2 علوم رياضية	فرض رقم 1	م : الحاج

التمرين الأول

أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-3}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-3}$	$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\sqrt[6]{x}$
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x\sqrt[3]{a}-a\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[4]{x}-a\sqrt[4]{a}}$ حيث $a>0$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arctan\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}{\sqrt{2-x}-1}$

التمرين الثاني

ليكن a و b عددين حقيقيين .

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=x^2-bx & ; \quad x\le 2 \\ f(x)=a-\dfrac{2}{x} & ; \quad 2<x\le 4 \\ f(x)=\sqrt{x+5} & ; \quad x>4 \end{cases}$$

1) أدرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}-\{2;4\}$

2) حدد العددين a و b كي تكون الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$

www.bestcours.net

التمرين الثالث

لتكن f و g دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$ و بحيث :

- المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلين a و b مع $a<0<b$
- $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f(x)<x$

بين أن $(\exists\alpha\in\mathbb{R})\quad f(\alpha)g(\alpha)=\alpha^2$

التمرين الرابع

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي :

$$f(x)=\arctan\left(\left(\sqrt{x}-1\right)^3\right)$$

1) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}$

2) بين ان f تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو مجال I يتم تحديده

3) احسب $f^{-1}(x)$ لكل x من I

التمرين الخامس

1) أحسب النهاية $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^k-1}{t-1}$ حيث أن k عدد طبيعي غير منعدم

2) ليكن a من $\mathbb{R}^*$. بين أن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1-\dfrac{ax}{n}}{x^2}=-\dfrac{(n-1)a^2}{2n^2}$ (ضع $t=\sqrt[n]{1+ax}$)

3) استنتج النهاية $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}\sqrt[3]{1-3x}-1}{x^2}$

4) لتكن h دالة بحيث $h(x)=\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1-3x}-2x}{x^2}\quad ; \quad x\neq 0$ و $h(0)=\dfrac{1}{2}$

أ) حدد D مجموعة تعريف الدالة h و ادرس اتصالها على $D-\{0\}$

ب) بين أن h متصلة على D

تصحيح الفرض رقم (1): الدورة I

التمرين 1:

$$* \lim_{x\to 1} \frac{2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-3}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-3} = \lim_{x\to 1} \frac{2(\sqrt[3]{x}-1)+(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt[3]{x}-1)+2(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2}{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}+1}}{\frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1}+\frac{2}{\sqrt{x}+1}}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}+\frac{2}{2}}$$

$$= \frac{7}{8}$$

$$* \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\sqrt[6]{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2\sqrt[6]{x}\,(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt[3]{x+2})^2+\sqrt[3]{x^2+2x}+(\sqrt[3]{x})^2}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}{\left(\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}+1\right)}$$

$$= \frac{4}{3}$$

لأن: $\lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$$* \lim_{x\to a} \frac{x\sqrt[3]{a}-a\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[4]{x}-a\sqrt[4]{a}} = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt[3]{a}(x-a)-a(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a})}{\sqrt[4]{x}(x-a)+a(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a})}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\sqrt[3]{a}-\frac{a}{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{ax}+(\sqrt[3]{a})^2}}{\sqrt[4]{x}+\frac{a}{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a})((\sqrt[4]{x})^2+(\sqrt[4]{a})^2)}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{a}-\frac{a}{3(\sqrt[3]{a})^2}}{\sqrt[4]{a}+\frac{a}{4(\sqrt[4]{a})^3}}$$

$$= \frac{8}{15}\sqrt[12]{a}$$

$$* \lim_{x\to 1} \frac{\arctan(\sqrt[3]{x}-1)}{\sqrt{2-x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\arctan(\sqrt[3]{x}-1)}{(\sqrt[3]{x}-1)} \times \left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{2-x}-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1} -\left(\frac{\arctan(\sqrt[3]{x}-1)}{(\sqrt[3]{x}-1)} \times \left(\frac{\sqrt{2-x}+1}{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1}\right)\right)$$

بما أن : $\lim_{x\to 1} \sqrt[3]{x}-1 = 0$ فإن $\lim_{x\to 1} \frac{\arctan(\sqrt[3]{x}-1)}{(\sqrt[3]{x}-1)} = 1$

وعليه $\lim_{x\to 1} \frac{\arctan(\sqrt[3]{x}-1)}{\sqrt{2-x}-1} = -\frac{2}{3}$

التمرين 2 :

1) لدينا $x \mapsto x^2-bx$ متصلة على $\mathbb{R}$

وبالخصوص على $]-\infty,2]$

و $x \mapsto a-\frac{2}{x}$ متصلة على كل من $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$

وبالخصوص على $]2,4]$

و $x \mapsto x+5$ متصلة على $\mathbb{R}$

وبالخصوص على $]4,+\infty[$ وموجبة

فإن $x \mapsto \sqrt{x+5}$ متصلة على $]4,+\infty[$

$\Leftarrow$ وعليه f متصلة على $\mathbb{R}-\{2,4\}$

2) تكون f متصلة في $x=4$ إذا كان :

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^-} f(x) = f(4)$$

لدينا :

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \sqrt{4+5} = 3 = f(4)$$

و $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} a-\frac{2}{x} = a-\frac{1}{2}$

إذن تكون f متصلة في 4 إذا كان :

$$a-\frac{1}{2} = 3$$

أي $a = \frac{7}{2}$

وتكون f متصلة في $x=2$ إذا كان :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$$

لدينا :

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{7}{2} - \frac{2}{x} = \frac{5}{2}$$

و $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 - bx = 4-2b = f(2)$

إذن تكون f متصلة في 2 إذا كان :

$$4-2b = \frac{5}{2}$$

أي $b = \frac{3}{4}$

⇐ خلاصة : تكون f متصلة على $\mathbb{R}$ إذا كان

$a = \frac{7}{2}$ و $b = \frac{3}{4}$

التمرين 3 :

لكل x من $\mathbb{R}$ ، نضع :

$$F(x) = f(x)\,g(x) - x^2$$

لدينا :

$$\left\{\begin{array}{l} x \mapsto f(x) \\ x \mapsto g(x) \\ x \mapsto x^2 \end{array}\right. \text{ دوال متصلة على } \mathbb{R}$$

فإن F متصلة على $\mathbb{R}$ وبخصوص على $[a,b]$

و : $F(a) = f(a)\,g(a) - a^2 = a\left(f(a) - a\right)$

لدينا $f(a) < a$ و $a < 0$

فإن $F(a) > 0$

و $F(b) = f(b)\,g(b) - b^2 = b\left(f(b) - b\right) > 0$

إذن $F(a)\,F(b) < 0$

وعليه : $(\exists \alpha \in]a,b[\subset \mathbb{R}) : F(\alpha) = 0$

أي $\exists \alpha \in \mathbb{R} : f(\alpha) g(\alpha) = \alpha^2$

التمرين 4 :

1) * $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \arctan\left((\sqrt{x}-1)^3\right)$

لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x}-1)^3 = +\infty$

فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan\left((\sqrt{x}-1)^3\right) = \frac{\pi}{2}$

أي $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$

* $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\arctan\left((\sqrt{x}-1)^3\right)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x \to 1} \frac{\arctan\left((\sqrt{x}-1)^3\right)}{(\sqrt{x}-1)^3} \times \frac{(x-1)^2}{(\sqrt{x}+1)^3}$

كما أن : $\lim\limits_{x \to 1} (\sqrt{x}-1)^3 = 0$

فإن $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\arctan(\sqrt{x}-1)^3}{(\sqrt{x}-1)^3} = 1$

ومنه $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 0$

2) لدينا $x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$

ومنه $x \xmapsto{u} (\sqrt{x}-1)^3$ متصلة على $\mathbb{R}^+$

و $x \xmapsto{v} \arctan x$ متصلة على $\mathbb{R}$

و $u(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}$

فإن $x \xmapsto{v \circ u} \arctan\left((\sqrt{x}-1)^3\right)$ متصلة على $\mathbb{R}^+$

أي : f متصلة على $\mathbb{R}^+$

إنجاز : يونس لكلوش تحت إشراف ذ : بوشعيب الماتني

و لكل x و y من $\mathbb{R}^+$ بحيث $x > y$ لدينا:

$$x > y \Leftrightarrow \sqrt{x} > \sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^3 > (\sqrt{y}-1)^3$$

$$\Leftrightarrow \arctan(\sqrt{x}-1)^3 > \arctan(\sqrt{y}-1)^3$$

$$\Leftrightarrow f(x) > f(y)$$

و منه f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$

$\Leftarrow$ إذن f تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $I = f(\mathbb{R}^+)$

بحيث:

$$I = f(\mathbb{R}^+) = [f(0); \lim_{x\to+\infty} f(x)[= [-\tfrac{\pi}{4}; \tfrac{\pi}{2}[$$

3) لدينا:

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \arctan(\sqrt{y}-1)^3 = x \\ y \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{y}-1)^3 = \tan x \\ y \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

* في حالة: $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ لدينا:

$$(\sqrt{y}-1)^3 = \tan x \Leftrightarrow y = (\sqrt[3]{\tan x}+1)^2$$

* في حالة: $x \in [-\frac{\pi}{4}, 0[$ لدينا:

$$(\sqrt{y}-1)^3 = \tan x \Leftrightarrow y = (-\sqrt[3]{\tan(-x)}+1)^2$$

إذن لدينا :

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = \left(\sqrt[3]{\tan x} + 1\right)^2 & ; \ 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ f^{-1}(x) = \left(-\sqrt[3]{\tan(-x)} + 1\right)^2 & ; \ \frac{-\pi}{4} \leq x < 0 \end{cases}$$

التمرين 5 :

1)

$$* \lim_{t \to 1} \frac{t^k - 1}{t - 1} = \lim_{t \to 1} \sum_{p=0}^{p=k-1} t^p$$

$$= \sum_{p=0}^{k-1} 1$$

$$= k$$

2)

$$* \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1 - \frac{ax}{n}}{x^2}$$

نضع $t = \sqrt[n]{1+ax}$

فإن $x = \frac{t^n - 1}{a}$

ومنه النهاية تصبح :

$$\lim_{t \to 1} \frac{t - 1 - \frac{t^n - 1}{n}}{\left(\frac{t^n - 1}{a}\right)^2}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{a^2}{n} \left(\frac{n(t-1) - (t^n - 1)}{(t^n - 1)^2} \right)$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{a^2}{n} \left(\frac{n - \sum_{k=0}^{n-1} t^k}{(t^n - 1) \sum_{k=0}^{n-1} t^k} \right)$$

$$= \lim_{t \to 1} -\frac{a^2}{n} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (t^k - 1)}{(t^n - 1) \sum_{k=0}^{n-1} t^k}$$

$$= \lim_{t \to 1} -\frac{a^2}{n} \frac{\sum_{k=0}^{k=n-1} \left(\sum_{p=0}^{p=k-1} t^p \right)}{\left(\sum_{k=0}^{n-1} t^k \right)^2}$$

إذن :

$$\lim_{t\to 1} \frac{t-1-\frac{t^n-1}{n}}{\left(\frac{t^n-1}{a}\right)^2} = -\frac{a^2}{n}\,\frac{\sum_{k=0}^{n-1} k}{n^2}$$

$$= \frac{-a^2}{n} \times \frac{n(n-1)}{2n}$$

$$= -\frac{(n-1)\,a^2}{2n^2}$$

3)

$$* \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}\,\sqrt[3]{1-3x}-1}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{1-3x}\left(\frac{\sqrt{1+2x}-1-\frac{2x}{2}}{x^2}\right) + x\left(\frac{\sqrt[3]{1-3x}-1+\frac{3x}{3}}{x^2}\right)$$

$$+ \frac{\sqrt[3]{1-3x}-1+\frac{3x}{3}}{x^2} - 1$$

$$= 1\times\left(-\frac{(2-1)\times 2^2}{2\times 2^2}\right) + 0 - \frac{(3-1)\times 3^2}{2\times 3^2} - 1$$

$$= -\frac{5}{2}$$

4)

$x \in D \Leftrightarrow x \in \mathbb{R},\ 1+2x \geq 0,\ 1-3x \geq 0,\ x^2 \neq 0$ (أ

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R},\ x \geq -\frac{1}{2},\ x \leq \frac{1}{3},\ x \neq 0$

$\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right],\ x \neq 0$

و بما أن $h(0) = \frac{1}{2}$

أي h معرفة في $x=0$

فإن $D = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$

ب) لدينا :

$\begin{cases} x \longmapsto 1+2x \\ x \longmapsto 1-3x \end{cases}$ متصلتان على $\mathbb{R}$ وبالخصوص على كل من $]0,\frac{1}{3}]$ و $[-\frac{1}{2},0[$ وموجبتان

فإن $\begin{cases} x \longmapsto \sqrt{1+2x} \\ x \longmapsto \sqrt[3]{1-3x} \end{cases}$ متصلتان على كل من $[-\frac{1}{2},0[$ و $]0,\frac{1}{3}]$

و $x \longmapsto -2x$ متصلة على $\mathbb{R}$ وبالخصوص على كل من $[-\frac{1}{2},0[$ و $]0,\frac{1}{3}]$

و $x \longmapsto x^2$ متصلة على $\mathbb{R}$ وبالخصوص على كل من $[-\frac{1}{2},0[$ و $]0,\frac{1}{3}]$

و لا تنعدم

$\Leftarrow$ فإن h متصلة على كل من $[-\frac{1}{2},0[$ و $]0,\frac{1}{3}]$.

ولدينا :

$$* \lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1-3x} - 2x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{1+2x} - 1 - \frac{2x}{2}}{x^2}\right) - \left(\frac{\sqrt[3]{1-3x} - 1 + \frac{3x}{3}}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$= h(0)$$

إذن h متصلة في $x=0$

خلاصة : h متصلة على D

انتهى.

إنجاز : يونس لكلوش تحت إشراف : بوشعيب المانتي

فرض رقم 2

التمرين الأول

www..ift.fr

ليكن n من $\mathbb{N}^*$. نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$f_n(x) = x^{n+1} + x^n + 3x - 2$$

1) ادرس رتابة الدالة f_n

2) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا a_n في المجال $\mathbb{R}^+$

3) بين أن $a_n < \frac{2}{3}$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$

4) أ- أدرس إشارة الفرق $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

ب- بين أن المتتالية $(a_n)_n$ تزايدية و استنتج أنها متقاربة

5) أ- تحقق أن $a_n = \frac{2 - a_n^n}{3 + a_n^n}$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$

ب- استنتج أن $\frac{2 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{3 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \le a_n \le \frac{2}{3}$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ ثم حدد نهاية المتتالية $(a_n)_n$

التمرين الثاني

لتكن $(U_n)_{n>0}$ متتالية هندسية أساسها q . نضع $S_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} U_k$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

1) أ- بين أن $S_{3n} - S_{2n} = q^{2n} S_n$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$

ب- بين أن $S_{2n} - S_n = q^n S_n$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$

2) استنتج أن $S_n\left(S_{3n} - S_{2n}\right) = \left(S_{2n} - S_n\right)^2$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$

التمرين الثالث

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $\left[0, +\infty\right[$ بما يلي :

$$f(x) = |x - 1| + \arctan x$$

1) أ- ضع $t = \arctan x - \frac{\pi}{4}$ و بين أن $\lim_{x \to 1} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{x - 1} = \frac{1}{2}$

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين و على يسار النقطة $x_0 = 1$

2) أ- بين أن المستقيم (Δ) $y = x - 1 + \frac{\pi}{2}$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ب- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) على $\left[1, +\infty\right[$

3) أ- أحسب $f'(x)$ على كل من $\left[0, 1\right[$ و $\left]1, +\infty\right[$ ثم ضع جدول التغيرات

ب- أدرس تقعر المنحنى (C_f) و أرسمه مبرزا المماسين عند النقطة $x_0 = 1$

4) بين أن $f\left(\left[\frac{\pi}{4}, 1\right]\right) \subseteq \left[\frac{\pi}{4}, 1\right]$ و أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل في المجال $\left[\frac{\pi}{4}, 1\right]$ حلا وحيدا α

5) بين أن $\left|f'(x)\right| \le \frac{1}{2}$ $\left(\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, 1\right]\right)$

6) نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$$U_0 \in \left]\frac{\pi}{4}, 1\right[\quad \text{و} \quad U_{n+1} = f(U_n) \quad \left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$$

أ- بين أن $\frac{\pi}{4} < U_n < 1$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$

ب- بين أن $\left|U_{n+1} - \alpha\right| \le \frac{1}{2}\left|U_n - \alpha\right|$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$

ج- بين أن المتتالية $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

www..ift.fr

تصحيح الفرض 2 الدورة I

مسلك الجذع
همه التومي

التمرين 1

1- نحسب $f_n'(x)$:

$$f_n'(x) = (n+1)x^n + nx^{(n-1)} + 3$$

بما أن $f_n(x)$ معرفة على $\mathbb{R}^+$ فإن $f_n'(x) > 0$

إذن $f_n(x)$ متزايدة قطعا على $\mathbb{R}^+$

2- لدينا $f_n(x)$ عبارة عن حدودية إذن هي متصلة على $\mathbb{R}$ بالخصوص على $\mathbb{R}^+$

وبما أن $f_n(x)$ متزايدة قطعا على $\mathbb{R}^+$ فإن $f_n(x)$ عبارة عن تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $f(\mathbb{R}^+)$

لدينا

$$J = f(\mathbb{R}^+) = [f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)[$$

$$= [f(0), +\infty[$$

$$J = [-2, +\infty[$$

بما أن $0 \in [-2, +\infty[$

إذن يوجد x وحيد في $\mathbb{R}^+$ يحقق $f(x) = 0$

هو a_n

3- لنبين أن $a_n < \frac{2}{3}$

لدينا $f_n\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^n + 2 - 2$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

وعليه $f_n\left(\frac{2}{3}\right) > 0 = f_n(a_n)$

بما أن f_n متزايدة فإن

$$a_n < \frac{2}{3}$$

4- أ- لدينا

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+2} - x^n$$

$$= x^n(x-2)(x+1)$$

ومنه

x	0		1		$+\infty$
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$		$-$	0	$+$	

ب- لدينا $0 < a_n < 1$

ولدينا $\forall x \in [0,1]$ $\quad f_{n+1}(x) < f_n(x)$

أي أن $f_{n+1}(a_n) < f_n(a_n)$

(ولدينا $f_n(a_n) = 0 = f_{n+1}(a_{n+1})$)

إذن $f_{n+1}(a_n) < f_{n+1}(a_{n+1})$

وعليه بما أن f_{n+1} $(\nearrow)$

فإن $a_n < a_{n+1}$

إذن a_n متزايدة قطعا على $\mathbb{N}^*$

بما أن a_n متزايدة ومكبورة بـ $\left(\frac{2}{3}\right)$ فإن a_n متقاربة

5- أ- لدينا

$$f_n(a_n) = a_n^{n+1} + a_n^n + 3a_n - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a_n^{n+1} + 3a_n = 2 - a_n^n$$

$$\Rightarrow \quad a_n(a_n^n + 3) = 2 - a_n^n$$

$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad a_n = \frac{2 - a_n^n}{a_n^n + 3}$$

ب- لدينا

$$0 \le a_n \le \frac{2}{3}$$

$$0 \le a_n^n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$-\left(\frac{2}{3}\right)^n \le -a_n^n \le 0$$

$$2 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \le 2 - a_n^n \le 2$$

$$3 \le 3+a_n^n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$$

وعليه

$$\frac{1}{3+\left(\frac{2}{3}\right)^n} \le \frac{1}{3+a_n^n} \le \frac{1}{3}$$

$$\frac{2-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3+\left(\frac{2}{3}\right)^n} \le \frac{2-a_n^n}{3+a_n^n} \le \frac{2}{3}$$

إذن

$$\frac{2-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3+\left(\frac{2}{3}\right)^n} \le a_n \le \frac{2}{3}$$

ومنه بما أن:

$$0 < \left(\frac{2}{3}\right) < 1$$

وعليه

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

إذن

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3+\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{3}$$

إذن

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}$$

التمرين 2

1) أ- الطريقة I:

$$S_{3n}-S_{2n} = \sum_{k=0}^{3n-1} U_k - \sum_{k=0}^{2n-1} U_k$$

$$= \sum_{k=2n}^{k=3n-1} U_k$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n-1} q^{2n+k} U_0$$

$$S_{3n}-S_{2n} = q^{2n}\sum_{k=0}^{n-1} U_k = q^{2n} S_n$$

الطريقة 2

من أجل $q=1$ بما أن:

$$U_n = U_0$$

$$S_{3n}-S_{2n} = 3nU_0 - 2nU_0$$

$$S_{3n}-S_{2n} = S_n$$

$$S_{3n}-S_{2n} = q^{2n} S_n$$

وفي حالة $q \neq 1$

لدينا:

$$S_{3n}-S_{2n} = \frac{1-q^{3n}}{1-q}U_0 - \frac{1-q^{2n}}{1-q}U_0$$

$$= \frac{U_0}{1-q}\left(q^{2n}-q^{3n}\right)$$

$$= \frac{q^{2n}(1-q^n)}{1-q}U_0$$

$$S_{3n}-S_{2n} = q^{2n} S_n$$

ب- وبالمثل نجد أن:

$$S_{2n}-S_n = q^n S_n$$

2)

$$S_n\left(S_{3n}-S_{2n}\right) = q^{2n} S_n^2$$

$$= \left(q^n S_n\right)^2$$

$$S_n\left(S_{3n}-S_{2n}\right) = \left(S_{2n}-S_n\right)^2$$

التمرين 3

نعتبر الدالة: $f(x) = |x-1| + \arctan x$

المعرفة على المجال: $\mathbb{R}^+$

1)

$$t = \arctan x - \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow t + \frac{\pi}{4} = \arctan x$$

$$\Leftrightarrow \tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right) = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\tan t}{1-\tan t} = x$$

وعليه

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{x-1} = \lim_{t\to 0} \frac{t(1-\tan t)}{\cancel{1}+\tan t-\cancel{1}+\tan t}$$

ومنه نجد أن

$$\lim_{x\to 1}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{4}}{x-1}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(1-\tan t)}{2(\tan t)}$$

$$=\frac{1}{2}\times 1\times(1-0)=\frac{1}{2}$$

جـ-

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1+\arctan x-\frac{\pi}{4}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}1+\frac{\arctan x-\frac{\pi}{4}}{x-1}$$

$$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

إذن f قابلة للاشتقاق على يمين $x_0=1$ و $f'_d(1)=\frac{3}{2}$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x+\arctan x-\frac{\pi}{4}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}-1+\frac{\arctan x-\frac{\pi}{4}}{x-1}$$

$$=-1+\frac{1}{2}=\frac{-1}{2}$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على يسار $x_0=1$ و $f'_g(1)=\frac{-1}{2}$

2) أ

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-y$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\cancel{x}-\cancel{x}+\arctan x-\cancel{x}+\cancel{x}-\frac{\pi}{2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\arctan x-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$$

$$=0$$

وعليه C_f يقبل مقارب مائل معادلته

$$(\Delta):\ y=x-1+\frac{\pi}{2}$$

ب- في المجال $]1,+\infty[$

$$f(x)-y=\arctan x-\frac{\pi}{2}$$

لدينا $\arctan x<\frac{\pi}{2}$

إذن $f(x)\leq y$

وعليه C_f تحت (Δ)،

3) أ. في المجال $]1,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}+1$$

$$=\frac{x^2+2}{x^2+1}$$

وفي المجال $[0,1[$

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}-1$$

$$=\frac{-x^2}{x^2+1}$$

جدول التغيرات

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	(1)	↘	$\frac{\pi}{4}$	↗	$+\infty$

ب- في المجال $[0,1[$

$$f''(x)=\frac{-2x(x^2+1)+x^2(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}\leq 0$$

في المجال $]1,+\infty[$

$$f''(x)=\frac{2x(x^2+1)-(x^2+1)2x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}\leq 0$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	C_f مقعر نحو الأسفل	نقطة انعطاف $I\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$	C_f مقعر نحو الأعلى

4) لنبين أن $f\left(\left[\frac{\pi}{4},1\right]\right) \subset \left[\frac{\pi}{4},1\right]$

لدينا f تناقصية على $[0,1]$

بالخصوص على $\left[\frac{\pi}{4},1\right]$

و $x \mapsto \arctan x$ متصلة على هذا المجال

كما أن $x \mapsto (1-x)$ متصلة على نفس المجال،

إذن $f(x)$ متصلة على $\left[\frac{\pi}{4},1\right]$

وعليه

$$\frac{\pi}{4} \le x \le 1$$

فإن

$$f(1) \le f(x) \le f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{\pi}{4} \le f(x) \le -\frac{\pi}{4} + 1 + \arctan\frac{\pi}{4}$$

لدينا

$$1 - \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{\pi}{4} - 1$$

$$= -\frac{\pi}{4} + \arctan\frac{\pi}{4}$$

ولدينا

$$\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1\right) \quad \frac{\pi}{4} < 1$$

أي أن

$$\frac{\pi}{4} < \tan\frac{\pi}{4}$$

إذن

$$\arctan\left(\frac{\pi}{4}\right) < \frac{\pi}{4}$$

وعليه

$$1 - \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{\pi}{4} < 1$$

ومنه نجد أن

$$f\left(\left[\frac{\pi}{4},1\right]\right) = \left[\frac{\pi}{4},1\right]$$

لنبين أن $f(x) = x$

نعتبر الدالة h، $(\forall x \in [\frac{\pi}{4},1])\ h(x) = f(x) - x$

لدينا

$$\frac{\pi}{4} \le f(x) \le 1$$

$$-1 + \frac{\pi}{4} \le f(x) - x \le 1 - \frac{\pi}{4}$$

لدينا

$$0 < 1 - \frac{\pi}{4}$$

و

$$-1 + \frac{\pi}{4} < 0$$

كما أن $h(x)$ تناقصية لأن $x \mapsto -x$ تناقصية و $x \mapsto f(x)$ تناقصية أيضا،

إذن $f(x) + x = 0$ تقبل حلا وحيدا α

حيث $f(\alpha) = \alpha$

5) لنبين أن $(\forall x \in [\frac{\pi}{4},1])\ |f'(x)| \le \frac{1}{2}$

5) لدينا $f''(x) \leq 0$ $(\forall x \in [\frac{\pi}{4}, 1])$

إذن

$$f'(1) \leq f'(x) \leq f'(\frac{\pi}{4})$$

$$-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{-\pi^2}{16+\pi^2} < 0$$

~~لأن~~ ~~$\pi^2 < 16$~~

إذن

$$-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$$

إذن $\boxed{|f'(x)| \leq \frac{1}{2}}$ $(\forall x \in [\frac{\pi}{4}, 1])$

6)

أ) من أجل $n=0$

$\frac{\pi}{4} < u_0 < 1$ حسب

المعطى:

$\frac{\pi}{4} < u_n < 1$

لنبين أن:

$\frac{\pi}{4} < u_{n+1} < 1$

لدينا

$\frac{\pi}{4} < f(u_n) < 1$

وفق

$\frac{\pi}{4} < u_{n+1} < 1$

ومنه حسب مبدأ الترجع فإن

$$\frac{\pi}{4} < u_n < 1$$

ب) نضع $\min(\alpha, u_n) = a \geq \frac{\pi}{4}$

و $\text{Max}(\alpha, u_n) = b \leq 1$

ونضع $\alpha \neq u_n$

ومنه نجد أن $[a,b] \subset [\frac{\pi}{4}, 1]$

ولدينا الدالة f متصلة على $[a,b]$

وقابلة للاشتقاق عليه،

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية فإن

$$\forall c \in]a,b[\quad \frac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha} = f'(c)$$

ومنه فإنه بما أن

$$|f'(c)| \leq \frac{1}{2}$$

فإن

$$\left|\frac{f(u_n) - \alpha}{u_n - \alpha}\right| \leq \frac{1}{2}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_{n+1} - \alpha| < \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

ج- لنبين أن $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n |u_0 - \alpha|$

من أجل $n=0$ نجد أن

$|u_0 - \alpha| \leq |u_0 - \alpha|$ وهذا صحيح

المعطى: $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n |u_0 - \alpha|$

لنبين أن $|u_{n+1} - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^{n+1} |u_0 - \alpha|$

لدينا $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^{n+1} |u_0 - \alpha|$

إذن حسب مبدأ الترجع فإن

$$|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n |u_0 - \alpha|$$

بما أن $0 < \frac{1}{2} < 1$ فإن $\lim_{n \to +\infty} (\frac{1}{2})^n |u_0 - \alpha| = 0$

إذن

$$\lim_{n \to +\infty} u_n - \alpha = 0$$

وعليه

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$$

إذن: u_n متقاربة و $\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

انتهى الحل

فرض رقم 2

التمرين الأول :

لتكن $(U_n)_n$ متتالية معرفة بما يلي :

$U_n = \sum_{p=0}^{p=2n+1} \frac{n}{n^2+p}$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n

1) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2 - \frac{2}{n+1} \le U_n \le 2 + \frac{2}{n}$

2) أ- تحقق أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \ge \frac{1}{2n}$

ب- استنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p} \le 2\sqrt{n}$

3) نضع $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} U_k$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n

بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2n - 4\sqrt{n+1} \le S_n \le 2n + 4\sqrt{n}$

و حدد $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$

التمرين الثاني :

لتكن $(U_n)_n$ متتالية هندسية حدودها غير منعدمة أساسها q .

لكل عدد طبيعي n نضع : $S = U_0 + U_1 + \ldots\ldots + U_{n-1}$

و $P = U_0 U_1 \ldots\ldots U_{n-1}$ و $T = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \ldots\ldots + \frac{1}{U_{n-1}}$

1) بين أن $\frac{S}{T} = U_0^2 \; q^{n-1}$

2) استنتج أن $P^2 = \left(\frac{S}{T}\right)^n$

التمرين الثالث :

نعتبر المتتاليتين $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ المعرفتين بما يلي : $U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ و $V_n = \sum_{k=0}^{k=2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

1) بين أن $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ متحاذيتين

2) نضع $f_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$

أ- بين أن $f_n'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$

ب- أثبت أن $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad f_{2n+1}(x) \le \arctan x \le f_{2n}(x)$

ج- استنتج نهاية كل من المتتاليتين $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$

التمرين الرابع :

لكل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي 3 نضع $f_n(x) = x^n - n(x-1) - 2$ لكل x من $\mathbb{R}^+$

1) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلين u_n و v_n حيث أن $u_n < 1 < v_n$

2) أ- أدرس إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

ب- أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

ج- بين أن $(\forall n \ge 3) \quad : \quad \frac{-2}{n} \le u_n - 1 \le \frac{-1}{n}$ ثم حدد $\lim_{n\to+\infty} u_n$

3) أ- أدرس رتابة المتتالية $(v_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

ب- بين أن $(\forall n \ge 3) \quad v_n > 1 + \frac{1}{n}$ (نعطي $(\forall n \ge 3) \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$)

ب- بين أن $(\forall a > 0)(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; (1+a)^n \ge 1 + na + \frac{n(n-1)}{2} a^2$

ج- أحسب $f_n\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ و استنتج أن $(\forall n \ge 3) \quad v_n < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$

د- حدد نهاية المتتالية $(v_n)_n$

السنة الثانية
علوم رياضية
13/14.

تصحيح الفرض 2 الدورة 1

الأستاذ: المانني

تمرين 1:

لتكن $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad U_n=\sum_{p=0}^{p=2n+1}\frac{n}{n^2+p}$

1) - ليكن $n\in\mathbb{N}^*$

لدينا: $0\leqslant p\leqslant 2n+1$

$$n^2\leqslant n^2+p\leqslant (n+1)^2$$

$$\frac{n}{(n+1)^2}\leqslant\frac{n}{n^2+p}\leqslant\frac{1}{n}$$

$$\frac{n(2n+2)}{(n+1)^2}\leqslant\sum_{p=0}^{p=2n+1}\frac{n}{n^2+p}\leqslant\frac{2n+2}{n}$$

$$\frac{2n^2+2n}{(n+1)^2}\leqslant U_n\leqslant 2+\frac{2}{n}.$$

و $\frac{2n^2+2n}{(n+1)^2}=\frac{2n(n+1)}{(n+1)^2}=\frac{2n+2-2}{(n+1)}$

$$=\frac{2(n+1)}{(n+1)}-\frac{2}{n+1}$$

$$=2-\frac{2}{n+1}$$

ومنه: $2-\frac{2}{n+1}\leqslant U_n\leqslant 2+\frac{2}{n}$

2) - أ - $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

لدينا: $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$

ونعلم أن:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{n}\leqslant n\\ \sqrt{n-1}\leqslant n\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\leqslant 2n.$$

أي: $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\geqslant\frac{1}{2n}$

ومنه النتيجة $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\geqslant\frac{1}{2n}$

ب) - $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

لدينا وحسب السؤال السابق:

$$\sqrt{p}-\sqrt{p-1}\geqslant\frac{1}{2p}.$$

أي: $\frac{1}{p}\leqslant 2(\sqrt{p}-\sqrt{p-1})$

$$\sum_{p=1}^{p=n}\frac{1}{p}\leqslant 2\sum_{p=1}^{p=n}(\sqrt{p}-\sqrt{p-1})$$

$$\sum_{p=1}^{p=n}\frac{1}{p}\leqslant 2(\sqrt{n})=2\sqrt{n}.$$

ومنه النتيجة:

$$\boxed{\sum_{p=1}^{p=n}\frac{1}{p}\leqslant 2\sqrt{n}.}$$

3) - نضع: $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad S_n=\sum_{k=1}^{k=n}U_k$

لدينا حسب السؤال 1.

$$2-\frac{2}{n+1}\leqslant U_n\leqslant 2+\frac{2}{n}\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)$$

$$\sum_{k=1}^{n}2-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\leqslant\sum_{k=1}^{n}U_n\leqslant\sum_{k=1}^{n}2+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$2n-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\leqslant S_n\leqslant 2n+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

وبما أن:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqslant 2\sqrt{n}.$$

فإن: $2n+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqslant 2n+4\sqrt{n}$

و

$$\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}\leqslant\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\leqslant 2\sqrt{n+1}.$$

أي:

$$-2\sqrt{n+1}\leqslant-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}$$

ومنه $2n-2\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}\geqslant 2n-4\sqrt{n+1}$

إذن: $2n-4\sqrt{n+1}\leqslant S_n\leqslant 2n+4\sqrt{n}$

حساب $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}$

لدينا: $2-4\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\leqslant\frac{S_n}{n}\leqslant 2+\frac{4}{\sqrt{n}}$

وبما أن $\lim_{n\to+\infty}2-4\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=2$

و $\lim_{n\to+\infty}2+\frac{4}{\sqrt{n}}=2$

فإن $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}=2$

1)- بين أن: $\frac{S}{T} = U_0^2 q^{n-1}$.

في حالة $q \neq 1$:

U_n متتالية هندسية $S = U_0 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

أساسها q.

و $\frac{1}{U_n}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{q}$

و حدها الأول $\frac{1}{U_0}$

إذن:

$$T = \frac{1}{U_0} \times \frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^n}{1-\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{1}{U_0} \times \frac{q^n - 1}{q-1} \times \frac{q}{q^n}$$

ومنه: $\frac{S}{T} = U_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} \times U_0 \times \frac{q-1}{q^n-1} \times q^{n-1}$

أي $\frac{S}{T} = U_0^2 q^{n-1}$

في حالة $q = 1$:

فإن: $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$

$= nU_0$.

و $T = \frac{1}{U_0} + \dots + \frac{1}{U_{n-1}}$

$T = \frac{n}{U_0}$

$\frac{S}{T} = U_0^2 \cdot q^{n-1} \quad (q=1)$

إذن: $\frac{S}{T} = U_0^2 \times q^{n-1}$

2)- لدينا: $U_n = U_0 \cdot q^n$.

و $P = U_0 \times U_1 \times \dots U_{n-1}$

$= U_0 \times U_0 \times q \times U_0 \dots \times U_0 \cdot q^{n-1}$.

$= q \times q^2 \times \dots q^{n-1} \times \underbrace{(U_0 \times U_0 \times \dots U_0)}_{n \text{ مرة}}$

$P = q^{1+2+3+\dots n-1} \times U_0^n$

$P^2 = q^{n(n-1)} \times U_0^{2n}$.

$P^2 = (q^{n-1} \times U_0^2)^n$

ومنه: $P_2^2 = \left(\frac{S}{T}\right)^n$

التمرين الثالث:

1) ← رتابة المتتالية $(U_n)_n$:

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=0}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$= \frac{(-1)^{2n+2}}{4n+5} + \frac{(-1)^{2n+3}}{4n+7}$$

$$= \frac{1}{4n+5} + \frac{-1}{4n+7}$$

$$= \frac{2}{(4n+5)(4n+7)} > 0$$

إذن: $U_{n+1} > U_n$ ومنه $(U_n)_n$ تزايدية. ①

← رتابة المتتالية $(V_n)_n$:

$$V_{n+1} - V_n = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$= \frac{(-1)^{2n+1}}{4n+3} + \frac{(-1)^{2n+2}}{4n+5}$$

$$= \frac{-1}{4n+3} + \frac{1}{4n+5}$$

$$= \frac{-2}{(4n+3)(4n+5)} < 0$$

إذن: $V_{n+1} < V_n$ ومنه $(V_n)_n$ تناقصية ②

← حساب $\lim_{n \to +\infty} U_n - V_n$

$$U_n - V_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \sum_{k=0}^{k=2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$= \frac{(-1)^{2n+1}}{4n+3} = \frac{-1}{4n+3}$$

و $\lim_{n \to +\infty} \frac{-1}{4n+3} = 0$.

إذن: ③ $\lim_{n \to +\infty} U_n - V_n = 0$

من ① و ② و ③ نستنتج أن: $(U_n)_n$

و $(V_n)_n$ متجاذبتان.

أ- $f'_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \times (2k+1) \cdot x^{2k}$.

$f'_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}$

$f'_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k = \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1-(-x^2)}$

$f'_n(x) = \frac{1-(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$

$f'_n(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$.

ب)- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$.

نضع : $g(x) = \arctan x - f_{2n}(x)$

g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$ لأنها مجموع دوال قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$

$\begin{cases} x \longmapsto \arctan x \\ x \longmapsto f_{2n}(x) \end{cases}$ دوال قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$.

$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - f'_{2n}(x)$

$= \frac{(-1)^{2n+1} x^{4n+2}}{1+x^2} = -\frac{x^{4n+2}}{1+x^2} \leq 0$

x	0	$+\infty$
g	0 ↘	

ومنه : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $g(x) \leq 0$

أي : $\arctan x \leq f_{2n}(x)$ ①

وبالمثل نضع : $h(x) = \arctan x - f_{2n+1}(x)$

$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - f'_{2n+1}(x)$

$= \frac{(-1)^{2n+2} x^{4n+4}}{1+x^2} = \frac{x^{4n+4}}{1+x^2} \geq 0$

x	0	$+\infty$
h	0 ↗	

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $h(x) \geq 0$

ومنه : $\arctan x \geq f_{2n+1}(x)$ ②

من ① و ② نستنتج أن :

$f_{2n}(x) \leq \arctan x \leq f_{2n+1}(x)$

لدينا $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ متحاذيتان.

أي : U_n و V_n متقاربتان

و $\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} U_n$.

ولدينا : $f_{2n+1}(x) \leq \arctan x \leq f_{2n}(x)$

نأخذ $x = 1$

$U_n \leq \frac{\pi}{4} \leq V_n$.

$e = \lim_{n\to+\infty} U_n \leq \lim \frac{\pi}{4} \leq \lim_{n\to+\infty} V_n = e$

إذن $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} V_n = \frac{\pi}{4}$

التمرين الرابع :

لدينا : $f_n(x) = x^n - n(x-1) - 2$.

1) - لدينا $f_n(x)$ دالة قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$ لأنها مجموع دوال قابلة للاشتقاق.

$\begin{cases} x \longmapsto x^n \\ x \longmapsto n(x-1)-2 \end{cases}$ دوال قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$

$f'_n(x) = nx^{n-1} - n$

$= n(x^{n-1} - 1)$.

← جدول التغيرات :

x	0		1		$+\infty$
$f'_n(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$n-2$	↘	-1	↗	$+\infty$

⇐ على المجال $[0;1]$ لدينا :

- f_n متصلة و f_n تناقصية قطعا

إذن : $n \geq 3$ لأن $f_n(0) = n-2 > 0$

$f_n(1) = -1 < 0$

إذن : $\exists! U_n \in]0;1[: f_n(U_n) = 0$

⇐ على المجال $[1;+\infty[$ لدينا.

- f_n متصلة و f_n تزايدية قطعا على $[1;+\infty[$

اذن f_n تقابل من $[1;+\infty[$ نحو: $f_n([1;+\infty[) = [-1;+\infty[$

وبما أن: $0 \in [-1;+\infty[$

فإنه: $(\exists! V_n \in]1;+\infty[) : f_n(V_n)=0$

وبالتالي $f_n(x)$ تقبل حلين مختلفين U_n و V_n بحيث:

$0 < U_n < 1 < V_n$.

2) أ)-

$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} - (n+1)(x-1) - 2x^n - n(x-1) + 2$

$= x^{n+1} - x^n - (x-1)$.

$= x^n(x-1) - (x-1)$

$= (x-1)(x^n-1)$.

$= (x-1)^2(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots x+1) \geq 0$

اذن: $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$. $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$

ب)-

لدينا حسب السؤال السابق:

$f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^+)$

$f_{n+1}(U_{n+1}) \geq f_n(U_{n+1}) \quad U_n > 0$.

ونعلم أن: $f_{n+1}(U_{n+1}) = f_n(U_n) = 0$

أي: $f_n(U_n) \geq f_n(U_{n+1})$

$U_{n+1} \in]0;1[$ و $U_n \in]0;1[$

و f_n تناقصية على $[0;1]$

إذن: $U_n < U_{n+1}$ ومنه:

$(U_n)_n$ تزايدية ومكبورة بـ 1 إذن

$(U_n)_n$ متقاربة.

ج)- بين أن $(\forall n \geq 3) \quad \frac{-2}{n} \leq U_n - 1 \leq \frac{-1}{n}$

لدينا: $f_n(U_n) = 0$.

$U_n^n - n(U_n - 1) - 2 = 0$

ومنه: $U_n - 1 = \frac{U_n^n - 2}{n}$

وبما أن: $0 < U_n < 1$.

فإن: $-2 < U_n^n - 2 < -1$.

أي $\frac{-2}{n} < U_n - 1 < \frac{-1}{n}$

وبما أن: $\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-2}{n} = 0$

فإن: $\lim_{n\to+\infty} U_n - 1 = 0$

أي: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = 1}$

3) أ)-

لدينا: $f_n(V_n) = 0$

أي: $V_n^n - n(V_n - 1) - 2 = 0$

أي: $f_{n+1}(V_{n+1}) \geq f_n(V_{n+1})$

ونعلم أن: $f_n(V_n) = f_{n+1}(V_{n+1}) = 0$

أي: $f_n(V_n) \geq f_n(V_{n+1})$

و $V_n \in]1;+\infty[$ و $V_{n+1} \in]1;+\infty[$

و f_n تزايدية على $]1;+\infty[$

إذن: $V_n \geq V_{n+1}$

ومنه: $(V_n)_n$ تناقصية ومصغورة بـ 1 فهي متقاربة.

