1 الزمرة

تعريف 1

لتكن G مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي $*$.

نقول إن $(G; *)$ زمرة إذا وفقط إذا كان لدينا:

- (1) القانون $*$ تجميعي في G؛
- (2) يوجد عنصر محايد e في G؛
- (3) كل عنصر a من G يقبل مماثلا a' في $(G; *)$.

وإذا كان القانون $*$ تبادليا فإننا نقول إن الزمرة $(G; *)$ زمرة تبادلية.

خاصيات

لتكن $(G; *)$ زمرة عنصرها المحايد e.

- (1) العنصر المحايد e وحيد.
- (2) كل عنصر a من G له مماثل وحيد في $(G; *)$.
- (3) إذا كان a' مماثل a وb' مماثل b فإن: $(a * b)' = b' * a'$
- (4) كل عنصر a من G هو منتظم.
- (5) المعادلة $a * x = b$ ذات المجهول x تقبل حلا وحيدا هو $a' * b$.
- (6) المعادلة $x * a = b$ ذات المجهول x تقبل حلا وحيدا هو $b * a'$.

الزمرة الجزئية

تعريف

لتكن $(G; *)$ زمرة وليكن H جزءا مستقرا من $(G; *)$.

نقول إن $(H; *)$ زمرة جزئية للزمرة $(G; *)$ إذا وفقط إذا كانت $(H; *)$ زمرة.

الخاصية المميزة لزمرة جزئية

$(G; *)$ زمرة وH جزء من G.

تكون $(H; *)$ زمرة جزئية للزمرة $(G; *)$ إذا وفقط إذا كان:

- (1) $H \neq \phi$
- (2) $\forall (x;y) \in H^2 \ ; \ x * y' \in H$

ملحوظة

- إذا كان القانون $*$ هو $+$ فإن (2) تكتب $(\forall (x;y) \in H^2) \ ; \ x - y \in H$
- وإذا كان القانون $*$ هو $\times$ فإن (2) تكتب $(\forall (x;y) \in H^2) \ ; \ xy^{-1} \in H$

Scanné avec CamScanner

لتكن G مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي $*$.

نقول إن $(G; *)$ زمرة إذا وفقط إذا كان لدينا:

- (1) القانون $*$ تجميعي في G؛
- (2) يوجد عنصر محايد e في G؛
- (3) كل عنصر a من G يقبل مماثلا a' في $(G; *)$.

وإذا كان القانون $*$ تبادليا فإننا نقول إن الزمرة $(G; *)$ زمرة تبادلية.

خاصيات

لتكن $(G; *)$ زمرة عنصرها المحايد e.

- (1) العنصر المحايد e وحيد.
- (2) كل عنصر a من G له مماثل وحيد في $(G; *)$.
- (3) إذا كان a' مماثل a وb' مماثل b فإن: $(a * b)' = b' * a'$
- (4) كل عنصر a من G هو منتظم.
- (5) المعادلة $a * x = b$ ذات المجهول x تقبل حلا وحيدا هو $a' * b$.
- (6) المعادلة $x * a = b$ ذات المجهول x تقبل حلا وحيدا هو $b * a'$.

الزمرة الجزئية

تعريف

لتكن $(G; *)$ زمرة وليكن H جزءا مستقرا من $(G; *)$.

نقول إن $(H; *)$ زمرة جزئية للزمرة $(G; *)$ إذا وفقط إذا كانت $(H; *)$ زمرة.

الخاصية المميزة لزمرة جزئية

$(G; *)$ زمرة وH جزء من G.

تكون $(H; *)$ زمرة جزئية للزمرة $(G; *)$ إذا وفقط إذا كان:

- (1) $H \neq \phi$
- (2) $\forall (x; y) \in H^2 \; ; \; x * y' \in H$

ملحوظة

- إذا كان القانون $*$ هو $+$ فإن (2) تكتب $(\forall (x; y) \in H^2) \; ; \; x - y \in H$
- وإذا كان القانون $*$ هو $\times$ فإن (2) تكتب $(\forall (x; y) \in H^2) \; ; \; xy^{-1} \in H$

Scanné avec CamScanner

تشاكل الزمر

خاصية

ليكن f تشاكلا من $(G;*)$ نحو $(E;T)$ إذا كانت $(G;*)$ زمرة فإن $(f(G);T)$ زمرة

وإذا كان f تشاكلا تقابليا فإن: $(E;T)$ زمرة $\Rightarrow$ $(G;*)$ زمرة.

2 الحلقة

تعريف 1

لتكن E مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين $*$ وT.

نقول إن القانون T توزيعي بالنسبة للقانون $*$ إذا كان: $\forall (x;y;z) \in E^3; \begin{cases} xT(y*z) = (xTy)*(xTz) \\ (y*z)Tx = (yTx)*(zTx) \end{cases}$

تعريف 2

لتكن A مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين $*$ وT.

$(A,*,T)$ حلقة إذا وفقط إذا كان:

- (1) $(A;*)$ زمرة تبادلية.
- (2) القانون T تجميعيا في A.
- (3) القانون T توزيعيا بالنسبة للقانون $*$ في A.
- وإذا كان القانون T تبادلي فإننا نقول إن الحلقة $(A,*,T)$ حلقة تبادلية.
- وإذا كان للقانون T عنصرا محايدا فإننا نقول إن الحلقة $(A,*,T)$ حلقة واحدية.

قواعد الحساب داخل الحلقة

حلقة $(A,*,T)$	حلقة $(A,+,\times)$
x' مماثل x في $(A,*)$ وe عنصرها المحايد	$-x$ مماثل x في $(A,+)$
	0 عنصرها المحايد في $(A,+)$
(1) $aTe=e$ و $eTa=e$	(1) $a\times0=0$ و $0\times a=0$
(2) $aTb'=(aTb)'$	(2) $a\times(-b)=-(a\times b)$
(3) $a'Tb=(aTb)'$	(3) $(-a)\times b=-(a\times b)$
(4) $a'Tb'=aTb$	(4) $(-a)\times(-b)=a\times b$

تعريف 3

لتكن $(A,*,T)$ حلقة عنصرها المحايد e بالنسبة للقانون $*$.

العنصر a من A قاسم للصفر في الحلقة $(A,*,T)$ إذا وفقط إذا كان: $a \neq e$ ويوجد b من $A-\{e\}$ بحيث $aTb=e$ و$bTa=e$.

مثلا:

في الحلقة $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z},+,\times)$ لدينا $\bar{2} \neq \bar{0}$ و $\bar{4} \neq \bar{0}$ و $\bar{2}\times\bar{4} = \bar{4}\times\bar{2} = \bar{0}$

إذن $\bar{2}$ (وكذلك $\bar{4}$) قاسم للصفر في الحلقة $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z},+,\times)$.

Scanné avec CamScanner

$(K, *, T)$ جسم (أو له بنية جسم) إذا وفقط إذا كان:

(1) $(K, *, T)$ حلقة واحدية.

(2) كل عنصر من $K - \{e\}$ يقبل مماثلا بالنسبة للقانون T

(e العنصر المحايد للقانون $*$ في K)

خاصية I

$(K, *, T)$ جسم (أو له بنية جسم) إذا وفقط إذا كان:

(1) $(K; *)$ زمرة تبادلية (عنصرها المحايد e)

(2) $(K - \{e\}; T)$ زمرة

(3) T توزيعيا بالنسبة للقانون $*$.

وإذا كان القانون T تبادليا فإن الجسم $(K, *, T)$ جسم تبادلي.

Scanné avec CamScanner

نقول إن $(E;*;.)$ فضاء متجهي حقيقي إذا كان :

(1) $(E;*)$ زمرة تبادلية. (2) $(\forall(\alpha;\beta)\in IR^2);(\forall(x;y)\in E^2)$:

$$\begin{cases}(v_1): (\alpha+\beta).x=\alpha.x*\beta.x\\(v_2): \alpha.(x*y)=\alpha.x*\alpha.y\\(v_3): (\alpha\beta).x=\alpha.(\beta.x)\\(v_4): 1.x=x\end{cases}$$

ملحوظة

في كل ما يلي :

- نرمز بالرمز + للقانون التركيب الداخلي في فضاء متجهي حقيقي.
- نرمز بالرمز $\vec{x}$ لعنصر ما من E، ونسميه متجهة في الحالة العامة.
- نستعمل الكتابة $\alpha\vec{x}$ بدل الكتابة $\alpha.\vec{x}$ حيث $\vec{x}\in E$ و $\alpha\in IR$.
- نرمز بالرمز $\vec{0}$ للعنصر المحايد في $(E;+)$ بصفة عامة.

وهكذا يكون لدينا :

$(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي إذا وفقط إذا كان :

(1) $(E;+)$ زمرة تبادلية.

(2) $(\forall(\alpha;\beta)\in IR^2)\ ;\ (\forall(\vec{x};\vec{y})\in E^2)$

(v_1): $(\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$

(v_2): $\alpha.(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$

(v_3): $(\alpha\times\beta)\vec{x}=\alpha.(\beta\vec{x})$

(v_4): $1\vec{x}=\vec{x}$

قواعد الحساب في فضاء متجهي حقيقي

ليكن $(E,+,.)$ فضاء متجهيا حقيقيا.

لكل $\vec{x}$ و $\vec{y}$ من E ولكل α و β من IR، لدينا :

- (1) $0\vec{x}=\vec{0}$
- (2) $\alpha\vec{0}=\vec{0}$
- (3) $(-\alpha)\vec{x}=\alpha(-\vec{x})=-(\alpha\vec{x})$
- (4) $\alpha(\vec{x}-\vec{y})=\alpha\vec{x}-\alpha\vec{y}$
- (5) $(\alpha-\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}-\beta\vec{x}$
- (6) $(-1)\vec{x}=-\vec{x}$

فضاء متجهي مولد بأسرة

ليكن $(E,+,.)$ فضاء متجهيا حقيقيا.

$B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_n)$ أسرة متجهات من E.

نقول إن B تولد الفضاء المتجهي E إذا وفقط إذا كان : $(\forall\vec{x}\in E),\exists(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n)\in IR^n:\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i$

Scanné avec CamScanner

الارتباط الخطي - الاستقلال الخطي

E فضاء متجهي حقيقي و $B = \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..\vec{x}_n\right)$ أسرة متجهات من E.

- نقول إن المتجهات $\vec{x}_1$ و $\vec{x}_2$ و... و$\vec{x}_n$ مرتبطة خطيا (أو أن الأسرة B مقيدة) إذا وفقط إذا كان:

$$\exists(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n) \in IR^n - \{(0,0,...,0)\} ; \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i = \vec{0}$$

- نقول إن المتجهات $\vec{x}_1$ و $\vec{x}_2$ و... و$\vec{x}_n$ مستقلة خطيا (أو أن B أسرة حرة) إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n) \in IR^n) \ ; \ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$$

خاصيات

1) لتكن B أسرة متجهات و A" جزءا" من B.

إذا كانت A مقيدة فإن B أسرة مقيدة.

إذا كانت B أسرة حرة فإن A أسرة حرة.

2) كل أسرة تحتوي على المتجهة المنعدمة هي أسرة مقيدة

3) إذا كان في أسرة B متجهتان متساويتان فإن B تكون مقيدة.

4) إذا كانت أسرة B حرة فإن جميع عناصرها غير منعدمة ومختلفة مثنى مثنى.

الفضاء المتجهي الجزئي

الخاصية المميزة للفضاء المتجهي الجزئي

$(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي. ليكن F جزءا من E

يكون: F فضاء متجهيا جزئيا من $(E,+,.)$ إذا وفقط إذا كان:

$$(1) \ F \neq \phi$$
$$(2) \ (\forall(\alpha;\beta) \in IR^2) \ (\forall(\vec{x};\vec{y}) \in F^2): \ \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in F$$

F فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي الحقيقي $(E;+;-)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (1)\ F \subset E \\ (2)\ F \neq \phi \\ (3)\ (\forall\vec{x},\vec{y} \in F);\ \vec{x} + \vec{y} \in F \\ (4)\ (\forall\vec{x} \in F);(\forall\lambda \in IR);\ \lambda\vec{x} \in F \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

ليكن E فضاء متجهيا على IR بحيث $dimE=2$ و$R=\left(\vec{i};\vec{j}\right)$ أساس في E.

1) لتكن $B=\left(\vec{e_1};\vec{e_2}\right)$ أسرة متجهين من E.

تكون B أساسا في E إذا وفقط إذا كانت B حرة.

2) $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ متجهتان غير منعدميتن في E. لدينا: $\left(\vec{u_1};\vec{u_2}\right)$ أساس في $E \iff \left(\vec{u_1};\vec{u_2}\right)$ حرة.

إذا كان $\vec{u_1}(x_1;y_1)$ و$\vec{u_2}(x_2;y_2)$ بالنسبة لأساس B في E. فإن: $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0 \iff \left(\vec{u_1};\vec{u_2}\right)$ حرة.

3) إذا كان E فضاء متجهيا على IR بحيث $dimE=3$.

و $\vec{u_1}$ و$\vec{u_2}$ و$\vec{u_3}$ ثلاث متجهات غير منعدمة في E، فإن:

$\left(\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3}\right)$ أساس في E إذا وفقط إذا كانت: $\left(\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3}\right)$ حرة.

إذا كان $\vec{u_1}(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{u_2}(x_2,y_2,z_2)$ و$\vec{u_3}(x_3,y_3,z_3)$ بالنسبة لأساس B في E فإن:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0 \iff \left(\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3}\right) \text{ حرة.}$$

Scanné avec CamScanner

تمارين وحلول

التمرين 1

نعتبر قانون التركيب الداخلي $*$ المعرف في $\mathbb{Z}$ بمايلي:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2 x * y = xy(x+y)$$

1) بين أن القانون $*$ تبادلي.

2) أ- احسب $2 * ((-1) * 1)$ و $1 * ((-1) * 2)$

ب- هل القانون $*$ تجميعي؟

3) حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة $x * 1 = 0$

الحل

1) لنبين أن القانون $*$ تبادلي.

ليكن x و y من $\mathbb{Z}$، لدينا: $x * y = xy(x+y) = yx(y+x) = y * x$

(لأن الجمع والضرب تبادليان في $\mathbb{Z}$)

إذن: $x * y = y * x \; ; \; \left(\forall (x;y) \in \mathbb{Z}^2\right)$ ومنه $*$ تبادلي.

2) أ- لنحسب $2 * ((-1) * 1)$ و $1 * ((-1) * 2)$

لدينا: $(1 * (-1)) * 2 = (1 \times (-1)(1 + (-1)) * 2$

$= 0 * 2 = 0$

و $1 * ((-1) * 2) = 1 * ((-1) \times (2)(-1+2))$

$= 1 * (-2) = -2(1-2) = 2$

ب- هل القانون $*$ تجميعي؟

حسب السؤال السابق، لدينا: $2 * ((-1) * 1) \neq (1 * (-1)) * 2) * 1$

يعني أن القانون $*$ ليس تجميعيا.

3) لنحل في المجموعة $\mathbb{Z}$ المعادلة: $x * 1 = 0$

ليكن x من $\mathbb{Z}$، لدينا: $x * 1 = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ أو $x = -1$

إذن مجموعة حلول المعادلة هي: $\{0;-1\}$.

التمرين 2

نُعرّف على IR^+ قانون التركيب الداخلي $*$ بمايلي: $(\forall (a;b) \in IR^{+2}) \; ; \; a * b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$

1) أ- احسب $(1 * 4) * 9$ و $1 * (4 * 9)$

ب- هل القانون $*$ تجميعي؟

2) بين أن القانون $*$ تبادلي.

3) بين أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا.

Scanné avec CamScanner

4) ما عناصر IR^+ القابلة للمماثلة بالنسبة للقانون $*$؟

الحل

1) أ- لنحسب $(9*4)*1$ و$9*(4*1)$

لدينا: $1 * (4 * 9) = 1 * (\sqrt{4} - \sqrt{9})^2 = 1 * 1 = 0$

و$(1 * 4) * 9 = (\sqrt{1} - \sqrt{4})^2 * 9 = 1 * 9 = 4$

ب- هل القانون $*$ تجميعي؟

لدينا حسب السؤال السابق: $1 * (4 * 9) \neq (1 * 4) * 9$

إذن القانون $*$ ليس تجميعيا.

2) لنبين أن القانون $*$ تبادلي.

ليكن a وb من IR^+، لدينا:

$$a * b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 = b * a$$

إذن: $(\forall (a;b) \in IR^{+2})\ ;\ a * b = b * a$ ومنه $*$ تبادلي.

3) لنبين أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا.

لدينا القانون $*$ تبادلي في IR^+ ومنه: e هو العنصر المحايد في $(IR^+,*)$ إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall x \in IR^+)\ ;\ x * e = x$$

لدينا: $(\forall x \in IR^+)\ x * e = x \Leftrightarrow (\forall x \in IR^+)\ ;\ (\sqrt{x} - \sqrt{e})^2 = x$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in IR^+)\ ;\ e - 2\sqrt{e}.\sqrt{x} = 0$$
$$\Leftrightarrow (\forall x \in IR^+)\ ;\ \sqrt{e}(\sqrt{e} - 2\sqrt{x}) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{e} = 0$$
$$\Leftrightarrow e = 0$$

إذن 0 هو العنصر المحايد في $(IR^+,*)$.

4) لنحدد عناصر المجموعة IR^+ القابلة للمماثلة:

ليكن x وy عنصرين من IR^+، لدينا: $x * y = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y}$$
$$\Leftrightarrow x = y$$

ومنه كل عنصر من IR^+ له مماثل في $(IR^+,*)$ هو نفسه.

التمرين 3

نعرف في المجموعة IN قانون التركيب الداخلي T بمايلي:

$aTb=a+b-1$ إذا كان a وb فرديين.

$aTb=a+b$ إذا كان a وb زوجيين.

$aTb = |a - b|$ إذا كان a وb مختلفي الزوجية.

