_r$ ، ومنه فإن: $p_\alpha | a - p_1.p_2 \ldots p_r$ أي: $p_\alpha | 2$

إذن: $p_\alpha = 2$ وهذا تناقض، لأن العدد 2 لا ينتمي إلى E

وبالتالي لا يوجد أي قاسم أولي للعدد a ينتمي إلى E.

ج- الاستنتاج: $a \equiv 1[4]$

ليكن: $a = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_m^{\alpha_m}$ ، تفكيك a إلى جداء من عوامل أولية ،

بما أن: $a \equiv 3[4]$ فإن الأعداد $q_m \ldots q_2, q_1$ أعداد أولية فردية.

وحسب السؤال 1) ب) لدينا: $(\forall i \in \{1, 2, \ldots m\})\,;\, q_i \notin E$ ومنه فإن: $(\forall i \in \{1, 2, \ldots m\})\,;\, q_i \equiv 1[4]$

يعني أن: $(\forall i \in \{1, 2, \ldots m\})\,;\, q_i^{\alpha_i} \equiv 1[4]$ وبالتالي: $a \equiv 1[4]$

2) أ- لنبين أن: $b \equiv 3[4]$

لدينا: $(\forall i \in \{1, 2, \ldots r\})\,;\, p_i \equiv 3[4]$

ومنه: $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_r \equiv 3^r[4]$

وبما أن: $3^r \equiv 3[4]$ ، لأن r عدد فردي، فإن: $b \equiv 3[4]$

ب- لنبين أن: $b \equiv 1[4]$

نفترض أن b يقبل قاسما أوليا p_{i_0} ينتمي إلى E

لدينا: $p_{i_0} | b$ و $p_{i_0} | p_1.p_2 \ldots p_r$ ، ومنه فإن: $p_{i_0} | b - p_1 p_2 \ldots p_r$ أي: $p_{i_0} | 4$

وهذا تناقض مع كون: $p_{i_0} \equiv 3[4]$

وبالتالي فإن b لا يقبل أي قاسم أولي ينتمي إلى E،

ليكن $b = \prod_{i=1}^{m} q_i^{\beta_i}$ تفكيك b إلى جداء من عوامل أولية.

لدينا: $(\forall i \in \{1, 2, \ldots m\})\,;\, q_i \notin E$ ، ومنه: $(\forall i \in \{1, 2, \ldots; m\})\,;\, q_i^{\beta_i} \equiv 1[4]$ ، إذن: $b \equiv 1[4]$

3) استنتاج:

- لدينا في حالة n زوجي: $a \equiv 1[4]$ و $a \equiv 3[4]$ ، وهذا غير ممكن.
- لدينا في حالة n فردي: $b \equiv 1[4]$ و $b \equiv 3[4]$ ، وهذا غير ممكن.

إذن المجموعة E غير منتهية.

التمرين 101

الهدف من هذا التمرين هو البرهان على أنه يوجد ما لا نهاية من الأعداد الأولية التي تكتب على الشكل $4k+3$، حيث k عدد صحيح طبيعي.

نستعمل الاستدلال بالخلف:

نفترض أنه يوجد عدد منته من الأعداد الأولية التي تكتب على الشكل $4k+3$، لتكن p_1 وp_2 و...وp_n هذه الأعداد.

1) أ- بين أن جداء أعداد على الشكل $4k+1$ هو كذلك على الشكل $4k+1$.

ب- بين أن كل عدد أولي مخالف للعدد 2 يكتب على الشكل $4k+1$ أو $4k+3$.

2) نضع: $N=(2^2\times p_1\times p_2\times\ldots\times p_n)-1$

أ- باستعمال السؤال 1)، بين أنه يوجد عدد أولي على الشكل $4k+3$ قاسم للعدد N.

ب- ماذا يمكن أن تستنتج ؟

الحل

1) أ- لنبين أن جداء أعداد على الشكل $4k+1$ هو كذلك عدد على الشكل $4k+1$.

لتكن a_1 وa_2 و...وa_m، m عدداً $(m \geq 1)$ على الشكل $4k+1$ حيث: $k \in IN$

لدينا: إذن $\forall i \in \{1;2;\ldots;m\}\,;\, a_i \equiv 1[4]$

ومنه: $a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_m = 1[4]$

وبالتالي: $a_1\times a_2\times\ldots\times a_m$ يكتب على الشكل $4k+1$.

ب- ليكن p عدداً أولياً بحيث: $p \geq 3$

ليكن a من IN، لدينا: $a \equiv 0[4]$ أو $a \equiv 1[4]$ أو $a \equiv 2[4]$ أو $a \equiv 3[4]$

أي إن a يكتب على أحد الأشكال: $4k+2;4k+1;4k$ أو $4k+3$ حيث: $k \in IN$

وبما أن p أولي و$p \geq 3$ فإن p عدد فردي؛

ومنه p يكتب على أحد الشكلين $4k+1$ أو $4k+3$ حيث: $k \in IN$

2) لدينا: $N=2^2\times p_1\times p_2\times\ldots\times p_n-1$

أ- لنبين أنه يوجد عدد أولي على الشكل $4k+3$ ويقسم N.

لدينا: $N=4\times p_1\times p_2\times\ldots\times p_n-1$، ومنه: $N \equiv -1[4]$، أي: $N \equiv 3[4]$

إذن: $(\exists k \in IN)\,;\, N = 3 + 4k$

ولدينا: $\forall i \in \{1;2;\ldots;n\}\,;\, N > p_i$

إذن N غير أولي (وذلك لأن الأعداد الأولية التي تكتب على الشكل $4k+3$ هي فقط: p_1 وp_2 و...وp_n).

إذن: $\exists i \in \{1;2;\ldots;n\}\,;\, p_i | N$

(لأن: لو كانت جميع الأعداد الأولية التي تقسم N تكتب على الشكل $4k+1$ لكان N كذلك يكتب على الشكل $4k+1$) وذلك حسب 1) أ)

وبالتالي N يقبل قاسما أوليا على الشكل $4k+3$.

ب- الاستنتاج:

لدينا حسب 2) أ) $\exists i \in \{1;2;...;n\}\,;\, p_i | N$

وبما أن: $p_i | p_1 \times p_2 \times ... \times p_n$ فإن: $p_i | 4 \times p_1 \times p_2 \times ... \times p_n - N$

إذن: $p_i | 1$ وهذا تناقض مع كون p_i أولي.

وبالتالي توجد ما لا نهاية من الأعداد الأولية التي تكتب على الشكل $4k+3$.

التمرين 102

1) ليكن a و α عنصرين من IN بحيث: $a>1$ و $\alpha > 1$

بين أنه إذا كان: $a^{\alpha} - 1$ أوليا فإن: $a=2$.

2) ليكن p و q عنصرين من IN بحيث: $p>1$ و $q>1$

بين أن $2^{pq}-1$ قابل للقسمة على 2^p-1 وقابل للقسمة على 2^q-1.

3) بين أنه إذا كان 2^n-1 أوليا فإن n أولي حيث: $n \in IN$

4) تحقق من أن $2^{11}-1$ ليس أوليا.

الحل

1) لنبين أنه إذا كان $a^{\alpha} - 1$ أوليا فإن $a=2$:

نفترض أن $a^{\alpha} - 1$ أولي، لنبين أن: $a=2$.

استعمال الاستدلال بالخلف: نفترض أن: $a \neq 2$

لدينا: $a^{\alpha} - 1 = (a-1)(a^{\alpha-1} + a^{\alpha-2} + ... + a + 1)$

ومنه فإن: $a - 1 | a^{\alpha} - 1$

ولدينا: $a - 1 \neq 1$، لأن $a \neq 2$ و $a^{\alpha} - 1 \neq a - 1$ لأن: $\alpha > 1$

إذن $a-1$ قاسم فعلي للعدد $a^{\alpha} - 1$، وهذا تناقض مع كون العدد $a^{\alpha} - 1$ أولي وبالتالي: $a=2$.

2) • لنبين أن: 2^p-1 يقسم $2^{pq}-1$

لدينا: $2^p - 1 \equiv 0[2^p - 1]$ ومنه: $2^p \equiv 1[2^p - 1]$

إذن: $2^{pq} \equiv 1[2^p - 1]$، أي: $2^{pq} - 1 \equiv 0[2^p - 1]$

وبالتالي: 2^p-1 يقسم $2^{pq}-1$

• لنبين أن: 2^q-1 يقسم $2^{pq}-1$ (باستعمال طريقة أخرى).

لدينا: $2^{pq} - 1 = (2^q)^p - 1 = (2^q - 1)\left((2^q)^{p-1} + (2^q)^{p-2} + ... + 1\right)$

إذن 2^q-1 يقسم $2^{pq}-1$.

3) ليكن n عنصرا من IN.

لنبين أنه إذا كان 2^n-1 أوليا فإن n أولي.

يكفي أن نبين أن: n غير أولي تستلزم 2^n-1 غير أولي.

نفترض أن n غير أولي.

لدينا n يقبل قاسما فعليا يعني أن: $(\exists p \in IN - \{1;n\}) ; p|n$

ومنه فإن: $n=pq$ مع $q \in IN - \{1;n\}$

إذن، حسب السؤال 2) 2^p-1 يقسم 2^n-1

ولدينا: $2^n - 1 \neq 2^p - 1$ لأن: $n \neq p$ و $2^p - 1 \neq 1$ لأن: $p \neq 1$

إذن: 2^p-1 قاسم فعلي للعدد 2^n-1، وبالتالي: 2^n-1 غير أولي.

3) لدينا:
$$\begin{aligned}2^{11} - 1 &= 2047\\ &= 23 \times 98\end{aligned}$$

يعني أن عدد $2^{11}-1$ غير أولي.

التمرين 103

ليكن p عددا أوليا بحيث: $p \geq 5$

1) بين أن: $(p-1)(2p-1) \equiv 0[6]$

2) استنتج أن: $(\forall n \in IN) ; \left(\sum_{k=0}^{p-1}(n+k)^2\right) \equiv 0[p]$

الحل

1) لنبين أن: $(p-1)(2p-1) \equiv 0[6]$

بما أن: $2\times3=6$ و $2 \wedge 3 = 1$ فإنه يكفي أن نبين أن:

$2|(p-1)(2p-1)$ و $3|(p-1)(2p-1)$

لدينا p عدد أولي و $p \geq 5$، إذن p عدد فردي.

ومنه فإن:
$$\begin{aligned}p \equiv 1[2] &\Rightarrow p-1 \equiv 0[2]\\ &\Rightarrow (p-1)(2p-1) \equiv 0[2]\end{aligned}$$

يعني أن: $2|(p-1)(2p-1)$

ولدينا: $p \wedge 3 = 1$ (لأن p و 3 أوليان و $p \neq 3$)

إذن 3 لا يقسم p ومنه: $p \equiv 1[3]$ أو $p \equiv -1[3]$

•
$$\begin{aligned}p \equiv 1[3] &\Rightarrow p-1 \equiv 0[3]\\ &\Rightarrow (p-1)(2p-1) \equiv 0[3]\end{aligned}$$

•
$$\begin{aligned}p \equiv -1[3] &\Rightarrow 2p \equiv 1[3]\\ &\Rightarrow 2p-1 \equiv 0[3]\\ &\Rightarrow (p-1)(2p-1) \equiv 0[3]\end{aligned}$$

إذن: $3|(p-1)(2p-1)$

وبالتالي فإن:

$$\begin{cases} 2|(p-1)(2p-1) \\ 3|(p-1)(2p-1) \\ 2 \wedge 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow 6|(p-1)(2p-1)$$

2) الاستنتاج:

ليكن n عنصرا من IN، لدينا:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p-1}(n+k)^2 &= \sum_{k=0}^{p-1}(n^2+2nk+k^2)\\ &= \sum_{k=0}^{p-1}n^2 + \sum_{k=0}^{p-1}2nk + \sum_{k=0}^{p-1}k^2\\ &= n^2\sum_{k=0}^{p-1}1 + 2n\sum_{k=0}^{p-1}k + \sum_{k=0}^{p-1}k^2\\ &= n^2.p + 2n\left(\frac{p(p-1)}{2}\right) + \frac{p(p-1)(2p-1)}{6}\\ &= p\left(n^2 + n(p-1) + \frac{(p-1)(2p-1)}{6}\right)\end{aligned}$$

وبما أن: $(p-1)(2p-1) \equiv 0[6]$ فإن: $a = \dfrac{(p-1)(2p-1)}{6} \in IN$

نضع: $\alpha \in IN^*; \alpha = n^2 + n(p-1) + a$

إذن: $\sum_{k=0}^{p-1}(n+k)^2 = \alpha p$ ؛ $(\exists \alpha \in IN^*)$، يعني أن: $\sum_{k=0}^{p-1}(n+k)^2 \equiv 0[p]$

التمرين 104

1) ليكن n عنصرا من IN و$n \geq 2$ و $n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i}$ تفكيك n إلى جذاء من عوامل أولية.

بين أن عدد القواسم الموجبة لـn هو العدد: $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)...(1+\alpha_m)$

2) تطبيق 1: حدد العددين x وy بحيث يكون للعدد x، 21 قاسما موجبا وللعدد y، 10 قواسم موجبة ويحققان: $x \wedge y = 18$.

3) تطبيق 2: ليكن a عنصرا من IN^* ويقبل بالضبط ثلاثة قواسم موجبة.

بين أن a مربع لعدد أولي.

الحل

1) ليكن n عنصرا من IN و$n \geq 2$ و $n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i}$ تفكيك n إلى جذاء من عوامل أولية.

ليكن d قاسما موجبا للعدد n.

لدينا: $d = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\beta_i}$ حيث: $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ لكل i من $\{1;2;...;m\}$

بما أن: $Card\{0;1;2;...;\alpha_i\} = 1 + \alpha_i$

فإن عدد الاختيارات الممكنة لـβ_i هو $1 + \alpha_i$ لكل i من $\{1;2;...;m\}$

وبالتالي فإن عدد قواسم n الموجبة هو: (حسب المبدإ الأساسي للتعداد)

$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)...(1+\alpha_m)$

2) لنحدد x وy من IN بحيث: $CardD_y^+ = 10$ و$CardD_x^+ = 21$ و$x \wedge y = 18$

ليكن x من IN و$x \geq 2$. و $x = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$ تفكيك x إلى جداء من عوامل أولية.