ج)- بين أن: $1+\frac{1}{n} < V_n$ $(\forall n \geq 3)$

لدينا: $f_n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - n\left(1+\frac{1}{n}-1\right) - 2$

$f_n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 3 < 0 \quad (\forall n \geq 3)$

إذن: $f_n\left(1+\frac{1}{n}\right) < f_n(V_n)$

و $\left(1+\frac{1}{n}\right) \in [1;+\infty[$ و $V_n \in [1;+\infty[$

و f_n تزايدية على $[1;+\infty[$

إذن: $1+\frac{1}{n} < V_n \quad \forall n \geq 3$

ب)- لدينا: $(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k$

$= 1 + na + C_n^2 a^2 + \sum_{k=3}^{n} C_n^k a^k.$

بما أن: $a \geq 0$

فإن: $\sum_{k=3}^{n} C_n^k a^k \geq 0$

$\Leftarrow (1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2} a^2. \quad (*)$

ج)-

$f_n\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - n\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right) - 2$

$= \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \sqrt{n} - 2$

لدينا:

$\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{\sqrt{n}} + \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{1}{n}$

وذلك بالتعويض في $(*)$ بحيث:

$a = \frac{1}{\sqrt{n}}.$

أي $\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geq 1 + \sqrt{n} + \frac{n-1}{2}$

ومنه:

$f_n\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq \frac{n-1}{2} - 1$

$f_n\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq \frac{n-3}{2} \geq 0$

إذن: $f_n\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq f_n(V_n)$

ولدينا: $V_n \in [1;+\infty[$

و $1+\frac{1}{\sqrt{n}} \in [1;+\infty[$

و f_n تزايدية على $[1;+\infty[$.

$\Leftarrow 1 < V_n < 1+\frac{1}{\sqrt{n}}$

د- لدينا: $1 \leq V_n \leq 1+\frac{1}{\sqrt{n}}$

و $\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{\sqrt{n}} = 1.$

إذن: $\lim_{n\to+\infty} V_n = 1.$

من انجاز التلميذة:

نسرين لمنور

التمرين الأول

أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3-1}{x+1}}-\sqrt[3]{\frac{x^5+1}{x^2-2x}}$

$\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(E\left(x^2\right)\right)}{x^2}$ ، $\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{2-\sqrt{4-3x}}}{1-\sqrt{2-\sqrt{\frac{1}{3-2x}}}}$

بين أن $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{a}\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}}=-\frac{2}{3}\sqrt[12]{a^7}$ (حيث $a>0$)

www..ift.fr

التمرين الثاني

نعتبر الدالة $f(x)=x\sqrt{(E\left(\frac{1}{x}\right))^2-E\left(\frac{1}{x}\right)}$

1) أ- بين أن :

$$\left(\forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[\right)\quad \sqrt{(1-x)(1-2x)}\le f(x)\le\sqrt{1-x}$$

ب- استنتج $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)$

2) هل الدالة f تقبل نهاية في النقطة $x_0=0$

التمرين الثالث

ليكن α ; β عددان من $\mathbb{Q}^{+*}$ و بحيث $\alpha+\beta=1$

1) نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على المجال $[0,1]$

بما يلي : $\varphi(x)=x^\alpha-\alpha x-\beta$

أ- أدرس منحى تغيرات الدالة φ

ب- أنجز جدول تغيرات الدالة φ و استنتج أن :

$$\left(\forall x\in[0,1]\right)\quad x^\alpha\le\alpha x+\beta$$

2) بين أن $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^{+*2}\right)\quad x^\alpha y^\beta\le\alpha x+\beta y$

تطبيق : بين أن لكل عددين a , b من $\mathbb{R}^{+*}$ لدينا :

$$\sqrt[5]{a^2b^3}\le\frac{2a+3b}{5}$$

التمرين الرابع

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

بمايلي : $f(x)=\sin x$

1) بين أن f تقابل من I نحو مجال J بتم تحديده

وليكن f^{-1} تقابله العكسي

2) بين أن :

$$\left(\forall x\in\left]-1,1\right[\right)\quad f^{-1}(x)=\frac{\pi}{2}-2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

www..ift.fr

التمرين الخامس

(I) لتكن U , V دالتين متصلتين و قابلتين على $\mathbb{R}^+$ و بحيث $U(0)=V(0)=0$ و $V(x)\neq0$ $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\right)$

و $V'(x)\neq0$ $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\right)$. ليكن x من $\mathbb{R}^{+*}$ و نضع $\varphi(t)=U(t)V(x)-U(x)V(t)$.

بتطبيق مبرهنة رول بين أن : $\left(\exists c\in\left]0,x\right[\right)\quad \frac{U(x)}{V(x)}=\frac{U'(c)}{V'(c)}$ $(\aleph)$

(II) 1) باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن $y<\tan y$ $\left(\forall y\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)$

2) لتكن f الدالة المعرفة على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ بما يلي : $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$; $f(t)=\frac{\sin t}{t}$ و $f(0)=1$

أ- أدرس اتصال الدالة f على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

ب- بين أن f تناقصية قطعا على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

3) ليكن x من المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. باستعمال العلاقة $(\aleph)$ و رتابة الدالة f بين أن : $\frac{\sin x}{6x}\le\frac{x-\sin x}{x^3}\le\frac{1}{6}$

و استنتج $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x-\sin x}{x^3}$

www..ift.fr

تصحيح الفرض المحروس الأول الدورة I 1/2

تمرين (1):

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(E(x^2))}{x^2}$

لكل x من $]-1,1[-\{0\}$ لدينا $x^2\in]0,1[$

$E(x^2)=0$ ⇐

ومنه $\forall x\in]-1,1[-\{0\}: \frac{\sin(E(x^2))}{x^2}=0$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(E(x^2))}{x^2}=0$ ⇐

2) $f(x)=\frac{1-\sqrt{2-\sqrt{4-3x}}}{1-\sqrt{2-\sqrt{\frac{1}{3-2x}}}}$

$f(x)=\frac{(\sqrt{4-3x}-1)\left(1+\sqrt{2-\sqrt{\frac{1}{3-2x}}}\right)}{\left(\sqrt{\frac{1}{3-2x}}-1\right)\left(1+\sqrt{2-\sqrt{4-3x}}\right)}$

$f(x)=\frac{3(1-x)\left(1+\sqrt{2-\sqrt{\frac{1}{3-2x}}}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{3-2x}}+1\right)}{\left(\frac{2(x-1)}{3-2x}\right)\left(1+\sqrt{2-\sqrt{4-3x}}\right)\left(\sqrt{4-3x}+1\right)}$

2) $\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{-3\times 2\times 2}{2\times 2\times 2}=\frac{-3}{2}$

3) $h(x)=\sqrt{\frac{x^3-1}{x+1}}-\sqrt{\frac{x^5+1}{x^2-2x}}=\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+1}}-x\right)-\left(\sqrt{\frac{x^5+1}{x^2-2x}}-x\right)$

$=\frac{\frac{x^3-1}{x+1}-x^2}{\sqrt{\frac{x^3-1}{x+1}}+x}-\frac{\frac{x^5+1}{x^2-2x}-x^3}{\sqrt[3]{\frac{x^5+1}{x^2-2x}}+\sqrt[3]{\frac{x^5+1}{x^2-2x}}+x^2}$

$=\frac{-x^2-1}{(x+1)\left(x\sqrt{\frac{1-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x}}}+x\right)}-\frac{2x^4+1}{(x^2-2x)\left(x^2\sqrt[3]{\frac{1+\frac{1}{x^5}}{1-\frac{2}{x}}}+\sqrt[3]{\frac{1+\frac{1}{x^5}}{1-\frac{2}{x}}}+x^2\right)}$

$=\frac{-1-\frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x}}}+1\right)}-\frac{2\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}{\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{1+\frac{1}{x^5}}{1-\frac{2}{x}}}+\sqrt[3]{\frac{1+\frac{1}{x^5}}{1-\frac{2}{x}}}+1\right)}$

$\lim_{x\to+\infty} h(x)=-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-\frac{7}{6}$

4) $K(x)=\frac{\sqrt{a}\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}}$

$=\frac{\sqrt{a^3}\sqrt{x}-\sqrt{a}\sqrt[3]{a}+\sqrt{a}\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}\sqrt{a}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}}$

$=\frac{\sqrt{a}\frac{x-a}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{a^2}}-\sqrt[3]{a}\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}}{\frac{(x-a)}{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a})(\sqrt{a}+\sqrt{x})}}$

$\lim K(x)=\frac{\frac{\sqrt{a}}{3\sqrt[3]{a^2}}-\frac{\sqrt[3]{a}}{2\sqrt{a}}}{\frac{1}{4\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}}}=\frac{2a-3a}{6\sqrt{a}\sqrt[3]{a^2}}\times 4\sqrt{a}\times\sqrt[4]{a}$

$\lim K(x)=-\frac{2}{3}\sqrt[12]{a^7}$

تمرين (2):

1) $f(x)=x\sqrt{E\left(\frac{1}{x}\right)^2-E\left(\frac{1}{x}\right)}$

ليكن $x\in]0,\frac{1}{2}[$

$\frac{1}{x}-1<E(x)<\frac{1}{x}$

$\frac{1}{x}-2<E(x)-1<\frac{1}{x}-1$

$\left(0<x<\frac{1}{2}\right)$ $\frac{1-x}{x}>0$ و $\frac{1-2x}{x}>0$

وعليه $\frac{(1-x)(1-2x)}{x^2}\le E\left(\frac{1}{x}\right)\left(E\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)<\frac{1-x}{x^2}$

$\frac{\sqrt{(1-x)(1-2x)}}{x}\le\sqrt{E\left(\frac{1}{x}\right)^2-E\left(\frac{1}{x}\right)}\le\frac{\sqrt{1-x}}{x}$

$\sqrt{(1-x)(1-2x)}\le f(x)\le\sqrt{1-x}$

2- حسب السؤال 1) أ-

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{(1-x)(1-2x)}=1$

ليكن $x\in]-\infty,0[$

$\frac{1}{x}-1<E\left(\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}$

$\frac{1}{x}-2<E\left(\frac{1}{x}\right)-1<\frac{1}{x}-1$; $-\frac{1}{x}<-E\left(\frac{1}{x}\right)<1-\frac{1}{x}$

$0<\frac{1-x}{x}<-\left(E\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)<\frac{1-2x}{x}$

$\frac{1-x}{x^2}<E\left(\frac{1}{x}\right)\left(E\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)<\frac{(1-x)(1-2x)}{x^2}$

$\frac{\sqrt{1-x}}{-x}<\sqrt{E\left(\frac{1}{x}\right)^2-E\left(\frac{1}{x}\right)}<\frac{\sqrt{(1-x)(1-2x)}}{-x}$

$-\sqrt{1-x}<f(x)<-\sqrt{(1-x)(1-2x)}$

$\lim_{x\to 0^-}-\sqrt{1-x}=\lim_{x\to 0^-}-\sqrt{(1-x)(1-2x)}=\lim_{x\to 0^-}f(x)=-1$

تمرين (3):

$\varphi(x)=x^\alpha-\alpha x-\beta$ $(0<x<1)$

$\varphi'(x)=\alpha x^{\alpha-1}-\alpha=\alpha\left(\frac{1-x^\beta}{x^\beta}\right)\ge 0$

ومنه φ تزايدية على $[0,1]$

x	0	1
φ	β ↗	0

لدينا: $\forall x\in[0,1]$ $\varphi(x)\le 0$

$x^\alpha\le\alpha x+\beta$

$\forall t\in[0,1]$: $t^\alpha\le\alpha t+\beta$

$t^\beta\le\beta t+\alpha$

هذا انجاز التلميذة: مروة وافي

تصحيح الفرض المحروس الأول الدورة I

تمرين ③

② x و y من $\mathbb{R}^{*+}$ إذا $0<x\leq y$ أو $0<y\leq x$

نأخذ: $0<x\leq y$ نجد $0<\frac{x}{y}\leq 1$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha} \leq \alpha\frac{x}{y}+\beta$$

$\alpha+\beta=1$

$$x^{\alpha}\frac{y}{y^{\alpha}} \leq \alpha x+\beta y$$

وبالتالي:

$$x^{\alpha}y^{\beta} \leq \alpha x+\beta y$$

تطبيق

$$\sqrt[5]{a^2b^3} = a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{3}{5}} \quad \left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=1\right)$$

$$\sqrt[5]{a^2b^3} \leq \frac{2}{5}a+\frac{3}{5}b$$

ومنه النتيجة

تمرين ④

$f(x)=\sin x$: $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

f هي $\sin x$ متصلة على I و $f'(x)>0$

$\Leftarrow$ f تزايدية قطعا على I.

ومنه f تقابل من I نحو J $f(I)=J$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=1 \quad / \quad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x)=-1$$

ومنه $f(I)=J=]-1,1[$

② ليكن x من $]-1,1[$ ونضع $f^{-1}(x)=\alpha$

نعني: $x=\sin\alpha$ و $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} = \sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}}$$

$$= \left|\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right|$$

بما أن $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{4} \Leftarrow 0<\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$

ومنه

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

تعيين

$$\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$$

$$f^{-1}(x)=\alpha=\frac{\pi}{2}-2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

تمرين ⑤ :

$$\varphi(x)=u(t)v(x)-v(t)u(x)$$

$\begin{cases} t\mapsto u(t) \\ t\mapsto v(t) \end{cases}$ متصلتان على $[0,x]$ وقابلتان للاشتقاق على $]0,x[$

و $\varphi(0)=0$; $\varphi(x)=u(x)v(x)-v(x)u(x)$

$(\exists c\in]0,x[)\quad \varphi'(c)=0$

بما أن: $\varphi'(x)=u'(t)v(x)-v'(t)u(x)$

$$\varphi'(c)=0 \Rightarrow \frac{u(x)}{v(x)}=\frac{u'(c)}{v'(c)}$$

II

$h(t)=\tan t$

$t\mapsto\tan t$ متصلة على $[0,y]$ وقابلة للاشتقاق على $]0,y[$

$$\exists d\in]0,y[: h(y)-h(0)=(y-0)h'(d)$$

$$\tan y = y(1+\tan^2 d)$$

لدينا $1+\tan^2 d>1$

إذن $y(1+\tan^2 d)>y$ أي: $\tan y>y$

② تغيرات الدالة:

$t\mapsto\sin t$ متصلة على $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ و $t\mapsto t$ متصلة على $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ وغير منعدمة.

$t\mapsto\frac{\sin t}{t}$ متصلة على $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ و $\lim_{t\to 0} f(t)=f(0)$

إذن: f متصلة على يمين 0 وعليه f متصلة على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

$$f'(t)=\frac{\cos t}{t^2}(t-\tan t)<0 \quad (\cos t>0 \ , \ \tan t>t)$$

وعليه f تناقصية قطعا على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

③ نضع $V_1(x)=x^3$ و $U_1(x)=x-\sin x$

U_1 و V_1 متصلتين على $\mathbb{R}^+$ ، $U_1(0)=V_1(0)$

U_1 و V_1 قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}^{*+}$

و $V'(x)\neq 0$ و $V(x)\neq 0$

بتطبيق العلاقة (*) نجد أن:

$$\exists y\in]0,x[: \frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1-\cos y}{3y^2}$$

نضع $U_2=1-\cos y$ و $V_2=3y^2$

U_2 و V_2 متصلتان على $\mathbb{R}^+$ و $U_2(0)=V_2(0)$ و

قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}^{*+}$:

$$(\forall y\in\mathbb{R}^{*+}) \quad V_2'(y)\neq 0 \ , \ V_2(y)\neq 0$$

$$\exists\alpha\in]0,y[: \frac{1-\cos y}{3y^2}=\frac{\sin\alpha}{6\alpha}$$

$$\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{\sin\alpha}{6\sin\alpha}$$

$0<\alpha<x<\frac{\pi}{2}$ و f تناقصية على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

$$\frac{\sin x}{x}<\frac{\sin\alpha}{\alpha}<1$$

$$\Leftarrow \frac{\sin x}{6x}<\frac{x-\sin x}{x^3}<\frac{1}{6}$$

ومنه

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$$

من انجاز التلميذة: مروة وافي

فرض محروس رقم 3

www..ift.fr

التمرين الأول

نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0=1$ و $U_{n+1}=U_n+\frac{1}{U_n}$

1) بين أن $U_n\geq 1$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ و بين أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية

2) أ- بين أن $2\leq U_{n+1}^2-U_n^2\leq 2+U_{n+1}-U_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

ب- استنتج أن $2n\leq U_n^2-1\leq 2n-1+U_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ و حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

3) بين أن $1-\frac{1}{U_n}\leq\frac{2n}{U_n^2}\leq 1-\frac{1}{U_n^2}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2n}}{U_n}$

التمرين الثاني

I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ بما يلي : $f(x)=\sqrt{\sin x}$

1) أدرس منحى تغيرات الدالة f

2) أ- بين أن f تقابل من $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ نحو $[0,1]$ و لتكن g تقابله العكسي

ب- أرسم المنحنيين (C_f) و (Γ_g) في نفس المعلم السابق

3) بين أن g قابلة للإشتقاق على $]0,1[$ و أن $g'(x)=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

II) لتكن φ الدالة المعرفة على $[0,1]$ بما يلي : $\varphi(x)=\sqrt[4]{1-x^4}$

و نضع $h(x)=(g\circ\varphi)(x)$

د اشتقاق الدالة φ و

ب- بين أن h قابلة للإشتقاق على $]0,1[$ و أن $h'(x)=-g'(x)$

ج- أحسب $h(0)$ و استنتج أن $h(x)=\frac{\pi}{2}-g(x)$ $(\forall x\in[0,1])$

III) نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq1}$ بحيث : $U_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n}h\left(\frac{k}{n^2}\right)$

1) بين أن $h\left(\frac{1}{n}\right)\leq h\left(\frac{k}{n^2}\right)\leq h\left(\frac{1}{n^2}\right)$ لكل عدد طبيعي k من $\{1;2;.....;n\}$

2) استنتج أن المتتالية $(U_n)_{n\geq1}$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الثالث

لكل عدد عقدي z من $\mathbb{C}-\{1+i\}$ نضع $f(z)=\frac{(1+i)z}{2-(1-i)z}$

1) أ- بين أن $\overline{f(z)}=f(z)\Leftrightarrow z-\bar{z}+i(z+\bar{z})=2iz\bar{z}$

ثم حدد المجموعة $(C)=\{M(z)/\ f(z)\in\mathbb{R}\}$

ب- تحقق أن $f(z)=\frac{iz}{1+i-z}$

ثم حدد المجموعة $(D)=\{M(z)/\ |f(z)|=1\}$

ج- لتكن A النقطة ذات اللحق $1+i$.

بين أن : $arg(f(z))\equiv\overline{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO})}-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

ثم استنتج المجموعة $(\Gamma)=\{M(z)/\ \arg(f(z))\equiv0\ [2\pi]\}$

التمرين الرابع

1) ليكن u عدد من $\mathbb{C}$ معياره 1 و x عدد حقيقي بين أن $|x-u|=|1-xu|$

2) بين أن $|z|+|z'|\leq|z+z'|+|z-z'|$ لكل عددين عقديين z و z'

1) قل- حد مجموعة قابلية أحسب مشتقتها

www..ift.fr

www..ift.fr

تصحيح الفرض المحروس رقم ③

1:

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة كما يلي:

$$U_0 = 1 \quad \text{و} \quad U_{n+1} = U_n + \frac{1}{U_n}$$

① لنبين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \geq 1$

من أجل $n=0$. لدينا $U_0 = 1 \geq 1$ علاقة صحيحة

نفترض أن: $U_n \geq 1$ ونبين أن: $U_{n+1} \geq 1$

لدينا: $U_n \geq 1$ و $\frac{1}{U_n} > 0$ أي أن: $\frac{1}{U_n} + U_n \geq 1$

ومنه: $U_{n+1} \geq 1 \Leftarrow U_n \geq 1$

② رتابة $(U_n)_n$

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{U_n} > 0 \Rightarrow$ $(U_n)_n$ تزايدية

2: لنبين أن: $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$2 \leq U_{n+1}^2 - U_n^2 \leq 2 + U_{n+1} - U_n$$

لدينا: $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{U_n} \Rightarrow U_{n+1}^2 = U_n^2 + \frac{1}{U_n^2} + 2$

$$U_{n+1}^2 - U_n^2 = 2 + \frac{1}{U_n^2}$$

بما أن: $\frac{1}{U_n^2} > 0 \Leftarrow U_{n+1}^2 - U_n^2 \geq 2$ ①

ولدينا: $U_n \geq 1 \Leftarrow U_n^2 \geq U_n \Leftarrow \frac{1}{U_n^2} \leq \frac{1}{U_n}$

و: $\frac{1}{U_n} = U_{n+1} - U_n$

وعليه: $2 + \frac{1}{U_n^2} \leq 2 + U_{n+1} - U_n$

② $U_{n+1}^2 - U_n^2 \leq 2 + U_{n+1} - U_n$

من ① و ② نستنتج أن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2 \leq U_{n+1}^2 - U_n^2 \leq 2 + U_{n+1} - U_n$$

ب: استنتج أن: $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$2n \leq U_n^2 - 1 \leq 2n - 1 + U_n$$

لدينا: $2 \leq U_{k+1}^2 - U_k^2 \leq 2 + U_{k+1} - U_k$

$$\sum_{0}^{n-1} 2 \leq \sum_{0}^{n-1} (U_{k+1}^2 - U_k^2) \leq \sum_{0}^{n-1} 2 + \sum_{0}^{n-1} (U_{k+1} - U_k)$$

إذن:

$$2n \leq U_n^2 - U_0^2 \leq 2n + U_n - U_0$$

وبالتالي: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2n \leq U_n^2 - 1 \leq 2n + U_n - U_0$

⇐ نهاية $(U_n)_n$:

لدينا:

$$2n \leq U_n^2 - 1 \Rightarrow U_n^2 \geq 2n + 1$$

بما أن: $U_n \geq 0$ فإن: $U_n \geq \sqrt{2n+1}$

ومنه: $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{2n+1} = +\infty$

أي أن:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$$

ج: لنبين أن: $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$1 - \frac{1}{U_n} \leq \frac{2n}{U_n^2} \leq 1 - \frac{1}{U_n^2}$$

لدينا: $2n \leq U_n^2 - 1 \leq 2n - 1 + U_n$

أي أن:

$$U_n^2 - U_n \leq 2n \leq U_n^2 - 1$$

وعليه:

$$1 - \frac{1}{U_n} \leq \frac{2n}{U_n^2} \leq 1 - \frac{1}{U_n^2}$$

• استنتج $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{2n}}{U_n}$

من العلاقة السابقة لدينا:

$$1 - \frac{1}{U_n} \leq \frac{2n}{U_n^2} \leq 1 - \frac{1}{U_n^2}$$

أي أن:

$$\sqrt{1 - \frac{1}{U_n}} \leq \frac{\sqrt{2n}}{U_n} \leq \sqrt{1 - \frac{1}{U_n^2}}$$

بما أن:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$$

فإن:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{U_n}} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{U_n^2}} = 1$$

ومنه:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{2n}}{U_n} = 1$$

من إنجاز: أسماء لحسيني

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0,\frac{\pi}{2}]$ بما يلي :

$$f(x)=\sqrt{\sin x}$$

① : ادرس منحى تغيرات الدالة f .

لدينا : $x \xrightarrow{u} \sin x$ قابلة للاشتقاق على $[0,\frac{\pi}{2}]$ و : $x \mapsto \sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

و : $u([0,\frac{\pi}{2}]) = [0,1] \subset \mathbb{R}^{+*}$

$\Leftarrow$ f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,\frac{\pi}{2}]$

و : $f'(x)=\frac{(\sin x)'}{2\sqrt{\sin x}}=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

بما أن : $0<x\leq\frac{\pi}{2}$ فإن : $\cos x>0$

و عليه f تزايدية قطعا .

و أن : بين أن f تقابل من $[0,\frac{\pi}{2}]$ نحو $[0,1]$.

لدينا : $x \xrightarrow{u} \sin x$ متصلة على $[0,\frac{\pi}{2}]$

و : $u([0,\frac{\pi}{2}])=[0,1]$

$x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على $[0,1]\subset\mathbb{R}^+$

أي أن : الدالة $x \xrightarrow{f} \sqrt{\sin x}$ متصلة على المجال : $[0,\frac{\pi}{2}]$.

ولدينا f تزايدية قطعا على $[0,\frac{\pi}{2}]$

أي أن : f تقابل من $[0,\frac{\pi}{2}]$ نحو :

$$f([0,\frac{\pi}{2}])=[0,1].$$

② ارسم المنحنيين C_f و T_g في نفس المعلم .

د : لنبين أن g قابلة للاشتقاق على $]0,1[$

و أن : $g'(x)=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

لدينا : $f(]0,\frac{\pi}{2}[)=]0,1[$.

بما أن : f قابلة للاشتقاق على $]0,\frac{\pi}{2}[$.

و : $f'(x)=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}\neq 0$ $(\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}[)$

و عليه : g الدالة العكسية لـ f تكون قابلة للاشتقاق على $]0,1[$ و :

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{2\sqrt{\sin g(x)}}{\cos(g(x))}$$

لدينا : $\sqrt{\sin g(x)}=(f\circ g)(x)=x$

و منه : $\sin g(x)=x^2$

و :

$g(x)\in]0,\frac{\pi}{2}[\Rightarrow \cos(g(x))=\sqrt{1-\sin^2 g(x)}$

و بالتالي :

$$\Rightarrow \cos(g(x))=\sqrt{1-x^4}$$

أي أن :

$$g'(x)=\frac{2x}{1-x^4}.$$

الجزء II :

φ دالة معرفة على : $[0,1]$ بـ : $\varphi(x)=\sqrt[4]{1-x^4}$

نضع : $h(x)=(g\circ\varphi)(x)$

① لنحدد مجموعة قابلية اشتقاق الدالة φ .

لدينا : $x \mapsto \varphi(x)$ قابلة للاشتقاق على $]0,1[$

و تكون أن : $x \mapsto g(x)$ قابلة للاشتقاق على $]0,1[$

و : $\varphi(]0,1[)\subseteq]0,1[$.

و منه :

$x \xrightarrow{g\circ\varphi} h(x)$ قابلة للاشتقاق على $]0,1[$.

و :

2 $h'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$.

⇐ لنحدد مشتقة الدالة φ .

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$= \frac{2\sqrt[4]{1-x^4}}{\sqrt{1-(\sqrt[4]{1-x^4})^4}} \times \frac{-x^3}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}$$

$$= \frac{2\sqrt[4]{1-x^4}}{x^2} \times \frac{-x^3}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}$$

$$= \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}} = -g'(x)$$

⇐ لنحسب $h(0)$:

$$h(0) = (g\circ\varphi)(0) = g(\varphi(0))$$

$$= g(1) = \frac{\pi}{2} \quad \left(f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\right)$$

• لدينا : $(\forall x \in]0,1[)$

$$h'(x) = -g'(x)$$

إذن : $(h$ و g متصلتين على $]0,1[)$.

$$h(x) = -g(x) + k$$

نأخذ $x=0$: نجد أن :

$$h(0) = -g(0) + \frac{\pi}{2}$$

ومنه : $(\forall x \in [0,1])$

$$h(x) = -g(x) + \frac{\pi}{2}$$

الجزء III

نضع : $U_n = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} h\left(\frac{k}{n^2}\right)$

① بين أن :

$$\left(\forall k \in \{1,2,3,\dots,n\}\right) \; h\left(\frac{1}{n}\right) \leq h\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq h\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

لكل k عدد طبيعي من $\{1,2,3,\dots,n\}$

لدينا : $1 \leq k \leq n$

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{n}$$

h تناقصية إذن $h\left(\frac{1}{n}\right) \leq h\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq h\left(\frac{1}{n^2}\right)$

② استنتج أن $(U_n)_{n\geq 1}$ متقاربة مع تحديد نهايتها .

لدينا :

$$h\left(\frac{1}{n}\right) \leq h\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq h\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sum_{1}^{n} h\left(\frac{1}{n}\right) \leq \sum_{1}^{n} h\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{1}^{n} h\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ومنه :

$$n\,h\left(\frac{1}{n}\right) \leq n\,U_n \leq n\,h\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\Leftarrow \quad h\left(\frac{1}{n}\right) \leq U_n \leq h\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

من جهة أخرى لدينا :

$$\lim_{n\to+\infty} h\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} h\left(\frac{1}{n^2}\right) = h(0) = \frac{\pi}{2}$$

ومنه :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{\pi}{2}}$$

وبالتالي $(U_n)_n$ متتالية متقاربة و :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{\pi}{2}$$

III : (الأعداد العقدية)

$$f(z) = \frac{(1+i)z}{2-(1-i)z}$$

1 : لنبين أن :

$$\overline{f(z)} = f(z) \Leftrightarrow z - \bar{z} + i(z+\bar{z}) = 2iz\bar{z}$$

$$\overline{f(z)} = f(z) \Leftrightarrow \frac{(1-i)\bar{z}}{2-(1+i)\bar{z}} = \frac{(1+i)z}{2-(1-i)z}$$

$$\Leftrightarrow (2-(1+i)\bar{z})(1+i)z = (1-i)\bar{z}(2-(1-i)z)$$

$$\Leftrightarrow 2\bar{z}(1+i) - 2i\bar{z}z = 2\bar{z}(1-i) + 2iz\bar{z}$$

$$\Leftrightarrow 2(\bar{z}-z) + 2iz\bar{z} - 2i(\bar{z}+z) + 2i\bar{z}z = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{z} - z - i(\bar{z}+z) = -2iz\bar{z}$$

$$\Leftrightarrow z - \bar{z} + i(\bar{z}+z) = 2iz\bar{z}$$

⇐ لنحدد المجموعة :

$$(\mathcal{E}) = \{ M(z) \,/\, f(z) \in \mathbb{R} \}$$

⇐ لنستنتج المجموعة : $(\Theta) = \{M(z) \,/\, f(z) \in \mathbb{R}\}$

(نضع : $z = x + iy$)

$$f(z) \in \mathbb{R} \iff f(z) = \overline{f(z)}$$
$$\iff 2iy + 2ix = 2i(x^2+y^2)$$
$$\iff x^2+y^2-x-y=0$$
$$\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

• وعليه (Θ) دائرة مركزها $\Omega\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ونصف قطرها : $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

⇐ لنتحقق أن : $f(z) = \dfrac{iz}{1+i-z}$

لدينا :
$$f(z) = \frac{(1+i)z}{2-(1-i)z} = \frac{(1+i)^2 z}{2(1+i)-2z}$$
$$= \frac{iz}{1+i-z}$$

⇐ لنحدد المجموعة : $(D) = \{M(z) \,/\, |f(z)| = 1\}$

$$M(z) \in D \iff |f(z)| = 1$$
$$\iff |iz| = |1+i-z|$$
$$\iff |iz| = |z-(1+i)|$$

• وعليه : (D) واسط القطعة $[OA]$ حيث $A(1+i)$ و $O(0)$

⇐ لنبين أن : $\arg(f(z)) \equiv (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}}) - \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

لدينا :
$$\arg(f(z)) \equiv \arg(-i) + \arg\left(\frac{z}{z-(1+i)}\right)\ [2\pi]$$
$$\arg(f(z)) \equiv -\frac{\pi}{2} + (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}})\ [2\pi]$$

⇐ لنستنتج أن المجموعة :
$$(\Gamma) = \{M(z) \,/\, \arg(f(z)) \equiv 0\ [2\pi]\}$$

هي إنجاز التلميذة : العماد لحسيني
2 ع 2 .

$$M(z) \in (\Gamma) \iff \arg(f(z)) \equiv 0\ [2\pi]$$
$$\iff (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

إذن : مجموعة النقط $M(z)$ هي عبارة عن نصف الدائرة التي أحد أقطارها $[OA]$.

IV :

① : u عدد من $\mathbb{C}$ معياره 1 و x عدد حقيقي .

لنبين أن : $|x-u| = |1-xu|$

لدينا :
$$|1-xu| = |u\bar{u} - xu|$$
$$= |u(\bar{u}-x)|$$
$$= |u|\,|\bar{u}-x|$$
$$= |\bar{u}-x| = |\overline{\bar{u}-x}|$$
$$= |u-x| = |x-u|$$

$(\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2)$.

② لنبين أن : $|z|+|z'| \leq |z+z'| + |z-z'|$

لدينا :
$$|z| = \left|\frac{z+z'}{2} + \frac{z-z'}{2}\right|$$

و : ① $\left|\frac{z+z'}{2} + \frac{z-z'}{2}\right| \leq \frac{|z+z'|}{2} + \frac{|z-z'|}{2}$

و لدينا أيضا :
$$|z'| = \left|\frac{z+z'}{2} - \frac{z-z'}{2}\right|$$

② $\left|\frac{z+z'}{2} - \frac{z-z'}{2}\right| \leq \frac{|z+z'|}{2} + \frac{|z-z'|}{2}$

من ① و ② :
$$|z|+|z'| \leq |z+z'| + |z-z'|$$

⇐ الأستاذ :

الهاشمي بو شعيب

فرض محروس رقم 3

التمرين الأول :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I=[0,1]$ بما يلي : $f(x)=\frac{1}{2}\arctan(1-x)$

1) أ- أدرس منحى تغيرات الدالة f و بين أن $f(I)\subseteq I$

ب- بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α

ج- بين أن $\left(\forall(x,y)\in I^2\right)\quad |f(x)-f(y)|\leq\frac{1}{2}|x-y|$

2) نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0=0$ و $U_{n+1}=f(U_n)$

أ- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0\leq U_n\leq 1$

ب- نضع $V_n=U_{2n}$ و $W_n=U_{2n+1}$ لكل عدد طبيعي n

ب1) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad V_n\leq\alpha\leq W_n$

ب2) أدرس رتابة كل من $(V_n)_n$ و $(W_n)_n$

ب3) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad W_{n+1}-V_{n+1}\leq\frac{1}{4}(W_n-V_n)$

ب4) بين أن $(V_n)_n$ و $(W_n)_n$ متحاذيتين و حدد نهايتهما المشتركة

3) استنتج أن $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

www..ift.fr

التمرين الثاني :

نعتبر العدد العقدي $z_0=1+i\sqrt{3}$

1) أ- حدد الشكل المثلثي للعدد z_0

ب- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad z_0^n+\left(\overline{z_0}\right)^n=2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

2) نضع $Z=1-\sqrt{3}-i\left(1+\sqrt{3}\right)$

أ- بين أن $\overline{Z}=\sqrt{2}\,z_0\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

ثم حدد الشكل المثلثي للعدد Z

ب- استنتج قيمة كل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$; $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

التمرين الثالث :

1) بين أن $\sum_{k=1}^{k=n}k\,i^{k-1}=\frac{1}{2}\left(i-ni^n-(n+1)i^{n+1}\right)$

2) استنتج قيمة كل من : $S=\sum_{k=1}^{k=m}(-1)^k(2k)$

و $S'=\sum_{k=0}^{k=m}(-1)^k(2k+1)$

التمرين الرابع :

ليكن a عدد من $]0,1[$ و n عدد طبيعي غير منعدم . نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$f_n(x)=\left(\sum_{k=1}^{k=n}x^k\right)-a$$

1) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_n و أن $0<x_n<1$

2) بين أن $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right)\quad (x-1)f_n(x)=x^{n+1}-(a+1)x+a$

3) أ- بين أن $\left(\forall x\in]0,1[\right)\quad f_{n+1}(x)>f_n(x)$

ب- استنتج أن المتتالية $(x_n)_n$ تناقصية و أنها متقاربة

ج- بين أن $\lim_{n\to+\infty}x_n^n=0$ و حدد نهاية المتتالية $(x_n)_n$ بدلالة a

www..ift.fr

تحت إشراف : أ : المانتي

تصحيح الفرض المحروس رقم 3

السنة الدراسية : 2014 / 2013

التمرين الأول :

$I = [0;1]$

$f(x) = \frac{1}{2}\arctan(1-x)$

1) أ- دراسة منحى تغيرات f

وبيان : $f(I) \subseteq I$

لدينا : f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$

بحيث :

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(1-x)'}{1+(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{(-1)}{1+(1-x)^2} = \frac{-1}{2(1+(1-x)^2)} < 0$$

x	0		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$\frac{\pi}{8}$	$\searrow$	0

لدينا : $f(x)$ متصلة على $[0;1]$ وتناقصية

و $f([0;1]) = [f(1);f(0)]$

$= [0;\frac{\pi}{8}] \subset [0;1]$

وعليه : $\boxed{f(I) \subseteq I}$

ب- لنبين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α .

نضع : $\ell(x) = f(x) - x$

لدينا : $\ell(x)$ قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ كمجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $[0;1]$.

$$\ell'(x) = \frac{-1}{2(1+(1-x)^2)} - 1 < 0$$

	0		1
$\ell'(x)$		$-$	
$\ell(x)$	$\frac{\pi}{8}$	$\searrow$	-1

نعلم أن : $\ell(x)$ متصلة وتناقصية على $[0;1]$

إذن : فهي تقابل من $[0;1]$

نحو $\ell([0;1]) = [-1;\frac{\pi}{8}]$

وبما أن : $0 \in [-1;\frac{\pi}{8}]$

إذن : $\exists \alpha ! \; ; \; \ell(x) = 0$

$\Leftrightarrow f(x) - x = 0$

$$\boxed{f(x) = x}$$

ج- لنبين أن : $|f(x)-f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$

نعلم أن $f(x)$ متصلة على $[0;1]$

وقابلة للاشتقاق على $]0;1[$

وبما أن : $(x;y) \in [0;1]$

فإن : $f(x)$ متصلة على $[x;y]$

$f(x)$ قابلة للاشتقاق على $]x;y[$

نضع : $a = \min(x;y)$

$b = \max(x;y)$

وبالتالي : فحسب مبرهنة التزايدات المنتهية :

$$(\exists c \in]a;b[) ; \; f(x) - f(y) = (x-y) \times f'(c)$$

$$f'(c) = \frac{-1}{2(1+(1-c)^2)}$$

بما أن : $(1+(1-c)^2 \geq 1)$

إذن : $|f'(c)| < \frac{1}{2}$

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} < \frac{1}{2}$$

وبالتالي :

$$|f(x)-f(y)| < \frac{1}{2}|x-y|$$

② $U_0 = 0$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

أ- لنبين أن: $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq U_n \leq 1$

من أجل : $n=0$

لدينا : $0 \leq U_0 \leq 1$

عبارة صحيحة .

نفترض أن: $0 \leq U_n \leq 1$

لنبين أن: $0 \leq U_{n+1} \leq 1$

بما أن: $U_{n+1} = f(U_n)$

و $f(x)$ تناقصية على $[0;1]$

و $U_n \in [0;1]$

إذن: $f(1) \leq f(U_n) \leq f(0)$

$0 \leq f(U_n) \leq \frac{\pi}{8} \leq 1$

وعليه:

$0 \leq U_{n+2} \leq 1$

وبالتالي: فحسب مبدأ الترجح

$(\forall n \in \mathbb{N})\quad 0 \leq U_n \leq 1$

ب 1) $V_n = U_{2n}$ و $(\forall n \in \mathbb{N})\ W_n = U_{2n+1}$

لنبين أن: $V_n \leq \alpha \leq W_n$

$(\forall n \in \mathbb{N})$

من أجل : $n=0$

$V_0 = U_0 = 0$ / $W_0 = U_1 = f(U_0) = \frac{\pi}{8}$

وعليه: $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{8}$ عبارة صحيحة

نفترض أنه: $(\forall n \in \mathbb{N})\ V_n \leq \alpha \leq W_n$

لنبين أن: $V_{n+1} \leq \alpha \leq W_{n+1}$

لدينا :

$$V_{n+1} = U_{2(n+1)} = U_{2n+1+1} = f(U_{2n+1})$$

$$= f \circ f(U_{2n}) = f \circ f(V_n)$$

$$W_{n+1} = U_{2(n+1)+1} = f(U_{2n+1}) = f \circ f(U_{2n+1})$$

$$= f \circ f(W_n).$$

بما أن: $f(x)$ تناقصية على $I=[0;1]$

و $f(I) \subset I$

إذن: $f \circ f(x)$ تزايدية على $[0;1]$

وعليه: $V_n \leq \alpha \leq W_n$

$$f \circ f(V_n) \leq f \circ f(\alpha) \leq f \circ f(W_n)$$

$$V_{n+1} \leq \alpha \leq W_{n+1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(\alpha) = \alpha \\ f \circ f(\alpha) = f(\alpha) = \alpha \end{array}}$$

أي أنه حسب مبدأ الترجح:

$(\forall n \in \mathbb{N})\quad V_n \leq \alpha \leq W_n$

ب) 2 رتابة V_n و W_n

لدينا : $W_n = f(V_n)$

$(V_n)_n$ تزايدية

أي: $V_{n+1} > V_n$

f تناقصية

$f(V_n) > f(V_{n+1})$

$W_n > W_{n+1}$

أي: $(W_n)_n$ تناقصية.

$V_0 = U_0 = 0$

$V_1 = U_2 = f(\frac{\pi}{8})$

$f(\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}\arctan(1-\frac{\pi}{8}) > 0$

وبالتالي: نفترض أن

$V_n \leq V_{n+1}$

$f \circ f(V_n) \leq f \circ f(V_{n+1})$

$V_{n+1} \leq V_{n+2}$

ح. مبدأ الترجح

$(\forall n \in \mathbb{N})$

$(V_n)_n$ تزايدية.

ب)3- لنبين أن:

$(\forall n \in \mathbb{N})$

$$W_{n+1} - V_{n+1} \leq \frac{1}{4}(W_n - V_n)$$

حسب السؤال (ج):

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$$

أي:

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

نعلم أنه: f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و $f(I) \subset I$

أي: $f \circ f(x)$ قابلة للاشتقاق على I

$(\forall n \in \mathbb{N})$ الدالة $f \circ f$ متصلة على $[V_n; W_n]$ وقابلة للاشتقاق على $]V_n; W_n[$

إذن: حسب مبرهنة التزايدات المنتهية: $(\exists c \in]V_n; W_n[)$

$$f \circ f(W_n) - f \circ f(V_n) = (W_n - V_n) \times f \circ f'(c)$$

وعليه:

$$|f \circ f(W_n) - f \circ f(V_n)| = |W_n - V_n| \times |f \circ f'(c)|$$

$(\forall x \in I)$ $f \circ f'(x) = f'(f(x)) \times f'(x)$

بما أن:

$(\forall x \in I)$ $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

إذن:

$$f \circ f'(c) = f'(f(c)) \times f'(c)$$

$c \in I$ و $f(c) \in I$

و $|f'(c)| < \frac{1}{2}$ إذن: $|f(f'(c))| \leq \frac{1}{2}$

وعليه:

$$|f \circ f'(c)| = |f'(f(c))| \times |f(c)| \leq \frac{1}{4}$$

وعليه:

$$|W_n - V_n||f \circ f'(c)| \leq \frac{1}{4}|W_n - V_n|$$

أي:

$$|W_{n+1} - V_{n+1}| \leq \frac{1}{4}|W_n - V_n|$$

وبما أنه:

$(\forall n \in \mathbb{N})$ $W_n > V_n$

فإنه:

$$\boxed{W_{n+1} - V_{n+1} \leq \frac{1}{4}(W_n - V_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N})}$$

ب) نعلم أن: $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$W_{n+1} - V_{n+1} \leq \frac{1}{4}(W_n - V_n)$$

بما أن: $V_n \leq \alpha \leq W_n$

$$W_n \neq V_n.$$

$$0 < \frac{W_{n+1} - V_{n+1}}{W_n - V_n} \leq \frac{1}{4}$$

$$0 < \prod_{k=0}^{n-1} \frac{W_{k+1} - V_{k+1}}{W_k - V_k} \leq \frac{1}{4}$$

$$|W_n - V_n| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |W_0 - V_0|.$$

بما أن: $0 < \frac{1}{4} < 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$$

وعليه: $\lim_{x \to +\infty} W_n - V_n = 0$

وبما أن: W_n تناقصية و V_n تزايدية.

فإنهما : متحاذيتان ولهما نفس النهاية.

② لدينا : $v_n \leq \alpha \leq w_n$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n \leq \alpha \leq \lim_{n\to+\infty} w_n$$

لـ w_n و v_n نفس النهاية.