Scanné avec CamScanner

تمارين وحلول

1) أ- احسب $2T4$ و$2T5$ و$2T13$.
ب- احسب $(2T5)T8$ و$2T(5T8)$.
2) هل القانون T تبادلي؟ تجميعي؟ علل جوابك.
3) هل القانون T يقبل عنصرا محايدا؟

الحل

1) أ- * لنحسب $2T4$
لدينا 2 و4 عددان زوجيان ومنه: $2T4=2+4=6$
* لنحسب $2T5$
لدينا 2 عدد زوجي و5 عدد فردي ومنه: $2T5 = |2-5| = 3$
* لنحسب $2T13$
لدينا 2 عدد زوجي و13 عدد فردي ومنه: $2T13 = |2-13| = 11$
ب- لنحسب $(2T5)T8$ و$2T(5T8)$
لدينا: $(2T5)T8 = (|2-5|)T8 = 3T8 = |3-8| = 5$
و $2T(5T8) = 2T(|5-8|) = 2T3 = |2-3| = 1$
إذن: $(2T5)T8=5$ و $2T(5T8)=1$
2) * هل القانون T تبادلي؟
ليكن a وb عنصرين من IN، لدينا ثلاث حالات:
الحالة 1: a وb عددان فرديان:
لدينا: $aTb=a+b-1=b+a-1=bTa$
الحالة 2: a وb عددان زوجيان:
لدينا: $aTb=a+b=b+a=bTa$
الحالة 3: a وb لهما زوجية مختلفة:
لدينا: $aTb = |a-b| = |b-a| = bTa$
إذن كخلاصة نستنتج أن: $(\forall (a;b) \in IN^2)\ ;\ aTb = bTa$
يعني أن القانون T تبادلي.
* هل القانون T تجميعي؟
لدينا حسب السؤال السابق: $(2T5)T8=5$ و $2T(5T8)=1$
يعني أن: $(2T5)T8 \neq 2T(5T8)$
إذن القانون T ليس تجميعيا.
- هل القانون T يقبل عنصرا محايدا؟
لتكن P مجموعة الأعداد الزوجية وI مجموعة الأعداد الفردية في IN.

Scanné avec CamScanner

e العنصر المحايد في $(IN;T)$ إذا وفقط إذا كان: $aTe=a$ و $eTa = a$; $(\forall a \in IN)$

– نفترض أن e عدد فردي:

لدينا: $(\forall a \in IN) \; ; \; eTa = a \Leftrightarrow ((\forall a \in I) \; ; \; eTa = a)$ و $((\forall a \in P) \; ; \; eTa = a)$

$\Leftrightarrow ((\forall a \in I) \; ; \; a + e - 1 = a)$ و $((\forall a \in P) \; ; \; |a - e| = a)$

$\Leftrightarrow e = 1$ و $e=0$

إذن العنصر المحايد ليس عددا فرديا.

– نفترض أن e عدد زوجي.

لدينا:

$(\forall a \in IN) \; ; \; eTa = a \Leftrightarrow ((\forall a \in I) \; ; \; eTa = a)$ و $((\forall a \in P) \; ; \; eTa = a)$

$\Leftrightarrow ((\forall a \in I) \; ; \; |a - e| = a)$ و $((\forall a \in P) \; ; \; a + e = a)$

$\Leftrightarrow e = 0$

وبما أن القانون تبادلي فإن: $(\forall a \in IN) \; ; \; 0Ta = aT0 = a$

إذن 0 هو العنصر المحايد في $(IN;T)$.

التمرين 4

نزود IR بالقانون الداخلي $*$ المعرف بمايلي: $(\forall x, y \in IR) \; ; \; x * y = xy - 3x - 3y + 12$

1) أ– حدد العنصر المحايد e في $(IR,*)$.

ب– حدد العناصر القابلة للمماثلة في $(IR,*)$.

2) أ– بين أن $]3; +\infty[$ جزء مستقر من $(IR,*)$.

ب– ليكن x عنصرا من $]3; +\infty[$ و x' مماثلة x في $(IR,*)$.

هل x' ينتمي إلى $]3; +\infty[$؟

Scanné avec CamScanner

ب- تحديد العناصر القابلة للماثلة في $(IR,\circ)$.

ليكن x وa عنصرين من IR، لدينا: $x * a = 4 \Leftrightarrow ax - 3x - 3a + 12 = 4$

$$\Leftrightarrow x(a-3) = 3a - 8$$

إذا كان: $a \neq 3$ فإن: $x * a = 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{3a-8}{a-3}$

ومنه إذا كان $a \neq 3$ فإن a يقبل مماثلا في $(IR,\circ)$ هو: $\dfrac{3a-8}{a-3}$

والعلاقة: $a * \left(\dfrac{3a-8}{a-3}\right) = 4$ محققة لأن القانون $\circ$ تبادلي في IR.

وبالتالي فإن كل عنصر من $IR-\{3\}$ له مماثل في $(IR,\circ)$.

2) أ- لنبين أن $]3;+\infty[$ جزء مستقر من $(IR,*)$.

ليكن x وy عنصرين من $]3;+\infty[$، لدينا:

$$x * y = x(y-3) - 3(y-3) + 3 = (y-3)(x-3) + 3$$

وبما أن: $x>3$ و$y>3$ فإن $(x-3)(y-3)>0$ ومنه فإن: $(x-3)(y-3)+3>3$ أي $x * y > 3$

إذن: $(\forall x, y \in]3,+\infty[)\ ;\ x * y \in]3;+\infty[$

يعني أن $]3;+\infty[$ جزء مستقر من $(IR,*)$.

ب- ليكن x عنصرا من $]3;+\infty[$.

لدينا مماثل x في $(IR,*)$ هو: $x' = \dfrac{3x-8}{x-3}$

وبما أن $x' - 3 = \dfrac{3x-8-3x+9}{x-3} = \dfrac{1}{x-3}$ و$x-3>0$ فإن: $x'-3>0$

يعني x' مماثل x من $]3;+\infty[$ في $(IR,*)$ ينتمي $]3;+\infty[$.

Scanné avec CamScanner

– لنبين أن القانون $*$ تجميعي:

ليكن x وy وz من IR، لدينا:

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (xy - 2(x + y) + 6) * z\\ &= (xy - 2(x + y) + 6)z - 2(xy - 2(x + y) + 6 + z) + 6\\ &= xyz - 2xy - 2yz + 6z - 2xy + 4x + 4y - 12 - 2z + 6\\ &= xyz - 2xz - 2yz - 2xy + 4x + 4y + 4z - 6\end{aligned}$$

ولدينا من جهة أخرى:

$$\begin{aligned}x * (y * z) &= x * (yz - 2(y + z) + 6)\\ &= x(yz - 2(y + z) + 6) - 2(x + yz - 2(y + z) + 6) + 6\\ &= xyz - 2xy - 2xz + 6x - 2x - 2yz + 4y + 4z - 12 + 6\\ &= xyz - 2xz - 2yz - 2xy + 4x + 4y + 4z - 6\end{aligned}$$

ومنه: $(\forall (x;y;z) \in IR^3)\ ;\ (x * y) * z = x * (y * z)$

إذن: القانون $*$ تجميعي في IR.

ب– لنبين أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا.

لدينا القانون $*$ تبادلي في IR ومنه فإن:

e هو العنصر المحايد في $(IR;*)$ إذا وفقط إذا كان: $(\forall x \in IR)\ ;\ x * e = x$

لدينا:
$$\begin{aligned}(\forall x \in IR)\ ;\ x * e = x &\Leftrightarrow (\forall x \in IR)\ ;\ xe - 2(x + e) + 6 = x\\ &\Leftrightarrow (\forall x \in IR)\ ;\ (e - 3)x + 6 - 2e = 0\\ &\Leftrightarrow (\forall x \in IR)\ ;\ (e - 3)(x - 2) = 0\\ &\Leftrightarrow (e = 3) \text{ أو } ((\forall x \in IR)\ ;\ x - 2 = 0)\end{aligned}$$

وكون العبارة: $(\forall x \in IR)\ ;\ x - 2 = 0$ عبارة خاطئة فإن: $e=3$

إذن 3 هو العنصر المحايد في $(IR;*)$.

2) أ– لنحدد عناصر المجموعة IR التي تقبل مماثلا في $(IR;*)$.

ليكن x من IR وx' (إذا وجد) مماثله بالنسبة للقانون $*$.

لدينا:
$$\begin{aligned}x * x' = 3 &\Leftrightarrow xx' - 2(x + x') + 6 = 3\\ &\Leftrightarrow x'(x - 2) = 2x - 3\end{aligned}$$

– إذا كان: $x \neq 2$ فإن: $x * x' = 3 \Leftrightarrow x' = \dfrac{2x - 3}{x - 2}$

وبما أن $*$ تبادلي فإن: $x' * x = 3 \Leftrightarrow x' = \dfrac{2x - 3}{x - 2}$

– إذا كان: $x=2$ فإن x' غير موجود.

إذن كل عنصر x من $IR-\{2\}$، يقبل مماثلا x' في $(IR;*)$ هو: $x' = \dfrac{2x - 3}{x - 2}$

ب– لنبين أن E جزء مستقر من $(IR;*)$.

أي لنبين أن: $(\forall (x;y) \in E^2)\ ;\ x * y \in E$

Scanné avec CamScanner

ليكن x وy من المجال $]2; +\infty[$، لدينا:

$$(x * y) - 2 = xy - 2(x + y) + 4 = xy - 2x - 2y + 4$$
$$= x(y - 2) - 2(y - 2) = (y - 2)(x - 2)$$

لدينا: $x \in]2; +\infty[$ و$y \in]2; +\infty[$ يعني أن: $(x-2)(y-2)>0$

إذن: $(x * y) > 2$ أي: $x * y \in]2; +\infty[$

وبالتالي: $(\forall (x;y) \in E^2)\ ;\ x * y \in E$

إذن: E جزء مستقر من $(IR;\circ)$.

التمرين 6

نزود IR_+^* بالقانون التركيب الداخلي $\circ$ المعرف كمايلي: $(\forall (x,y) \in (IR_+^*)^2)\ ;\ x * y = \dfrac{xy}{x + y}$

1) هل القانون $\circ$ تجميعي؟

2) هل القانون $\circ$ يقبل عنصرا محايدا؟

3) حدد مجموعة العناصر المنتظمة في $(IR_+^*, *)$.

الحل

1) ليكن x وy وz عناصر من IR_+^*، لدينا:

$$(x * y) * z = \left(\frac{xy}{x + y}\right) * z = \frac{\dfrac{xyz}{x + y}}{\dfrac{xy}{x + y} + z} = \frac{xyz}{xy + xz + yz}$$

و $$x * (y * z) = x * \left(\frac{yz}{y + z}\right) = \frac{\dfrac{xyz}{y + z}}{x + \dfrac{yz}{y + z}} = \frac{xyz}{xy + xz + yz}$$

ومنه: $(x * y) * z = x * (y * z)$

إذن: $(\forall (x, y, z) \in (IR_+^*)^3)\ ;\ (x * y) * z = x * (y * z)$

يعني أن القانون $*$ تجميعي في $(IR_+^*, *)$.

2) إذا وجد عنصر محايد e في $(IR_+^*, *)$ يجب أن يكون لدينا: $(\forall x \in IR_+^*)\ ;\ x * e = x$

(نلاحظ أن القانون $\circ$ تبادلي في IR_+^*).

لدينا: $(\forall x \in IR_+^*)\ ;\ x * e = x \Leftrightarrow (\forall x \in IR_+^*)\ ;\ \dfrac{ex}{e + x} = x$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in IR_+^*)\ ;\ ex = ex + x^2$$
$$\Leftrightarrow (\forall x \in IR_+^*)\ ;\ x = 0$$

وبما أن العبارة الأخيرة خاطئة فإنه لا يوجد عنصر محايد في $(IR_+^*, *)$.

3) ليكن a عنصرا من IR_+^*.

نفترض أن: $(\forall x, y \in IR_+^*)\ ;\ a * x = a * y$

ومنه فإن:
$$a * x = a * y \Leftrightarrow \frac{ax}{a+x} = \frac{ay}{a+y}$$
$$\Leftrightarrow x(a+y) = y(a+x)$$
$$\Leftrightarrow ax = ay$$
$$\Leftrightarrow x = y \qquad (a \neq 0)$$

إذن: $a * x = a * y \Rightarrow x = y$ $(\forall (x,y) \in IR_+^* \times IR_+^*)$ وبالتالي في $(IR_+^*, *)$ كل عنصر a منتظم.

التمرين ٦

ليكن $a \in IR_+^*$ و $G =]-a, a[$

نعرف العملية التالية: $\forall (x,y) \in G^2 \; ; \; xTy = \dfrac{x+y}{1+\dfrac{xy}{a^2}}$

1) بين أن T قانون تركيب داخلي في G.

2) بين أن T تبادلي وتجميعي.

3) بين أن T يقبل عنصرا محايدا.

4) حدد عناصر G التي تقبل مماثلا.

الحل

1) لنبين أن T قانون تركيب داخلي في G.

أي لنبين أن: $(\forall (x;y) \in G^2) \; ; \; xTy \in G$

ليكن x و y من G، لدينا: $xTy = \dfrac{x+y}{1+\dfrac{xy}{a^2}} = \dfrac{a^2(x+y)}{a^2+xy}$

لدينا:
$$xTy \in G \Leftrightarrow xTy \in]-a; a[\, .$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{a^2(x+y)}{a^2+xy}\right| < a$$
$$\Leftrightarrow |a(x+y)| < |a^2+xy|$$
$$\Leftrightarrow a^2(x^2+2xy+y^2) < a^2\left(a^2+2xy+\frac{x^2y^2}{a^2}\right)$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2 < a^2+\frac{x^2y^2}{a^2}$$
$$\Leftrightarrow (x^2-a^2) - \frac{y^2}{a^2}(x^2-a^2) < 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-a^2)(a^2-y^2) < 0$$

بما أن: $x \in]-a; a[$ و $y \in]-a; a[$ فإن: $x^2<a^2$ و $y^2<a^2$

يعني أن العبارة: $(x^2-a^2)(a^2-y^2)<0$ عبارة صحيحة، إذن: $(\forall (x,y) \in G^2) \; ; \; xTy \in G$

وبالتالي T قانون تركيب داخلي في G.

2) لنبين أن القانون T تبادلي:

ليكن x وy من G، لدينا: $xTy = \dfrac{x+y}{1+\dfrac{xy}{a^2}} = \dfrac{y+x}{1+\dfrac{yx}{a^2}} = yTx$ (لأن الجمع والضرب تبادليان في IR)

إذن: $(\forall (x;y) \in G^2)\ ;\ xTy = yTx$ ومنه: T قانون تبادلي في G.

• **لنبين أن القانون T تجميعي:**

ليكن x وy وz من G، لدينا:

$$(xTy)\,Tz = \left(\dfrac{x+y}{1+\dfrac{xy}{a^2}}\right)Tz = \left(\dfrac{a^2(x+y)}{a^2+xy}\right)Tz$$

$$= \dfrac{\dfrac{a^2(x+y)}{a^2+xy}+z}{1+\dfrac{(x+y)\,z}{a^2+xy}} = \dfrac{a^2(x+y+z)+xyz}{a^2+xy+xz+yz} \qquad (1)$$

ولدينا من جهة أخرى:

$$xT(yTz) = xT\left(\dfrac{y+z}{1+\dfrac{yz}{a^2}}\right) = xT\left(\dfrac{a^2(y+z)}{a^2+yz}\right)$$

$$= \dfrac{x+\dfrac{a^2(y+z)}{a^2+yz}}{1+\dfrac{x(y+z)}{a^2+yz}} = \dfrac{a^2x+xyz+a^2y+a^2z}{a^2+yz+xy+xz}$$

$$= \dfrac{a^2(x+y+z)+xyz}{a^2+xy+xz+yz} \qquad (2)$$

من (1) و(2) نستنتج أن: $(xTy)Tz=xT(yTz)$

إذن: $(\forall (x;y;z) \in G^3)\ ;\ (xTy)\,Tz = xT(yTz)$ وبالتالي القانون T تجميعي في G.

3) لنبين أن القانون T يقبل عنصرا محايدا.

لدينا القانون T تبادلي في G ومنه: e هو العنصر المحايد في (G,T) إذا وفقط إذا كان: $(\forall x \in G)\ ;\ xTe = x$

لدينا: $(\forall x \in G)\ ;\ xTe = x \Leftrightarrow (\forall x \in]-a;a[)\ ;\ \dfrac{x+e}{1+\dfrac{ex}{a^2}} = x$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in]-a;a[)\ ;\ a^2(x+e) = x(a^2+ex)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in]-a;a[)\ ;\ e(a^2-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow e = 0$$

لأن العبارة $(\forall x \in]-a;a[)\ ;\ a^2-x=0$ عبارة خاطئة.

إذن 0 هو العنصر المحايد في $(G;T)$.

4) لنحدد عناصر G التي تقبل مماثلا.

Scanné avec CamScanner

ليكن x من G وx' مماثله في $(G;T)$، لدينا:

$$xTx' = 0 \Leftrightarrow \frac{x + x'}{1 + \frac{xx'}{a^2}} = 0$$
$$\Leftrightarrow x + x' = 0$$
$$\Leftrightarrow x' = - x$$

وبما أن T تبادلي فإن: $x'Tx = 0 \Leftrightarrow x' = - x$

إذن كل عنصر x من G يقبل مماثلا في G هو $-x$.

التمرين 8

نعرّف على المجال $]-1;1[$ قانونا T بمايلي: $(\forall x, y \in]-1;1[) \; ; \; xTy = \frac{x + y}{1 + xy}$

1) بين أن T قانون تركيب داخلي في $]-1;1[$.

2) بين أن القانون الداخلي T تجميعي في $]-1;1[$.

3) حدد العنصر المحايد e في $(]-1;1[;T)$.

4) بين أن كل عنصر x من $]-1;1[$ يقبل مماثلا في $(]-1;1[;T)$.

الحل

1) لنبين أن T قانون تركيب داخلي في $]-1;1[$.

يعني: $(\forall x, y \in]-1;1[) \; ; \; xTy \in]-1;1[$

ليكن x وy عنصرين من المجال $]-1;1[$، لدينا: $(xTy) - 1 = \frac{x + y - 1 - xy}{1 + xy} = \frac{(x - 1)(1 - y)}{1 + xy}$

و $(xTy) + 1 = \frac{x + y + 1 + xy}{1 + xy} = \frac{(x + 1)(y + 1)}{1 + xy}$

وبما أن $|x| < 1$ و$|y| < 1$ فإن $|xy| < 1$ أي $-1 < xy < 1$ ومنه فإن: $1+xy>0$

ولدينا: $x-1<0$ و$1-y>0$ ومنه فإن $(x-1)(1-y)<0$ إذن: $\frac{(x - 1)(1 - y)}{1 + xy} < 0$ أي: $xTy<1$

ولدينا: $x+1>0$ و$y+1>0$ ومنه فإن $(x+1)(y+1)>0$

إذن: $\frac{(x + 1)(y + 1)}{1 + xy} > 0$ أي: $-1<xTy$ ، وبالتالي فإن: $xTy \in]-1;1[$

إذن: $(\forall x, y \in]-1;1[) \; ; \; xTy \in]-1;1[$، يعني أن: T قانون تركيب داخلي في $]-1;1[$.

2) لنبين أن القانون T تجميعي في $]-1;1[$.

