الجزء الأول:

1. بين أن: $(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[),\ \dfrac{x^2-x}{2\ln(x)} \leq \displaystyle\int_x^{x^2} \dfrac{dt}{\ln(t)} \leq \dfrac{x^2-x}{\ln(x)}$.

2. نعتبر الدالة φ المعرفة على المجال $]0,1[\cup]1,+\infty[$ كما يلي:

$$\varphi(x) = \frac{x-1}{\ln(x)} \text{ و } \varphi(0)=0 \text{ و } \varphi(1)=1 .$$

(أ) بين أن : $(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[),\ x-1-x\ln(x) < 0$ ، ثم استنتج رتابة الدالة φ على المجال $[0,+\infty[$.

(ب) باستعمال رتابة الدالة φ ، بين أن:

$$(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[),\ x-1 \leq \int_x^{x^2} \frac{\varphi(t)}{\ln(t)}dt \leq \frac{x^2-1}{2} .$$

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة φ المعرفة على المجال $]0,1[\cup]1,+\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = -\ln(x+1) + \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \text{ و } f(0)=f(1)=0 .$$

1. بين أن الدالة f متصلة و قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر .

2. ادرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f .

3. تحقق من أن: $(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[),\ \displaystyle\int_x^{x^2} \dfrac{\varphi(t)}{\ln(t)}dt = f(x) + \ln\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$ ، ثم استنتج أن الدالة f متصلة و قابلة للاشتقاق في النقطة ذات الأفصول $x_0 = 1$.

بين أنه يوجد α من المجال $]0,1[$ بحيث : $f'(\alpha) = 0$.(يمكنك استعمال مبرهنة رول)