لدينا: $CardD_x^+ = 21 \iff (1+\alpha_1) = 21$ أو $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2) = 7 \times 3$

أو $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2) = 3 \times 7$

$\iff \alpha_1 = 20$ أو $(\alpha_1 = 6$ و $\alpha_2 = 2)$

أو $(\alpha_1 = 2$ و $\alpha_2 = 6)$

ومنه فإن: $x = p_1^{20}$ أو $x = p_2^6 p_3^2$ مع $p_2<p_3$ أو $x = p_4^2 p_5^6$ مع $p_4<p_5$

ليكن y من IN و$y \geq 2$ و $y = \prod_{i=1}^{m} q_i^{\beta_i}$ تفكيك y إلى جداء من عوامل أولية.

$CardD_y^+ = 10 \iff (1+\beta_1) = 10$ أو $(1+\beta_1)(1+\beta_2) = 5 \times 2$

أو $(1+\beta_1)(1+\beta_2) = 2 \times 5$

$\iff \beta_1 = 9$ أو $(\beta_1 = 4$ و $\beta_2 = 1)$

أو $(\beta_1 = 1$ و $\beta_2 = 4)$

ومنه: $y = q_1^9$ أو $y = q_2^4 q_3$ مع $q_2<q_3$ أو $y = q_4 q_5^4$ مع $q_4<q_5$

وبما أن: $x \wedge y = 2 \times 3^2$ فإنه: $x \neq p_0^{20}$ و $y \neq q_1^9$

إذن: $x = 2^\alpha . 3^\beta$ و $y = 2^\gamma \times 3^\lambda$ مع: $Min(\alpha;\gamma) = 1$ و $Min(\beta;\lambda) = 2$

وبالتالي فإن: $x=2^6\times3^2=576$ و$y=2\times3^4=162$

3) ليكن a عنصرا من $IN^*-\{1\}$ ويقبل 3 قواسم موجبة بالضبط.

بما أن: $3=1\times3$ فإن: $a = p_1^{\alpha_1}$ حيث p_1 عدد أولي موجب،

ولدينا: $1+\alpha_1 = 3$ أي: $\alpha_1 = 2$ ، وبالتالي فإن $a = p_1^2$ أي: a مربع لعدد أولي.

التمرين 105

ليكن n من IN $(n>1)$

1) ليكن $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ تفكيك n إلى جداء من عوامل أولية. بين أن عدد قواسم n هو: $\prod_{i=1}^{k}(1+\alpha_i)$

2) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا يقبل 9 قواسم في IN. بين أن: $n=a^8$ أو $n=a^2b^2$ مع a وb أوليان مختلفان.

3) نريد تحديد جميع الأعداد الصحيحة الطبيعية التي تحقق:

$$\begin{cases} n \text{ له 9 قواسم في } IN & (1) \\ p \in IP \cap IN \text{ و } 39p+1=n & (2) \end{cases}$$

أ- بين أن n لا يمكن أن يكون على الشكل a^8.

ب- بين أن: $p=5$ أو $p=35$ ، ثم استنتج قيم n.

الحل

1) انظر التمرين رقم (104) (السابق)

2) ليكن n عدداً صحيحاً طبيعياً يقبل 9 قواسم في IN.

لنبين أن: $n=a^8$ أو $n=a^2b^2$ مع a وb أوليان مختلفان.

لدينا: حسب السؤال 1) عدد قواسم n هو $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)...(1+\alpha_k)$

بما أن: $9=1\times 9$ أو $9=3\times 3$

فإن: $1+\alpha_1=9$ و $\forall i\in\{2;...;k\};1+\alpha_i=1$

أو: $1+\alpha_1=1+\alpha_2=3$ و $\forall i\in\{3;...;k\};1+\alpha_i=1$

أي: $\alpha_1=8$ و $\left(\left(\left(\forall i\in\{2;3;...;k\}\right)\alpha_i=1\right)\right.$

أو $\alpha_1=\alpha_2=2$ و $\left(\forall i\in\{3;4;...;k\}\right);\alpha_i=1$

وبالتالي: $n=p_1^8$ أو $n=p_1^2p_2^2$

نضع: $a=p_1$ و$b=p_2$ إذن: $n=a^8$ أو $n=a^2b^2$ حيث a وb أوليان مختلفان.

3) n له 9 قواسم في IN (1)

$39p+1=n$ (2)

حيث $n\in IN$ وp عدد أولي.

أ- لنبين أن n لا يمكن أن يكون على الشكل a^8

الاستدلال بالخلف: نفترض أن: $n=a^8$ ومنه: $39p+1=a^8$

إذا كان p زوجياً فإن: $p=2$ ومنه: $a^8=79$ وهذا غير ممكن.

إذا كان p عدد فردياً فإن: $p\equiv 1[2]$ ومنه: $a^8\equiv 0[2]$

إذن: $a\equiv 0[2]$ وبما أن a عدد أولي فإن: $a=2$.

وبالتالي: $2^8=39p+1$ أي: $39p=255$ وهذا مستحيل إذن: $n\neq a^8$ وبالتالي: $n=a^2b^2$

ب- لنبين أن: $p=5$ أو $p=37$ ثم نحدد n.

لدينا: $n=a^2b^2$ و$n=39p+1$ ومنه: $39p=a^2b^2-1$

أي: $39p=(ab-1)(ab+1)$

إذن: $p|(ab-1)(ab+1)$

وبما أن p عدد أولي فإن: $p|ab-1$ أو $p|ab+1$

الحالة (1): p يقسم $ab+1$:

لدينا: $(\exists k\in IN);ab+1=pk$

ومنه: $39(ab+1)=39pk$

أي: $39(ab+1)=k(ab-1)(ab+1)$ أو $k(ab-1)=39$

إذن: $ab-1|39$

وبالتالي: $ab-1=13$ أو $ab-1=3$ أو $ab-1=1$ أو $ab-1=39$

• إذا كان: $ab-1=1$ فإن: $ab+1=2$ و$k=39$

ومنه: $39p=ab+1=2$ وهذا غير ممكن.

• إذا كان $ab-1=3$ فإن: $ab+1=5$ و$k=13$

إذن: $13p=ab+1$ وهذا غير ممكن.

• إذا كان: $ab-1=13$ فإن: $k=3$ و$3p=ab+1$

أي: $3p=15$ وبالتالي: $p=5$

• إذا كان: $ab-1=39$ فإن: $k=1$ أي: $p=ab+1$

ومنه: $p=41$.

الحالة (2): p يقسم $ab-1$:

باتباع الخطوات نفسها نحصل على: $p=37$ والحالات الأخرى غير ممكنة.

وبالتالي: القيم الممكنة للعدد p هي 5؛37؛41.

إذا كان: $p=41$ فإن: $ab=40$

وهذا غير ممكن لأن: a وb عددان أوليان.

إذا كان: $p=37$ فإن: $ab=38$ أي ($a=2$ و$b=19$).

وفي هذه الحالة: $n=2^2\times19^2=144$

إذا كان: $p=5$ فإن: $ab=14$

ومنه: $ab=2\times7$ أي: ($a=2$ و$b=7$).

وفي هذه الحالة: $n=2^2x7^2=196$

إذن: الأعداد التي تحقق الشرطين (1) و(2) هي: ($n=144$ و$p=37$) و($n=196$ و$p=5$).

التمرين 106

ليكن a عدداً صحيحاً طبيعياً أكبر قطعا من 1، وp عدداً أوليا.

1) أ– بين أنه إذا كان p أولي مع عددين طبيعيين x وy فإنه أولي مع جدائهما.

ب– استنتج أنه إذا كان $p>a$ فإن p أولي مع $a!$.

ج– ما هي الأعداد الأولية التي تقسم $a!$؟

2) نفترض أن $p\geq a$، ونريد تحديد أكبر عدد صحيح طبيعي α بحيث: p^α يقسم $a!$.

أ– بين أن عوامل الجداء $a!$ التي تقبل القسمة على p هي: $p;2p;...;(q-1)p;qp$ حيث q هو خارج القسمة

الأقليدية للعدد a على p.

ب- تحقق من أن جداء هذه العوامل هو: $\gamma = (q!)q^{\alpha}$ وأن γ تقسم $a!$.

ج- بين أنه إذا كان $p>q$ فإن: $\alpha = q$ ثم إذا كان: $p \leq q$ فإن: p^{q+q_1} يقسم $a!$ حيث q_1 هو خارج القسمة الأقليدية للعدد q على p.

3) تطبيق: نأخذ $a=156$ و$p=5$

حدد (بتطبيق نتائج السؤال 2 عدة مرات) أكبر عدد صحيح طبيعي α بحيث 5^{α} يقسم $156!$.

الحل

1) أ- لنبين أنه إذا كان p أولياً مع عددين x وy فإنه يكون أولياً مع xy.

نفترض أن: $p \wedge x = 1$ و$p \wedge y = 1$ ونبين أن: $p \wedge xy = 1$.

بما أن p أولي فإن: $p \wedge xy = 1$ أو $p \wedge xy = p$

إذا كان: $p \wedge xy = p$ فإن: $p | xy$ ومنه: $p | x$ أو $p | y$ (لأن p أولي)

إذن: $p \wedge x = p$ أو $p \wedge y = p$

وهذا تناقض مع كون: $p \wedge x = 1$ و$p \wedge y = 1$

وبالتالي $p \wedge xy \neq p$ أي: $p \wedge xy = 1$

ب- لنستنتج أنه إذا كان $p>a$ فإنه: $p \wedge a! = 1$

لنبين بالترجع، إذا كان: $\forall k \in \{1;2;...;n\}\,;\, p \wedge x_k = 1$

فإن: $p \wedge \prod_{k=1}^{n} x_k = 1$ لكل n من $IN^* - \{1\}$

حسب أ) الخاصية صحيحة من أجل $n=2$

ليكن $n \in IN^* - \{1\}$، نفترض أن الخاصية صحيحة حتى الرتبة n ونبين أنها صحيحة بالنسبة للرتبة $n+1$.

لدينا: $\forall k \in \{1;2;...;n;n+1\}\,;\, p \wedge x_k = 1$

ومنه حسب افتراض الترجع: $p \wedge \prod_{k=1}^{n} x_k = 1$ وبما أن: $p \wedge x_{n+1} = 1$

فإن حسب السؤال أ) $p \wedge \left(\prod_{k=1}^{n}(x_k)\right).x_{n+1} = 1$ أي: $p \wedge \prod_{k=1}^{n+1} x_k = 1$

وبالتالي حسب مبدإ الترجع: لكل n من $IN^* - \{1\}$

إذا كان: $\forall k \in \{1;2;...;n\}\,;\, p \wedge x_k = 1$، فإن: $p \wedge \prod_{k=1}^{n} x_k = 1$

تطبيق:

لدينا p أولي و$p>a$.

ومنه: $p \wedge 1 = 1$ و$p \wedge 2 = 1$ و$p \wedge 3 = 1$ و... و$p \wedge (a-1) = 1$ و$p \wedge a = 1$

إذن: $p \wedge a(a-1)\ldots(3)(2)(1) = 1$

يعني أن: $p \wedge a! = 1$

ج- لنحدد الأعداد الأولية التي تقسم $a!$.

حسب السؤال ب) الأعداد الأولية p التي تحقق $p>a$ لا تقسم $a!$ (لأن: $p \wedge a! = 1$)

إذن الأعداد الأولية التي تقسم $a!$ هي الأعداد الأولية الأصغر من a أو تساوي a إذا كان a أولياً.

2) نفترض أن: $p \leq a$ ونريد تحديد أكبر عدد α بحيث p^{α} يقسم $a!$.

أ- لنبين أن عوامل الجداء $a!$ التي تقبل القسمة على p هي: $p;2p;\ldots;qp$ حيث q هو خارج القسمة الإقليدية للعدد a على p.

لدينا: $p \leq a$ ومنه: $\exists!(a;r) \in IN^2 ; a = qp + r$ و $0 \leq r < p$ (القسمة الإقليدية للعدد a على p).

لدينا: $0 \leq r < p \Leftrightarrow 0 \leq a - qp < p$

$\Leftrightarrow qp \leq a < (q+1)p$

ومنه: أكبر مضاعف للعدد p من بين عوامل الجداء $a!$ هو qp إذن عوامل الجداء $a!$ التي تقبل القسمة على p هي $qp;\ldots;3p;2p;p$ ، (لأن: p يوجد ضمن عوامل الجداء $a(a-1)\ldots3\times2\times1$)

ب- لنتحقق من أن جداء هذه العوامل هو γ حيث: $\gamma = q!.p^{q}$ وأن: $\gamma | a!$

لدينا عوامل الجداء $a!$ التي تقبل القسمة على p هي: $qp;\ldots;3p;2p;p$

إذن: $\gamma = \underbrace{qp \times (q-1)p \times \ldots \times 3p \times 2p \times p}_{q \text{ عامل}}$

$\gamma = p^{q}(q(q-1)\ldots2\times1)$

أي: $\gamma = p^{q}q!$

وبما أن $3p;2p;p$ و...وqp عوامل الجداء $a!$. فإن: $\gamma | a!$

ج- لنستنتج أنه إذا كان $p>q$ فإن: $\alpha = q$

إذا كان $p \leq q$ فإن p^{q+q_1} يقسم $a!$ حيث q_1 هو خارج القسمة الإقليدية للعدد q على العدد p

إذا كان $p>q$: فإن $p \wedge q! = 1$ (حسب سؤال 1) ، و$\gamma = q!p^{q}$ يقسم $a!$

إذن أكبر عدد α بحيث p^{α} يقسم $a!$ هو q أي $\alpha = q$

إذا كان $p \leq q$ ، $\exists!(q_1;r_1) \in IN^2: \begin{cases} q = pq_1 + r_1 \\ 0 \leq r_1 < p \end{cases}$

وبتطبيق النتائج السابقة فإن $\gamma_1 = q_1!p^{q_1}$ تقسم $q!$ ومنه p^{q_1} يقسم $q!$

إذن p^{q_1} يقسم $a!$

وبالتالي $p^{q} \times p^{q_1}$ أي: p^{q_1+q} يقسم $a!$.