لتكن x وy وz عناصر من $]-1;1[$، لدينا:

$$(xTy)Tz = \frac{x + y}{1 + xy}Tz = \frac{\frac{x + y}{1 + xy} + z}{1 + z.\frac{x + y}{1 + xy}} = \frac{x + y + z(1 + xy)}{1 + xy + z(x + y)} = \frac{x + y + z + xyz}{1 + xy + xz + yz}$$

ولدينا: $xT(yTz) = xT\frac{y+z}{1+yz} = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x.\frac{y+z}{1+yz}} = \frac{x(1+yz)+z+z}{1+yz+x(y+z)} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$

ومنه فإن: $(xTy)Tz = xT(yTz)$، إذن: $(\forall x,y,z \in]-1;1[)\ ;\ (xTy)Tz = xT(yTz)$

يعني أن القانون T تجميعي في $]-1;1[$.

3) تحديد العنصر المحايد e.

نلاحظ أن القانون T تبادلي في $]-1;1[$، ومنه فإن:

e هو العنصر المحايد في $(]-1,1[;T)$ إذا وفقط إذا كان: $(\forall x \in]-1;1[)\ ;\ xTe = x$

لدينا: $(\forall x \in]-1;1[)\ ;\ xTe = x \Leftrightarrow (\forall x \in]-1;1[)\ ;\ \frac{x+e}{1+xe} = x$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in]-1;1[)\ ;\ x+e = x+x^2e$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in]-1;1[)\ ;\ (x^2-1)e = 0$$

يعني أن $e=0$ ؛ إذن 0 هو العنصر المحايد في $(]-1,1[;T)$

4) لنبين أن كل عنصر من $]-1;1[$ له مماثل في $(]-1,1[;T)$.

ليكن x وy عنصرين من $]-1;1[$، لدينا: $xTy = 0 \Leftrightarrow \frac{x+y}{1+xy} = 0$

$$\Leftrightarrow x+y = 0$$

$$\Leftrightarrow -x = y$$

ومنه x يقبل مماثلا في $(]-1,1[;T)$ هو $-x$.

التمرين 9

نعرف في $\mathbb{C}$، قانون التركيب الداخلي $*$ بمايلي:

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2;\ z*z' = zz' + i(z+z') - (1+i)$$

1) بين أن $*$ تبادلي وتجميعي.

2) حدد العنصر المحايد e لهذا القانون.

3) حدد مجموعة الأعداد التي تقبل مماثلا بالنسبة ل $*$.

الحل

1) لنبين أن القانون $*$ تجميعي.

ليكن z وz' وz'' من $\mathbb{C}$، لدينا:

$$\begin{aligned}(z*z')*z'' &= (zz' + i(z+z') - (1+i))*z''\\ &= (zz' + i(z+z') - (1+i))z'' + i(zz' + i(z+z') - (1+i) + z'') - (1+i)\\ &= zz'z'' + i(zz'' + z'z'') - (1+i)z'' + izz' - (z+z') + 1 - i + iz'' - 1 - i\\ &= zz'z'' + i(zz'' + z'z'' + zz') - (z+z'+z'') - 2i \qquad (1)\end{aligned}$$

ولدينا من جهة أخرى:

Scanné avec CamScanner

$$\begin{aligned} z * (z' * z'') &= z * (z'z'' + i(z' + z'') - (1 + i)) \\ &= z(z'z'' + i(z' + z'') - (1 + i)) + i(z + z'z'' + i(z' + z'') - (1 + i)) - (1 + i) \\ &= zz'z'' + i(zz' + zz'') - (1 + i)z + iz + iz'z'' - (z' + z'') + 1 - i - 1 - i \\ &= zz'z'' + i(zz' + zz'' + z'z'') - (z + z' + z'') - 2i \qquad (2) \end{aligned}$$

من (1) و(2) نستنتج أن: $(z * z') * z'' = z * (z' * z'')$

إذن: $(\forall (z;z';z'') \in \mathbb{C}^3)\ ;\ (z * z') * z'' = z * (z' * z'')$

وبالتالي القانون $*$ تجميعي في $\mathbb{C}$.

– لنبين أن القانون $*$ تبادلي:

ليكن z وz' من $\mathbb{C}$، لدينا:

$$\begin{aligned} z * z' &= zz' + i(z + z') - (1 + i) \\ &= z'z + i(z' + z) - (1 + i) \quad \text{(لأن الجمع والضرب تبادليان في } \mathbb{C}) \\ &= z' * z \end{aligned}$$

إذن: $(\forall (z;z') \in \mathbb{C}^2)\ ;\ z * z' = z' * z$

وبالتالي القانون $*$ تبادلي في $\mathbb{C}$.

2) لنحدد العنصر المحايد e للقانون $*$:

لدينا القانون $*$ تبادلي ومنه e هو العنصر المحايد في $(\mathbb{C};*)$ إذا وفقط إذا كان: $(\forall z \in \mathbb{C})\ ;\ z * e = z$

لدينا:

$$\begin{aligned} (\forall z \in \mathbb{C})\ ;\ z * e = z &\Leftrightarrow (\forall z \in \mathbb{C})\ ;\ ez + i(e + z) - (1 + i) = z \\ &\Leftrightarrow (\forall z \in \mathbb{C})\ ;\ (e + i - 1)z + (ie - (1 + i)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e + i - 1 = 0 \\ ie - (1 + i) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e = 1 - i \\ e = \dfrac{1 + i}{i} = 1 - i \end{cases} \end{aligned}$$

إذن $e=1-i$ هو العنصر المحايد في $(\mathbb{C};*)$

3) لنحدد مجموعة الأعداد التي تقبل مماثلا بالنسبة للقانون $*$.

ليكن z من $\mathbb{C}$ وz' مماثله بالنسبة للقانون $*$ في $\mathbb{C}$.

لدينا: $z * z' = e \Leftrightarrow zz' + i(z + z') - (1 + i) = 1 - i$

$$\Leftrightarrow z'(z + i) = -iz + 2$$

– إذا كان $z \neq -i$ فإن: $z * z' = e \Leftrightarrow z' = \dfrac{-iz + 2}{z + i}$

وبما أن القانون $*$ تبادلي فإن: $z' * z = e \Leftrightarrow z' = \dfrac{-iz + 2}{z + i}$

– إذا كان $z=-i$ فإن z' غير موجود.

إذن كل عنصر z من $\mathbb{C} -\{-i\}$، يقبل مماثلا z' هو $\dfrac{-iz + 2}{z + i}$ بالنسبة للقانون $*$.

Scanné avec CamScanner

التمرين 10

E مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين $*$ وT.

نفترض أن e العنصر المحايد للقانون $*$ وأن f العنصر المحايد للقانون T.

ونفترض أن: $\forall (x;y;u;v) \in E^4 : (x * y) T (u * v) = (xTu) * (yTv)$

1) بين أن $e=f$

2) بين أن $\forall (a,b) \in E^2 \; ; \; a * b = aTb$

3) بين أن $*$ تبادلي وتجميعي.

الحل

1) لنبين أن: $e=f$

لدينا: $(\forall (x;y;u;v) \in E^4) \; ; \; (x * y) T (u * v) = (xTu) * (yTv)$

بأخذ: $x=e$ و$y=f$ و$u=f$ و$v=e$ لدينا: $(e * f) T (f * e) = (eTf) * (fTe)$

أي: $fTf = e * e$ (حسب تعريف e وf) إذن $e=f$

2) لنبين أن: $\forall (a,b) \in E^2 \; ; \; a * b = aTb$

ليكن a وb عنصرين من E، لدينا:

$$a * b = (a * e) T (b * e) = (aTb) * (eTe) = (aTb) * e = aTb \quad (e=f \text{ لأن})$$

إذن: $(\forall (a;b) \in E^2) \; ; \; a * b = aTb$

3) $\bullet$ لنبين أن القانون $*$ تبادلي.

ليكن a وb من E، لدينا: $a * b = (e * a) T (b * e) = (eTb) * (aTe) = b * a$

إذن: $(\forall (a;b) \in E^2) \; ; \; a * b = b * a$، وبالتالي القانون $*$ تبادلي في E.

$\bullet$ لنبين أن القانون $*$ تجميعي.

ليكن a وb وc من E، لدينا:

$$(a * b) * c = (a * b) Tc = (a * b) T (e * c) = (aTe) * (bTc) = a * (bTc) = a * (b * c)$$

إذن: $(\forall (a;b;c) \in E^2) \; ; \; (a * b) * c = (a * b) * c$، وبالتالي القانون $*$ تجميعي في E.

التمرين 11

نعرّف في IR قانون تركيب داخلي T بمايلي: $(\forall x;y \in IR) \; ; \; xTy = axy + b(x+y) + c$

حيث a وb وc أعداد حقيقية مع: $ab \neq 0$

1) كيف يمكن اختيار الأعداد a وb وc بحيث يكون القانون T تجميعيا في IR؟

2) نفترض أن القانون الداخلي T تجميعي في IR.

أ- بين أن T يقبل عنصرا محايدا e يتم تحديده بدلالة a وb.

ب- ادرس وجود x' مماثل للعنصر x في (IR,T).

Scanné avec CamScanner

الحل

1) شرط تجميعية القانون T.

يكون القانون T تجميعيا في IR إذا وفقط إذا كان: $(\forall (x;y;z) \in IR^3)\ ;\ (xTy)Tz = xT(yTz)$

ليكن x وy وz عناصر من IR، لدينا:

$$\begin{aligned}(xTy)Tz &= (axy+b(x+y)+c)Tz\\ &= a(axy+b(x+y)+c)z+b(axy+b(x+y)+c+z)+c\\ &= a^2xyz+ab(xz+yz+xy)+b^2(x+y)+acz+bz+bc+c\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}xT(yTz) &= xT(ayz+b(y+z)+c)\\ &= ax(ayz+b(y+z)+c)+b(x+ayz+b(y+z)+c)+c\\ &= a^2xyz+ab(xy+xz+yz)+b^2(y+z)+acx+bc+bx+c\end{aligned}$$

ومنه فإن:

$$\begin{aligned}(xTy)Tz = xT(yTz) &\Leftrightarrow b^2x + bz + acz = b^2z + acx + bx\\ &\Leftrightarrow b^2(x-z) - b(x-z) - ac(x-z) = 0\\ &\Leftrightarrow (b^2 - b - ac)(x-z) = 0\end{aligned}$$

إذن القانون T تجميعي في IR إذا وفقط إذا كان: $(\forall (x;y;z) \in IR^3)\ ;\ (b^2-b-ac)(x-z) = 0$

يعني أن: $b^2-b-ac=0$، وبالتالي فإنه إذا كان $b^2=b+ac$ فإن القانون T تجميعي في IR.

2) نفترض أن: $b^2=b+ac$

أ- العنصر المحايد في (IR,T).

لدينا القانون T تبادلي في IR.

إذا وجد عنصر محايد e في (IR,T) يجب أن يكون لدينا: $(\forall x \in IR)\ ;\ xTe = x$

لدينا:

$$\begin{aligned}(\forall x \in IR)\ ;\ xTe = x &\Leftrightarrow (\forall x \in IR)\ ;\ axe + b(x+e) + e = x\\ &\Leftrightarrow (\forall x \in IR)\ ;\ (ae+b-1)x + be + e = 0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} ae + b - 1 = 0\\ be + c = 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e = \dfrac{1-b}{a}\\ e = \dfrac{-c}{b}\end{cases}\end{aligned}$$

($ab \neq 0$ يعني أن $a \neq 0$ و$b \neq 0$)

ولدينا:

$$\begin{aligned}b^2 = b + ac &\Leftrightarrow b(b-1) = ac\\ &\Leftrightarrow \frac{b-1}{a} = \frac{c}{b}\\ &\Leftrightarrow \frac{1-b}{a} = \frac{-c}{b}\end{aligned}$$

ومنه فإن القانون T يقبل عنصرا محايدا هو: $e = \dfrac{1-b}{a}$

ب- دراسة وجود العناصر القابلة للمماثلة في $(IR;T)$.

ليكن f تشاكلا من $(E,\circ)$ نحو (F,T).

1) B جزء مستقر من (F,T).

بين أن $\overset{-1}{f}(B)$ جزء مستقر من $(E,\circ)$.

2) A جزء مستقر من $(E,\circ)$.

بين أن $f(A)$ جزء مستقر من (F,T).

Scanné avec CamScanner

ومنه : $y_1Ty_2 = f(x_1)Tf(x_2)$

$= f(x_1 * x_2)$ (لأن f تشاكل من $(E;\circ)$ نحو $(F;T)$)

وبما أن A جزء مستقر من $(E;\circ)$ فإن: $x_1 * x_2 \in A$ ، إذن: $f(x_1 * x_2) \in f(A)$ أي: $y_1Ty_2 \in f(A)$

وبالتالي: $(\forall (y_1;y_2) \in (f(A))^2)$; $y_1Ty_2 \in f(A)$ ، يعني أن $f(A)$ جزء مستقر من $(F;T)$.

التمرين 13

نعتبر التطبيق f من $(IR_+^*, \times)$ نحو $(IR, +)$ بحيث: $(\forall x, y \in IR_+^*)$; $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

1) أ- احسب $f(1)$

ب- بين أن: $(\forall x \in IR_+^*)$; $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

2) بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن: $(\forall x \in IR_+^*)$; $(\forall n \in IN)$; $f(x^n) = nf(x)$

3) بين أن f تشاكل من $(IR_+^*, \times)$ نحو $(IR,+)$.

الحل

1) أ- حساب $f(1)$

لدينا: $(\forall x, y \in IR_+^*)$; $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

وبالأخص من أجل $x=y=1$ يكون لدينا: $f(1) = f\left(\frac{1}{1}\right) = f(1) - f(1)$

ومنه فإن: $f(1)=0$

ب- لنبين أن: $(\forall x \in IR_+^*)$; $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

ليكن x عنصرا من IR_+^* لدينا: $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1) - f(x)$

وبما أن $f(1)=0$ فإن $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ ، إذن: $(\forall x \in IR_+^*)$; $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

2) ليكن x عنصرا من IR_+^*.

لنبين باستعمال الاستدلال بالترجع أن: $(\forall n \in IN)$; $f(x^n) = nf(x)$

من أجل $n=0$ لدينا: $x^0=1$ و$f(1)=0$ و$0f(x)=0$

إذن $f(x^0)=0f(x)$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

ليكن n عنصرا من IN، نفترض أن $f(x^n)=nf(x)$ ونبين أن: $f(x^{n+1})=(n+1)f(x)$

لدينا: $f(x^{n+1}) - f(x) = f\left(\frac{x^{n+1}}{x}\right) = f(x^n)$

وحسب افتراض الترجع فإن: $f(x^{n+1})-f(x)=nf(x)$ ، يعني أن: $f(x^{n+1})=nf(x)+f(x)=(n+1)f(x)$

إذن: $(\forall n \in IN)$; $f(x^n) = nf(x)$ ، وبالتالي فإن: $(\forall x \in IR_+^*)$; $(\forall n \in IN)$; $f(x^n) = nf(x)$

3) لنبين أن f تشاكل من $(IR_+^*, \times)$ نحو $(IR,+)$.

أي: $(\forall x, y \in IR_+^*)$; $f(xy) = f(x) + f(y)$

Scanné avec CamScanner

نعتبر القانون $\circ$ المعرف بمايلي: $(\forall (x;y) \in IR^2)\ ;\ x * y = x + y - xy$ والتطبيق :

$$f: IR \to IR$$
$$x \mapsto 1 - x$$

1) بين أنه إذا كان g تشاكلا تقابليا من $(E;\circ)$ نحو $(F;T)$ فإن g^{-1} تشاكل تقابلي من $(F;T)$ نحو $(E;\circ)$.

2) أ- بين أن f تشاكل تقابلي من $(IR;\circ)$ نحو $(IR;\times)$ ثم استنتج خاصيات $\circ$ في IR.

ب- ليكن $a \in IR$، نضع :
$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_2 = a * a \\ a_{n+1} = a_n * a\ ;\ (\forall n \in IN^*) \end{cases}$$

باستعمال التشاكل f، حدد a_n بدلالة a وn.

الحل

Scanné avec CamScanner

طريقة 1: لدينا f متصلة على IR (لأنها دالة حدودية) وتناقصية قطعا على IR

إذن f تقابل من IR نحو $f(IR)$ أي نحو IR.

طريقة 2: ليكن y من IR، هل يوجد x وحيد من IR بحيث: $f(x)=y$

لدينا: $f(x) = y \Leftrightarrow 1 - x = y$

$$\Leftrightarrow x = 1 - y$$

إذن لكل y من IR، المعادلة: $f(x)=y$ حيث x هو المجهول، تقبل حلا وحيدا في IR وبالتالي f تقابل من IR نحو IR.

• استنتاج خاصيات $*$ في IR:

لدينا f تشاكل تقابلي من $(IR;*)$ نحو $(IR;\times)$.

ومنه وحسب السؤال 1–، لدينا f^{-1} تشاكل تقابلي من $(IR;\times)$ نحو $(IR;*)$ وبالتالي خاصيات القانون $*$ تُسْتَنْتج كالتالي:

× تجميعي في IR ومنه $*$ تجميعي في E.

× تبادلي في IR ومنه $*$ تبادلي في E.

1 هو العنصر المحايد في $(IR$ ومنه $f(1) = 0$ هو العنصر المحايد في $(E,*)$.

كل عنصر يخالف 0 له مماثل في $(IR;\times)$ ومنه كل عنصر يخالف $f(0)=0$ له مماثل في $(E,*)$.

ب– لنحدد a_n بدلالة a و n.

لدينا f^{-1} تشاكل تقابلي من $(IR;\times)$ نحو $(IR;*)$، ومنه: $(\exists! b \in IR) / f^{-1}(b) = a$ أي: $b=1-a$

$$a_2 = a * a = f^{-1}(b) * f^{-1}(b) = f^{-1}(b \times b) = f^{-1}(b^2)$$
$$= 1 - b^2 = 1 - (1 - a)^2$$

لنبين باستعمال البرهان بالترجع أن: $(\forall n \in IN^*) ; a_n = 1 - (1 - a)^n$

من أجل $n=1$، لدينا $a_1=a$ و $1-(1-a)^1=1-1+a=a$

إذن $a_1=1-(1-a)^1$؛ يعني أن الخاصية صحيحة من أجل $n=1$.

