LES STRUCTURES ALGÉBRIQUES

Année scolaire : 2019 - 2020

Lycée Mohammed Zerktouni - Direction provinciale Nouaceur

Contact : aminesouhir0@gmail.com

1 Loi de composition interne

- **Activité d'introduction :**

Soit $E = \{0,1,2,3,4\}$.

Pour tout $(x,y) \in E^2$ on note $x * y$ le reste de la division euclidienne de $x+y$ par 5.

1. Calculer $2*2$ et $3*4$ et $4*1$.

2. Montrer que $x*y \in E$ pour tout $(x,y) \in E^2$.

- **Réponse :**

1. On a $2+2=4$ et $4 \equiv 4[5]$, donc $2*2=4$.

On a $3+4=7$ et $7 \equiv 2[5]$, donc $3*4=2$.

On a $4+1=5$ et $5 \equiv 0[5]$, donc $4*1=4$.

2. Soit $(x,y) \in E^2$.

D'après la division euclidienne de $x+y$ par 5 : $\left(\exists!(q,r) \in \mathbb{Z}^2\right) : x+y = 5q+r$ et $0 \leq r < 5$.

Donc $x*y = r \in E$.

Ainsi $x*y \in E$ pour tout $(x,y) \in E^2$.

> Puisque pour tout $(x,y) \in E^2$: $x*y \in E$, on dit qu'on a définit une **loi de composition interne** dans E (Abréviation : LCI), c'est-à-dire lorsqu'on « **compose** » deux éléments de E, on obtient toujours un autre élément qui est aussi dans E.

1.1 Définition et exemples

Définition 1

Soit E un ensemble non vide.

On appelle **loi de composition interne** toute application définie de $E \times E$ vers E :

$$\begin{array}{rccc} f: & E \times E & \to & E \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

Généralement on note $f(x,y)$ par $x*y$ ou $x \top y$ ou $x \perp y$ ...

- On dit alors que l'ensemble E est **muni** d'une loi de composition interne $*$, et on note $(E,*)$.
- $x*y$ s'appelle le **composé** de x et y par la loi $*$.

Exemples :

1. L'addition $+$ et la multiplication $\times$ sont des lois de composition internes sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

2. La soustraction $-$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, mais pas sur $\mathbb{N}$.

3. Soit $E = \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le composition $\circ$ est une loi de composition interne sur E.

4. Soit E un ensemble, sur $\mathscr{P}(E)$ l'intersection $\cap$ et l'union $\cup$ sont des lois de composition internes.

5. Soit $E = \mathscr{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'addition, la multiplication et la composition sont des lois de composition internes sur E.

Remarque :
On peut définir des lois de compositions internes dans $\mathbb{R}^2$ à partir des lois $+$ et $\times$ dans $\mathbb{R}$.

Par exemple : $\forall(a,b),(a',b') \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases}(a,b) \oplus (a',b') = (a+a',b+b') \\ (a,b) \otimes (a',b') = (ab',a'b)\end{cases}$.

Et on a $\oplus$ et $\otimes$ sont des lois de composition internes dans $\mathbb{R}^2$.

Application :
Soit $E =]-1,1[$, on définit l'application $*$ par :

$$\forall(x,y) \in E^2 : x * y = \frac{x+y}{1+xy}$$

1. Montrer que $\forall(x,y) \in E^2 : 1+xy > 0$.
2. Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans E.

1.2 Partie stable - Loi induite

Définition 2

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$, et $F \subset E$.

- On dit que F est **stable** par la loi $*$, ou F est une **partie stable** de $(E,*)$, si :

$$\boxed{\forall(x,y) \in F^2 : x * y \in F}$$

- Par conséquent l'application définie par $\begin{matrix} F^2 & \to & F \\ (x,y) & \mapsto & x * y \end{matrix}$ est une loi de composition interne sur F appelée **loi induite** par $*$ sur F.

Exemples :

1. Soit $2\mathbb{Z} = \{2k \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des entiers pairs, on a $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ et $2\mathbb{Z}$ est stable par la loi $+$ et la loi $\times$ de $\mathbb{Z}$, donc $2\mathbb{Z}$ est une partie stable de $(\mathbb{Z},+)$ et de $(\mathbb{Z},\times)$.
2. Soit $F = \{-1,1\}$, on a $F \subset \mathbb{Z}$ et F est stable par la loi $\times$ mais pas par la loi $+$ car $1+1 = 2 \notin F$, d'où F est une partie stable de $(\mathbb{Z},\times)$ mais pas de $(\mathbb{Z},+)$.

Remarque :
Si $\exists(x,y) \in F^2 : x * y \notin F$ alors F n'est pas stable dans $(E,*)$.

Application :

1. Soit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1\}$.
   Étudier la stabilité de $\mathbb{U}$ dans $(\mathbb{C},+)$ et $(\mathbb{C},\times)$.
2. Soit $F = \{2^n \,/\, n \in \mathbb{Z}\}$.
   Étudier la stabilité de F dans $(\mathbb{Q},+)$ et $(\mathbb{Q},\times)$.

2 Propriétés d'une loi de composition interne

2.1 Associativité et commutativité

Définition 3

Soit $(E,*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne.

- On dit que la loi $*$ est **associative** dans E si :

$$\boxed{\forall(x,y,z)\in E^3 : (x*y)*z = x*(y*z)}$$

- On dit que la loi $*$ est **commutative** dans E si :

$$\boxed{\forall(x,y)\in E^2 : x*y = y*x}$$

Exemples :

1. Sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ les lois $+$ et $\times$ sont associatives et commutatives, la soustraction n'est ni commutative, ni associative : $2-3\neq 3-2$ et $(1-2)-3\neq 1-(2-3)$.
2. Sur $\mathscr{P}(E)$ l'intersection $\cap$ et l'union $\cup$ sont associatives et commutatives.
3. Sur $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la composition $\circ$ est associative mais pas commutative : $f(x)=x^2$ et $g(x)=e^x$, $g\circ f(x)=e^{x^2}$ mais $f\circ g(x)=e^{2x}$.

Remarque :

Si une loi $*$ est associative dans E, on peut enlever les parenthèses et écrire :

$$\boxed{\forall(x,y,z)\in E^3 : x*y*z = (x*y)*z = x*(y*z)}$$

Application :

Étudier l'associativité et la commutativité des lois de composition internes suivantes :

1. $E=\mathbb{R}$ et $\forall(x,y)\in E^2 : x*y = 2^{xy}$.
2. $E=\mathbb{R}^2$ et $\forall(x,y),(x',y')\in E : (x,y)\top(x',y') = (xx', xy'+x'y)$.

2.2 Élément neutre d'une loi de composition interne

Définition 4

Soit $(E,*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne.

Un élément $e\in E$ est dit **élément neutre** pour la loi $*$ dans E si :

$$\boxed{(\forall x\in E) : x*e = x \ \ \underline{\text{et}} \ \ e*x = x}$$

Exemples :

1. 0 est un élément neutre de $(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{C},+)$.
2. 1 est un élément neutre de $(\mathbb{N},\times)$, $(\mathbb{Z},\times)$, $(\mathbb{Q},\times)$, $(\mathbb{R},\times)$ et $(\mathbb{C},\times)$.
3. $\varnothing$ est un élément neutre de $(\mathscr{P}(E),\cup)$ et E est un élément neutre de $(\mathscr{P}(E),\cap)$.
4. Le fonction identique $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : x\mapsto x$ est un élément neutre de $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\circ)$.

Remarques :

1. Si la loi $*$ est commutative dans E, $e\in E$ est un élément neutre <u>si et seulement</u> si :

$$\boxed{(\forall x\in E) : x*e = x \ \ \underline{\text{ou}} \ \ e*x = x}$$

2. Si F est une partie stable de $(E,*)$, et e est un élément neutre de $(E,*)$, cela n'implique pas toujours que e est un élément neutre de $(F,*)$, considérons l'exemple suivant :
Sur $\mathbb{R}^2$ on définit la LCI suivante : $\forall(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2:(x,y)\top(x',y')=(xx',yy')$.

- On a $(1,1)\in\mathbb{R}^2$ est un élément neutre de $\left(\mathbb{R}^2,\top\right)$.
- Soit $F=\{(x,0)\,/\,x\in\mathbb{R}\}$, on vérifie facilement que F est stable dans $\left(\mathbb{R}^2,\top\right)$, mais $(1,1)\notin F$, de plus un élément neutre de $(F,\top)$ est $(1,0)$.

3. Trouver un élément e qui vérifie $(\forall x\in E):x*e=x$ <u>et</u> $e*x=x$, ne suffit pas pour conclure que e est un élément neutre, il faut <u>aussi vérifier</u> que $e\in E$ pour pouvoir conclure.

Application :
On muni $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne suivante :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2:x*y=xy+2x+2y+2$$

1. Vérifier que la loi $*$ est commutative dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre dans $(\mathbb{R},*)$ et déterminer le.

Proposition 1 : Unicité de l'élément neutre

Soit $(E,*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne.

« Si la loi $*$ admet un élément neutre dans E alors il est **unique** »

Preuve :

Si $*$ admet deux éléments neutres e et e' alors : $\begin{cases}e*e'=e\\e*e'=e'\end{cases}$, d'où $e=e'$, ainsi on a l'unicité.

2.3 Symétrique d'un élément

Définition 5

Soit $(E,*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne et possédant un élément neutre e.

➢ Un élément $x\in E$ est dit **symétrisable** (ou **inversible**) dans $(E,*)$ si :

$$\boxed{(\exists x'\in E):x*x'=e \ \underline{\text{ et }}\ x'*x=e}$$

➢ Un tel élément x' (s'il existe) est appelé un **symétrique** (ou **inverse**) de x pour la loi $*$.