3) تطبيق: نأخذ $a=156$ و$p=5$

لنحدد أكبر عدد α بحيث: 5^{α} يقسم $156!$

لدينا: حسب نتائج السؤال 2)

$$156=5\times31+1$$
$$31=5\times6+1$$
$$6=5\times1+1$$

أي: $q=31$ و $q_1=6$ و $q_2=1$ و $5>q_2$

إذن: أكبر عدد α بحيث: 5^{α} يقسم $156!$

هو: $\alpha = 31 + 6 + 1$ أي: $\alpha = 38$

التمرين 107

ليكن p عددا أوليا موجبا،

1) بين أن p يقسم C_p^k لكل k من $\{1;2;...;p-1\}$

2) أ- بين أن: $(\forall n \in IN) ; n^p \equiv n[p]$

ب- استنتج أنه إذا كان p لا يقسم n فإن: $n^{p-1} \equiv 1[p]$

3) تطبيقات:

أ- بين أنه لكل n من IN العدد 546 يقسم $n^{13}-n$

ب- بين أن المعادلة: $3x^2+3x+7=y^3$ لا تقبل حلولا في IZ^2.

الحل

1) لنبين أن: $(\forall k \in \{1;2;...;p-1\}) ; p|C_p^k$

ليكن k عنصرا من $\{1;2;...;p-1\}$

لدينا: $C_p^k = \frac{p}{k}C_{p-1}^{k-1}$ ومنه فإن: $kC_p^k = pC_{p-1}^{k-1}$ إذن p يقسم kC_p^k

وبما أن p عدد أولي و $k<p$ فإن: $p \wedge k = 1$ وبالتالي فإنه حسب مبرهنة $GAUSS$: p يقسم C_p^k

إذن: $(\forall k \in \{1;2;...;p-1\}) ; p|C_p^k$

2) أ- لنبين أن: $(\forall n \in IN) ; n^p \equiv n[p]$

من أجل $n=0$، لدينا: $0^p \equiv 0[p]$ (لأن: $0^p=0$ و $0 \equiv 0[p]$)

ليكن n عنصرا من IN.

نفترض أن: $n^p \equiv n[p]$، ونبين أن: $(n+1)^p \equiv n+1[p]$

لدينا: $(n+1)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k n^k = 1 + n^p + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k n^k$

وبما أن: $(\forall k \in \{1;2;...;p-1\});C_p^k \equiv 0[p]$

فإن: $(\forall k \in \{1;2;...;p-1\});C_p^k n^k \equiv 0[p]$

ومنه فإن: $\sum_{k=1}^{p-1} C_p^k n^k \equiv 0[p]$

إذن: $(n+1)^p \equiv n^p + 1[p]$

وحسب افتراض الترجع لدينا: $n^p \equiv n[p]$

إذن: $n^p + 1 \equiv n + 1[p]$ ومنه فإن: $(n+1)^p \equiv n + 1[p]$

وبالتالي فإن: $(\forall n \in IN); n^p \equiv n[p]$

ب- الاستنتاج:

نفترض أن p لا يقسم n ولنبين أن: $n^{p-1} \equiv 1[p]$

لدينا p لا يقسم n وp عدد أولي إذن: $n \wedge p = 1$

وبما أن: $n^p \equiv n[p]$ فإن: $p|n^p - n$ ، يعني أن: $p|n(n^{p-1} - 1)$

ومنه حسب مبرهنة $GAUSS$: $p|n^{p-1} - 1$ ، إذن: $n^{p-1} \equiv 1[p]$

وبالتالي: $(\forall n \in IN);(n \wedge p = 1 \Rightarrow n^{p-1} \equiv 1[p])$

3) تطبيقات:

أ- لنبين أن: $(\forall n \in IN); n^{13} - n \equiv 0[546]$

ليكن n عنصرا من IN

لدينا: 546=2×3×7×13 التفكيك إلى جداء من عوامل أولية للعدد 546.

ملاحظة:

الخاصية التالية: $(\forall n \in IN); n^p \equiv n[p]$
حيث p عدد أولي موجب تسمى مبرهنة *Fermat*.

لدينا حسب مبرهنة *Fermat*: $n^{13} \equiv n[13]$ (13 عدد أولي) يعني أن: $13|n^{13} - n$

ولدينا:
$$\begin{aligned} n^{13} - n &= n(n^{12} - 1) \\ &= n(n^6 - 1)(n^6 + 1) = (n^7 - n)(n^6 + 1) \end{aligned}$$

وبما أن: $n^7 \equiv n[7]$ ، حسب مبرهنة *Fermat*، أي: $7|n^7 - n$ ، فإن: $7|n^{13} - n$

إذن: $7|n^{13} - n$ و $13|n^{13} - n$ و $7 \wedge 13 = 1$ ومنه: $7 \times 13|n^{13} - n$

ولدينا:
$$\begin{aligned} n^{13} - n &= n(n^6 + 1)(n^4 + n^2 + 1) \\ &= n(n^6 + 1)(n^2 - 1)(n^4 + n^2 + 1) \\ &= (n^3 - n)(n^6 + 1)(n^4 + n^2 + 1) \end{aligned}$$

وبما أن: $n^3 \equiv n[3]$، حسب مبرهنة Fermat، أي: $3 | n^3 - n$ فإن: $3 | n^{13} - n$

إذن: $7 \times 13 | n^{13} - n$ و $3 | n^{13} - n$ و $3 \wedge (7 \times 13) = 1$

ومنه: $3 \times 7 \times 13 | n^{13} - n$

ولدينا:

$$\begin{aligned} n^{13} - n &= n(n^6 + 1)(n^6 - 1) \\ &= n(n^6 + 1)(n^3 - 1)(n^3 + 1) \\ &= (n^2 - 1)(n^6 + 1)(n^3 + 1)(n^2 + n + 1) \end{aligned}$$

وبما أن: $n^2 \equiv n[2]$، حسب مبرهنة Fermat، أي: $2 | n^2 - n$ فإن: $2 | n^{13} - n$

إذن: $3 \times 7 \times 13 | n^{13} - n$ و $2 | n^{13} - n$ و $2 \wedge (3 \times 7 \times 13) = 1$

ومنه: $2 \times 3 \times 7 \times 13 | n^{13} - n$

يعني أن: $546 | n^{13} - n$

وبالتالي: $(\forall n \in IN) ; n^{13} - n \equiv 0[546]$

ب- لنبين أن المعادلة $3x^2+3x+7=y^3$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

باستعمال البرهان بالخلف:

نفترض أنه يوجد زوج $(a;b)$ من $\mathbb{Z}^2$ بحيث: $3a^2+3a+7=b^3$

لدينا: $b^3=3(a^2+a+2)+1$. ومنه: $b^3 \equiv 1[3]$

حسب مبرهنة Fermat، لدينا: $b^3 \equiv b[3]$ إذن: $b \equiv 1[3]$ (الموافقة بترديد متعدية)

وبالتالي: $(\exists k \in \mathbb{Z}) ; b = 1 + 3k$

وبما أن: $b^3=3(a^2+a+2)+1$ فإن: $1+9k+27k^2+27k^3=3(a^2+a+2)+1$

إذن: $a^2+a+2=3(k+3k^2+3k^2)$

إذن: $a^2 + a + 2 \equiv 0[3]$

لنبين أن هذه النتيجة غير ممكنة:

إذا كان: $a \equiv 0[3]$ فإن: $a^2 + a + 2 \equiv 2[3]$

إذا كان: $a \equiv 1[3]$ فإن: $a^2 + a + 2 \equiv 1[3]$

إذا كان: $a \equiv 2[3]$ فإن: $a^2 + a + 2 \equiv 2[3]$

وبالتالي الإفتراض خاطئ ومنه لا يوجد أي زوج $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ يحقق المعادلة: $y^3=3x^2+3x+7$

التمرين 108

حدد الأعداد الأولية p التي تحقق: $p | 2^p + 1$

الحل

لدينا: حسب مبرهنة فيرما Fermat، $2^p \equiv 2[p]$ أي: $p|2^p-2$

ومنه: $\begin{cases} p|2^p+1 \\ p|2^p-2 \end{cases} \Rightarrow p|3$

وبما أن p أولي فإن: $p=3$.

عكسيا: لدينا: $2^3+1=9$ و $3|9$

إذن العدد الأولي الوحيد الذي يحقق: $p|2^p+1$ هو العدد $p=3$.

التمرين 109

p عدد أولي موجب.

نعتبر في المجموعة $(IN^*)^2$ المعادلة: $(E):x^2+y^2=p^2$

1) حل المعادلة (E) من أجل: $p=2$.

2) نفترض في كل ما يلي أن: $p \geq 3$. وليكن $(x;y)$ من $(IN^*)^2$ حلا لـ(E).

أ- بين أن x وy لهما زوجية مختلفة،

ب- بين أن p لا يقسم x أو لا يقسم y، ثم استنتج أن: $x \wedge y = 1$.

3) نفترض أن: $(\exists(u;v) \in (IN^*)^2);\ p = u^2+v^2$

أ- تحقق من أن الزوج $(|u^2-v^2|;2uv)$ حل للمعادلة (E).

ب- أعط حلا للمعادلة (E) في الحالتين: $p=5$ و$p=13$.

ج- بين أن المعادلة (E) لا تقبل حلولا في الحالتين: $p=3$ و$p=7$.

الحل

1) لنحل في $(IN^*)^2$ المعادلة: $(1):x^2+y^2=4$

نفترض أنه يوجد زوج $(x;y)$ من $(IN^*)^2$ بحيث: $x^2+y^2=4$

لدينا: $x^2+y^2=4$ ومنه فإن: x^2+y^2 عدد زوجي، إذن x^2 وy^2 لهما الزوجية نفسها.

وبما أن لكل n من $\mathbb{Z}$ لدينا n وn^2 لهما الزوجية نفسها، فإن x وy لهما الزوجية نفسها.

- إذا كان x وy زوجين فإن: $(\exists k;k' \in IN^*) / x=2k$ و $y=2k'$

ومنه فإن: $x^2+y^2=4 \iff 4k^2+4k'^2=4$

$\iff k^2+k'^2=1$

وبما أن: $k^2=1-k'^2$ و$k^2>0$ فإن: $0<k'^2 \leq 1$

إذن: $k'=1$ ومنه: $k=0$ وهذا تناقض مع $k \neq 0$

وبالتالي المعادلة (1) لا تقبل حلولا في هذه الحالة.

• إذا كان x وy فرديين فإن:

$(\exists k; k' \in IN) / x = 2k + 1$ و $y=2k'+1$

ومنه فإن: $x^2 + y^2 = 4 \Longleftrightarrow (2k+1)^2 + (2k'+1)^2 = 4$

$$\Longleftrightarrow 2(k^2 + k'^2 + k + k') = 1$$

يعني أن: $(\exists r \in IZ) / 2r = 1$ ، أي أن العدد 1 زوجي وهذا تناقض.

وبالتالي فإن المعادلة لا تقبل حلولا في $(IN^*)^2$

2) لدينا p عدد أولي و$p \geq 3$ ومنه فإن p عدد فردي.

أ- لنبين أن x وy لهما زوجية مختلفة:

لدينا $x^2+y^2=p^2$ وp^2 عدد فردي ومنه فإن x^2+y^2 فردي

إذن x^2 وy^2 لهما زوجية مختلفة وبالتالي فإن x وy لهما زوجية مختلفة (لأن x وx^2 لهما الزوجية نفسها وكذلك y وy^2).

ب- • لنبين أن p لا يقسم x أو لا يقسم y.

نفترض أن p يقسم x، أي: $(\exists k \in IN^*) / x = pk$

وp يقسم y، أي: $(\exists k' \in IN^*) / y = pk'$

$$x^2 + y^2 = p^2 \Longleftrightarrow k^2 + k'^2 = 1$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k' = 0 \end{cases} \text{أو} \begin{cases} k = 0 \\ k' = 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow x = 0 \text{ أو } y = 0$$

وهذا تناقض مع كون: $x \neq 0$ و$y \neq 0$ إذن p لا يقسم x أو p لا يقسم y.

• الاستنتاج: نضع: $d \in IN^*; d = x \wedge y$

لدينا:

$$\begin{cases} d | x \\ d | y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^2 | x^2 \\ d^2 | y^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d^2 | x^2 + y^2$$

وبما أن $x^2+y^2=p^2$ فإن: $d^2 | p^2$ ومنه: $d | p$

لدينا p عدد أولي و$d \in IN^*$ إذن: $d=1$ أو $d=p$

ولدينا p لا يقسم x أو لا يقسم y إذن: $d=1$ وبالتالي: $x \wedge y = 1$

3) أ- لنتحقق من أن الزوج $(|u^2 - v^2|; 2uv)$ حل للمعادلة (E).

لدينا:

$$x^2 + y^2 = (u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2$$
$$= u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2$$
$$= u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = (u^2 + v^2)^2 = p^2$$

ومنه الزوج $\left(\left|u^2-v^2\right|;2uv\right)$ حل للمعادلة (E).

ب- • إذا كان $p=5$ فإن: $p=1^2+2^2$

نأخذ: ($u=1$ و$v=2$) أو ($u=2$ و$v=1$)

ومنه فإن: $2uv=4$ و$\left|u^2-v^2\right|=3$

إذن الزوج $(3;4)$ حل للمعادلة $x^2+y^2=25$

• إذا كان: $p=13$ فإن: $p=2^2+3^2$

نأخذ: ($v=2$ و$u=3$) أو ($v=3$ و$u=2$)

ومنه فإن: $2uv=12$ و$\left|u^2-v^2\right|=5$

إذن الزوج $(5;12)$ حل للمعادلة: $x^2+y^2=169$

ج- • من أجل $p=3$. لنبين أن المعادلة $x^2+y^2=9$ ليس لها حل في IN^{*2}.

نفترض أنه يوجد زوج $(x;y)$ من $(IN^*)^2$ بحيث: $x^2+y^2=9$.

لدينا: $y^2=9-x^2$ و$y^2>0$ ومنه: $0<x^2<9$

يعني أن: $x^2\in\{1;4\}$ أي: $x\in\{1;2\}$

إذا كان: $x=1$ فإن: $y^2=8$، وهذا غير ممكن في IN.

إذا كان: $x=2$ فإن: $y^2=5$، وهذا غير ممكن في IN.

وبالتالي المعادلة $x^2+y^2=9$ لا تقبل حلولا في $(IN^*)^2$.

• من أجل $p=7$، لنبين أن المعادلة $x^2+y^2=49$ ليس لها حلولا في $(IN^*)^2$.

نفترض أنه يوجد $(x;y)$ من $(IN^*)^2$ بحيث: $x^2+y^2=49$

لدينا: $y^2=49-x^2$ و$y^2>0$ ومنه: $0<x^2<49$

يعني أن: $x^2=\{1;4;9;16;25;36\}$ أي: $x\in\{1;2;3;4;5;6\}$

الجدول التالي يعطي قيم y^2:

x	1	2	3	4	5	6
$y^2=49-x^2$	48	45	40	33	24	13

القيم التي يأخذها y^2 ليست بمربعات كاملة وبالتالي لا يوجد،

أي زوج $(x;y)$ حل للمعادلة $x^2+y^2=49$ في $(IN^*)^2$.