ليكن n عنصرا من IN^*،

نفترض أن: $a_n=1-(1-a)^n$ لنبين أن: $a_{n+1}=1-(1-a)^{n+1}$

لدينا:
$$a_{n+1} = a_n * a$$
$$= (1 - (1 - a)^n) * a$$
$$= 1 - (1 - a)^n + a - a(1 - (1 - a)^n)$$
$$= 1 - (1 - a)^n + a(1 - a)^n$$
$$= 1 - (1 - a)^{n+1}$$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ وبالتالي: $(\forall n \in IN^*) \ ; \ a_n = 1 - (1 - a)^n$

Scanné avec CamScanner

التمرين 15

نضع $I=IR^+$، نعرف في I القانون T بمايلي: $(\forall (x;y) \in I^2)\ ;\ xTy = \sqrt{x^2 + y^2}$

1) بين أن التطبيق: $\varphi: I \to I$

$$x \mapsto x^2$$

تشاكل تقابلي من $(I;T)$ نحو $(I;+)$

2) استنتج خاصيات T في I.

3) احسب: $\underbrace{aTaT....Ta}_{n \text{ مرة}}$

الحل

1) * لنبين أن التطبيق φ تشاكل من $(I;T)$ نحو $(I;+)$.

ليكن x وy من I، لدينا:

$$\begin{aligned}\varphi(xTy) &= \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})\\ &= (\sqrt{x^2 + y^2})^2\\ &= x^2 + y^2\\ &= \varphi(x) + \varphi(y)\end{aligned}$$

إذن $(\forall (x;y) \in I^2)\ ;\ \varphi(xTy) = \varphi(x) + \varphi(y)$

وبالتالي φ تشاكل من $(I;T)$ نحو $(I;+)$.

* **لنبين أن φ تقابل من I نحو I.**

لدينا الدالة: $\varphi: x \mapsto x^2$ متصلة وتزايدية قطعا على IR^+، إذن φ تقابل من IR^+ نحو $\varphi(IR^+) = IR^+$

إذن φ تشاكل تقابلي من $(I;T)$ نحو $(I;+)$.

2) **لنستنتج خاصيات T في I:**

لدينا φ تشاكل تقابلي من $(I;T)$ نحو $(I;+)$ ومنه خاصيات T في I تُسْتَنْتَج من خاصيات $+$ في I.

لدينا: $+$ تجميعي في IR^+ إذن T تجميعي في I.

$+$ تبادلي في IR^+ إذن T تبادلي في I.

0 هو العنصر المحايد في $(IR^+;+)$ إذن $\varphi(0) = 0$ هو العنصر المحايد في $(I;T)$.

3) لنحسب $\underbrace{aTaT...Ta}_{n \text{ مرة}}$ حيث $n \in IN^* - \{1\}$

لدينا: $aTa = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

و$aTaTa = (aTa)Ta = (a\sqrt{2})Ta = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$

لنبين باستعمال البرهان بالترجع أن: $(\forall n \in IN^* - \{1\})\ \underbrace{aTaT...Ta}_{n \text{ مرة}} = a\sqrt{n}$

من أجل $n=2$، لدينا حسب ما سبق الخاصية محققة.

Scanné avec CamScanner

ليكن n عنصرا من $IN^* - \{1\}$.

نفترض أن: $\underbrace{aTaT...Ta}_{n \text{ مرة}} = a\sqrt{n}$ ،

لنبين أن: $\underbrace{aTaT...Ta}_{(n+1) \text{ مرة}} = a\sqrt{n+1}$

لدينا: $\underbrace{aTaT\ldots Ta}_{(n+1) \text{ مرة}} = (\underbrace{aTaT\ldots Ta}_{n \text{ مرة}})Ta$

$= (a\sqrt{n})\,Ta$ (حسب افتراض الترجع)

$= \sqrt{na^2 + a^2}$

$= a\sqrt{n+1}$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

وبالتالي: $(\forall n \in IN^* - \{1\})\ \underbrace{aTaT...Ta}_{n \text{ مرة}} = a\sqrt{n}$

التمرين 16

نعرف في IR القانون $\circ$ بمايلي: $(\forall (x;y) \in IR^2)\ ;\ x * y = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}$

نعتبر التطبيق: $\varphi : IR \to IR$

$$x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1) بين أن φ تشاكل تقابلي من $(IR;+)$ نحو $(IR;\circ)$.

2) استنتج خاصيات $\circ$.

الحل

1) * لنبين أن φ تشاكل تقابلي من $(IR;+)$ نحو $(IR;*)$.

ليكن x وy من IR، لدينا: $\varphi(x+y) = \dfrac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2}$

و:

$$\varphi(x) * \varphi(y) = \varphi(x)\sqrt{1+\varphi(y)^2} + \varphi(y)\sqrt{1+\varphi(x)^2}$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2}.\sqrt{1 + \frac{(e^y - e^{-y})^2}{4}} + \frac{e^y - e^{-y}}{2}.\sqrt{1 + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4}}$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{4}.\sqrt{4 + e^{2y} - 2 + e^{-2y}} + \frac{e^y - e^{-y}}{4}.\sqrt{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{4}.\sqrt{(e^y + e^{-y})^2} + \frac{e^y - e^{-y}}{4}.\sqrt{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y})}{4} + \frac{(e^y - e^{-y})(e^x + e^{-x})}{4}$$

$$= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-x-y} + e^{x+y} + e^{y-x} - e^{x-y} - e^{-x-y}}{4}$$

$$= \frac{(e^{x+y} - e^{-x-y})}{2} = \varphi(x+y)$$

إذن : $(\forall (x;y) \in IR^2)$; $\varphi(x+y) = \varphi(x) * \varphi(y)$

ومنه φ تشاكل من $(IR;+)$ نحو $(IR;*)$.

*** لنبين أن φ تقابل.**

– الدالة φ متصلة على IR لأنها مجموع دالتين متصلتين على IR هما : $x \mapsto \frac{1}{2}e^x$ و $x \mapsto \frac{1}{2}e^{-x}$

– الدالة φ قابلة للاشتقاق على IR ولدينا : $(\forall x \in IR)$; $\varphi'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

ومنه : $(\forall x \in IR)$; $\varphi'(x) > 0$ يعني أن φ تزايدية قطعا على IR.

إذن φ تقابل من IR نحو $\varphi(IR)$ أي φ تقابل من IR نحو IR.

وبالتالي φ تشاكل تقابلي من $(IR;+)$ نحو $(IR;*)$.

2) استنتاج خاصيات *

لدينا φ تشاكل تقابلي من $(IR;+)$ نحو $(IR;*)$ ومنه جميع خاصيات * في IR تُسْتَنْتَجُ من خاصيات + في IR.

لدينا :

+ تجميعي وتبادلي في IR	ومنه	* تجميعي وتبادلي في IR.
0 هو العنصر المحايد في $(IR;+)$	إذن	$\varphi(0) = 0$ هو العنصر المحايد في $(IR;*)$.
$-x$ هو مماثل x في $(IR;+)$	إذن	$\varphi(-x) = -\varphi(x)$ هو مماثل $\varphi(x)$ في $(IR;*)$.

التمرين ١٦

نضع $E=IR^*\times IR$

ونعرف في E القانون الداخلي T كالتالي : $\begin{cases}\forall (a,b) \in E \\ \forall (a',b') \in E\end{cases}$; $(a,b)T(a',b') = (aa', ab' + b)$

1) أ– بين أن T تجميعي.

* هل T تبادلي؟

ب– بين أن T يقبل عنصرا محايدا وأن كل عنصر من E يقبل مماثلا.

2) نضع : $F = \{(a,0) / a \in IR^*\}$

و $f: IR^* \to F$
$a \mapsto (a,0)$

بين أن F جزء مستقر في (E,T) وأن f تشاكل شمولي من $(IR^*,\times)$ نحو (F,T).

3) لتكن A مجموعة الدوال التآلفية $f_{(a,b)}$ من IR نحو IR.(أي : $f_{(a,b)}(x)=ax+b$).

أ– بين أن o قانون داخلي في A.

ب– بين أن التطبيق : $\varphi:(E,T) \to (A,o)$
$(a,b) \mapsto f_{(a,b)}$
تشاكل شمولي. ثم استنتج خاصيات o في A.

الحل

1) أ– * لنبين أن T تجميعي.

ليكن $(a;b)$ و $(a';b')$ و $(a'';b'')$ من E، لدينا :

$$[(a;b)T(a';b')]T(a'';b'') = (aa';ab'+b)T(a'';b'')$$
$$= (aa'a'';aa'b''+ab'+b)$$

Scanné avec CamScanner

و: $(a;b)T[(a';b')T(a'';b'')] = (a;b)T(a'a'';a'b''+b')$
$$= (aa'a'', aa'b''+ab'+b)$$

$(\forall ((a;b);(a';b');(a'';b'')) \in E^3);[(a;b)T(a';b')]T(a'';b'') = (a;b)T[(a';b')T(a'';b'')]$

القانون T تجميعي في E.

ب- *** لنبين أن T يقبل عنصرا محايدا.**

(e_1,e_2) هو العنصر المحايد في $(E;T)$ إذا وفقط إذا كان:

$(\forall (a;b) \in E)\ ;\ (a;b)T(e_1;e_2) = (a;b)$

و$(\forall (a;b) \in E)\ ;\ (e_1;e_2)T(a;b) = (a;b)$

لدينا: $(\forall (a;b) \in E)\ ;\ (a;b)T(e_1;e_2) = (a;b) \Leftrightarrow (\forall (a;b) \in E)\ ;\ (ae_1, ae_2+b) = (a;b)$

$\Leftrightarrow (\forall a \in IR^*)\ ;\ ae_1 = a$ و $ae_2=0$

$\Leftrightarrow e_1 = 1$ و $e_2=0$

ولدينا: $(\forall (a;b) \in E)\ ;\ (1;0)T(a;b) = (1\times a; 1\times b+0) = (a;b)$

إذن $(1;0)$ هو العنصر المحايد في $(E;T)$.

*** لنبين أن كل عنصر من E يقبل مماثلا بالنسبة للقانون T.**

ليكن $(a;b)$ عنصرا من E و$(a';b')$ مماثله بالنسبة للقانون T.

لدينا: $(a;b)T(a';b') = (1;0) \Leftrightarrow (aa';ab'+b) = (1;0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} aa' = 1 \\ ab'+b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a' = \dfrac{1}{a} \\ b' = -\dfrac{b}{a} \end{cases} \quad (a \in IR^* \text{ لأن})$$

ولدينا: $\left(\frac{1}{a};-\frac{b}{a}\right)T(a;b) = \left(\frac{1}{a}\times a;\frac{1}{a}\times b+\left(-\frac{b}{a}\right)\right) = \left(1;\frac{b}{a}-\frac{b}{a}\right) = (1;0)$

إذن كل عنصر $(a;b)$ من E يقبل مماثلا في E هو $\left(\frac{1}{a};-\frac{b}{a}\right)$ بالنسبة للقانون T.

2) *** لنبين أن F جزء مستقر في $(E;T)$:**

لنبين أن: $(\forall (a;0);(b;0)) \in F^2) : (a;0)T(b;0) \in F$

ليكن $(a;0)$ و$(b;0)$ عنصرين من F، لدينا: $(a;0)T(b;0)=(ab;0)$

وبما أن $ab \in IR^*$ فإن $(ab;0) \in F$

إذن: $(\forall ((a;0);(b;0)) \in F^2)\ ;\ (a;0)T(b;0) \in F$

*** لنبين أن f تشاكل شمولي من $(IR^*;\times)$ نحو $(F;T)$.**

– لنبين أن f تشاكل:

ليكن a وb عنصرين من IR^*، لدينا: $f(ab)=(ab;0)$ و $f(a)Tf(b)=(a;0)T(b;0)=(ab;0)$

إذن $(\forall (a;b) \in IR^{*2})\ ;\ f(a\times b) = f(a)Tf(b)$، ومنه f تشاكل من $(IR^*;\times)$ نحو $(F;T)$.

– لنبين أن f تطبيق شمولي.

ليكن y من F، هل يوجد على الأقل a من IR^* بحيث $f(a)=y$

لدينا : $y \in F \Leftrightarrow (\exists a \in IR^*) / y = (a;0)$

$\Leftrightarrow (\exists a \in IR^*) / y = f(a)$

ومنه : $(\forall y \in F)(\exists a \in IR^*) / f(a) = (a;0) = y$

إذن f تطبيق شمولي وبالتالي f تشاكل شمولي من $(IR^*;\times)$ نحو $(F;T)$.

3) أ– لنبين أن o قانون تركيب داخلي في A.

ليكن $f_{(a;b)}$ و $f_{(a';b')}$ عنصرين من A، لنبين أن $f_{(a;b)}of_{(a';b')} \in A$

لدينا : $(\forall x \in IR)$; $f_{(a;b)}(x) = ax + b$ و $f_{(a';b')}(x)=a'x+b'$

ليكن x من IR، لدينا :

$$\begin{aligned}(f_{(a;b)}of_{(a';b')})(x) &= f_{(a;b)}(f_{(a';b')}(x))\\ &= f_{(a;b)}(a'x+b')\\ &= a(a'x+b')+b\\ &= aa'x+(ab'+b)\end{aligned}$$

لدينا : $(\forall x \in IR)$; $(f_{(a;b)}of_{(a';b')})(x) = aa'x + (ab' + b)$

إذن : $f_{(a;b)}of_{(a';b')}$ دالة تآلفية معرفة من IR نحو IR يعني أن : $f_{(a;b)}of_{(a';b')} \in A$

وبالتالي o قانون تركيب داخلي في A.

ب– * لنبين أن التطبيق φ تشاكل من $(E;T)$ نحو $(A;o)$.

ليكن $(a;b)$ و $(a';b')$ عنصرين من E، لدينا :

(حسب السؤال أ–) $\varphi((a;b)T(a';b')) = \varphi((aa';ab' + b)) = f_{(aa';ab'+b)}$

$= f_{(a;b)}of_{(a';b')} = \varphi(a;b)) o\varphi((a';b'))$

إذن φ تشاكل من $(E;T)$ نحو $(A;o)$.

*** لنبين أن φ تطبيق شمولي من E نحو A.**

لتكن f عنصرا من A، لدينا : $f \in A \Leftrightarrow (\exists (a;b) \in IR^* \times IR) / f = f_{(a;b)}$

$\Leftrightarrow (\exists (a;b) \in IR^* \times IR) / f = \varphi(a;b)$

$\Leftrightarrow (\exists (a;b) \in E) / \varphi(a;b) = f$

إذن : $(\forall f \in A)(\exists (a;b) \in E) / \varphi(a;b) = f$

وبالتالي φ تطبيق شمولي.

*** استنتاج خاصيات o في A.**

لدينا φ تشاكل شمولي يعني أن جميع خاصيات القانون o في A تُسْتَنْتَج من خاصيات T في E ومنه :

- T تجميعي في E ومنه o تجميعي في A
- $(1;0)$ هو العنصر المحايد ومنه $\varphi(1;0) = f_{(1;0)}$ أي $f_{(1;0)}: x \mapsto x$ هو العنصر المحايد في $(A;o)$.
- $\left(\frac{1}{a}; -\frac{b}{a}\right)$ هو مماثل $(a;b)$ ومنه $f_{\left(\frac{1}{a};-\frac{b}{a}\right)}$ هو مماثل $f_{(a;b)}$ في $(A;o)$.

Scanné avec CamScanner

التمرين 18

نعتبر المجموعة $E=\left\{\frac{1+2p}{1+2q}\ /\ (p;q)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

بين أن $(E;\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{Q}^*;\times)$

الحل

من الواضح أن: $E\subset\mathbb{Q}^*$

- لدينا: $E\neq\phi$ لأن: $1\in E$ من أجل $p=q=0$
- ليكن x وy عنصرين من E.

لدينا: $\exists(a,b)\in\mathbb{Z}^2;\ x=\frac{1+2a}{1+2b}$

$\exists(c,d)\in\mathbb{Z}^2;\ y=\frac{1+2c}{1+2d}$

(لاحظ أن: $\forall x\in E\ ;\ x\neq 0$)

ومنه: $xy^{-1}=\frac{(1+2a)(1+2d)}{(1+2b)(1+2c)}=\frac{1+2(a+d+2ad)}{1+2(b+c+2bc)}$

نضع $p=a+d+2ad$ و$q=b+c+2bc$

لدينا: $p\in\mathbb{Z}$ و $q\in\mathbb{Z}$، ومنه: $\exists(p,q)\in\mathbb{Z}^2;\ xy^{-1}=\frac{1+2p}{1+2q}$، وهذا يعني أن: $xy^{-1}\in E$

لدينا إذن: $\left.\begin{matrix}E\neq\phi\\ \forall(x;y)\in E^2\quad xy^{-1}\in E\end{matrix}\right\}$

ومنه $(E,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{Q}^*;\times)$

التمرين 19

نعتبر المجموعتين: $A=\left\{2^n\times 3^m/(n,m)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

$B=\left\{2^{3p}\times 3^{2q}/(p,q)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

1) بين أن $(A,\times)$ زمرة تبادلية.

2) بين أن B زمرة جزئية للزمرة $(A,\times)$.

الحل

1) $A=\left\{2^n\times 3^m/(n,m)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

لدينا: $A\subset\mathbb{Q}^*$ و$(\mathbb{Q}^*;\times)$ زمرة تبادلية يكفي إذن أن نبين $(A,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{Q}^*;\times)$.

- بما أن $1\in A$ (وذلك من أجل $n=m=0$) فإن $A\neq\phi$
- ليكن x وy عنصرين من A.

لدينا: $\exists(n;m)\in\mathbb{Z}^2;\ x=2^n\times 3^m$

$\exists(n';m')\in\mathbb{Z}^2;\ y=2^{n'}\times 3^{m'}$

Scanné avec CamScanner

بما أن: $(\mathbb{Q}^*;\times)$ زمرة تبادلية فإن $y^{-1}=2^{-n'}\times3^{-m'}$ ، ومنه: $xy^{-1}=(2^n\times3^m)(2^{-n'}\times3^{-m'})=2^{n-n'}\times3^{m-m'}$

نضع: $p=n-n'$ و $q=m-m'$ ، ومنه: $\exists(p;q)\in\mathbb{Z}^2;\ xy^{-1}=2^p\times3^q$

وهذا يعني أن: $xy^{-1}\in A$

لدينا إذن: $\left.\begin{matrix} A\neq\phi \\ xy^{-1}\in A \end{matrix}\right\}$ $\forall(x;y)\in A^2$

أي أن $(A;\times)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(\mathbb{Q}^*;\times)$، ومنه: $(A;\times)$ زمرة تبادلية

2) بوضع: $n=3p$ و $m=2q$ نحصل على: $\exists(n;m)\in\mathbb{Z}^2;x=2^n\times3^m$; $(\forall x\in B)$

ومنه: $B\subset A$

لدينا: $1\in B$ ومنه $B\neq\phi$

ولدينا $\forall(x;y)\in B^2;xy^{-1}\in B$ (تأكد من ذلك)، ومنه: $(B;\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(A;\times)$.