Remarques :
1. Si x' est un symétrique de x pour la loi $*$, alors x est un symétrique de x' pour la loi $*$, on dit que x et x' sont symétriques dans $(E,*)$.
2. Si la loi $*$ est commutative dans E, x est symétrisable <u>si et seulement</u> si :

$$\boxed{(\exists x'\in E):x*x'=e \ \underline{\text{ ou }}\ x'*x=e}$$

Exemples :

1. Dans $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{C},+)$, tout élément x admet un symétrique qui est sont <u>opposé</u> $-x$.

2. Dans $(\mathbb{Q}^*,\times)$, $(\mathbb{R}^*,\times)$ et $(\mathbb{C}^*,\times)$, tout élément x admet un symétrique qui est sont <u>inverse</u> $x^{-1}=\dfrac{1}{x}$.

Application :

On muni $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne suivante :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x*y = xy+2x+2y+2$$

1. Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre e dans $(\mathbb{R},*)$ et déterminer le.

2. Est-ce que -2 est symétrisable dans $(\mathbb{R},*)$?

3. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, x est symétrisable, puis déterminer un symétrique de x.

Proposition 2 : Unicité du symétrique

Soit $(E,*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne.

On suppose que la loi $*$ est associative dans E et admet un élément neutre e, alors :

« Si un élément x est symétrisable dans $(E,*)$ alors son symétrique est **unique** »

Preuve :

Soit $x\in E$ un élément symétrisable.

Supposons que x admet deux symétriques x_1 et x_2 vérifiant :

$$[x_1 * x = e \text{ et } x*x_1 = e] \quad \text{et} \quad [x_2*x=e \text{ et } x*x_2=e]$$

On a $x_1 = x_1 * e$

$= x_1*(x*x_2)$

$= (x_1*x)*x_2 \quad \leftarrow \quad$ l'associativité

$= e*x_2$

$= x_2$

D'où $x_1 = x_2$, ainsi si x est symétrisable dans $(E,*)$, son symétrique est unique.

Proposition 3 : Symétrique du composé

Soit $(E,*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne.

On suppose que la loi $*$ est associative et admet un élément neutre e.

Si x et y sont deux éléments symétrisables dans $(E,*)$ de symétriques respectifs x' et y', alors $x*y$ est symétrisable dans $(E,*)$ et son symétrique est $y'*x'$, c'est-à-dire $(x*y)'=y'*x'$.

Preuve :

Soit x et y deux éléments symétrisables dans $(E,*)$ de symétriques respectifs x' et y'.

On a d'abord $y'*x'\in E$.

On a $(x*y)*(y'*x') = ((x*y)*y')*x'$ et $(y'*x')*(x*y) = ((y'*x')*x)*y$

$$\begin{aligned}
(x*y)*(y'*x') &= ((x*y)*y')*x' & \qquad (y'*x')*(x*y) &= ((y'*x')*x)*y\\
&= (x*(y*y'))*x' & &= (y'*(x'*x))*y\\
&= (x*e)*x' & &= (y'*e)*y\\
&= x*x' & &= y'*y\\
&= e & &= e
\end{aligned}$$

Donc $x*y$ est symétrisable dans $(E,*)$ et son symétrique est $y'*x'$.

Exemple (loi non associative) :

Considérons la loi de composition interne définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x*y = x^2.y^2 + x + y$$

- On a $x*0 = x$ et $0*x = 0$ donc 0 est l'élément neutre de $(\mathbb{R},*)$.
- La loi $*$ n'est pas associative, et commutative.
- Vérifions si -1 est symétrisable dans $(\mathbb{R},*)$:

  On a : $x*(-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$, le discriminant de cette équation est strictement positif, ce qui prouve qu'elle admet deux solutions distinctes, donc -1 est symétrisable et admet deux symétriques.

2.4 Élément régulier d'une loi de composition interne

Définition 6

Soit $(E,*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne.

Un élément $a\in E$ est dit **régulier** ou **simplifiable** dans $(E,*)$ si :

$$\boxed{\forall(x,y)\in E^2 : \begin{cases} a*x = a*y & \Rightarrow \quad x = y \quad (1) \\ x*a = y*a & \Rightarrow \quad x = y \quad (2) \end{cases}}$$

Remarque :

Si la loi $*$ est commutative dans E, alors l'une des implication (1) ou (2) suffit pour que l'élément a soit régulier.

Exemples :

1. Tout élément de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ est régulier pour la loi $+$.

Par exemple dans $(\mathbb{C},+)$, la loi $+$ est commutative et :

$$\forall(a,z_1,z_2)\in\mathbb{C}^3 : z_1 + a = z_2 + a \Rightarrow z_1 = z_2$$

2. Tout élément de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{C}^*$ est régulier pour la loi $\times$.

Remarque : $0\times 2 = 0\times 3 \not\Rightarrow 2 = 3$, d'où 0 n'est pas régulier.

Application :

1. On muni $\mathbb{N}^*$ de la loi de composition interne suivante :

$$\forall(n,m)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2 : n \top m = n^m$$

Déterminer les éléments réguliers de $(\mathbb{N}^*,\top)$.

2. Soit $*$ une loi de composition interne associative dans E, et possédant un élément neutre $e\in E$. Montrer que si a est symétrisable dans $(E,*)$ alors a est régulier dans $(E,*)$.

2.5 Notation additive - Notation multiplicative

- Une loi de composition interne est dite **additive** si elle est notée $+$.
- Une loi de composition interne est dite **multiplicative** si elle est notée $\times$ ou $\bullet$.

Dans ce cas on adopte les conventions de notation suivantes :

	La loi	L'élément neutre	Le symétrique de x	Le composé de x et y
Notation additive	$+$	0	$-x$ (Appelé l'opposé)	$x+y$
Notation multiplicative	$\times$ ou $\bullet$	1	x^{-1} (Appelé l'inverse)	$x.y$ ou $x\times y$ ou xy

- Si la loi est additive on note :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*:\ na=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{n\text{ fois}}}$$

- Si la loi est multiplicative on note :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*:\ a^n=\underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{n\text{ fois}}}$$

3 Groupe

- **Activité d'introduction :**

$$\text{Soit } A=\left\{a+b\sqrt{2}\ /\ (a,b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$$

1. Montrer que $+$ est une loi de composition interne sur A.
2. Montrer que la loi $+$ est associative dans A.
3. Vérifier que 0 est l'élément neutre de $(A,+)$.
4. Montrer que tout élément $x\in A$ est symétrisable dans $(A,+)$, et déterminer son symétrique.

3.1 Définition et exemples

Définition 7

Soit $(G,*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne.
On dit que $(G,*)$ est un **groupe** ou $(G,*)$ a une structure de **groupe** si :
1. La loi $*$ est associative dans G.
2. La loi $*$ admet un élément neutre dans G.
3. Tout élément de G est symétrisable dans $(G,*)$.
- Si de plus la loi $*$ est commutative dans $(G,*)$, on dit que $(G,*)$ est un **groupe commutatif**.

Exemples :
1. $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{C},+)$ sont tous des groupes commutatifs, et $(\mathbb{N},+)$ n'est pas un groupe.
2. $(\mathbb{Q}^*,\times)$, $(\mathbb{R}^*,\times)$ et $(\mathbb{C}^*,\times)$ sont tous des groupes commutatifs.

Remarque :
Il faut retenir ces groupes usuels qui vont être utilisés pas mal de fois pour résoudre des exercices.
Par exemple considérons l'ensemble $A=\{e^{ix}\ /\ x\in\mathbb{R}\}$.

- $\times$ est une loi de composition interne dans A.
- On a $A \subset \mathbb{C}$ et on sait que la loi $\times$ est associative et commutative dans $\mathbb{C}$, donc la loi $\times$ est associative et commutative dans A.
  (On a déduit l'associativité et la commutativité sans la démontrer)

Application :
Soit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$, montrer que $(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe commutatif.

3.2 Principales propriétés d'un groupe

Proposition 4

Soit $(G,*)$ un groupe, alors :

1. Tout élément de G admet un symétrique **unique**.
2. Pour tout $(x,y) \in G^2 : (x')' = x$ et $(x*y)' = y' * x'$.
3. Tout élément de G est régulier.

Preuve :

1. La loi $*$ étant associative donc le symétrique d'un élément est unique (déjà vu précédemment).
2. Déjà vu précédemment sous la condition que la loi $*$ soit associative.
3. Déjà vu dans l'application de la page 7.

Proposition 5

Soit $(G,*)$ un groupe.

- Pour tout couple $(a,b) \in G^2$, l'équation $a*x=b$ admet une unique solution dans G qui est $a'*b$, où a' désigne le symétrique de a dans $(G,*)$.
- Pour tout couple $(a,b) \in G^2$, l'équation $x*a=b$ admet une unique solution dans G qui est $b*a'$, où a' désigne le symétrique de a dans $(G,*)$.

Preuve :

Considérons l'équation $(E) : a*x=b$ où $(a,b) \in G^2$.

- <u>Montrons que si l'équation a une solution, alors elle est unique</u> :
  Supposons que l'équation (E) a deux solutions x_1 et x_2, on a alors :
  $\begin{cases} a*x_1 = b \\ a*x_2 = b \end{cases} \Rightarrow a*x_1 = a*x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ (car a est régulier), ce qui prouve l'unicité.
- <u>Résolvons l'équation</u> (E) dans G :
  On a : $$\begin{aligned} a*x=b &\Leftrightarrow a'*(a*x) = a'*b \\ &\Leftrightarrow (a'*a)*x = a'*b \\ &\Leftrightarrow e*x = a'*b \qquad (e \text{ designe l'élément neutre}) \\ &\Leftrightarrow x = a'*b \end{aligned}$$
  Et puisque $*$ est une loi de composition interne dans G alors $a'*b \in G$.
  Donc $a'*b$ est l'unique solution de l'équation (E).

De même on montre que l'équation $x*a=b$ admet une unique solution qui est $b*a'$.

Application :

Soit $(G,*)$ un groupe et $a \in G$.