التمرين 110

1) لكل عنصر n من IN نضع: $F_n=2^{2^n}+1$ هذه الأعداد تسمى: *Les nombres de Fermat*

1) أ- بين أنه لكل (x,n) من IN^2 لدينا: $x+1$ يقسم $x^{2n+1}+1$؛

ب- ليكن k وβ عنصرين من IN حيث k عدد فردي ؛ استنتج أن: $2^{k\beta}+1 \equiv 0[2^{\beta}+1]$.

2) أ- بين أن: $(\forall n \in IN^*);(\exists!(p,q) \in IN^2)/n = 2^p(2q+1)$

ب- ليكن n عنصرا من IN^*؛

بين أنه إذا كان 2^n+1 عددا أوليا فإنه يوجد α من IN بحيث: $n = 2^{\alpha}$

3) أ- ليكن x من $IR-\{1\}$ وk من IN^*

تحقق من أن: $-1+x-x^2+x^3...+x^{2^k}-1 = \dfrac{x^{2^k}-1}{x+1}$

ب- استنتج أن لكل n وk من IN لدينا: $\dfrac{F_{n+k}-2}{F_n}$ عدد صحيح طبيعي.

ج- بين أن: $(\forall n,k \in IN); F_{n+k} \wedge F_n = 1$

د- استنتج أنه يوجد ما لا نهاية من الأعداد الأولية.

الحل

1) أ- ليكن x وn عنصرين من IN، لنبين أن $x+1$ يقسم $x^{2n+1}+1$

طريقة (1) لدينا $x+1 \equiv 0[x+1]$ يعني أن: $x \equiv -1[x+1]$

وبما أن $2n+1$ عدد فردي فإن $x^{2n+1} \equiv -1[x+1]$ ؛

ومنه: $x^{2n+1}+1 \equiv 0[x+1]$ ؛ إذن $x+1$ يقسم $x^{2n+1}+1$.

طريقة (2)

لدينا: $$\sum_{k=0}^{2n}(-x)^k = 1-x+x^2-x^3+..+x^{2n}$$

$$= \frac{1-(-x)^{2n+1}}{1+x} = \frac{1+x^{2n+1}}{1+x}$$

ومنه فإن: $x^{2n+1}+1 = (x+1)\sum_{k=0}^{2n}(-x)^k$ ؛ إذن $x+1$ يقسم $x^{2n+1}+1$

ب- الاستنتاج:

نأخذ $x = 2^{\beta}$ و$k=2n+1$، حسب السؤال 1، لدينا $2^{\beta}+1$ يقسم $(2^{\beta})^k+1 = 2^{k\beta}+1$

يعني أن: $2^{k\beta}+1 \equiv 0[2^{\beta}+1]$

2) أ- ليكن n عنصرا من IN^*.

لنبين أن $(\exists!(p,q) \in IN^2)/n = 2^p(2q+1)$

إذا كان: n عدد فردي فإن: $(\exists! q \in IN)/n = 2q+1$

إذن: $(\exists!(0,q) \in IN^2)/n = 2^0(2q+1)$

إذا كان: n عدداً زوجياً فإن تفكيك n إلى جداء عوامل أولية يكتب بكيفية وحيدة على الشكل:

$$n = 2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots p_k^{\alpha_k}$$

حيث p_2 و p_3 و ... p_k أعداد أولية موجبة ومختلفة و $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ من IN^* و $2<p_2<\dots<p_k$

وبما أن العدد 2 هو العدد الأولي الزوجي الوحيد فإن جميع الأعداد الأولية $p_2, p_3, \dots, p_k$ فردية ومنه فإن $p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \dots p_k^{\alpha_k}$ عدد فردي.

نضع: $2q + 1 = p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots p_k^{\alpha_k}$ و $p = \alpha_1$ ؛ وحداية p و q تأتي من كون تفكيك n وحيد.

وبالتالي: $(\forall n \in IN^*), (\exists! (p, q) \in IN^2) / n = 2^p(2q + 1)$

ب- ليكن n عنصرا من IN^*، نفترض أن 2^n+1 عدد أولي.

لنبين أن $(\exists \alpha \in IN) / n = 2^\alpha$

بما أن n من IN^* فإنه حسب السؤال 2) أ- $(\exists! (p, q) \in IN^2) / n = 2^p(2q + 1)$

يكفي أن نبين أن $q=0$، لذلك نستعمل البرهان بالخلف: نفترض أن $q \neq 0$

لدينا $2^n + 1 = 2^{2^p(2q+1)} + 1$

وبما أن $(2q+1)$ عدد فردي فإنه لدينا حسب السؤال 1) ب- $2^{2^p} + 1$ يقسم $2^{2^p(2q+1)} + 1 = 2^n + 1$

أي $2^{2^p} + 1$ يقسم 2^n+1

وبما أن $q \neq 0$ فإن $2^{2^p} + 1$ قاسم فعلي للعدد 2^n+1، وهذا تناقض مع كون 2^n+1 عدد أول.

إذن: $q=0$ يعني أن $n=2^p$ وبالتالي: $(\exists \alpha \in IN) / n = 2^\alpha$

3) أ- مجموع 2^k حد أول للمتتالية الهندسية التي أساسها $x-$ وحدها الأول 1 يعطي النتيجة التالية:

$$-1 + x - x^2 + x^3 \dots + x^{2^k - 1} = -\left(1 + (-x) + (-x)^2 + \dots + (-x)^{2^k - 1}\right)$$

$$= -\left(\frac{1 - (-x)^{2^k}}{1 - (-x)}\right)$$

$$= -\left(\frac{1 - x^{2^k}}{1 + x}\right) = \frac{x^{2^k} - 1}{x + 1}$$

ب- الاستنتاج: ليكن n و k من IN، لدينا: $F_{n+k} - 2 = 2^{2^{n+k}} - 1 = 2^{2^n \cdot 2^k} - 1 = (2^{2^n})^{2^k} - 1$

ومنه: (بتطبيق نتيجة السؤال 3 أ))

$$\frac{F_{n+k} - 2}{F_n} = \frac{2^{2^{n+k}} - 1}{2^{2^n} + 1}$$

$$= \frac{(2^{2^n})^{2^k} - 1}{2^{2^n} + 1}$$

$$= -1 + 2^{2^n} - (2^{2^n})^2 + \dots + (2^{2^n})^{2^k - 1}$$

وبما أن $2^{2^n} > 1$ فإن $(2^{2^n})^{2^k} - 1 > 0$ ومنه $\frac{F_{n+k} - 2}{F_n}$ عدد صحيح طبيعي.

ج- ليكن n و k من IN. لنبين أن: $F_{n+k} \wedge F_n = 1$

لدينا $\frac{F_{n+k}-2}{F_n}$ عدد صحيح طبيعي

ومنه فإن $F_{n+k}-qF_n=2$ ، حيث: q عدد صحيح طبيعي. نضع: $d=F_{n+k}\wedge F_n$ حيث $d\in IN^*$

لدينا $\begin{cases} d/F_n \\ d/F_{n+k} \end{cases} \Rightarrow d/F_{n+k}-qF_n$

ومنه فإن $d/2$،

إذن: $d=1$ أو $d=2$

وبما أن الأعداد F_n فردية فإن $d=1$

إذن: $(\forall n,k\in IN);F_n\wedge F_{n+k}=1$

د- الاستنتاج: لدينا حسب 3) ج- لكل m و n من IN حيث $F_n\wedge F_m=1;m\neq n$ (لأن $(n>m\iff n=m+k$)، ولدينا لكل n من IN يوجد عدد أولي P_n بحيث P_n يقسم F_n.

وبما أن $(\forall m,n\in IN);n\neq m\Rightarrow p_n\neq p_m$ فإنه يوجد ما لا نهاية من الأعداد الأولية وهي: $(p_n)_{n\geq 0}$.

التمرين 111

(البرهان على أن F_5 عدد غير أولي)

نقبل أن 641 عدد أولي (تأكد من ذلك)

1) فكك 640 إلى جداء عوامل أولية، ثم استنتج أن: $(5\times 2^7)^4\equiv 1[641]$

2) تحقق من أن: $641=5^4+2^4$، ثم استنتج أن: $2^{32}+1\equiv 0[641]$

الحل

1) لدينا: $640=2\times 320=2^2\times 160=2^3\times 80=2^3\times 16\times 5$

ومنه : $640=2^7\times 5$

الاستنتاج:

لدينا: $641=640+1$، ومنه: $640\equiv -1[641]$

أي: $2^7\times 5\equiv -1[641]$ ، إذن: $(2^7\times 5)^4\equiv 1[641]$

2) لدينا: $5^4+2^4=(25)^2+16=625+16=641$

الاستنتاج:

لدينا: $5^4+2^4\equiv 0[641]\iff 5^4\equiv -2^4[641]$

و $(5\times 2^7)^4\equiv 1[641]\iff 5^4\times 2^{28}\equiv 1[641]$

ومنه: $-2^4\times 2^{28}\equiv 1[641]$ ، أي $-2^{32}\equiv 1[641]$

إذن: $1+2^{32}\equiv 0[641]$ أي $F_5\equiv 0[641]$ ومنه F_5 عدد غير أولي.

التمرين 112

ليكن p عددا صحيحا طبيعيا أوليا بحيث: $p \equiv 3[4]$

1) أ- بين أن المعادلة $x^2 + 1 \equiv 0[p]$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}$

ب- استنتج أن:

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2); (p/x^2 + y^2 \iff p/x \text{ و } p/y)$$

2) أ- بين ان المعادلة: $x^2+y^2=pz^2$ مع $x \wedge y \wedge z = 1$ لا تقبل حلولا في $(IN^*)^3$.

ب- حل في المجموعة $\mathbb{Z}^3$ المعادلة: $x^2+y^2=pz^2$

الحل

1) أ- لنبين أن المعادلة: $x^2 + 1 \equiv 0[p]$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}$

نفترض أن: $(\exists a \in \mathbb{Z})/a^2 + 1 \equiv 0[p]$

يعني أن: $(\exists a \in \mathbb{Z})/a^2 \equiv -1[p]$

ومنه فإن: $(1)\ (\exists a \in \mathbb{Z})/a^4 \equiv 1[p]$

وبما أن $a^2 \equiv -1[p]$ فإن p لا يقسم a ؛ إذن حسب مبرهنة $Fermat$: $a^{p-1} \equiv 1[p]$ (2)

وبالتالي فإن $p - 1 \equiv 0[4]$ يعني $p \equiv 1[4]$ ؛ وهذا تناقض مع كون $p \equiv 3[4]$

إذن المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{Z}$

ب- ليكن x وy عنصرين من $\mathbb{Z}$ ؛ لنبين أن p/y و $p/x \iff p/x^2 + y^2$

- إذا كان p/x وp/y فإن p/x^2 وp/y^2 ؛ ومنه فإن p/x^2+y^2
- نفترض ان p/x^2+y^2، لنبين أن p/x وp/y.

بما أن :

$$\begin{aligned} p/x &\iff p/x^2 \\ &\iff p/x^2 + y^2 - x^2 \\ &\iff p/y^2 \\ &\iff p/y \end{aligned}$$

فإنه يكفي أن نبين أن: p/x (أو p/y)

من أجل ذلك سنستعمل البرهان بالخلف: نفترض أن p لا يقسم x.

لدينا : p عدد أولي و p لا يقسم x ومنه فإن $p \wedge x = 1$ ؛

إذن، حسب مبرهنة $BEZOUT$: $(\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2)/\alpha p + \beta x = 1$

ومنه $\beta x \equiv 1[p]$، إذن $\beta^2 x^2 \equiv 1[p]$

وبما أن p/x^2+y^2 أي $x^2 + y^2 \equiv 0[p]$ فإن $\beta^2(x^2 + y^2) \equiv 0[p]$ أي $\beta^2 x^2 + \beta^2 y^2 \equiv 0[p]$

وبالتالي : $\beta^2 y^2 \equiv -1[p]$ يعني أن $(\beta y)^2 + 1 \equiv 0[p]$

يعني أن المعادلة: $x^2 + 1 \equiv 0[p]$ تقبل حلا في $\mathbb{Z}$ هو βy وهذا تناقض مع نتيجة السؤال السابق.

إذن p/x ومنه فإن p/y

وبالتالي: $(\forall x, y \in ZI); (p/x^2 + y^2 \iff p/x$ و $p/y)$

2) أ- لنبين أن المعادلة $x^2+y^2=pz^2$ مع $x \wedge y \wedge z = 1$ لا حل لها في $(IN^*)^3$.

نفترض أن $(\exists (a,b,c) \in (IN^*)^3) / \begin{cases} a^2 + b^2 = pc^2 \\ a \wedge b \wedge c = 1 \end{cases}$

لدينا $a^2+b^2=c^2p$ ومنه فإن p/a^2+b^2 ؛ إذن حسب السؤال 1 ب) p/a و p/b

يعني أن $(\exists k, k' \in IN^*) / a = kp$ و $b=k'p$

ومنه $a^2 + b^2 = c^2p \iff k^2p^2 + k'^2p^2 = pc^2$

$\iff p(k^2 + k'^2) = c^2$

يعني أن p/c^2 أي p/c لأن p أولي

وبالتالي: p/a و p/b و p/c ومنه $p/a \wedge b \wedge c$ ، أي $p/1$ وهذا تناقض.

إذن المعادلة $x^2+y^2=pz^2$ و $x \wedge y \wedge z = 1$ لا حل لها في $(IN^*)^3$.

ب) لنحل في Z^3 المعادلة $x^2+y^2=pz^2$ (E)،

لدينا $(0,0,0)$ حل للمعادلة (E).

وإذا كان (x,y,z) من $\mathbb{Z}^3$ يحقق المعادلة (E) فإن المثلوث $(-x,-y,-z)$ يحققها كذلك، إذن يكفي حل المعادلة (E) في $(IN^*)^3$.

نفترض أنه يوجد (x,y,z) من $(IN^*)^3$ بحيث $x^2+y^2=pz^2$ ؛

نضع $d \in IN^*; d = x \wedge y \wedge z$

لدينا:

$$\left(\exists (x', y', z') \in (IN^{*3})\right) / \begin{cases} x = dx' \\ y = dy' \\ z = dz' \end{cases} \text{ و } x' \wedge y' \wedge z' = 1$$

ومنه المعادلة (E) تستلزم: $\begin{cases} x'^2 + y'^2 = pz'^2 \\ (x', y', z') \in (IN^*)^3 \\ x' \wedge y' \wedge z' = 1 \end{cases}$

وهذا غير ممكن حسب السؤال 2 أ) وبالتالي فإنه لا يوجد أي مثلوث (x,y,z) من $(IN^*)^3$ يحقق $x^2+y^2=pz^2$.