التمرين 20

نعرف على IR قانون التركيب الداخلي $\circ$ بمايلي: $a*b=a+b+ab$ $\quad\forall(a,b)\in IR^2$

1) ادرس خاصيات $\circ$

2) هل $(IR,\circ)$ زمرة؟

3) حدد S مجموعة عناصر IR التي تقبل مماثلا في $(IR;\circ)$.

4) ليكن $a\in IR$: نضع: $a_1=a$ و $a_{n+1}=a_n\circ a$ لكل n من IN^*.

(i) احسب a_2 و a_3

(ii) احسب a_n بدلالة n.

Scanné avec CamScanner

ومنه 0 هو العنصر المحايد للقانون $\circ$ في IR.

- ليكن $a \in IR$ و a' مماثله بالنسبة للقانون $\circ$ إذا وجد يحقق $a'\circ a = a\circ a' = 0$

لدينا: $a * a' = 0 \iff a + a' + a'a = 0$

$\iff a'(1 + a) = a$

إذا كان $a \neq -1$ فإن $a' = \dfrac{-a}{1+a}$

إذا كان $a=-1$: $(-1) * a' = -1 + a' = -1 \neq 0$

إذن -1 لا يقبل مماثلا

2) $(IR;\circ)$ ليست زمرة لأن -1 لا يقبل مماثلا في $(IR;\circ)$

3) عناصر IR التي تقبل مماثل في $(IR;\circ)$ هي عناصر المجموعة: $S = IR - \{-1\}$

4) ليكن $a \in IR$

لدينا: $a_2 = a\circ a = a + a + a^2 = a^2 + 2a = (a+1)^2 - 1 (i)$

و $a_3 = a_2\circ a = (a^2+2a)\circ a = a^2+2a+a+a(a^2+2a) = a^2+3a+a^3+2a^2$

$= a^3+3a^2+3a = (a+1)^3 - 1$

(i i) حسب i) لنبين بالترجع أن: $(\forall n \geq 2)\ ;\ a_n = (a+1)^n - 1$

من أجل $n=2$ لدينا حسب السؤال (i) $a_2=(a+1)^2-1$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n=2$

ليكن n من IN و $n \geq 2$

نفترض أن: $a_n(a+1)^n-1$ ونبين أن: $a_{n+1}=(a+1)^{n+1}-1$

لدينا: $a_{n+1}=a_n\circ a = a_n + a + a.a_n$

$=(a+1)^n - 1 + a + a((a+1)^n - 1)$

$=(a+1)^n + a + a(a+1)^n - a - 1$

$=(a+1)^n(1+a) - 1 = (a+1)^{n+1} - 1$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

وبالتالي حسب مبدإ الترجع: $(\forall n \geq 2) a_n = (a+1)^n - 1$

التمرين 21

ليكن T قانونَ تركيبٍ داخليٍّ معرفا على IR بمايلي: $(\forall (x,y) \in IR^2)\ ;\ xTy = x + y + mxy$

حيث m عدد حقيقي غير منعدم.

1) بين أن القانون T تبادلي وتجميعي

2) ليكن $G = IR - \left\{-\dfrac{1}{m}\right\}$

أ- بين أن G جزء مستقر من (IR, T).

ب- بين أن $(G\ ,\ T)$ زمرة تبادلية.

الحل

1) • لدينا: $(\forall (x,y) \in IR^2)\ ;\ xTy = yTx$، ومنه فإن القانون T تبادلي في IR.

• ليكن x وy وz عناصر من IR، لدينا:

$$(xTy)Tz=(x+y+mxy)Tz=x+y+mxy+z+mz(x+y+mxy)$$
$$=x+y+z+m(xy+xz+yz)+m^2xyz$$

ولدينا:

$$xT(yTz)=xT(y+z+myz)=x+y+z+myz+mx(y+z+myz)$$
$$=x+y+z+m(xy+xz+yz)+m^2xyz$$

ومنه فإن: $(\forall (x,y,z) \in IR^3); (xTy)Tz = xT(yTz)$

يعني أن القانون T تجميعي في IR.

2) أ- لنبين أن G جزء مستقر من (IR,T)

ليكن x وy عنصرين من G، لدينا:

$$(xTy) + \frac{1}{m} = x + y + mxy + \frac{1}{m} = mx\left(\frac{1}{m} + y\right) + \left(y + \frac{1}{m}\right)$$
$$= \left(y + \frac{1}{m}\right)(mx + 1) = \frac{1}{m}\left(x + \frac{1}{m}\right)\left(y + \frac{1}{m}\right)$$

وبما أن $x \neq -\frac{1}{m}$ و$y \neq -\frac{1}{m}$، أي $x + \frac{1}{m} \neq 0$ و$y + \frac{1}{m} \neq 0$ فإن $\left(x + \frac{1}{m}\right)\left(y + \frac{1}{m}\right) \neq 0$،

ومنه فإن: $(xTy) + \frac{1}{m} \neq 0$ يعني أن $xTy \in G$، إذن: $(\forall (x,y) \in G^2); xTy \in G$

يعني أن G جزء مستقر من (IR,T)

ب- لنبين أن (G,T) زمرة تبادلية.

• G جزء مستقر من (IR,T) والقانون T تبادلي وتجميعي في IR ومنه فإن القانون T تبادلي وتجميعي في G.

• لدينا: $xT0 = x\ \ ,\ \ (\forall x \in G)$

ومنه فإن 0 هو العنصر المحايد في $(G;T)$

• ليكن a عنصرا من G، لنحدد x من G بحيث: $xTa=0$

لدينا: $xTa = 0 \iff x + a + mxa = 0$
$$\iff x(1 + ma) = -a$$

وبما أن $a \neq -\frac{1}{m}$ فإن: $1 + ma \neq 0$ ومنه فإن: $xTa = 0 \iff x = \frac{-a}{1 + ma}$

ولدينا: $\frac{-a}{1 + ma} + \frac{1}{m} = \frac{1}{m(1 + ma)}$ ومنه فإن: $\frac{-a}{1 + ma} \neq -\frac{1}{m}$ أي: $\frac{-a}{1 + ma} \in G$

إذن: $(\forall a \in G); (\exists x \in G) / xTa = 0$

يعني أن كل عنصر من G يقبل مماثلا في (G,T)

وبالتالي فإن (G,T) زمرة تبادلية.

Scanné avec CamScanner

التمرين 22

ليكن $(G,.)$ زمرة و a عنصرا من G.

نعرّف في المجموعة G قانون التركيب الداخلي $\circ$ بمايلي: $(\forall (x,y) \in G^2)$; $x * y = xa^{-1}y$

ليكن f التطبيق من G نحو G المعرف بمايلي: $(\forall x \in G)$; $f(x) = ax$

1) بين أن f تشاكل تقابلي من $(G,.)$ نحو $(G;\circ)$.

2) ماهي بنية $(G,\circ)$؟

الحل

1) $\circ$ لنبين أن f تشاكل من $(G,.)$ نحو $(G,\circ)$.

ليكن x و y عنصرين من G، لدينا:

$$f(x)\circ f(y)=(ax)\circ(ay)=(ax)a^{-1}(ay)=ax(a^{-1}a)y$$

ليكن e العنصر المحايد للزمرة $(G,.)$

بما أن $e=a^{-1}a$ فإن: $ax(a^{-1}a)y=axey=axy$، ومنه فإن: $f(x)\circ f(y)=axy=f(xy)$

إذن: $(\forall x,y \in G);f(xy) = f(x) * f(y)$، وهذا يعني أن f تشاكل من $(G,.)$ نحو $(G,\circ)$.

$\circ$ لنبين أن f تقابل

ليكن y عنصرا من G ، لنحل في G المعادلة: $f(x)=y$، لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff ax = y \\ &\iff a^{-1}(ax) = a^{-1}y \\ &\iff (a^{-1}a)x = a^{-1}y \\ &\iff ex = a^{-1}y \\ &\iff x = a^{-1}y \end{aligned}$$

ومنه فإن المعادلة $f(x)=y$ تقبل حلا وحيدا في G هو $a^{-1}y$، إذن: $(\forall y \in G);(\exists! x \in G) / f(x) = y$

يعني أن f تطبيق تقابلي من G نحو G، وبالتالي فإن f تشاكل تقابلي من $(G,.)$ نحو $(G,\circ)$.

2) بنية $(G,*)$.

لدينا $(G,.)$ و$(G,\circ)$ متشاكلتان تقابليا و$(G,.)$ زمرة ، ومنه فإن $(G,\circ)$ زمرة

التمرين 23

لتكن (G,o) زمرة عنصرها المحايد e. ليكن s عنصرا ثابتا من G يخالف e وs^{-1} مماثل s في الزمرة (G,o).

نعرّف في G قانون التركيب الداخلي $*$ بمايلي: $(\forall a,b \in G);\ a * b = aosob$

ونعتبر التطبيق φ المعرف بمايلي:
$$\varphi: G \to G$$
$$a \mapsto aos^{-1}$$

1) أ- بين أن φ تشاكل تقابلي من (G,o) نحو $(G,_{\circ})$.

ب- [illegible] $(G,\ )$

2) أ- حدد ε العنصر المحايد في $(G,*)$.

ب- ليكن a عنصرا من G. حدد a' مماثل a في $(G,*)$.

3) نفترض أن الزمرة (G,o) تبادلية ونعرّف في G قانون التركيب الداخلي T بمايلي: $(\forall a,b \in G); aTb = e$

بين أن (G , o , T) حلقة تبادلية.

الحل

1) لنبين أن φ تشاكل تقابلي من (G,o) نحو $(G,*)$.

• ليكن a وb عنصرين من G، لدينا: $\varphi(aob) = (aob)os^{-1}$

وَ $\varphi(a) * \varphi(b) = (aos^{-1}) * (bos^{-1})$

$= (aos^{-1})oso(bos^{-1})$

(لأن o تجميعي) $=ao(s^{-1}os)o(bos^{-1})$

(لأن $sos^{-1}=e$) $=aoeo(bos^{-1})$

(e هو العنصر المحايد) $=ao(bos^{-1})$

$=(aob)os^{-1}$

ومنه فإن: $\varphi(aob) = \varphi(a) * \varphi(b)$ إذن: $(\forall a,b \in G); \varphi(aob) = \varphi(a) * \varphi(b)$

يعني أن φ تشاكل من (G,o) نحو $(G,*)$.

• ليكن b عنصرا من G

لنحل في المجموعة G المعادلة $\varphi(a) = b$

لدينا: $\varphi(a) = b \iff aos^{-1} = b$

$\iff (aos^{-1})os = bos$

$\iff ao(s^{-1}os) = bos$

$\iff aoe = a = bos$

إذن المعادلة $\varphi(a) = b$ تقبل حلا وحيدا في G أي $(\forall b \in G); (\exists! a \in G) \; / \; \varphi(a) = b$

يعني أن φ تطبيق تقابلي من G نحو G، وبالتالي فإن φ تشاكل تقابلي من (G,o) نحو $(G,*)$.

ب- الاستنتاج

لدينا φ تشاكل تقابلي من (G,o) نحو $(G,*)$ و(G,o) زمرة، إذن $(G,*)$ زمرة.

2) أ- تحديد ε العنصر المحايد في $(G,*)$.

لدينا φ تشاكل تقابلي من (G,o) نحو $(G,*)$ وe هو العنصر المحايد في (G,o) ومنه فإن $\varphi(e)$ هو العنصر المحايد في $(G,*)$.

يعني أن $\varepsilon = \varphi(e) = e0s^{-1} = s^{-1}$

ب- تحديد a' مماثل a في $(G,*)$.

حسب تعريف قانون التركيب الداخلي $\circ$ في G.

لدينا: $a' \circ a = a'osoa$

ومنه فإن: $a' * a = \varepsilon \Longleftrightarrow a'osoa = s^{-1}$

$$\Longleftrightarrow a' = s^{-1}o(soa)^{-1}$$
$$\Longleftrightarrow a' = s^{-1}oa^{-1}os^{1}$$

إذن $a' = s^{-1}oa^{-1}os^{-1}$، حيث a^{-1} مماثل a في (G,o).

3) لنبين أن (G, o, T) حلقة تبادلية.

لدينا: (G,o) زمرة تبادلية.

نبين أن القانون T تبادلي.

ليكن a وb عنصرين من G.

لدينا $aTb=e$ و$bTa=e$ ومنه فإن: $aTb=bTa$ إذن $(\forall a, b \in G); aTb = bTa$، يعني أن القانون T تبادلي

نبين أن القانون $\circ$ تجميعي

ليكن a وb وc عناصر من G

لدينا: $(aTb)Tc=eTc=e$ و $aT(bTc)=aTe=e$ ومنه فإن: $aT(bTc)=(aTb)Tc$

إذن: $(\forall a, b, c \in G); aT(bTc) = (aTb)Tc$ يعني أن القانون T تجميعي

لنبين أن القانون T توزيعي بالنسبة للقانون o.

ليكن a وb وc عناصرا من G.

لدينا $aT(boc)=e$ لأن $b0c \in G$، ولدينا $(aTb)o(aTc)=eoe=e$ ومنه فإن $aT(boc)=(aTb)o(aTc)$

ولدينا كذلك $(boc)Ta=(bTa)o(cTa)$ لأن القانون o تبادلي والقانون T تبادلي.

إذن $(\forall a, b, c \in G); \begin{cases} aT(boc) = (aTb)o(aTc) \\ (boc)Ta = (bTa)o(cTa) \end{cases}$

يعني أن القانون T توزيعي بالنسبة للقانون o وبالتالي فإن (G,o,T) حلقة تبادلية.

التمرين 24

نزود المجموعة IR بقانون التركيب الداخلي T المعرف بمايلي:

$$(\forall x, y \in IR) \; ; \; xTy = \begin{cases} \sqrt[7]{x^7 + y^7} & ; x^7 + y^7 \geq 0 \\ -\sqrt[7]{-(x^7 + y^7)} & ; x^7 + y^7 \leq 0 \end{cases}$$

وليكن f التطبيق من IR نحو IR المعرف بمايلي: $\begin{cases} f(x) = \sqrt[7]{x} & ; x \geq 0 \\ f(x) = -\sqrt[7]{-x} & ; x \leq 0 \end{cases}$

1) بين أن f تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ نحو (IR,T)

2) ماهي بنية (IR,T)؟

Scanné avec CamScanner

الحل

1) لنبين أن f تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ نحو (IR,T)

• ليكن x وy عنصرين من IR

إذا كان $x + y \geq 0$ فإن $f(x + y) = \sqrt[7]{x + y}$

ولدينا $x=(f(x))^7$ و$y=(f(y))^7$ ومنه فإن $(f(x))^7+(f(y))^7=x+y$،

وبما أن $x + y \geq 0$ فإن $(f(x))^7 + (f(y))^7 \geq 0$

إذن: $f(x)Tf(y) = \sqrt[7]{(f(x))^7 + (f(y))^7} = \sqrt[7]{x + y} = f(x + y)$

إذا كان $x + y \leq 0$ فإن $f(x + y) = -\sqrt[7]{-(x + y)}$

ولدينا $(f(x))^7+(f(y))^7=x+y$ وبما أن: $x + y \leq 0$ فإن: $(f(x))^7 + (f(y))^7 \leq 0$

إذن: $f(x)Tf(y) = -\sqrt[7]{-\left((f(x))^7 + (f(y))^7\right)} = -\sqrt[7]{-(x + y)} = f(x + y)$

إذن: $(\forall (x,y) \in IR^2); \quad f(x + y) = f(x)Tf(y)$

يعني أن f تشاكل من $(IR,+)$ نحو (IR,T) $\quad (1)$

• لدينا الدالة $x \mapsto \sqrt[7]{x}$ تقابل من IR^+ نحو IR^+

ليكن y عنصرا من IR.

إذا كان $y \geq 0$ فإنه يوجد عنصر وحيد x من IR^+ بحيث: $\sqrt[7]{x} = y$، أي $f(x)=y$

إذا كان $y \leq 0$ (أي $-y \geq 0$) فإنه يوجد عنصر وحيد x من IR^+ بحيث $-y = \sqrt[7]{x}$ أي $-\sqrt[7]{-x}=$
حيث $x \leq 0$

إذن $(\forall y \in IR); \quad (\exists! x \in IR) \ / \ f(x) = y$، يعني أن f تطبيق تقابلي من IR نحو IR. $\quad (2)$

وبالتالي من (1) و(2) نستنتج أن f تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ نحو (IR,T)

2) بنية (IR,T).

لدينا f تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ نحو (IR,T) و$(IR,+)$ زمرة تبادلية ومنه فإن (IR,T) زمرة تبادلية.

التمرين 25

نضع $I =]0, +\infty[$

1) بين أن: $(\forall x, y \in I): \; e^{x+y} - e^x - e^y + 2 > 1$

2) نعرّف على I قانون التركيب الداخلي T بما يلي: $(\forall x, y \in I); \; xTy = \ln(e^{x+y} - e^x - e^y + 2)$

وليكن التطبيق: $f: I \to I$

$x \mapsto \ln(x + 1)$

أ- بين أن f تشاكل تقابلي من $(I,\times)$ نحو (I,T) ; ب- استنتج بنية (I,T).

Scanné avec CamScanner

الحل

1) ليكن x وy عنصرين من المجال I. لنبين أن: $e^{x+y}-e^x-e^y+2>1$

لدينا: $(e^{x+y}-e^x-e^y+2)-1=e^xe^y-e^x-e^y+1=e^y(e^x-1)-(e^x-1)=(e^x-1)(e^y-1)$

بما أن $x>0$ و$y>0$ فإن $e^x>1$ و$e^y>1$ أي $e^x-1>0$ و$e^y-1>0$ ومنه فإن $(e^x-1)(e^y-1)>0$

يعني أن: $e^{x+y}-e^x-e^y+2>1$، إذن: $(\forall x, y \in I): e^{x+y} - e^x - e^y + 2 > 1$

2) أ- لنبين أن f تشاكل تقابلي من $(I,\times)$ نحو (I,T).

• ليكن x وy عنصرين من I.

لدينا $f(xy) = \ln(xy + 1)$ و $f(x)Tf(y) = \ln\left(e^{f(x)+f(x)} - e^{f(x)} - e^{f(y)} + 2\right)$

وبما أن: $e^{f(x)+f(y)} - e^{f(x)} - e^{f(y)} + 2 = e^{\ln(1+x)+\ln(1+y)} - e^{\ln(x+1)} - e^{\ln(y+1)} + 2$

$$= e^{\ln((x+1)(y+1))} - (x+1) - (y+1) + 2$$

$$= (x+1)(y+1) - x - y = xy + 1$$

فإن: $f(x)Tf(y) = \ln(xy+1)$، ومنه فإن: $f(xy)=f(x)Tf(y)$

إذن $(\forall x, y \in I);\ f(x \times y) = f(x)Tf(y)$، يعني أن f تشاكل من $(I,\times)$ نحو (I,T)

• ليكن y عنصرا من I، لنحل في I المعادلة $f(x)=y$

لدينا: $f(x) = y \iff y = \ln(x+1)$

$$\iff e^y = x + 1$$

$$\iff x = e^y - 1$$

وبما أن $y>0$ فإن $e^y-1>0$ أي $x>0$، ومنه فإن: $(\forall y \in I); (\exists! x \in I)\ /\ f(x) = y$

يعني أن f تطبيق تقابلي من I نحو I ، وبالتالي فإن f تشاكل تقابلي من $(I,\times)$ نحو (I,T).