إذن :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \alpha.$$

③ لنستنتج أن : $(U_n)_n$ متقاربة و نحدد نهايتها:

$v_n = U_{2n}$ و $w_n = U_{2n+1}$

$(v_n)_n$ و $(w_n)_n$ متقاربتان.

$$\lim_{n\to+\infty} U_{2n} = \lim_{n\to+\infty} U_{2n+1} = \alpha$$

$\Leftarrow$ $(U_n)_n$ متقاربة و $\lim_{n\to+\infty} U_n = \alpha$

التمرين رقم 2 :

$$z_0 = 1 + i\sqrt{3}$$

① لنحدد الشكل المثلثي للعدد z_0

$$z_0 = 1 + i\sqrt{3}$$

$$|z_0| = \sqrt{1+3} = 2$$

$$z_0 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

ب) لنبين أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad z_0^n + (\bar{z}_0)^n = 2^{n+1}\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

$$z_0^n + (\bar{z}_0)^n = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n + \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^n$$

$$= 2^n e^{in\frac{\pi}{3}} + 2^n e^{-in\frac{\pi}{3}}$$

$$= 2^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2^n\left(2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

ومنه : المطلوب.

② $z = 1 - \sqrt{3} - i(1+\sqrt{3})$

أ- لنبين أن : $\bar{z} = \sqrt{2}\, z_0 e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$$\sqrt{2}(1+i\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(1+i\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= (1+i\sqrt{3})(1+i)$$

$$= 1 + i + i\sqrt{3} - \sqrt{3}$$

$$= 1 - \sqrt{3} + i(1+\sqrt{3}) = \bar{z}$$

- لنحدد الشكل المثلثي للعدد z :

$$\bar{z} = \sqrt{2}\, z_0 e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\bar{z} = \sqrt{2} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\bar{z} = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

وعليه :

$$z = 2\sqrt{2}\, e^{-i\frac{7\pi}{12}}$$

ب- استنتاج قيمة $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

بما أن :

$$\bar{z} = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{4}} = (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})$$

ومنه :

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{Re(\bar{z})}{|\bar{z}|} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{Im(\bar{z})}{|\bar{z}|} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

التمرين رقم ④

$$f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^{k=n} x^k\right) - a$$

① لنبين أن: المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_n وأن: $0<x_n<1$

نعلم أن: $f_n(x)$ قابلة للاشتقاق على $]0;1[$

$$f_n'(x) = \left(\sum_{k=1}^{k=n} x^k\right)'$$

$$f_n'(x) = \left(\sum_{k=1}^{k=n} k x^{k-1}\right) > 0$$

	0		1		$+\infty$
$f_n(x)'$			$+$		
$f_n(x)$	$-a$	$\nearrow$	$n-a$	$\nearrow$	$+\infty$

لدينا: $f_n(x)$ تزايدية ومتصلة على $]0;1[$

إذن فهي تقابل من $]0;1[$ نحو

$$f(]0;1[) =]-a\,;\,n-a[$$

بما أن: $0<a<1\leq n$

$$n-a>0$$

و عليه: $0\in\,]-a;n-a[$

أي: $\exists x_n!\ ;\ f_n(x)=0$

لدينا:

$$f_n(x_n)=0$$

$$f_n(0) = -a < 0$$

$$f_n(1) = n-a > 0$$

$f_n(0)<0$ | $f_n(1)>f_n(x_n)$

$f_n(0)<f_n(x_n)$ | $1>x_n$ (I)

(II) $0<x_n$

من (I) و (II) نستنتج أن:

$$0<x_n<1$$

② لنبين أن: $(\forall x\in\mathbb{R}^+)$

$$(x-1)f_n(x) = x^{n+1}-(a+1)x+a$$

نعلم أن:

$$f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^{k=n} x^k\right) - a$$

نضع: $\left(\sum_{k=1}^{k=n} x^k\right) = S_n$

$\Leftarrow$ S_n متتالية هندسية جمع حدود أساسها x.

مع $x\neq 1$

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} x^k - 1 = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 1$$

$$f_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 1 - a$$

$$f_n(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} - 1 - a$$

$$(x-1)f_n(x) = x^{n+1} - 1 - (x-1) - a(x-1)$$

$$(x-1)f_n(x) = x^{n+1} - (a+1)x + a.$$

والعلاقة محققة من أجل $x=1$

3) أ- لنبين أن:

$(\forall x \in]0;1[) \quad f_{n+1}(x) > f_n(x)$

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{k=n+1} x^k - a - \sum_{k=1}^{k=n} + a$$

$$= x^{n+1} > 0$$

وعليه: $(\forall x \in]0;1[)$

$$\boxed{f_{n+1}(x) > f_n(x)}$$

ب- لنستنتج أن: (x_n) تناقصية وأنها متقاربة:

نعلم أن:

$(\forall x \in]0;1[)$

$$f_{n+1}(x) > f_n(x)$$

وبما $0 < x_n < 1$

$$f_{n+1}(x_n) > f_n(x_n)$$

$$f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1})$$

f_{n+1} تزايدية على $]0;1[$

$(\forall x \in]0;1[)$

$$x_n > x_{n+1}$$

وعليه: x_n متتالية تناقصية

• بما أن x_n تناقصية ومصغورة بـ 0 إذن فهي متقاربة.

ج) لنبين أن: $\lim_{n \to +\infty} x_n^n = 0$

ولنحدد نهاية المتتالية $(x_n)_n$ بدلالة a.

بما أن: x_n تناقصية

إذن:

$x_n < x_1$

$f_n(x_n) = 0$

إذن: $f_1(x_1) = 0$

$f_1(x_1) = x_1 - a = 0$

$x_1 = a$

$x_1^n = a^n$

$0 < a^n < 1$ $\quad \lim_{n \to +\infty} a^n = 0$

وبما أن: $0 < x_n^n < x_1^n$

$0 < x_n^n < a^n$

إذن: فحسب مصاديق التقارب

$\lim_{n \to +\infty} x_n^n = 0$

نعلم أن:

$f_n(x_n) = 0$

إذن: $x_n^{n+1} - (a+1)x_n + a = 0$

(ج س ②)

$(a+1)x_n = x^{n+1} + a$

$$x_n = \frac{x^{n+1} + a}{a+1}$$

$\lim_{n \to +\infty} x^{n+1} = 0$

إذن:

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} x_n = \frac{a}{a+1}}$$

من انجاز: جيهان بلفقيه

التمرين الأول

www.ift.fr

1) بين أن $\ln x \le x-1$ $\left(\forall x \in]0,+\infty[\right)$

2) لتكن a_1 , a_2 , ..., a_n أعداد حقيقية موجبة قطعا .

نعتبر العددين $A=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} a_k$ و $G=\sqrt[n]{a_1 a_2 .....a_n}$

أ- نضع $u_k=\frac{a_k}{A}$ بين أن $\sum_{k=1}^{k=n}\ln u_k \le 0$

ب- استنتج أن $\sqrt[n]{a_1 a_2 ....a_n} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} a_k$

www.bestcours.net

3) تطبيق : أ- احسب النهاية $\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}$

ب- لتكن x_1 , x_2 , ..., x_n أعداد حقيقية موجبة قطعا .

بين أن $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+.....+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1} \ge n$

التمرين الثاني

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\ln x-2\arctan x$

1) أحسب النهايتين $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$

2) أحسب المشتقة $f'(x)$ و أدرس منحى تغيرات الدالة f ثم ضع جدول تغيراتها

3) أ- بين أن المعادلة $f(x)=2n$ تقبل حللا وحيدا a_n (حيث n عدد طبيعي)

ب- تحقق أن $e^{2n}<a_n$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$ و حدد $\lim_{n\to+\infty} a_n$

4) بين أن $\ln\left(\frac{a_n}{e^{2n}}\right)=2\arctan\left(a_n\right)$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$ و استنتج $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{e^{2n}}$

5) بين أن $\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=2\left(1+\arctan\left(a_{n+1}\right)-\arctan\left(a_n\right)\right)$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$

و استنتج $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$

التمرين الثالث

1) حدد S مجموعة حلول المعادلة $|z-1|^2+\bar{z}-1=0$

2) لكل عدد z من $\mathbb{C}-S$ نضع $f(z)=\frac{iz^2}{|z-1|^2+\bar{z}-1}$

أ- بين أن $f(z)=\frac{iz}{\bar{z}-1}$

ب- حدد على الشكل الجبري للعدد $f\left(\frac{1}{2}+iy\right)$ حيث $y\in\mathbb{R}$

3) نعتبر في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط

$A(1)$; $B(-i)$; $M(z)$ و $M'(z')$ مع $z'=f(z)$

أ- بين أن (M تنتمي إلى واسط القطعة $[OA]$) $\Leftrightarrow$ $M'=B$

ب- بين أن $[2\pi]$ $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}+\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM}}\right)$ و استنتج (D) مجموعة النقط

$M(z)$ التي يكون من أجلها O ; M ; M' مستقيمية

4) نضع $z=e^{i\theta}$ و $\theta\in]0,2\pi[$

أ- حدد بدلالة θ الشكل المثلثي للعدد العقدي $f(z)$

ب- حدد و أرسم مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون $OM=1$ و M' تنتمي إلى المستقيم (Δ) $y=x$

التمرين الرابع

ليكن a عددا حقيقيا و نعتبر العدد العقدي $z=1+ia$

أ- بين أن $[2\pi]$ $\arg(z)\equiv\arctan a$

ب- ليكن x , y عددان حقيقيان أحسب $(1+ix)(1+iy)$

و بين أنه إذا كان $xy<1$ فإن $\arctan x+\arctan y=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$ (1)

ج- ماذا تصبح العلاقة (1) في حالة $xy>1$

www..ift.fr

من إنجاز التلميذ: ياسر الرحالي

تصحيح الفرض رقم 4

للأستاذ: ب. المانتي

التمرين الأول

① بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})\ \ln x \leq x-1$

نضع $f(x) = \ln x - x + 1$

لدينا $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

ومنه نستنتج أن $(\forall x>0) : f(x) \leq 0$

وبالتالي $\boxed{(\forall x>0) : \ln x \leq x-1}$

② $A = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} a_k$ و $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$

أ) نضع $U_k = \frac{a_k}{A}$ بين أن $\sum_{1}^{n} \ln U_k \leq 0$

لدينا $\ln U_k \leq U_k - 1$

$\Leftarrow \sum_{1}^{n} \ln U_k \leq \sum_{1}^{n} (U_k - 1)$

وعليه $\sum_{1}^{n} \ln U_k \leq \sum_{1}^{n} U_k - n$

وبما أن $\sum_{1}^{n} U_k = \sum_{1}^{n} \frac{a_k}{A} = \frac{1}{A}\sum_{1}^{n} a_k = n$

فإن $\boxed{\sum_{1}^{n} \ln U_k \leq 0}$

ب) استنتج أن: $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$

لدينا $\sum_{1}^{n} \ln U_k \leq 0$

تعني $\ln\left(\prod_{1}^{n} U_k\right) \leq 0$

أي أن $\ln\left(\prod_{1}^{n} \frac{a_k}{A}\right) \leq 0$

إذن $\prod_{1}^{n} \frac{a_k}{A} \leq 1$

ومنه $\prod_{1}^{n} a_k \leq A^n$

وبالتالي $\boxed{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}}$

③ تطبيق:

أ) احسب $\lim_{x \to +\infty} \frac{n!}{n^n}$

لدينا $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$

ومما سبق $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n \leq \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)^n$

$\Leftarrow n! \leq \left(\frac{1+2+\dots+n}{n}\right)^n$

ونعلم أن $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

إذن $0 < \frac{n!}{n^n} \leq \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$

ولدينا $\frac{n+1}{2n} \leq \frac{3}{4}$

إذن $0 < \frac{n!}{n^n} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

وبما أن $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

فإن $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0}$

ب) $x_1, x_2, \dots, x_n$ من $\mathbb{R}^{*+}$، بين أن:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n$$

نضع $a_1 = \frac{x_1}{x_2}, a_2 = \frac{x_2}{x_3}, \dots, a_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{x_n}, a_n = \frac{x_n}{x_1}$

والعلاقة تصبح:

$$\sqrt[n]{\frac{x_1}{x_2} \times \frac{x_2}{x_3} \times \dots \times \frac{x_{n-1}}{x_n} \times \frac{x_n}{x_1}} \leq \frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1}\right)$$

وعليه $\boxed{\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n}$

التمرين الثاني :

$f(x) = \ln x - 2\arctan x$

① $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln x - 2\arctan x$

$= +\infty$ $\left(\text{لأن } \lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty\right)$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \ln x - 2\arctan x$

$= -\infty$ $\left(\text{لأن } \lim_{x\to0^+} \arctan x = 0 \quad \lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty\right)$

② $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x^2+1)} \geq 0$

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

③ أ- لدينا $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto \arctan x$ متصلتين على $\mathbb{R}^{*+}$

$\Leftarrow$ f متصلة على $\mathbb{R}^{*+}$ و f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^{*+}$

إذن f تقابل من $\mathbb{R}^{*+}$ نحو $f(\mathbb{R}^{*+}) = \mathbb{R}$

و $2n \in \mathbb{R} = f(\mathbb{R}^{*+})$

إذن $(\exists! \alpha_n \in \mathbb{R}^{*+}) \quad f(\alpha_n) = 2n$

ب- لدينا $f(\alpha_n) = \ln(\alpha_n) - 2\arctan\alpha_n = 2n$

بما أن $\alpha_n > 0 \Leftarrow \arctan\alpha_n > 0$

فإن $\ln\alpha_n > 2n$

ومنه $\alpha_n > e^{2n}$

وبما أن $\lim_{n\to+\infty} e^{2n} = +\infty$

فإن $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$

④ لدينا $f(\alpha_n) = 2n$

تعني $\ln\alpha_n - 2\arctan\alpha_n = 2n$

إذن $\ln\left(\frac{\alpha_n}{e^{2n}}\right) = 2\arctan\alpha_n$

بما أن $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$

فإن $\lim_{n\to+\infty} 2\arctan\alpha_n = \pi$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{\alpha_n}{e^{2n}}\right) = \pi$

وبالتالي $\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{e^{2n}} = e^{\pi}$

⑤ لدينا $f(\alpha_{n+1}) = 2n+2$

إذن $\ln(\alpha_{n+1}) - 2\arctan\alpha_{n+1} = 2n+2$

$\ln(\alpha_{n+1}) - 2\,\mathrm{arctg}\,\alpha_{n+1} = \ln\alpha_n - 2\,\mathrm{arctg}\,\alpha_n + 2$

$\Leftarrow$ $\ln\left(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right) = 2(\mathrm{arctg}\,\alpha_{n+1} - \mathrm{arctg}\,\alpha_n + 1)$

لدينا $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \alpha_{n+1} = +\infty$

إذن $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{arctg}\,\alpha_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{arctg}\,\alpha_n = \frac{\pi}{2}$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right) = 2$

وبالتالي $\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = e^{-2}$

التمرين الثالث :

① $|z-1|^2 + \bar{z} - 1 = 0$

تعني $(z-1)(\overline{z-1}) + \bar{z} - 1 = 0$

$(z-1)(\bar{z}-1) + \bar{z} - 1 = 0$

ومنه $z(\bar{z}-1) = 0$

أي أن $z = 1$ أو $z = 0$

وعليه $S = \{0, 1\}$

② أ- $f(z) = \frac{iz^2}{|z-1|^2 + \bar{z} - 1} = \frac{iz^2}{(z-1)(\bar{z}-1) + \bar{z} - 1}$

$= \frac{iz^2}{z(\bar{z}-1)}$

$f(z) = \frac{iz}{\bar{z}-1}$

ب- لدينا

$$f\left(\frac{1}{2}+iy\right)=\frac{i\left(\frac{1}{2}+iy\right)}{\frac{1}{2}-iy-1}$$

$$=\frac{i\left(\frac{1}{2}+iy\right)}{-\left(\frac{1}{2}+iy\right)}$$

$$f\left(\frac{1}{2}+iy\right)=-i$$

3- أ-

$$M'=B \Leftrightarrow \frac{iz}{\bar{z}-1}=-i$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}-1=-z$$

$$\Leftrightarrow -z-\bar{z}+1=0$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z}-z-\bar{z}+1=z\bar{z}$$

$$\Leftrightarrow |z-1|^2=|z|^2$$

$$\Leftrightarrow |z-1|=|z|$$

$$\Leftrightarrow OM=AM$$

وبالتالي $M'=B \Leftrightarrow$ (M تنتمي لواسط $[OA]$)

ب-

$$(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}})\equiv \arg\left(\frac{z'}{z}\right)[2\pi]$$

$$\equiv \arg\left(\frac{i}{\bar{z}-1}\right)[2\pi]$$

تعني $\equiv \arg i-\arg(\bar{z}-1)[2\pi]$

تطابق $\equiv \arg i+\arg(\overline{z-1})[2\pi]$

ومنه $\equiv \frac{\pi}{2}+\arg(z-1)[2\pi]$

وبالتالي $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}})\equiv \frac{\pi}{2}+(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM}})[2\pi]$

لدينا O و M و M' مستقيمية تعني أن

$$(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}})\equiv 0[\pi]$$

أي أن $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM}})\equiv -\frac{\pi}{2}[\pi]$

إذن (D) هي المستقيم المار من A و $\vec{u}$ منظميه عليه.

4- أ- من أجل $z=e^{i\theta}$ لدينا:

$$f(z)=\frac{ie^{i\theta}}{e^{-i\theta}-1}=\frac{e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}$$

$$=\frac{e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{3\theta}{2})}}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{1}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cdot e^{i(\pi+\frac{3\theta}{2})}$$

$\theta\in]0,2\pi[\Rightarrow \frac{\theta}{2}\in]0,\pi[\Rightarrow \sin\frac{\theta}{2}>0$

ب- $M'\in(\Delta): y=x$ و $OM=1$

تعني $\arg(z')\equiv\frac{\pi}{4}[\pi]$ و $\theta\in]0,2\pi[$ و $z=e^{i\theta}$

تعني $\frac{3\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\equiv\frac{\pi}{4}[\pi]$ و $(\theta\in]0,2\pi[$ و $z=e^{i\theta})$

$$\frac{3\theta}{2}=-\frac{3\pi}{4}+k\pi$$

$$\theta=-\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}$$

و $\theta\in]0,2\pi[\Leftarrow 0<-\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}<2\pi$

$$\frac{3}{4}<k<\frac{15}{4}$$

$\Leftarrow k=1$ أو $k=2$ أو $k=3$

$\Leftarrow z=e^{i\frac{\pi}{6}}$ أو $z=e^{i\frac{5\pi}{6}}$ أو $z=e^{i\frac{3\pi}{2}}$

التمرين الرابع

1) $z=1+ia$

نضع $\theta\equiv\arg(z)[2\pi]$

$$\tan\theta=\frac{Im(z)}{Re(z)}=a$$

ومنه $\theta=\arctan a$

وبالتالي، $\arg(z)\equiv\arctan a[2\pi]$

2- أ-

$$(1+ix)(1+iy)=(1-xy)+i(x+y)$$

$$=(1-xy)\left(1+i\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

إذا كان $xy<1$ فإن $1-xy>0$

وعليه :

$$\arg((1+ix)(1+iy)) \equiv \arg\left[(1-xy)\left(1+i\frac{x+y}{1-xy}\right)\right] \ [2\pi]$$

$$\arg(1+ix)+\arg(1+iy) = \arg(1-xy)+\arg\left(1+i\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

$$\boxed{\arctan x+\arctan y = 0+\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)}$$

ب) في حالة $xy > 1$ فإن $1-xy < 0$

$\Leftarrow$ $\arg(1-xy) \equiv \pi \ [2\pi]$

ومنه :

$$\boxed{\arctan x+\arctan y \equiv \pi+\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \ [2\pi]}$$

الثانية علوم رياضية	فرض رقم 2	2017-16

التمرين الأول :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{1-x} + x - 1 & ; \quad x < 0 \\ f(x) = \arctan\left(\sqrt[3]{x} + \tan x\right) & ; \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$

1) أ) بين أن الدالة f متصلة في النقطة $a = 0$ — 0.5 ن

ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين $a = 0$ و أول هندسيا النتيجة — 1 ن

ج) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يسار النقطة $a = 0$ و أول النتيجة هندسيا — 1 ن

2) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) عند $-\infty$ — 1.5 ن

3) بين أن الدالة f تزايدية قطعا على $\left]-\infty, \frac{\pi}{2}\right[$ — 1 ن

4) لتكن g الدالة المعرفة على $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ المعرفة بما يلي : $g(x) = f(x) \quad ; \quad x \neq \frac{\pi}{2}$ و $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

أ) بين أن $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \frac{1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\tan x} = -1$ و استنتج أن g قابلة للاشتقاق على يسار النقطة $\frac{\pi}{2}$ — 1.5 ن

ب) بين أن g تقابل من I نحو I — 0.5 ن

5) أ) حل المعادلة $g^{-1}(x) = x$ و بين أن $g^{-1}(x) \leq x \quad \left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$ — 1 ن

ب) أرسم المنحنيين (C) و $\left(C_{g^{-1}}\right)$ — 1.5 ن

التمرين الثاني :

حدد نهاية كل من المتتاليات التالية : — 4 ن

1) $U_n = \frac{2^n}{n}$ 2) $V_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{2}{k(k+2)}$ 3) $W_n = \sin\left(\sqrt{4n^2 + \pi}\right) - \sin(2n)$

التمرين الثالث :

ليكن a عددا من $\left]1, +\infty\right[$ و n عددا طبيعيا

1) بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن $\sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n} \quad (\forall n \geq 2)$ و استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a}$ — 1.5 ن

2) بين أن $(1+b)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} b^2 \quad (\forall b > 0)(\forall n \geq 2)$ و استنتج أن $\lim\limits_{n \to +\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)^2 = 0$ — 1.5 ن

التمرين الرابع :

1) بين أن $n! = \prod\limits_{k=1}^{k=n} (n+1-k) \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$ — 0.5 ن

2) أ) بين أن $(n+1-k)k \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \quad (\forall k \in \{1, 2, ..., n\})$ — 0.5 ن

ب) استنتج أن $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$ و بين أن $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ — 1.5 ن

تصحيح الفرض رقم 2 الدورة 1 :

التمرين 1 :

1) أ- لدينا :

$$* \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \arctan\left(\sqrt[3]{x} + \tan x\right)$$

$$= \arctan(0)$$

$$= 0$$

$$= f(0)$$

فإن f متصلة على يمين $a=0$

$$* \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{1-x} + x - 1$$

$$= \sqrt[3]{1} - 1$$

$$= 0$$

$$= f(0)$$

فإن f متصلة على يسار $a=0$

$\Leftarrow$ إذن f متصلة في $a=0$.

ب- $$* \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan\left(\sqrt[3]{x}+\tan x\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan\left(\sqrt[3]{x}+\tan x\right)}{\sqrt[3]{x}+\tan x} \times \left(\frac{\tan x}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$$

لدينا $\lim_{x\to 0^+} \sqrt[3]{x} + \tan x = 0$ فإن $\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan\left(\sqrt[3]{x}+\tan x\right)}{\sqrt[3]{x}+\tan x} = 1$

و $\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x}{x} = 1$ و $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$

فإن $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$.

إذن f غير قابلة للاشتقاق على يمين $a=0$

$\Leftarrow$ وعليه $(\mathcal{C})$ يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة ذات الأفصول $a=0$.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{1-x}+x-1}{x}$$ ج-

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2+\sqrt[3]{1-x}+1} + 1$$

$$= \frac{-1}{3}+1$$

$$= \frac{2}{3}$$

إذن f قابلة للاشتقاق على يسار $a=0$ و $f'_g(0)=\frac{2}{3}$

$\Leftarrow$ (C) يقبل نصف مستقيم مماس (T) في النقطة ذات الأفصول $a=0$ معادلته :

$$(T): y = f'_g(0)(x-0)+f(0) \quad ; \quad x<0$$

أي : $(T): y = \frac{2}{3}x \quad ; \quad x<0$

2) * $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \sqrt[3]{1-x}+x-1$

نضع $X=-x$ ومنه النهاية تصبح :

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{X\to +\infty} \sqrt[3]{1+X}-X-1$$

$$= \lim_{X\to +\infty} X\left(\sqrt[3]{\frac{1}{X^3}+\frac{1}{X^2}}-1\right)-1$$

لدينا $\lim_{X\to +\infty} \frac{1}{X^3}+\frac{1}{X^2}=0$ فإن $\lim_{X\to +\infty} X\left(\sqrt[3]{\frac{1}{X^3}+\frac{1}{X^2}}-1\right)=-\infty$

إذن : $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

* $$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt[3]{1-x}+x-1}{x}$$

$$= \lim_{X\to +\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{X^2}+\frac{1}{X^3}}+1+\frac{1}{X} \quad (X=-x)$$

$$= 1$$

(لأن $\lim_{X\to +\infty} \frac{1}{X^2}+\frac{1}{X^3} = \lim_{X\to +\infty} \frac{1}{X} = 0$)

* $\lim_{x\to-\infty} f(x)-x = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{1-x} - 1 = +\infty$ ولدينا

$\left(\lim_{-\infty} 1-x = +\infty \text{ لأن}\right)$

$\Leftarrow$ (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم $y=x$

بجوار $-\infty$.

3) لكل $x\in]-\infty,0[$ لدينا:

$$f'(x) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}} + 1$$

لدينا، $x<0 \Rightarrow \sqrt[3]{(1-x)^2} > 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}} < \frac{1}{3} < 1$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}} > 0$$

أي $f'(x) > 0$

وعليه f تزايدية قطعا على $]-\infty,0[$

و لكل $x\in]0,\frac{\pi}{2}[$ لدينا،

$$f'(x) = \frac{1+3\sqrt[3]{x^2}\left(1+\tan^2 x\right)}{3\sqrt[3]{x^2}\left(1+\left(\sqrt[3]{x}+\tan x\right)^2\right)}$$

لدينا،

$\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}[: f'(x) > 0$

فإن f تزايدية قطعا على $[0,\frac{\pi}{2}[$

و f متصلة في 0

$\Leftarrow$ إذن f تزايدية قطعا على $]-\infty;\frac{\pi}{2}[$

4) أ- * $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x}$

نضع $t = x-\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = t+\frac{\pi}{2}$

و $x \to \frac{\pi}{2}^- \Rightarrow t \to 0^-$

إذن النهاية تصبح :

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t\tan\left(t+\frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{t\to 0^-} -\frac{\tan t}{t} = -1$$

الاستنتاج :

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\arctan\left(\sqrt[3]{x}+\tan x\right)-\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\tan x}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\tan x}\right)}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\tan x}} \times \frac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sqrt[3]{x}+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x}$$

لدينا $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ فإن $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\tan x} = 0$

ومنه $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\tan x}\right)}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\tan x}} = -1$

وحسب ما سبق لدينا $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x} = -1$

فإن : $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x = -1$

ومنه $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sqrt[3]{x}+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x} = -1$

إذن $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}} = 1$

وعليه g قابلة للاشتقاق على يسار $\frac{\pi}{2}$

و $g'_g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

التمرين 2 :

(1

* $U_n = \frac{2^n}{n}$

لدينا :

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \sum_{k=3}^{n} C_n^k$$

فإن $2^n \geqslant \frac{n(n-1)}{2}$

ومنه $U_n = \frac{2^n}{n} \geqslant \frac{n-1}{2}$

مع $\lim_{n \to +\infty} \frac{n-1}{2} = +\infty$

فإن $\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

* $$V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

ومنه : $\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{3}{2}$

* $$W_n = \sin\left(\sqrt{4n^2+\pi}\right) - \sin(2n)$$

$$= 2\cos\left(\frac{\sqrt{4n^2+\pi}+2n}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{4n^2+\pi}-2n}{2}\right)$$

لدينا ، $\forall n \in \mathbb{N} : \left|\cos\left(\frac{\sqrt{4n^2+\pi}+2n}{2}\right)\right| \leqslant 1$

$$\Rightarrow |W_n| \leqslant 2\left|\sin\left(\frac{\sqrt{4n^2+\pi}-2n}{2}\right)\right|$$

بما أن $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{4n^2+\pi}-2n}{2} = \lim_{+\infty} \frac{\pi}{2(\sqrt{4n^2+\pi}+2n)}$

$= 0$

و $x \longmapsto \sin x$ متصلة في $x=0$

فإن $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{\sqrt{4n^2+\pi}-2n}{2}\right) = 0$

وعليه $\lim_{n\to+\infty} W_n = 0$ $\Rightarrow$

التمرين 3 :

1) لدينا $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ متصلة على $[1, a]$ بالخصوص

وقابلة للاشتقاق على $]1, a[$

فإن :

$\exists c \in]1, a[: (\sqrt[n]{c})' = \frac{\sqrt[n]{a}-1}{a-1}$

أي $\exists c \in]1, a[: \frac{1}{n\sqrt[n]{c^{n-1}}} = \frac{\sqrt[n]{a}-1}{a-1}$

و $1 < c < a \Rightarrow \frac{1}{n\sqrt[n]{c^{n-1}}} < \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt[n]{a}-1}{a-1} < \frac{1}{n}$

فإن : $\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n}$

الاستنتاج :

لدينا $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq \sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n}$

مع $\lim_{n\to+\infty} \frac{a-1}{n} = 0$

فإن $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

4) ب- $\begin{cases} x \longmapsto \sqrt[3]{x} \\ x \longmapsto \tan x \end{cases}$ متصلتان على $[0, \frac{\pi}{2}[$ بالخصوص

فإن $x \xmapsto{v} \sqrt[3]{x} + \tan x$ متصلة على $[0, \frac{\pi}{2}[$

و $x \xmapsto{u} \arctan x$ متصلة على $\mathbb{R}$

و $v([0, \frac{\pi}{2}[) \subseteq \mathbb{R}$

فإن $x \xmapsto{u \circ v} \arctan(\sqrt[3]{x} + \tan x)$ متصلة على $[0, \frac{\pi}{2}[$

أي g متصلة على $[0, \frac{\pi}{2}[$

* $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} g(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \arctan(\sqrt[3]{x} + \tan x)$ ولدينا

كما أن $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \arctan(\sqrt[3]{x} + \tan x) = \frac{\pi}{2}$

أي $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} g(x) = \frac{\pi}{2} = g(\frac{\pi}{2})$

إذن g متصلة على يسار $x = \frac{\pi}{2}$

$\Leftarrow$ وعليه g متصلة على $I = [0, \frac{\pi}{2}]$

و g تزايدية قطعا على $I = [0, \frac{\pi}{2}]$

فإن g تقابل من $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ نحو $g(I)$

حيث:

$$\begin{aligned} g(I) &= g([0, \tfrac{\pi}{2}]) \\ &= [g(0), g(\tfrac{\pi}{2})] \\ &= [0, \tfrac{\pi}{2}] \\ &= I \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ أي g تقابل من I نحو I.

5) أ- $g^{-1}(x) = x \Leftrightarrow g(x) = x$ و $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

$\Leftrightarrow f(x) = x$ و $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

$\Leftrightarrow \arctan(\sqrt[3]{x} + \tan x) = x$ و $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x} + \tan x = \tan x$ و $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 0$ و $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

$\Leftrightarrow x = 0$

و لدينا $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ فإن $g^{-1}(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$

إذن $S = \{0, \frac{\pi}{2}\}$

* لكل $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ لدينا:

$g^{-1}(x) \leq x \Leftrightarrow g(x) \geq x$

$\Leftrightarrow f(x) \geq x$

$\Leftrightarrow \arctan(\sqrt[3]{x} + \tan x) \geq x$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x} \geq 0$

عبارة صحيحة

إذن: $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[: \quad g^{-1}(x) \leq x$

ب- المنحنيين $(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$:

2) لكل $b>0$ لدينا :

$$(b+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b^k$$

$$= 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2} b^2 + \sum_{k=3}^{n} C_n^k b^k$$

فإن : $(\forall n \geq 2)\ (\forall b>0) : (b+1)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} b^2$

الاستنتاج :

نأخذ $b = \sqrt[n]{a} - 1$

إذن لدينا : $a \geq \frac{n(n-1)}{2} (\sqrt[n]{a}-1)^2$

فإن : $0 \leq n(\sqrt[n]{a}-1)^2 \leq \frac{2a}{n-1}$

مع $\lim_{n\to+\infty} \frac{2a}{n-1} = 0$

فإن $\lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)^2 = 0$

التمرين 4 :

1) لكل $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$$

$$= (n+1-1) \times (n+1-2) \times \dots \times (n+1-n)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (n+1-k)$$

2) أ- لكل k من $\{1, 2, \dots, n\}$ لدينا :

$$\left(\frac{n+1}{2} - k\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 + k^2 - k(n+1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (n+1-k)\,k \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

ب) لدينا $\forall k \in \{1, \dots, n\}: \quad (n+1-k)\,k \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

فإن $\prod_{k=1}^{n} (n+1-k)\,k \leq \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

فإن: $(n!)^2 \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$

فإن $\forall n \in \mathbb{N}^*: \quad n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

نبين أن $\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

لدينا $0 \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

فإن: $0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^n$

و $n \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

أي $0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

وحيث أن $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

لأن $0 < \frac{3}{4} < 1$

فإن $\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

انتهى !!

من إنجاز التلميذ: لكلوش يونس

تحت إشراف الأستاذ: بوشعيب المانتي

التمرين الأول

ليكن m عدد من $\mathbb{C}^*$ و نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$(E) \quad Z^2-\left(1+m\left(2+i\right)\right)Z+2m\left(1+im\right)=0$$

1) أ- تحقق أن مميز المعادلة (E) يكتب $\Delta=\left(1+m\left(-2+i\right)\right)^2$

ب- حدد حلول المعادلة (E)

2) نفترض أن $m\neq i$ و نضع $U=\dfrac{2m}{1+im}$

أ- بين أن $U\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \left|m\right|^2=\operatorname{Im}\left(m\right)$

ب- استنتج مجموعة النقط $M\left(m\right)$ و التي يكون من أجلها U حقيقي

ج- بين أن $\left(m\in i\mathbb{R}\right) \Leftrightarrow$ ($O\ ,\ M\ ,\ A\left(-i\right)$ مستقيمية)

د- بين أن $\dfrac{U+i}{U}=\dfrac{1}{2}\dfrac{m+i}{m}$

و استنتج أنه إذا كان $m\notin i\mathbb{R}$ فإن النقط $O\ ,\ M\ ,\ A\left(-i\right)$ و $B\left(U\right)$ تكون متد اورة

التمرين الثاني

ليكن n عدد طبيعي بحيث $n\geq 2$. نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\left]0,+\infty\right[$

بما يلي : $f_n\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{n}-\dfrac{1}{x^n}$

1) أدرس تغيرات الدالة f_n و ضع جدول التغيرات مع حساب النهايات

2) بين أن المعادلة $f_n\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا u_n

3) أ- بين أن $\sqrt[n]{e}<u_n \quad \left(\forall n\geq 2\right)$

ب- بين أن $e^x\geq x+1 \quad \left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$ و استنتج أن $u_n<e \quad \left(\forall n\geq 2\right)$

4) أ- بين أن $f_{n+1}\left(u_n\right)=\dfrac{\ln u_n}{\left(n+1\right)u_n}\left(u_n-1-\dfrac{1}{n}\right)$

و استنتج أن $f_{n+1}\left(u_n\right)>0 \quad \left(\forall n\geq 2\right)$

فرض محروس رقم 5

فرض محروس رقم

ب- بين أن المتتالية $\left(u_n\right)_n$ تناقصية و استنتج أنها متقاربة

5) نضع $V_n=\ln u_n$ لكل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*-\left\{1\right\}$

أ- تحقق أن $nV_n=\ln\left(\dfrac{n}{V_n}\right) \quad \left(\forall n\geq 2\right)$

ب- بين أن $\dfrac{\ln n}{n}<V_n<2\dfrac{\ln n}{n} \quad \left(\forall n\geq 2\right)$

ج- حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n$ ثم استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

التمرين الثالث

لتكن f دالة عددية معرفة على المجال $\left[0,+\infty\right[$ بما يلي : $f\left(x\right)=2e^{-x}-e^{-2x}$

ج- أ- أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)$ ما ذا تستنتج ؟

ب- أدرس تغيرات الدالة f و ضع جدول تغيراتها

2) بين أن المعادلة $f\left(x\right)=x$ تقبل حلا وحيدا α و أن $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$

3) أ- بين أن $0\leq x-x^2\leq\dfrac{1}{4} \quad \left(\forall x\in\left[0,1\right]\right)$

ب- استنتج أن $\left|f'\left(x\right)\right|\leq\dfrac{1}{2} \quad \left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right)$

4) لتكن $\left(U_n\right)_n$ متتالية عددية معرفة كما يلي : $U_0=\dfrac{1}{2}$ و $U_{n+1}=f\left(U_n\right)$

أ- بين أن $\dfrac{1}{2}\leq U_n\leq 1 \quad \left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$ (نعطي $f\left(1\right)\simeq 0,6$)

ب- بين أن $\left|U_{n+1}-\alpha\right|\leq\dfrac{1}{2}\left|U_n-\alpha\right| \quad \left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$

ج- استنتج أن $\left(U_n\right)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

تصحيح الفرض المحروس رقم 5

التمرين الأول :

1) أ-

$$\Delta = (1+m(2+i))^2 - 8m(1+im)$$
$$= 1 + m^2(-2+i+4)^2 + 2m(-2+i+4) - 8m(1+im)$$
$$= 1 + m^2(-2+i)^2 + 16m^2 + 8(-2+i)m^2 + 2m(-2+i) + 8m - 8m(1+im)$$
$$= 1 + m^2(-2+i)^2 + 2m(-2+i)$$
$$= (1+m(-2+i))^2$$

ب) ليكن z_1 و z_2 حلول المعادلة (E)

$$z_1 = \frac{\cancel{1} + m(2+i) - \cancel{1} - m(-2+i)}{2}$$
$$z_1 = \frac{2m + \cancel{im} + 2m - \cancel{im}}{2} = \boxed{2m}$$
$$z_2 = \frac{1+m(2+i)+1+m(-2+i)}{2}$$
$$= \frac{2+2m+im-2m+im}{2}$$

وعليه : $\boxed{z_2 = 1 + im}$

2) أ)

$$U \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{2m}{1+im} \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2m}{1+im} = \frac{2\overline{m}}{1-i\overline{m}}$$
$$\Leftrightarrow 2m(1-i\overline{m}) = 2\overline{m}(1+im)$$
$$\Leftrightarrow 2m - 2i|m|^2 = 2\overline{m} + 2i|m|^2$$
$$\Leftrightarrow 2(m-\overline{m}) = 4i|m|^2$$
$$\Leftrightarrow m - \overline{m} = 2i|m|^2$$
$$\Leftrightarrow 2i\,Im(m) = 2i|m|^2$$

ومنه : $U \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |m|^2 = Im(m)$

ب) لدينا : $U \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |m^2| = Im(m)$

نضع : $m = x + yi$

إذن : $|m|^2 = Im(m) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = y$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

إذن مجموعة النقط $\mathcal{M}(m)$ والتي من أجلها يكون U حقيقي هي الدائرة التي مركزها $\Omega\left(0; \frac{1}{2}\right)$ وشعاعها $r = \frac{1}{2}$

ج)

$A(-i)$ و M و O مستقيمية $\Leftrightarrow \frac{m}{-i} \in \mathbb{R}$ نضع $m = x + iy$

$$\Leftrightarrow \frac{x+yi}{-i} \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow xi - y \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow x = 0$$
$$\Leftrightarrow m = yi$$
$$\Leftrightarrow m \in i\mathbb{R}$$

د)

$$\frac{U+i}{U} = \frac{\frac{2m}{1+im} + i}{\frac{2m}{1+im}}$$
$$= \frac{2m + i(1+im)}{2m} = \frac{m+i}{2m}$$

$$\boxed{\frac{U+i}{U} = \frac{1}{2}\,\frac{m+i}{m}}$$

استنتاج :

لدينا : $m \notin i\mathbb{R} \Rightarrow m = ik \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$\Rightarrow m \neq i \text{ و } m \neq -i$$

ولدينا : $\frac{U+i}{U} = \frac{1}{2}\,\frac{m+1}{m}$

إذن: $\frac{U+i}{U} \times \frac{m}{m+i} = \frac{1}{e} \in \mathbb{R}$

مع $m \neq -i$ و $m \neq 0$

$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_B - Z_O} \times \frac{Z_M - Z_O}{Z_M - Z_A} \in \mathbb{R}$$

ومنه النقط $O, M, A(-i)$

و $B(u)$ متداورة.

التمرين الثاني:

1) لدينا: f_m قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

و $\forall x \in]0,+\infty[$

$$f'_m(x) = \frac{1}{mx} + \frac{m x^{m-1}}{x^{2m}} > 0$$

x	0	$+\infty$
$f_m(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

- النهايات:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{m} - \frac{1}{x^m} = +\infty$$

لأن: $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^m} = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{m} - \frac{1}{x^m} = -\infty$$

لأن: $\begin{cases} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^m} = +\infty \\ \lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \end{cases}$

2) لدينا f_m متصلة على $]0,+\infty[$

وتزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

إذن f_m تقابل من $]0,+\infty[$

نحو $]-\infty,+\infty[$

ولدينا $0 \in]-\infty,+\infty[$

إذن المعادلة $f_m(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا u_m.

3) أ) $f_m(\sqrt[m]{e}) = \frac{\ln(e^{\frac{1}{m}})}{m} - \frac{1}{e}$

$$= \frac{1}{m^2} - \frac{1}{e}$$

ولدينا: $m \geq 2 \Rightarrow m^2 \geq 4 > e$

$$\Rightarrow \frac{1}{m^2} < \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m^2} - \frac{1}{e} < 0$$

إذن $(\sqrt[m]{e}, u_m) \in \mathbb{R}^{*+} \Rightarrow f_m(\sqrt[m]{e}) < f_m(u_m)$

وبما أن f_m تزايدية على $]0;+\infty[$

فإن: $(\forall m \geq 2)\ \sqrt[m]{e} < u_m$

ب) نضع: $(\forall x \in \mathbb{R})\ g(x) = e^x - x - 1$

لدينا g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

و $(\forall x \in \mathbb{R})\ g'(x) = e^x - 1$

إذن: $x > 0 \Rightarrow e^x > 1 = e^0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

إذن $(\forall x \in \mathbb{R})\ g(x) \geq 0$

وعليه: $\forall x \in \mathbb{R}\ e^x \geq x + 1$

- استنتاج: لدينا: $\forall x \in \mathbb{R}\ e^x \geq x + 1$

ومنه $e^m \geq m + 1 \Rightarrow \frac{1}{e^m} \leq \frac{1}{m+1}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{e^m} \geq -\frac{1}{m+1}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(e)}{m} - \frac{1}{e^m} \geq \frac{\ln(e)}{m} - \frac{1}{m+1}$$

$$\Rightarrow f_m(e) \geq \frac{1}{m(m+1)} > 0$$

$$\Rightarrow f_m(e) > f_m(u_m)$$

وبما أن f_m تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

و $(e, u_m) \in (]0,+\infty[)^2$

فإن : $(\forall n \geq 2) \quad u_n < e$

4) أ)

$$f_{n+1}(u_n) = \frac{\ln(u_n)}{n+1} - \frac{1}{u_n^{n+1}}$$

$$= \frac{\ln(u_n)}{(n+1)u_n}\left(u_n - \frac{(n+1)}{\ln(u_n)\, u_n^{n}}\right)$$

ولدينا : $f_n(u_n) = 0 \Rightarrow \frac{\ln(u_n)}{n} = \frac{1}{u_n^{n}}$

وعليه : $f_{n+1}(u_n) = \frac{\ln(u_n)}{(n+1)u_n}\left(u_n - \frac{(n+1)\cancel{\ln(u_n)}}{\cancel{\ln(u_n)}\, n}\right)$

إذن : $f_{n+1}(u_n) = \frac{\ln(u_n)}{(n+1)u_n}\left(u_n - \frac{n+1}{n}\right)$

ومنه :

$$\boxed{f_{n+1}(u_n) = \frac{\ln(u_n)}{(n+1)u_n}\left(u_n - 1 - \frac{1}{n}\right)}$$

- استنتاج :

لدينا : $(\forall n \geq 2) \quad u_n > e^{\frac{1}{n}}$

و $e^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{n} + 1$

إذن : $(\forall n \geq 2) \quad u_n \geq \frac{1}{n} + 1$

وعليه $(\forall n \geq 2) \quad u_n - \frac{1}{n} - 1 \geq 0$

إذن : $\boxed{(\forall n \geq 2) \quad f_{n+1}(u_n) > 0}$

ب) لدينا $(n \geq 2) \quad f_{n+1}(u_n) > 0$

و $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$

إذن : $f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$

وبما أن f_{n+1} تزايدية على $\mathbb{R}^{*+}$

و $(u_n, u_{n+1}) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$

فإن $(\forall n \geq 2)$: $u_n > u_{n+1}$

إذن $(u_n)_n$ تناقصية.