وبالتالي فإن المعادلة (E) لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^{*3}$

إذن مجموعة حلول المعادلة (E) هي: $S = \{(0,0,0)\}$.

■ نظمات العد

التمرين 113

N عدد صحيح طبيعي يكتب على الشكل $\overline{ababab}$ في نظمة العد العشري.

بين أن N يقبل القسمة على 10101.

الحل

لدينا: $N = a.10^5+b.10^4+a.10^3+b.10^2+a.10+b$

$$=(10a+b)10^4+(10.a+b)10^2+a.10+b$$

$$=(10.a+b)(10^4+10^2+1)$$

$$=(10.a+b)(10101)$$

لدينا $10.a+b \in IN$ ومنه 10101 يقسم N ، أي N يقبل القسمة على 10101.

التمرين 114

1) أوجد جميع الأعداد الصحيحة الطبيعية a بحيث: a^3 يقسم 18360

2) استنتج حلول المعادلة: $b \in IN ; b^3\left[b^2+(1+b)^2\right] = 18360$

3) حدد عددا b بحيث إذا كان A ممثلا في نظمة العد العشري ب 36723 فإنه يكون ممثلا ب 442003 في نظمة العد ذات الأساس b.

الحل

1) لدينا تفكيك العدد 18360 إلى جداء من عوامل أولية هو: $18360=2^3\times3^3\times5\times17$.

ومنه الأعداد التي تحقق a^3 يقسم 18360 هي: $a=2$ أو $a=3$ أو $a=2\times3=6$

2- ليكن b عنصرا من IN، لدينا: $b^3\left(b^2+(1+b)^2\right)=18360 \Rightarrow b^3/18360$

$\Rightarrow b=2$ أو $b=3$ أو $b=6$

- إذا كان $b=2$ فإن $b^2+(1+b)^2=(3)^3\times5\times17$ ، أي $13=(3)^3\times5\times17$ وهذا غير ممكن.
- إذا كان $b=3$ فإن $b^2+(1+b)^2=(2)^3\times5\times17$ ، أي $25=(2)^3\times5\times17$ وهذا غير ممكن.
- إذا كان $b=6$ فإن $b^2+(1+b)^2=15\times17$ أي $85=5\times17$ وهذا صحيح.

إذن الحل الوحيد للمعادلة المقترحة هو $b=6$.

3) لدينا: $A=36723$ و $A=4b^5+4b^4+2b^3+3$، ومنه: $36723=4b^5+4b^4+2b^3+3$

يعني أن: $18360=2b^5+2b^4+b^3=b^3(b^2+(b+1)^2)=b^3(2b^2+2b+1)$

إذن $b=6$ (حسب السؤال 2).

التمرين 115

هل يوجد (a,b) من IN^2 بحيث يكون العدد $N=\overline{aabb}$ في نظمة العد العشري مربعا كاملا؟

الحل

يكون العدد N مربعا كاملا إذا وجد k من IN بحيث $N=k^2$

نفترض أنه يوجد k من IN بحيث $N=k^2$

لدينا: $N=a10^3+a10^2+b10+b \;\; =1100a+11b \;\; =11(100a+b)$

ومنه فإن $k^2=11(100a+b)$، يعني أن $11/k^2$

أي $11/k$ ومنه: $(\exists p \in IN)/k = 11p$

وبالتالي: $11p^2=100a+b$ ؛ يعني أن: $11/100a+b$، ولدينا $11/99a$ إذن: $11/a+b$

وبما أن $0 \leq a \leq 9$ و $0 \leq b \leq 9$ فإن $0 \leq a + b \leq 18$ إذن $a+b=11$

وبالتالي فإن: $N=11^2(9a+1)$

لنحدد قيم a بحيث يكون: $9a+1$ مربعا كاملا علما أن $0 \leq a \leq 9$

من أجل $a=0$ نجد $b=11$ غير مقبول

من أجل $a=7$ لدينا: $9a+1=64=8^2$ و $b=4$

ولدينا: $N=11^2\times82=(11\times8)^2=7744$

إذن يوجد زوج وحيد $(a,b)=(7,4)$، بحيث يكون N مربعا كاملا.

التمرين 116

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث: $n = \overline{26x95y}$ في نظمة العدد العشري.

حدد جميع الأزواج (x,y) من IN^2 بحيث n يقبل القسمة على 3 وعلى 11.

الحل

ليكن (x,y) عنصرا من IN^2 بحيث $0 \leq x \leq 9$ و $0 \leq y \leq 9$

لدينا $n \equiv 0[3] \Longleftrightarrow 2 + 6 + x + 9 + 5 + y \equiv 0[3]$

$$\Longleftrightarrow x + y + 1 \equiv 0[3]$$

و $n \equiv 0[11] \Longleftrightarrow - 2 + 6 - x + 9 - 5 + y \equiv 0[11]$

$$\Longleftrightarrow y - x + 8 \equiv 0[3]$$

ومنه

$$\begin{cases} n \equiv 0[3] \\ n \equiv 0[11] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y \equiv 2[3] \\ y - x \equiv 3[11] \\ 0 \leq x \leq 9 \text{ و } 0 \leq y \leq 9 \end{cases}$$

ولدينا

$$\begin{cases} x + y \equiv 2[3] \\ y - x \equiv 3[11] \end{cases} \Longleftrightarrow (\exists (k,p) \in ZI^2)/ \begin{cases} x + y = 3p + 2 \\ y - x = 11k + 3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow (\exists (k,p) \in ZI^2)/ \begin{cases} 2x = 3p - 11k - 1 \\ 2y = 3p + 11k + 5 \end{cases}$$

وبما أن $0 \leq x \leq 9$ و $0 \leq y \leq 9$ فإن $0 \leq x + y \leq 18$ و $-9 \leq y - x \leq 9$

ومنه فإن k وp من $\mathbb{Z}$ يجب أن تحقق مايلي

$$\begin{cases} 0 \leq 3p+2 \leq 18 \\ -9 \leq 11k+3 \leq 9 \end{cases} \text{ يعني أن } \begin{cases} k \in \{-1;0\} \\ p \in \{0;1;2;3;4;5\} \end{cases}$$

• إذا كان $k=-1$ فإن $\begin{cases} 2x = 3p+10 \\ 2y = 3p-6 \end{cases}$ ومنه يجب أن يكون p عددا زوجيا.

من أجل $p=0$ نجد $y<0$، حل غير مقبول

من أجل $p=2$ نجد $x=8$ و $y=0$

من أجل $p=4$ ننجد $x=11$، حل غير مقبول

في هذه الحالة: $(x,y)=(8,0)$

• إذا كان $k=0$ فإن: $\begin{cases} 2x = 3p-1 \\ 2y = 3p+5 \end{cases}$ ومنه يجب أن يكون p عددا فرديا

من أجل $p=1$ نجد $x=1$ و$y=4$

من أجل $p=3$ نجد $x=4$ و $y=7$

من أجل $p=5$ نجد $y=10$ حل غير مقبول

في هذه الحالة $(x,y) \in \{(1;4),(4;7)\}$

وبالتالي فإن الأزواج (x,y) المطلوبة هي: $(4;7)$ و$(8;0)$ و$(1;4)$.

التمرين ١١٦

ليكن N عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم ويكتب على الشكل $\overline{xyz}$ في نظمة العد ذات الأساس 7 ويكتب $\overline{zyx}$ في نظمة العد ذات الأساس 9. (يعني أن: $N = \overline{xyz}^{7} = \overline{zyx}^{9}$) 1) بين أن: $y=25x-40z$

2) استنتج أن: $y=0$

3) حدد x وz

4) اكتب N في نظمة العدد العشري.

الحل

لدينا:

1) $N = \overline{xyz}^{7} = x.7^2 + y.7 + z = 49x + 7y + z$

و $N = \overline{zyx}^{9} = z.9^2 + y.9 + x = 81z + 9y + x$

ومنه: $49x+7y+z=81z+9y+x$ ، إذن: $y=24x-40z$

2) لدينا حسب السؤال 1) : $y=24x-40z$ ومنه : $y=8(3x-5z)$

إذن: y مضاعف للعدد 8، ولدينا $0 \leq y < 7$ وبالتالي $y=0$.

3) حسب السؤال 2) $y=0$ ومنه : $24x=40z$ أي: $3x=5z$

لدينا: $\begin{cases} 3 | 5z \\ 3 \wedge 5 = 1 \end{cases}$ ومنه حسب مبرهنة كوص $(Gauss)$

فإن $3|z$ أي z مضاعف للعدد 3.

وبما أن $1 \leq z < 7$ فإن $z=3$ أو $z=6$

إذا كان $z=6$ فإن $x=10$ وهذا غير ممكن لأن $0<x<7$

وبالتالي $z=3$ و$x=5$

4) حسب السؤال 3) لدينا: $N = \overline{503}^{7} = \overline{305}^{9}$

لنكتب N في نظمة العد العشري.

$$N = \overline{503}^{7} = 5.7^2 + 3 = 5 \times 49 + 3 = 248$$

$$N = \overline{305}^{9} = 3.9^2 + 5 = 3 \times 81 + 5 = 248$$

إذن $N=248$ في نظمة العد العشري.

التمرين 118

لكل عنصر n من IN نضع: $A_n = 3^n + 3^{2n} + 3^{3n}$

1) حدد، تبعا لقيم n، بواقي القسمة الأقليدية للعدد 3^n على 13.

2) حدد المجموعة $S = \{n \in IN / A_n \equiv 0[13]\}$

3) نعتبر الأعداد التالية: $\overline{1110}_{(3)}$ ، $\overline{1010100}_{(3)}$ ، $\overline{1001001000}_{(3)}$

هل هذه الأعداد تقبل القسمة على 13؟

الحل

1) تحديد بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13، تبعا لقيم n.

لدينا $3 \equiv 3[13]$ و$3^2 \equiv 9[13]$ و$3^3 \equiv 1[13]$ ؛ ومنه $3^{3k} \equiv 1[13]$ لكل k من IN.

يعني أن باقي القسمة الإقليدية ل 3^n على 13 مرتبط بباقي القسمة الإقليدية ل n على 3.

وبالتالي بواقي القسمة الإقليدية ل 3^n على 13 هي:

العدد 1 إذا كان: $n = 3k \; ; \; k \in IN$

العدد 3 إذا كان: $n = 3k + 1 \; ; \; k \in IN$

العدد 9 إذا كان: $n = 3k + 2 \; ; \; k \in IN$

2) تحديد المجموعة S

ليكن n عنصرا من IN لدينا:

إذا كان $n \equiv 0[3]$ فإن $3^n \equiv 1[13]$ ؛ ومنه $A_n \equiv 3[13]$

إذا كان $n \equiv 1[3]$ فإن $3^n \equiv 3[13]$ ؛ ومنه $A_n \equiv 3 + 3^2 + 3^3[13]$ يعني أن $A_n \equiv 0[13]$

إذا كان $n \equiv 2[3]$ فإن $3^n \equiv 9[13]$، ومنه $A_n \equiv 9 + 9^2 + 9^3[13]$، يعني أن

$A_n \equiv 3^2 + 3^4 + 3^6[13]$ يعني أن $A_n \equiv 9 + 3 + 1[13]$ يعني أن $A_n \equiv 0[13]$

وبالتالي: $S = \{3k + 1/k \in IN\} \cup \{3k + 2/k \in IN\}$

3) ◦ لدينا: $\overline{1110}_{(3)} = 3^3 + 3^2 + 3 = A_1$

وبما أن $A_1 \equiv 0[13]$ فإن العدد $\overline{1110}_{(3)}$ يقبل القسمة على 13.

◦ لدينا $\overline{1010100}_{(3)} = 3^6 + 3^4 + 3^2 = A_2$

وبما أن $A_2 \equiv 0[13]$ فإن العدد $\overline{1010100}_{(3)}$ يقبل القسمة على 13.

◦ لدينا $\overline{1001001000}_{(3)} = 3^9 + 3^6 + 3^3 = A_3$

وبما أن $A_3 \equiv 3[13]$ فإن العدد $\overline{1001001000}_{(3)}$ لا يقبل القسمة على 13.

التمرين 119

1) حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $(1): 20x-9y=2$

2) حدد المجموعة: $E = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2/20x - 9y = 2$ و $x \wedge y = 2\}$

3) ليكن N عددا صحيحا طبيعيا بحيث: $N = \overline{ca5}_{(6)}$ و $N = \overline{bbaa}_{(4)}$

بين أن $a+5$ مضاعف للعدد 4 ثم حدد a و b و c.

الحل

1) لنحل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $(1): 20x-9y=2$

نلاحظ أن الزوج $(1;2)$ حل للمعادلة (1).

ليكن $(x;y)$ عنصرا من $\mathbb{Z}^2$ لدينا: $20x - 9y = 2 \iff 20x - 9y = 20 \times 1 - 9 \times 2$

$\iff 20(x-1) = 9(y-2)$

إذن: $9/20(x-1)$ و $20 \wedge 9 = 1$ ومنه، وحسب مبرهنة $GAUSS$: $9/x-1$

يعني: $(\exists k \in \mathbb{Z}) /x = 1 + 9k$ وبالتعويض نحصل على $k \in \mathbb{Z}; y = 2 + 20k$

عكسيا: الزوج $(1+9k;2+20k)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ يحقق المعادلة (1).

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (1) هي: $S = \{(1 + 9k; 2 + 20k) /k \in \mathbb{Z}\}$

2) تحديد المجموعة E

ليكن (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث: $20x-9y=2$

نضع $d = x \wedge y$ مع $d \in IN^*$

لدينا d/x و d/y ومنه $d/20x-9y$ أي $d/2$، وبما أن 2 عدد أولي فإن: $d=2$ أو $d=1$

لدينا $y=2+20k$ مع $k \in \mathbb{Z}$ ومنه فإن y عدد زوجي.