ب- الاستنتاج.

لدينا f تشاكل تقابلي من $(I,\times)$ نحو (I,T) و$(I,\times)$ زمرة تبادلية ومنه فإن (I,T) زمرة تبادلية.

التمرين 26

لتكن $(G,*)$ زمرة عنصرها المحايد e

نضع $a^0=e$ و $(\forall n \in IN)\ a^n = \underbrace{a * a * \ldots * a}_{n \text{ مرة}}$

و $(\forall n \in \mathbb{Z}^-)\ a^{-n} = \underbrace{a^{-1} * a^{-1} * \ldots * a^{-1}}_{n \text{ مرة}}$

نضع $H = \{a^n / n \in \mathbb{Z}\}$

1) بين أن $(H,*)$ زمرة جزئية للزمرة $(G,*)$.

2) بين أن H هي أصغر زمرة جزئية للزمرة $(G,*)$ التي تحتوي على a.

Scanné avec CamScanner

الحل

1) لدينا $H \neq \phi$ لأن $e \in H$ مع $a^0=e$

ليكن x وy عنصرين من H؛

ومنه: $(\exists n \in \mathbb{Z}); x = a^n$ و $(\exists m \in \mathbb{Z}); y = a^m$

لدينا $x \circ y^{-1}=a^n \circ a^{-m}=a^{n-m}$

وبما أن $n - m \in \mathbb{Z}$ فإن $x * y^{-1} \in H$ ومنه $(H,\circ)$ زمرة جزئية للزمرة $(G,\circ)$.

2) لتكن K زمرة جزئية للزمرة $(G,\circ)$ و $a \in K$

ليكن $x \in H$، إذن $(\exists n \in \mathbb{Z}); x = a^n$

إذا كان: $n \in IN$ فإن $x=a^n=\underbrace{a\circ a\circ \dots \circ a}_{n \text{ مرة}}$

بما أن $(K,\circ)$ زمرة فإن $x \in K$

إذا كان $n \in \mathbb{Z}^-$ فإن $x=a^n=a^{-1}\circ a^{-1}\circ \dots \circ a^{-1}$

لدينا $a \in K$ ومنه $a^{-1} \in K$ ومنه $x \in K$

وبالتالي: $(\forall x \in H); x \in K$ أي $H \subset K$

إذن: H هي أصغر زمرة جزئية للزمرة $(G,\circ)$ التي تحتوي على a.

التمرين 27

لتكن $(G,.)$ زمرة وa عنصرا من G.

نعتبر التطبيق f_a من G نحو G المعرف بمايلي: $(\forall x \in G); f_a(x) = axa^{-1}$

1) بين أن f_a تشاكل تقابلي من $(G,.)$ نحو $(G,.)$

2) بين أن $(\forall (a,b) \in G^2);\ f_a o f_b = f_{ab}$

3) نعتبر المجموعة H المعرفة بمايلي: $H = \{f_a \ / \quad a \in G\}$

بين أن (H,o) زمرة.

الحل

1) • لنبين أن f_a تشاكل من $(G,.)$ نحو $(G,.)$

ليكن x وy عنصرين من G، لدينا: $f(xy)=a(xy)a^{-1}=a(xey)a^{-1}$

حيث e هو العنصر المحايد في $(G,.)$.

وبما أن $e=a^{-1}a$ والقانون تجميعي في G فإن:

$$a(xey)a^{-1}=a(xa^{-1}ay)a^{-1}=(axa^{-1})(aya^{-1})=f_a(x)f_a(y)$$

ومنه فإن: $f_a(xy)=f_a(y)f_a(y)$

وبالتالي فإن: $(\forall x,y \in G); f_a(xy) = f_a(x)f_a(y)$

يعني أن f_a تشاكل من $(G,.)$ نحو $(G,.)$

Scanné avec CamScanner

• لنبين أن f_a تقابل.

ليكن y عنصرا من G، لنحل في G المعادلة : $f_a(x)=y$

لدينا :

$$\begin{aligned} f_a(x) = y &\iff y = axa^{-1} \\ &\iff a^{-1}ya = a^{-1}(axa^{-1})a \\ &\iff a^{-1}ya = (a^{-1}a)x(a^{-1}a) \end{aligned}$$

ولدينا $a^{-1}a=e$ ومنه فإن: $f_a(x) = y \iff x = a^{-1}ya$

يعني أن المعادلة $f_a(x)=y$ تقبل حلا وحيدا في G.

إذن: $(\forall y \in G)(\exists! x \in G) / y = f_a(x)$، يعني أن f_a تطبيق تقابلي

وبالتالي f_a تشاكل تقابلي من $(G,.)$ نحو $(G,.)$

2) لنبين أن: $(\forall (a,b) \in G^2);\ f_a o f_b = f_{ab}$

ليكن a وb عنصرين من G.

وليكن x عنصرا من G، لدينا :

$$f_a o f_b(x)=f_a(f_b(x))=f_a(bxb^{-1})=a(bxb^{-1})a^{-1}=(ab)x(b^{-1}a^{-1})$$

وبما أن: $b^{-1}a^{-1}=(ab)^{-1}$

فإن:

$$\begin{aligned} f_a o f_b(x)&=(ab)x(ab)^{-1} \\ &=f_{ab}(x) \end{aligned}$$

ومنه فإن: $(\forall x \in G);\ f_a o f_b(x) = f_{ab}(x)$

يعني أن: $f_a o f_b=f_{ab}$

إذن: $(\forall (a,b) \in G^2); f_a o f_b = f_{ab}$

3) لنبين أن (H,o) زمرة.

نعتبر التطبيق φ من G نحو H المعرف بمايلي: $(\forall a \in G); \varphi(a) = f_a$

لدينا: $(\forall a,b \in G);\ f_a o f_b = f_{ab}$

يعني أن $(\forall a,b \in G);\ \varphi(ab) = \varphi(a) o \varphi(b)$

ومنه فإن φ تشاكل من $(G,.)$ نحو (H,o)

وبما أن: $\varphi(G) = \{\varphi(a)\ /\ a \in G\} = \{f_a\ /\ a \in G\} = H$

فإن φ تطبيق شمولي.

إذن φ تشاكل من $(G,.)$ نحو (H,o) و $\varphi(G) = H$ و$(G,.)$ زمرة ومنه (H,o) زمرة.

التمرين 28

لكل زوج (a,b) من $IR^*\times IR$ نعرف التطبيق $f_{(a,b)}$ بمايلي:

$$\begin{aligned} f_{(a,b)}: IR &\to IR \\ x &\mapsto ax + b \end{aligned}$$

ونضع $G = \{f_{(a,b)} / (a,b) \in IR^* \times IR\}$

1) بين أن (G,o) زمرة غير تبادلية.

2) ليكن التطبيق φ المعرف بمايلي:

$$\varphi: IR^{*} \times IR \to G$$
$$(a,b) \mapsto \varphi(a;b) = f_{(a,b)}$$

أ) بين أن φ تقابل

ب) عرف قانون تركيب داخلي T على $IR^{*}\times IR$ لكي يكون φ تشاكلا تقابليا من $(IR^{*}\times IR;T)$ نحو (G,o).

ماهي طبيعة $(IR^{*}\times IR;T)$؟

الحل

لدينا: $G = \{f_{(a;b)} / (a;b) \in IR^{*} \times IR\}$، حيث: $(\forall x \in IR);\ f_{(a;b)}(x) = ax + b$

1) لنبين أن: $(G;o)$ زمرة غير تبادلية

لدينا: $G \subset B(IR;IR)$ حيث $B(IR;IR)$ هي مجموعة التقابلات من IR نحو IR.

ولدينا $(B(IR.;IR);o)$ زمرة غير تبادلية،

إذن يكفي أن نبين أن $(G;o)$ زمرة جزئية للزمرة $(B(IR.;IR);o)$

• لدينا: $Id_{IR}=f_{(1,0)}$ ومنه: $Id_{IR} \in G$ وهذا يعني أن: $G \neq \phi$

• ليكن $f_{(a;b)}$ و$f_{(c;d)}$ عنصرين من G

لنحدد $f^{-1}_{(a,b)}$ العنصر المماثل للعنصر $f_{(a;b)}$ بالنسبة للقانون o (أي التقابل العكسي للتقابل $f_{(a;b)}$)

ليكن: $y \in IR$

$$\begin{aligned} f_{a,b}(x) = y &\iff ax + b = y \\ &\iff ax = y - b \\ &\iff x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a} \end{aligned}$$

ومنه $f_{(a,b)}$ تقابل من IR نحو IR وتقابله العكسي هو: $f^{-1}_{(a;b)} = f_{\left(\frac{1}{a}; -\frac{b}{a}\right)}$

• ليكن $x \in IR$

$$\begin{aligned} f_{(c;d)} o f^{-1}_{(a;b)}(x) &= f_{(c;d)}\left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}\right) \\ &= c\left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}\right) + d \\ &= \frac{c}{a}x - \frac{bc}{a} + d \\ &= \frac{c}{a}x + \frac{ad - bc}{a} \\ &= f_{\left(\frac{c}{a}; \frac{ad - bc}{a}\right)}(x) \end{aligned}$$

ومنه: $f_{(c;d)} o f^{-1}_{(a;b)} = f_{\left(\frac{c}{a}; \frac{ad - bc}{a}\right)}$

إذن: $f_{(c;d)} o f^{-1}_{(a;b)} \in G$

وبالتالي: $(G;o)$ زمرة جزئية للزمرة $(B(IR;IR),o)$، إذن $(G;o)$ زمرة.

2) لدينا :
$$\varphi: IR^* \times IR \to G$$
$$(a;b) \mapsto \varphi_{(a,b)} = f_{(a,b)}$$

أ) لنبين أن φ تقابل.

لدينا حسب تعريف المجموعة G : $(\forall g \in G)(\exists (a;b) \in IR^* \times IR): \varphi((a;b)) = f_{(a;b)} = g$

وهذا يعني أن φ تطبيق شمولي

لنبين أن φ تطبيق تبايني

ليكن $(a;b) \in IR^* \times IR$ و $(c;d) \in IR^* \times IR$ بحيث $\varphi(a;b) = \varphi(c;d)$

$$\varphi(a;b) = \varphi(c;d) \iff f_{(a;b)} = f_{(c;d)}$$
$$\iff (\forall x \in IR) f_{(a;b)}(x) = f_{(c;d)}(x)$$
$$\iff (\forall x \in IR)\, ax + b = cx + d$$
$$\iff a = c \text{ و } b=d$$
$$\iff (a;b) = (c;d)$$

ومنه φ تطبيق تبايني

وبالتالي φ تقابل.

ب) لنعرف قانون تركيب داخلي T على $IR^* \times IR$ بحيث يكون φ تشاكلا من $(IR^* \times IR;T)$ نحو (G,o)

أي لكي يتحقق :

$$(\forall x \in IR) \; ; \; \big(\varphi((a,b)T(c,d))\big)(x) = \big(\varphi(a;b) o \varphi(c;d)\big)(x)$$

لدينا :
$$\big(\varphi(a;b) o \varphi(c;d)\big)(x) = f_{(a;b)} \circ f_{(c;d)}(x)$$
$$= f_{(a;b)}(cx + d)$$
$$= a(cx + d) + b$$
$$= acx + ad + b$$
$$= f_{(ac;ad+b)}(x)$$

تذكير:

إذا كان f تشاكلا تقابليا من (E,T) نحو $(F,*)$ فإن f^{-1} أيضا تشاكل تقابلي من $(F,*)$ نحو (E,T)

إذن يكفي أن يكون القانون T معرف كالتالي :

$$(\forall (a;b) \in IR^* \times IR) \; ; \; (\forall (c;d) \in IR^* \times IR)$$
$$(a;b)T(c;d) = (ac; ad + b)$$

لدينا : φ^{-1} تشاكل تقابلي من $(G;o)$ نحو $((IR^* \times IR);T)$ و $(G;o)$ زمرة

ومنه : $((IR^* \times IR);T)$ زمرة

ملحوظة :

لتكن : $f(x)=-x+1$ و $g(x)=2x+1$ عنصرين من G

$$(\forall x \in IR)\, gof(x) = 2(-x+1) + 1 = -2x + 3$$
$$(\forall x \in IR)\, fog(x) = -(2x+1) + 1 = -2x$$

ومنه : $gof \neq fog$

إذن القانون o غير تبادلي في G.

Scanné avec CamScanner

التمرين 29

نعرّف في المجموعة IR^2 قانون التركيب الداخلي $*$ بمايلي :

$$(\forall (x,y),(x',y') \in IR^2); (x,y) * (x',y') = (x + x' + xx', y + y')$$

ونعتبر المجموعة G المعرفة بمايلي: $G = \{(x,y) \in IR^2; x \neq -1\}$

1. أ) بين أن $(G;*)$ جزء مستقر من $(IR^2,*)$.

ب) بين أن $(G,*)$ زمرة تبادلية.

2. نعتبر المجموعة H المعرفة بمايلي: $H = \{(x, \ln(1+x)) / x \in]-1,+\infty[\}$

بين أن $(H,*)$ زمرة جزئية للزمرة $(G,*)$.

الحل

1. أ) لنبين أن G جزء مستقر في $(IR^2,*)$.

ليكن (x,y) و(a,b) عنصرين من G.

لدينا: $(x,y)*(a,b)=(x+a+xa,y+b)$ ولدينا $x+a+xa+1=x(1+a)+(1+a)$
$=(1+a)(1+x)$

وبما أن $x \neq -1$ و$a \neq -1$ أي $x+1 \neq 0$ و$a+1 \neq 0$ فإن $(1+a)(1+x) \neq 0$

ومنه فإن: $x + a + xa \neq -1$

إذن: $(x+a+xa, y+b) \in G$ أي $(x,y)*(a,b) \in G$

وبالتالي فإن: $(\forall (x,y),(a,b) \in G)$; $(x,y)*(a,b) \in G$

يعني أن G جزء مستقر من $(IR^2,*)$.

ب) لنبين أن $(G,*)$ زمرة تبادلية.

- تبادلية القانون $*$

ليكن (x,y) و(a,b) عنصرين من G.

لدينا: $(x,y)*(a,b)=(x+a+xa,y+b)$ وَ $(a,b)*(x,y)=(a+x+ax,b+y)$
$=(x+a+xa,y+b)$

إذن: $(x,y)*(a,b)=(a,b)*(x,y)$

وبالتالي فإن: $(\forall (x,y),(a,b) \in G); (x;y)*(a,b) = (a,b)*(x,y)$

يعني أن القانون $*$ تبادلي في G.

- **تجميعية القانون $*$**

ليكن (x,y) و(a,b) و(z,t) عناصرا من G

لدينا:

$$(a,b) * [(x,y) * (z,t)] = (a,b) * (x + z + xz, y + t)$$
$$= (a + x + z + xz + a(x + z + xz), b + y + t)$$
$$= (a + x + z + xz + xa + az + axz, b + y + t)$$

ولدينا :

$$[(a,b)*(x,y)]*(z,t) = (a+x+ax, b+y)*(z,t)$$
$$= (a+x+ax+z+z(a+x+ax, b+y+t)$$
$$= (a+x+z+ax+za+zx+axz, b+y+t)$$
$$= (a+x+z+xz+xa+az+axz, b+y+t)$$

ومنه فإن : $(a,b)*[(x,y)*(z,t)] = [(a,b)*(x,y)]*(z,t)$

إذن $(\forall X,Y,Z \in G); X*(Y*Z) = (X*Y)*Z$

يعني أن القانون $*$ تجميعي في G.

– العنصر المحايد للقانون $*$ في G.

ليكن (a,b) عنصرا من G، لدينا

$$(\forall (x,y) \in G)); (x,y)*(a,b) = (x,y) \Longleftrightarrow (\forall (x,y) \in G); (x+a+xa, y+b) = (x,y)$$
$$\Longleftrightarrow (\forall (x,y) \in G); \begin{cases} x+a+xa = x \\ y+b = y \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow (\forall (x,y) \in G); \begin{cases} a(x+1) = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

ومنه فإن : a=0 وb=0

إذن : $(\forall (x,y) \in G); (x,y)*(0,0) = (x,y)$

وَ (x,y)=$(x,y)*(0,0)$ محققة لأن القانون $*$ تبادلي.

يعني أن $(0,0)$ هو العنصر المحايد للقانون $*$ في G

– العناصر القابلة للمماثلة

ليكن (x,y) و(a,b) عنصرين من G لدينا

$$(x,y)*(a,b) = (0,0) \Longleftrightarrow (x+a+xa, y+b) = (0,0)$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x(a+1)+a = 0 \\ y+b = 0 \end{cases}$$

وبما أن $(a,b) \in G$ فإن $a \neq -1$

ومنه فإن : $x(1+a)+a = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{-a}{1+a}$

إذن : $(x,y)*(a,b) = (0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-a}{1+a} \\ y = -b \end{cases}$

لدينا : $\dfrac{-a}{1+a} + 1 = \dfrac{1}{1+a}$ ومنه فإن $\dfrac{-a}{1+a} \neq -1$

إذن : $\left(\dfrac{-a}{1+a}, -b\right) \in G$

يعني أن (a,b) يقبل مماثلا بالنسبة للقانون $*$ في G.

وبالتالي $(\forall (a,b) \in G); (\exists (x,y) \in G) / \begin{cases} (a,b)*(x,y) = (0,0) \\ (x,y)*(a,b) = (0,0) \end{cases}$

أي أن كل عنصر من G قابل للمماثلة بالنسبة للقانون $\circ$ في G.

وبالتالي فإن $(G,\circ)$ زمرة تبادلية.

2. لنبين أن $(H,\circ)$ زمرة جزئية للزمرة $(G,\circ)$.

- $H \subset G$
- $H \neq \phi$ لأن $(0,0) \in H$ من أجل $x=0$
- ليكن X وY عنصرين من H لدينا:

$X \in H \Leftrightarrow (\exists x \in]-1,+\infty[)/X = (x, \ln(1+x))$

و $Y \in H \Leftrightarrow (\exists a \in]-1,+\infty[)/Y = (a, \ln(1+a))$

لدينا $X' = \left(-\frac{x}{1+x}, -\ln(1+x)\right)$ هو مماثل العنصر X في $(G,\circ)$.