ولدينا $0 < u_n$ إذن

$(u_n)_n$ مصغورة بـ 0 . وبالتالي فإن $(u_n)_n$ متقاربة.

5) أ) - لدينا : $f_n(u_n) = 0 \Rightarrow$

$$\frac{\ln u_n}{n} = \frac{1}{u_n^{n}} \Leftrightarrow u_n^{n} = \frac{n}{\ln(u_n)}$$

إذن : $u_n^{n} = \frac{n}{V_n}$

و لدينا : $V_n = \ln(u_n)$

ومنه : $nV_n = n\ln(u_n)$

إذن : $nV_n = \ln(u_n^{n})$

وبالتالي : $\boxed{nV_n = \ln\left(\frac{n}{V_n}\right)}$

لكل $n \geq 2$

ب) لدينا : $e^{\frac{1}{n}} < u_n < e$

إذن : $\frac{1}{n} < \ln(u_n) < 1$

ومنه : $\frac{1}{n} < V_n < 1$

فإن $n < \frac{n}{V_n} < n^2$

إذن : $\ln(n) < \ln\left(\frac{n}{V_n}\right) < 2\ln(n)$

$\ln(n) < nV_n < 2\ln(n)$

وبالتالي : $\boxed{(\forall n \geq 2) \quad \frac{\ln(n)}{n} < V_n < 2\frac{\ln(n)}{n}}$

ج) - لدينا $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = \lim_{n \to +\infty} 2\frac{\ln(n)}{n} = 0$

وعليه : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} V_n = 0}$

- استنتاج :

لدينا : $V_n = \ln(u_n) \Rightarrow u_n = e^{V_n}$

و $x \mapsto e^{x}$ متصلة في 0 .

و $\lim_{n \to +\infty} V_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} e^{V_n} = e^{0} = 1$

وعليه :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

من انجاز التلميذة : أمينة هامي.

التمرين الثالث:

1) أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2e^{-x} - e^{-2x}$

$\lim_{x\to+\infty} -x = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} 2e^{-x} - e^{-2x} = 0$

- نستنتج أن $\mathcal{E}_f$ يقبل مقاربا معادلته $y=0$ بجوار $+\infty$.

ب) f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$.

$f'(x) = -2e^{-x} + 2e^{-2x}$

$= 2e^{-x}(e^{-x}-1)$

$f'(x)$ لها إشارة $(e^{-x}-1)$

$e^{-x}-1<0 \Rightarrow e^{-x}<1 \Rightarrow -x<0$

x	0	$+\infty$
$f(x)$	1 ↘	0

2) نضع: $h(x) = f(x) - x$

$\forall x \in [0,+\infty[$

إذن: $h'(x) = f'(x) - 1$

$f'(x) < 0 \Rightarrow f'(x)-1<0$

إذن: $h'(x)<0$

ومنه h تناقصية قطعا على $\mathbb{R}^+$ و متصلة على $\mathbb{R}^+$

إذن h تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $]-\infty,1]$

و $0 \in]-\infty,1]$

إذن: $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا.

ومنه المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α.

ولدينا $h(\frac{1}{2}) = 2e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1} - \frac{1}{2} > 0$

و $h(1) = 2e^{-1} - e^{-2} - 1 < 0$

وعليه $\boxed{\frac{1}{2} < \alpha < 1}$

3) أ) $x - x^2 = x(1-x)$

لدينا $x>0$ و $x<1 \Rightarrow 1-x>0$

إذن: $x(1-x)>0$

ومنه: $x - x^2 \geq 0$

نضع: $g(x) = x - x^2$

$g'(x) = 1 - 2x$

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$g(x)$	0 ↗	$\frac{1}{4}$	↘ 0

إذن: $\forall x \in [0,1]\ 0 < g(x) < \frac{1}{4}$

ومنه: $\boxed{(\forall x \in [0,1])\ 0 \leq x - x^2 \leq \frac{1}{4}}$

ب) لدينا: $f'(x) = -2e^{-x} + 2e^{-2x}$

$= -2(e^{-x} + e^{-2x})$

ولدينا: $x>0 \Rightarrow e^{-x} \in [0,1]$

لأن: $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim_{x\to 0} e^{-x} = 1 \end{cases}$ و $x \mapsto e^{-x}$ تناقصية على $\mathbb{R}^+$

وعليه: $0 \leq e^{-x} - e^{-2x} \leq \frac{1}{4}$

$0 \leq 2(e^{-x} - e^{-2x}) \leq \frac{1}{2}$

- ومنه: $\boxed{|f'(x)| \leq \frac{1}{2}}$ $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$

4) أ) لنبين أن:

$(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

(نعطي $f(1) \simeq 0,8$)

4) أ) من أجل: $n=0$

$u_0 = \frac{1}{2} \in [\frac{1}{2}, 1]$

نفترض أن: $u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$

ونبين أن: $u_{n+1} \in [\frac{1}{2}, 1]$

لدينا حسب الافتراض:

$(\forall n \in \mathbb{N}) \ \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

و f تناقصية قطعا على $[\frac{1}{2}, 1]$

إذن: $0,6 = f(1) \leq f(u_n) \leq f(\frac{1}{2})$

ومنه: $\frac{1}{2} < 0,6 \leq u_{n+1} \leq 1$

لأن: $f(\frac{1}{2}) \leq 1$

ومنه: $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1 \ (\forall n \in \mathbb{N})$

إذن: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1}$

ب) لدينا f متصلة وقابلة للاشتقاق على المجال I الذي طرفاه α و u_n.

بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية:

$\exists c \in I \subset [\frac{1}{2}, 1]$

بحيث:

$|f(u_n) - f(\alpha)| = |f'(c)| |u_n - \alpha|$

ولدينا: $(\forall x \in \mathbb{R}) \ |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

إذن: $|f'(c)| \leq \frac{1}{2}$

وبالتالي:

$|u_n - \alpha| |f'(c)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

ومنه $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

وبما أن: $f(u_n) = u_{n+1}$

و $f(\alpha) = \alpha$

فإن:

$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) \ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|}$

ج) حسب السؤال السابق:

$$\begin{cases} 0 < |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \alpha| \\ 0 < |u_{n-1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_{n-2} - \alpha| \\ \vdots \qquad \vdots \\ |u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_0 - \alpha| \end{cases}$$

متفاوتة n

بضرب المتفاوتات طرفا بطرف نجد:

$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

وبما أن $0 < \frac{1}{2} < 1$ فإن:

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

وعليه: $\lim_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$

إذن: $(u_n)_n$ متقاربة ونهايتها

$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha}$

الأستاذ:

المانتي بوشعيب

الثانية علوم رياضية	فرض رقم 3	2017-16

التمرين الأول (12 نقطة)

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $f(0)=-1$ و $(\forall x>0)\ \ f(x)=x^2-x\ln x-1$

نضع $\varphi(x)=\dfrac{2}{x}+\ln x$ لكل عدد حقيقي x من $]0,+\infty[$

الجزء الأول:

1) أ- بين أن f متصلة على $[0,+\infty[$ — 1 ن

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين النقطة $a=0$ — 0.5 ن

2) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) — 1 ن

3) أحسب $f'(x)$ و $f''(x)$ ثم بين أن f تزايدية قطعا على $\left]0,+\infty\right[$ — 1.5 ن

4) أ- بين أن الدالة f تقابل من $[0,+\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده — 0.5 ن

ب- أنجز جدول تغيرات الدالة f^{-1} — 0.5 ن

5) أرسم المنحنيين (C) و $\left(\Gamma_{f^{-1}}\right)$ — 1.5 ن

الجزء الثاني:

1) ليكن n عددا طبيعيا بين أن المعادلة $f(x)=n$ تقبل حلا وحيدا x_n و تحقق أن $x_0=1$ — 0.5 ن

2) بين أن $(x_n)_n$ متتالية تزايدية و أن $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$ — 1.5 ن

3) بين أن : $(\forall x>0)\quad \varphi(x)=x \Leftrightarrow f(x)=1$ — 0.5 ن

4) نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0=\dfrac{3}{2}$ و $U_{n+1}=\varphi(U_n)$

أ- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad \dfrac{3}{2}\le U_n\le 2$ — 0.5 ن

ب- بين أن $\left(\forall x\in\left[\dfrac{3}{2},2\right]\right)\quad \left|\varphi'(x)\right|\le\dfrac{2}{9}$ — 1 ن

ج- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad \left|U_{n+1}-x_1\right|\le\dfrac{2}{9}\left|U_n-x_1\right|$ و استنتج أن $(U_n)_n$ متقاربة محددا نهايتها — 1.5 ن

التمرين الثاني (6 نقط)

ليكن n عددا طبيعيا غير منعدم .

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\left]0,+\infty\right[$ بما يلي : $f_n(x)=(\ln x)^3+n\ln x-1$

1) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f_n(x)$ — 1.5 ن

2) أدرس منحى تغيرات الدالة f_n — 0.5 ن

3) أ) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا a_n — 0.5 ن

ب) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad 1<a_n<e^{\frac{1}{n}}$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ — 1.5 ن

4) أ) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ (\exists c_n\in\left]1,a_n\right[)\quad a_n-1=c_n(\ln a_n)$ — 1 ن

ب) استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} n(a_n-1)=1$ — 1 ن

تصحيح الفرض ③

Samira mantir.1s.fr
ELAKKARI 2.S.M.1

التمرين الأول

الجزء الأول:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1 & x>0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

1) أ- لدينا: $x \to \ln(x)$ و $x \to x^2$ و $x \to x$ دوال متصلة على $]0,+\infty[$

إذن: f متصلة على $]0,+\infty[$ ①

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 - x\ln(x) - 1$

بما أن: $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ فإن: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1 = f(0)$

وبالتالي f متصلة على يمين 0 ②

من ① و ② نستنتج أن f متصلة على $[0,+\infty[$

ب- $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - x\ln x - 1 - (-1)}{x}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - x\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+} x - \ln x = +\infty$

(لأن $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$) إذن f غير قابلة للاشتقاق على يمين النقطة $a=0$

2) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x^2 - x\ln x - 1$

$= \lim_{x\to +\infty} x^2\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) - 1 = +\infty$

(لأن: $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$)

$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - x\ln x - 1}{x}$

$= \lim_{x\to +\infty} x - \ln x - \frac{1}{x} = \lim_{x\to +\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) - \frac{1}{x}$

بما أن: $\lim_{x\to +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

فإن: $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

إذن C_f يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

3) $f'(x) = (x^2 - x\ln x - 1)'$

$= 2x - \ln x - 1$

$f''(x) = (2x - \ln x - 1)'$

$= 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$ $+\infty$	↘	$\ln(2)$	↗	$+\infty$

$\left(\lim_{x\to +\infty} f'(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty \text{ و } f'(\frac{1}{2}) = \ln(2)\right)$

إذن: f' تقبل قيمة دنيا في $\frac{1}{2}$

أي: $f'(x) \geq f(\frac{1}{2}) = \ln(2)$

وبالتالي: $f'(x) > 0$

ومنه: f تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

4) أ- لدينا f متصلة على $[0,+\infty[$ وتزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

إذن: f تقابل من $[0,+\infty[$ نحو $[-1,+\infty[$

(لأن: $f([0,+\infty[) = [f(0), \lim_{x\to +\infty} f(x)[= [-1,+\infty[$)

ب- جدول التغيرات

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$ -1	↗	$+\infty$

5) رسم المنحنى (C_f) و (T_{p-1}):

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$

إذن C_f يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى على يمين 0.

www.bestcours.net

- الجزء الثاني:

1) لدينا f تقابل من $[0,+\infty[$ نحو $[-1,+\infty[$

وبما أن $n \in [-1,+\infty[$

فإن المعادلة $f(x)=n$ تقبل حلا وحيدا x_n

$f(x_0)=0 \iff x_0^2 - x_0 \ln x_0 - 1 = 0$

$\iff x_0^2 - x_0 \ln x_0 = 1^2 - 1\ln(1)$

إذن $x_0 = 1$

2) * لدينا: $f(x_n)=n$ و $f(x_{n+1})=n+1$

لدينا: $n+1 > n$ إذن: $f(x_{n+1}) > f(x_n)$

و f تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

وبالتالي: $x_{n+1} > x_n$

أي: $(x_n)_n$ تزايدية.

* لنبين أن: $\lim_{+\infty} x_n = +\infty$

لدينا: $f(x_n)=n \iff x_n = f^{-1}(n)$

و $\lim_{+\infty} f(x)=+\infty$ ومنه $\lim_{+\infty} f^{-1}(x)=+\infty$

$\lim_{+\infty} x_n = \lim_{+\infty} f^{-1}(n) = +\infty$

3) $\varphi(x)=x \iff \frac{2}{x} + \ln(x) = x$

$\iff 2 + x\ln(x) = x^2$

$\iff x^2 - x\ln(x) - 1 = 0$

$\iff f(x) = 1$

4) أ- لنبين أن: $\frac{3}{2} \leq U_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

من أجل: $n=0$ $\quad \frac{3}{2} \leq U_0 \leq 2$

عبارة صحيحة.

- نفترض: $\frac{3}{2} \leq U_n \leq 2$

- لنبين أن: $\frac{3}{2} \leq U_{n+1} \leq 2$

لدينا: $U_{n+1} = \varphi(U_n)$ و $\varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln x$

$\varphi'(x) = \left(\frac{2}{x} + \ln x\right)' = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-2}{x^2}$

إذن $\varphi'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]0,2]$

أي φ تناقصية قطعا على $[\frac{3}{2};2]$

لدينا: $\frac{3}{2} \leq U_n \leq 2$

$\varphi(2) \leq \varphi(U_n) \leq \varphi(\frac{3}{2})$

$\varphi(\frac{3}{2}) = \frac{4}{3} + \ln\frac{3}{2} \leq 2$ و $\varphi(2) = 1 + \ln(2) \geq \frac{3}{2}$

إذن: $\frac{3}{2} \leq U_{n+1} \leq 2$

وبالتالي حسب مبدأ الترجع

$\frac{3}{2} \leq U_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ب- لنبين أن: $|\varphi'(x)| \leq \frac{2}{9} \quad x \in [\frac{3}{2},2]$

لدينا: $|\varphi'(x)| = \left|\frac{x-2}{x^2}\right| = \frac{2-x}{x^2}$

لدينا: $-2 \leq -x \leq -\frac{3}{2}$ ومنه $0 \leq 2-x \leq \frac{1}{2}$

ولدينا: $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{4}{9}$

أي $|\varphi'(x)| = \frac{2-x}{x^2} \leq \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$

وبالتالي: $x \in [\frac{3}{2},2]$

$|\varphi'(x)| \leq \frac{2}{9}$

ج - لنبين أن: $|U_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9}|U_n - x_1|$

$$Q(x) = \frac{2}{x} + \ln x$$

لدينا: $\begin{cases} x \to \frac{2}{x} \\ x \to \ln x \end{cases}$ دالتان متصلتان على $]0,+\infty[$

إذن Q متصلة على $]0,+\infty[$

و Q قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

وحيث أن: x_1 و U_n ينتميان إلى $]0,+\infty[$

فإنه حسب مبرهنة التزايدات المنتهية

$$|Q(U_n) - Q(x_1)| = |Q'(c)|\,|U_n - x_1|$$

$$\exists!\, c \in]0,+\infty[$$

و $Q(x_1) = x_1 \iff f(x_1) = 1$

و $|Q'(c)| \leq \frac{2}{9}$

إذن: $(\forall n \in \mathbb{N})\ |U_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9}|U_n - x_1|$

- لنبين أن: $|U_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n |U_0 - x_1|$

- بالترجع: من أجل $n=0$

$$|U_0 - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^0 |U_0 - x_1|$$

عبارة صحيحة.

نفترض: $|U_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n |U_0 - x_1|$

لنبين أن: $|U_{n+1} - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1} |U_0 - x_1|$

لدينا: $|U_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n |U_0 - x_1|$

إذن: $\frac{2}{9}|U_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1} |U_0 - x_1|$

ونعلم أن: $|U_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9}|U_n - x_1|$

وبالتالي $|U_{n+1} - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1} |U_0 - x_1|$

إذن حسب مبدأ الترجع

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |U_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n |U_0 - x_1|$$

$\lim_{+\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^n = 0$ (لأن: $0 < \frac{2}{9} < 1$)

و منه: $\lim_{+\infty} U_n - x_1 = 0$

أي $\lim_{+\infty} U_n = x_1$

إذن $(U_n)_n$ متقاربة و $\lim_{+\infty} U_n = x_1$

التمرين التالي:

$$f_n(x) = (\ln x)^3 + n\ln x - 1 \quad x \in]0,+\infty[$$

1) $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} (\ln x)^3 + n\ln x - 1$

بما أن $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim_{x\to 0^+} (\ln x)^3 + n\ln x - 1$

بما أن: $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ و $\lim_{x\to 0^+} (\ln x)^3 = -\infty$

إذن $\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = -\infty$

2) منحى تغير الدالة f_n:

$$f_n'(x) = \left((\ln x)^3 + n\ln x - 1\right)'$$

$$= 3(\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{n}{x} = \frac{3(\ln x)^2 + n}{x} > 0$$

لأن: $x > 0$ و $n > 0$ و $(\ln x)^2 \geq 0$

إذن f_n تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$.

3) أ- لدينا $x \to \ln x$ دالة متصلة على $]0,+\infty[$

إذن f_n متصلة على $]0,+\infty[$

و f_n تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

وبالتالي f_n تقابل من $]0,+\infty[$

نحو: $f(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$

بما أن $0 \in \mathbb{R}$

فإن: $\exists!\, a_n \in]0,+\infty[\quad f_n(a_n) = 0$

أي المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا a_n

ب - لدينا: $f_n(1) = -1 < 0$

و $f_n(e^{\frac{1}{n}}) = (\frac{1}{n})^3 > 0$

أي: $f_n(1) < 0 < f_n(e^{\frac{1}{n}})$

$f_n(1) < f_n(a_n) < f_n(e^{\frac{1}{n}})$ $\quad f_n(a_n)=0$

و f_n تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

إذن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1 < a_n < e^{\frac{1}{n}}$

$\lim_{+\infty} \frac{1}{n} = 0$ و $x \to e^x$ متصلة في 0

إذن $\lim_{+\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$

و بالتالي: $\lim_{+\infty} a_n = 1$

4) أ- لنبين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists c_n \in]1,a_n[)$

$a_n - 1 = c_n(\ln(a_n))$

نعتبر $h(x) = \ln(x)$

لدينا h متصلة على $[1,a_n]$

و قابلة للاشتقاق على $[1,a_n]$

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية

$\ln(a_n) = h'(\alpha)(a_n - 1)$

$h'(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \qquad \exists! \alpha \in]1,a_n[$

إذن: $\frac{\ln(a_n)}{a_n - 1} = \frac{1}{\alpha}$

$\Leftrightarrow \frac{a_n - 1}{\ln(a_n)} = \alpha$

$1 < \alpha < a_n$

إذن $1 < \frac{a_n - 1}{\ln(a_n)} < a_n$

- نعتبر العدد c_n بحيث

$c_n \in]1,a_n[\quad c_n = \frac{a_n - 1}{\ln(a_n)}$

$c_n \in]1,a_n[\quad a_n - 1 = c_n(\ln(a_n))$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}; \exists c_n \in]1,a_n[$

$a_n - 1 = c_n(\ln(a_n))$

ب - استنتاج أن: $\lim_{+\infty} n(a_n - 1) = 1$

لدينا: $f_n(a_n) = 0$

$\Leftrightarrow (\ln(a_n))^3 + n\ln a_n - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \ln a_n = \frac{1 - (\ln(a_n))^3}{n}$

بما أن $a_n - 1 = c_n(\ln(a_n))$

$\exists c \in]1,a_n[$ فإن: $a_n - 1 = c_n\left(\frac{1-(\ln a_n)^3}{n}\right)$

$n(a_n - 1) = c_n(1 - (\ln a_n)^3)$

$1 < c_n < a_n$

$1 - (\ln a_n)^3 < c_n(1 - (\ln a_n)^3) < a_n(1 - (\ln a_n)^3)$

$1 - (\ln a_n)^3 < n(a_n - 1) < a_n(1 - (\ln a_n)^3)$

و $x \to \ln x$ متصلة في 1 و: $\lim_{+\infty} a_n = 1$

إذن $\lim_{x \to +\infty} (\ln a_n)^3 = 0$

و منه: $\lim_{+\infty} 1 - (\ln a_n)^3 = 1$

و $\lim_{+\infty} a_n(1 - (\ln a_n)^3) = 1$

نستنتج أن: $\lim_{+\infty} n(a_n - 1) = 1$

manti 15.42

مسألة (10 نقط)

الجزء(A) : I] 1) بين أن :

$$(\forall x\in]-1,+\infty[-\{0\}) : \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t}dt = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\frac{1}{2}$$ (0.5 نقطة)

2) بين أن : $(\forall x\in \mathbb{R}^{+*})\ \ x-1-x\ln x\le 0$ (0.5 نقطة)

II] لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1} \ ; \ x\neq 1 \\ f(1)=1 \end{cases}$$

1) أ- بين أن $(\forall x\in]-1,+\infty[-\{0\}) : \frac{x}{3(x+1)}\le \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t}dt \le \frac{x}{3}$ (0.75 ن)

ب- استنتج أن f قابلة للاشتقاق في النقطة 1 و أن $f'(1)=-\frac{1}{2}$ (0.5 ن)

2) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) (0.75 نقطة)

3) أحسب المشتقة $f'(x)$ و أنجز جدول تغيرات الدالة f (0.75 نقطة)

4) أرسم المنحنى (C_f) (0.75 نقطة)

الجزء(B) : لتكن F الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} F(x)=\displaystyle\int_x^{x^2} f(t)\,dt \quad x\neq 0 \ ; \ x\neq 1 \\ F(0)=0 \quad ; \quad F(1)=0 \end{cases}$$

1) أ- بين أن $(\forall x\in \mathbb{R}^{+*}-\{1\})\ \frac{2x\ln x}{x+1}\le F(x)\le x\ln x$ (0.75 نقطة)

ب- أدرس اتصال وقابلية اشتقاق F على يمين 0 (0.5 نقطة)

ج- أدرس قابلية اشتقاق F في النقطة 1 (0.75 نقطة))

2) أ- أحسب $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ (0.5 نقطة)

ب- بين أن $(\forall x\in \left]1,+\infty\right[)\ \ln x\ \ln(x+1)\le F(x)\le 2\ln x\ \ln(x+1)$ 0.75 ن

ج- بين أن المنحنى Γ_F يقبل عند $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل(0.75 ن)

3) بين أن F قابلة للاشتقاق على $D=\left]0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ (1 نقطة)

و أن $(\forall x\in D)\ F'(x)=\frac{(3x-1)\ln x}{x^2-1}$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة F

4) أرسم المنحنى Γ_F (نأخذ $F\left(\frac{1}{3}\right)=-0,44$ و Γ_F يقبل نقطة انعطاف وحيدة في $I(1,9\ ;\ 1,2)$) (0.5 نقطة)

تمرين (3 نقط)

لكل عدد عقدي z يخالف i . نضع $f(z)=\frac{iz}{z-i}$

1) أ- بين أن $(z\in i\mathbb{R}) \Leftrightarrow (f(z)\in i\mathbb{R})$ (0.5 نقطة)

ب- حدد المجموعة : $(E_1)=\{M(z)/\ f(z)\in\mathbb{R}\}$ (0.5 نقطة)

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $f(z)=1-2z$ (0.5 نقطة)

3) نضع $z-i=re^{i\alpha}$

أ- حدد الشكل المثلثي للعدد $f(z)-i$ (0.5 نقطة)

ب- حدد و أرسم المجموعتين $\zeta=\{M(z)/\ |f(z)-i|=\sqrt{2}\}$

و $D=\left\{M(z)/\ \arg(f(z)-i)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]\right\}$ (1 نقطة)

ح : الماتي

تصحيح الفرض الأول
الأسدس II .

⇐ السنة الدراسية 2010 . 2011

تمرين (المسألة) .

⇐ جزء I .

لنبين أن $\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t}dt = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\frac{1}{2}$

لدينا

$$\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t}dt = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2-1+1}{1+t}dt$$

$$= \frac{1}{x^2}\int_0^x t-1+\frac{1}{1+t}dt$$

$$= \frac{1}{x^2}\int_0^x t-1dt+\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{1}{t+1}dt.$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[\frac{t^2}{2}-t\right]_0^x+\frac{1}{x^2}\left[\ln(t+1)\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)+\frac{1}{x^2}\ln(x+1)$$

$$= \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\frac{1}{2}.$$

⇐ لنبين أن $x-1-x\ln x \leq 0$

نضع الدالة

$h(x) = x-1-x\ln x$

$h'(x) = 1-\ln x-1 = -\ln x.$

x	0		1		$+\infty$
$h(x)$	-1	↗	0	↘	$-\infty$

حسب جدول التغيرات

$\forall x>0 \quad h(x) < h(1)$

أي $h(x) < 0$

إذن $x-1-x\ln x \leq 0$

الجزء II .

لنبين أن $\forall x\in[-1,+\infty[\setminus\{0\}$

$$\frac{x}{3(x+1)} < \int_0^x \frac{t^2}{1+t}dt \leq \frac{x}{3}$$

إذا كان $x>0$

لدينا $0 < t \leq x$

$1 < t+1 < x+1$

$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{t+1} < 1$

يعني $\frac{t^2}{x+1} < \frac{t^2}{t+1} < t^2$

$$\forall x>0 \quad \int_0^x \frac{t^2}{x+1}dt < \int_0^x \frac{t^2}{t+1}dt < \int_0^x t^2dt$$

$$\frac{1}{x+1}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x < \int_0^x \frac{t^2}{t+1}dt < \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x$$

$$\frac{x^3}{3x^2(x+1)} < \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{t+1}dt < \frac{x^3}{3}\times\frac{1}{x^2}$$

أي $\frac{x}{3(x+1)} < \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{t+1}dt < \frac{x}{3}$

إذا كان $x\in]-1,0[$

لدينا $x \leq t \leq 0$

$x+1 \leq t+1 \leq 1$

$1 \leq \frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{x+1}$

إذن $t^2 \leq \frac{t^2}{t+1} \leq \frac{t^2}{x+1}$

و $x<0 \quad \forall x\in]-1,0[$

$$\int_x^0 t^2dt \leq \int_x^0 \frac{t^2}{t+1}dt \leq \int_x^0 \frac{t^2}{x+1}dt$$

$$\left[\frac{t^3}{3}\right]_x^0 \leq \int_x^0 \frac{t^2}{t+1} \leq \frac{1}{x+1}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x$$

$$\left(-\frac{x^3}{3}\right)\times\frac{1}{x^2} \leq -\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t}dt \leq \frac{-x^3}{3(x+1)}\times\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{x}{3(x+1)} < \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t}dt \leq \frac{x}{3}$$

و عليه $\forall x\in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$

لدينا

$$\boxed{\frac{x}{x+1} < \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t}dt < \frac{x}{3}}$$

لتكن الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي.

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1} \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

ب. لنبين أن f قابلة للاشتقاق في 1 و $f'(1) = -\frac{1}{2}$

لدينا $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2}.$$

نضع $X = x-1$ تصبح

$$\lim_{X\to 0}\frac{\ln(X+1)-X}{X^2}$$

و حسب ما سبق.

$$\frac{\ln(X+1)-X}{X^2} = \frac{1}{X^2}\int_0^X \frac{t^2}{1+t}dt - \frac{1}{2}$$

أي

$$\frac{X}{3(X+1)} - \frac{1}{2} \leq \frac{\ln(X+1)-X}{X^2} \leq \frac{X}{3} - \frac{1}{2}.$$

نلاحظ أن

$$\lim_{X\to 0}\frac{X}{3(X+1)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{X\to 0}\frac{X}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

أي

$$\lim_{X\to 0}\frac{\ln(X+1)-X}{X^2} = -\frac{1}{2}$$

وبالتالي

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2}.$$

وبالتالي f قابلة للاشتقاق في 1 بحيث $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

2- الفروع اللانهائية لـ C_f.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\times\frac{x}{x-1}$$

$$= 0$$

لأن

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x-1}\times\ln x = +\infty$$

لأن $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-1} = -1$ و $\lim_{x\to 0}\ln x = -\infty$.

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x-1}\right)'$$

$$= \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{x} - \ln x}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x - x\ln x - 1}{x(x-1)^2} = \frac{h(x)}{x(x-1)^2} \leq 0$$

لأن $h(x) \leq 0$. $\forall x>0$

⇐ جدول التغيرات

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0

4- إنشاء المنحنى C_f.

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ مماسا للمنحنى عند 1.

⇐ الحصر، B.

$I=[0,+\infty[$

$$\begin{cases} F(x)=\int_{x^2}^{x} f(t)\,dt & x\neq 0,\ x\neq 1 \\ F(0)=0,\ F(1)=0 \end{cases}$$

لنبين أن $\frac{2x\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq x\ln x$

⇐ $x>1$

$x<t<x^2$

⇐ f دالة تناقصية.

$f(x^2)<f(t)<f(x)$.

$$\frac{2\ln x}{x^2-1}<\frac{\ln t}{t-1}<\frac{\ln x}{x-1}$$

$\forall (x,x^2)\in]0,+\infty[\setminus\{1\}$ $x<x^2$

$$\frac{2\ln x}{x^2-1}\int_x^{x^2}1\,dt<\int_x^{x^2}\frac{\ln t}{t-1}dt<\int_x^{x^2}1\,dt\times\frac{\ln x}{x-1}$$

$$\frac{2\ln x}{x^2-1}(x^2-x)<F(x)<\frac{\ln x}{x-1}(x^2-x)$$

$$\frac{2x\ln x}{x+1}<F(x)<x\ln x$$

⇐ $x\in]0,1[$

لدينا $x^2\leq t\leq x$

وبما أن f تناقصية.

$f(x)<f(t)<f(x^2)$

$$\frac{\ln x}{x-1}<\frac{\ln t}{t-1}<\frac{2\ln x}{x^2-1}$$

$\forall (x,x^2)\in]0,1[$ $x^2<x$

$$\frac{\ln x}{x-1}\int_{x^2}^{x}1\,dt\leq\int_{x^2}^{x}\frac{\ln t}{t-1}dt\leq\frac{2\ln x}{x^2-1}\int_{x^2}^{x}1\,dt$$

$$\frac{\ln x}{x-1}(x-x^2)\leq -F(x)\leq\frac{2\ln x}{x^2-1}(x-x^2)$$

$$\frac{2x\ln x}{x+1}\leq F(x)\leq x\ln x$$

وعليه $\forall x\in]0,+\infty[$

لدينا $\frac{2x\ln x}{x+1}\leq F(x)\leq x\ln x$

ب- اتصال وقابلية اشتقاق F في يمين 0

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\ln x}{x+1}=0$$

لأن $\lim_{x\to 0}x\ln x=0$

إذن $\lim_{x\to 0}F(x)=0=F(0)$

⇐ F متصلة على يمين 0.

و $\forall x\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$

$$\frac{2\ln x}{x+1}<\frac{F(x)}{x}\leq\ln x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\ln x}{x+1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\ln x=-\infty$$

إذن

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}=-\infty$$

⇐ F غير قابلة للاشتقاق في يمين 0

لدينا اذا كان $x \geq 1$

$$\frac{2x\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq x\ln x$$

$$\frac{2x\ln x}{(x^2-1)} \leq \frac{F(x)}{x-1} \leq \frac{x\ln x}{x-1}$$

$$\frac{2x\ln x}{x^2-1} \leq \frac{F(x)-F(1)}{x-1} \leq \frac{x\ln x}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x\ln x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2x}{x+1} \times \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

لأن $\lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x+1} = 1$ و $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x\ln x}{x-1} = 1$$

اذن (1) $\lim_{x\to 1^+} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = 1.$

اذا كان $0 < x < 1$

$$\frac{x\ln x}{x-1} < \frac{F(x)}{x-1} < \frac{2x\ln x}{x^2-1}$$

بالمثل

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x\ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x\ln x}{x^2-1} = 1$$

اذن (2) $\lim_{x\to 1^-} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = 1$

من 1 و 2 لدينا F قابلة للاشتقاق على يمين 1 ويساره و $F'_d(1) = F'_g(1) = 1$

$\Leftarrow$ F قابلة للاشتقاق في 1

$$\lim_{x\to +\infty} x\ln x = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x\ln x}{x+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{x+1} \times \ln x = +\infty$$

بحيث

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{x+1} = 2$$

ب - لنبين أن $\forall x > 1$

$$\ln(x+1)\ln x < F(x) < 2\ln(x+1)\ln x$$

لدينا

$$x \leq t \leq x^2$$

$$\ln x \leq \ln t \leq 2\ln x$$

$$\frac{\ln x}{t-1} \leq \frac{\ln t}{t-1} \leq \frac{2\ln x}{t-1}$$

$\forall (x, x^2) \in]1, +\infty[^2 \quad x < x^2$

و بالتالي

$$\ln x \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,dt \leq \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t-1} \leq 2\ln x \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,dt$$

$$\ln x\,[\ln(t-1)]_x^{x^2} \leq F(x) \leq 2\ln x\,[\ln(t-1)]_x^{x^2}$$

$$\ln x\left(\ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)\right) \leq F(x) \leq 2\ln x\left(\ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)\right)$$

$$\ln x \ln(x+1) \leq F(x) \leq 2\ln x \ln(x+1)$$

ج - الفرع الشلجمي لـ C_F

$$\frac{\ln x.\ln(x+1)}{x} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{2\ln x \ln(x+1)}{x}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x.\ln(x+1)}{x}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} \times \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{2\ln(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} \times \left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)$$

و $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = 0$

اذن

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x) \cdot \ln(x+1)}{x} = 0$$

ومن جهة ثانية

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x \ln(x+1)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2\left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{2\ln(\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right) = 0$$

اذن $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$

وعليه C_F يقبل فرعا شلجميا نحو محور الفواصل.

3. قابلية اشتقاق F .

$t \xrightarrow{f} \frac{\ln t}{t-1}$ متصلة اذن تقبل دالة اصلية G بحيث

$$F(x) = G(x^2) - G(x).$$

$x \to G(x)$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$.

$x \to x^2$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و $u(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$

$x \to G\circ u$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$

اي F قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$.

$$F'(x) = 2x f(x^2) - f(x)$$

$$= \frac{2x \times 2\ln(x)}{x^2-1} - \frac{\ln x}{x-1}$$

$$= \frac{4x\ln x - x\ln x - \ln x}{x^2-1}$$

$$= \frac{\ln x}{x^2-1}(3x-1).$$

جدول تغيرات F .

x	0		$1/3$		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$F'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$F(x)$	0	$\searrow$	$-0{,}14$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

المنحنى .

تمرين 2

$$f(z) = \frac{iz}{z-i}$$

لدينا $f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ لنبين أن

لدينا

$f(z) \in i\mathbb{R}$ تعني

$$\frac{iz}{z-i} = \frac{i\bar{z}}{\bar{z}+i}$$

$$\Leftrightarrow iz(\bar{z}+i) = i\bar{z}(z-i)$$

$$\Leftrightarrow iz\bar{z} - z = i\bar{z}z + \bar{z}$$

$$\Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow Re(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}.$$

ب- تحديد المجموعة $E_1 = \{M(z) / f(z) \in \mathbb{R}\}$

$$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{iz}{z-i} = \frac{-i\bar{z}}{\bar{z}+i}$$

تعني

$$\frac{iz}{z-i} = \frac{-i\bar{z}}{\bar{z}+i}$$

$$\Leftrightarrow iz(\bar{z}+i) = -i\bar{z}(z-i)$$

$$\Leftrightarrow iz\bar{z} - z = -i\bar{z}z - \bar{z}$$

$$\Leftrightarrow 2iz\bar{z} - (z-\bar{z}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2i|z|^2 - 2i\,Im(z) = 0$$

نضع $z = x + iy$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

اذن E_1 هي الدائرة التي مركزها $O(0, \frac{1}{2})$ و شعاعها $R = 1/2$. محرومة من $A(0,1)$.

2- حل المعادلة $f(z) = 1 - 2z$

$$f(z) = 1 - 2z$$

تعني

$$\frac{iz}{z-i} = 1 - 2z$$

$$iz = (1-2z)(z-i)$$

$$iz = z - i - 2z^2 + 2iz$$

$$0 = z + 2iz - 2z^2 - iz - i$$

وبالتالي

$$2z^2 - iz - z + i = 0$$

$$2z^2 - z(1+i) + i = 0$$

من جهة أخرى

$$\Delta = 2i - 8i = -6i = 3(-2i) = (\sqrt{3}(1-i))^2$$

و عليه

$$z_1 = \frac{1+i - \sqrt{3} + \sqrt{3}i}{4}$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$z_2 = \frac{1+i + \sqrt{3} - \sqrt{3}i}{4}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{4} + i\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right).$$

$$S = \left\{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}, i\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)\right), \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}, i\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)\right)\right\}.$$

ب- $f(z) - i = \frac{iz - iz - 1}{z-i} = \frac{-1}{z-i}$

$$= -\frac{1}{r}e^{-i\alpha}$$

$$= \frac{e^{i(\pi-\alpha)}}{r}$$

$$M(z) \in \delta \Leftrightarrow |f(z) - i| = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow |z - i| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

نضع $A(i)$

$$\Leftrightarrow AM = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

δ هي الدائرة التي مركزها A و شعاعها $\sqrt{2}$

$\Rightarrow \pi - \alpha \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

$\Rightarrow \alpha \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi].$

$\Rightarrow (\vec{u}, \vec{AM}) = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$

إذن (D) نصف المستقيم الذي معاملها الموجه $tg(\frac{3\pi}{4}) = -1$ و المحرو من $A(1)$.

تم انجازه بحث إشراف

الأستاذ: بهاني

من طرف التلميذة: مجرد

فاطمة الزهراء.

2012 - 2013.

الجزء (1) ليكن n عدد من $\mathbb{N}^*$ و نعتبر الدالة f_n المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$f_n(0)=0 \quad \text{و} \quad f_n(x)=xe^{-\frac{1}{nx}} \quad ; \quad x\neq 0$$

1) أ- بين أن f_n متصلة على يمين النقطة $x_0=0$ (0.5 ن)

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على يمين النقطة $x_0=0$ (0.5 ن)

2) أ- أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ (0.5 ن)

ب- أحسب المشتقة $f_n^{/}(x)$ و أدرس منحى تغيرات الدالة f_n ثم ضع جدول تغيراتها (1ن)

3) نضع $g(t)=e^{-t}-(1-t)$ لكل t من المجال $[0,+\infty[$

أ- أدرس تغيرات الدالة g و استنتج أن $0\leq 1-e^{-t}\leq t$ $(\forall t\in[0,+\infty[)$ (1 ن)

ب- بين أن $0\leq e^{-x}-(1-x)\leq \frac{x^2}{2}$ $(\forall x\geq 0)$ (0.5 ن)

4) أ- بين أن $0\leq f_n(x)-\left(x-\frac{1}{n}\right)\leq \frac{1}{2n^2x}$ $(\forall x>0)$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ (0.5 ن)

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) عند $+\infty$ (0.5 ن)

ج- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_n) و المقارب المائل (0.5 ن)

5) أرسم المنحنى (C_1) للدالة f_1 (0.75 ن)

6) بين أن المنحنى (C_n) هو صورة المنحنى (C_1) بالتحاكي $H\left(O,\frac{1}{n}\right)$ (0.5 ن)

الجزء (2) نضع $I_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n

1) بين أن $f_n(x)\leq x$ $(\forall x\in[0,1])$ (0.5 ن)

2) استنتج أن $I_n\leq\frac{1}{2}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ (0.5 ن)

3) بين أن $\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\leq I_n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ (0.75 ن)

الجزء (3)

1) أ- بين أن المعادلة $f_n(x)=1$ تقبل حلا وحيدا a_n (0.5 ن)

ب- بين أن $a_n>1$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ (0.5 ن)

2) تحقق أن $a_n\ln a_n=\frac{1}{n}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ (0.5 ن)

3) أ- أدرس تغيرات الدالة $h(x)=x\ln x$ (0.5 ن)

ب- بين أن المتتالية $(a_n)_n$ تناقصية واستنتج أنها متقاربة (0.75 ن)

4) نضع $a=\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

أ- بين أن $a\geq 1$ و أن $h(a)=0$ (0.75 ن)

ب- استنتج قيمة النهاية a (0.25 ن)

الجزء (4)

لتكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$F(0)=0 \quad \text{و} \quad F(x)=\int_x^{2x} f_1(t)\,dt \quad ; \quad x\neq 0$$

1) أ- بين أن $0<e^{-\frac{1}{t}}<1$ $(\forall t>0)$ (0.5 ن)

ب- بين أن F متصلة على يمين $x_0=0$ (0.5 ن)

2) بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{F(x)}{x}=0$ و أول النتيجة هندسيا (0.75 ن)

3) أ- بين أن $e^t\geq t+1$ $(\forall t\in\mathbb{R})$ (0.5 ن)

ب- بين أن $F(x)\geq -x+\frac{3}{2}x^2$ $(\forall x>0)$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ (0.75 ن)

ج- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (Γ_F) عند $+\infty$ (0.5 ن)

4) أ- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و أن :

$$F'(x)=\left(4e^{\frac{1}{2x}}-1\right)f_1(x)$$ (1 ن)

ب- أدرس تغيرات الدالة F و أنجز جدول التغيرات (0.75 ن)

5) أرسم المنحنى (Γ_F) (1 ن)

تصحيح الفرض المحروس رقم ① للأسدس الثاني

الجزء (1)

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

$f_n(0)=0$ و $f_n(x) = x\, e^{-\frac{1}{nx}}$ $x \neq 0$

① أ- لنبين أن f_n متصلة مع اليمين في $x_0=0$

$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim_{x\to 0^+} x\, e^{-\frac{1}{nx}}$

$\lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{nx} = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{nx}} = 0$

و $\lim_{x\to 0^+} x = 0$

وعليه:

$\lim_{x\to 0^+} x\, e^{-\frac{1}{nx}} = 0 = f_n(0)$

إذن f_n متصلة في 0 على اليمين.

ب- لندرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على اليمين في 0.