Montrer que les applications $f: \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & a*x \end{array}$ et $g: \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & x*a \end{array}$ sont bijectives.

3.3 Sous-groupes et leurs propriétés

Définition 8

Soit $(G,*)$ un groupe et $H \subset G$.

On dit que $(H,*)$ est un **sous-groupe** de $(G,*)$ si :

- H est stable par la loi $*$, c'est-à-dire : $\left(\forall (x,y) \in H^2\right) : x*y \in H$.
- $(H,*)$ est un groupe.

Exemples :

1. $(\mathbb{Z},+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.
2. $(\mathbb{Q}^*,\times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*,\times)$, et $(\mathbb{R}^*,\times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$.
3. $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$.

Remarque :

Si $(G,*)$ est un groupe, on a immédiatement les deux sous-groupes (dites **triviaux)** suivants :

- $(G,*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$.
- $(\{e\},*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$, où e désigne l'élément neutre de $(G,*)$.

Proposition 6

Soit $(G,*)$ un groupe et e son élément neutre, et $(H,*)$ un sous-groupe de $(G,*)$, alors :

1. $H \neq \varnothing$.
2. e est l'élément neutre de $(H,*)$.
3. $(\forall x \in H) : x' \in H$ où x' est le symétrique de x dans $(G,*)$.

Preuve :

1. $(H,*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$, donc $(H,*)$ est un groupe, d'où $H \neq \varnothing$ car $(H,*)$ possède au moins son élément neutre.
2. Soit u l'élément neutre de $(H,*)$, donc $u*u = u$.
   Puisque e est l'élément neutre de $(G,*)$ alors $u*e = u$.
   Donc $u*u = u*e$, puisque u est régulier dans $(G,*)$, alors $\boxed{u = e}$.
   D'où e est l'élément neutre de $(H,*)$.
3. Soit $x \in H$ et x'' son symétrique dans $(H,*)$.
   Puisque $H \subset G$ alors $x \in G$, soit x' le symétrique de x dans $(G,*)$.
   - e est l'élément neutre dans $(H,*)$ donc $\boxed{x*x'' = e}$
   - e est l'élément neutre dans $(G,*)$ donc $\boxed{x*x' = e}$

   Donc $x*x'' = x*x'$, puisque x est régulier dans $(G,*)$, alors $\boxed{x'' = x'}$.
   Ainsi $(\forall x \in H) : x' \in H$ où x' est le symétrique de x dans $(G,*)$.

Á retenir : Si $(H,*)$ un sous-groupe de $(G,*)$ alors :

- L'élément neutre de $(H,*)$ et celui de $(G,*)$ sont les mêmes.
- Si $x \in H$, son symétrique dans $(H,*)$ et celui dans $(G,*)$ sont les mêmes.

Proposition 7 : Propriété caractéristique d'un sous-groupe

Soit $(G,*)$ un groupe et $H \subset G$.

$(H,*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$ si et seulement si :

1. $H \neq \varnothing$.

2. $\left(\forall (x,y) \in H^2\right) : x * y' \in H$ où y' est le symétrique de y dans $(G,*)$.

Preuve :

$\Rightarrow$ Supposons que $(H,*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$, d'après les propriétés du sous-groupe on a :

1. $H \neq \varnothing$.

2. $(\forall y \in H) : y' \in H$, donc $x * y' \in H$ pour tout $(x,y) \in H^2$ car $*$ est une LCI sur H.

$\Leftarrow$ Supposons **(1)** et **(2)**, et montrons que $(H,*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$:

- $H \neq \varnothing$ donc il existe au moins un élément a tel que $a \in H$.
  On a $a \in G$, soit a' le symétrique de a dans $(G,*)$, donc $a * a' = e$.
  D'après **(2)** : $a * a' \in H$ donc $\boxed{e \in H}$.
- Soit $x \in H$ et x' son symétrique dans $(G,*)$.
  Puisque $(e,x) \in H^2$ alors $e * x' \in H$, et on a $e * x' = x'$, donc $\boxed{x' \in H}$.
- Soit $(x,y) \in H^2$, on a $(x,y') \in H^2$ donc $x * (y')' \in H$, donc $\boxed{x * y \in H}$.
  Donc H est stable par la loi $*$.
- La loi $*$ étant associative dans G, elle l'est également dans H.

Finalement on a montré que :

- H est stable par la loi $*$.
- La loi $*$ est associative dans H.
- La loi $*$ admet un élément neutre dans H.
- Tout élément $x \in H$ possède un symétrique $x' \in H$.

Et puisque $H \subset G$ alors $(H,*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$.

Remarques :

1. Si la loi $*$ est additive notée $+$, la 2ème condition devient : $\left(\forall (x,y) \in H^2\right) : x - y \in H$.

2. Si la loi $*$ est multiplicative notée $\times$, la 2ème condition devient : $\left(\forall (x,y) \in H^2\right) : x \times y^{-1} \in H$.

3. Généralement pour montrer que $(H,*)$ est un groupe, on montre que c'est un sous-groupe d'un groupe $(G,*)$ supposé connu.

Application :

1. Soit $a > 0$ et $H = \left\{a^r \ / \ r \in \mathbb{Q}\right\}$, montrer que $(H,\times)$ est un groupe.

2. Soit H et K deux sous-groupes d'un groupe $(G,\times)$, montrer que $(H \cap K,\times)$ est un groupe.

4 Matrices carrées

4.1 Matrices carrées d'ordre 2

Définition 9

On appelle **matrice carrée d'ordre 2** à coefficients réels, tout tableau de la forme $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont des nombres réels.

L'ensemble de ces matrices est noté $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on écrit : $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} / (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$

Opérations sur les matrices carrées d'ordre 2 :

- On définit l'égalité de deux matrices dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ comme suit :

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \Leftrightarrow (a = a' \text{ et } b = b' \text{ et } c = c' \text{ et } d = d')$$

- On définit l'addition et la multiplication dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ comme suit :
  - **L'addition** : $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{pmatrix}$.
  - **La multiplication** : $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+cb' & ac'+cd' \\ ba'+db' & bc'+dd' \end{pmatrix}$.

  <u>**Remarque**</u> : l'addition et la multiplication définies ci-dessus sont des LCI sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exemples :

1. $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\times 0 + 1\times 1 & \sqrt{2}\times\sqrt{2} + 1\times 9 \\ 0\times 0 + (-3)\times 1 & 0\times\sqrt{2} + (-3)\times 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ -3 & -27 \end{pmatrix}$.

Application :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calculer AB et BA.

2. Que peut-on en déduire ?

- **Structure de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$:**

Proposition 8

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$ est un groupe commutatif.

- La loi $+$ est **associative** et **commutative** dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- L'élément neutre dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$ est $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ appelé la **matrice nulle**.
- Toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ admet un opposé noté $-M$ où $-M = \begin{pmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{pmatrix}$.

- **Structure de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$:**

Proposition 9

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ n'est pas un groupe !!

- La loi $\times$ admet un élément neutre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ appelé la **matrice unité**.
- La loi $\times$ est **associative** et **non commutative** dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Il existe des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'ont pas d'inverse dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

Exemple d'une matrice non inversible dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$:

Soit $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, cherchons (s'il existe) $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que : $AX=I_2$ et $XA=I_2$.

On pose $X=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$, on a $AX=I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}a+b&c+d\\a+b&c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow a+b=1 \text{ et } a+b=0 \text{ et } c+d=1 \text{ et } c+d=0$$

Donc $1=0$ impossible, donc l'équation $AX=I_2$ n'a pas de solution dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et donc la matrice A n'est pas inversible (n'est pas symétrisable).

Remarque :

Il se peut qu'une matrice ne soit pas inversible dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$, mais elle l'est dans une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ admettant un élément neutre différent de I_2. (On verra un exemple plus tard).

- **CNS pour qu'une matrice soit inversible dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$:**

Proposition 10

Soit $M=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Le réel $\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix}=ad-bc$ est appelé **le déterminant** de la matrice M, noté $\det(M)$, on a :

$$\boxed{M \text{ est inversible dans } (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times) \Leftrightarrow \det(M)\neq 0}$$

- Si $\det(M)\neq 0$ alors $M^{-1}=\begin{pmatrix}d/\Delta & -c/\Delta\\ -b/\Delta & a/\Delta\end{pmatrix}$ où $\Delta=\det(M)$.

Preuve :

$\Leftarrow$ Il suffit de vérifier que la matrice donnée M^{-1} vérifie : $M\times M^{-1}=M^{-1}\times M=I_2$.

$\Rightarrow$ Supposons que la matrice M est inversible et cherchons son inverse $X=\begin{pmatrix}x&z\\y&t\end{pmatrix}$.

L'égalité $M\times X=I_2$ donnera un système qui a pour déterminant $\det(M)$, M est inversible donc ce système admet une seule solution, d'où $\det(M)\neq 0$.