ومنه فإن: $Y * X' = (a, \ln(1+a)) * \left(\frac{-x}{1+x}, -\ln(1+x)\right)$

$$= \left(a - \frac{x}{1+x} - \frac{ax}{1+x}, \ln(1+a) - \ln(1+x)\right)$$

$$= \left(\frac{a-x}{1+x}, \ln\left(\frac{1+a}{1+x}\right)\right)$$

وبما أن: $\frac{a-x}{1+x} + 1 = \frac{1+a}{1+x}$ فإن: $Y * X' = \left(\frac{a-x}{1+x}, \ln\left(1 + \frac{a-x}{1+x}\right)\right)$

ولدينا $x>-1$ و$a>-1$ أي $a+1>0$ و$b+1>0$ ومنه فإن $\frac{a-x}{1+x} + 1 > 0$ أي $\frac{a-x}{1+x} > -1$

إذن $(\exists \alpha \in]-1,+\infty[)/Y * X' = (\alpha, \ln(1+\alpha))$، (حيث: $\alpha = \frac{a-x}{1+x}$)

يعني أن: $Y * X' \in H$

وبالتالي فإن $(H,*)$ زمرة جزئية للزمرة $(G,*)$.

التمرين 30

نزود المجموعة $G = IR^* \times IR$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بمايلي:

$$(\forall (x,y),(x',y') \in G); (x,y) * (x',y') = \left(xx', xy' + \frac{y}{x'}\right)$$

1. بين أن $(G,*)$ زمرة. هل القانون $*$ تبادلي في G؟
2. حدد المجموعة C المعرفة بمايلي:

$$C = \{(x,y) \in G / \forall (a,b) \in G; (x,y) * (a,b) = (a,b) * (x,y)\}$$

3. بين أن $IR^* \times \{0\}$ و$\{1\} \times IR$ و$\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}$ زمرات جزئية للزمرة $(G,*)$.
4. نعتبر المجموعة $H = \left\{\left(x, k\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) / x \in IR^*\right\}$ حيث: $k \in IR$

بين أن $(H,*)$ زمرة جزئية تبادلية للزمرة $(G,*)$.

الحل

1. لنبين $(G,\circ)$ أن زمرة.

– تجميعية القانون $\circ$ في G

ليكن (a,b) و(c,b) و(e,f) عناصر من G، لدينا:

$$(a,b)*\left[(c,d)*(e,f)\right]=(a,b)*\left(ce,cf+\frac{d}{e}\right)$$
$$=\left(ace,acf+\frac{ad}{e}+\frac{b}{ce}\right)$$

و

$$\left[(a,b)*(c,d)\right]*(e,f)=\left(ac,ad+\frac{b}{c}\right)*(e,f)$$
$$=\left(ace,acf+\frac{ad}{e}+\frac{b}{ce}\right)$$

ومنه فإن: $\left[(a,b)*(c,d)\right]*(e,f)=(a,b)*\left[(c,d)*(e,f)\right]$

إذن القانون $\circ$ تجميعي في G

– تحديد العنصر المحايد في $(G,\circ)$.

لنحدد (a,b) من G بحيث: $(a,b)\circ(x,y)=(x,y)$ و $(\forall(x,y)\in G);(x,y)*(a,b)=(x,y)$

$(\forall(x,y)\in G);(x,y)*(a,b)=(x,y)$ يكافئ: $(\forall(x,y)\in G);\left(xa,xb+\frac{y}{a}\right)=(x,y)$

يكافئ: $(\forall(x,y)\in G);\begin{cases}xa=x\\ xb+\frac{y}{a}=y\end{cases}$

يكافئ: $(\forall(x,y)\in G);\begin{cases}x(a-1)=0\\ xab+y(a-1)=0\end{cases}$

إذن: $a-1=0$ و$ab=0$ أي $a=1$ و$b=0$

ولدينا: $(1,0)\circ(x,y)=(x,y)$

ومنه فإن $(1,0)$ هو العنصر المحايد في $(G,\circ)$

– العناصر القابلة للمماثلة.

ليكن (a,b) عنصرا من G، لنحدد (x,y) من G بحيث: $(a,b)\circ(x,y)=1$ و$(x,y)\circ(a,b)=(1,0)$

لدينا: $(x,y)*(a,b)=(1,0)\iff\left(xa,xb+\frac{y}{a}\right)=(1,0)$

$$\iff\begin{cases}xa=1\\ xb+\frac{y}{a}=0\end{cases}$$
$$\iff x=\frac{1}{a} \text{ و } y=-b$$

ولدينا: $(a,b)*\left(\frac{1}{a},-b\right)=(1,0)$

ومنه فإن كل عنصر (a,b) من G له مماثل في $(G,\circ)$ هو $\left(\frac{1}{a},-b\right)$

وبالتالي فإن $(G,\circ)$ زمرة.

Scanné avec CamScanner

• لدينا : $(1,1)*(3,0)=\left(3,\frac{1}{3}\right)$ و $(3,0)\circ(1,1)=(3,3)$

ومنه فإن $(3,0)*(1,1)\neq(1,1)*(3,0)$

إذن القانون ∘ غير تبادلي في G.

2. **تحديد المجموعة C.**

ليكن (x,y) و(a,b) عنصرين من G، لدينا :

$$(a,b)*(x,y)=\left(ax,ay+\frac{b}{x}\right)$$ و $$(x,y)*(a,b)=\left(xa,xb+\frac{y}{a}\right)$$

ومنه فإن :

$$\begin{aligned}(a,b)\in C &\Longleftrightarrow (\forall(x,y)\in G);xb+\frac{y}{a}=ay+\frac{b}{x}\\ &\Longleftrightarrow (\forall(x,y)\in G);x^2ab+yx=a^2xy+ab\\ &\Longleftrightarrow (\forall(x,y)\in G);ab(x^2-1)+(1-a^2)xy=0\\ &\Longleftrightarrow \begin{cases}ab=0\\ a^2=1\end{cases}\\ &\Longleftrightarrow (a=1 \text{ و } b=0) \text{ او } (a=-1 \text{ و } b=0)\end{aligned}$$

إذن : $C=\{(1,0),(-1,0)\}$

3. **• لنبين أن $H_1=IR^*\times\{0\}$ زمرة جزئية للزمرة $(G,*)$**

– لدينا $H_1\neq\phi$ لأن $(1,0)\in H_1$

– ليكن $X=(x,0)$ و$Y=(y,0)$ عنصرين من H_1

لدينا $\left(\frac{1}{y},0\right)$ هو مماثل Y في $(G,*)$.

ومنه فإن : $X*Y^{-1}=(x,0)*\left(\frac{1}{y},0\right)$

$$=\left(\frac{x}{y},0\right)$$

إذن : $X*Y^{-1}\in H_1$ لأن $\frac{x}{y}\neq 0$

ومنه فإن H_1 زمرة جزئية للزمرة $(G,*)$.

• لنبين أن $H_2=\{1\}\times IR$ زمرة جزئية $(G,*)$.

– لدينا $H_2\neq\phi$، لأن $(1,0)\in H_2$

– ليكن $X=(1,x)$ و$Y=(1,y)$ عنصرين من H_2.

لدينا $(1,-y)$ هو مماثل $(1,y)$ في $(G,*)$

ومنه فإن $X*Y^{-1}=(1,x)*(1,-y)$

$$=(1,x-y)$$

إذن : $X*Y^{-1}\in H_2$

وبالتالي فإن $(H_2,\circ)$ زمرة جزئية للزمرة $(G,\circ)$.

• لنبين أن $H_3=\mathbb{Q}^*\times\mathbb{Q}$ زمرة جزئية للزمرة $(G,\circ)$.

- $H_3 \neq \phi$ لأن $(1,0) \in H_3$

- ليكن $X=(a,b)$ و$Y(c,d)$ عنصرين من H_3.

لدينا: $\left(\frac{1}{c}, -d\right)$ هو مماثل (c,d) في $(G,\circ)$.

ومنه فإن: $X * Y^{-1} = (a,b) * \left(\frac{1}{c}, -d\right)$

$$= \left(\frac{a}{c}, bc - ad\right)$$

وبما أن $\frac{a}{c} \in \mathbb{Q}^*$ و $bc - ad \in \mathbb{Q}$ فإن $\left(\frac{a}{c}, bc - ad\right) \in H_3$

إذن $X * Y^{-1} \in H_3$

وبالتالي فإن $(H_3,\circ)$ زمرة تبادلية جزئية للزمرة $(G,\circ)$.

4- لنبين أن $(H,\circ)$ زمرة جزئية تبادلية للزمرة $(G,\circ)$.

- $H \neq \phi$ لأن $(1,0) \in H$

- ليكن $X = \left(x, k\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$ و $Y = \left(y, k\left(y - \frac{1}{y}\right)\right)$ عنصرين من H.

لدينا: $\left(\frac{1}{y}, k\left(\frac{1}{y} - y\right)\right)$ هو مماثل Y في $(G,\circ)$.

ومنه فإن: $X * Y^{-1} = \left(x, k\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) * \left(\frac{1}{y}, k\left(\frac{1}{y} - y\right)\right)$

$$= \left(\frac{x}{y}, xk\left(\frac{1}{y} - y\right) + k\left(x - \frac{1}{x}\right)y\right)$$

$$= \left(\frac{x}{y}, k\left(\frac{x}{y} - xy + xy - \frac{y}{x}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{x}{y}, k\left(\frac{x}{y} - \frac{1}{\frac{x}{y}}\right)\right)$$

ولدينا $\frac{x}{y} \neq 0$ ومنه فإن: $X * Y^{-1} \in H$

إذن $(H,\circ)$ زمرة جزئية للزمرة $(G,\circ)$.

- تبادلية القانون $\circ$ في H.

ليكن $X = \left(x, k\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$ وَ $Y = \left(y, k\left(y - \frac{1}{y}\right)\right)$ عنصرين من H.

لدينا: $X * Y = \left(x, k\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) * \left(y, k\left(y - \frac{1}{y}\right)\right)$

$$= \left(xy, xk\left(y - \frac{1}{y}\right) + k\left(x - \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{y}\right)$$

$$= \left(xy, k\left(xy - \frac{1}{xy}\right)\right)$$

Scanné avec CamScanner

و $Y * X = \left(y, k\left(y - \frac{1}{y}\right)\right) * \left(x, k\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$

$$= \left(yx, yk\left(x - \frac{1}{x}\right) + k\left(y - \frac{1}{y}\right) \times \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(yx, k\left(xy - \frac{1}{xy}\right)\right)$$

ومنه فإن: $X \circ Y = Y \circ X$

يعني أن القانون $\circ$ تبادلي في H.

وبالتالي فإن $(H, \circ)$ زمرة جزئية تبادلية للزمرة $(G, \circ)$.

التمرين 31

نعتبر المجموعة E المعرفة كمايلي: $E = \{z \in \mathbb{C} / z = x + iy$ و $(x, y) \in IR^2$ و $xy > 0\}$

1) أ- هل E جزء مستقر من $(\mathbb{C},+)$؟

ب- هل E جزء مستقر من $(\mathbb{C},\times)$؟

2) نعرّف في المجموعة $\mathbb{C}$ القانون $\circ$ كمايلي:

$$z * z' = xx' + iyy' \quad ; \quad \begin{cases} (\forall z \in \mathbb{C}) ; z = x + iy ; (x, y) \in IR^2 \\ (\forall z' \in E) ; z' = x' + iy' ; (x', y') \in IR^2 \end{cases}$$

أ) بين أن القانون $\circ$ داخلي في E.

ب) بين أن $(E, \circ)$ زمرة تبادلية.

3) نعتبر التطبيق f من E نحو IR المعرف بمايلي:

$f(z) = \ln(xy) \quad ; \quad ((\forall z \in E) ; z = x + iy$ وَ $(x, y) \in IR^2)$

أ) بين أن f تشاكل من $(E, \circ)$ نحو $(IR,+)$

ب) حدد المجموعة N المعرفة كمايلي: $N = \{z \in E / f(z) = 0\}$

هل f تطبيق تقابلي؟

Scanné avec CamScanner

ولكن $(x+x')(y+y')=0$ أي $z+z'\notin E$

إذن E ليس جزء مستقر من $(\mathbb{C},+)$.

ب) هل E جزء مستقر من $(\mathbb{C},\times)$؟

باستعمال كتابة z و z' السابقة نحسب $z\times z'$.

لدينا: $z\times z=(x+iy)(x'+iy')=(xx'-yy')+i(xy'+yx')$

ويكون لدينا $zz'\in E$ إذا وفقط إذا كان: $(xx'-yy')(xy'+yx')>0$

ولكن نأخذ مثلا: $x=y$ و $x'=y'$

إذن $xy>0$ و $x'y'>0$ أي $z\in E$ و $z'\in E$

و $(xx'-yy')(xy'+yx')=0$ أي $zz'\in E$

وبالتالي فإن E ليس جزءا مستقرا من $(\mathbb{C},\times)$.

2. أ) لنبين أن $*$ قانون داخلي في E.

ليكن z و z' عنصرين من E، لدينا:

$(\exists(x,y)\in IR^2)\ /\ z=x+iy$ و $xy>0$ وَ $(\exists(x',y')\in IR^2)\ /\ z'=x'+iy'$ و $x'y'>0$

وَ $z*z'=xx'+iyy'$

يكون لدينا $z*z'\in E$ إذا وفقط إذا كان $xx'(yy')>0$

وبما أن $xx'>0$ و $yy'>0$ فإن $(xx')(yy')>0$ ومنه فإن $z*z'\in E$

إذن $(\forall z,z'\in E)\ ;\ z*z'\in E$

يعني أن $*$ قانون تركيب داخلي في E

ب) لنبين أن $(E,*)$ زمرة تبادلية.

• تجميعية القانون $*$ في E.

ليكن z و z' و z'' عناصر من E، بحيث:

$z=x+iy$ و $xy>0$; $z'=x'+iy'$ و $x'y'>0$; $z''=x''+iz''$ و $x''y''>0$

لدينا $(z*z')*z''=(xx'+iyy')*(x''+iy'')$ و $z*(z'*z'')=(x+iy)*(x'x''+iy'y'')$

$=xx'x''+iyy'y''$ $\qquad$ $=xx'x'+iyy'y''$

ومنه فإن $(z*z')*z''=z*(z'*z'')$

يعني أن القانون $*$ تجميعي في E.

• تبادلية القانون $*$ في E.

لدينا $z'*z=x'x+iy'y$ و $z*z'=xx'+iyy'$

ومنه فإن $z*z'=z'*z$

يعني أن القانون $*$ تبادلي في E.

Scanné avec CamScanner

• تحديد العنصر المحايد في $(E,*)$

$a=\alpha+i\beta$ عنصر محايد في $(E,*)$ إذا وفقط إذا كان: $(\forall z\in E)\ ;\ z*a=z$

لدينا: $z*a=z \Leftrightarrow x\alpha+iy\beta=x+iy$

$\Leftrightarrow x\alpha=x$ و $y\beta=y$

ومنه فإن $(\forall z\in E); z*a=z$ يكافئ $(\forall x,y\in IR);(\alpha-1)x=0$ و $(\beta-1)y=0$

إذن $\alpha=1$ و $\beta=1$

وبالتالي فإن $1+i$ هو العنصر المحايد في $(E,*)$

• العناصر القابلة للمماثلة.

لدينا $z*z'=1+i \Leftrightarrow xx'+iyy'=1+i$

$\Leftrightarrow xx'=1$ و $yy'=1$

$\Leftrightarrow x'=\frac{1}{x}$ و $y'=\frac{1}{y}$

(لاحظ أن $xy>0$ تستلزم أن $x\neq 0$ و $y\neq 0$)

ومنه فإن كل عنصر $z=x+iy$ من E يقبل مماثلا في $(E,*)$ هو: $\frac{1}{x}+i\frac{1}{y}$

وبالتالي فإن $(E,*)$ زمرة تبادلية.

3. أ) لنبين أن f تشاكل.

ليكن $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$ من E.

لدينا:
$$\begin{aligned} f(z*z') &= f(xx'+iyy') \\ &= \ln\big((xx').(yy')\big) \\ &= \ln(xy)+\ln(x'y') \\ &= f(z)+f(z') \end{aligned}$$

ومنه فإن f تشاكل من $(E,*)$ نحو $(IR,+)$.

ب) تحديد المجموعة N

ليكن z عنصرا من E، حيث: $z=x+iy$ مع $(x,y)\in IR^2$ و $xy>0$

لدينا:
$$\begin{aligned} z\in N &\Leftrightarrow f(z)=0 \\ &\Leftrightarrow \ln(xy)=0 \\ &\Leftrightarrow xy=1 \\ &\Leftrightarrow y=\frac{1}{x} \end{aligned}$$

ومنه فإن: $N=\left\{x+i\frac{1}{x}\ /\ x\in IR^*\right\}$

لدينا $f(1+i)=f(-1-i)=0$ و $1+i\neq -1-i$

ومنه فإن f تطبيق غير تبايني.

التمرين 32

نعرّف في المجموعة $E=\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ قانون التركيب الداخلي T بمايلي :

$$(\forall(a,b),(x,y)\in E);(a,b)T(x,y)=(ax+b\overline{y},ay+b\overline{x})$$

1. أ) بين أن القانون T تجميعي وغير تبادلي ويقبل عنصرا محايدا.

ب) ليكن (a,b) عنصرا من E.

احسب $(a,b)T(0,0)$، هل (E,T) زمرة؟

2. نعتبر المجموعة F المعرفة كمايلي : $F=\{(a,b)\in E/|a|\neq|b|\}$

أ) ليكن (a,b) و(c,d) عنصرين من F.

بين أن: $(a,b)T(c,d)\notin F \Longleftrightarrow (c,d)\notin F$ أو $(a,b)\notin F$

استنتج أن F جزء مستقر من (E,T).

ب) بين أن F هي مجموعة العناصر القابلة للمماثلة في (E,T)

ماهي بنية (F,T)؟

ج) نعتبر المجموعات التالية : $H=IR^*\times\{0\}$; $K=\{0\}\times\mathbb{C}^*$; $I=\mathbb{C}^*\times\{0\}$

بين أن H وI زمرتين جزئيتين للزمرة (F,T). هل K زمرة جزئية للزمرة (F,T)؟

الحل

1. أ) لنبين أن القانون T تجميعي في E.