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$

$\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = e^{-\frac{1}{nx}}$

$\lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{nx} = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{nx}} = 0$

وعليه:

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = 0$

إذن f_n قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و $f'_{n_d}(0) = 0$

② - أ-

$\lim_{x\to +\infty} f_n(x) = \lim_{x\to +\infty} x e^{-\frac{1}{nx}}$

لدينا: $\lim_{x\to +\infty} -\frac{1}{nx} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} e^{-\frac{1}{nx}} = e^0 = 1$

(لأن $x \mapsto e^x$ متصلة في 0)

و $\lim_{x\to +\infty} x = +\infty$

وعليه:

$\lim_{x\to +\infty} f_n(x) = +\infty$

ب- لنحسب المشتقة $f'_n(x)$

ليكن $x \in]0;+\infty[$

لدينا: $f'_n(x) = e^{-\frac{1}{nx}} + x\left(\frac{1}{nx^2}\right) e^{-\frac{1}{nx}}$

ومنه:

$f'_n(x) = \left(1+\frac{1}{nx}\right) e^{-\frac{1}{nx}}$

← لدينا: $f'_n(x) > 0$ $(\forall x \in]0;+\infty[)$

وعليه: f_n تزايدية قطعا على $[0;+\infty[$

← جدول تغيرات الدالة f_n.

x	0	$+\infty$
$f_n(x)$	0 ↗	$+\infty$

③ $t \in [0;+\infty[$ $g(t) = e^{-t} - (1-t)$

أ- لندرس تغيرات الدالة g

لكل $t \in [0;+\infty[$ $g'(t) = 1 - e^{-t}$

$-t \leq 0 \Rightarrow e^{-t} \leq 1$

$\Rightarrow 1 - e^{-t} \geq 0$

$\Rightarrow g'(t) \geq 0$

ومنه: g تزايدية قطعا على $[0;+\infty[$

t	0	$+\infty$
$g(t)$	0 ↗	$+\infty$

لدينا: $(\forall t \in [0;+\infty[)$ $g(t) \geq g(0) = 0$

ومنه: $e^{-t} - 1 + t \geq 0$

أي: $1 - e^{-t} \leq t$

ولدينا: $g'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-t} \geq 0$

وعليه: $\forall t \in [0;+\infty[$ $0 \leq 1 - e^{-t} \leq t$

ب- لنبين أن: $(\forall x \geq 0)$ $0 \leq e^{-x} - (1-x) \leq \frac{x^2}{2}$

لدينا حسب السؤال السابق:

$(\forall t \geq 0)$ $0 \leq 1 - e^{-t} \leq t$

وعليه:

$0 \leq \int_0^x (1-e^{-t})\,dt \leq \int_0^x t\,dt$

أي: $0 \leq \left[t + e^{-t}\right]_0^x \leq \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x$

ومنه: $0 \leq x + e^{-x} - 1 \leq \frac{x^2}{2}$

إذن: $(\forall x \geq 0)$ $0 \leq e^{-x} - (1-x) \leq \frac{x^2}{2}$

④- أ- لنبين أن: $(\forall x>0)$

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad 0\leq f_n(x)-\left(x-\frac{1}{n}\right)\leq\frac{1}{2n^2x}$$

لدينا حسب السؤال السابق:

$$(\forall x\geq 0)\quad 0\leq e^{-x}-(1-x)\leq\frac{x^2}{2}\qquad (1)$$

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad (\forall x>0)\quad \frac{1}{nx}\in\mathbb{R}^+$$

لنعوض ب $\frac{1}{nx}$ في العلاقة (1)

نجد:

$$0\leq e^{-\frac{1}{nx}}-\left(1-\frac{1}{nx}\right)\leq\frac{1}{2n^2x^2}$$

بما أن $x>0$ فإن:

$$0\leq xe^{-\frac{1}{nx}}-\left(x-\frac{1}{n}\right)\leq\frac{1}{2n^2x}$$

ومنه:

$$(\forall x>0)\ (n\in\mathbb{N}^*)\quad 0\leq f_n(x)-\left(x-\frac{1}{n}\right)\leq\frac{1}{2n^2x}$$

ب- لندرس الفرع اللانهائي لـ $(\mathcal{C}_n)$ عند $+\infty$

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2n^2x}=0$$

ومنه:

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x)-\left(x-\frac{1}{n}\right)=0$$

إذن المستقيم $(\Delta_n): y=x-\frac{1}{n}$ مقارب مائل للمنحنى $\mathcal{C}_n$ بجوار $+\infty$

ج- لندرس الوضع النسبي لـ $\mathcal{C}_n$ والمقارب المائل.

بما أن:

$$(\forall x>0)\quad f_n(x)-\left(x-\frac{1}{n}\right)\geq 0$$

فإن: $(\mathcal{C}_n)$ يوجد فوق (Δ_n) $(\forall x\in[0;+\infty[)$

⑤- لنرسم $(\mathcal{C}_1)$ للدالة f_1.

$f_1(x)=xe^{-\frac{1}{x}}$ $\quad (\Delta_1): y=x-1$

⑥- لنبين أن المنحنى $(\mathcal{C}_n)$ هو صورة $(\mathcal{C}_1)$ بالتحاكي $H(O,\frac{1}{n})$.

نعتبر $M(x,y)$ نقطة من $(\mathcal{C}_1)$ و $M'(x',y')$ صورتها بالتحاكي $H(O,\frac{1}{n})$

لنبين أن $M'(x',y')$ تنتمي للمنحنى $(\mathcal{C}_n)$

$$\left(\begin{array}{l}M' \text{ صورة } M\\ \text{بالتحاكي}\\ H(O,\frac{1}{n})\end{array}\right)\iff \overrightarrow{OM'}=\frac{1}{n}\overrightarrow{OM}$$

$$\iff\begin{cases}x'=\frac{1}{n}x\\ y'=\frac{1}{n}y\end{cases}$$

لدينا: $M(x,y)\in(\mathcal{C}_1)$ وعليه:

$$\begin{cases}y=xe^{-\frac{1}{x}}\\ x=nx'\end{cases}\Rightarrow y=nx'e^{-\frac{1}{nx'}}$$

ومنه

$$y'=\frac{1}{n}y\Rightarrow y'=\frac{1}{n}\left(nx'e^{-\frac{1}{nx'}}\right)$$

أي

$$y'=x'e^{-\frac{1}{nx'}}$$

وعليه:

$$M'(x',y')\in(\mathcal{C}_n)$$

إذن: $(\mathcal{C}_n)$ هو صورة $(\mathcal{C}_1)$ بالتحاكي $H(O,\frac{1}{n})$

الجزء (2)

$$(n\in\mathbb{N}^*)\quad I_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$$

① - لنبين أن: $\forall x\in[0;1]\quad f_n(x)\leq x$

$$(\forall x\in[0;1])\quad -\frac{1}{nx}\leq 0\Rightarrow e^{-\frac{1}{nx}}\leq 1$$

$$\Rightarrow xe^{-\frac{1}{nx}}\leq x$$

وعليه:

$$(\forall x\in[0;1])\quad f_n(x)\leq x$$

② - لنستنتج أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad I_n\leq\frac{1}{2}$

لدينا:

$$\forall x\in[0;1]\quad f_n(x)\leq x$$

ومنه:

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx\leq\int_0^1 x\,dx$$

أي:

$$I_n\leq\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

وعليه:

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad I_n\leq\frac{1}{2}$$

③ - لنبين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \frac{1}{2}-\frac{1}{n}\leq I_n$

لدينا (س 4-أ).

$$(\forall x>0)\quad f_n(x)\geq x-\frac{1}{n}$$

ومنه:

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx\geq\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x}{n}\right]_0^1$$

إذن:

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad I_n\geq\frac{1}{2}-\frac{1}{n}$$

← لنحدد $\lim_{n\to+\infty} I_n$

لدينا من ② و ③

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n} \leq I_n \leq \frac{1}{2}$$

و

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}-\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

وعليه:

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{1}{2}$$

الجزء (3)

① - أ - لنبين أن المعادلة $f_n(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α_n.

f_n متصلة وتزايدية قطعا على $[0;+\infty[$

ومنه: f_n تقابل من $[0;+\infty[$ نحو $[0;+\infty[$

و $1\in[0;+\infty[$

إذن: $\exists!\ \alpha_n\in[0;+\infty[\ /\ f_n(\alpha_n)=1$

وعليه: المعادلة $f_n(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α_n.

ب - لنبين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \alpha_n>1$

لدينا:

$$f_n(1)=e^{-\frac{1}{n}}$$

$$-\frac{1}{n}<0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{n}}<1$$

أي: $f_n(1)<f_n(\alpha_n)$

و f_n تزايدية قطعا على $[0;+\infty[$ و $(1,\alpha_n)\in(\mathbb{R}^+)^2$

إذن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \alpha_n>1$

② - لنتحقق أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \alpha_n\ln\alpha_n=\frac{1}{n}$

$$f_n(\alpha_n)=1 \Leftrightarrow \alpha_n e^{-\frac{1}{n\alpha_n}}=1$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{n\alpha_n}}=\frac{1}{\alpha_n} \qquad (\alpha_n>1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{n\alpha_n}=\ln\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_n\ln\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)=\frac{-1}{n}$$

ومنه:

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \alpha_n\ln(\alpha_n)=\frac{1}{n}$$

③ - أ - لندرس تغيرات الدالة $h(x)=x\ln x$

h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

$$h'(x)=\ln x+1 \qquad (\forall x\in]0;+\infty[)$$

$$h'(x)\geq 0 \Rightarrow \ln x\geq -1$$

$$\Rightarrow x\geq e^{-1}=\frac{1}{e}$$

ومنه:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖ 0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

ب - لنبين أن المتتالية (α_n) تناقصية ونستنتج أنها متقاربة.

لدينا:

$$\alpha_n\ln\alpha_n=h(\alpha_n)=\frac{1}{n}$$

و

$$\alpha_{n+1}\ln(\alpha_{n+1})=h(\alpha_{n+1})=\frac{1}{n+1}$$

لدينا:

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n} \Leftrightarrow h(\alpha_{n+1})<h(\alpha_n)$$

و h تزايدية قطعا على $]1;+\infty[$

و $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \alpha_n\in]1;+\infty[$

وعليه:

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \alpha_{n+1}<\alpha_n$$

وبالتالي: (α_n) تناقصية.

← (α_n) تناقصية ومصغورة بالعدد 1 إذن (α_n) متقاربة

④ - نضع:

$$\alpha=\lim_{n\to+\infty}\alpha_n$$

أ - لدينا: $(\forall n\in\mathbb{N})\quad \alpha_n>1$

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty}\alpha_n\geq 1$$

وعليه:

$$\alpha\geq 1$$

← لنبين أن $h(\alpha)=0$

لدينا: $x\mapsto\ln(x)$ و $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=\alpha$ متصلة في α

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty}\ln(\alpha_n)=\ln(\alpha)$$

إذن:

$$\lim_{n\to+\infty}\alpha_n\ln(\alpha_n)=\alpha\ln(\alpha)$$

بما أن: $\alpha_n\ln(\alpha_n)=\frac{1}{n}$ و $\alpha\ln(\alpha)=h(\alpha)$

فإن:

$$h(\alpha)=0$$

ب - لنستنتج قيمة النهاية α.

لدينا:

$$h(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha\ln(\alpha)=0$$

$$\Leftrightarrow \ln(\alpha)=0 \qquad (\alpha\geq 1)$$

$$\Leftrightarrow \alpha=1$$

وعليه:

$$\alpha=1$$

الجزء (4)

$x\in[0;+\infty[$

$$F(0)=0 \quad \text{و} \quad F(x)=\int_x^{2x} f_1(t)\,dt\ ;\ x\neq 0$$

① - أ - لنبين أن: $(\forall t>0)\quad 0<e^{-\frac{1}{t}}<1$

لدينا

$$(\forall t>0)\quad -\frac{1}{t}<0 \Rightarrow 0<e^{-1/t}<1$$

ب - لنبين أن: F متصلة على يمين $x_0=0$

① ب - لدينا : $(\forall t>0)$

$$0<e^{-\frac{1}{t}}<1 \Rightarrow 0<te^{-\frac{1}{t}}<t \quad (t>0)$$

$$\Rightarrow 0<f_2(t)<t$$

$$\Rightarrow 0<\int_x^{2x} f_2(t)<\left[\frac{t^2}{2}\right]_x^{2x}$$

ومنه : $0<F(x)<2x^2-\frac{x^2}{2}$

لدينا : $\lim_{x\to 0^+} 2x^2-\frac{x^2}{2}=0=F(0)$

ومنه : F متصلة على اليمين في $x_0=0$

② - لنبين أن : $\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)}{x}=0$

لدينا حسب السؤال السابق : $(\forall x>0)$

$$0<\frac{F(x)}{x}<2x-\frac{x}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3x}{2}=0$$

وعليه : $\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)}{x}=0$

← إذن F قابلة للاشتقاق في 0 .

وعليه : (Γ_F) يقبل نصف مماس عند $x_0=0$

معادلته : $(P): y=0$. (محور الأفاصيل)

③ - أ - لنبين أن : $(\forall t\in\mathbb{R})\quad e^t\geq t+1$

نضع : $(t\in\mathbb{R})\quad g(t)=e^t-t-1$

$g'(t)=e^t-1$

$g'(t)\geq 0 \Rightarrow e^t\geq 1$

$\Rightarrow t\geq 0$

ومنه :

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(t)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

لدينا : $(\forall t\in\mathbb{R})\quad g(t)\geq g(0)=0$

ومنه :

$$(\forall t\in\mathbb{R})\quad e^t\geq t+1$$

ب - لنبين أن :

$$(\forall x>0)\quad F(x)\geq -x+\frac{3}{2}x^2$$

لدينا : حسب السؤال السابق :

$$e^{-\frac{1}{t}}\geq -\frac{1}{t}+1 \quad (t>0)$$

ومنه ،

$$te^{-\frac{1}{t}}\geq t-1$$

ومنه :

$$\int_x^{2x} f_2(t)\,dt\geq\int_x^{2x}(t-1)\,dt$$

وعليه :

$$F(x)\geq\left[\frac{t^2}{2}-t\right]_x^{2x}$$

ومنه : $(\forall x>0)\quad F(x)\geq -x+\frac{3}{2}x^2$

← لنحسب $\lim_{x\to+\infty}F(x)$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2}x^2-x=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{3}{2}x-1\right)$

$$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2}x-1=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}x=+\infty\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$$

ج - لندرس الفرع اللانهائي للمنحنى (Γ_F) عند $+\infty$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$

و $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}\Leftarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2}x-1=+\infty$

وعليه : (Γ_F) يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الأراتيب

④ أ - لنبين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ وأن $F'(x)=(4e^{\frac{1}{2x}}-1)f_2(x)$

لدينا : $t\mapsto f_2(t)$ متصلة على $]0;+\infty[$

وعليه f_2 تقبل دالة أصلية G على $]0;+\infty[$

أي : $F(x)=G(2x)-G(x)$

لدينا : $x\overset{u}{\mapsto}2x$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

و $x\mapsto G(x)$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

و $u(]0;+\infty[)\subset]0;+\infty[$

وعليه :

$$\overset{F}{]0;+\infty[\ \text{قابلة للاشتقاق على}}\ x\mapsto G(2x)-G(x)$$

$$(\forall x\in]0;+\infty[)$$

$$F'(x)=2G'(2x)-G'(x)$$
$$=2f_2(2x)-f_2(x)$$
$$=2(2xe^{-\frac{1}{2x}})-f_2(x)$$
$$=f_2(x)(4e^{\frac{1}{2x}}-1)$$

ومنه :

$$(\forall x\in]0;+\infty[)\quad F'(x)=(4e^{\frac{1}{2x}}-1)f_2(x)$$

ب - لندرس تغيرات الدالة F ونستخرج جدول تغيراتها .

لدينا : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+})\quad F'(x)=(4e^{\frac{1}{2x}}-1)f_2(x)$

لدينا : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+})\quad f_2(x)>0$

و

$$\frac{1}{2x}>0\Rightarrow e^{\frac{1}{2x}}>1$$
$$\Rightarrow 4e^{\frac{1}{2x}}>4$$
$$\Rightarrow 4e^{\frac{1}{2x}}-1>3>0$$

④ - ب - ومنه : $F'(x) > 0$ $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})$

إذن : F تزايدية قطعا على $[0 ; +\infty[$

جدول تغيرات F.

x	0	$+\infty$
$F(x)$	0 ↗	$+\infty$

⑤ - رسم المنحنى (Γ_F)

من انجاز التلميذة : أمينة سامي

تحت اشراف الأستاذ : المانتي بوشعيب

ليكن n عددا طبيعيا من $\mathbb{N}^*$. نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة بما يلي $f_n(x)=(1-x)^n e^{2x}$ و ليكن (C_n) منحنى الدالة f_n في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$ بحيث : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$

(I) 1) بين أن $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)=0$ و أحسب النهاية $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$

2) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) عند $+\infty$

3) أحسب $f_n'(x)$ و أنجز جدول تغيرات كل من الدالتين f_1 و f_2

4) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) ; (C_2) و أرسمهما

(II) نعتبر الدالة F المعرفة على $]-\infty,0]$ بما يلي : $F(x)=\int_x^0 \frac{f_1(t)}{1+e^{2t}}dt$

1) أ- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $]-\infty,0]$

و أن $F'(x)=\frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$

ب- أدرس منحى تغيرات الدالة F

2) أ- بين أن $(\forall x<0)\ \frac{1}{2}\int_x^0 f_1(t)dt \le F(x) \le \frac{1}{1+e^{2x}}\int_x^0 f_1(t)dt$

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $\int_x^0 f_1(t)dt=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{3}{4}e^{2x}$

ج- نقبل أن $F(x)$ تقبل نهاية l عند $-\infty$ بين أن $\frac{3}{8}\le l\le\frac{3}{4}$

(III) نضع $U_n=\int_0^1 f_n(x)dx$ لكل عددا طبيعيا n من $\mathbb{N}^*$

1) أ- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ U_n>0$

ب- أدرس إشارة $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ على المجال $[0,1]$

ج- استنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ تناقصية

www. . on. ma

2) أ- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ U_{n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}U_n$

ب- استنتج ب cm^2 مساحة الحيز (Δ) المحصور بين المنحنيين (C_1) ; (C_2) و المستقيمين $x=0$; $x=1$

3) بين أن $(\forall n\ge 2)\ \frac{1}{n+1}\le U_n\le\frac{1}{n-1}$ و حدد $\lim_{n\to+\infty} U_n$; $\lim_{n\to+\infty} nU_n$

4) ليكن a عددا حقيقيا موجبا و بحيث $a\ne U_1$.

نعتبر المتتالية $(V_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$V_1=a$ و $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ V_{n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}V_n$ ثم نضع $d_n=|V_n-U_n|$

أ- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ d_n=\frac{n!}{2^{n-1}}d_1$ و بين أن $\lim_{x\to+\infty} d_n=+\infty$

ب- بين أن المتتالية $(V_n)_n$ متباعدة

(IV) نضع $W_n=\frac{2^n}{n!}U_n$ لكل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$

1) أ- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \frac{2^{n-1}}{n!}\le 1$

ب- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ W_n\le\frac{2e^2}{n+1}$ و استنتج أن $\lim_{n\to+\infty} W_n=0$

2) أ- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ W_{n+1}=-\frac{2^n}{(n+1)!}+W_n$

ب- أحسب مشتقة الدالة $x\to\left(\frac{3}{2}-x\right)e^{2x}$ و بين أن $W_1=\frac{1}{2}\left(e^2-3\right)$

ج- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ W_n=\frac{1}{2}\left(e^2-\sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}\right)$

د- استنتج النهاية $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}$

www. .ift.fr

تحت إشراف الأستاذ: بوشعيب المانتي

حل الفرض المحروس رقم ① للأسدس الثاني

من إنجاز التلميذة: جهاد المرلوزي

I-

1- * لنبين أن $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)=0$

نضع $x=tn$

إذن $x\to-\infty \Rightarrow t\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x)=\lim_{x\to-\infty}(1-x)^n e^{2x}$$
$$=\lim_{t\to-\infty}(1-tn)^n e^{2tn}$$
$$=\lim_{t\to-\infty}\left((1-tn)e^{2t}\right)^n$$
$$=\lim_{t\to-\infty}\left(e^{2t}-\frac{n}{2}(2te^{2t})\right)^n$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f_n(x)=0}$$

[لأن $\lim_{t\to-\infty} e^{2t}=\lim_{t\to-\infty} 2te^{2t}=0$]

* لنحسب النهاية $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=\lim_{x\to+\infty}(1-x)^n e^{2x}$

إذا كان n زوجي:

لدينا $\lim_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$

وعليه $\lim_{x\to+\infty}(1-x)^n=+\infty$

ونعلم $\lim_{x\to+\infty} e^{2x}=+\infty$

إذن

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty}$$

إذا كان n فردي:

لدينا $\lim_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$

وعليه $\lim_{x\to+\infty}(1-x)^n=-\infty$

نعلم أن: $\lim_{x\to+\infty} e^{2x}=0$

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=-\infty$$

2) الفرع النهائي للمنحنى (C_n) عند $+\infty$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=\infty$

لنحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x}$

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-x)^n e^{2x}}{x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}(1-x)^n\times 2\times\frac{e^{2x}}{2x}$$

إذا كان n زوجي:

لدينا $\lim_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$

إذن $\lim_{x\to+\infty}(1-x)^n=+\infty$

ونعلم $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{2x}=+\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x}=+\infty}$$

إذا كان n فردي:

$\lim_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}(1-x)^n=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{2x}=+\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x}=-\infty}$$

$\forall n\in\mathbb{N}^*\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x}=\infty$

$\Leftarrow$ (C_n) يقبل فرع شلجمي باتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

3- حساب $f_n'(x)$

$$f_n'(x)=\left((1-x)^n e^{2x}\right)'$$

$$f_n'(x) = -n(1-x)^{n-1}e^{2x} + 2(1-x)^n e^{2x}$$

$$f_n'(x) = (1-x)^{n-1}e^{2x}\left(-n+2(1-x)\right)$$

$$\boxed{f_n'(x) = (1-x)^{n-1}e^{2x}(2-2x-n)}$$

بالنسبة للدالة f_1

$$f_1'(x) = (1-x)^0(2-2x-1)e^{2x}$$
$$= (1-2x)e^{2x}$$

جدول التغيرات.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f_1'(x)$			$+$		0		$-$		
$f_1(x)$	0	$\nearrow$			$\frac{e}{2}$	$\searrow$			$-\infty$

بالنسبة للدالة f_2

$$f_2'(x) = (1-x)e^{2x}(2-2x-2)$$
$$= -2x(1-x)e^{2x}$$

$$\boxed{f_2'(x) = 2x(x-1)e^{2x}}$$

جدول التغيرات.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f_2'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4- لندرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2).

$$f_2(x) - f_1(x) = (1-x)^2e^{2x} - (1-x)e^{2x}$$

$$f_2(x) - f_1(x) = (1-x)e^{2x}(1-x-1)$$
$$= x(x-1)e^{2x}$$

$$f_2(x) - f_1(x) = x(x-1)e^{2x}$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f_2(x)-f_1(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي لـ (C_1) و (C_2)		C_2 فوق C_1	A	C_2 تحت C_1	B	C_2 فوق C_1	

بحيث: $A(0,1)$ $B(1,0)$

إنشاء المنحنيين C_1 و C_2.

II- 1- أ- لنبين أن F قابلة للاشتقاق على $]-\infty,0[$ لدينا:

$t \mapsto f_1(t)$ متصلة على $]-\infty,0[$

$t \mapsto \frac{1}{1+e^{2t}}$ متصلة على $]-\infty,0[$

إذن $t \mapsto \frac{f_1(t)}{1+e^{2t}}$ متصلة على $]-\infty,0[$

إذن $\frac{f_1(t)}{1+e^{2t}}$ تقبل دالة أصلية G

حيث $F(x) = G(0) - G(x)$

ولدينا $f_1(t)$ قابلة للإشتقاق على $]-\infty,0[$

و $\frac{1}{1+e^{2t}}$ قابلة للإشتقاق على $]-\infty,0[$

إذن $\frac{f_1(t)}{1+e^{2t}}$ قابلة للإشتقاق على $]-\infty,0[$

وعليه فإن $G(x)$ قابلة للإشتقاق على $]-\infty,0[$

إذن $F(x)$ قابلة للإشتقاق على $]-\infty,0[$

* لنبين أن $F'(x) = \frac{(1-x)e^{2x}}{1+e^{2x}}$

لدينا $F'(x) = -G'(x)$

إذن $= -\frac{f_1(x)}{1+e^{2x}}$

وعليه $= -\frac{(1-x)e^{2x}}{1+e^{2x}}$

$$\boxed{F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}}$$

ب- لندرس منحى تغيرات الدالة F

لدينا $x \in]-\infty, 0[$

$x<0 \Rightarrow x-1<-1<0$

$x<0 \Rightarrow e^{2x}>1>0$

$\Rightarrow e^{2x}+1>0$

إذن $F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}} < 0$

$\Leftarrow$ F تناقصية قطعا على $]-\infty,0[$

2- أ- لنبين أن $\frac{1}{2}\int_x^0 f_1(t)dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}}\int_x^0 f_1(t)dt$

لدينا $x<t<0 \Rightarrow 2x<2t<0$

$x<t<0 \Rightarrow e^{2x} \leq e^{2t} \leq e^0 = 1$

$\Rightarrow 1+e^{2x} \leq 1+e^{2t} \leq 2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+e^{2t}} < \frac{1}{1+e^{2x}}$

ولدينا $x<t<0 \Rightarrow f(t)>0$

حسب جدول التغيرات.

إذن $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+e^{2t}} \leq \frac{1}{1+e^{2x}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}f_1(t) \leq \frac{f_1(t)}{1+e^{2t}} < \frac{f_1(t)}{1+e^{2x}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_x^0 f_1(t)dt \leq \int_x^0 \frac{f_1(t)dt}{1+e^{2t}} < \int_x^0 \boxed{\frac{f_1(t)dt}{1+e^{2x}}}$

$$\boxed{\frac{1}{2}\int_x^0 f_1(t)dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}}\int_x^0 f_1(t)dt}$$

ب-

لدينا $\int_x^0 f_1(t)dt = \int_x^0 (1-t)e^{2t}dt$

$= \left[(1-t)\times\frac{1}{2}e^{2t}\right]_x^0 - \int_x^0 -\frac{1}{2}e^{2t}$

$= \left[\frac{(1-t)}{2}e^{2t}\right]_x^0 + \int_x^0 \frac{1}{2}e^{2t}dt$

$= \left[\frac{(1-t)}{2}e^{2t}\right]_x^0 - \left[\frac{1}{4}e^{2t}\right]_x^0$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$

$$\boxed{\int_x^0 f_1(t)dt = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x}}$$

2- نضع $\lim_{x\to-\infty} F(x) = l$

لدينا $\lim_{x\to-\infty} \int_x^0 f_1(t)\,dt$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{4} - \frac{2}{4}xe^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x}$$

$$= \frac{3}{4}$$

[لأن $\lim_{x\to-\infty} 2xe^{2x} = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$]

ونعلم أن

$$\frac{1}{2}\int_x^0 f_1(t)\,dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1-e^{2x}}\int_x^0 f_1(t)\,dt$$

حسب خاصيات النهايات الترتيب

نجد

$$\boxed{\frac{3}{8} \leq l \leq \frac{3}{4}}$$

III- 1-أ- لنبين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*\ U_n > 0$

لدينا $U_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

$0 < x < 1 \Rightarrow -1 < -x < 0$

$\Rightarrow 1-x > 0$ و $e^{2x} > 0$

$\Rightarrow (1-x)^n e^{2x} > 0$

$\Rightarrow \int_0^1 (1-x)^n e^{2x}\,dx > 0$

$\Rightarrow \int_0^1 f_n(x)\,dx > 0$

$\Rightarrow \boxed{U_n > 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}}$

ب- لندرس إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ على $[0,1]$

$f_{n+1}(x) - f_n(x) = (1-x)^{n+1}e^{2x} - (1-x)^n e^{2x}$

$= (1-x)^n e^{2x}(1-x-1)$

$= -x(1-x)^n e^{2x}$

لدينا $0 \leq x \leq 1$

يعني أن $-x \leq 0$ و $e^{2x} > 0$ و $(1-x)^n \geq 0$

إذن $\boxed{\forall x\in[0,1]\ f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0}$

ج- لنستنتج أن $(U_n)_n$ تناقصية

لدينا $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$

$f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

$\int_0^1 f_{n+1}(x) \leq \int_0^1 f_n(x)$

$$\boxed{U_{n+1} \leq U_n}$$

$\Leftarrow$ إذن U_n متتالية تناقصية.

2-أ- لنبين أن $U_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}U_n$

نضع $u : x \to (1-x)^{n+1}$

$v : x \to \frac{1}{2}e^{2x}$

u و v متصلتين على $[0,1]$

u و v قابلتين للإشتقاق على $[0,1]$

u' و v' متصلتين على $[0,1]$

لدينا $U_{n+1} = \int_0^1 (1-x)^{n+1}e^{2x}\,dx$

$= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 v(x)u'(x)$

$= -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}\int_0^1 (1-x)^n e^{2x}$

$$\boxed{U_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}U_n}$$

ب- مساحة الحيز المحصور بين (C_1) و (C_2) والمستقيمين $x=0$ و $x=1$

$S = \int_0^1 |f_2(x) - f_1(x)|\,dx\ ua$

$= \int_0^1 f_1(x) - f_2(x)\,dx\ ua$

$= \int_0^1 f_1(x)\,dx - \int_0^1 f_2(x)\,dx\ ua$

$= (U_1 - U_2)\ ua$

إذن $S = u_1 - u_2$

وحسب السؤال (2-أ) نعلم أن

$u_2 = -\frac{1}{2} + u_1 \Rightarrow -u_2 + u_1 = \frac{1}{2}$

$S = \frac{1}{2}\,u\,a = \frac{1}{2}\,u\,a$ (الوحدة)

وعليه $\boxed{S = 2\,cm^2}$

3- لنبين أن $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$

لدينا حسب الأسئلة 1-أ، 1-ج و 2-أ

$0 < u_{n+1} < u_n \Rightarrow 0 \leq -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}u_n < u_n$

$\frac{1}{2} \leq \frac{n+1}{2}u_n$ و $-\frac{1}{2} \leq \left(1 - \frac{n+1}{2}\right)u_n$

إذن $\frac{1}{n+1} \leq u_n$ و $u_n \leq \frac{1}{n-1}$

$$\boxed{\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

ب- تحديد $\lim_{n\to+\infty} u_n$ و $\lim_{n\to+\infty} n u_n$

بما أن $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$

ولدينا $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1} = 0$

إذن $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$

ولدينا $\frac{n}{n+1} \leq n u_n \leq \frac{n}{n-1}$

بما أن $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n-1}$

$= 1$

فإن $\boxed{\lim_{n\to+\infty} n u_n = 1}$

4- من أجل $n = 1$ $d_1 = \frac{1!}{2^0} d_1$

علاقة صحيحة

نفترض أن $d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1$

لنبين أن $d_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^n} d_1$

لدينا $d_{n+1} = |v_{n+1} - u_{n+1}|$

$= \left|-\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}v_n + \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2}u_n\right|$

$= \left|\frac{n+1}{2}v_n - \frac{n+1}{2}u_n\right|$

$= \frac{n+1}{2}|v_n - u_n|$

إذن $= \frac{n+1}{2} d_n$

ولدينا $d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1$

$\frac{n+1}{2} d_n = \frac{(n+1)\,n!}{2 \times 2^{n-1}} d_1$

$d_{n+1} = \frac{(n+1)}{2^n} d_1$

وعليه فإن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \; d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1}$

لنبين أن $\lim_{n\to+\infty} d_n = +\infty$

نعلم أن $d_{n+1} = \frac{n+1}{2} d_n$

ولدينا $\frac{n+1}{2} > 2$

إذن $\forall n \geq 3 \; d_{n+1} \geq 2 d_n$

أي $\frac{d_{n+1}}{d_n} \geq 2$

ومنه فإن $\forall n \geq 3$

$\frac{d_n}{d_{n-1}} \times \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}} \times \dots \frac{d_4}{d_3} \geq 2^{n-3}$

إذن $\frac{d_n}{d_3} \geq 2^{n-3}$

أي $\forall n \geq 3 \quad d_n \geq d_3 \times 2^{n-3}$

بما أن $2 > 1$

$\lim_{n \to +\infty} 2^{n-3} d_3 = +\infty$

وحسب مصاديق التقارب

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} d_n = +\infty}$$

ب- نفترض أن $(V_n)_{n \geq 1}$ متتالية متقاربة نعلم أن $(U_n)_{n \geq 1}$ متقاربة ولدينا $d_n = |V_n - U_n|$

إذن d_n متقاربة وهذا تناقض

إذن $(V_n)_{n \geq 1}$ متتالية متباعدة.

IV - 1 - أ - من أجل $n = 1$

$\frac{2^0}{1!} \leq 1$

علاقة صحيحة

نفترض أن $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$

لنبين أن $\frac{2^n}{n+1} \leq 1$

$n \geq 1 \Rightarrow n+1 \geq 2$

$\Rightarrow \frac{2}{n+1} \leq 1$

ولدينا $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$

إذن $\frac{2 \times 2^{n-1}}{n!(n+1)} \leq 1$

وعليه $\frac{2^n}{(n+1)!}$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$

1- ب- لنبين أن $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$W_n \leq \frac{2e^2}{n+1}$

لدينا $W_n = \frac{2^n}{n!} U_n$

و $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1 \Rightarrow W_n \leq 2U_n$

$U_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{2x} dx$ مع

ولدينا $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow e^{2x} < e^2$

ونعلم أن $(1-x)^n \geq 0$

إذن $(1-x)^n e^{2x} \leq (1-x)^n e^2$

$U_n \leq e^2 \int_0^1 (1-x)^n dx$

$U_n \leq e^2 \left[\frac{-1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1$

إذن

$U_n \leq \frac{e^2}{n+1}$

$$\Rightarrow \boxed{W_n \leq \frac{2e^2}{n+1}}$$

لنستنتج أن $\lim_{n \to +\infty} W_n = 0$

لدينا $0 < W_n \leq \frac{2e^2}{n+1}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{2e^2}{n+1} = 0$

إذن حسب خاصيات النهايات

والترتيب

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} W_n = 0}$$

2- لنبين أن

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad W_{n+1} = \frac{2^n}{(n+1)!} + W_n$

لدينا

$W_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} U_{n+1}$

$$W_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\left(-\frac{1}{2} - \frac{n+1}{2} U_n\right)$$

$$W_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + \frac{2^{n+1}(n+1)}{(n+1)n!\times 2} U_n$$

$$W_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + \frac{2^n}{n!} U_n$$

$$= -\frac{2^n}{(n+1)!} + W_n$$

إذن $\boxed{W_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + W_n}$

ب- لنحسب مشتقة $\left(\frac{3}{2} - x\right)e^{2x}$

$$\left(\left(\frac{3}{2}-x\right)e^{2x}\right)' = \left(\frac{3}{2}-x\right)' e^{2x} - \left(\frac{3}{2}-x\right)(e^{2x})'$$

$$= -e^{2x} - 2\left(\frac{3}{2}-x\right)e^{2x}$$

$$= -e^{2x} + (3-2x)e^{2x}$$

$$= 2e^{2x}(1-x) = 2f_1(x)$$

إذن $\left(\frac{3}{2}-x\right)e^{2x}$ هي دالة أصلية لـ $2f_1(x)$

نضع $V(x) = \left(\frac{3}{2}-x\right)e^{2x}$

لدينا $W_1 = \frac{2}{1} W_1$

$$= 2\int_0^1 f_1(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 2f_1(x)\,dx = [V(x)]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(e^2-3)$$

$$\boxed{W_1 = \frac{1}{2}(e^2-3)}$$

ج- لنبين أن $W_n = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}\right)$

من أجل $n \geq 1$ لدينا

$$W_1 = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=1}\frac{2^k}{k!}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(e^2-3)$$ علاقة صحيحة

نفترض أن

$$W_n = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}\right)$$

لنبين $W_{n+1} = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n+1}\frac{2^k}{k!}\right)$

لدينا $W_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + W_n$

حسب افتراض الترجع

$$W_n = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}\right)$$

إذن $W_{n+1} = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}\right) - \frac{2^n}{(n+1)!}$

$$W_{n+1} = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!} - \frac{2^n}{(n+1)!}\right)$$

$$W_{n+1} = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n+1}\frac{2^k}{k!}\right)$$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}^+$

$$W_n = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n+1}\frac{2^k}{k!}\right)$$

د- لنستنتج نهاية $\sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}$

لدينا $\lim_{n\to+\infty} W_n = 0$

أي أن $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}\right) = 0$

إذن: $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!} = e$

انتهى.

الثانية علوم رياضية	فرض رقم 1	2014-2013

التمرين (1) ليكن n عددا من $\mathbb{N}$

1) بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ \sin^{2n+1}x=\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k(-1)^k\sin x\cos^{2k}x$

2) أحسب $I_k=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sin t\cos^{2k}t\ dt\quad(\forall k\in\mathbb{N})$

3) استنتج التكامل : $I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sin^{2n+1}t\ dt$

www..ift.fr

التمرين (2) ليكن n عدد طبيعي غير منعدم نضع $U_n=\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$ و $U_0=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$

1) أحسب U_0

2) بين أن $U_{n+1}+U_n=\frac{1}{2n+1}\quad(\forall n\in\mathbb{N})$ و استنتج قيمة كل من U_1 و U_2

3) بين أن $0<U_n<\frac{1}{2n+1}\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ ثم حدد $\lim_{n\to+\infty}U_n$

4) نعتبر المتتالية $(V_n)_n$ المعرفة بما يلي : $V_n=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$

أ- بين أن $\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k x^{2k}=\frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}\quad(\forall n\in\mathbb{N})$

ب- استنتج أن المتتالية $(V_n)_n$ متقاربة و أن $\lim_{n\to+\infty}V_n=\frac{\pi}{4}$

التمرين (3) (I) نعتبر الدالة العددية f بحيث : $f(x)=\frac{e^x}{1+x^2}$

1) أ- أحسب النهايتين $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

www.bestcours.net

2) أحسب $f'(x)$ و أدرس منحى تغيرات الدالة f

3) أرسم المنحنى (C_f)

(II) لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

1) أ- بين أن $f(t)\geq\frac{e^t}{1+x^2}\quad(\forall t\in[0,x])\ (\forall x>0)$

ب- استنتج أن $F(x)\geq f(x)-\frac{1}{1+x^2}\quad(\forall x>0)$ ثم أحسب $\lim_{x\to+\infty}F(x)$

ج- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (Γ_F) عند $+\infty$

2) بين أن F تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

3) أ- بين أن $F(x)\geq\arctan x\quad(\forall x<0)$

ب- نقبل أن F تقبل نهاية l عند $-\infty$. بين أن $-\frac{\pi}{2}\leq l\leq 0$

www..ift.fr

تصحيح الفرض المحروس رقم 1
الدورة II

التمرين II: ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$.

① تبيان أن:

$(\forall x\in\mathbb{R})$: $\sin x^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \sin x \cos^{2k} x$

لدينا:

$$\sin^{2n+1} x = \sin x\,(\sin^2)^n$$
$$= \sin x\,(1-\cos^2 x)^n$$
$$= \sin x \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-\cos^2 x)^k$$
$$= \sin x \sum_{0}^{n} C_n^k (-1)^k \cdot \cos^{2k} x$$

وبالتالي:

$(\forall x\in\mathbb{R})$ $\boxed{\sin^{2n+1} x = \sum_{0}^{n} C_n^k (-1)^k \sin x \cos^{2k} x}$

② حساب التكامل I_k لكل k من $\mathbb{N}$:

لدينا:

$$I_k = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin t \cos^{2k} t\, dt$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} -\cos' t \cdot \cos^{2k} t\, dt$$
$$= \left[-\frac{\cos^{2k+1} t}{2k+1}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x}$$
$$= \frac{-\cos^{2k+1} x}{2k+1}$$

وعليه فإن:

$(\forall k\in\mathbb{N})$; $\boxed{I_k = \frac{-\cos^{2k+1} x}{2k+1}}$

③ استنتاج التكامل المقترح:

لدينا: $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin^{2n+1} t\, dt$

وحسب السؤال السابق ③ فإن:

$(\forall t\in\mathbb{R})$; $\sin^{2n+1} t = \sum_{0}^{n} C_n^k (-1)^k \sin x \cos^{2k} x$

وبالتالي:

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin^{2n+1} t\, dt = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin t \cos^{2k} t\, dt$$

وحسب السؤال ② نجد أن:

$$I = \sum_{0}^{n} C_n^k (-1)^k \cdot \frac{-\cos^{2k+1} x}{2k+1}$$

إذن:

$$\boxed{I = -\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k (-1)^k}{2k+1} \cdot \cos^{2k+1} x}$$

التمرين II:

ليكن n من $\mathbb{N}^*$. ونضع:

$$\begin{cases} u = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx \\ u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\, dx \end{cases}$$

① حساب u:

لدينا:

$$u = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$$
$$= \int_0^1 (\operatorname{Arctg} x)'\, dx$$
$$= [\operatorname{Arctg} x]_0^1$$

$$\boxed{u = \frac{\pi}{4}}$$

② تبيان أن:

$(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{2n+1}$

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$.

لدينا:

$$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\, dx + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\, dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x^{2n+2} + x^{2n}}{1+x^2}\, dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x^{2n}(1+x^2)}{(1+x^2)}\, dx$$
$$= \int_0^1 x^{2n}\, dx$$
$$= \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1$$

وعليه فإن:

$(\forall n\in\mathbb{N})$; $\boxed{u_{n+1} + u_n = \frac{1}{2n+1}}$

قيمة u_2 :

حسب النتيجة السابقة : $u_2 + u_0 = \frac{1}{2\times 0+1}$

أي أن : $u_2 = \frac{1}{1} - u_0$

إذن : $\boxed{u_2 = 1 - \frac{\pi}{4}}$

و $u_2 + u_4 = \frac{1}{2\times 1+1}$

بمعنى أن : $u_4 = \frac{1}{3} - u_2$

$= \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}$

وبالتالي : $\boxed{u_4 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}}$

③ نبين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$: $0 < u_n < \frac{1}{2n+1}$

$(\forall x\in]0,1])$ $1+x>1$

و $x^{2n} > 0$

$\Leftarrow$ $\frac{x^{2n}}{1+x} > 0$

أي : $\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx > 0$

وعليه $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ ① $u_n > 0$

ومنه نستنتج أن :

$u_{n+1} > 0$

أي : $u_n + u_{n+1} > u_n$

وعليه : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; ② $u_n < \frac{1}{2n+1}$

من العلاقتين ① و ② يكون لدينا :

$(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $\boxed{0 < u_n < \frac{1}{2n+1}}$

وبما أن : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$

فإن : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

4) لتكن $(v_n)_n$ المتتالية بحيث :

$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

أ- نبين أن :

$(\forall n\in\mathbb{N})$: $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}$

لدينا :

$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^{2\times 2} + \dots + (-1)^n . x^{2n+1}$

$= \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1-(-x^2)}$

$\boxed{\sum_{0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \frac{1+(-1)^n . x^{2n+2}}{1+x^2}}$; $n\in\mathbb{N}$

ب- تقارب المتتالية $(v_n)_n$ ونهايتها :

لدينا :

$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}$

ومنه : $\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^1 (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$

$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = u_0 + (-1)^n . u_{n+1}$

مع العلم أن : $\int_0^1 x^{2k} dx = \left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2k+1}$

وعليه : $v_n = u_0 + (-1)^n u_{n+1}$

$= \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_{n+1}$

وبما أن : $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2n+3}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

فإن : $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$

وعليه فإن $(v_n)_n$ متقاربة و :

$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{\pi}{4}$

التمرين III :

(I) لتكن f الدالة بحيث :

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$$

1) أ- حساب النهايات المطلوبة :

لدينا $\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \frac{e^x}{1+x^2}$

$$= \lim_{+\infty} \frac{\frac{e^x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+1}$$

$$= +\infty$$

$\left[\lim_{+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \quad \text{لأن}\right]$

ولدينا

$$\lim_{-\infty} \frac{e^x}{1+x^2} = 0$$

$\left[\begin{array}{ll} \lim_{-\infty} e^x = 0 & \text{لأن} \\ \lim_{-\infty} 1+x^2 = +\infty & \text{و} \end{array}\right]$

ب - الفرع اللانهائي لـ C بجوار $+\infty$:

لدينا $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$

ولدينا $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{e^x}{(x^2+1)x}$

يعني $= \lim_{+\infty} \frac{e^x}{x^3+x}$

إذن $= \lim_{+\infty} \frac{e^x/x^3}{1+\frac{1}{x^2}}$

ومنه $= +\infty$

$\left[\lim_{+\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty \quad \text{لأن}\right]$

إذن C يقبل محور الأراتيب كاتجاه مقارب بجوار $+\infty$.