Remarque :

La matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ vu précédemment a pour déterminant $\det(A)=0$, c'est pour ça qu'on a trouvé qu'elle n'est pas inversible dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

4.2 Matrices carrées d'ordre 3

Définition 10

On appelle **matrice carrée d'ordre 3** à coefficients réels, tout tableau de la forme $\begin{pmatrix}a & d & g\\ b & e & h\\ c & f & k\end{pmatrix}$

où $(a,b,c,d,e,f,g,h,k)\in\mathbb{R}^9$, l'ensemble de ces matrices est noté $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on écrit :

$$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix}a & d & g\\ b & e & h\\ c & f & k\end{pmatrix} / (a,b,c,d,e,f,g,h,k)\in\mathbb{R}^9\right\}$$

Opérations sur les matrices carrées d'ordre 3 :

- On définit l'égalité de deux matrices dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ comme suit :

$$\begin{pmatrix}a & d & g\\ b & e & h\\ c & f & k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a' & d' & g'\\ b' & e' & h'\\ c' & f' & k'\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}a=a' \text{ et } b=b' \text{ et } c=c'\\ d=d' \text{ et } e=e' \text{ et } f=f'\\ g=g' \text{ et } h=h' \text{ et } k=k'\end{cases}$$

- On définit l'addition et la multiplication dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ comme suit :
  - **L'addition** : $\begin{pmatrix}a & d & g\\ b & e & h\\ c & f & k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a' & d' & g'\\ b' & e' & h'\\ c' & f' & k'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+a' & d+d' & g+g'\\ b+b' & e+e' & h+h'\\ c+c' & f+f' & k+k'\end{pmatrix}$.
  - **La multiplication** : $\begin{pmatrix}a & d & g\\ b & e & h\\ c & f & k\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a' & d' & g'\\ b' & e' & h'\\ c' & f' & k'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aa'+db'+gc' & ad'+de'+gf' & ag'+dh'+gk'\\ ba'+eb'+hc' & bd'+ee'+hf' & bg'+eh'+hk'\\ ca'+fb'+kc' & cd'+fe'+kf' & cg'+fh'+kk'\end{pmatrix}$.

  Remarque : l'addition et la multiplication définies ci-dessus sont des LCI sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- **Structure de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$:**

Proposition 11

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$ est un groupe commutatif.

- La loi $+$ est **associative** et **commutative** dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- L'élément neutre dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$ est $O_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ appelé la **matrice nulle**.
- Toute matrice $M=\begin{pmatrix}a & d & g\\ b & e & h\\ c & f & k\end{pmatrix}$ admet un opposé noté $-M$ où $-M=\begin{pmatrix}-a & -d & -g\\ -b & -e & -h\\ -c & -f & -k\end{pmatrix}$.

- **Structure de** $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$ **:**

Proposition 12

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$ n'est pas un groupe !!

- La loi $\times$ admet un élément neutre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ appelé la **matrice unité**.
- La loi $\times$ est **associative** et **non commutative** dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Il existe des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui n'ont pas d'inverse dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$.

5 Morphismes

5.1 Définition et exemples

Définition 11

Soit $(E,*)$ et $(F,\top)$ deux ensembles munis de lois de compositions internes.

Soit f une application de E dans F, on dit que f est un **morphisme** de $(E,*)$ dans $(F,\top)$ si :

$$\boxed{\forall(x,y)\in E^2 : f(x*y)=f(x)\top f(y)}$$

Compléments :

- Un **isomorphisme** est un morphisme bijectif.
- Un **endomorphisme** est un morphisme de $(E,*)$ dans lui-même $(E,*)$.
- Un **automorphisme** est un endomorphisme bijectif.

Exemples :

1. Soit l'application $f:\begin{array}{ccc}(\mathbb{C},\times)&\to&(\mathbb{R}^+,\times)\\ z&\mapsto&f(z)=|z|\end{array}$.

On a $\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2 : f(z\times z')=|z\times z'|=|z|\times|z'|=f(z)\times f(z')$.

Donc f est un morphisme de $(\mathbb{C},\times)$ dans $(\mathbb{R}^+,\times)$.

2. La fonction $\ln:\begin{array}{ccc}(\mathbb{R}^{*+},\times)&\to&(\mathbb{R},+)\\ x&\mapsto&\ln(x)\end{array}$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^{*+},\times)$ dans $(\mathbb{R},+)$ car :

- ln est bijective de $\mathbb{R}^{*+}$ dans $\mathbb{R}$.
- $\forall(x,x')\in\mathbb{R}^{*+2} : \ln(x\times x')=\ln(x)+\ln(x')$, donc ln est un morphisme de $(\mathbb{R}^{*+},\times)$ dans $(\mathbb{R},+)$.

Application :

Soit $a\in\mathbb{R}^*$, on considère l'application f_a définie sur $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f_a:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2&\to&\mathbb{R}^2\\ (x,y)&\mapsto&f_a(x,y)=\left(ax,\dfrac{y}{a}\right)\end{array}$$

On pose $E=\{f_a\ /\ a\in\mathbb{R}^*\}$.

1. Montrer que la composition $\circ$ est une loi de composition interne sur E.

2. On considère $g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^*&\to&E\\ a&\mapsto&g(a)=f_a\end{array}$, montrer que g est un morphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ dans $(E,\circ)$.

5.2 Propriétés d'un morphisme

Proposition 13

Soit f est un morphisme de $(E,*)$ dans $(F,\top)$, alors :

1. $f(E)$ est une partie stable de $(F,\top)$.
2. Si la loi $*$ est associative dans $(E,*)$, alors la loi $\top$ est associative dans $(f(E),\top)$.
3. Si la loi $*$ est commutative dans $(E,*)$, alors la loi $\top$ est commutative dans $(f(E),\top)$.
4. Si $*$ admet un élément neutre e dans $(E,*)$, alors $f(e)$ est un élément neutre de $(f(E),\top)$.
5. Si $*$ admet un élément neutre e dans $(E,*)$, et si x admet un symétrique x' dans $(E,*)$, alors $f(x')$ est un symétrique de $f(x)$ dans $(f(E),\top)$.

Preuve :

1. Soit $(y,y')\in f(E)^2$, montrons que $y\top y'\in f(E)$.

   $(y,y')\in f(E)^2 \Leftrightarrow \exists(x,x')\in E^2 : \begin{cases} y=f(x) \\ y'=f(x') \end{cases}$, donc $y\top y'=f(x)\top f(x')=\boxed{f(x*x')}$.

   Comme $*$ est une LCI sur E alors $x*x'\in E$, d'où $y\top y'\in f(E)$.

   De plus $f(E)\subset F$ et donc $f(E)$ est stable dans $(F,\top)$.

- Soit $(y,y',y'')\in f(E)^3$, donc $\exists(x,x',x'')\in E^3 : \begin{cases} y=f(x) \\ y'=f(x') \\ y''=f(x'') \end{cases}$.

   On a : $\boxed{\begin{aligned} (y\top y')\top y'' &= (f(x)\top f(x'))\top f(x'') \\ &= f(x*x')\top f(x'') \\ &= f((x*x')*x'') \\ &= f(x*(x'*x'')) \\ &= f(x)\top(f(x')\top f(x'')) \\ &= y\top(y'\top y'') \end{aligned}}$ et $\boxed{\begin{aligned} y\top y' &= f(x)\top f(x') \\ &= f(x*x') \\ &= f(x'*x) \\ &= f(x')\top f(x) \\ &= y'\top y \end{aligned}}$

2. Donc $(y\top y')\top y''=y\top(y'\top y'')$, ainsi la loi $\top$ est associative dans $(f(E),\top)$.
3. Donc $y\top y'=y'\top y$, ainsi la loi $\top$ est commutative dans $(f(E),\top)$.
4. Soit $y\in f(E)$ donc $(\exists x\in E) : y=f(x)$.

   On a : $\boxed{\begin{aligned} y\top f(e) &= f(x)\top f(e) \\ &= f(x*e) \\ &= f(x) \\ &= y \end{aligned}}$ et $\boxed{\begin{aligned} f(e)\top y &= f(e)\top f(x) \\ &= f(e*x) \\ &= f(x) \\ &= y \end{aligned}}$

   Et puisque $f(e)\in f(E)$, alors $f(e)$ est un élément neutre de $(f(E),\top)$.
5. Soit $x\in E$ qui admet un symétrique $x'\in E$.

   On a : $\boxed{\begin{aligned} f(x)\top f(x') &= f(x*x') \\ &= f(e) \end{aligned}}$ et $\boxed{\begin{aligned} f(x')\top f(x) &= f(x'*x) \\ &= f(e) \end{aligned}}$

   Et comme $x'\in E$ alors $f(x')\in f(E)$, donc $f(x')$ est un symétrique de $f(x)$ dans $(f(E),\top)$.

Remarque :

Si f est un **isomorphisme** de $(E,*)$ dans $(F,\top)$ alors $f(E)=F$.

Ainsi f transfère toutes les propriétés de la loi $*$ dans E vers la loi $\top$ dans F.

On dit que $(E,*)$ et $(F,\top)$ ont **la même structure**.

Application :

On définit sur $\mathbb{R}$ une loi de composition interne $*$ définie par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x*y=x+y-xy$$

On considère l'application f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R} : f(x)=1-x$$

1. Montrer que si g est un isomorphisme de $(E,*)$ dans $(F,\top)$ alors g^{-1} est un isomorphisme de $(F,\top)$ vers $(E,*)$.

2. Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R},*)$ vers $(\mathbb{R},\times)$.

3. En déduire que la loi $*$ est associative et admet un élément neutre dans $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

4. Déterminer l'ensemble des éléments symétrisables dans $(\mathbb{R},*)$.

5.3 Morphisme de groupe

Proposition 14

Soit f un morphisme de $(E,*)$ dans $(F,\top)$.

« Si $(E,*)$ est un groupe alors $(f(E),\top)$ est aussi un groupe »

Preuve :

Si $(E,*)$ est un groupe alors :

- $*$ est associative dans $(E,*)$.
- $*$ admet un élément neutre e dans $(E,*)$.

D'après les propriétés précédentes on a alors :

- $f(E)$ est stable par la loi $\top$.
- $\top$ est associative dans $(f(E),\top)$.
- $\top$ admet un élément neutre $f(e)$ dans $(f(E),\top)$.

Reste à montrer que tout élément de $f(E)$ est symétrisable dans $(f(E),\top)$. (en exercice)

Remarque :

Si $(E,*)$ est un groupe <u>commutatif</u> alors $(f(E),\top)$ est aussi un groupe <u>commutatif</u>.

Application :

On considère l'ensemble $E=\{M(\theta)\,/\,\theta\in\mathbb{R}\}$ avec :

$$M(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Soit $f:\begin{array}{ccc}(\mathbb{R},+) & \to & (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)\\ \theta & \mapsto & f(\theta)=M(\theta)\end{array}$.