إذن لكي يكون $d=2$ يجب ويكفي أن يكون لدينا x زوجي

وحسب مبرهنة $GAUSS$، لدينا $3|y$ يعني أن: $(\exists k \in \mathbb{Z}) / y = 3k$

ومنه: $(x, y) \in (S) \Rightarrow 3x = 8y$

$$\Rightarrow 3x = 8 \times 3 \times k / k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = 8k / k \in \mathbb{Z}$$

عكسيا لدينا: $3x-8y=3(8k)-8(3k) = k24-k24= 0$

إذن: $(S) = \{(8k; 3k) / k \in \mathbb{Z}\}$

ب- استنتاج: لدينا $(3;1)$ حل للمعادلة: $3x-8y=1$. ومنه: $3(x-3)-8(y-1)=0$

$$3(x-1)-8(y-1)=0 \iff x-3=8k \text{ و } y-1=3k / k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x = 3+8k \text{ و } y = 1+3k / k \in \mathbb{Z}$$

إذن: $(S) = \{(3+8k; 1+3k) / k \in \mathbb{Z}\}$

2) لدينا $A = \overline{b0a}_{(5)} \iff A = 25b + a$ و $b \neq 0$

$$A = \overline{abc}_{(7)} \iff A = 49a + 7b + c \text{ و } a \neq 0$$

ومنه: $49a+7b+c=25b+a$ ، يعني: $18b-48a=c$ أي: $6(3b-8a)=c$

لدينا $0 \le c < 7$ إذن $c=0$ أو $c=6$

الحالة 1: إذا كان $c=0$ فإن: $3b-8a=0$ ، ومنه: $b=8k$ و $a = 3k\,; (\exists k \in \mathbb{Z})$

ولدينا $0<a<7$ و $0<b<7$، يعني أن هذه الحالة غير ممكنة.

الحالة 2: إذا كان $c=6$ فإن $3b-8a=1$ ، ومنه $b=3+8k$ و $a = 1 + 3k\,; (\exists k \in \mathbb{Z})$

ولدينا $0<a<7$ و $0<b<7$ يعني: $0<3+8k<7$ و $0<1+3k<7$

يعني أن $k=0$ وبالتالي: $a=1$ و $b=3$

خلاصة: $a=1\,;\, b=3\,;\, c=6$

تأكيد:

$$A = \overline{b0a}_{(5)} = 25b + a = 76$$

$$A = \overline{abc}_{(7)} = 49a + 7b + c = 49 + 21 + 6 = 76$$

التمرين 121

نعتبر العددين الصحيحين الطبيعيين A و B الممثلين في نظمة العد ذات الأساس 9 بمايلي:
$A = \overline{abcd}$ و $B = \overline{bcda}$ حيث: $a \neq 0$ و $b \neq 0$.

نفترض في كل مايلي أن العدد B قابل للقسمة على 7.

1) بين أنه إذا كان $a=7$ فإن A يقبل القسمة على 7.

2) أ- بين أن العدد $9A-a$ يقبل القسمة على 7 ؛

ب- استنتج أنه إذا كان A يقبل القسمة على 7 فإن $a=7$.

3) أ- حل في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة: $7x-4y=1$

ب- نأخذ: $c=0$ و $d=1$ ؛ حدد a و b لكي يكون A قابلا للقسمة على 7.

الحل

1) لدينا a=7 ومنه $A = \overline{abcd} = \overline{7bcd}$ أي: $A = 7 \times 9^3 + b \times 9^2 + c \times 9 + d$

لدينا: $9 \equiv 2[7]$ و $9^2 \equiv 4[7]$ و $9^3 \equiv 1[7]$ ، إذن $(1)\ A \equiv 4b + 2c + d[7]$

ومنه جهة أخرى لدينا B يقبل القسمة على 7، يعني أن: $B \equiv 0[7]$

أي $b \times 9^3 + c \times 9^2 + d \times 9 + 7 \equiv 0[7]$ ، أي $b + 4c + 2d \equiv 0[7]$

ومنه: $4(b + 4c + 2d) \equiv 0[7]$

إذن: $(2)\ 4b + 2c + d \equiv 0[7]$

وبالتالي ومن (1) و(2) نستنتج أن: $A \equiv 0[7]$ ، أي A يقبل القسمة على 7.

2) أ- لدينا A=a×9^3+b×9^2+c×9+d ومنه $A \equiv a + 4b + 2c + d[7]$

أي $9A - a \equiv 8a + 36b + 18c + 9d[7]$ ، ومنه: $9A - a \equiv a + b + 4c + 2d[7]$

ولدينا: $B \equiv 0[7] \Rightarrow b + 4c + 2d + a \equiv 0[7]$

إذن: $9A - a \equiv 0[7]$

وبالتالي $9A$–a يقبل القسمة على 7.

ب- نفترض أن A يقبل القسمة على 7، أي: $A \equiv 0[7]$

لدينا:

$$\begin{aligned} A \equiv 0[7] &\Rightarrow a + 4b + 2c + d \equiv 0[7] \\ &\Rightarrow 2a + b + 4c + 2d \equiv 0[7] \\ &\Rightarrow a + (a + b + 4c + 2d) \equiv 0[7] \\ &\Rightarrow a + B \equiv 0[7] \\ &\Rightarrow a \equiv 0[7] \qquad (B \equiv 0[7]\ \text{لأن}) \\ &\Rightarrow 7|a \end{aligned}$$

بما أن $a \neq 0$ و a<9 فإن a=7.

3) أ- لنحل في المجموعة $\mathbb{Z}$×$\mathbb{Z}$ المعادلة: $7x$–$4y$=1

نلاحظ أن الزوج (3,5) حل للمعادلة.

لتكن (S) مجموعة حلول المعادلة، لدينا:

$$\begin{aligned} (x, y) \in (S) &\Rightarrow 7x - 4y = 1 \\ &\Rightarrow 7x - 4y = 7 \times 3 - 4 \times 5 \\ &\Rightarrow 7(x - 3) = 4(y - 5) \\ &\Rightarrow 7|4(y - 5) \end{aligned}$$

بما أن: $7 \wedge 4 = 1$ فإنه، حسب مبرهنة $GAUSS$،

نستنتج أن: $7|y - 5$ أي: $(\exists k \in \mathbb{Z}) / y = 5 + 7k$

ومنه:

$$\begin{aligned} 7(x - 3) = 4(y - 5) &\Rightarrow 7(x - 3) = 4 \times 7k / k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow x = 3 + 4k / k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

عكسيا لدينا : $7x - 4y = 7(3 + 4k) - 4(5 + 7k) = 21 + 28k - 20 + 28k = 1$

إذن $(S) = \{(3 + 4k; 5 + 7k) / k \in \mathbb{Z}\}$

ب- نأخذ $c=0$ و$d=1$

لدينا: $A \equiv 0[7] \Rightarrow 7 + 4b + 1 \equiv 0[7]$

$\Rightarrow 4b \equiv -8[7]$

$\Rightarrow 4b \equiv 6[7]$

$\Rightarrow b \equiv 12[7]$

$\Rightarrow b \equiv 5[7]$

بما أن $0 \leq b < 9$ فإن $b=5$ ومنه $a=7$ و$b=5$

التمرين 122

لتكن E مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية n التي تكتب في نظمة العد العشري على الشكل $n = \overline{abba}$ مع $a \geq 2$

1) أ- اعط تفكيك 1001 إلى جداء من عوامل أولية ، ثم بين أن $n \equiv 0[11]$ لكل n من E

ب- حدد $card\, E$، ثم حدد: $card\{n \in E / n \not\equiv 0[2]$ و $n \not\equiv 0[5]\}$

2) أ- بين أن: $(\forall n \in E)\, ; 3|n \Leftrightarrow 3|a + b$ وأن $(\forall n \in E); 7|n \Leftrightarrow 7|b$

ب- استنتج عدد عناصر E التي تقبل العدد 11 كأصغر قاسم أولي.

الحل

1) أ- • تفكيك 1001 إلى جداء من عوامل أولية لدينا : $1001=7\times11\times13$

• ليكن n عنصرا من E، لنبين أن $n \equiv 0[11]$

لدينا: $n = \overline{abba} = 10^3a + 10^2b + 10b + a = 1001a + 110b = 11(7 \times 13a + 10b)$

وبما أن $11 \equiv 0[11]$ و$7\times13b+1b$ عنصر من IN

فإن $11(7 \times 13a + 10b) \equiv 0[11]$ أي $n \equiv 0[11]$ إذن: $(\forall n \in E); n \equiv 0[11]$

ب- • تحديد $card\, E$

ليكن n عنصرا من E، لدينا $n = \overline{abba}$ ممثل في نظمة العد العشري مع $a \geq 2$

يعني $a \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ و$b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

ومنـه فإنـه للحصول على العدد n يكفي اختيـار الرقم a وهذا الاختيار يتم ب 8 كيفيات مختلفة واختيار الرقم b وهذا الاختيار يتم بـ 10 كيفيات مختلفة، إذن حسب المبدإ الأساس للتعداد، عدد هذه الأعداد هو 80،

ومنه : $card\, E=80$.

• تحديد: $card\,\{n \in E, n \not\equiv 0[2]$ و $n \not\equiv 0[5]\}$

ليكن n عنصرا من E، بحيث: $n = \overline{abba}$ مع $a \geq 2$

لدينا: $n \equiv 0[2]$ إذا وفقط إذا كان a زوجياً،

$n \equiv 0[5]$ إذا وفقط إذا كان $a=0$ أو $a=5$ ؛

إذن: $n \not\equiv 0[2]$ و $n \not\equiv 0[5]$ إذا وفقط إذا كان: $a \in \{3;7;9\}$ ؛

ومنه: اختيار العدد a يتم بـ 3 كيفيات مختلفة، واختيار العدد b يتم بـ 10 كيفيات مختلفة، إذن حسب المبدإ الأساس لدينا: $card\{n \in E | n \not\equiv 0[2]$ و $n \not\equiv 0[5]\} = 3 \times 10 = 30$

2) ليكن n عنصرا من E بحيث: $n = \overline{abba}$ مع $a \geq 2$.

أ- لنبين أن: $3|n \Leftrightarrow 3|a+b$

لدينا:
$$\begin{aligned} 3|n &\Leftrightarrow 3|a+b+b+a \\ &\Leftrightarrow 3|2(a+b) \end{aligned}$$

وبما أن $2 \wedge 3 = 1$ فإنه، حسب مبرهنة $GAUSS$: $3|n \Leftrightarrow 3|a+b$.

• لنبين أن: $7|n \Leftrightarrow 7|b$

لدينا: $n = 1001a + 110b = 7 \times 11 \times 13 \times a + 7 \times 15 \times b + 5b$

ومنه:
$$\begin{aligned} 7|n &\Leftrightarrow 7|7 \times 11 \times 13 \times a + 7 \times 15 \times b + 5b \\ &\Leftrightarrow 7|5b \end{aligned}$$

وبما أن: $7 \wedge 5 = 1$ فإن، حسب مبرهنة $GAUSS$: $7|n \Leftrightarrow 7|b$

وبالتالي:
$$\begin{cases} (\forall n \in E); 7|n \Leftrightarrow 7|b \\ (\forall n \in E); 3|n \Leftrightarrow 3|a+b \end{cases}$$

ب- استنتاج:

ليكن n عنصرا من E بحيث: $n = \overline{abba}$ ، مع $a \geq 2$.

لدينا: العدد n يقبل العدد 11 كأصغر قاسم أولي، إذا وفقط إذا كان، n لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية التالية: 2 و 3 و 5 و 7.

• لنحدد القيم الممكنة لكل من a و b، بحيث: n لا يقبل القسمة على 2 و 3 و 5 و 7.

• لا يقبل القسمة على 7، إذا وفقط إذا كان: 7 لا يقسم b ؛ أي $b \neq 7$ ؛ لأن: $0 \leq b \leq 9$.

• n لا يقبل القسمة على 3، إذا وفقط إذا كان، 3 لا يقسم $a+b$.

إذن العدد n يقبل العدد 11 كأصغر قاسم أولي، إذا وفقط إذا كان: $b \neq 7$ و $a \in \{3;7;9\}$.

• إذا كان: $a=3$ فإن $b \in \{1;2;4;5;8\}$ ، ويكون لدينا 5 أعداد من E تقبل العدد 11 كأصغر قاسم أولي.

• إذا كان : $a=7$ فإن $b \in \{0;1;3;4;6;9\}$ ، ويكون لدينا 6 أعداد من E تقبل العدد 11 كأصغر قاسم أولي.

• إذا كان $a=9$ فإن $b \in \{1;2;4;5;8\}$ ، ويكون لدينا 5 أعداد من E تقبل العدد 11 كأصغر قاسم أولي.

وبالتالي هناك 16 عددا من E التي تقبل العدد 11 كأصغر قاسم أولي.

التمرين 123

(معادلة فيرما $Fermat$)

نعتبر في المجموعة IN^3 المعادلة $(E): x^2+y^2=z^2$

$I-$ 1) تحقق من أن $(0,0,0)$ و$(3,4,5)$ حلان للمعادلة (E).

2) بين أن $(u^2-v^2,2uv,u^2+v^2)$ حل للمعادلة (E) لكل (u,v) من IN^2 حيث $u>v$

3) بين أنه إذا كان (x,y,z) حلا للمعادلة (E) فإن (nx,ny,nz) حل للمعادلة (E) مهما يكن n من IN.

$II-$ لنحل المعادلة (E) في $(IN^*)^3$

ليكن (x,y,z) حلا للمعادلة (E). نضع: $d = x \wedge y \wedge z$

1) بين أنه يكفي الاقتصار على $d=1$.

في كل مايلي: (x,y,z) حل للمعادلة (E) بحيث: $x \wedge y \wedge z = 1$

2) بين أن: $x \wedge y = y \wedge z = z \wedge x = 1$

3) بين أن x وy لهما زوجية مختلفة وأن z فردي.

نفترض في كل مايلي: z فردي وx فردي وy زوجي، ونضع: $\delta = (z-x) \wedge (z+x)$

4) بين أنه إذا كان $c^2=ab$ و$a \wedge b = 1$ فإن $(\exists(\alpha,\beta) \in IN^2) \,/\, a=\alpha^2$ و $b=\beta^2$ و $\alpha \wedge \beta = 1)$

5) أ- بين أن $\delta = 2$

ب- استنتج أنه يوجد $(u;v)$ من IN^2 بحيث: $\begin{cases} z+x=2u^2 \\ z-x=2v^2 \\ u \wedge v = 1 \end{cases}$ ثم أن $y=2uv$

ج- استنتج أن $(x,y,z)=(u^2-v^2,2uv,u^2+v^2)$

د- أعط حلول المعادلة $\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ (x,y,z) \in IN^2 \end{cases}$

الحل

$I-$ 1) بديهي أن $(0;0;0)$ يحقق المعادلة E

ولدينا $5^2=25=9+16=3^2+4^2$ ومنه فإن المثلوث $(3;4;5)$ حل للمعادلة (E).

