## Exercice 1(session normal 2011) 3points

Soit $N$ un entier naturel représenté dans le système de numération à base 10 comme suit : $N = 111......11$ ( 2010 fois 1)

1) Montrer que $N$ se divise par 11
2) A- Vérifier que 2011 est un nombre premier et $10^{2010} - 1 = 9N$
   B- Montrer que 2011 divise $9N$
   C- Déduire que 2011 divise $N$
3) Montrer que $N$ se divise par 22121

## Exercice 2(session normal 2012) 3points

Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): 143x - 195y = 52$

1) A- Déterminer le plus grand diviseur commun de 195 et 143 puis déduire que l'équation $(E)$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$
   b- Sachant que $(-1,-1)$ est une solution particulière de l'équation e$(E)$ résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E)$ en précisant tous les étapes de la solution
2) Soit $n$ un entier naturel non nul et premier avec 5 montrer que pour tout $k$ de $\mathbb{N}$ on a $n^{4k} \equiv 1[5]$
3) Soit deux entiers naturels $x$ et $y$ non nul tel que $x \equiv y[4]$
   a- montrer que $n^x \equiv n^y [5]$
   b- Déduire que pour $n$ tout de $\mathbb{N}^*$ on a $n^x \equiv n^y [10]$
4) Soit $x$ et $y$ deux entiers naturels tel que $(x,y)$ est solution de $(E)$ montrer que pour $n$ tout de $\mathbb{N}^*$ les deux nombres $n^x$ et $n^y$ ont le même chiffre des unités dans le système de numération à base 10

## Exercice 3(session normal 2018) 3points

Soit $p$ un nombre premier tel que

1) Montrer que pour tout entier relatif $x$ si $x^2 \equiv 1[p]$ alors $x^{p-5} \equiv 1[p]$
2) soit $x$ entier relatif vérifiant $x^{p-5} \equiv 1[p]$
   A- Montrer que $x$ et $p$ sont premiers entre eux
   B- Montrer que $x^{p-1} \equiv 1[p]$
   C- Vérifier que $2 + (k-1)(p-1) = k(p-5)$
   D- Déduire que $x^2 \equiv 1[p]$
4) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^{62} \equiv 1[67]$

## Exercice 4(session normal 2017) 3points

Admettant que 2017 est un nombre premier et $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$ soit $p$ un nombre premier supérieur ou égale à 5

1) Soit le couple $(x,y)$ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $px + y^{p-1} = 2017$
   A- Vérifier que $p \prec 2017$
   B- Montrer que $p$ ne divise pas $y$
   C- Montrer que $y^{p-1} \equiv 1[p]$ puis déduire que $p$ divise 2016
   D- Montrer que $p = 7$
2) Déterminer suivant la valeur de $p$ les couples $(x,y)$ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ qui vérifient $px + y^{p-1} = 2017$

## Exercice 5 (session normal 2016) 3points

### Partie 1

Soit le couple $(x,y)$ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que le nombre premier 173 divise $a^3 + b^3$

1) Montrer que $a^{171} \equiv -b^{171} [173]$ (remarquer $171 = 3 \times 57$ )
2) Montrer que 173 divise $a$ si et seulement si 173 divise $b$
3) On suppose que 173 divise $a$ montrer que 173 divise $a+b$
4) On suppose que 173 ne divise pas $a$
   A- En utilisant le théorème de Fermat montrer que $a^{172} \equiv b^{172} [173]$
   B- Montrer que $a^{171}(a+b) \equiv 0[173]$
   C- Déduire que 173 divise $a+b$

### Partie 2

soit dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation suivante $(E): x^3 + y^3 = 173(xy+1)$ et $(x,y)$ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ solution de l'équation $(E)$

on pose $x + y = 173k$ tel que $k \in \mathbb{N}^*$

1) Vérifier que $k(x-y)^2 + (k-1)xy = 1$
2) Montrer que $k = 1$ puis résoudre l'équation $(E)$