À l'aide de l'application f, montrer que $(E,\times)$ est un groupe commutatif.

6 Anneau

6.1 Distributivité

Définition 12

Soit A un ensemble muni de deux lois de composition internes $*$ et $\top$.
On dit que la loi $\top$ est distributive par rapport à la loi $*$ si :

$$\boxed{\forall (x,y,z)\in A^3 : \begin{cases} x \top (y * z) = (x \top y) * (x \top z) & (1) \\ (y * z) \top x = (y \top x) * (z \top x) & (2) \end{cases}}$$

Remarque :
Si la loi $\top$ est commutative, il suffit que l'une des égalités (1) ou (2) soit vérifiée.

Exemples :

1. La loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$ dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$:

$$\forall (x,y,z)\in \mathbb{C}^3 : \begin{cases} x\times(y+z) = x\times y + x\times z \\ (y+z)\times x = y\times x + z\times x \end{cases}$$

2. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$\forall (A,B,C)\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^3 : \begin{cases} A\times(B+C) = A\times B + A\times C \\ (B+C)\times A = B\times A + C\times A \end{cases}$$

3. L'addition n'est pas distributive par rapport à la multiplication dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

4. La composition des applications $\circ$ dans $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ n'est pas distributive par rapport à l'addition :
Soit $f(x)=x+1$ et $g(x)=1$ et $h(x)=x$.
On a $\begin{cases} f\circ(h+g)(x) = f(h(x)+g(x)) = f(x+1) = x+2 \\ f\circ h(x) + f\circ g(x) = f(h(x)) + f(g(x)) = x+1+2 = x+3 \end{cases}$, donc $f\circ(h+g) \neq f\circ h + f\circ g$.

Application :
On définit sur $\mathbb{R}$ deux lois de composition internes $*$ et $\top$ définies par :

$$\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x * y = x + y - 1 \\ x \top y = x + y - xy \end{cases}$$

Montrer que $\top$ est distributive par rapport à la loi $*$.

6.2 Définition et exemples

Définition 13

Soit A un ensemble muni de deux lois de composition internes $*$ et $\top$.
On dit que $(A,*,\top)$ est un **anneau** (ou a une **structure d'anneau**) si :

1. $(A,*)$ est un groupe commutatif.

2. La loi $\top$ est associative dans A.

3. La loi $\top$ est distributive par rapport à la loi $*$ dans A.

Compléments :

- Si la loi $\top$ est commutative dans A, on dit que $(A,*,\top)$ est un **anneau commutatif**.
- Si la loi $\top$ possède un élément neutre dans A, on dit que $(A,*,\top)$ est un **anneau unitaire**.

Exemples :

1. $(\mathbb{Z},+,\times)$, $(\mathbb{Q},+,\times)$, $(\mathbb{R},+,\times)$ et $(\mathbb{C},+,\times)$ sont des anneaux commutatifs unitaires.

2. $(\mathbb{N},+,\times)$ n'est pas un anneau car $(\mathbb{N},+)$ n'est pas un groupe.

3. $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ et $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ sont des anneaux unitaires non commutatifs.

4. $\left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}},+,\times\right)$ est un anneau commutatif unitaire.

5. $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire.

Application :

On considère l'ensemble $A=\left\{a+b\sqrt{2}\ /\ (a,b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$.

Montrer que $(A,+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire.

- **Notations :**

  Soit $(A,*,\top)$ un anneau unitaire.
  - On note 0_A l'élément neutre pour la première loi $*$ (appelé le zéro de l'anneau A).
  - On note 1_A l'élément neutre pour la deuxième loi $\top$ (appelé l'élément unité de l'anneau A).
  - On note $-x$ le symétrique de x pour la première loi $*$.
  - On note x^{-1} le symétrique de x pour la deuxième loi $\top$ (s'il existe).

6.3 Règles de calcul dans un anneau

Proposition 15

Soit $(A,*,\top)$ anneau unitaire, on a les règles de calcul suivantes :

1. $\forall x\in A\ :\ 0_A\top x=x\top 0_A=0_A$.

2. $\forall x\in A\ :\ (-1_A)\top x=x\top(-1_A)=-x$.

3. $\forall (x,y)\in A^2\ :\ (-x)\top y=x\top(-y)=-(x\top y)$.

4. $\forall (x,y)\in A^2\ :\ (-x)\top(-y)=x\top y$.

Preuve :

1. Soit $x\in A$ on a : $x\top 0_A=x\top(0_A*0_A)$
$$\Rightarrow x\top 0_A=(x\top 0_A)*(x\top 0_A)$$
$$\Rightarrow \cancel{(x\top 0_A)}*0_A=\cancel{(x\top 0_A)}*(x\top 0_A)$$
$$\Rightarrow 0_A=x\top 0_A \quad \text{car } (x\top 0_A) \text{ est régulier}$$

De même : $0_A\top x=(0_A*0_A)\top x$
$$\Rightarrow 0_A\top x=(0_A\top x)*(0_A\top x)$$
$$\Rightarrow \cancel{(0_A\top x)}*0_A=\cancel{(0_A\top x)}*(0_A\top x)$$
$$\Rightarrow 0_A=0_A\top x \quad \text{car } (0_A\top x) \text{ est régulier}$$

2. Soit $x\in A$, on a : $1_A*(-1_A)=0_A$
$$\Rightarrow x\top(1_A*(-1_A))=x\top 0_A$$
$$\Rightarrow (x\top 1_A)*(x\top(-1_A))=0_A$$
$$\Rightarrow x*(x\top(-1_A))=0_A$$

Puisque la loi $*$ est commutatif alors $x\top(-1_A)$ est un symétrique de x, la loi $*$ étant associative donc le symétrique est unique, d'où $x\top(-1_A)=-x$.

De même on montre que $(-1_A)\top x=-x$.

3. Soit $(x,y)\in A^2$, on a : $\begin{cases}(-x)\top y=((-1_A)\top x)\top y=(-1_A)\top(x\top y)=-(x\top y)\\ x\top(-y)=x\top(y\top(-1_A))=(x\top y)\top(-1_A)=-(x\top y)\end{cases}$.

D'où $(-x)\top y=x\top(-y)=-(x\top y)$.

4. Soit $(x,y)\in A^2$, on a : $(-x)\top(-y)=-(x\top(-y))=-(-(x\top y))=x\top y$.

Remarque :
Comme $(\mathbb{R},+,\times)$ est un anneau unitaire, on a bien les règles de calcul qu'on a vu ci-dessus :

- $0\times x=x\times 0=0$.
- $(-1)\times x=x\times(-1)=-x$.
- $(-x)\times y=x\times(-y)=-(x\times y)$.
- $(-x)\times(-y)=x\times y$.

6.4 Diviseurs de zéro dans un anneau - anneau intègre

Définition 14

Soit $(A,*,\top)$ un anneau et $a\in A\setminus\{0_A\}$.
On dit que a est un **diviseur de zéro** dans l'anneau A si :

$$\boxed{\exists b\in A\setminus\{0_A\}:\quad a\top b=0_A\quad \underline{\text{ou}}\quad b\top a=0_A}$$

Remarque : Dans la définition, on constate que b est aussi un diviseur de zéro.

Exemples :

1. Dans l'anneau $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$, la matrice $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ est un diviseur de zéro car :

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\neq O_2 \text{ et } \begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\neq O_2 \text{ et } \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O_2$$

2. Dans l'anneau $\left(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z},+,\times\right)$, $\overline{2}$ est un diviseur de zéro car $\overline{2}\times\overline{3}=\overline{0}$ et $\overline{2}\neq\overline{0}$ et $\overline{3}\neq\overline{0}$.

3. Dans l'anneau $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\times)$, on note $\tilde{0}$ la fonction nulle.

Les fonctions f et g définies par $f(x)=\begin{cases}1 & ;\ x\geq 0\\ 0 & ;\ x<0\end{cases}$ et $g(x)=\begin{cases}0 & ;\ x\geq 0\\ 1 & ;\ x<0\end{cases}$ sont des diviseurs de zéro car $f\times g=\tilde{0}$ et $f\neq\tilde{0}$ et $g\neq\tilde{0}$.

Définition 15

On dit qu'un anneau $(A,*,\top)$ est **intègre** s'il n'admet aucun diviseur de zéro.

$$\boxed{\left[\ (A,*,\top)\text{ est intègre }\right]\Leftrightarrow\left[\forall(a,b)\in A^2\quad:\quad a\top b=0_A\ \Rightarrow\ a=0_A\ \text{ ou }\ b=0_A\right]}$$

Exemples :

1. $(\mathbb{Z},+,\times)$, $(\mathbb{Q},+,\times)$, $(\mathbb{R},+,\times)$ et $(\mathbb{C},+,\times)$ sont des anneaux intègres.

2. Les anneaux $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$, $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$, $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\times)$ et $\left(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z},+,\times\right)$ ne sont pas intègres.

Application :

Dans $A=\mathbb{Z}^2$, on définit les deux lois de composition internes suivantes :

$$\forall((x,y),(x',y'))\in A^2 : (x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$$
$$\forall((x,y),(x',y'))\in A^2 : (x,y)\times(x',y')=(xx',yy')$$

On admet que $(\mathbb{R}^2,+)$ est un groupe commutatif.