2 - حساب $f'(x)$ ودراسة تغيرات الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

و $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f'(x) = \frac{(1+x^2)e^x - 2xe^x}{(1+x^2)^2}$

$$= \frac{e^x + x^2e^x - 2xe^x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x^2-2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{(x-1)^2 \cdot e^x}{(1+x^2)^2} \geq 0$$

إذن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

3 منحنى الدالة f :

(II) نعتبر الدالة F للمتغير الحقيقي x بحيث :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

1) أ- نبين أن : $(\forall x > 0)(\forall t \in [0,x])$; $f(t) \geq \frac{e^t}{1+x^2}$

$(\forall t \in [0,x])$; $1+t^2 \leq 1+x^2$

أي أن $\frac{1}{1+t^2} \geq \frac{1}{1+x^2}$

ومنه $\frac{e^t}{1+t^2} \geq \frac{e^t}{1+x^2}$

وعليه $\left(\begin{array}{l}\forall t \in [0,x] \\ \forall x > 0\end{array}\right)$; $\boxed{f(t) \geq \frac{e^t}{1+x^2}}$

ب - نستنتج أن :

$(\forall x > 0)$: $F(x) \geq f(x) - \frac{1}{1+x^2}$

حسب الجزء (أ) من السؤال (1) لدينا

$\left(\begin{array}{l}\forall x > 0 \\ \forall t \in [0,x]\end{array}\right)$: $f(t) \geq \frac{e^t}{1+x^2}$

ومنه : $\int_0^x f(t)\,dt \geq \int_0^x \frac{e^t}{1+x^2}\,dt$ $(x>0)$

يعني أن

$$F(x) \geq \frac{1}{1+x^2}\cdot[e^x]_0^x$$

$$F(x) \geq \frac{e^x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

وعليه

$$\left\{ F(x) \geq f(x) - \frac{1}{1+x^2} \right\} \quad (\forall x>0)$$

وبما أن

$$\begin{cases} \lim_{+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0 \end{cases}$$

و

فإن

$$\boxed{\lim_{+\infty} F(x) = +\infty}$$

2 - الفرع اللانهائي للمنحنى (Γ_F) عند $+\infty$:

لدينا

$$\forall x>0 : \quad F(x) \geq f(x) - \frac{1}{1+x^2}$$

ومنه

$$\frac{F(x)}{x} \geq \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x+x^3}$$

وبما أن

$$\begin{cases} \lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \\ \lim_{+\infty} \frac{1}{x^3+x} = 0 \end{cases}$$

و

فإن

$$\lim_{+\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$$

وهذا يعني أن (Γ_F) له فرع شلجمي باتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

3) رتابة الدالة F:

لدينا $f(t)$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$، إذن فهي تقبل دالة أصلية Φ معرفة على $\mathbb{R}$.

$$\Leftarrow \quad F(x) = \Phi(x) - \Phi(0)$$

وبما أن $\Phi(x)$ دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \quad F'(x) = \Phi'(x) = f(x) > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

ومنه F تزايدية تماما على $\mathbb{R}$.

أ) نثبت أن $F(x) \geq \operatorname{Arctg} x$ $(\forall x<0)$

نعتبر من أجل ذلك الدالة φ المعرفة كما يلي:

$$(\forall x \in]-\infty,0[) : \quad \varphi(x) = F(x) - \operatorname{Arctg} x$$

لدينا φ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

و

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) : \quad \varphi'(x) = F'(x) - \operatorname{Arctg}'(x)$$

$$= f(x) - \frac{1}{1+x^2}$$

يعني

$$(\forall x<0) \quad \varphi'(x) = \frac{e^x-1}{1+x^2}$$

وبما أن: $x<0$ أي $e^x<1$

فإن $\varphi'(x)<0$. وهذا يعني أن φ تناقصية قطعا على $]-\infty,0[$.

ومنه

$$(\forall x<0) \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$$

$$F(x) - \operatorname{Arctg} x \geq 0$$

$$(\forall x<0) \quad \boxed{F(x) \geq \operatorname{Arctg} x}$$

ب - نقبل أن F لها نهاية ℓ عند $-\infty$: نثبت أن $-\frac{\pi}{2} \leq \ell < 0$

لدينا

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : \quad f(x) > 0$$

$$\Leftarrow \quad \int_0^x f(t)\,dt \leq 0 \quad ; (x<0)$$

أي

$$\boxed{F(x) \leq 0}$$

إذن

$$(\forall x<0) ; \quad \operatorname{Arctg} x \leq F(x) < 0$$

وعليه

$$\lim_{-\infty} \operatorname{Arctg} x \leq \lim_{-\infty} F(x) \leq 0$$

أي أن

$$\lim_{-\infty} \operatorname{Arctg} x \leq \ell \leq 0$$

وبما أن

$$\lim_{-\infty} \operatorname{Arctg} x = -\frac{\pi}{2}$$

[لأن $x \to -\infty$]

فإن

$$\boxed{-\frac{\pi}{2} \leq \ell < 0}$$

وهذا هو المطلوب.

من اقتراح التلميذ حسني الإدريسي

الثانية علوم رياضية	فرض 1 دورة 2	2015-14

التمرين الأول

الجزء (1) ليكن n عدد طبيعي غير منعدم .

نعتبر الدالة العددية g_n المعرفة على $\mathbb{R}^{+*}$ بما يلي : $g_n(x) = n\ln x - \frac{1}{x}$

1) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g_n(x)$

2) اعط جدول تغيرات الدالة g_n

أ- بين أن المعادلة $g_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n و استنتج إشارة $g_n(x)$

ب- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ 1<\alpha_n$ و استنتج أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \alpha_n < e^{\frac{1}{n}}$

ج- استنتج أن $(\alpha_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها و بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\alpha_n-1)=1$

الجزء (2) لكل عدد طبيعي غير منعدم n ،

نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}^+-\{1\}$ بما يلي : $f_n(x)=\frac{e^{nx}}{\ln x}$; $x>0$ و $f_n(0)=0$

1) أحسب النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f_n(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f_n(x)$

2) بين أن الدالة f_n متصلة على يمين النقطة $a=0$

3) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على يمين النقطة $a=0$

أ- بين أن $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*}-\{1\})\ f_n'(x)=\frac{e^{nx}}{(\ln x)^2}g_n(x)$

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f_n

4) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) عند $+\infty$

5) أرسم المنحنى (C_1) (نعطي $\alpha_1\simeq 1{,}75$ و $f_1(\alpha_1)\simeq 10{,}2$)

التمرين الثاني :

لكل عدد طبيعي n

نعتبر التكاملات التالية : $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\ dt$ و $b_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n} t\ dt$

1) أحسب a_0 ; b_O

2) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ a_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}a_n$

3) أ- بين أن $\left(\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)\ t\le\frac{\pi}{2}\sin t$

ب- استنتج أن $(\forall n\in\mathbb{N})\ 0<b_n\le\frac{\pi^2}{4}(a_{2n}-a_{2n+2})$

ج- بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_{2n}}=0$

4) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن :

$$(\forall n\in\mathbb{N})\ a_{2n+2}=(2n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\ \cos^{2n+1} t\ dt$$

ب- استنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ \frac{a_{2n+2}}{n+1}=(2n+1)b_n-(2n+2)b_{n+1}$

ج- استنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ 2\left(\frac{b_n}{a_{2n}}-\frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}\right)=\frac{1}{(n+1)^2}$

5) أ- بين أن المتتالية $U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k^2}$ متقاربة و أن نهايتها هي $\frac{\pi^2}{6}$

ب- استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

تصحيح الفرض المحروس رقم 1

الدورة الثانية

تمرين 01 : $g_n(x) = n.\ln(x) - \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} g_n(x) = \lim_{+\infty} n\ln(x) - \frac{1}{x}$$

$$\lim_{+\infty} g_n(x) = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{0^+} g_n(x) = \lim_{0^+} n\ln(x) - \frac{1}{x}$$

$$\lim_{0^+} g_n(x) = \boxed{-\infty}$$

② $g_n'(x) = \frac{n}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$

x	0		$+\infty$
$g_n(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

* بين أن $\exists! \alpha_n \in \mathbb{R}^{**} / g_n(\alpha_n) = 0$

- الدالة g_n متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}^{+*}$ ، ومنه $g_n(x)$ تقابل من $\mathbb{R}^{+*}$ نحو $\mathbb{R}$ و $0 \in \mathbb{R}$

إذن $\boxed{\exists! \alpha_n \in \mathbb{R}^{+*} / g_n(\alpha_n) = 0}$

- على المجال $]0, \alpha_n[$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < x < \alpha_n \\ g_n \text{ تزايدية} \end{array}\right\} \Rightarrow g_n(x) < g_n(\alpha_n)$$

$$\Rightarrow g_n(x) < 0$$

- على المجال $]\alpha_n, +\infty[$

$$\left.\begin{array}{l} x > \alpha_n \\ g_n \text{ تزايدية} \end{array}\right\} \Rightarrow g_n(x) > g_n(\alpha_n)$$

$$\Rightarrow g_n(x) > 0$$

x		α_n	
$g_n(x)$	$-$	0	$+$

③ لدينا $g_n(\alpha_n) = 0$ و $g_n(1) < 0$

$$g_n(1) < g_n(\alpha_n)$$

و g_n تزايدية : $\boxed{1 < \alpha_n}$

* $g_n(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha_n = \frac{1}{n.\alpha_n}$

$\alpha_n > 1 \Rightarrow \alpha_n.n > n$

ومنه $\frac{1}{\alpha_n.n} < \frac{1}{n}$

إذن $\ln \alpha_n < \frac{1}{n}$ ومنه $\alpha_n < e^{\frac{1}{n}}$

* لدينا $1 < \alpha_n < e^{\frac{1}{n}}$

و $\lim_{+\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$

وبالتالي

$$\lim_{+\infty} \alpha_n = \boxed{1}$$

* يبين أن $\lim_{+\infty} n(\alpha_n - 1) = 1$

$n = \frac{1}{\alpha_n \ln \alpha_n} \iff g_n(\alpha_n) = 0$

$\lim_{+\infty} n(\alpha_n - 1) = \lim_{+\infty} \frac{1}{\alpha_n} \cdot \frac{\alpha_n - 1}{\ln \alpha_n}$ ومنه

$\lim_{+\infty} \alpha_n = 1 \Longrightarrow \lim_{+\infty} \frac{\ln \alpha_n}{\alpha_n - 1} = 1$

و $\lim_{+\infty} \frac{1}{\alpha_n} = 1$

إذن $\lim_{+\infty} n(\alpha_n - 1) = \boxed{1}$

II

$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{e^{nx}}{\ln x} \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

1) نهايات f_n

$\lim_{x \to 1} f_n(x) = \lim_{x \to 1} \frac{e^{nx}}{\ln(x)}$

لدينا $\lim_{x \to 1} e^{nx} = e$

و $\lim_{x \to 1} \ln(x) = 0$

$x > 1 \Longrightarrow \ln(x) > 0$

$\Longrightarrow \lim_{x \to 1^+} f_n(x) = +\infty$

$x < 1 \Longrightarrow \ln(x) < 0$

$\lim_{x \to 1^-} f_n(x) = -\infty$

$\lim_{+\infty} \frac{e^{nx}}{\ln(x)} = \lim_{+\infty} \frac{e^{nx}}{nx} \cdot \frac{x}{\ln(x)}$

$\lim_{+\infty} \frac{e^{nx}}{nx} = +\infty$

$\lim_{+\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$

$\lim_{+\infty} f_n(x) = \boxed{+\infty}$ ومنه

2) لدينا $\lim_{0^+} f_n(x) = \lim_{0^+} \frac{e^{nx}}{\ln(x)}$

$\lim_{0^+} \frac{e^{nx}}{\ln x} = 0 \Leftarrow \begin{cases} \lim_{0^+} e^{nx} = e^0 = 1 \\ \lim_{0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$

$\Leftarrow \lim_{0^+} f_n(x) = f_n(0)$

f_n متصلة على يمين 0 .

ب) $\lim_{0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{0^+} \frac{e^{nx}}{x \ln x}$

$\lim_{0^+} \frac{e^{nx}}{x \ln x} = -\infty \Leftarrow \begin{cases} \lim_{0^+} e^{nx} = 1 \\ \lim_{0^+} x \ln x = 0^- \end{cases}$

f_n غير قابلة للاشتقاق على يمين و C_n يقبل على يمين 0 نصف مماس عمودي .

3) $f_n'(x) = \frac{n \cdot e^{nx} \ln(x) - \frac{e^{nx}}{x}}{(\ln(x))^2}$

$f_n'(x) = \frac{\cancel{x} \cdot e^{nx}\left(n \ln(x) - \frac{1}{x}\right)}{\cancel{x} (\ln(x))^2}$

$f_n'(x) = \frac{e^{nx}}{(\ln(x))^2} \cdot g_n(x)$

تمرين 02 ،

(1)

$$a_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,dt = [t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$b_0 = \int_0^{\pi/2} t^2\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}$$

(2)

$$a_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \cos^{n+1} t\,dt$$

نضع :

$$\begin{cases} u = \cos^{n+1} t \\ v' = \cos t \end{cases} \Leftarrow \quad \begin{matrix} u' = -(n+1)\cos^n t \sin t \\ v = \sin t \end{matrix}$$

$$a_{n+2} = \left[\sin t \cos^{n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos^n t \cdot \sin^2 t\,dt$$

$$= (1\times 0 - 1\times 0) + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n t\,(1-\cos^2 t)\,dt$$

$$a_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t - (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n+2} t\,dt$$

$$(n+2)\,a_{n+2} = (n+1)\,a_n$$

$$\boxed{a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\,a_n}$$

(3)

ب) استنتج $0 \leq b_n \leq \frac{\pi^2}{4}(a_{2n} - a_{2n+2})$

لدينا $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\sin t$

$0 \leq t^2 \leq \frac{\pi^2}{4}\sin^2 t$

$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}] ; \cos^{2n} t \geq 0$ و

$$f_n'(x) = \frac{e^{nx}}{(\ln(x))^2} \cdot g_n(x)$$

لدينا $\ln(x)^2 > 0$ و $e^{nx} > 0$

إشارة $f_n'(x)$ هي إشارة $g_n(x)$

x	0		1		α_n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f_n(\alpha_n)$	↗	$+\infty$

(4

$$\lim_{+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{e^{nx}}{x \cdot \ln(x)}$$

$$= \lim_{+\infty} n^2 \cdot \frac{e^{nx}}{(n \cdot x)^2} \times \frac{x}{\ln x}$$

$$\lim_{+\infty} \frac{e^{nx}}{(nx)^2} = +\infty \text{ و } \lim_{+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$$

$$\Leftarrow \quad \lim_{+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = +\infty$$

C_n يقبل فرع شلجميا في اتجاه محور الأراتيب

$$0 \leq t^2\cos^{2n}t \leq \frac{\pi^2}{4}\cos^{2n}t \cdot \sin^2 t$$

$$0 \leq t^2\cos^{2n}t \leq \frac{\pi^2}{4}\left(\cos^{2n}t - \cos^{2n+2}t\right)$$

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n}t\,dt \leq \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\pi/2}\left(\cos^{2n}t - \cos^{2n+2}t\right)dt$$

إذن

$$\boxed{0 \leq b_n \leq \frac{\pi^2}{4}\left(a_{2n} - a_{2n+2}\right)}$$

$a_{2n} > 0$

$$0 \leq \frac{b_n}{a_{2n}} \leq \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\right)$$

$$a_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}a_{2n}$$

$$0 \leq \frac{b_n}{a_{2n}} \leq \frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{2n+2}$$

بما أن

$$\lim_{+\infty}\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{2n+2} = 0$$

إذن

$$\boxed{\lim_{+\infty}\frac{b_n}{a_{2n}} = 0}$$

4) $a_{2n+2} = (2n+2)\int_0^{\pi/2} t\sin t\cos^{2n+1}t\,dt$

لدينا

$$a_{2n+2} = \int_0^{\pi/2}\cos^{2n+2}(t)\,dt$$

$$\Leftarrow \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \cos^{2n+2}t \end{cases}$$

$$u(t) = t$$

$$v'(t) = -(2n+2)\sin t\cdot\cos^{2n+1}t$$

$$a_{2n+2} = \left[t\cdot\cos^{2n+2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}(2n+2)t\sin(t)\cos^{2n+1}$$

$$= (2n+2)\int_0^{\pi/2} t\cdot\sin(t)\cdot\cos^{2n+1}t\,dt$$

ب) $a_{2n+2} = 2\int_0^{\pi/2} t\cdot\sin t\cdot\cos^{2n+1}t\,dt$

نضع $J_n = \int_0^{\pi/2} t\cdot\sin t\cdot\cos^{2n+1}(t)\,dt$

$$\Leftarrow \begin{cases} u' = t \\ v = \sin t\cdot\cos^{2n+1}t \end{cases}$$

$$u = \frac{1}{2}t^2$$

$$v'(t) = \cos^{2n+2}t - (2n+1)\cos^{2n}t\cdot\sin^2 t$$

$$v'(t) = (2n+2)\cos^{2n+2} - (2n+1)\cos^{2n}(t)$$

$$J_n = \left[\frac{1}{2}t^2\sin(t)\cos^{2n+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left((2n+2)t^2\cos^{2n+2}t - (2n+1)t^2\cos^{2n}t\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(2n+1)t^2\cdot\cos^{2n}t\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(2n+2)^2\cos^{2n+2}t\,dt$$

$$J_n = \frac{1}{2}(2n+1)b_n - \frac{1}{2}(2n+2)b_{n+1}$$

و منه

$$\frac{a_{2n+2}}{n+1} = (2n+1)b_n - (2n+2)b_{n+1}$$

استنتاج :

$$\frac{a_{2n+2}}{n+1} = (2n+1)b_n - (2n+2)b_{n+1}$$

$$\frac{1}{n+1} = (2n+1)\frac{b_n}{a_{2n+2}} - (2n+2)\frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}$$

$$a_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}a_n \quad \text{و}$$

$$\frac{1}{n+1} = (2n+1)\frac{b_n}{\frac{2n+1}{2n+2}a_n} - (2n+2)\frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}$$

$$\frac{1}{n+1} = (2n+2)\left(\frac{b_n}{a_{2n}} - \frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}\right)$$

و عليه $\frac{1}{(n+1)^2} = 2\left(\frac{b_n}{a_{2n}} - \frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}\right)$

$$U_n = \sum_1^n \frac{1}{k^2} \quad *$$

لدينا $\frac{1}{k^2} = 2\left(\frac{b_{k-1}}{a_{2(k-1)}} - \frac{b_k}{a_{2k}}\right)$

$$\sum_1^n \frac{1}{k^2} = 2\sum_1^n \left(\frac{b_{k-1}}{a_{2(k-1)}} - \frac{b_k}{a_{2k}}\right)$$

$$= 2\left(\frac{b_0}{a_0} - \frac{b_n}{a_{2n}}\right)$$

لدينا $\lim_{+\infty} \frac{b_n}{a_{2n}} = 0$

$$\frac{b_0}{a_0} = \frac{\frac{\pi^3}{24}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{12}$$

و منه $\lim_{+\infty} U_n = \boxed{\frac{\pi^2}{6}}$

$$V_n = \sum_0^n \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$U_{2n+1} = \sum_1^{2n+1} \frac{1}{k^2}$$

$$= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}\right)$$

$$= \sum_0^n \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_1^n \frac{1}{(2k)^2}$$

$$U_{2n+1} = V_n + \frac{1}{4} U_n$$

$$V_n = U_{2n+1} - \frac{1}{4} U_n$$

$$\Rightarrow \lim_{+\infty} V_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \boxed{\frac{\pi^2}{8}}$$

من إنجاز: عمارة محمد يزيد

3) نضع $\varphi(t) = t - \frac{\pi}{2}\sin t$

و $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

لدينا $\varphi'(t) = 1 - \frac{\pi}{2}\cos t$

و $\varphi''(t) = \frac{\pi}{2}\sin t > 0$ $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\Leftarrow$

t	0		α		$\pi/2$
φ' متصلة	$1-\frac{\pi}{2}<0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

$\Leftarrow$ $\exists! \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ $\varphi'(\alpha) = 0$

و منه

t	0		α		$\pi/2$
$\varphi'(t)$		$-$	0	$+$	
φ	0	$\searrow$	$\varphi(\alpha)$	$\nearrow$	0

و عليه، $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\varphi(t) \leq 0$

و بالتالي $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $t \leq \frac{\pi}{2}\sin t$

التمرين الأول

ليكن m عددا عقدي غير منعدم . نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$(E) \quad m^2Z^2+m^3Z+1-im^2=0$$

1) أ- حل المعادلة (E) من أجل $m=-1$

ب- حدد قيم m التي يكون من أجلها $u=1+i$ حلا للمعادلة (E) ثم حدد الحل الآخر في كل حالة

2) أ- تحقق أن مميز المعادلة (E) يكتب $\Delta=m^2\left(m^2+2i\right)^2$

ب- حدد Z_1 , Z_2 حلي المعادلة (E)

3) المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر في (P) النقط A , B , M التي ألحاقها على التوالي هي :

$a=-m-\dfrac{i}{m}$, $b=\dfrac{i}{m}$, m و نضع $Z=\dfrac{m-a}{m-b}$

أ- بين أن $\left(\overline{Z}=Z\right) \Leftrightarrow \left(\arg(m)\equiv-\dfrac{\pi}{4}\ [\pi] \text{ أو } \arg(m)\equiv\dfrac{\pi}{4}\ [\pi]\right)$

ب- استنتج (Γ) مجموعة النقط $M(m)$ بحيث يكون A , B , M نقط مستقيمية

4) ليكن R الدوران الذي مركزه B و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$. نضع $A'=R(A)$ ،

$M'=R(M)$ و $B'=R^{-1}(M)$

أ- حدد a' لحق النقطة A' و بين أن لحق B' هو العدد $b'=-im+\dfrac{i-1}{m}$

ب- حدد m' لحق النقطة M' و بين أن B منتصف القطعة $[B'M']$

ج- ليكن I منتصف القطعة $[AM]$ و Z_I لحقها .

أحسب $\dfrac{b'-a'}{b-Z_I}$ و استنتج أن $(A'B')\perp(BI)$ و أن $A'B'=2BI$

التمرين الثاني

ليكن a ; b عددين من $\mathbb{Z}^*$ أوليين فيما بينهما . نضع $N=a^4+b^4$

1) بين أن $n^4\equiv0\ [16]$ أو $n^4\equiv1\ [16]$ لكل عدد n من $\mathbb{Z}$

2) استنتج أن $N\equiv1\ [16]$ أو $N\equiv2\ [16]$

3) ليكن p عددا طبيعيا أوليا أكبر أو يساوي 3 و قاسما للعدد N

أ- بين أن $p\wedge a=1$ و $p\wedge b=1$

ب- بين أن : $(\exists c\in\mathbb{Z})\ ac\equiv-1\ [p]$ و استنتج أن $(\exists x\in\mathbb{Z})\ x^4\equiv-1\ [p]$

ج- ليكن r باقي القسمة الأقليدية للعدد p على 8 .

(i) بين أن $x^{r-1}\equiv1\ [p]$ $\quad (ii)$ بين أن $r=1$

التمرين الثالث

ليكن n عددا من $\mathbb{N}^*$ و نعتبر الدالة f_n المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$f_n(x)=\dfrac{1}{x}-(\ln x)^{2n+1}$ و (C_n) هو المنحنى الممثل للدالة f_n في $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

(I) 1) أ- بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x(\ln x)^3=0$ و أحسب النهاية $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f_1(x)$

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$

2) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^3}{x}=0$ و أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_1) عند $+\infty$

3) احسب المشتقة $f_1'(x)$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f_1

4) بين أن المعادلة $f_1(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β_1 و أن $\beta_1\in]2,e[$

5) أرسم المنحى (C_1) (نأخذ $\beta_1\simeq2,2$)

(II) 1) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f_n(x)$

2) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل في المجال $[1,e]$ حلا وحيدا نرمز له بالرمز β_n

3) أ- أدرس على المجال $[1,e]$ إشارة الفرق $f_{n+1}(x)-f_n(x)$

ب- بين أن المتتالية $(\beta_n)_{n\geq1}$ تزايدية

4) أ- بين أن $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\quad \dfrac{-1}{2n}\leq\ln(\ln\beta_n)$

ب- استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n=e$

تصحيح الفرض المحروس رقم ②

الأعداد II

التمرين I :

$(E): m^2 Z^2 + m^3 Z + 1 - i m^2 = 0$

① - أ- من أجل $m = -1$

$(E): z^2 - z + 1 - i = 0$

$\Delta = 1 - 4(1-i) = -3 + 4i$

$\Delta = (2i+1)^2$

ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E)

$z_1 = \frac{1-(2i+1)}{2} = -i$

$z_2 = \frac{1+(2i+1)}{2} = 1+i$

ومنه:

$S = \{-i, 1+i\}$

ب- لنحدد قيم m التي يكون من أجلها $u = 1+i$ حلا للمعادلة (E)

$(u = 1+i$ حل المعادلة $(E)) \Leftrightarrow (E'): (1+i)m^3 + i m^2 + 1 = 0$

لدينا: $m = -1$ حل للمعادلة (E')

ومنه:

$(E') \Leftrightarrow (m+1)\left((1+i)m^2 - m + 1\right) = 0$

لنحل المعادلة:

$(1+i)m^2 - m + 1 = 0$

$\Delta = -3 - 4i = (2i-1)^2$

ومنه:

$m = \frac{1-(2i-1)}{2(1+i)} = -i$

$m = \frac{1+(2i-1)}{2(1+i)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$

وعليه قيم m التي من أجلها $u = 1+i$ حل للمعادلة (E) هي:

$m \in \left\{-1, -i, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\right\}$

في حالة $m = -1$ (u' هو حل المعادلة (E))

$u = 1+i$ و $u' = -i$

في حالة $m = -i$

$(E) \Leftrightarrow -z^2 + iz + 1 + i = 0$

$u_2 = -i - u_1 = -1$

ومنه:

$u = 1+i$ و $u' = -1$

في حالة $m = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$

$(E) \Leftrightarrow \frac{1}{2} i z^2 + \frac{1}{4}(1+i) z + \frac{3}{2} = 0$

$\Delta' = \frac{i}{4} + \frac{1}{4} - 1 - i = -\frac{3}{4}(i+1)$

وعليه:

$u = 1+i$ و $u' = -\frac{3}{4}(i+1)$

② - أ- لنتحقق أن مميز المعادلة (E) يكتب مع الشكل: $\Delta = m^2(m^2+2i)^2$

$\Delta = m^6 - 4(1 - i m^2) m^2$

$\Delta = m^2(m^4 - 4 + 4 i m^2)$

ومنه:

$\Delta = m^2 (m^2 + 2i)^2$

ب- ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E)

$z_1 = \frac{-m^3 - m(m^2+2i)}{2m^2} = -m - \frac{i}{m}$

$z_2 = \frac{-m^3 + m(m^2+2i)}{2m^2} = \frac{i}{m}$

③ - أ-

$Z = \frac{m-a}{m-b} = \frac{m + m + \frac{i}{m}}{m - \frac{i}{m}} = \frac{2m^2 + i}{m^2 - i}$

$= \frac{2(m^2 - i) + 3i}{m^2 - i} = 2 + \frac{3i}{m^2 - i}$

$Z = \bar{Z} \Leftrightarrow 2 + \frac{3i}{m^2 - i} = 2 - \frac{3i}{\bar{m}^2 + i}$

$\Leftrightarrow \bar{m}^2 = -m^2$

$\Leftrightarrow 2\,Re(m^2) = 0$

ومنه: $m^2 \in i\mathbb{R}$

إذن: $\arg(m^2) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ أو $\arg(m^2) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$2\arg(m) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ أو $2\arg(m) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

وعليه:

$\arg(m) \equiv \frac{\pi}{4}[\pi]$ أو $\arg(m) \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi]$

ب-

$(A, B, M$ نقط متمايزة$) \Leftrightarrow \frac{m-a}{m-b} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow Z = \bar{Z}$

$\Leftrightarrow \arg(m) \equiv \frac{\pi}{4}[\pi]$ أو $\arg(m) \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi]$

$\Leftrightarrow Re(m) = Im(m)$ أو $Re(m) = -Im(m)$

نضع $m = x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$

ومنه: مجموعة النقط $M(m)$ التي تكون أمثلتها A و B و M نقط مستقيمية هي اتحاد المستقيمين:

$(\Delta_1): y=x$

$(\Delta_2): y=-x$

4) أ.

لدينا R دوران مركزه $B(\frac{i}{m})$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$A'=R(A) \Leftrightarrow a'=e^{i\frac{\pi}{2}}(a-\frac{i}{m})+\frac{i}{m}$

$\Leftrightarrow a'=ai+\frac{1}{m}+\frac{i}{m}$

$\Leftrightarrow a'=-im+\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\frac{i}{m}$

$\Leftrightarrow \boxed{a'=-im+\frac{i}{m}+\frac{2}{m}}$

$B'=R^{-1}(M) \Leftrightarrow R(B')=M$

$\Leftrightarrow e^{i\frac{\pi}{2}}(b'-\frac{i}{m})+\frac{i}{m}=m$

$\Leftrightarrow b'-\frac{i}{m}=-im-\frac{1}{m}$

$\Leftrightarrow \boxed{b'=-im+\frac{i-1}{m}}$

ب.

$M'=R(M) \Leftrightarrow m'-\frac{i}{m}=e^{i\frac{\pi}{2}}(m-\frac{i}{m})$

$\Leftrightarrow m'=mi+\frac{i+1}{m}$

لدينا:

$\frac{b'+m'}{2}=\frac{-mi+\frac{i-1}{m}+mi+\frac{i+1}{m}}{2}$

$=\frac{2i}{2m}=\frac{i}{m}$

$=b$

وعليه: $B(b)$ هي منتصف القطعة $[B'M']$

ج. ليكن I منتصف القطعة $[AM]$ لحقها Z_I

$Z_I=\frac{m+a}{2}=\frac{-i}{2m}$

$\frac{b'-a'}{b-z_I}=\frac{-im+\frac{i-1}{m}+im-\frac{i}{m}-\frac{2}{m}}{\frac{i}{m}+\frac{i}{2m}}$

$=\frac{-3}{m}\times\frac{2m}{3i}$

$=2i$

$(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{A'B'}})\equiv \arg(\frac{b'-a'}{b-z_I})\ [2\pi]$

$\equiv \arg(2i)\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$(IB)\perp(A'B')$

ولدينا:

$\left|\frac{b'-a'}{b-z_I}\right|=|2i|=2$

ومنه:

$|b'-a'|=2|b-z_I|$

أي:

$\boxed{A'B'=2BI}$

التمرين II:

1) أ. إذا كان n زوجي:

$(\exists k\in\mathbb{Z})/n=2k \Rightarrow n^4=16k^4$

إذن:

$n^4\equiv 0\ [16]$ (1)

إذا كان n فردي

$(\exists k'\in\mathbb{Z})/n=2k'+1 \Rightarrow n^4=(2k+1)^2(2k+1)^2$

$\Rightarrow n^4=(4k^2+1+4k)^2$

$\Rightarrow n^4=16k^4+8k^2(1+4k)+(1+4k)^2$

$\Rightarrow n^4=16k^4+8k^2+32k^3+1+16k^2+8k$

$\Rightarrow n^4=16(k^4+k^2+2k^3)+8k(k+1)+1$

لدينا:

$\begin{cases}16(k^4+k^2+2k^3)\equiv 0\ [16]\\ 8k(k+1)\equiv 0\ [16]\end{cases}$ (جداء عددين متتاليين هو عدد زوجي $k(k+1)=2q\ (\exists q\in\mathbb{Z})$)

إذن:

$n^4\equiv 1\ [16]$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن:

$n^4\equiv 0\ [16]$ أو $n^4\equiv 1\ [16]$

2)

الحالة (1): $a\wedge b=1$ ، $N=a^4+b^4$

$\begin{cases}a^4\equiv 0\ [16]\\ b^4\equiv 1\ [16]\end{cases}$ أو $\begin{cases}a^4\equiv 1\ [16]\\ b^4\equiv 0\ [16]\end{cases}$

وعليه:

$a^4+b^4\equiv 1\ [16]$

أي:

$N\equiv 1\ [16]$

الحالة (2)

$\begin{cases}a^4\equiv 1\ [16]\\ b^4\equiv 1\ [16]\end{cases}$

وعليه:

$a^4+b^4\equiv 2\ [16]$

أي:

$N\equiv 2\ [16]$

نستنتج أن:

$N\equiv 1\ [16]$ أو $N\equiv 2\ [16]$

③ أ- نضع : $D = p \wedge a$

$$\begin{cases} D/p \\ D/a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D/N \\ D/a^4 \end{cases}$$ (لأن p/N)

$$\Rightarrow \begin{cases} D/a^4+b^4 \\ D/a^4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D/b^4 \\ D/a^4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D/a^4 \wedge b^4$$

و $a^4 \wedge b^4 = 1$

ومنه: $D/1$

إذن $D = 1$

ومنه: $\boxed{p \wedge a = 1}$

نضع $d = p \wedge b$

$$\begin{cases} d/p \\ d/b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/N \\ d/a^4 \end{cases}$$ (لأن p/N)

$$\Rightarrow \begin{cases} d/a^4+b^4 \\ d/b^4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d/a^4 \wedge b^4$$ و $a^4 \wedge b^4 = 1$

$$\Rightarrow d/1$$

أي $d = 1$

ومنه: $\boxed{p \wedge b = 1}$

ب- لدينا: $p \wedge a = 1$ حسب خاصية Bezout

$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 / \alpha a + \beta p = 1$

أي: $(-\alpha)a - \beta p = -1$

نضع: $-\alpha = c$

ومنه: $c a \equiv -1 [p]$ $(\exists c \in \mathbb{Z})$

لدينا: $p/N \Rightarrow N \equiv 0 [p]$

$\Rightarrow a^4 \equiv b^4 [p]$

ولدينا: $ac \equiv -1 [p] \Rightarrow (ac)^4 \equiv 1 [p]$

و: $(ac)^4 \equiv -(bc)^4 [p]$

ومنه: $(bc)^4 \equiv 1 [p]$

ومنه: $(bc)^4 \equiv -1 [p]$

نضع: $bc = x$ ومنه:

$x^4 \equiv -1 [p]$ $(\exists x \in \mathbb{Z})$

ج- ليكن p عدد أولي ومنه: حسب مبرهنة فرما: $x^p \equiv x [p] \Rightarrow x(x^{p-1}-1) \equiv 0 [p]$

نفترض أن $x \equiv 0 [p]$

$x \equiv 0 [p] \Rightarrow x^4 \equiv 0 [p]$

ولدينا: $x^4 \equiv -1 [p]$ غير صحيح

لأن p لا يقسم x.

ومنه:

$$\boxed{x^{p-1} \equiv 1 [p]}$$

$\exists! (q, r) \in \mathbb{Z}^2 / p = 8q + r$

$x^4 \equiv -1 [p] \Rightarrow x^8 \equiv 1 [p]$

$\Rightarrow x^{8q+r-1} \equiv x^{r-1} [p]$

$\Rightarrow x^{p-1} \equiv x^{r-1} [p]$

وبالتالي:

$$\boxed{x^{r-1} \equiv 1 [p]}$$

ينبغي أن $r = 1$

$0 \leq r < 8$ (باقي القسمة الاقليدية للعدد p على 8)

$r = 0 \Leftarrow$ $p = 8q$ و p أولي إذن $r \neq 0$

$r \notin \{2, 4, 6\}$ لأن p عدد أولي أي p فردي وعليه r فردي

$r = 3 \Leftarrow$ $x^2 \equiv 1 [p] \Rightarrow x^4 \equiv 1 [p]$

ولدينا: $x^4 \equiv -1 [p]$

ومنه: $r \neq 3$

$r = 5 \Leftarrow$ $x^4 \equiv 1 [p]$ و $x^4 \equiv -1 [p]$

إذن: $r \neq 5$.

$r = 7 \Leftarrow$ $x^6 \equiv 1 [p]$ و $x^4 \equiv -1 [p]$

$x^6 \equiv 1 [p]$ و $x^6 \equiv -x^2 [p]$

$x^2 \equiv -1 [p] \Rightarrow x^4 \equiv 1 [p]$ و $x^4 \equiv -1 [p]$

وعليه $r \neq 7$.

$r = 1 \Leftarrow$ $1 \equiv 1 [p]$

إذن:

$$\boxed{r = 1}$$

التمرين III

$f_n(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^{2n+2}$

1- أ- لنبين أن $\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^3 = 0$

نضع $X = x^{1/3}$ ، ومنه $x = X^3$

$$\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^3 = \lim_{X\to 0^+} X^3(\ln(X^3))^3$$
$$= \lim_{X\to 0^+} (3X\ln(X))^3$$

لدينا $\lim_{X\to 0^+} X\ln(X) = 0$

ومنه: $\boxed{\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^3 = 0}$

$$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - (\ln x)^3\right)$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(1 - x(\ln x)^3\right)$$

لدينا:
$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^3 = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} 1 - x(\ln x)^3 = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \end{cases}$$

ومنه: $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = +\infty}$

ب- $\lim_{x\to +\infty} f_n(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} - (\ln x)^3$

$$\begin{cases} \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x\to +\infty} (\ln x)^3 = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} - (\ln x)^3 = -\infty$$

ومنه: $\boxed{\lim_{x\to +\infty} f_n(x) = -\infty}$

2) لنبين أن: $\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} = 0$

نضع $X = x^{1/3}$ ومنه: $x = X^3$

ومنه: $$\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} = \lim_{X\to +\infty} \frac{(\ln(X^3))^3}{X^3}$$
$$= \lim_{X\to +\infty} \left(\frac{3\ln(X)}{X}\right)^3$$

لدينا: $\lim_{X\to +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0 \Rightarrow \lim_{X\to +\infty} \left(\frac{3\ln(X)}{X}\right)^3 = 0$

ومنه: $\boxed{\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} = 0}$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^3}{x}$$

ومنه: $\lim_{x\to +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = 0$

إذن: (C_n) يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الأفاصيل

3) f_n قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

$$f_n'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{3(\ln x)^2}{x}$$
$$= -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3(\ln x)^2}{x}\right) < 0 \quad (x \in \mathbb{R}^{+*})$$

ومنه f_n تناقصية قطعا على $\mathbb{R}^{+*}$

x	0	$+\infty$
$f_n(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

4) f_n مستمرة وتناقصية قطعا على $\mathbb{R}^{+*}$

ومنه f_n تقابل من $\mathbb{R}^{+*}$ نحو $\mathbb{R}$

و $0 \in \mathbb{R}$ إذن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β_n على $\mathbb{R}^{+*}$

ولدينا:

$f_n(2) = \frac{1}{2} - (\ln(2))^2 > 0$

$f_n(e) = \frac{1}{e} - 1 < 0$

ومنه f_n تناقصية على $\mathbb{R}^{+*}$

$$f_n(e) < f_n(\beta_n) < f_n(2)$$

ومنه: $\boxed{2 < \beta_n < e}$

المنحنى (C_n)

II - 1 - أ

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} - (\ln x)^{2n+2}\right)$$

لدينا :

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{2n+1} = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

و عليه :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty}$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} - (\ln x)^{2n+2} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x}\left(1 - x(\ln x)^{2n+2}\right)$$

نضع : $x = X^{\frac{1}{2n+1}}$ و منه $x = X^{2n+1}$

و منه :

$$\lim_{x\to0^+} f_n(x) = \lim_{X\to0^+} \frac{1}{X^{2n+1}}\left(1 - \left(X\ln(X^{2n+1})\right)^{2n+2}\right)$$

$$= \lim_{X\to0^+} \frac{1}{X^{2n+2}}\left(1 - (2n+1\, X \ln(X))^{2n+2}\right)$$

لدينا :

$$\begin{cases} \lim_{X\to0^+} X\ln(X) = 0 \\ \lim_{X\to0^+} \frac{1}{X^{2n+1}} = +\infty \end{cases}$$

و منه :

$$\boxed{\lim_{x\to0^+} f_n(x) = +\infty}$$

2

$$f_n'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{(2n+1)(\ln x)^{2n}}{x}$$

$$= -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{(2n+1)(\ln x)^{2n}}{x}\right) < 0$$

لدينا: f_n تناقصية على $\mathbb{R}^{+*}$ و f_n متصلة على $\mathbb{R}^{+*}$

إذن فالمعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β_n.

و لدينا :

$f_n(1) = 1 > 0$

$f_n(e) = \frac{1}{e} - 1 < 0$

f_n تناقصية

و عليه :

$$\boxed{1 < \beta_n < e}$$

3

$$f_{n+2}(x) - f_n(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^{2n+3} - \frac{1}{x} + (\ln x)^{2n+2}$$

$$= (\ln(x))^{2n+2}\left(1 - (\ln x)^2\right)$$

$\forall x \in [1, e]$ $\quad 0 < \ln(x) < 1$

$-(\ln(x))^2 > -1$

$1 - (\ln x)^2 > 0$ و $(\ln x)^{2n+2} > 0$

و منه :

$$\boxed{f_{n+2}(x) - f_n(x) > 0}$$

ب - لدينا : $\forall x \in [1, e]$

$f_{n+2}(x) > f_n(x)$.

