DEVOIR SURVEILLÉ N°1 S2 – ANNÉE SCOLAIRE 2019/2020		
LYCÉE MOHAMMED ZERKTOUNI	2ème BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES	**Prof : Amine SOUHIR**

Problème (12 points ~80 min) :

Partie I

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x} & ; \quad x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1. Vérifier que la fonction f est continue sur $[0,+\infty[$. (0,5)

2. Montrer que : $\left(\forall x \in [0,+\infty[\right)\left(\forall t \in [0,x]\right) : \dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1$. (0,5)

3. En déduire que $\left(\forall x \in [0,+\infty[\right) : \dfrac{x}{1+x^2} \leq \operatorname{Arctan} x \leq x$. (1,0)

Partie II

Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt & ; \quad x > 0 \\ F(0) = 1 \end{cases}$

1. Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[: f(x) \leq F(x) \leq 1$. (1,0)

2. Étudier la continuité de la fonction F à droite en 0. (0,5)

3. Montrer que la fonction F est dérivable à droite en 0 et donner $F'_d(0)$. (1,0)

4. **a.** Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt = 0$. (1,0)

Remarquer que pour tout $x \in [0,+\infty[: 0 \leq \operatorname{Arctan} x < \dfrac{\pi}{2}$.

b. En déduire la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$. (0,5)

5. **a.** Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $\left(\forall x \in]0,+\infty[\right) : F'(x) = \dfrac{1}{x}\left(f(x) - g(x)\right)$. (1,0)

b. En déduire la monotonie de la fonction F sur $[0,+\infty[$. (1,0)

6. **a.** Admettant que la fonction f est décroissante sur $[0,+\infty[$, montrer que $F(1) \leq 1$. (1,0)

b. Montrer que l'équation $F(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]0,1[$. (1,5)

7. **a.** Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[: 0 \leq 1 - f(x) \leq \dfrac{x^2}{1+x^2}$. (0,5)

b. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[: \left|F'(x)\right| \leq \dfrac{1}{2}$. (1,0)

Bonus (2 points) :

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = F(u_n) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$

Montrer que $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right) : \left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq \dfrac{1}{2}\left|u_n - \alpha\right|$ puis calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice (8 points ~35 min) :

Soit m un nombre complexe non réel ($m \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$).
On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - (1+i)(1+m)z + 2im = 0$.

1. **a.** Montrer que le discriminant de l'équation (E) est non nul. (0,5)

b. Déterminer z_1 et z_2, les deux solutions de l'équation (E). (1,0)

2. On suppose dans cette question que $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$.

a. Déterminer le module et un argument de $z_1 + z_2$. (1,5)

b. Montrer que si $z_1.z_2 \in \mathbb{R}$ alors $(z_1 + z_2) = 2i$. (1,5)

3. Soient A, B et C les points d'affixes respectifs $a = (1+i)$, $b = (1+i)m$ et $c = (1-i)$.

Soit D l'image de B par la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, et Ω le milieu de $[CD]$.

a. Montrer que l'affixe du point Ω est $\omega = \dfrac{(1-i)(1-m)}{2}$. (1,0)

b. Calculer $\dfrac{b-a}{\omega}$, en déduire que $(O\Omega) \perp (AB)$ et que $AB = 2O\Omega$. (1,0)

4. La droite $(O\Omega)$ coupe la droite (AB) au point H d'affixe h.

a. Montrer que $\dfrac{h-a}{b-a}$ est un réel et que $\dfrac{h}{b-a}$ est un imaginaire pur. (1,0)

b. En déduire h en fonction de m. (0,5)

Bonne chance