1. Montrer que $(A,+,\times)$ est un anneau unitaire.

2. Calculer $(1,0)\times(0,1)$, l'anneau $(A,+,\times)$ est-il intègre ?

3. Déterminer les diviseurs de zéro de l'anneau $(A,+,\times)$.

Proposition 16

Soit $(A,*,\top)$ un anneau unitaire et $a\in A$, alors :

$$\boxed{a \text{ est symétrisable dans } (A,T) \Rightarrow a \text{ n'est pas un diviseur de zéro dans l'anneau } (A,*,\top)}$$

Preuve :

Supposons par l'absurde que a est un diviseur de zéro, donc

$$(\exists b\in A\setminus\{0_A\}) : \quad a\top b=0_A \quad \underline{\text{ou}} \quad b\top a=0_A.$$

Si : $a\top b=0_A \Rightarrow a^{-1}\top(a\top b)=a^{-1}\top 0_A$

$\Rightarrow (a^{-1}\top a)\top b=0_A$

$\Rightarrow 1_A\top b=0_A$

$\Rightarrow b=0_A$

Ce qui est absurde car $b\neq 0_A$, et donc :

$$\boxed{a \text{ est symétrisable dans } (A,T) \Rightarrow a \text{ n'est pas un diviseur de zéro dans l'anneau } (A,*,\top)}$$

Remarque :

1. La réciproque est fausse : dans l'anneau $(\mathbb{Z},+,\times)$ 2 n'est pas un diviseur de zéro et n'est pas inversible dans $(\mathbb{Z},\times)$.

2. Par une simple contraposée on obtient :

$$\boxed{a \text{ est un diviseur de zéro dans l'anneau } (A,*,\top) \Rightarrow a \text{ n'est pas symétrisable dans } (A,T)}$$

Application :

Dans l'anneau $\left(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z},+,\times\right)$, est ce qu'il existe $\overline{k}\in\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ tel que $\overline{k}\times\overline{2}=\overline{1}$?

7 Corps

7.1 Définition et exemples

Définition 16

On appelle **corps** tout anneau unitaire $(\mathbb{K},*,\top)$ non réduit à $\{0_{\mathbb{K}}\}$ tel que tout élément autre que $0_{\mathbb{K}}$ est symétrisable pour dans $(\mathbb{K},\top)$.

Un corps est dit **commutatif** si la deuxième loi $\top$ est commutatif dans $\mathbb{K}$.

Exemples :

1. $(\mathbb{Q},+,\times)$, $(\mathbb{R},+,\times)$ et $(\mathbb{C},+,\times)$ sont des corps commutatifs.
2. $(\mathbb{Z},+,\times)$ n'est pas un corps car 2 n'est pas inversible dans $(\mathbb{Z},\times)$.
3. $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ n'est pas un corps, par exemple la matrice $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ n'est pas inversible dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.
4. $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times\right)$ où p est un nombre premier, est un corps commutatif.

Application :

$$\text{On pose } \mathbb{K}=\left\{\begin{pmatrix}x & x\\ x & x\end{pmatrix} / \ x\in\mathbb{R}\right\}$$

1. Montrer que $\mathbb{K}$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$ et de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.
2. Montrer que $(\mathbb{K},+,\times)$ est un corps commutatif, et déterminer son élément unité.

Proposition 17

Soit $\mathbb{K}$ un ensemble muni de deux lois de composition internes $*$ et $\top$.

$(\mathbb{K},*,\top)$ est un corps si et seulement si :

1. $(\mathbb{K},*)$ est un groupe commutatif.
2. $(\mathbb{K}\setminus\{0_{\mathbb{K}}\},\top)$ est un groupe, où $0_{\mathbb{K}}$ est l'élément neutre de $(\mathbb{K},*)$.
3. La loi $\top$ est distributive par rapport à la loi $*$.

Preuve :

Laissée en exercice

Remarque :
Si de plus $(\mathbb{K}\setminus\{0_{\mathbb{K}}\},\top)$ est un groupe commutatif, alors $(\mathbb{K},*,\top)$ est un corps commutatif.

Proposition 18

Soit $(\mathbb{K},*,\top)$ un corps, on a les propriétés suivantes :

1. Tout élément $a\in\mathbb{K}$ différent de $0_{\mathbb{K}}$ est régulier pour la loi $\top$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall(x,y)\in\mathbb{K}^2 : \begin{cases} a\top x = a\top y & \Rightarrow \quad x=y\\ x\top a = y\top a & \Rightarrow \quad x=y\end{cases}}$$

2. $(\mathbb{K},*,\top)$ est un anneau intègre, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall(a,b)\in\mathbb{K}^2 \quad : \quad a\top b=0_{\mathbb{K}} \ \Rightarrow\ a=0_{\mathbb{K}} \ \text{ ou } \ b=0_{\mathbb{K}}}$$

Preuve :

Ces deux propriétés découlent rapidement du fait que tout élément $a\in\mathbb{K}$ différent de $0_{\mathbb{K}}$ est symétrisable pour la loi $\top$, donc :

1. a est régulier pour la loi $\top$.
2. a n'est pas un diviseur de zéro.

8 Espace vectoriel réel

8.1 Loi de composition externe

Définition 17

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un ensemble non vide.
Toute application définie de $\mathbb{K}\times E$ vers E :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{K}\times E & \to & E \\ & (\alpha,x) & \mapsto & f(\alpha,x) \end{array}$$

est appelée **loi de composition externe** définie sur E, à coefficient dans $\mathbb{K}$.
Généralement on note $f(\alpha,x)$ par αx ou $\alpha.x$.

Exemples :

1. Soit $\mathcal{V}_2$ l'ensemble des vecteurs dans le plan.

L'application $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\times \mathcal{V}_2 & \to & \mathcal{V}_2 \\ & (\alpha,\vec{u}) & \mapsto & \alpha.\vec{u} \end{array}$ est une loi de composition externe définie sur $\mathcal{V}_2$ à coefficient dans $\mathbb{R}$, appelée multiplication d'un vecteur par un réel.

2. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et $\alpha\in\mathbb{R}$.

On appelle produit de A par α, et on le note $\alpha.A$, la matrice $\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha c \\ \alpha b & \alpha d \end{pmatrix}$.

L'application $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ & (\alpha,A) & \mapsto & \alpha.A \end{array}$ est alors une loi de composition externe définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à coefficient dans $\mathbb{R}$, appelée multiplication d'une matrice par un réel.

3. Dans l'ensemble $\mathbb{R}^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$: ensemble des n-uplets.

Pour tout $X=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ et pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, on appelle produit de X par α, et on le note αX, le n-uplets $\alpha X=(\alpha x_1,\alpha x_2,...,\alpha x_n)$.

L'application $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & (\alpha,X) & \mapsto & \alpha.X \end{array}$ est alors une LCE définie sur $\mathbb{R}^n$ à coefficient dans $\mathbb{R}$.

Remarque :

Une loi de composition interne $\begin{array}{rccc} f: & E\times E & \to & E \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$ sur un ensemble E, est une loi de composition externe définie sur E, à coefficient dans E.

« Dans toute la suite on prend $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ comme corps de référence »

8.2 Définition et exemples

Définition 18

Un **espace vectoriel réel** ou $\mathbb{R}$**-espace vectoriel** est un triplet $(E,+,\bullet)$ dans lequel E est un ensemble non vide muni :

1. D'une loi de composition interne notée $+$, tel que $(E,+)$ est un groupe commutatif.
2. D'une loi de composition externe $\bullet : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times E & \to & E \\ (\alpha,x) & \mapsto & \alpha.x \end{array}$, appelé **produit par un scalaire**, et possédant les propriétés suivantes :
   - **a.** $\left(\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\right)\left(\forall x\in E\right) \ : \ (\alpha+\beta).x=\alpha.x+\beta.x$
   - **b.** $\left(\forall\alpha\in\mathbb{R}\right)\left(\forall(x,y)\in E^2\right) \ : \ \alpha.(x+y)=\alpha.x+\alpha.y$
   - **c.** $\left(\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\right)\left(\forall x\in E\right) \ : \ (\alpha\beta).x=\alpha.(\beta.x)$
   - **d.** $\left(\forall x\in E\right) \ : \ 1.x=x$

Notations :

1. Tout élément de E sera appelé **vecteur** et on le note $\vec{x}$.
2. Tout élément de $\mathbb{R}$ sera appelé **scalaire**.
3. On note $\vec{0}$ l'élément neutre du groupe $(E,+)$, et on l'appellera le **vecteur nul**.

Exemples :

1. $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\bullet)$ est un espace vectoriel réel, en effet :
   - $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$ est un groupe commutatif.
   - Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $M=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d\end{pmatrix}$ et $M=\begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d'\end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a :
     - **a.** $(\alpha+\beta).M=\begin{pmatrix} (\alpha+\beta)a & (\alpha+\beta)c \\ (\alpha+\beta)b & (\alpha+\beta)d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha c \\ \alpha b & \alpha d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \beta a & \beta c \\ \beta b & \beta d\end{pmatrix}=\alpha.M+\beta.M$
     - **b.** $\alpha.(M+M')=\alpha.\begin{pmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha c \\ \alpha b & \alpha d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \alpha a' & \alpha c' \\ \alpha b' & \alpha d'\end{pmatrix}=\alpha.M+\alpha.M'$
     - **c.** $(\alpha\beta).M=(\alpha\beta).\begin{pmatrix} a & c \\ b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\alpha\beta)a & (\alpha\beta)c \\ (\alpha\beta)b & (\alpha\beta)d\end{pmatrix}=\alpha.\begin{pmatrix} \beta a & \beta c \\ \beta b & \beta d\end{pmatrix}=\alpha.(\beta.M)$
     - **d.** $1.M=1.\begin{pmatrix} a & c \\ b & d\end{pmatrix}=M$
2. $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\bullet)$ est un espace vectoriel réel.
3. $(\mathbb{C},+,\bullet)$ est un espace vectoriel réel muni de son addition « $+$ » et de la loi externe « $\bullet$ » :
$$\bullet : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ (\alpha,z) & \mapsto & \alpha.z \end{array}$$
4. $(\mathbb{R},+,\bullet)$ est un espace vectoriel réel.
5. $(\mathcal{V}_2,+,\bullet)$ et $(\mathcal{V}_3,+,\bullet)$ sont des espaces vectoriels réels.
6. $(\mathcal{P}_n,+,\bullet)$ où $\mathcal{P}_n$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un espace vectoriel réel, muni de son addition « $+$ » et de la loi la loi externe « $\bullet$ » : multiplication d'un polynôme par un réel.