و منه $\beta_n \in [1, e]$

$f_{n+2}(\beta_n) > f_n(\beta_n)$ و $f_n(\beta_n) = 0$

و منه :

$f_{n+2}(\beta_n) > 0$ و $f_{n+2}(\beta_{n+2}) = 0$

و عليه :

$f_{n+2}(\beta_n) > f_{n+2}(\beta_{n+2})$

f_{n+2} تناقصية على $[1, e]$ و $(\beta_n, \beta_{n+2}) \in [1, e]^2$

و عليه

$\beta_n < \beta_{n+2}$

إذن: $(\beta_n)_{n\geq1}$ تزايدية قطعا

4 - أ

لدينا : $f_n(\beta_n) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\beta_n} = (\ln(\beta_n))^{2n+2}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\beta_n}\right)^{\frac{1}{2n+2}} = \ln(\beta_n)$$

$$\Rightarrow \ln(\ln(\beta_n)) = \frac{1}{2n+2}\ln\left(\frac{1}{\beta_n}\right)$$

لدينا :

$$\beta_n < e \Rightarrow \frac{1}{\beta_n} > \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{\beta_n}\right) > \ln(e^{-1})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n+2}\ln\left(\frac{1}{\beta_n}\right) > \frac{-1}{2n+2} \quad \left(\frac{1}{2n+1} > 0\right)$$

$$\Rightarrow \ln(\ln(\beta_n)) > \frac{-1}{2n+1}$$

و لدينا :

$$\frac{-1}{2n+2} > \frac{-1}{2n}$$

و عليه :

$$\boxed{\ln(\ln(\beta_n)) > \frac{-1}{2n}} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

ب - لدينا :

$$\ln(\ln(\beta_n)) > \frac{-1}{2n} \Rightarrow \ln(\beta_n) > e^{-\frac{1}{2n}}$$

و لدينا :

$$\beta_n < e \Rightarrow \ln(\beta_n) < 1$$

و عليه :

$$e^{-\frac{1}{2n}} < \ln(\beta_n) < 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{2n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{2n}} = e^0 = 1$$

(0 متصلة e)

و منه :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(\beta_n) = 1$$

أي

$$\lim_{n\to+\infty} \beta_n = e$$

التمرين الأول

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)\quad \frac{1}{2}Z^3-(1+i)Z^2+2(1+i)Z-4i=0$

1) أ- تحقق أن العدد $Z_0=2i$ حلا للمعادلة (E)

ب- حدد الأعداد $\alpha\ ,\ \beta$ بحيث يكون :

$$(E)\Leftrightarrow (Z-2i)\left(\frac{1}{2}Z^2+\alpha Z+\beta\right)=0$$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

2) في المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط $A(1+i\sqrt{3})$ ، $B(1-i\sqrt{3})$ و $C(2i)$

أ- أحسب $\frac{z_C}{z_A}$ و استنتج طبيعة المثلث OAC محددا قياسا للزاوية $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right)$

ب- حدد d لحق النقطة D منتصف القطعة $[AC]$ و بين أن $\arg(d)\equiv\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

ج- استنتج قيمة كل من $\sin\frac{5\pi}{12}$ و $\cos\frac{5\pi}{12}$

3) نعتبر الدورانين $R_1\left(A,-\frac{\pi}{2}\right)$ و $R_2\left(A,\frac{\pi}{2}\right)$ و نضع $O'=R_1(O)$ ، $B'=R_2(B)$

أ- حدد $Z_{O'}$ لحق O' و بين أن لحق النقطة B' هو $b'=1+2\sqrt{3}+i\sqrt{3}$

ب- لتكن I منتصف القطعة $[OB]$ بين أن (AI) ارتفاع للمثلث $AO'B'$

التمرين الثاني

ليكن p عددا أوليا أكبر من 3 و a عددا من $\mathbb{Z}$ بحيث $a^2+1\equiv 0\ [p]$

1) أ- بين أن $a^{p-1}\equiv 1\ [p]$

ب- استنتج أن $p\equiv 1\ [4]$

2) لتكن A مجموعة الأعداد الأولية و التي تكتب على الشكل $4k+1$.

نفترض أن A مجموعة منتهية و نضع $n=\left(2\prod_{p_k\in A}p_k\right)^2+1$

أ- بين أن العدد 3 لا يقسم العدد n (بتطبيق مبرهنة فيرما)

ب- بين أنه إذا كان p عددا أوليا يقسم العدد n فإن $p\equiv 1\ [4]$

ج- استنتج أن المجموعة A غير منتهية

التمرين الثالث

ليكن n عددا طبيعيا بحيث $n\geq 3$.

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $]0,\infty[$ بما يلي : $f_n(x)=x-n\ln x$

1) أ- أحسب النهايات التالية $\lim_{x\to+\infty}f_n(x)$ و $\lim_{x\to 0^+}f_n(x)$

ب- أحسب المشتقة $f_n'(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة f_n

2) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلين U_n و V_n بحيث $o<U_n<n<V_n$

3) أ- بين أن $1<U_n<e\quad(\forall n\geq 3)$

ب- تحقق أن $f_n(U_{n+1})=\ln U_{n+1}$ و استنتج أن $(U_n)_n$ متتالية تناقصية

ج- بين أن $e^{\frac{1}{n}}<U_n<e^{\frac{3}{n}}\quad(\forall n\geq 3)$ و أستنتج $\lim_{n\to+\infty}U_n$

4) أحسب $\lim_{n\to+\infty}V_n$ و بين أن $\frac{\ln V_n}{\ln n}\left(1-\frac{\ln(\ln V_n)}{\ln V_n}\right)=1$ ثم حدد $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln V_n}{\ln n}$

5) أ- بين أن $V_n>n\ \ln n\quad(\forall n\geq 3)$

ب- بين أن $f_n(n^2)=nf_2(n)\quad(\forall n\geq 3)$ و استنتج أن $V_n<n^2\quad(\forall n\geq 3)$

(يمكن استعمال رتابة f_2 و نعطي $f_2(3)>0$)

ج- استنتج أن $V_n\leq 2n\ln n\quad(\forall n\geq 3)$

د- بين أن $\lim_{n\to+\infty}\frac{V_n}{n\ln n}=1$

الأستاذ: المانتي	الموضوع: تصحيح الفرض رقم 2 الدورة 1	المادة: الرياضيات الشعبة: 2 علوم رياضية

التمرين الأول الأعداد العقدية

1- أ- لدينا:

$(E)\ \frac{1}{2}z^3-(1+i)z^2+2(1+i)z-4i=0$

و $z_0=2i$

نتحقق أن z_0 حل للمعادلة (E)

$\frac{1}{2}(z_0)^3-(1+i)z_0^2+2(1+i)z_0-4i$

$=\frac{1}{2}(2i)^3-(1+i)(2i)^2+2(1+i)2i-4i$

$=-4i+4(1+i)+4i(1+i)-4i$

$=-4i+4+4i+4i-4-4i$

$=0$

وعليه z_0 حل للمعادلة (E).

ب- لدينا $(z-2i)(\frac{1}{2}z^2+\alpha z+\beta)$

$=\frac{1}{2}z^3+(\alpha-i)z^2+(\beta-2i\alpha)z-2i\beta$

$$\begin{cases}\alpha-i=-1-i\\ \beta-2i\alpha=2+2i\\ -2i\beta=-4i\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=2\end{cases}$$

وعليه (E) تصبح:

$\frac{1}{2}z^2-z+2=0$ أو $z=2i$

$\Delta=-3$

اذن للمعادلة $\frac{1}{2}z^2-z+2$ حلين:

$z_A=1-i\sqrt{3}$

$z_B=1+i\sqrt{3}$

وعليه:

$S_E=\{2i,\ 1-i\sqrt{3},\ 1+i\sqrt{3}\}$

2) أ- لدينا:

$\frac{z_C}{z_A}=\sqrt{\frac{2i}{1+i\sqrt{3}}}$

$\frac{z_C}{z_A}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

$\arg\left(\frac{z_C}{z_A}\right)\equiv\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ و $\left|\frac{z_C}{z_A}\right|=1$

اذن: $OA=OC$ و $\arg\left(\frac{z_C}{z_A}\right)\equiv\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

أي $OA=OC$ و $(\widehat{\vec{OA},\vec{OC}})\equiv\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

$\Leftarrow$ OAC متساوي الساقين في O

و: $(\widehat{\vec{OA},\vec{OC}})\equiv\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

ب- لحق D منتصف $[AC]$ هو:

$d=\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}+2}{2}i$

D منتصف $[AC]$ و OAC متساوي الساقين

$(\widehat{\vec{OD},\vec{OC}})\equiv\frac{1}{2}(\widehat{\vec{OA},\vec{OC}})\ [2\pi]$

$(\widehat{\vec{OD},\vec{OC}})\equiv\frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

$\arg(d)\equiv(\widehat{\vec{u},\vec{OD}})\ [2\pi]$

$\equiv(\widehat{\vec{u},\vec{OC}})+(\widehat{\vec{OC},\vec{OD}})\ [2\pi]$

$\equiv\arg c-\frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

$\equiv\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

$\arg(d)\equiv\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

ج- خلاصة: $\sin\frac{5\pi}{12}$ و $\cos\frac{5\pi}{12}$

$\arg(d)\equiv\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

$\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{Re(d)}{|d|}$

$\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{Im(d)}{|d|}$

لدينا: $|d|=\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

3) أ- لدينا: $O' = R_A(A, -\frac{\pi}{2})$

إذن $z'_O - z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_O - z_A)$

$z'_O = -i(-z_A) + z_A$

منه: $z'_O = i(1+i\sqrt{3}) + 1 + i\sqrt{3}$

وعليه: $z'_O = (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})$

لدينا: $B' = R_2(A, \frac{\pi}{2})$

$b' - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_A)$

$b' = i(1-i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}) + 1 - i\sqrt{3}$

وعليه: $b' = (2\sqrt{3}+1) + i\sqrt{3}$

ب- I منتصف $[OB]$ إذن: كفاؤه:

$z_I = \frac{z_O + z_B}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

لدينا: $\frac{z_A - z_I}{z_{A'} - z_{B'}}$

إذن: $= \frac{1+i\sqrt{3} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+2\sqrt{3}+i\sqrt{3}-1+\sqrt{3}-i-i\sqrt{3}}$

منه: $= \frac{\frac{i}{2}(3\sqrt{3}-i)}{3\sqrt{3}-i} = \frac{1}{2}i \in i\mathbb{R}$

وعليه: $(O'B') \perp (AI)$

منه: (AI) ارتفاع للمثلث $AO'B'$

التمرين الثاني: الحسابيات

1) أ- $a^2 + 1 \equiv [p]$

$(\exists k \in \mathbb{R})\ a^2 + 1 = kp$

$pk - a \times a = 1$

وحسب بيزو فإن: $a \wedge p = 1$

و p أولي. حسب فيرما فإن:

$a^p \equiv a(p)$

$p / a(a^{p-1} - 1)$

بما أن $p \wedge a = 1$ فإن:

$p / a^{p-1} - 1$

وعليه $a^{p-1} \equiv 1[p]$

ب) لكل عدد x من $\mathbb{Z}'$ لدينا:

$x \equiv 0(4)$ $\quad$ $x \equiv 1[4]$

$x \equiv 2[4]$ $\quad$ $x \equiv 3[4]$

لدينا $x \equiv 0(4) \Leftrightarrow 4/x$

$x \equiv 2[4] \Leftrightarrow x$ زوجي

بما أن p أولي فإن:

$p \equiv 1[4]$ أو $p \equiv 3(p)$

نفترض أن $p \equiv 3[4]$

إذن: $p = 4k+3$

وحسب ماسبق $a^{p-1} \equiv 1(p)$

(1) $a^{4k+2} \equiv 1[p]$

ومنه جهة لدينا: $a^2 \equiv -1[p]$

(2) $(a^2)^{2k+1} \equiv -1[p]$

من (1) و (2) لدينا: $1 \equiv -1(p)$

وهذا غير صحيح لأن $p \geq 3$

وبالتالي فإن: $p \equiv 1[4]$

2) أ- لدينا: $3 \notin A$ (لأن $3 \not\equiv 1[4]$)

$\Leftarrow (\forall p_k \in A)\ 3 \wedge (p_k) = 1$

$3 \wedge (\prod_{p_k \in A} p_k) = 1$

ولدينا: $3 \wedge 2 = 1$

$\Leftarrow 3 \wedge (2\prod_{p_k \in A} p_k) = 1$

وعليه حسب فيرما فإن:

$(2\prod_{p_k \in A} p_k)^{3-1} \equiv 1[3]$

$(2(\prod_{p_k \in A} p_k)^2 \equiv 1[3]$

ومنه $n \equiv 2[3]$

$\Leftarrow$ 3 لا يقسم n.

ب- ليكن p أولي و p/n

لدينا $p \neq 3$ لأن 3 لا يقسم n

$n \equiv 0[p]$

$a^2+1 \equiv 0(p)$

$\left(a = 2\prod_{p \in m} p_i\right)$

وحسب نتيجة السؤال (1) فإن:

$p \equiv 1[4]$

ج) نفترض أن المجموعة A منتهية

ونضع: $A = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$

ونعتبر العدد: $n = \left(2\prod_{j=1}^{m} p_j\right)^2+1$

لدينا: $n \neq p_1, p_2, \dots, p_m$

نتحقق أن: "p_k لا يقسم n"

$\forall k \in \{1, \dots, m\}$

نفترض أن: p_k/n

ولدينا: $p_k / 2\prod_{j=1}^{m} p_j$

p_k/n و $p_k / \left(2\prod_{j=1}^{m} p_j\right)^2$

وعليه $p_k/1$ - لا يمكن

$\Leftarrow$ p_k لا يقسم n.

نفترض أن n غير أولي

$\Leftarrow$ n يقبل قاسم أولي p.

وحسب ماسبق فإن $p \equiv 1[4]$

إذن $p \in A$ $\Leftarrow$ تناقض

$\Leftarrow$ n أولي و $n = 4\left(\prod_{j=1}^{m} p_j\right)+1$

أي $n \in A$ يتناقض مع

A منتهية.

إذن: المجموعة A غير منتهية.

التمرين 3: دراسة دالة.

1) $\forall x \in]0,+\infty[\quad f_n(x) = x - n\ln x$

أ- $\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = \lim_{x \to 0^+} x - n\ln x$

لدينا: $\lim_{x \to 0^+} x = 0$ و $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

إذن:

$\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim_{x \to +\infty} x - n\ln x$

$= \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - n\frac{\ln x}{x}\right)$

كما أن: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

فإن: $\lim_{x \to +\infty} 1 - n\frac{\ln x}{x} = 1$

وعليه: $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$

ب- $f_n'(x) = (x - n\ln x)'$

$= 1 - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x}$

إذن إشارة $f_n'(x)$ هي إشارة $x-n$

x	0		n		$+\infty$
f_n	$+\infty$	$\searrow$	$n(1-\ln n)$	$\nearrow$	$+\infty$

2) لتكن: $g = f_n|_{]0,n]}$ قصور f_n على $]0,n]$

و متصلة وتناقصية قطعا على $]0,n]$

$\Leftarrow$ و تقابل من $]0,n]$ نحو $[n(1-\ln n), +\infty[$

كما أن: $n \geq 3 > e$ فإن: $\ln n > 1$

أي أن: $n(1-\ln n) < 0$

$0 \in]n(1-\ln n), +\infty[$

وعليه: $(\exists! u_n \in]0,n[) \quad g(u_n) = 0$

$(\exists! u_n \in]0,n[) \quad f_n(u_n) = 0$

ولتكن $h = f_n|_{]n,+\infty[}$ قصور f_n على $]n,+\infty[$

h متصلة وتزايدية قطعا على $]n,+\infty[$

h تقابل من $]n,+\infty[$ نحو $]n(1-\ln n),+\infty[$

وبما أن: $0 \in]n(1-\ln n),+\infty[$

فإن: $(\exists! V_n \in]n,+\infty[)\ h(V_n)=0$

$(\exists! V_n \in]n,+\infty[)\ f_n(V_n)=0$

3) أ- لدينا α هو حل للمعادلة $f(x)=0$

على المجال $]0,n[$ و 1 و e ينتمي إلى $]0,n[$ مع:

$f_n(1)=1>0$

$f_n(e)=e-n<0 \quad (n\geq 3>e)$

منه

$f(e)<0<f(1)$

أي $f(e)<f(U_n)<f(1)$

و f_n تناقصية على $]0,n[$

إذن: $1<U_n<e \quad (\forall n\geq 3)$

ب- لدينا: $f_n(U_{n+1})=U_{n+1}-n\ln(U_{n+1})$

$=U_{n+1}-(n+1)\ln U_{n+1}+\ln(U_{n+1})$

$=f_{n+1}(U_{n+1})+\ln(U_{n+1})$

(لأن $f_{n+1}(U_{n+1})=0$)

منه: $f_n(U_{n+1})=\ln U_{n+1}$

⇐ استنتاج:

لدينا $U_{n+1}>1 \Leftarrow \ln(U_{n+1})>0$

أي أن $f_n(U_{n+1})>0=f_n(U_n)$

U_n و U_{n+1} ينتميان إلى $]1,e[$

وبما أن f_n تناقصية على

$]1,e[\subset]0,n[$

فإن: $U_{n+1}<U_n$

⇐ $(U_n)_{n\geq 3}$ تناقصية.

ج- $f_n(U_n)=0 \Leftarrow U_n=n\ln U_n$

بما أن: $1<U_n<e<3$

فإن: $1<n\ln U_n<3$

أي $\frac{1}{n}<\ln(U_n)<\frac{3}{n}$

ومنه $e^{\frac{1}{n}}<U_n<e^{\frac{3}{n}} \quad (\forall n\geq 3)$

4) لدينا: $V_n>n \quad (\forall n\geq 3)$

وبما أن $\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$

فإن: $\lim_{n\to+\infty} V_n=+\infty$

⇐ لدينا: $f_n(V_n)=0$

يعني أن $V_n=n\ln(V_n) \Leftrightarrow \ln V_n=\ln n+\ln(\ln V_n)$

وعليه $\frac{\ln V_n}{\ln n}=1+\frac{\ln(\ln V_n)}{\ln n}$

⇐ $\frac{\ln V_n}{\ln n}-\frac{\ln(\ln V_n)}{\ln n}=1$

وعليه $\frac{\ln V_n}{\ln n}\left(1-\frac{\ln(\ln V_n)}{\ln V_n}\right)=1$

⇐ حدد $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln V_n}{\ln n}$:

لدينا: $\frac{\ln V_n}{\ln n}=\frac{1}{1-\frac{\ln(\ln V_n)}{\ln V_n}}$

وبما أن $\lim_{n\to+\infty} V_n=+\infty$

فإن: $\lim_{n\to+\infty}\ln(V_n)=+\infty$

منه $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(\ln V_n)}{\ln V_n}=0$

وعليه $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln V_n}{\ln n}=1$

5) أ- لدينا: $f_n(V_n)=0 \Leftrightarrow V_n=n\ln V_n$

وبما أن $V_n>n \Leftarrow \ln V_n>\ln n$

فإن: $n\ln(V_n)>n\ln n$

إذن: $V_n>n\ln n \quad (\forall n\geq 3)$

هنا انجاز التلميذة: بناء الحلول

+/5

ب- لدينا:

$$f_n(n^2) = n^2 - n\ln(n^2)$$
$$= n^2 - 2n\ln n$$
$$= n(n - 2\ln n)$$
$$f_n(n^2) = n f_2(n) \qquad (\forall n \geq 3)$$

← استنتاج:

$$f_2'(x) = \frac{x-2}{x} \Leftarrow f_2(x) = x - 2\ln x$$

f_2 تزايدية على $[2,+\infty[$

بما أن: $n \geq 3$ فإن $f_2(n) \geq f_2(n)$

ومنه $f_2(n^2) > 0 = f_n(V_n)$

ولدينا V_n و n^2 من $]n,+\infty[$

و f_n تزايدية على $]n,+\infty[$

إذن: $n^2 > V_n \quad (\forall n \geq 3)$

ج- لدينا $f_n(V_n) = 0 \Leftrightarrow V_n = n\ln(V_n)$

وبما أن $n^2 > V_n$ فإن: $2\ln(n) > \ln(V_n)$

أي أن: $2n\ln n \geq n\ln V_n$

ومنه $V_n \leq 2n\ln n \quad (\forall n \geq 3)$

د- لدينا:

$$\frac{V_n}{n\ln n} = \frac{n\ln V_n}{n\ln n} = \frac{\ln V_n}{\ln n}$$

إذن: $(V_n = n\ln(V_n))$

لدينا: $n\ln(n) < V_n < 2n\ln n$

$$\ln n + \ln(\ln n) < \ln V_n < \ln(n) + \ln(2\ln(n))$$
$$1 + \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} < \frac{\ln V_n}{\ln n} < 1 + \frac{\ln(2\ln n)}{\ln n}$$
$$1 + \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} < \frac{V_n}{n\ln n} < 1 + \frac{2\ln(2\ln n)}{2\ln n}$$

بما أن: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} = \lim \frac{\ln(2\ln n)}{2\ln n} = 0$

فإن: $\lim_{n\to+\infty} \frac{V_n}{n\ln n} = 1$

من إنجاز التلميذة: سناء العلمي
ج.ع.ر.ع.

مسألة (16 نقطة)

الجزء (1) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(0)=1 \text{ و } f(x)=\frac{\arctan x}{x} \quad ; \quad x\neq 0$$

1) بين أن f زوجية و أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (1 ن)

2) أ- بين أن $(\forall t\in\mathbb{R}^+)\quad 1-t^2\leq\frac{1}{1+t^2}\leq 1$ (0.5 ن)

و استنتج أن $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\quad x-\frac{x^3}{3}\leq acr\tan x\leq x$ (0.5 ن)

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين $x_0=0$ (0.5 ن)

3) أ- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\quad \arctan x\geq\frac{x}{1+x^2}$

ب- أحسب المشتقة $f'(x)$ و أدرس تغيرات الدالة f (0.5 ن)

الجزء (2) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$g(0)=1 \text{ و } g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \quad ; \quad x\neq 0$$

1) بين أن الدالة g زوجية (0.5 ن)

2) أ- بين أن $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\quad 1-g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x(1-f(t))\,dt$ (0.5 ن)

ب- استنتج أن g متصلة على يمن $x_0=0$ (1 ن)

ج- بين أن g قابلة للاشتقاق على يمن $x_0=0$ و أن $g'_d(0)=0$ (0.5 ن)

3) أ- بين أن $(\forall x\in[1,+\infty[)\quad 0\leq\int_1^x f(t)\,dt\leq\frac{\pi}{2}\ln x$ (0.5 ن)

ب- استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ (1 ن)

4) أ- بين أن g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

و أن $x^2g'(x)=\arctan x-\int_0^x f(t)\,dt$ لكل x من $]0,+\infty[$ (1) (1 ن)

ب- نضع $h(x)=x^2g'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$.

تحقق أن $x\,h'(x)=\frac{x}{1+x^2}-\arctan x$ لكل x من $]0,+\infty[$ (0.5 ن)

ج- استنتج أن $g'(x)<0$ لكل x من $]0,+\infty[$ ثم ضع جدول تغيرات g (1 ن)

5) أرسم منحنى الدالة g (0.5 ن)

الجزء (3)

1) أ- بين أن $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\quad f(x)\leq g(x)\leq 1$ (2) (1 ن)

ب- استنتج أن $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\quad |g'(x)|\leq\frac{1}{x}(1-f(x))$ (1 ن)

ج- تحقق أن $(\forall x\in\mathbb{R}^{*})\quad \frac{1}{x}(1-f(x))=\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}\,dt$ (0.5 ن)

2) أ- بين أن $(\forall t\in\mathbb{R}^{+*})\quad 0\leq\frac{t}{1+t^2}\leq\frac{1}{2}$ (0.5 ن)

ب- استنتج أن $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\quad |g'(x)|\leq\frac{1}{4}$ (0.5 ن)

3) بين أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل في المجال $[0,1]$ حلا وحيدا α (0.5 ن)

4) نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي : $u_0=0$ و $u_{n+1}=g(u_n)$

أ- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0\leq u_n\leq 1$ (0.5 ن)

ب- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad |u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{4}|u_n-\alpha|$ (0.5 ن)

ج- استنتج أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها (0.5 ن)

أسئلة مستقلة (3 نقط)

1) حدد نهاية المتتالية $(U_n)_{n>0}$ المعرفة بما يلي : $U_n=\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{k=n}k^p$

2) ليكن Z و Z' من $\mathbb{C}$. بين أن $|Z+Z'|^2\leq\left(1+|Z|^2\right)\left(1+|Z'|^2\right)$

3) ليكن Z عدد عقدي بحيث $|Z|=1$ بين أن $|1+Z|\geq 1$ أو $|1+Z^2|\geq 1$

تصحيح الغرض "2" ان شاء الله "2"

الجزء (1)

1) لدينا : $D_f = \mathbb{R}$

اذن $(x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -x \in \mathbb{R})$

و : $f(-x) = \frac{\arctan(-x)}{-x} = \frac{-\arctan(x)}{-x}$ $x \neq 0$

$= f(x)$

(لأن: $t \to \arctan(t)$ دالة فردية).

$\Leftarrow$ اذن الدالة f دالة زوجية.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\arctan(x)}{x} = 0$

(لأن $\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$)

---

2) $(\forall t \in \mathbb{R}^+)$: $t^4 \geq 0 \Rightarrow -t^4 \leq 0$

$\Rightarrow 1 - t^4 \leq 1$

وحيث : $1 - t^4 = (1-t^2)(1+t^2)$

و $(1+t^2 > 0)$ ،

اذن ، $(1-t^2)(1+t^2) \leq 1$

أي $\left(1 - t^2 \leq \frac{1}{1+t^2}\right)$ ①

ولدينا أيضا ، $(\forall t \in \mathbb{R}^+)$ $t^2 + 1 \geq 1$

اذن $\left(\frac{1}{t^2+1} \leq 1\right)$ ②

①و② $\Rightarrow 1 - t^2 \leq \frac{1}{t^2+1} \leq 1$

- لدينا $(\forall t \in \mathbb{R}^+)$ $1 - t^2 \leq \frac{1}{t^2+1} \leq 1$

$(x > 0)$ $\int_0^x (1-t^2)\,dt \leq \int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,dt \leq \int_0^x dt$

$\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^x \leq \left[\text{Arct}(t)\right]_0^x \leq [t]_0^x$

أي $x - \frac{x^3}{3} \leq \text{Arct}(x) \leq x$

ب. لنحسب $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

أي : $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - 1}{x - 0}$

أي $\lim_{x \to 0^+} \frac{\text{Arctan}(x) - x}{x^2}$

ولدينا $(\forall t \geq 0)$ $t - \frac{t^3}{3} \leq \text{Arct}(t) \leq t$

إذن $-\frac{x^3}{3} \leq \text{Arct}(x) - x \leq 0$

أي $-\frac{x}{3} \leq \frac{\text{Arct}(x) - x}{x^2} \leq 0$

وحيث $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{-x}{3}\right) = 0$

اذن $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

---

3) أ- نعتبر ، $t \xrightarrow{f} \text{Arct}(t)$

f دالة متصلة على $[0, x]$ وقابلة للاشتقاق على $]0, x[$. اذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية .

$(\exists c \in]0, x[)$ $\text{Arct}(x) - \text{Arct}(0) = (x - 0)\, f'(c)$

أي $\text{Arct}(x) = x\, f'(c)$

وحيث : $f'(c) = \frac{1}{1 + c^2}$.

و $0 \leq c \leq x \Rightarrow 1 \leq c^2 + 1 \leq x^2 + 1$

أي $\frac{1}{1+c^2} \geq \frac{1}{x^2+1}$

أي $(x > 0)$ $\frac{x}{1+c^2} \geq \frac{x}{x^2+1}$

أي $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $\text{Arct}(x) \geq \frac{x}{x^2+1}$

ب - لدينا f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$

و $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $f'(x) = \dfrac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)x - \operatorname{Arct}(x)}{x^2}$

$= \dfrac{x - (1+x^2)\operatorname{Arct}(x)}{(1+x^2)\,x^2}$

. لدينا $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $\arctan(x) \geq \dfrac{x}{x^2+1}$

أي $x - \operatorname{Arctan}(x)(x^2+1) \leq 0$

أي $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$: $f'(x) \leq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$0 \nearrow$	1	$\searrow 0$

(d'où أن الدالة f دالة زوجية)

الجزء (2).

1) لدينا ، $D_g = \mathbb{R}$

لأن $(x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R})$

$x \neq 0$ أي $g(-x) = \dfrac{1}{(-x)}\displaystyle\int_0^{(-x)} f(t)\,dt$

نضع : $(-t = u)$ أي $(dt = -du)$

و $\begin{cases} t = 0 \Rightarrow u = 0 \\ t = x \Rightarrow u = x \end{cases}$

إذن $g(-x) = \dfrac{-1}{x}\displaystyle\int_0^x -f(-u)\,du$

وحيث أن الدالة f دالة زوجية $(f(x) = f(-x))$

إذن $g(-x) = \dfrac{-1}{x}\displaystyle\int_0^x -f(u)\,du$

$= \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(u)\,du = g(x)$

الدالة g دالة زوجية

2) أ. لدينا $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x (1 - f(t))\,dt$

$= \dfrac{1}{x}\left[\displaystyle\int_0^x 1\,dt - \int_0^x f(t)\,dt\right]$

$= \dfrac{1}{x}\left[[t]_0^x - \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt\right]$

$= \dfrac{1}{x}\left[x - \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt\right]$

$= 1 - \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$

$= 1 - g(x)$

إذن $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})$ $1 - g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x (1 - f(t))\,dt$

2) ب . لدينا حسب (جزء I - 3) ب)

$(\forall t \in \mathbb{R}^+)$ $\operatorname{arct}(t) \geq \dfrac{t}{1+t^2}$

$(t > 0)$ $\dfrac{\operatorname{arct}(t)}{t} \geq \dfrac{1}{1+t^2}$

يعني $f(t) \geq \dfrac{1}{1+t^2}$

أي $1 - f(t) \leq 1 - \dfrac{1}{1+t^2}$

$x > 0$ $\displaystyle\int_0^x (1 - f(t))\,dt \leq \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt$

$x > 0$ $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x (1 - f(t))\,dt \leq \dfrac{1}{x}(x - \operatorname{Arct}(x))$

وحيث أن $(\forall t \in \mathbb{R})$ $0 \leq f(t) \leq 1$

وذلك حسب سؤال (8. ب)

أي ، $1 - f(t) \geq 0$

أي $\Rightarrow 0 \leq \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x (1 - f(t))\,dt \leq 1 - \dfrac{\operatorname{Arct}(x)}{x}$

أي $0 \leq 1 - g(x) \leq 1 - f(x)$

و $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} 1 - f(x) = 1 - 1 = 0 \\ 1 - g(x) \geq 0 \end{array}\right\}$

إذن $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 1 = g(0)$

أي أن g متصلة عند $x = 0$

ج- لنحسب $\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-1}{x}$

- لدينا $0 \leq 1-g(x) \leq 1-f(x)$

أي $f(x)-1 \leq g(x)-1 \leq 0$

$(x>0)$ $\frac{f(x)-1}{x} \leq \frac{g(x)-1}{x} \leq 0$

(1) $\frac{\operatorname{Arct}(x)-x}{x^2} \leq \frac{g(x)-1}{x} \leq 0.$

$\operatorname{arct}(x) \geq \frac{x}{1+x^2} \Longrightarrow \operatorname{Arct}(x)-x \geq \frac{-x^4}{1+x^2}.$

أي (2) $\frac{\operatorname{Arct}(x)-x}{x^2} \geq \frac{-x^2}{1+x^2}$

اذن من (1) و (2) نستنتج $\frac{-x^2}{1+x^2} \leq \frac{g(x)-1}{x} \leq 0$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{1+x^2} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(1)}{x} = 0$ و

اذن و قابلة الاشتقاق على يمين 0 و $g'_d(0)=0$

لدينا $0 \leq \operatorname{arct}(t) \leq \frac{\pi}{2}$ $(\forall t \in [1,+\infty[)$

أي $0 \leq \frac{\operatorname{arct}(t)}{t} \leq \frac{\pi}{2t}$ $t>0$

$(x>1)$ $0 \leq \int_1^x \frac{\operatorname{arct}(t)}{t}\,dt \leq \int_1^x \frac{\pi}{2t}\,dt$

$0 \leq \int_1^x f(t)\,dt \leq \left[\frac{\pi}{2}\ln(t)\right]_1^x$

$0 \leq \int_1^x f(t)\,dt \leq \frac{\pi}{2}\ln(x).$

وهذه النتيجة.

---

3) ب- لدينا $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$

$= \frac{1}{x}\left(\int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^x f(t)\,dt\right)$

$= \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$

وحيث $1-\frac{t^2}{3} \leq f(t) \leq 1$

$\left[t-\frac{t^3}{9}\right]_0^1 \leq \int_0^1 f(t)\,dt \leq 1$

$1-\frac{1}{9} \leq \int_0^1 f(t)\,dt \leq 1$

أي $(x>0)$ $\frac{8}{9x} \leq \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt \leq \frac{1}{x}$

اذن : (1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt = 0$

وحيث $0 \leq \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt \leq \frac{\pi}{2x}\ln(x)$

اذن $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt = 0$

(لأن $\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{2x}\ln(x) = 0$)

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

4.أ) . $x \xrightarrow{u} \frac{1}{t}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

وحيث $f(t)$ متصلة على $\mathbb{R}^{+*}$ اذن تقبل دالة

أصلية F قابلة الاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

أي $\int_0^x f(t)\,dt = F(x)-F(0)$

أي $x \xrightarrow{v} \int_0^x f(t)\,dt$ قابلة الاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

اذن : $x \xrightarrow{u.v} g(x)$ قابلة الاشتقاق على

$\mathbb{R}^{+*}$

$g'(x) = \frac{-1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{x} f(x)$

$= \frac{-1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{x}\left(\frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x}\right)$

$x^2 g'(x) = \operatorname{Arct}(x) - \int_0^x f(t)\,dt$

ب - تحقق أن $x h'(x) = \frac{x}{1+x^2} - \arctan(x)$

لكل x من $]0;+\infty[$:

لدينا $\forall x \in]0;+\infty[; h(x) = x^2 g'(x)$

يعني أن $h(x) = \arctan(x) - \int_0^x f(t)\,dt$

إذن $h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\text{Arctan}(x)}{x}$

$$\boxed{x h'(x) = \frac{x}{1+x^2} - \text{Arctan}(x)}$$

ج - استنتج أن $g'(x) < 0$ لكل x من $]0;+\infty[$ ثم ضع جدول تغيرات g :

لدينا حسب السؤال 3 - أ -

$\forall x \in]0;+\infty[; \text{Arctan}(x) \geq \frac{x}{1+x^2}$

إذن $\frac{x}{1+x^2} - \text{Arctan}(x) \leq 0$

يعني أن $\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; x h'(x) \leq 0$

إذن $\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; h'(x) \leq 0$

ولدينا $h(0) = 0^2 \times g'(0) = 0$

x	0	$+\infty$
$h(x)$	0 ↘	

إذن $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ h(x) < 0$

ولدينا $\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; h(x) = x^2 g'(x)$

إذن $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ g'(x) < 0}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	0 ↗	1	↘ 0

⑤ رسم المنحنى :

الجزء (3)

① أ - بين أن $\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; f(x) \leq g(x) \leq 1$

لدينا حسب السؤال 3 - أ - الجزء (1) : $x > 0$

$\frac{\text{Arctan}(t)}{t} \geq \frac{1}{1+t^2} ; t \in [0;x]$

$\int_0^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t}\,dt \geq \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt ; t \in [0;x]$

يعني أن $\int_0^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t}\,dt \geq \text{Arctan}(x)$

إذن $\frac{1}{x}\int_0^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t}\,dt \geq \frac{\text{Arctan}(x)}{x} ; x > 0$

$\Leftarrow \forall x > 0 ; g(x) \geq f(x)$

ولدينا انطلاقا من جدول تغيرات g :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; g(x) < 1$

إذن $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ f(x) \leq g(x) \leq 1$

ب - استنتج أن : $|g'(x)| \leq \frac{1}{x}(1-f(x)) ; x > 0$

لدينا حسب 4 - أ -

$\forall x \in]0;+\infty[; g'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - g(x))$

$|g'(x)| = \frac{1}{x}|f(x) - g(x)| ; \forall x > 0$

ولدينا حسب السؤال السابق : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ f(x) \leq g(x)$

إذن $|g'(x)| = \frac{1}{x}(g(x) - f(x)) ; \forall x > 0$

ولدينا أيضا حسب السؤال السابق $g(x) \leq 1 ; \forall x > 0$

إذن $\frac{1}{x}(g(x) - f(x)) \leq \frac{1}{x}(1 - f(x)) ; \forall x > 0$

إذن $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ |g'(x)| \leq \frac{1}{x}(1 - f(x))$

ج - تحقق أن :

$\forall x \in \mathbb{R}^* : \frac{1}{x}(1 - f(x)) = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$

لدينا $\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{x^2}\left(\int_0^x 1 - \frac{1}{1+t^2}\,dt\right)$

$= \frac{1}{x^2}\left[t - \text{Arctan}(t)\right]_0^x = \frac{1}{x} - \frac{\text{Arctan}(x)}{x^2}$

إذن $\forall x \in \mathbb{R}^* : \frac{1}{x}(1 - f(x)) = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$

[لأن $\frac{1}{x}(1 - f(x)) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{\text{Arctan}(x)}{x}\right)$]

2 - أ - بين أن : $\forall t\in\mathbb{R}_+^* \quad 0\leq \frac{t}{1+t^2}\leq \frac{1}{2}$

لدينا $\forall t\in\mathbb{R}_+^* \quad (t-1)^2\geq 0 \Rightarrow t^2+1\geq 2t$

إذن $\frac{1}{t^2+1}\leq\frac{1}{2t} \Rightarrow \frac{t}{t^2+1}\leq\frac{1}{2}$

ونعلم أن $\forall t\in\mathbb{R}_+^* \quad \frac{t}{1+t^2}\geq 0$

إذن $\forall t\in\mathbb{R}_+^* \quad 0\leq\frac{t}{1+t^2}\leq\frac{1}{2}$

ب - استنتج أن $\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad |g'(x)|\leq\frac{1}{4}$

ليكن x من $\mathbb{R}_+^*$:

انطلاقا من 1-ب و 1-ج نستنتج أن

$$|g'(x)|\leq\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}dt$$

ولدينا حسب السؤال السابق :

$$\forall t\in[0;x] \quad 0\leq\frac{t^2}{1+t^2}\leq\frac{1}{2}t$$

$$t\in[0;x] \; ; \int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}dt\leq\frac{1}{2}\int_0^x t\,dt$$

إذن $\int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}dt\leq\frac{1}{4}x^2$

يعني أن $\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}dt\leq\frac{1}{4}$

إذن $\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad |g'(x)|\leq\frac{1}{4}$

3 - بين أن $g(x)=x$ تقبل حلا وحيدا في $[0;1]$

نضع $h(x)=g(x)-x$

$x\to h(x)$ ق. للاشتقاق على $]0;1[$

$h'(x)=g'(x)-1<0$ h تناقصية قطعا على $]0;1[$

ولدينا $h(0)=1$ و $h(1)=g(1)-1$

ولدينا $\forall x\in[0;1] \quad g(x)\leq 1$

إذن $h(1)=g(1)-1\leq 0$

إذن $h(0)\times h(1)\leq 0$ و $x\to h(x)$ متصلة على $[0;1]$ وقابلة للاشتقاق عليه.

إذن $\exists!\alpha\in[0;1] \; ; g(\alpha)=\alpha$

4 أ - بين أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad 0\leq u_n\leq 1$

من أجل $n=0$ لدينا $V: 0\leq u_n=0\leq 1$

نفترض أنه $0\leq u_n\leq 1$ ولنبين أن $0\leq u_{n+1}\leq 1$

لدينا $0\leq u_n\leq 1$ و g تناقصية ومتصلة على $[0;1]$

إذن $g(1)\leq g(u_n)\leq g(0)$

إذن $0\leq u_{n+1}\leq 1$ ▼

إذن حسب البرهان بالترجع فإن $\forall n\in\mathbb{N} \; ; 0\leq u_n\leq 1$

ب - بين أن $\forall n\in\mathbb{N} : |u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{4}|u_n-\alpha|$

لدينا $0\leq u_n\leq 1$ و g متصلة على $[0;1]$ وق. للاشتقاق عليه

و $\alpha\in[0;1] \; g(\alpha)=\alpha$

إذن بتطبيق TAF على مجال طرفاه α و u_n

نجد أن $|g(u_n)-g(\alpha)|=|g'(c)||u_n-\alpha|$

حيث أن $c\in]0;1[$

ونعلم أن $\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad |g'(x)|\leq\frac{1}{4}$

إذن $c\in]0;1[\quad |g'(c)|\leq\frac{1}{4}$

إذن $\forall n\in\mathbb{N} \; ; |g'(c)||u_n-\alpha|\leq\frac{1}{4}|u_n-\alpha|$

ولدينا $\forall n\in\mathbb{N} \; ; |g(u_n)-g(\alpha)|=|g'(c)||u_n-\alpha|$

إذن $\forall n\in\mathbb{N} \; ; |u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{4}|u_n-\alpha|$

ج - استنتج نهاية u_n وبين أنها متقاربة

لنبين أولا أن $\forall n\in\mathbb{N} \; ; |u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n$

من أجل $n=0$ لدينا $|u_0-\alpha|\leq 1$

وهذا صحيح لأن $(\alpha;u_0)\in[0;1]^2$

نفترض أن $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n$

ولنبين أن $|u_{n+1}-\alpha|\leq\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

لدينا $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n$

إذن $\frac{1}{4}|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

إذن $|u_{n+1}-\alpha|\leq\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

إذن حسب افتراض الترجع فإن $\forall n\in\mathbb{N} \; ; |u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n$

وبما أن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0 \; ; |\frac{1}{4}|\leq 1$

فإن $\lim_{n\to+\infty}u_n-\alpha=0$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=\alpha}$$

إذن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة.

أسئلة مستقلة

1 - حدد نهاية المتتالية $(u_n)_{n>0}$ المعرفة كالتالي:

$$u_n = \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p$$

لدينا

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p$$

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

حيث $f(x) = x^p$

f دالة متصلة وق. للاشتقاق على $]0;1[$

إذن

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 x^p dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{p+1}$$

2 - ليكن z و z' من $\mathbb{C}$ بين أن

$$|z+z'|^2 \leq (1+|z|^2)(1+|z'|^2)$$

نعلم أن: $|z+z'| \leq |z|+|z'|$

$$|z+z'|^2 \leq |z|^2+|z'|^2+2|z\times z'|$$

ولدينا $(1+|z|^2)(1+|z'|^2) = 1+|z'|^2+|z|^2+|zz'|^2$

نعلم أن $(|zz'|-1)^2 \geq 0$

إذن $|zz'|^2+1 \geq 2|z\cdot z'|$

$$|zz'|^2+1+|z|+|z'| \geq 2|z\times z'|+|z|^2+|z'|^2$$

إذن $|z+z'|^2 \leq (1+|z|^2)(1+|z'|^2)$

3 - بين أنه إذا كان $|z|=1$ فإن

$|1+z| \geq 1$ أو $|1+z^2| \geq 1$

لدينا $|z|=1$ إذن $\exists \theta \in]-\pi;\pi]; z=e^{i\theta}$

ولدينا $|1+z| = |1+e^{i\theta}| = |2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}|$

إذن

$$|1+z| = 2|\cos\frac{\theta}{2}|$$

إذا كان $\frac{\theta}{2} \in [-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}]$ أي أن $\theta \in [-\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}]$

فإن $|\cos\frac{\theta}{2}| \geq \frac{1}{2}$ ومنه فإن $|1+z| \geq 1$

وإذا كان $\theta \notin [-\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}]$ فإن

$\cos\theta \leq -\frac{1}{2}$ أي أن $|\cos\theta| \geq \frac{1}{2}$

ولدينا $|1+z^2| = |1+e^{2i\theta}|$

$$|1+z^2| = |2\cos\theta\, e^{i\theta}| = 2|\cos\theta|$$

ولدينا $\forall \theta \in]-\pi;-\frac{2\pi}{3}[\cup]\frac{2\pi}{3};\pi]; |\cos\theta| \geq \frac{1}{2}$

إذن $|1+z^2| \geq 1$

خلاصة:

$|z|=1$ ← $|1+z| \geq 1$ أو $|1+z^2| \geq 1$

من انجاز:

- مهدي بنكروم
- وليد حفيظ الدين

"باشراف الأستاذ المعاني"

التمرين الأول : www..ift.fr

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $Z^2-2i\sqrt{3}Z-4=0$

2) نضع $a=1+i\sqrt{3}$; $b=-1+i\sqrt{3}$ و نعتبر في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقطتين $A(a)$; $B(b)$.