2) لدينا: $(u^2-v^2)^2+(2uv)^2=u^4-2u^2v^2+v^4+4u^2v^2$

$=u^4+2u^2v^2+v4$

$=(u^2+v^2)^2$

ومنه فإن $(u^2-v^2,2uv,u^2+v^2)$ حل للمعادلة (E).

3) ليكن (x,y,z) حلا للمعادلة (E) وn عنصرا من IN.

لدينا $(nx)^2+(ny)^2=n^2x^2+n^2y^2$

$=n^2(x^2+y^2)$

وبما أن $x^2+y^2=z^2$ فإن: $(nx)^2+(ny)^2=n^2z^2=(nz)^2$

ومنه (nx,ny,nz) حل للمعادلة (E).

II- 1) ليكن (x,y,z) حلا للمعادلة (E).

نضع $d \in IN^* ; d = x \wedge y \wedge z$

إذن: $\exists (x',y',z') \in (IN^*)^3 / \begin{cases} x = dx' \\ y = dy' \\ z = dz' \\ x' \wedge y' \wedge z' = 1 \end{cases}$

ومنه
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = z^2 &\iff (dx')^2 + (dy')^2 = (dz')^2 \\ &\iff d(x'^2 + y'^2) = d^2z^2 \\ &\iff x'^2 + y'^2 = z'^2 \end{aligned}$$

وبالتالي يكفي حل النظمة : $x' \wedge y' \wedge z' = 1$ و $\begin{cases} x'^2 + y'^2 = z'^2 \\ (x',y',z') \in (IN^*)^3 \end{cases}$

يعني أنه يكفي الاقتصار على $d=1$

2) نضع : $d_1 = x \wedge y$ و $d_2 = y \wedge z$ و $d_3 = z \wedge x$

لدينا $\begin{cases} d_1 | x \\ d_1 | y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1^2 | x^2 \\ d_1^2 | y^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow d_1^2 | x^2 + y^2$$

وبما أن $x^2+y^2=z^2$ فإن $d_1^2 | z^2$ أي $d_1 | z$

ومنه $d_1 | x$ و $d_1 | y$ و $d_1 | z$ إذن $d_1 | x \wedge y \wedge z$

يعني أن $d_1 | 1$ وبالتالي فإن $d_1=1$

لدينا $\begin{cases} d_2 | y \\ d_2 | z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_2^2 | y^2 \\ d_2^2 | z^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow d_2^2 | z^2 - y^2$$

وبما أن $x^2=z^2-y^2$ فإن $d_2^2 | x^2$ أي $d_2 | x$

ومنه $d_2 | x$ و $d_2 | y$ و $d_2 | z$ إذن $d_2 | x \wedge y \wedge z$

يعني أن $d_2 | 1$ وبالتالي فإن $d_2=1$ وبالمثل نبين أن $d_3=1$

3) • إذا كان x و y زوجيات فإن: $2|x$ و $2|y$

ومنه $2 | x \wedge y$ أي $2|1$ وهذا تناقض

• إذا كان x و y فرديان:

لدينا: $(\forall a \in \mathbb{Z}) ; a^2 \equiv 0[4]$ أو $a^2 \equiv 1[4]$

بما أن x وy فرديين فإن $x^2 \equiv 1[4]$ و$y^2 \equiv 1[4]$

ومنه فإن $x^2 + y^2 \equiv 2[4]$ يعني أن: $z^2 \equiv 2[4]$ وهذا تناقض.

خلاصة: x وy ليسا زوجيين ولا فرديين، إذن x وy لهما زوجية مختلفة وبالتالي z^2 فردي (لأن $x^2+y^2=z^2$) أي z فردي.

4) لدينا $c^2=ab$ و$a \wedge b = 1$. نضع: $\delta = b \wedge c$

ومنه فإن: $(\exists b', c' \in IN^*) / b = \delta b'$ و $c = \delta c'$ و $c' \wedge b' = 1$

إذن: $ab = c^2 \Longleftrightarrow \delta ab' = \delta^2 c'^2$

$\Longleftrightarrow ab' = \delta c'^2$

لدينا $b'|\delta c'^2$ و$b' \wedge c'^2 = 1$ ومنه حسب مبرهنة $GAUSS$: $b'|\delta$

نضع: $\beta = \delta \wedge a$ لدينا: $\delta|b$ و$\beta|\delta$ ومنه فإن $\beta|b$

إذن $(\beta|b$ و $\beta|a) \Rightarrow \beta|a \wedge b$

$\Rightarrow \beta|1$

أي $\beta = 1$ يعني أن $\delta \wedge a = 1$

وبما أن $\delta|ab'$ و$\delta \wedge a = 1$ فإنه حسب مبرهنة $GAUSS$ $\delta|b'$

لدينا $b'|\delta$ و$\delta|b'$ إذن $\delta = b'$

ومنه $c=b'c'$ و$b=b'^2$ وبالتالي $a=c'^2$

إذن $(\exists \alpha, \beta \in IN^*) / (a = \alpha^2$ و $b = \beta^2$ و $\alpha \wedge \beta = 1$ مع $(\beta = b'$ و $\alpha = c')$

5) أ- لدينا $\delta = (z - x) \wedge (z + x)$

ومنه فإن: $\begin{cases} \delta|z - x \\ \delta|z + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta|z - x + z + x \\ \delta|z + x - (z - x) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \delta|2z \\ \delta|2x \end{cases}$

$\Rightarrow \delta|2(x \wedge z)$

وبما أن $x \wedge z = 1$ فإن $\delta|2$

ولدينا: z وx فرديان ومنه فإن $z-x$ و$z+x$ زوجيان أي $2|z - x$ و $2|z + x$ إذن $2|\delta$.

وبالتالي $\delta = 2$

ب- لدينا $(z-x)(z+x)=y^2$ ومنه فإن $\left(\frac{z - x}{2}\right).\left(\frac{z + x}{2}\right) = \left(\frac{y}{2}\right)^2$

وبما أن $(z - x) \wedge (z + x) = 2$ فإن $\left(\frac{z - x}{2}\right) \wedge \left(\frac{z + x}{2}\right) = 1$

إذن حسب السؤال 4-

$$(\exists(u,v)\in IN^2)/\begin{cases}\frac{z+x}{2}=u^2\\ \frac{z-x}{2}=v^2\\ u\wedge v=1\end{cases} \text{ و } u>v$$

أي

$$(\exists(u,v)\in IN^2)/\begin{cases}z+x=2u^2\\ z-x=2v^2\\ u\wedge v=1\end{cases} \text{ و } u>v$$

ومنه فإن $\frac{y}{2}=uv$ أي $y=2uv$

ج- لدينا حسب ما سبق: $u>v$ و $u\wedge v=1$ و $\begin{cases}z+x=2u^2\\ z-x=2v^2\\ y=2uv\end{cases}$

ومنه فإن $u>v$ و $u\wedge v=1$ و $\begin{cases}x=u^2-v^2\\ y=2uv\\ z=u^2+v^2\end{cases}$

د- لنحل المعادلة $(E)\begin{cases}x^2+y^2=z^2\\ (x,y,z)\in IN^3\end{cases}$

ليكن (x,y,z) من $(IN^*)^3$ حلا للمعادلة (E)

نضع $d\in IN^*\,;\, d=x\wedge y\wedge z$

لدينا $x'\wedge y'\wedge z'=1$ و $z=dz'$ و $y=dy'$ و $x=dx'$

ومنه فإن $\begin{cases}x'^2+y'^2=z'^2\\ x'\wedge y'\wedge z'=1\end{cases}$

إذن حسب ما سبق: $u\wedge v=1$ و $(\exists(u,v)\in IN^2)/\begin{cases}x'=u^2-v^2\\ y'=2uv\\ z'=v^2+u^2\\ v<u\end{cases}$

ولدينا $(u^2-v^2,2uv,u^2+v^2)$ يحقق المعادلة (E)

إذن $((d(u^2-v^2),2duv,d(u^2+v^2))$ حل المعادلة (E)

وكذلك $((2duv,d(u^2-v^2),d(u^2+v^2))$ حل للمعادلة (E)

وبالتالي حلول المعادلة (E) هي المثلوثات $((d(u^2-v^2),2duv,d(u^2+v^2))$

أو $((2duv,d(u^2-v^2),d(u^2+v^2))$ حيث $(u,v,d)\in IN^3$ و $v<u$ و $u\wedge v=1$

التمرين 124

ليكن x وy عددين صحيحين طبيعيين وغير منعدمين بحيث : $(S):\begin{cases} x^2 + y^2 = 625 \\ x \wedge y = 1 \end{cases}$

1) بين أن أحد العددين x أوy زوجي والآخر فردي

2) نفترض أن x عدد زوجي.

أ- بين أن $(25 - x) \wedge (25 + x) = 1$

ب- بين أنه يوجد عددان طبيعيان فرديان m وn بحيث: $\begin{cases} m^2 = 25 + x \\ n^2 = 25 - x \\ m \wedge n = 1 \end{cases}$

3) حدد العددين x وy

4) استنتج انطلاقا مما سبق حلول المعادلة التالية: $X, Y \in IN^* ; X^2 + Y^2 = 625$

الحل

1) لنبين أن أحد العددين x أو y زوجي والآخر فردي

لدينا $x \wedge y = 1$ ومنه فإن x أو y عدد فردي، إذا لو كان x وy زوجيان فإن العدد 2 قاسم مشترك لهما، وهذا تناقض مع $x \wedge y = 1$.

إذا كان x وy فرديان فإن $x^2 \equiv 1[2]$ و$y^2 \equiv 1[2]$ ومنه فإن $x^2 + y^2 \equiv 0[2]$

وبما أن $x^2+y^2=625$ فإن $625 \equiv 0[2]$ وهذا غير ممكن وبالتالي فإن أحد العددين x أو y زوجي والآخر فردي.

2) أ- لنبين أن $(25 - x) \wedge (25 + x) = 1$

نضع: $d = (25 + x) \wedge (25 - x)$، حيث: $d \in IN^*$

لدينا: $d|25 + x$ و$d|25 - x$

ومنه فإن: $d^2|(25 - x)(25 + x)$ أي $d^2|y^2$

إذن: $d^2 \wedge y^2 = d^2$ يعني: $(d \wedge y)^2 = d^2$

يعني أن: $d \wedge y = d$ إذن: $d|y$

وبما أن d يقسم y وy فردي (لأن x عدد زوجي) فإن 2 لا يقسم d ومنه فإن: $d \wedge 2 = 1$ لأن 2 عددٌ أولي.

ومن جهة أخرى لدينا: $d|25 - x$ و$d|25 + x$ ومنه $d|2x$

إذن: $d|2x$ و$d \wedge 2 = 1$ تستلزم $d|x$ حسب مبرهنة $GAUSS$

وبالتالي $d|x$ و$d|y$ أي $d|x \wedge y$

ولدينا $x \wedge y = 1$ إذن $d|1$ يعني أن $d=1$

ب- لنبين أنه يوجد m وn من IN^* بحيث:

$25-x=n^2$ و$25+x=m^2$ و$m \wedge n = 1$

لدينا: $\begin{cases} y^2 = (25+x)(25-x) \\ (25+x) \wedge (25-x) = 1 \end{cases}$

نضع: $d \in IN^* ; d = (25+x) \wedge y$

لدينا: $25+x = \beta d$ و $(\exists \alpha, \beta \in IN^*) / y = \alpha d$ ، مع $\alpha \wedge \beta = 1$

وبما أن $y^2=(25+x)(25-x)$

فإن: $\alpha^2 d^2 = \beta d(25-x)$ أي $d\alpha^2 = \beta(25-x)$

ومنه: $\beta | d\alpha^2$

ولدينا: $\alpha \wedge \beta = 1$ يعني $\alpha^2 \wedge \beta = 1$

إذن $\beta | d\alpha^2$ و $\alpha^2 \wedge \beta = 1$ ومنه فإن $\beta | d$ ، (1) حسب مبرهنة GAUSS

نضع: $\delta \in IN^* \; ; \; \delta = d \wedge (25-x)$

لدينا: $\begin{cases} \delta | 25+x \\ \delta | 25-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta | d \\ \delta | 25-x \end{cases}$ ، لأن $d | 25+x$

ومنه: $\delta | (25+x) \wedge (25-x)$ أي $\delta | 1$ ، إذن: $1 = d \wedge (25-x)$

وبالتالي (2) $\begin{cases} d | \beta(25-x) \\ d \wedge (25-x) = 1 \end{cases} \Rightarrow d | \beta$ حسب مبرهنة GAUSS

من (1) و(2) نستنتج أن $d = \beta$

إذن $25+x = \beta d = \beta^2$ ، و $y = \alpha\beta$ ومنه $25-x = \alpha^2$

ومنه فإن $\begin{cases} (\exists m \in IN) / 25+x = m^2 \\ (\exists n \in IN) / 25-x = n^2 \end{cases}$

وبما أن: $25-x$ و$25+x$ عددان فرديان، لأن x عدد زوجي، فإن n^2 وm^2 فرديان

إذن n وm كذلك فرديان.

ولدينا $m \wedge n = 1$ ، لأن $n^2 \wedge m^2 = 1$

3) تحديد x وy

لتحديد x وy يكفي حل النظمة التالية : $\begin{cases} m^2 + n^2 = 50 \\ n^2 \wedge m^2 = 1 ; n < m \\ x = m^2 - 25 \\ y = n \times m \end{cases}$

لدينا $n^2+m^2=50$ يعني أن $n^2=50-m^2$

وبما أن $n^2>0$ فإن $50-m^2>0$ ، ومنه فإن $m^2<50$

إذن $m^2 \in \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$

($m^2<50$ و $m \in IN^*$ يعني m^2 تأخذ جميع المربعات الكاملة التي هي أصغر من 50).

حسب هذه القيم فإن الحل الملائم للنظمة

$\begin{cases} n^2 \wedge m^2 = 1 \\ m^2 + n^2 = 50 \\ n < m \end{cases}$ ومنه فإن $(n^2,m^2)=(1,49)$ أي $(n,m)=(1,7)$ ومنه فإن $x=24$ و$y=7$

عكسيا: الزوج $(24,7)$ يحقق النظمة (S)

وبالتالي: $(x, y) \in \{(24, 7), (7, 24)\}$

4) الإستنتاج:

ليكن X وY عنصرين من IN^*، نضع: $d = X \wedge Y$ مع $d \in IN^*$

لدينا: $(\exists a, b \in IN^*)/X=da$ و$Y=db$ و$a \wedge b = 1$

ومنه فإن: $X^2 + Y^2 = 625 \iff d^2(a^2 + b^2) = 625$

إذن d^2 يقسم 625 يعني أن d يقسم 25.