Application :

On muni $\mathbb{R}^2$ de deux loi définies par :

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y') \text{ et } (\forall\alpha\in\mathbb{R}):\alpha.(x,y)=(\alpha x,\alpha y)$$

Montrer que $\left(\mathbb{R}^2,+,\bullet\right)$ est un espace vectoriel réel.

8.3 Règles de calcul dans un espace vectoriel réel

Proposition 19

Soit $(E,+,\bullet)$ un espace vectoriel réel, alors :

1. Tout vecteur de E est un élément régulier pour la loi $+$.
2. Pour tout $\vec{x}\in E$: $0.\vec{x}=\vec{0}$.
3. Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$: $\alpha.\vec{0}=\vec{0}$.
4. Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ et pour tout $\vec{x}\in E$ on a : $\alpha.\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow\left[\alpha=0 \quad \text{ou} \quad \vec{x}=\vec{0}\right]$

Preuve :

1. Découle immédiatement du fait que $(E,+)$ est un groupe. (symétrisable $\Rightarrow$ régulier)
2. On a pour tout $\vec{x}\in E$: $0.\vec{x}+\vec{0}=0.\vec{x}\Leftrightarrow 0.\vec{x}+\vec{0}=(0+0).\vec{x}\Leftrightarrow \cancel{0.\vec{x}}+\vec{0}=\cancel{0.\vec{x}}+0.\vec{x}\Leftrightarrow \boxed{0.\vec{x}=\vec{0}}$.
3. On a pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$: $\alpha.\vec{0}=\alpha.\left(\vec{0}+\vec{0}\right)\Leftrightarrow\vec{0}+\cancel{\alpha.\vec{0}}=\alpha.\vec{0}+\cancel{\alpha.\vec{0}}\Leftrightarrow\boxed{\alpha.\vec{0}=\vec{0}}$.
4. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\vec{x}\in E$:

   $\Leftarrow$ Ce sens est déjà démontré : (2) et (3).

   $\Rightarrow$ Supposons que $\alpha.\vec{x}=\vec{0}$, si $\alpha\neq 0$ alors

   $\alpha\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\alpha}(\alpha.\vec{x})=\vec{0}\Leftrightarrow\left(\dfrac{\alpha}{\alpha}\right).\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow 1.\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow\boxed{\vec{x}=\vec{0}}$, d'où le résultat.

Proposition 20

Soit $(E,+,\bullet)$ un espace vectoriel réel, alors :

1. Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\vec{x}\in E$: $(-\alpha).\vec{x}=\alpha.(-\vec{x})=-(\alpha.\vec{x})$
2. Pour tout $(\vec{u},\vec{v})\in E^2$, l'équation $\vec{x}+\vec{u}=\vec{v}$ admet une unique solution dans E, cette solution est $\vec{x}=\vec{v}+(-\vec{u})$, appelée, dans cet ordre la différence des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$, on la note $\vec{v}-\vec{u}$.
3. $\left(\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\right)(\forall\vec{x}\in E)$: $(\alpha-\beta).\vec{x}=\alpha.\vec{x}-\beta.\vec{x}$

Preuve :

Laissée comme exercice.

Application :

Dans l'espace vectoriel $\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\bullet\right)$, on considère la matrice : $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2-A=2I_3$.
2. En déduire que la matrice A est inversible dans $\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times\right)$, puis donner son inverse A^{-1}.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E):xI_3=(3x+5)(A^2-A-12I_3)$.

9 Sous-espace vectoriel

9.1 Définition et exemples

Définition 19

Soit $(E,+,\bullet)$ un espace vectoriel réel, un ensemble F est dit un **sous-espace vectoriel** de E si :

1. $F \subset E$.
2. $F \neq \varnothing$.
3. $(F,+,\bullet)$ est un espace vectoriel réel.

Remarque :

Si $(E,+,\bullet)$ un espace vectoriel réel, alors :

- E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(E,+,\bullet)$.
- $\left\{\vec{0}\right\}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(E,+,\bullet)$.

Exemples :

1. $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathbb{C},+,\bullet)$.
2. Soit $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ z=x+y\right\}$.

   $F\subset\mathbb{R}^3$ et $F\neq\varnothing$ et $(F,+,\bullet)$ est un espace vectoriel réel.

   Donc F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\left(\mathbb{R}^3,+,\bullet\right)$.
3. Soit $A=\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} / \ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

   $A\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $A\neq\varnothing$ et $(A,+,\bullet)$ est un espace vectoriel réel.

   Donc A est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\bullet\right)$.

9.2 Propriété caractéristique d'un sous-espace vectoriel

Proposition 21

Soit $(E,+,\bullet)$ un espace vectoriel réel, on a l'équivalence :

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } (E,+,\bullet) \Leftrightarrow \begin{cases} F\subset E \\ F\neq\varnothing \\ \left(\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\right)\left(\forall(\vec{x},\vec{y})\in\mathbb{R}^2\right) : \alpha.\vec{x}+\beta.\vec{y}\in F \end{cases}$$

Preuve :

$\Rightarrow$ Supposons que F est un sous-espace vectoriel $(E,+,\bullet)$, il est clair que $F\subset E$ et $F\neq\varnothing$.
Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $(\vec{x},\vec{y})\in\mathbb{R}^2$, on peut affirmer successivement que $\alpha.\vec{x}\in F$ et $\beta.\vec{y}\in F$, et puis que $\alpha.\vec{x}+\beta.\vec{y}\in F$.

$\Leftarrow$ La réciproque est facile en prenant successivement $\alpha=\beta=1$ puis $\beta=0$.

Remarque :
Généralement, pour montrer que $(F,+,\bullet)$ est un espace vectoriel, il est beaucoup plus facile (si possible) de montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel supposé connu.
C'est pour cette raison qu'il faut connaître quelques espaces vectoriels réels les plus familiers :

$$\boxed{(\mathbb{R},+,\bullet),\ (\mathbb{C},+,\bullet),\ (\mathbb{R}^n,+,\bullet),\ (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\bullet),\ (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\bullet),\ (\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\bullet),\ \ldots}$$

Application :

1. On considère l'ensemble $F=\left\{\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} / (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

Montrer que $(F,+,\bullet)$ est un espace vectoriel réel.

2. On considère l'ensemble $E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ x+2y+3z=0\right\}$.

Montrer que $(E,+,\bullet)$ est un espace vectoriel réel.

10 Familles libres - Familles génératrices - Bases

10.1 Combinaison linéaire

Définition 20

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ ainsi que $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel réel $(E,+,\bullet)$.
Soit $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ des réels, le vecteur $\vec{x}=\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_n\vec{x}_n$ s'appelle **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n$, et on écrit : $\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i$.

Les réels $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ sont appelés les coefficients de la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i$.

Exemples :

1. Dans l'espace vectoriel réel $(\mathbb{R}^2,+,\bullet)$, on considère les vecteurs $\vec{e}_1=(1,0)$ et $\vec{e}_2=(0,1)$.

On a : $\vec{u}=(7,-3)=7\vec{e}_1-3\vec{e}_2$, donc $\vec{u}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.

2. Dans l'espace vectoriel réel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\bullet)$, on considère les matrices :

$$J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a : $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=a.I-b.J$, donc $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des vecteurs I et J.

Application :
Dans l'espace vectoriel réel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\bullet)$, on considère les matrices :

$$J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Peut-on écrire la matrice $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire de I et J ?

10.2 Familles libres - Familles liées

Définition 21

Soit $(E,+,\bullet)$ un espace vectoriel réel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $B = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n)$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que la famille B est une **famille libre** si :

$$\boxed{\left(\forall(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n\right) : \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0} \Rightarrow [\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0]}$$

  On dit dans ce cas que les vecteurs $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ sont **linéairement indépendants**.
- On dit que la famille B est une **famille liée** si elle n'est pas libre, c'est-à-dire :

$$\boxed{\text{Il existe } \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \text{ de } \mathbb{R} \text{ non tous nul tel que } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}}$$

  On dit dans ce cas que les vecteurs $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ sont **linéairement dépendants**.

Remarque :
Lorsqu'on veut montrer qu'une famille $B = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n)$ est libre on considère des réels $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}$, et on essaie de montrer que $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

Exemples :

1. On se place dans $(\mathbb{R}^3, +, \bullet)$ et on considère les vecteurs :

$$\vec{e}_1 = (2,-1,3) \quad \text{et} \quad \vec{e}_2 = (1,-3,-1) \quad \text{et} \quad \vec{e}_3 = (0,1,1)$$

   La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est liée car : $\frac{1}{5}\vec{e}_1 - \frac{2}{5}\vec{e}_2 - \vec{e}_3 = \vec{0}$.

2. On se place dans $(\mathbb{R}^2, +, \bullet)$ et on considère les vecteurs :

$$\vec{e}_1 = (1,0) \quad \text{et} \quad \vec{e}_2 = (0,1).$$

   Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 = \vec{0}$.

   On a : $\alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 = \vec{0} \Rightarrow (\alpha, \beta) = \vec{0}$
   $\Rightarrow (\alpha, \beta) = (0,0)$
   $\Rightarrow \alpha = 0$ et $\beta = 0$

   Donc la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est libre.

Application :

1. Montrer que si une famille de vecteurs de $(E,+,\bullet)$ contient $\vec{0}$, alors elle est liée.
2. Dans l'espace vectoriel réel $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), +, \bullet)$, on considère les fonctions :

$$f : x \mapsto x+1 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto x^2 \quad \text{et} \quad h : x \mapsto x^2 - x + 3$$

   Montrer que la famille (f, g, h) est libre.

Proposition 22

Soit $(E,+,\bullet)$ un espace vectoriel réel.