ليكن R_1 الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و R_2 الدوران الذي مركزه B و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ و نعتبر التطبيق $f=R_2\circ R_1$

أ- بين أن $f(B)=A$

ب- لتكن $M(m)$ نقطة من (P) و نعتبر النقطتين $N=R_1(M)$ و $M'=f(M)$

(i) حدد بدلالة m العدد العقدي n لحق النقطة N

(ii) بين أن لحق النقطة M' هو العدد $m'=-m+2i\sqrt{3}$ و استنتج طبيعة التطبيق f

ج- حدد مجموعة النقط $M(m)$ التي يكون من أجلها M , N , M' مستقيمية

التمرين الثاني :

نعتبر في الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,\bullet)$ المجموعة E للمصفوفات والتي تكتب على الشكل $M=\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix}$ حيث $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ و نضع $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

1) أ- بين أن $(E,+)$ زمرة تبادلية

ب- بين أن $(E,+,\bullet)$ فضاء حقيقي و أعط بعده

2) أحسب J^2 بدلالة I , J واستنتج الجداء $M(a,b)\times M(c,d)$

3) نعتبر التطبيق f المعرف ب : $\begin{cases} f \ : \ E\to\mathbb{C} \\ M(a,b)\to z=(a+b)+ib \end{cases}$

أ- بين أن f تقابل و عرف تقابله العكسي

ب- بين أن f تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$

ج- استنتج بنية $(E,+,\times)$

د- حدد في E حلول المعادلة $M^3-I+J=\theta$ حيث θ هي المصفوفة المنعدمة في $M_2(\mathbb{R})$

التمرين الثالث : www..ift.fr

الجزء (1) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $D=]0,+\infty[$ بما يلي :

$$f(x)=\frac{x-1}{x\ln x} \quad ; \quad x\neq 1 \quad \text{و} \quad f(1)=1$$

1) بين أن الدالة f متصلة على D

2) أ- بين أن $f'(x)=\frac{\ln x-x+1}{(x\ln x)^2}$ $(\forall x\in D-\{1\})$

ب- بين أن الدالة f تناقصية على D

الجزء (2)

F دالة معرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} F(x)=\int_x^{x^2} f(t)\,dt \quad , \quad x\neq 0 \ ; \ x\neq 1 \\ F(0)=-\ln 2 \quad ; \quad F(1)=0 \end{cases}$

1) أ- بين أن $\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}dt=\ln 2$ $(\forall x\in]0,1[)$

ب- بين أن $(x^2-1)\ln 2\le F(x)\le(x-1)\ln 2$ $(\forall x\in]0,1[)$

ج- أدرس اتصال الدالة F على يمين 0 و على يسار 1

2) أ- بين أن $\frac{x^2-x}{2\ln x}\le F(x)+\ln 2\le\frac{x^2-x}{\ln x}$ $(\forall x\in]0,1[)$

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة F على يمين 0

3) ليكن x من المجال $]1,+\infty[$.

أ- بين أن $F(x)=(x^2-x)f(c)$ $(\exists c\in[x,x^2])$

ب- أدرس اتصال و قابلية اشتقاق الدالة F على يمين النقطة 1

ج- بين أن $F(x)\ge\ln x$ و أحسب $\lim_{x\to+\infty}F(x)$

4) أ- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على كل من $]0,1[$ و $]1,+\infty[$ و أن $F'(x)=\frac{x-1}{\ln x}$

ب- أدرس منحى تغيرات الدالة F و ضع جدول تغيراتها

2011 - 2012.

تصحيح الفرض المحروس رقم 3 للأسدس II

التمرين 1:

1) لنحل المعادلة: $z^2 - 2i\sqrt{3}z - 4 = 0$

$\Delta = 4 = 2^2$

ومنه:

$z_1 = \frac{2i\sqrt{3} - 2}{2} = -1 + \sqrt{3}i$

$z_2 = \frac{2i\sqrt{3} + 2}{2} = 1 + \sqrt{3}i$

إذن مجموعة حلول المعادلة هي:

$S = \{1 + \sqrt{3}i, -1 + \sqrt{3}i\}$.

2) أ.

لكل نقطة $M(z)$ من المستوى العقدي نضع: $M_1 = R_1(M)$ و $M_2 = R_2(M_1)$ وليكن z_1 و z_2 لحقي النقطتين M_1 و M_2.

$R_1(M) = M_1 \Leftrightarrow z_1 = ze^{i\frac{\pi}{3}}$

$R_2(M_1) = M_2 \Leftrightarrow z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_1 - b) + b$

وعليه

$R_2 \circ R_1(M) \Leftrightarrow z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}(ze^{i\frac{\pi}{3}} - b) + b$

$\Leftrightarrow z_2 = -z - be^{i\frac{2\pi}{3}} + b$

ومنه:

$f(B) = R_2 \circ R_1(B) \Leftrightarrow z_2 = -\cancel{b} - be^{i\frac{2\pi}{3}} + \cancel{b}$

$\Leftrightarrow z_2 = -2e^{i(\pi - \frac{\pi}{3}) + \frac{2\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow z_2 = -2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow z_2 = 1 + i\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow z_2 = a$

وعليه:

$f(B) = A$.

ب - (ند)

$N = R_1(M) \Leftrightarrow n = me^{i\frac{\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow n = \frac{1}{2}m + \frac{\sqrt{3}}{2}mi$

(ند)

لدينا الكتابة العقدية للتطبيق f

$z' = -z - b(e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1)$

$z' = -z - (\sqrt{3}i - 1)(\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{2})$

$z' = -z - (\frac{-3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}i - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{2})$

$z' = -z + 2\sqrt{3}i$

ومنه:

$f(M) = M' \Leftrightarrow m' = -m + 2\sqrt{3}i$

التمثيل العقدي للتطبيق f من الشكل: $z' = \alpha z + \beta$ حيث: $\alpha = 1 \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

إذن فالتطبيق f هو التحاكي الذي مركزه $\Omega(\sqrt{3}i)$ ونسبته -1

ج

$\begin{pmatrix} M, M' \text{ و } N \\ \text{نقط} \\ \text{مستقيمية} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{m' - m}{n - m} \in \mathbb{R}$

$\frac{m' - m}{n - m} = \frac{-m + 2i\sqrt{3} - m}{\frac{1}{2}m + \frac{\sqrt{3}}{2}im - m}$

$= \frac{2(-m + i\sqrt{3})}{\frac{1}{2}m(-1 + \sqrt{3}i)}$

$= \frac{4(-m + i\sqrt{3})}{m(-1 + \sqrt{3}i)}$

$\frac{m' - m}{n - m} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{4(-m + i\sqrt{3})}{m(-1 + \sqrt{3}i)} = \frac{4(-\bar{m} + i\sqrt{3})}{\bar{m}(-1 + \sqrt{3}i)}$

$\Rightarrow \bar{m}(-m + i\sqrt{3}) = m(-\bar{m} + i\sqrt{3})$

$\Rightarrow -|m|^2 + i\sqrt{3}\bar{m} = -|m|^2 + i\sqrt{3}m$

$\Rightarrow m = \bar{m}$

$\Rightarrow m \in \mathbb{R}$

ومنه: مجموعة النقط $M(m)$ التي يكون من أجلها M و N و M' مستقيمية هو محور الأفاصيل $(\Delta): y = 0$

التمرين 2:

1 - أ. لنبين أن $(E, +)$ زمرة تبادلية.

لدينا: $E \neq \emptyset$ | $\theta \in E$ من أجل $a = b = 0$ حيث θ المصفوفة المنعدمة

ليكن A و B عنصرين من E.

$(x, y, a, b) \in \mathbb{R}^4$ و $A\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix}$

$B\begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+2y \end{pmatrix}$

$$A - B = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x & -y \\ 2y & -x-2y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-x & b-y \\ -2(b-y) & (a-x)+2(b-y) \end{pmatrix}$$

نضع: $\alpha = a-x$ و $\beta = b-y$ ، $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

$$A - B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -2\beta & \alpha+2\beta \end{pmatrix} \in E$$

إذن: $(E,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(M_2(\mathbb{R}),+)$

وبما أن: $(M_2(\mathbb{R}),+)$ زمرة تبادلية

فإن: $(E,+)$ زمرة تبادلية.

ج- لنبين أن: $(E,+,\cdot)$ فضاء حقيقي

لدينا: $(E,+)$ زمرة جزئية من $(M_2(\mathbb{R}),+)$

لنبين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\cdot)$

لتكن $M_{(a,b)}$ مصفوفة من E و $\gamma \in \mathbb{R}$

$$\gamma . M = \gamma \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma a & \gamma b \\ -2\gamma b & \gamma a+2\gamma b \end{pmatrix}$$

نضع: $\gamma a = \alpha$ و $\gamma b = \beta$

$$\gamma M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -2\beta & \alpha+2\beta \end{pmatrix} \in E \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$$

ومنه: E جزء مستقر في $(M_2(\mathbb{R}),\cdot)$

إذن: $(E,+,\cdot)$ فضاء جزئي من $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$

وبما أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء حقيقي

فإن: $(E,+,\cdot)$ فضاء حقيقي

لنحدد بعده

$M \in E$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= aI + bJ.$$

ومنه: (I,J) أسرة مولدة للفضاء $(E,+,\cdot)$

$$M = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a = 0 \text{ و } b = 0$$

ومنه: الأسرة (I,J) حرة.

وعليه: (I,J) أساس للفضاء الحقيقي $(E,+,\cdot)$

إذن: $\dim E = 2$

2-

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -2I + 2J.$$

لنستنتج الجداء $M(a,b) \times M(c,d)$

$$M(a,b) \times M(c,d) = (aI + bJ) \times (cI + dJ)$$

$$= acI + adJ + bcJ + bdJ^2$$

$$= acI + adJ + bcJ + 2bdJ - 2bdI$$

$$= (ac - 2bd)I + (ad + bc + 2bd)J.$$

3- أ- لنبين أن f تقابل.

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ و $M \in E$

نضع $z = x + yi$ ، $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(M(a,b)) = z \Rightarrow (a+b) + bi = x + yi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = x \\ b = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = x - y \\ b = y. \end{cases}$$

ومنه:

$$(\forall z \in \mathbb{C})\ (\exists!\, M(a,b) \in E) \,/\, f(M(a,b)) = z$$

إذن: f تقابل من E نحو $\mathbb{C}$.

التقابل العكسي

$$f^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow E$$

$$z = x + yi \longrightarrow M(x-y, y)$$

ب- لنبين أن f تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$

$M(a,b)$ و $M(c,d)$ عنصرين من E.

$$f(M(a,b) \times M(c,d)) = f(M(ac-2bd,\ ad+bc+2bd))$$

$$= (ac + ad + bc) + (ad + bc + 2bd)i$$

ومن جهة أخرى:

$$f(M(a,b)) \times f(M(c,d)) = ((a+b)+bi)((c+d)+di)$$

$$= ac+ad+bc+bd+(a+b)id+(c+d)ib - bd$$

$$= (ac+ad+bc)+(ad+bc+2bd)i$$

$$= f(M(a,b) \times M(c,d))$$

ومنه: f تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$

ج. لنستنتج بنية $(E,+,\times)$

لدينا:

$(E,+)$ زمرة تبادلية.

f تشاكل تقابلي من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$

و

$f^{-1}(\mathbb{C}^*) = E^*$

لدينا: $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية.

إذن: $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية.

و من خلال السؤال 2 E جزء مستقر في $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

لدينا: $\times$ توزيعي على $+$ في $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

ومنه: $\times$ توزيعي على $+$ في E.

نستنتج أن: $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.

د- لنحدد في E حلول المعادلة $M^3 - I + J = 0$ حيث f المعرفة المذكورة في $M_2(\mathbb{R})$

$$M^3 - I + J = 0 \Rightarrow f(M^3) = f(I-J)$$

$$\Rightarrow (f(M))^3 = -i$$

$$\Rightarrow ((a+b)+bi)^3 = -i$$

نضع $z = x+yi$ $\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$z^3 = -i \Rightarrow z^3 - i^3 = 0$$

$$\Rightarrow (z+i)(z^2+zi-1) = 0$$

$$\Rightarrow z = -i \text{ أو } z^2+zi-1 = 0$$

$$\Delta = 3 = (\sqrt{3})^2$$

$$z = \frac{-i-\sqrt{3}}{2} \text{ أو } z = \frac{-i+\sqrt{3}}{2}$$

لدينا: $z = (a+b)+bi$

$$\begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ a+b = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ a+b = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

ومنه حلول المعادلة هي:

$$S = \left\{ M(1,-1) ; M\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, -\frac{1}{2}\right) ; M\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \right\}$$

التمرين ③

الجزء I:

$f(1) = 1$ و $f(x) = \frac{x-1}{x\ln x}$ $x \neq 1$

1. لنبين أن الدالة متصلة في D

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\frac{\ln(x)}{x-1}}\right) \times \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1 = f(1) \left(\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1\right)$$

ومنه f متصلة في 1

ولدينا:

$x \ln x$ دالة متصلة في $D-\{1\}$

وغير منعدمة على هذا المجال

$x-1$ دالة متصلة على $D-\{1\}$

ومنه:

$\frac{x-1}{x\ln x}$ دالة متصلة على $D-\{1\}$

ومتصلة في 1

ومنه: الدالة f متصلة على D

2. أ. بين

$$(\forall x \in D-\{1\}) \quad f'(x) = \frac{\ln x - x + 1}{(x\ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x\ln x - (\ln x + 1)(x-1)}{(x\ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\ln x - x + 1}{(x\ln x)^2} \quad (\forall x \in D-\{1\})$$

ب- لنبين أن الدالة f تناقصية على D

نضع

$$g(x) = \ln x - x + 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

ومنه: $g(x) < 0 \quad \forall x \in D - \{1\}$

ومنه: $f'(x) < 0 \quad \forall x \in D - \{1\}$

وعليه f تناقصية على D.

الجزء (2):

1) أ- $\forall x \in]0,1[$

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,dt = \left[\ln|\ln(t)|\right]_x^{x^2}$$
$$= \ln|\ln(x^2)| - \ln|\ln(x)|$$
$$= \ln\left(\left|\frac{2\ln(x)}{\ln(x)}\right|\right)$$
$$= \ln(2)$$

وعليه:

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,dt = \ln(2) \quad (\forall x \in]0,1[)$$

ب. لنبين أن: $(\forall x \in]0,1[)$

$$(x^2-1)\ln(2) \leq F(x) \leq (x-1)\ln(2)$$

لدينا: $x^2 < x \quad \forall x \in]0,1[$

ومنه: $x^2 \leq t \leq x \Rightarrow x^2 - 1 \leq t - 1 \leq x - 1$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)}{t\ln(t)} \leq \frac{t-1}{t\ln(t)} \leq \frac{x^2-1}{t\ln(t)}$$

$\left(\frac{1}{t\ln(t)} < 0\right) \quad \forall t \in]0,1[\quad (x^2 < x)$

$$(x^2-1)\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,dt < F(x) < (x-1)\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,dt$$

$$(x^2-1)\ln(2) < F(x) < (x-1)\ln(2)$$

$(\forall x \in]0,1[)$

ج- لندرس نهايات الدالة F على يمين 0.

$$\lim_{x\to 0^+} (x^2-1)\ln(2) = \lim_{x\to 0^+} (x-1)\ln(2) = -\ln(2)$$

ومنه:

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = -\ln(2) = F(0)$$

ومنه: F متصلة على يمين 0.

لندرس اتصال الدالة على يسار 1.

$$\lim_{x\to 1^-} (x^2-1)\ln(2) = \lim_{x\to 1^-} (x-1)\ln(2) = 0$$

وعليه:

$$\lim_{x\to 1^-} F(x) = 0 = F(1)$$

ومنه: F متصلة على يسار 1

2) أ- لنبين أن: $(\forall x \in]0,1[)$

$$\frac{x^2-x}{2\ln x} \leq F(x) + \ln(2) \leq \frac{x^2-x}{\ln(x)} \quad \forall x \in]0,1[$$

$$F(x) + \ln(2) = \int_x^{x^2} \frac{t-1}{t\ln(t)}\,dt + \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,dt$$
$$= \int_x^{x^2} \frac{t}{t\ln(t)}\,dt$$
$$= \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,dt$$

لدينا: $x^2 \leq x \quad (\forall x \in]0,1[)$

$$x^2 \leq t \leq x \Rightarrow 2\ln(x) \leq \ln(t) \leq \ln(x)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\ln(x)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{2\ln(x)}$$
$$\Rightarrow \int_x^{x^2} \frac{1}{2\ln(x)}\,dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x)}\,dt$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2\ln(x)}[t]_x^{x^2} \leq F(x) + \ln(2) \leq \frac{1}{\ln(x)}[t]_x^{x^2}$$
$$\Rightarrow \frac{x^2-x}{2\ln(x)} \leq F(x) + \ln(2) \leq \frac{x^2-x}{\ln(x)}$$

$(\forall x \in]0,1[)$

ب- لندرس قابلية اشتقاق F على يمين 0.

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = \frac{F(x) + \ln(2)}{x} \quad \forall x \in]0,1[$$

$$\frac{x-1}{2\ln(x)} \leq \frac{F(x) + \ln(2)}{x} \leq \frac{x-1}{\ln(x)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{2\ln(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{\ln(x)} = 0$$

وعليه:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x) + \ln(2)}{x} = 0 \in \mathbb{R}$$

إذن F قابلة للاشتقاق على يمين 0.

3) أ- لدينا: $t \to f(t)$ متصلة على $[x, x^2]$ $(\forall x > 1)$

وعليه: $\exists c \in [x, x^2] \,/\, f(c) = \frac{1}{x^2-x} F(x)$

أي: $\exists c \in [x, x^2] \,/\, F(x) = (x^2-x) f(c)$ $(\forall x > 1)$

ب- $x \leq c \leq x^2 \Rightarrow f(x^2) \leq f(c) \leq f(x)$

(f تناقصية على $[x, x^2]$ ، $x^2 > x$ $(\forall x > 1)$)

وعليه:

$$(x^2-x) f(x^2) \leq (x^2-x) f(c) \leq (x^2-x) f(x)$$

$(x^2-x)f(x^2) \leq F(x) \leq (x^2-x)f(x)$

$\lim_{x\to 1^+} (x^2-x)f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2-x)f(x^2) = 0$

ومنه:

$\lim_{x\to 1^+} F(x) = 0 = F(1)$

← إذن F متصلة على يمين النقطة 1

$$\frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \frac{F(x)}{x-1}$$

$$x f(x^2) \leq \frac{F(x)}{x-1} \leq x f(x)$$

$\lim_{x\to 1^+} x f(x^2) = \lim_{x\to 1^+} x f(x) = 1$

وعليه:

$\lim_{x\to 1^+} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = 1 \in \mathbb{R}$

← إذن F قابلة للاشتقاق على يمين النقطة 1.

ج- لنبين أن: $F(x) \geq \ln x$.

لدينا:

$$F(x) - \ln x = \int_1^{x^2} \frac{t-1}{t\ln(t)}dt - \int_1^{x^2} \frac{1}{t}dt$$

$$= \int_1^{x^2} \frac{t-1-\ln(t)}{t\ln(t)}dt$$

$$= \int_1^{x^2} \frac{-(\ln(t)-t+1)}{t\ln(t)}dt$$

لدينا (من خلال س 2-ب ج)

$-(\ln(t)-t+1) = -g(t) \geq 0 \quad \forall t \in]1,+\infty[$

$t\ln(t) \geq 0$ و

وعليه:

$$\int_1^{x^2} \frac{-(\ln(t)-t+1)}{t\ln(t)}dt \geq 0$$

أي:

$F(x) \geq \ln(x) \quad \forall x \in [1,+\infty[$

لنحسب $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

حسب مصاديق التقارب.

$\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

4) أ- لنبين أن F قابلة للاشتقاق على كل من $]0,1[$ و $]1,+\infty[$

$t \mapsto f(t)$ متصلة على كل من $]0,1[$ و $]1,+\infty[$

ومنه فهي تقبل دالة أصلية G بحيث:

$F(x) = G(x^2) - G(x)$.

$x \mapsto x^2$ قابلة للاشتقاق على $]0,1[$ و $]1,+\infty[$

$f(]0,1[) \subset]0,1[$

$f(]1,+\infty[) \subset]1,+\infty[$

$x \mapsto G(x)$ قابلة للاشتقاق على $]0,1[\cup]1,+\infty[$

ومنه:

$x \xrightarrow{F} G\circ g(x)$ قابلة للاشتقاق على كل من $]0,1[$ و $]1,+\infty[$.

$$F'(x) = 2x\,G'(x^2) - G'(x)$$
$$= 2x\,f(x^2) - f(x)$$
$$= 2x\left(\frac{x^2-1}{2x^2\ln(x)}\right) - \left(\frac{x-1}{x\ln(x)}\right)$$
$$= \frac{x^2-x}{x\ln(x)}$$
$$= \frac{x-1}{\ln(x)}$$

$\frac{x-1}{\ln(x)} > 0 \quad \forall x \in (]0,1[\cup]1,+\infty[)$

وعليه F تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$.

جدول التغيرات.

x	0		1		$+\infty$
$F'(x)$	‖	$+$	‖	$+$	
$F(x)$	$-\ln(2)$	↗	0	↗	$+\infty$

من انجاز التلميذة: أمينة سامي

تحت اشراف الأستاذ:

المانتي بوشعيب.

2014-13	فرض رقم 4	2SM

ليكن n عدد من $\mathbb{N}^*$ و نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $[0,+\infty[$

بما يلي : $x \neq 0$; $f_n(x) = xe^{-\frac{n}{x}}$ و $f_n(0)=0$

الجزء الأول :

1) أ- بين أن f_n متصلة على يمين $x_0 = 0$

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على يمين $x_0 = 0$

2) أ- أحسب المشتقة $f_n'(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$

ب- أدرس تغيرات الدالة f_n و ضع جدول تغيراتها

3) أ- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n)

ب- أرسم المنحنى (C_2)

الجزء الثاني :

1) أ- بين أن المعادلة $f_n(x)=1$ تقبل حلا وحيدا U_n

ب- بين أن $U_n > 1$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

2) أ- بين أن $f_n(U_{n+1}) = e^{\frac{1}{U_{n+1}}}$

ب- استنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية

3) أ- بين أن $U_n \ln U_n = n$

ب- بين أن الدالة $g(x) = x\ln x$ تقابل من المجال $[1,+\infty[$ نحو مجال يتم تحديده و استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

4) أ- بين العلاقة $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad : \quad \ln U_n + \ln(\ln U_n) = \ln n$

ب- استنتج النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln U_n}{\ln n}$

5) نعتبر $I_n = \int_{U_n}^{U_{n+1}} f_n(t)\,dt$ لكل n عدد من $\mathbb{N}^*$ و نضع $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} I_k$

أ- بين أن $1 \le \frac{I_n}{U_{n+1}-U_n} \le e^{\frac{1}{U_{n+1}}}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ و استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_n}{U_{n+1}-U_n}$

ب- أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

الجزء الثالث :

لتكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$x \neq 0$; $F(x) = \int_x^{2x} f_2(t)\,dt$ و $F(0)=0$

1) أ- بين أن $0 < e^{-\frac{2}{t}} < 1$ $(\forall t > 0)$

ب- بين أن F متصلة و قابلة للاشتقاق على يمين $x_0 = 0$

2) أ- بين أن $e^t \ge t+1$ $(\forall t \in \mathbb{R})$

ب- بين أن $F(x) \ge -2x + \frac{3}{2}x^2$ $(\forall x > 0)$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

ج- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (Γ_F) عند $+\infty$

3) أ- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

و بين أن $F'(x) = \left(4e^{\frac{1}{x}} - 1\right) f_2(x)$

ب- أدرس تغيرات الدالة F و أنجز جدول التغيرات

4) أرسم المنحنى (Γ_F)

5) أ- بين أن $x^2 e^{-\frac{2}{x}} \le F(x) \le 2x^2 e^{-\frac{1}{x}}$ $(\forall x > 0)$

ب- بين أن $e^x > ex$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ و استنتج أن $F\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right) < \sqrt{\frac{e}{2}}$

6) أ- بين أن $F(x) \ge x$ $(\forall x \ge U_2)$

ب- استنتج أن $\alpha = \int_\alpha^{2\alpha} f_2(t)\,dt$ $\left(\exists \alpha \in \left[\sqrt{\frac{e}{2}}, U_2\right]\right)$

حظ سعيد

تصحيح الفرض المحروس رقم 4
الدورة الثانية

مسألة:

لتكن f_n الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f_n(x) = xe^{-\frac{n}{x}} & ; x \neq 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

حيث $n \in \mathbb{N}^*$

الجزء الأول:

1- أ- اتصال f_n على يمين $x_0=0$:

لدينا: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_n(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} xe^{-\frac{n}{x}}$

وبما أن: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(-\frac{n}{x}\right) = -\infty$

أي: $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{n}{x}} = 0$

فإن: $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = 0 = f_n(0)$

وهذا يعني أن الدالة f_n متصلة على يمين $x_0=0$.

ب- قابلية اشتقاق الدالة f_n على يمين $x_0=0$:

لدينا: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{n}{x}}$

$=0$

[حسب حل السؤال 1 الجزء أ من]

وعليه فإن الدالة f_n قابلة للاشتقاق على يمين $x_0=0$ و $(f_n')_d(0)=0$.

2- أ- حساب المشتقة $f_n'(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$:

لدينا: $f_n'(x) = (xe^{-\frac{n}{x}})'$

$= e^{-\frac{n}{x}} + x\times\left(-\frac{n}{x}\right)' e^{-\frac{n}{x}}$

$= e^{-\frac{n}{x}} + \frac{n}{x}e^{-\frac{n}{x}}$

$\boxed{f_n'(x) = \left(1+\frac{n}{x}\right)e^{-\frac{n}{x}}}$; $x \in]0,+\infty[$

ب- دراسة تغيرات الدالة f_n وجدول تغيراتها:

لدينا: $(\forall x>0)$: $e^{-\frac{n}{x}} > 0$

و $1+\frac{n}{x} > 0$

أي أن: $f_n'(x) > 0$

وهذا يعني أن f_n دالة تزايدية قطعاً على $]0,+\infty[$.

وبالتالي فجدول تغيراتها كالتالي:

x	0		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	$+$	
f_n	0	↗	$+\infty$

3) أ- دراسة الفرع اللانهائي لمنحنى (C_n):

لدينا: $\lim\limits_{+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{+\infty} xe^{-\frac{n}{x}}$

وبما أن: $\lim\limits_{+\infty} -\frac{n}{x} = 0$

والدالة $x \to e^x$ متصلة في 0

فإن: $\lim\limits_{+\infty} e^{-\frac{n}{x}} = e^0 = 1$

مع $\lim\limits_{+\infty} x = +\infty$

يكون لدينا: $\left\{\lim\limits_{+\infty} f_n(x) = +\infty\right\}$

ولدينا: $\lim\limits_{+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{n}{x}}$

$=1$

[حسب ما سبق]

ولدينا أيضاً: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) - x$

$= \lim\limits_{+\infty} x\left(e^{-\frac{n}{x}} - 1\right)$

$= \lim\limits_{+\infty} -n\left(\frac{e^{-\frac{n}{x}}-1}{(-n/x)}\right)$

وبما أن $\frac{n}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

فإن $\lim_{+\infty} \frac{e^{-\frac{n}{x}} - 1}{\left(-\frac{n}{x}\right)}$

$= \lim_{X \to 0} \frac{e^{X} - 1}{X} = 1$

إذن $\left\{ \lim_{+\infty} f_n(x) - x = -n \right\}$

بمعنى أن: $(\Delta): y = x - n$ مقارب مائل لـ C_n بجوار $+\infty$.

ب- منحنى الدالة f_2:

لدينا $f_2'(x) = e^{-\frac{2}{x}}\left(1 + \frac{2}{x}\right)$

و $(\Delta): y = x - 2$ مقارب مائل لـ C_n بجوار $+\infty$

10 جزء (شائع)

1- أ- المعادلة $f_n(x) = 1$ لها حل وحيد y_n:

الدالة f_n متصلة على $[0, +\infty[$ وتزايدية قطعاً على هذا المجال إذن فهي تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$.

وبما أن $1 \in \mathbb{R}^+$ فإنه:

$(\exists! y_n \in \mathbb{R}^+) : f_n(y_n) = 1$

وهذا هو المطلوب.

ب- نبين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : y_n > 1$

لدينا $y_n > 1 \Leftrightarrow f_n(y_n) > f_n(1)$

[لأن الدالة f_n تزايدية]

$\Leftrightarrow 1 > e^{-n}$

$\Leftrightarrow e^{n} > 1$

وبما أن العبارة الأخيرة صحيحة لكل n من $\mathbb{N}^*$ فإن:

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \boxed{y_n > 1}$

2) أ- نبين أن $f_n(y_{n+1}) = e^{\frac{1}{y_{n+1}}}$

لدينا $f_n(y_{n+1}) = y_{n+1} e^{-\frac{n}{y_{n+1}}}$

ومن جهة ثانية لدينا

$f_{n+1}(y_{n+1}) = 1 \Leftrightarrow y_{n+1} e^{-\frac{n+1}{y_{n+1}}} = 1$

$\Leftrightarrow y_{n+1} = e^{\frac{n+1}{y_{n+1}}}$

ومنه $f_n(y_{n+1}) = e^{\frac{n+1}{y_{n+1}}} \times e^{-\frac{n}{y_{n+1}}}$

وعليه فإن $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\boxed{f_n(y_{n+1}) = e^{\frac{1}{y_{n+1}}}}$

ب- استنتاج رتابة المتتالية (y_n):

لدينا $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : y_n > 1$

$\Leftarrow \frac{1}{y_{n+1}} > 0$

أي أن $e^{\frac{1}{y_{n+1}}} > 1$

ومنه $f_n(y_{n+1}) > f_n(y_n)$

وبما أن f_n تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}^+$.

فإن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : y_{n+1} > y_n$

وبالتالي فإن (u_n) تزايدية .

2) أ- نبين أن $u_n \ln u_n = n$

لدينا $\ln(u_n) = 1 \Leftrightarrow u_n e^{-\frac{n}{u_n}} = 1$

$\Leftrightarrow u_n = e^{\frac{n}{u_n}}$

$\Leftrightarrow \ln u_n = \frac{n}{u_n}$

إذن $\boxed{u_n \ln u_n = n}$

ب- نبين أن $g(x) = x\ln x$ تقابل من $[1,+\infty[$ نحو مجال يتم تحديده

لدينا $x \to \ln x$ متصلة على $[1,+\infty[$

و $x \to x$ متصلة على $[1,+\infty[$

إذن $x \xrightarrow{g} x\ln x$ متصلة على $[1,+\infty[$

و $g'(x) = \ln x + 1$

بما أن $x \geq 1$

$\ln x \geq 0$

أي : $g'(x) \geq 1 > 0$

وهذا يعني أن g تزايدية قطعا على $[1,+\infty[$.

إذن g تقابل من $[1,+\infty[$ نحو المجال I بحيث

$I = g([1,+\infty[) = [g(1), \lim_{+\infty} g[$

$= [0,+\infty[$

• نهاية $(u_n)_n$:

لدينا $g(u_n) = n$

ومنه $u_n = g^{-1}(n)$

وبما أن g تقابل من $[1,+\infty[$ نحو $\mathbb{R}^+$

فإن $\lim_{+\infty} g^{-1}(x) = +\infty$

وكنتيجة لذلك فإن $\{\lim_{+\infty} u_n = +\infty\}$

4) أ- نبين أن

$\ln u_n + \ln \ln u_n = \ln n$ (*)

لدينا حسب السؤال (3) الجزء (أ) منه

$u_n \ln u_n = n$

ومنه :

$\ln(u_n \ln u_n) = \ln n$

أي أن $\boxed{\ln u_n + \ln(\ln u_n) = \ln n}$

وذلك لكل n من $\mathbb{N}^*$.

ب- استنتاج النهاية $\lim_{+\infty} \frac{\ln u_n}{\ln n}$:

لدينا $\ln u_n + \ln(\ln u_n) = \ln n$

$\Leftrightarrow \frac{\ln u_n}{\ln n} + \frac{\ln(\ln u_n)}{\ln u_n} \times \frac{\ln u_n}{\ln n} = 1$

وعليه: $\frac{\ln u_n}{\ln n}\left(1 + \frac{\ln(\ln u_n)}{\ln u_n}\right) = 1$

أي أن $\frac{\ln u_n}{\ln n} = \frac{1}{1 + \frac{\ln(\ln u_n)}{\ln u_n}}$

وبما أن $u_n \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

فإن $\ln u_n \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

وعليه $\lim_{+\infty} \frac{\ln(\ln u_n)}{\ln u_n} = 0$

وبالتالي فإن $\boxed{\lim_{+\infty} \frac{\ln u_n}{\ln n} = 1}$

5) نعتبر $I_n = \int_{u_n}^{u_{n+1}} \ln(t)\,dt$ لكل n من $\mathbb{N}^*$ ونضع $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} I_n$:

أ- نبين أن $1 \leq \frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} \leq e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$:

لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا $u_n \leq u_{n+1}$

ولكل t من $[u_n, u_{n+1}]$:

$$u_n \leq t \leq u_{n+1}$$

و الدالة h تزايدية :

إذن

$$h(u_n) \leq h(t) \leq h(u_{n+1})$$

أي $1 \leq h(t) \leq e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$

وعليه

$$\int_{u_n}^{u_{n+1}} dt \leq I_n \leq e^{\frac{1}{u_{n+1}}} \int_{u_n}^{u_{n+1}} dt$$

$$[t]_{u_n}^{u_{n+1}} \leq I_n \leq e^{\frac{1}{u_{n+1}}} \cdot [t]_{u_n}^{u_{n+1}}$$

$$u_{n+1} - u_n \leq I_n \leq (u_{n+1} - u_n)\, e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$$

إذن

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $\boxed{1 \leq \frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} \leq e^{\frac{1}{u_{n+1}}}}$

← مع العلم أن $u_{n+1} - u_n > 0$.

وبما أن $u_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

فإن $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{u_{n+1}} = 0$

و $x \to e^x$ متصلة في 0 .

⇐ $\lim_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{u_{n+1}}} = e^0 = 1$

وهذا يعني أن

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} = 1$$

ب- حساب النهاية $\lim_{n \to +\infty} S_n$

لدينا $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $I_n \geq u_{n+1} - u_n$

ومنه $I_k \geq u_{k+1} - u_k$

أي أن $\sum_1^n I_k \geq \sum_1^n (u_{k+1} - u_k)$

$$S_n \geq u_{n+1} - u_1$$

وحيث أن $\lim_{n \to +\infty} (u_{n+1} - u_1) = +\infty$

فإن $\left\{ \lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty \right\}$

الجزء الثالث

لتكن F الدالة بحيث :

$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} h(t)\,dt \,;\, x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

حيث من $\mathbb{R}^+$ إلى $\mathbb{R}$

1) أ- نبين أن $(\forall t \in \mathbb{R}^+)$: $0 < e^{-\frac{2}{t}} < 1$

بما يعني أن $e^{-\frac{2}{t}} > 0$ وذلك

لكل t من $\mathbb{R}^*$.

ولدينا $e^{-\frac{2}{t}} < 1$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{t} < 0 \quad [t > 0]$

$\Leftrightarrow -2 < 0$

عبارة صحيحة.

ومنه لكل t من $\mathbb{R}^*$: $\boxed{0 < e^{-\frac{2}{t}} < 1}$

ب- اتصال F وقابلية اشتقاق F على يمين الصفر :

لدينا $0 < e^{-\frac{2}{t}} < 1$ $\quad \forall t \in [x, 2x]$

ومنه $0 < t e^{-\frac{2}{t}} \leq 2x$

أي أن $0 < F(x) < 2x \int_x^{2x} dt$: $\left(\begin{matrix} \text{لأن} \\ x \leq 2x \end{matrix} \right)$

$(\forall x > 0)$: $\{ 0 < F(x) < 2x^2 \}$ (*)

وبما أن $\lim_{x \to 0^+} 2x^2 = 0$

فإن $\lim_{x \to 0^+} F(x) = 0 = F(0)$

يعني F متصلة على يمين الصفر .

ومن العلاقة (*) نجد أن

$(\forall x>0)$: $0 < \frac{F(x)}{x} < 2x$

وحيث أن $\lim_{x\to 0^+} 2x = 0$

فإن $\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x} = 0$

ومنه فإن F قابلة للاشتقاق على يمين $x=0$ و $F'_d(0)=0$.

2) أ- نبين أن $(\forall t\in\mathbb{R}) : e^t \geq t+1$

لتكن h الدالة بحيث:

$(\forall t\in\mathbb{R}) : h(t) = e^t - t - 1$

h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و:

$h'(t) = e^t - 1$

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

نلاحظ أن 0 قيمة دنيا مطلقة للدالة h

ومنه $(\forall t\in\mathbb{R}) : h(t) \geq 0$

أي أن $(\forall t\in\mathbb{R}) : \boxed{e^t \geq t+1}$

ومنه النتيجة.

ب- نبين أن $(\forall x>0) : F(x) \geq -2x+\frac{3}{2}x^2$

لدينا $(\forall t\in\mathbb{R}) : e^t \geq t+1$

ومنه $e^{-\frac{2}{t}} \geq -\frac{2}{t}+1$

أي $t e^{-\frac{2}{t}} \geq -2+t$ [ضرب t موجب قطعا]

فبالتالي $F(x) \geq \int_x^{2x} (-2+t)\,dt$ ، (لأن $x<2x$)

$F(x) \geq \left[-2t+\frac{t^2}{2}\right]_x^{2x}$

بعد الحساب نجد أن

$(\forall x>0)$: $\boxed{F(x) \geq -2x+\frac{3}{2}x^2}$

وبما أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2}x^2-2x = +\infty$

فإن $\left\{\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty\right\}$

ج- دراسة الفرع اللانهائي لـ C_F بجوار $+\infty$

لدينا $\lim_{+\infty} F(x) = +\infty$

ولدينا $(x>0) : F(x) \geq -2x+\frac{3}{2}x^2$

$\Leftarrow \frac{F(x)}{x} \geq -2+\frac{3}{2}x$

وحيث أن $\lim_{+\infty} \frac{3}{2}x = +\infty$

فإن $\left\{\lim_{+\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty\right\}$

نستنتج أن C_F يقبل محور الأراتيب كاتجاه مقارب.

3- أ- نبين أن F قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$:

لدينا $t \to -\frac{2}{t}$ متصلة على $]0,+\infty[$.

إذن $t \to e^{-\frac{2}{t}}$ متصلة على $]0,+\infty[$

و $t \to t$ متصلة على $]0,+\infty[$

$\Leftarrow t \to te^{-\frac{2}{t}}$ متصلة على $]0,+\infty[$

إذن فهي تقبل دالة أصلية G معرفة على $]0,+\infty[$.

ومنه $F(x) = G(2x) - G(x)$

بما أن $x \xrightarrow{v} 2x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*_+$

و $v(\mathbb{R}^*_+) = \mathbb{R}^*_+$

و $x \mapsto H(x)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$

كما أن $x \xrightarrow{\text{مع}} H(2x)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$.

و منه فإن الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$.

و $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$:

$$F'(x) = (2x)' h'(2x) - h'(x)$$
$$= 2h(2x) - h(x)$$
$$= 2 \times 2x e^{-\frac{1}{x}} - x e^{-\frac{2}{x}}$$
$$= x\left(4e^{\frac{1}{x}} - 1\right) e^{-\frac{2}{x}}$$

و بالتالي فإن لكل x عنصر من $\mathbb{R}_+^*$ ،

$$\boxed{F'(x) = \left(4e^{\frac{1}{x}} - 1\right) h(x)}$$

بما أن تغيرات الدالة F ،

لما أن $e^{-\frac{2}{x}} > 0$ ، $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$

و لدينا $x > 0$ فإن $h(x) > 0$

و لدينا $\frac{1}{x} > 0$

و $e^{\frac{1}{x}} \geq 1$

$4e^{\frac{1}{x}} - 1 \geq 3 > 0$

وعليه ، $(4e^{\frac{1}{x}} - 1) h(x) = F'(x) > 0$

إذن F تزايدية قطعاً ،

و منه نجد و تغيراتها كالتالي ،

x	0	$+\infty$
$F(x)$	0 ↗	$+\infty$

4) المنحنى T_F :

5) أ- نبين أن ،

$(\forall x > 0)$: $x^2 e^{-\frac{2}{x}} \leq F(x) \leq 2x^2 e^{-\frac{1}{x}}$

لدينا لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ $x < 2x$

و لكل t من $[x, 2x]$:

$x \leq t \leq 2x$

و h دالة تزايدية ،

$h(x) \leq h(t) \leq h(2x)$

$$x e^{-\frac{2}{x}} \int_x^{2x} dt \leq \int_x^{2x} h(t)\,dt \leq 2x e^{-\frac{1}{x}} \int_x^{2x} dt$$

$$x e^{-\frac{2}{x}} \cdot [t]_x^{2x} \leq F(x) \leq 2x e^{-\frac{1}{x}} \cdot [t]_x^{2x}$$

$(\forall x > 0)$ $\boxed{x^2 e^{-\frac{2}{x}} \leq F(x) \leq 2x^2 e^{-\frac{1}{x}}}$

ب- نبين أن ، $(\forall x > 0)$: $e^x \geq e.x$

حسب السؤال (2) الجزء (أ) منه لدينا

$(\forall t \in \mathbb{R})$: $e^t \geq t + 1$

و منه ، $e^{x-1} \geq x$

أي أن ، $e.e^{x-1} \geq e.x$

وعليه ، $(\forall x > 0)$: $\{e^x \geq e.x\}$

نستنتج أن ، $F\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right) < \sqrt{\frac{e}{2}}$

لدينا $F\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right) \leq e\, e^{-\sqrt{\frac{2}{e}}}$

[* حسب السؤال (2أ)].

و حسب السؤال السابق لدينا

$$e^{\sqrt{\frac{e}{2}}} \geq e\sqrt{\frac{2}{e}} = \sqrt{2e}$$

$$e^{-\sqrt{\frac{2}{e}}} \leq \frac{1}{\sqrt{2e}}$$

$$F\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right) \leq \frac{e}{\sqrt{2e}} = \sqrt{\frac{e}{2}}$$

و هذا هو المطلوب.

6) أ- نبين أن $(\forall x \geq 4) : F(x) \geq x$

لدينا $t \geq x \geq 4$

و h دالة تزايدية،

و منه $h(t) \geq h(4) = 1$

إذن $F(x) \geq \int_x^{2x} dt$: $(x < 2x)$

$$F(x) \geq 2x - x$$

$$(\forall x \geq 4) \quad \{F(x) \geq x\}$$

ب- نستنتج أن

$$(\exists \alpha \in [\sqrt{\tfrac{e}{2}}, 4]) : \alpha = \int_\alpha^{2\alpha} h(t)\, dt$$

نعتبر الدالة : $\Phi(x) = F(x) - x$

حيث x عنصر من $[\sqrt{\frac{e}{2}}, 4]$.

بما أن F متصلة على $[\sqrt{\frac{e}{2}}, 4]$

فإن Φ متصلة على $[\sqrt{\frac{e}{2}}, 4]$

و لدينا $\Phi\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right) = F\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right) - \sqrt{\frac{e}{2}} < 0$

$$\Phi(4) = F(4) - 4 > 0$$

إذن $\Phi\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right) \cdot \Phi(4) < 0$

فحسب مبرهنة القيم الوسطية :

$$(\exists \alpha \in [\sqrt{\tfrac{e}{2}}, 4]) : \Phi(\alpha) = 0$$

أي أن $\boxed{(\exists \alpha \in [\sqrt{\tfrac{e}{2}}, 4]) : F(\alpha) = \alpha}$

و منه النتيجة.

انتهى الموضوع

www.bestcours.net

من إقتراح التلميذ
حسني الإدريسي
تحت
إشراف :
ذ - الهاشمي