ومنه: $d \in \{1, 5, 25\}$ و$a^2+b^2>1$

وبما أن $a^2+b^2>1$ فإن $d \neq 25$

إذن $d=1$ أو $d=5$

إذا كان $d=1$ فإن المعادلة المقترحة تصبح: $\begin{cases} a^2 + b^2 = 625 \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$

وحسب ما سبق فإن $(X, Y) = (a, b) \in \{(7, 24), (24, 7)\}$

إذا كان $d=5$ فإن المعادلة المقترحة تصبح: $\begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$

ولدينا: $a^2 + b^2 = 25 \iff a^2 = 25 - b^2$

إذن $25-b^2>0$ أي $b^2<25$

ومنه فإن $b^2 \in \{1, 4, 9, 16\}$

وعلما أن $a^2 \wedge b^2 = 1$ و$a^2+b^2=25$

فإن $\begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 16 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 9 \end{cases}$

أي $\begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$

إذن $(X, Y) \in \{(15, 20), (20, 15)\}$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة $X^2+Y^2=625$ في $IN^*\times IN^*$

هي: $S = \{(15, 20), (20, 15), (7, 24), (24, 7)\}$

التمرين 125

I- ليكن a وb عنصرين من IN^* بحيث a^2 يقسم $2b^2$

نضع: $d = a \wedge b$ و $a=da'$ و $b=db'$

1) بين أن: $a'^2 \wedge b'^2 = 1$

2) بين أن a'^2 يقسم $2b'^2$، ثم استنتج أن $a'=1$ وأن a يقسم b.

II- ليكن x وy وn عناصر من IN^* بحيث: $(x-2n)(y-2n)=2n^2$

نضع $d = (x - 2n) \wedge (y - 2n)$ و $\delta = x \wedge y$

1) بين d يقسم n، ثم استنتج أن d يقسم δ.

2) أ- بين أن $x^2+y^2=(x+y-2n)^2$

ب- بين أن δ يقسم d، ثم استنتج أن: $x \wedge y = (x - 2n) \wedge (y - 2n)$

3) حدد x وy علما أن: $n=30$ و$x \wedge y = 1$ و$x<y$

الحل

I) 1) لنبين أن: $a'^2 \wedge b'^2 = 1$

بما أن: $d = a \wedge b$ فإن $\frac{a}{d} \wedge \frac{b}{d} = 1$

ولدينا $a=da'$ و$b=db'$ ومنه فإن $\frac{a}{d} = a'$ و $\frac{b}{d} = b'$

إذن $a' \wedge b' = 1$

طريقة أخرى: $d = a \wedge b = (da') \wedge (db')$

$= d(a' \wedge b')$

وبما أن $d \in IN^*$ فإن $a' \wedge b' = 1$

وبالتالي فإن: $a'^2 \wedge b'^2 = 1$

2) • لنبين أن a'^2 يقسم $2b'^2$

لدينا a^2 يقسم $2b^2$ يعني يوجد على الأقل k من IN بحيث $2b^2=ka^2$

وبما أن $a=da'$ و$b=db'$ فإن $2d^2b'^2=kd^2a'^2$

ولدينا $d \neq 0$ إذن: $2b'^2=ka'^2$ أي a'^2 يقسم $2b'^2$

• الاستنتاج:

لدينا a'^2 يقسم $2b'^2$ و$a'^2 \wedge b'^2 = 1$، إذن حسب مبرهنة GAUSS: a'^2 يقسم 2.

وبما أن 2 عدد أولي فإن $a'^2=1$ أو $a'^2=2$

ولدينا العدد 2 ليس مربعا كاملا، إذن $a'^2=1$

ومنه فإن $a'=1$ لأن a' عدد صحيح طبيعي. لدينا $a=da'$ و$a'=1$ يعني أن $d=a$

ومنه فإن $a = a \wedge b$، إذن a يقسم b

II 1) •لنبين أن d يقسم n.

لدينا $d = (x-2n) \wedge (y-2n)$ ومنه فإن d يقسم $x-2n$ و$y-2n$

إذن d^2 يقسم $(x-2n)(y-2n)$، يعني أن d^2 يقسم $2n^2$ لأن $(x-2n)(y-2n)=2n^2$

وحسب نتيجة الجزء I فإن d يقسم n.

• الاستنتاج:

بما أن d يقسم n فإن d يقسم $2n$.

ولدينا $d|x-2n$ و$d|y-2n$ إذن $d|x$ و$d|y$ ومنه: $d|x \wedge y$ يعني أن $d|\delta$.

2) أ- لنبين أن $x^2+y^2=(x+y-2n)^2$

لدينا:
$$2n^2=(x-2n)(y-2n)$$
$$=xy-2n(x+y)+4n^2$$

يعني أن $xy-2n(x+y)+2n^2=0$

إذن
$$(x+y-2n)^2=(x+y)^2-4n(x+y)+4n^2$$
$$=x^2+y^2+2[(xy-2n(x+y)+2n^2)]$$
$$=x^2+y^2+2\times 0$$

أي:
$$x^2+y^2=(x+y-2n)^2$$

ب- •لنبين أن δ يقسم d.

لدينا $\delta|x$ و$\delta|y$ يعني أن $\delta^2|x^2$ و$\delta^2|y^2$ ومنه: $\delta^2|x^2+y^2$

يعني أن: $\delta^2|(x+y-2n)^2$ إذن $\delta|x+y-2n$

وبما أن $\delta|x$ و$\delta|y$ فإن: $\delta|x-2n$ و$\delta|y-2n$

إذن $\delta|(x-2n) \wedge (y-2n)$ يعني أن $\delta|d$

• الاستنتاج:

لدينا $d|\delta$ و$\delta|d$ وd وδ عنصران من IN^* إذن $\delta = d$

يعني أن: $x \wedge y = (x-2n) \wedge (y-2n)$

3) تحديد x وy

حسب ما سبق يكفي حل النظمة التالية: $0<x<y$ و
$$\begin{cases}(x-60) \wedge (y-60) = 1\\ (x-60).(y-60) = 1800\\ (x,y) \in IN^2\end{cases}$$

لدينا $x<y$ يعني $x-60<y-60$ و$1800=2^3.3^2.5^2$

إذن لدينا الحالات التالية، بأخذ $(x-60) \wedge (y-60) = 1$

$\begin{cases} x-60=1 \\ y-60=1800 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x-y=9 \\ y-60=200 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x-60=8 \\ y-60=225 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x-60=25 \\ y-60=72 \end{cases}$

وبالتالي فإن: $(x,y) \in \{(61,1860),(68,285),(69,260),(85,132)\}$

التمرين 126

ليكن k عنصرا من IN^*

نعتبر العدد N_k المعرف كمايلي: $N_k=111....1$ ، ... ، $N_1=1$ ، $N_2=11$ ، $N_3=111$ ، $N_4=1111$ (k مرة الرقم 1)

1) حدد تفكيك الأعداد N_3 وN_4 وN_5 إلى جداء من عوامل أولية.

2) حدد عددين أوليين p وq مع $1<p<q<10$ بحيث $N_k \not\equiv 0[p]$ و $N_k \not\equiv 0[q]$ لكل k عنصر من IN^*.

3) حدد قيم العدد k من IN^* التي من أجلها يكون 3 قاسما للعدد N_k.

4) بين أن $9N_k=10^k-1$ لكل k من IN^*

5) نعتبر الجدول التالي:

k	1	2	3	4	5	6	7	8
باقي القسمة الإقليدية ل 10^k على7	3	2	6	4	5	1	3	2

أ- بين أن: $(\forall k \in IN); 10^k \equiv 1[7] \iff k \equiv 0[7]$

ب- استنتج أن: $(\forall k \in IN^*); 7|N_k \iff 6|k$

6) ليكن n عنصرا من IN بحيث $n \geq 2$

نفترض أن كتابة n^2 في نظمة العدد العشري تنتهي بالرقم 1.

أ- بين أن كتابة n في نظمة العدد العشري تنتهي ب 1 أو 9.

ب- بين أن: $n=10m-1$ أو $n=10m+1$; $(\exists m \in IN^*)$

ثم استنتج أن: $n^2 \equiv 1[20]$

ج- ليكن k عنصرا من IN بحيث $k \geq 2$

حدد باقي القسمة الإقليدية للعدد N_k على 20، ثم استنتج أن N_k ليس مربعا كاملا.

الحل

1) تفكيك N_3 وN_4 وN_5 إلى جداء من عوامل أولية:

لدينا

$$\begin{cases} N_3 = 111 = 3 \times 37 \\ N_4 = 1111 = 11 \times 101 \\ N_5 = 11111 = 41 \times 27 \end{cases}$$

2) لنحدد p وq عددين أوليين مع $1<p<q<9$ بحيث: $N_k \not\equiv 0[p]$ و$N_k \not\equiv 0[q]$; $(\forall k \in IN^*)$

ليكن k عنصرا من IN^*

العدد N_k رقم وحداته هو الرقم 1 إذن N_k عدد فردي ومنه فإن $N_k \not\equiv 0[2]$ أي N_k لا يقبل القسمة على 2.

العدد N_k لا ينتهي بالرقم 0 أو الرقم 5 إذن N_k لا يقبل القسمة 5 بمعنى $N_k \not\equiv 0[5]$.

وبالتالي $N_k \not\equiv 0[2]$ و$N_k \not\equiv [5]$; $(\forall k \in IN^*)$

بمعنى: العددان الأوليان 2 و5 لا يظهران في تفكيك أي عدد N_k إلى جداء من عوامل أولية.

3) تحديد قيم k من IN^* بحيث: $N_k \equiv 0[3]$

ليكن k عنصرا من IN^*، لدينا: $N_k=111.........1$

(k مرة الرقم 1)

ومنه:
$$N_k \equiv 0[3] \iff 1 + 1 + ... + 1 \equiv 0[3]$$
$$\iff k \equiv 0[3]$$

وبالتالي $(\forall k \in IN^*) ; 3|N_k \iff 3|k$

4) ليكن k عنصرا من IN^* لنبين أن: $9N_k=10^k-1$

لدينا:
$$N_k = 11...1 = 1 + 10 + 10^2 + ... + 10^{k-1}$$
$$= \frac{1-10^k}{1-10} = \frac{10^k-1}{9}$$

ومنه $9N_k=10^k-1$

وبالتالي $(\forall k \in IN^*) ; 9N_k = 10^k - 1$

5) أ- لنبين أن: $(\exists k \in IN) ; 10^k \equiv 1[7] \iff k \equiv 0[6]$

من خلال الجدول نلاحظ أن $10^6 \equiv 1[7]$

ومنه فإن $(\forall p \in IN) ; 10^{6p} \equiv 1[7]$

وبالتالي فإنه إذا كان $k \equiv 0[6]$ فإن $10^k \equiv 1[7]$ $(k \in IN)$

عكسيا: نفترض أن: $10^k \equiv 1[7]$ حيث k من IN.

لدينا $(\exists!(q,r) \in IN^2)|k = 6p + r$ و $0 \leq r < 5$ بإنجاز القسمة الإقليدية للعدد k على 6.

وبما أن $10^k \equiv 1[7]$ و$10^{6p} \equiv 1[7]$ فإن $10^k \equiv 10^r[7]$

وحسب الجدول $r=0$ هو العدد الوحيد من المجموعة $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ الذي يحقق $10^r \equiv 1[7]$ وبالتالي فإن $k=6p$ أي $k \equiv 0[6]$

إذن: $(\forall k \in IN^*) ; (10^k \equiv 0[7] \iff k \equiv 0[6])$

ب- الاستنتاج:

ليكن k عنصرا من IN^*، لدينا $9N_k=10^k-1$ ومنه فإن: $10^k \equiv 1[7] \iff 9N_k \equiv 0[7]$
(لأن $7 \wedge 9 = 1$) $\iff N_k \equiv 0[7]$

إذن : $7|N_k \Leftrightarrow 10^k \equiv 1[7]$

$\Leftrightarrow k \equiv 0[6]$

6) ليكن n عنصرا من IN و $n \geq 2$

نفترض أن كتابة n^2 في نظمة العد العشري تنتهي بالرقم 1 أي $n^2 \equiv 1[10]$

أ- لدينا الجدول التالي حيث r هو باقي القسمة الإقليدية ل n^2 على 10.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
r	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

من خلال الجدول لدينا: إذا كان:

$n^2 \equiv 1[10]$ فإن $n \equiv 1[10]$ أو $n \equiv 9[10]$

ب- لدينا: $n \equiv 1[10]$ أو $n \equiv 9[10]$

يعني أن $n \equiv 1[10]$ أو $n \equiv -1[10]$

ومنه فإن $n=-1+10m$ أو $(\exists m \in IN^*)|n = 1 + 10m$

• الاستنتاج:

لدينا $n^2=(-1+10m)^2$ أو $n^2=(1+10m)^2$

يعني أن $n^2=100m^2-20m+1$ أو $n^2=100m^2+20m+1$

وبما أن $100 \equiv 0[20]$ و $20 \equiv 0[20]$

فإنه لدينا $n^2 \equiv 1[20]$

ج- ليكن k عنصرا من IN بحيث $k \geq 2$

لدينا: $N_k=1+10+10^2+\ldots+10^{k-1}$

$=11+10^2(1+10+\ldots+10^{k-3})$

وبما أن $10^2 \equiv 0[20]$ فإن $N_k \equiv 11[20]$

يعني أن باقي القسمة الإقليدية ل N_k على 20 هو 11.

• الاستنتاج:

نفترض أن N_k مربع كامل.

ومنه: $(\exists n \in IN - \{0,1\})|N_k = n^2$

لدينا : $n^2 \equiv 1[10]$ يعني أن كتابة n^2 في نظمة العدد العشري تنتهي بالرقم 1 ومنه، حسب ما سبق، $n^2 \equiv 1[20]$

إذن $N_k \equiv 1[20]$ يعني أن باقي القسمة الإقليدية للعدد N_k على 20 هو 1 وهذا يناقض كون الباقي هو 11.

وبالتالي فإن N_k ليس مربعا كاملا.