1. Si une famille $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_n)$ est libre, alors toute famille **contenue** dans B est aussi libre.
2. Si une famille $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_n)$ est liée, alors toute famille **contenant** dans B est aussi liée.
3. Une famille $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_n)$ est liée si et seulement si, l'un des vecteurs de B est combinaison linéaire des $n-1$ autres.
   En particulier si une famille contient deux vecteurs égaux, alors elle est liée.

Preuve :

Laissée en exercice.

Exemples :

1. Dans l'application précédente, la famille (f,g,h) est libre, donc les familles (f,g) et (f,h) et (h,g) sont aussi libres.
2. On se place dans $(\mathbb{R}^3,+,\bullet)$ et on considère les vecteurs :

$$\vec{e}_1=(2,-1,3) \quad \text{et} \quad \vec{e}_2=(1,-3,-1) \quad \text{et} \quad \vec{e}_3=(0,1,1) \text{ et } \vec{e}_4=(5,1,1)$$

La famille $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ est liée car : $\frac{1}{5}\vec{e}_1-\frac{2}{5}\vec{e}_2-\vec{e}_3=\vec{0}$.

- Donc la famille $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4)$ est aussi liée.
- La famille $(\vec{e}_1,\vec{e}_1)$ est liée.

10.3 Familles génératrices

Définition 22

Soit $(E,+,\bullet)$ un espace vectoriel réel, $n\in\mathbb{N}^*$ et $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_n)$ une famille de vecteurs de E.

- On dit qu'un vecteur $\vec{x}$ est **engendré** par la famille $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_n)$ s'il peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille, c'est-à-dire :

$$\boxed{\left(\exists(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n\right):\ \vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i}$$

- On dit que la famille $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_n)$ est une **famille génératrice** de E, si :

$$\boxed{(\forall\vec{x}\in E)\left(\exists(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n\right):\ \vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i}$$

  On dit aussi que la famille $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_n)$ **engendre** l'espace vectoriel E.

Exemples :

1. La famille $(1,i)$ est une famille génératrice de $(\mathbb{C},+,\bullet)$, car tout nombre complexe z peut s'écrire comme combinaison linéaire de 1 et i : $\left(\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2\right): z=a+ib=a.1+b.i$
2. Dans $(\mathbb{R}^2,+,\bullet)$, la famille $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ où :

$$\vec{e}_1=(1,0) \quad \text{et} \quad \vec{e}_2=(0,1).$$

est une famille génératrice de $(\mathbb{R}^2,+,\bullet)$ car $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right):(x,y)=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$.

3. Dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\bullet)$, la famille (M_1,M_2,M_3,M_4) où :

$$M_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \text{ et } M_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \text{ et } M_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \text{ et } M_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

est une famille génératrice de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\bullet)$, car toute matrice $\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=aM_1+cM_2+bM_3+dM_4$.

Application :

On considère l'ensemble $E=\left\{\begin{pmatrix}a&b&-c\\c&a&b\\-b&2c&a\end{pmatrix} / (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$.

1. Montrer que $(E,+,\bullet)$ est un espace vectoriel réel.

2. Déterminer une famille génératrice de l'espace $(E,+,\bullet)$, contenant seulement 3 éléments.

10.4 Base d'un espace vectoriel réel

Définition 23

Soit $(E,+,\bullet)$ un espace vectoriel réel, $n\in\mathbb{N}^*$ et $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_n)$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que la famille B est une **base** de l'espace vectoriel E, si tout vecteur de $\vec{x}$ de E s'écrit de <u>façon unique</u> comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille, autrement dit :

$$\boxed{(\forall\vec{x}\in E)\left(\exists!(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n\right):\ \vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i}$$

- Sous ces conditions, les réels $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ s'appellent **les composants** (ou coordonnées) du vecteur $\vec{x}$ dans la base B, et on écrit : $\vec{x}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)_{(B)}$ ou $\vec{x}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$.

Exemple :

Dans $(\mathbb{R}^2,+,\bullet)$, on considère les vecteurs $\vec{e}_1=(1,0)$ et $\vec{e}_2=(0,1)$, montrons que la famille $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ est une base de l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2,+,\bullet)$.

Soit $\vec{e}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, donc

$$\begin{aligned}\vec{e}&=(x,0)+(0,y)\\&=x(1,0)+y(0,1)\\&=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2\end{aligned}$$

Donc $\vec{e}$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, d'où :

$$\boxed{(\forall\vec{e}\in E)\left(\exists!(x,y)\in\mathbb{R}^2\right):\ \vec{e}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2}$$

Ainsi la famille $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ est une base de l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2,+,\bullet)$.

Application :

1. Vérifier que la famille $(1,i)$ est une base de $(\mathbb{C},+,\bullet)$.

2. Soit $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$.

Montrer que la famille (I,J) est une base de l'espace vectoriel $(E,+,\bullet)$ où $E=\left\{\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix} / (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

Proposition 23

Soit $(E,+,\bullet)$ un espace vectoriel réel, $n\in\mathbb{N}^*$ et $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_n)$ une base de E.

Si $\vec{x}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)_{(B)}$ et $\vec{y}(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)_{(B)}$ alors :

1. $\vec{x}+\vec{y}(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,...,\alpha_n+\beta_n)_{(B)}$.
2. $\lambda\vec{x}(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,...,\lambda\alpha_n)_{(B)}$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.

Proposition 24

Soit $(E,+,\bullet)$ un espace vectoriel réel, $n\in\mathbb{N}^*$ et $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_n)$ une famille de vecteurs de E.

On a l'équivalence suivante :

$$\boxed{B \text{ est une base de } E \Leftrightarrow \begin{cases} B \text{ est une famille génératrice de } E \\ B \text{ est une famille libre} \end{cases}}$$

Preuve :

$\Rightarrow$ Supposons que B est une base de E, donc :

$$\boxed{(\forall\vec{x}\in E)\left(\exists!(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n\right):\ \vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i}$$

Donc la famille B est génératrice.

On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i=\vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i=\sum_{i=1}^{n}0\vec{x}_i$

$\Rightarrow \alpha_i=0$ pour tout $i\in\{1,2,...,n\}$

Car l'écriture est unique, d'où la famille B est libre.

$\Leftarrow$ Supposons que la famille B est génératrice et libre.

B est génératrice donc : $\boxed{(\forall\vec{x}\in E)\left(\exists(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n\right):\ \vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i}$.

Montrons que cette écriture est unique :

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\vec{x}_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\beta_i)\vec{x}_i=\vec{0}$

$\Rightarrow \alpha_i-\beta_i=0$ pour tout $i\in\{1,2,...,n\}$ car la famille B est libre

$\Rightarrow \alpha_i=\beta_i$ pour tout $i\in\{1,2,...,n\}$

Ainsi B est une base de E.

Remarque :

Donc pour montrer qu'une famille B est une base on peut montrer qu'elle est libre et génératrice de E.

10.5 Dimension d'un espace vectoriel réel

Propriété et définition 24

Si un espace vectoriel réel $(E,+,\bullet)$ admet une base formée de n vecteurs, alors toutes les bases de E sont formées de n vecteurs.

Ce nombre n est appelé la **dimension** de E, et noté $\dim E$ ou $\dim(E)$, et on écrit $\dim E=n$.

Exemples :

L'espace E	La base canonique de l'espace E	$\dim E$
$(\mathbb{R},+,\bullet)$	(1)	1
$(\mathbb{C},+,\bullet)$	$(1,i)$	2
$(\mathbb{R}^2,+,\bullet)$	$((1,0);(0,1))$	2
$(\mathbb{R}^3,+,\bullet)$	$((1,0,0);(0,1,0);(0,0,1))$	3
$(\mathscr{P}_2,+,\bullet)$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2	(P_0,P_1,P_2) où $\begin{cases} P_0 : x \mapsto 1 \\ P_1 : x \mapsto x \\ P_2 : x \mapsto x^2 \end{cases}$	3
$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\bullet)$	(M_1,M_2,M_3,M_4) où $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	4

Remarque :

L'espace vectoriel $\left(\left\{\vec{0}\right\},+,\bullet\right)$ n'a pas de dimension, car il n'admet pas de base.

Application :

Soit E l'ensemble des fonctions définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ sous la forme $f : x \mapsto \dfrac{P(x)}{x^3-1}$, où P est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2.

1. Montrer que $(E,+,\bullet)$ est un espace vectoriel réel.

2. On considère les fonctions $g_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ et $g_2 : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+x+1}$ et $g_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$.

- **a.** Vérifier que g_1, g_2 et g_3 sont des éléments de E.
- **b.** Montrer que $B=(g_1;g_2;g_3)$ est une base de E, en déduire la dimension de E.
- **c.** Déterminer les coordonnées de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3-1}$ dans la base B.

10.6 CNS pour qu'une famille de vecteurs soit une base

Théorème 1

Soit $(E,+,\bullet)$ un espace vectoriel réel de dimension 2 et $B=\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ une base de E.

Soit $B'=(\vec{u},\vec{v})$ une famille de vecteurs de E tel que : $\vec{u}(a,b)$ et $\vec{v}(a',b')$ dans la base B, alors :

$$\boxed{[B' \text{ est une base de } E] \Leftrightarrow [B' \text{ est génératrice de } E] \Leftrightarrow [B' \text{ est libre dans } E] \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0}$$

Théorème 2

Soit $(E,+,\bullet)$ un espace vectoriel réel de dimension 3 et $B=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ une base de E.

Soit $B'=(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ une famille de vecteurs de E tel que : $\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{v}(a',b',c')$ et $\vec{w}(a'',b'',c'')$ dans la base B, alors :

$$\boxed{[B' \text{ est une base de } E] \Leftrightarrow [B' \text{ est génératrice de } E] \Leftrightarrow [B' \text{ est libre dans } E] \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \neq 0}$$

Remarque :

1. Une famille de cardinal $\dim E$ devient une base dès qu'elle est libre ou génératrice.

2. $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}$.