ليكن $x=(a,b)$ و$y=(c,d)$ و$z=(e,f)$ عناصر من E، لدينا :

$$(xTy)Tz=[(a,b)T(c,d)]T(e,f)=(ac+b\overline{d},ad+b\overline{c})T(e,f)$$
$$=((ac+b\overline{d})e+(ad+b\overline{c})\overline{f},(ac+b\overline{d})f+(ad+b\overline{c})\overline{e})$$
$$=(ace+b\overline{d}e+ad\overline{f}+b\overline{c}\overline{f},acf+b\overline{d}f+ad\overline{e}+b\overline{c}\overline{e})$$

ولدينا:

$$xT(yTz)=(a,b)T[(c,d)T(e,f)]$$
$$=(a,b)T(ce+d\overline{f},cf+d\overline{e})$$
$$=(a(ce+d\overline{f})+b(\overline{cf+d\overline{e}}),a(cf+d\overline{e})+b(\overline{ce+d\overline{f}}))$$
$$=(ace+ad\overline{f}+b(\overline{c}\overline{f}+\overline{d}e),acf+ad\overline{e}+b(\overline{c}\overline{e}+\overline{d}f))$$
$$=(ace+b\overline{d}e+ad\overline{f}+b\overline{c}\overline{f},acf+b\overline{d}f+ad\overline{e}+b\overline{c}\overline{e})$$

ومنه فإن: $(xTy)T=xT(yTz)$

إذن: $(\forall x,y,z\in E);(xTy)Tz=xT(yTz)$

يعني أن القانون T تجميعي في E.

- **القانون T غير تبادلي.**

يكفي إيجاد مثال مضاد :

Scanné avec CamScanner

لدينا: $(i,i)T(i,-i)=(-1-1,1+1)=(-2,2)$

و $(i,-i)T(i,i)=(-1-1,-1-1)=(-2,-2)$

ومنه فإن: $(i,i)T(i,-i) \neq (i,-i)T(i,i)$

وبالتالي فإن القانون T غير تبادلي.

* **العنصر المحايد للقانون T**

ليكن (e,f) عنصرا من E.

(e,f) عنصر محايد في (E,T) إذا وفقط إذا كان:

$(e,f)T(x,y)=(x,y)$ وَ $(x,y)T(e,f)=(x,y)$; $(\forall (x,y) \in E)$

ليكن (x,y) عنصرا من E، لدينا:

$$(e,f)T(x,y)=(x,y) \Leftrightarrow (ex+f\overline{y}, ey+f\overline{x})=(x,y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ex+f\overline{y}=x \\ ey+f\overline{x}=y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (e-1)x+f\overline{y}=0 \\ (e-1)y+f\overline{x}=0 \end{cases}$$

ومنه فإنه لدينا:

$$\left((\forall (x,y) \in E); \begin{cases} (e-1)x+f\overline{y}=0 \\ (e-1)y+f\overline{x}=0 \end{cases}\right) \Rightarrow e-1=0 \text{ وَ } f=0$$

إذن: $(e,f)=(1,0)$

ونتحقق من أن: $(\forall (x,y) \in E)$; $(x,y)T(1,0)=(x,y)$

وبالتالي فإن $(1,0)$ هو العنصر المحايد في (E,T).

ب) * حساب: $(a,b)T(0,0)$

لدينا:

$$(a,b)T(0,0)=(a\times0+b\times0, a\times0+b\times0)$$
$$=(0,0)$$

* **الاستنتاج:**

بما أن: $(\forall (a,b) \in E); (a,b)T(0,0)=(0,0)$

و $(1,0) \neq (0,0)$ علما أن $(1,0)$ هو العنصر المحايد في (E,T) فإن العنصر $(0,0)$ لا يقبل مماثلا في (E,T).

إذن (E,T) ليس بزمرة.

2. لنبين أن: $(a,b)T(c,d) \notin F \Leftrightarrow (c,d) \notin F$ أو $(a,b) \notin F$

لدينا: $(a,b)T(c,d)=(ac+b\overline{d}, ad+b\overline{c})$

وحسب تعريف المجموعة F يكون لدينا

$$(a,b)T(c,d) \notin F \iff (ac + b\bar{d}, ad + b\bar{c}) \notin F$$
$$\iff |ac + b\bar{d}| = |ad + b\bar{c}|$$
$$\iff |ac + b\bar{d}|^2 = |ad + b\bar{c}|^2$$

وبما أن:
$$|ac + b\bar{d}|^2 = (ac + b\bar{d})(\overline{ac} + \bar{b}d)$$
$$= |a|^2|c|^2 + ac\bar{b}d + b\bar{d}\overline{ac} + |b|^2|d|^2$$

و
$$|ad + b\bar{c}|^2 = (ad + b\bar{c})(\overline{ad} + \bar{b}c)$$
$$= |a|^2|d|^2 + ad\bar{b}c + b\bar{c}\overline{ad} + |b|^2|c|^2$$

فإن:
$$(a,b)T(c,d) \notin F \iff |a|^2|c|^2 + |b|^2|d|^2 = |a|^2|d|^2 + |b|^2|c|^2$$
$$\iff |a|^2(|c|^2 - |d|^2) + |b|^2(|d|^2 - |c|^2) = 0$$
$$\iff (|c|^2 - |d|^2)(|a|^2 - |b|^2) = 0$$

$\iff |c| = |d|$ أو $|a| = |b|$

ولدينا:
$$(a,b) \notin F \iff |a| = |b|$$
$$(c,d) \notin F \iff |c| = |d|$$

ومنه فإن

$(a,b)T(c,d) \notin F \iff (a,b) \notin F$ أو $(c,d) \notin F$

• الاستنتاج:

ليكن (a,b) و(c,d) عنصرين من F.

لدينا حسب ما سبق: $(a,b)T(c,d) \in F \iff (a,b) \in F$ و $(c,d) \in F$

أي $(a,b)T(c,d) \in F$

ومنه فإن: $(\forall (a,b),(c,d) \in F)\ ;\ (a,b)T(c,d) \in F$

يعني أن F جزء مستقر من (E,T).

ب) لنبين أن F هي مجموعة العناصر القابلة للمماثلة في (E,T)

• ليكن (a,b) عنصرا من F.

لنبين أن (a,b) يقبل مماثلا في (E,T).

أي $(\exists (x,y) \in E) / (a,b)T(x,y) = (1,0)$ و $(x,y)T(a,b)=(1,0)$

لدينا: $(a,b)T(x,y) = (1,0) \iff (ax + b\bar{y}, ay + b\bar{x}) = (1,0)$

$$\iff \begin{cases} ax + b\bar{y} = 1 \\ b\bar{x} + ay = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} ax + b\bar{y} = 1 \\ \bar{b}x + \bar{a}\bar{y} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Scanné avec CamScanner

التمرين 33

ليكن $a \in IR$ والتطبيق

$$T_a: P \to P$$
$$M(x,y) \mapsto M'(x',y'): \begin{cases} x' = e^a x \\ y' = ae^a x + e^a y \end{cases}$$

نضع : $\Im = \{T_a / a \in IR\}$

1. بين أن o قانون داخلي في $\Im$

2. أ- بين أن $(\Im, o)$ زمرة تبادلية.

ب- بين أن التطبيق : $h: (IR, +) \to (\Im, o)$ تشاكل تقابلي.
$$a \mapsto T_a$$

3. نضع $\Im' = \{T_a / a \in \mathbb{Z}\}$

أ- بين أن $(\Im', o)$ زمرة تبادلية.

ب- لتكن $T_a \in \Im'$ ونضع $(T_a)^0 = I$ (حيث I هو التطبيق المطابق ل (P))

$(\forall n \in IN); (T_a)^{n+1} = (T_a)^n o T_a$ و $(T_a)^{-n} = [(T_a)^n]^{-1}$

بين أن $(\forall p \in \mathbb{Z})\ (T_a)^p = T_{pa}$

ج- ليكن $(a,b) \in IN^* \times IN^*$ و $H = \{(T_a)^p o (T_b)^q / (p,q) \in \mathbb{Z}^2\}$

بين أن H زمرة جزئية من $(\Im', o)$.

الحل

لدينا :

$$T_a: P \to P$$
$$M \mapsto M' \begin{cases} x' = e^a x \\ y' = ae^a x + e^a y \end{cases}$$

• لنحدد $T_b o T_a$:

ليكن $(P) \xrightarrow{T_a} (P) \xrightarrow{T_b} (P)$

$$M \mapsto M_1 \mapsto M'$$

أي : $\begin{cases} x' = e^b x_1 \\ y' = be^b x_1 + e^b y_1 \end{cases}$ وَ $\begin{cases} x_1 = e^a x \\ y_1 = ae^a x + e^a y \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} x' = e^{a+b} x \\ y' = be^{a+b} x + ae^{a+b} x + e^{a+b} y \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} x' = e^{a+b} x \\ y' = (a+b) e^{a+b} x + e^{a+b} y \end{cases}$

Scanné avec CamScanner

وبالتالي :
$$T_b o T_a : P \to P$$
$$M \mapsto M' : \begin{cases} x' = e^{a+b} \\ y' = (a+b)e^{a+b} + e^{a+b}y \end{cases}$$

إذن : $T_b o T_a = T_{a+b}$

ومنه $T_b o T_a \in \Im$ إذن o قانون تركيب داخلي في $\Im$

2. أ) لدينا حسب السؤال (1) : $T_b o T_a = T_{b+a} = T_{a+b} = T_a o T_b$

ومنه القانون "o" تبادلي في $\Im$.

• ليكن $M' \in P$

لنبين أن : $\exists! M \in P \; T_a(M) = M'$

لدينا :
$$T_a(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = e^a x \\ y' = ae^a x + e^a y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{-a}x' \\ y' = ax' + e^a y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{-a}x' \\ e^a y = -ax' + y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{-a}x' \\ y = -ae^{-a}x' + e^{-a}y' \end{cases}$$

وبالتالي : $(\forall M' \in P) \; ; \; (\exists! M \in P) \; : T_a(M) = M'$

ومنه : T_a تقابل من P نحو P، ولدينا : $(\forall a \in IR) \;\; T_a^{-1} = T_{-a}$

إذن $\Im \subset B(P,P)$ ($B(P,P)$ مجموعة التقابلات من P نحو P)

وبما أن $(B(P;P);o)$ زمرة. وَ $\Im$ جزء مستقر من $(B(P;P);o)$ فإن o تجميعي في $\Im$.

• لدينا : $T_o = Id_{(p)}$ ومنه $Id_{(p)} \in \Im$

ولدينا : $(T_a^{-1}) = T_{-a}$ ومنه $T_a^{-1} \in \Im$

وبالتالي : $(\Im, o)$ زمرة تبادلية

ب) لدينا : $h : (IR, +) \to (\Im, o)$
$$a \mapsto T_a$$

ليكن $(a;b) \in IR^2$ لدينا : $h(a+b) = T_{a+b} = T_a o T_b = h(a) o h(b)$

ومنه : h تشاكل من $(IR,+)$ نحو $(\Im, o)$

• لدينا : $f \in \Im \Leftrightarrow (\exists a \in IR) \; ; f = T_a = h(a)$

ومنه h شمولي.

• ليكن (a,b) من IR^2.

لدينا :
$$h(a) = h(b) \Leftrightarrow T_a = T_b$$
$$\Leftrightarrow T_a o T_a^{-1} = T_b o T_a^{-1}$$
$$\Leftrightarrow T_0 = T_b o T_{-a}$$
$$\Leftrightarrow T_0 = T_{b-a}$$

Scanné avec CamScanner

إذن: $b-a=0$ ومنه $a=b$.

إذن: h تبايني ومنه h تقابل وبالتالي h تشاكل تقابلي.

3) $\mathfrak{S}' = \{T_a / a \in \mathbb{Z}\}$

أ) لدينا: $\mathfrak{S} = \{T_a / a \in IR\}$

ومنه: $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$

لدينا "o" تبادلي وتجميعي في $\mathfrak{S}$ إذن فهو كذلك في $\mathfrak{S}'$

$(\forall a \in \mathbb{Z})\ ;\ T_a^{-1} = T_{-a}$

بما أن $(\forall a \in \mathbb{Z})\ ;\ -a \in \mathbb{Z}$

فإن: $T_{-a} = T_a^{-1} \in \mathfrak{S}'$

إذن، كل عنصر من $\mathfrak{S}'$ له مماثل في $\mathfrak{S}'$.

ولدينا: $Id_{(p)} = T_0 \in \mathfrak{S}'$

ومنه: T_0 هو العنصر المحايد ل $\mathfrak{S}'$

وبالتالي: $(\mathfrak{S}', o)$ زمرة تبادلية.

ب) لنبين أن: $(T_a)^p = T_{pa}\ ;\ (\forall p \in \mathbb{Z})$

لنبين على الخاصية في IN بالترجع.

لدينا: $(T_a)^0 = Id_{(p)} = T_0$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $p=0$

ليكن $p \in IN$

نفترض أن $(T_a)^p = T_{pa}$ ونبين أن: $(T_a)^{p+1} = T_{(p+1)a}$

لدينا: $(T_a)^{p+1} = (T_a)^p o T_a = T_{pa} o T_a = T_{ap+a} = T_{(p+1)a}$

وبالتالي: $(\forall p \in IN)\ ;\ (T_a)^p = T_{ap}$

• ليكن $p \in \mathbb{Z}^-$ لدينا: $-p \in IN$

ومنه: $(T_a)^p = (T_a^{-p})^{-1} = (T_{-pa})^{-1} = T_{pa}$

وبالتالي: $(\forall p \in \mathbb{Z})\ ;\ (T_a)^p = T_{ap}$

ج) ليكن $a \in IN^*$ و $b \in IN^*$

و $H = \{(T_a)^p o (T_b)^q / (p,q) \in \mathbb{Z}^2\}$

لدينا: $(T_a)^p o (T_b)^q = T_{pa} o T_{bq} = T_{pa+qb}$

ومنه: $(\forall f \in H)\ ;\ f \in \mathfrak{S}'$

يعني أن: $H \subset \mathfrak{S}'$

لدينا $p = q = 0 \Rightarrow (T_a)^p o (T_b)^q = I$

أي إن: $I \in H$

ومنه $H \neq \phi$

• ليكن f و g من H

لدينا :

$$f = T_{pa+qb};(p,q) \in \mathbb{Z}^2$$

$$g = T_{p'a+q'b};(p;q) \in \mathbb{Z}^2$$

$$fog^{-1} = T_{pa+qb}o\left(T_{p'a+q'b}\right)^{-1}$$

$$= T_{pa+qb}oT_{-p'a-q'b}$$

$$= T_{(p-p')a+(q-q')b}$$

نضع : $(p'' = p - p' \in \mathbb{Z})$ و $(q'' = q - q' \in \mathbb{Z})$

ومنه : $fog^{-1} = T_{p'a+q'b};(p'',q'') \in \mathbb{Z}^2$

إذن : $fog^{-1} \in H \quad \left(\forall (f;g) \in H^2\right)$

وبالتالي : (H,o) زمرة جزئية للزمرة $(\mathfrak{S}',o)$.

التمرين 34

نعتبر المجموعة E المعرفة بمايلي : $E = \left\{M(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ x\ell nx & x \end{pmatrix} / x \in IR_+^*\right\}$

ليكن φ التطبيق المعرف بمايلي : $\varphi: IR_+^* \to E$

$$x \mapsto M(x)$$

1. بين أن φ تشاكل تقابلي من $(IR_+^*, \times)$ نحو $(E,\times)$
2. ماهي بنية $(E,\times)$؟
3. حدد المصفوفتين : $(M(x))^{-1}$ و $(M(x))^n$، حيث : $x \in IR_+^*$ و $n \in IN^*$

Scanné avec CamScanner

إذن : $(\forall x, y \in IR_{+}^{*}); \varphi(xy) = \varphi(x) \times \varphi(y)$

يعني أن φ تشاكل من $(IR_{+}^{*}, \times)$ نحو $(E,\times)$

• لنبين أن φ تقابل.

لدينا : $(\forall M \in E) : (\exists x \in IR_{+}^{*}) / M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ x\ell nx & x \end{pmatrix}$

يعني أن $(\forall M \in E); (\exists x \in IR_{+}^{*}) / \varphi(x) = M$

أي أن φ تطبيق شمولي.

ليكن x وy عنصرين من IR_{+}^{*} بحيث $\varphi(x) = \varphi(y)$

لدينا $\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & 0 \\ x\ell nx & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ y\ell ny & y \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow x = y$ و $x\ell nx = y\ell ny$

$\Leftrightarrow x = y$

ومنه فإن: $(\forall x, y \in IR_{+}^{*}); \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y$

يعني أن φ تطبيق تبايني.

ومنه فإن φ تطبيق تقابلي.

وبالتالي فإن φ تشاكل تقابلي من $(IR_{+}^{*}, \times)$ نحو $(E,\times)$

2. **بنية $(E,\times)$**

لدينا $(IR_{+}^{*}, \times)$ و$(E,\times)$ متشاكلتان تقابليا و$(IR_{+}^{*}, \times)$ زمرة تبادلية ومنه فإن $(E,\times)$ زمرة تبادلية.

3. لدينا : $(M(x))^{-1} = (\varphi(x))^{-1} = \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ -\frac{\ell nx}{x} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$

وَ $(M(x))^{n} = (\varphi(x))^{n} = \varphi(x^{n}) = \begin{pmatrix} x^{n} & 0 \\ nx^{n}\ell nx & x^{n} \end{pmatrix}$

التمرين 35

نعتبر المجموعة E المعرفة بمايلي : $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix} / (a;b) \in \mathbb{Z}^{2} \right\}$

1) بين أن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية

2) أ- بين أن : $(\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^{2}) :\ a^{2} - 5b^{2} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

ب- بين أن الحلقة $(E;+;\times)$كاملة.

3) نعتبر المجموعة التالية : $F\left\{ \begin{pmatrix} 2x - y & y \\ 5y & 2x - y \end{pmatrix} / (x;y) \in \mathbb{Z}^{2} \right\}$

أ- بين أن $(F,+)$ زمرة جزئية للزمرة $(F,+)$

ب- بين أن: $(\forall X \in E) ; (\forall M \in F) ; X \times M \in F$

Scanné avec CamScanner

الحل

1) لنبين أن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية

• لنبين أن: $(E,+)$ زمرة تبادلية.

لدينا $E \subset \mathscr{M}_2(IR)$ و$(\mathscr{M}_2(IR);+)$ زمرة تبادلية ومنه يكفي أن نبين أن $(E,+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(\mathscr{M}_2(IR);+)$

$E \neq \phi$، لأن $\theta \in E$ حيث θ هي المصفوفة المنعدمة.

ليكن M وN عنصرين من E؛

لدينا: $$M \in E \Longleftrightarrow (\exists (a;b) \in \mathbb{Z}^2);M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix}$$

و $$N \in N \Longleftrightarrow (\exists (x;y) \in \mathbb{Z}^2);N = \begin{pmatrix} x & y \\ 5y & x \end{pmatrix}$$

ومنه فإن: $$M + (-N) = \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x & -y \\ -5y & -x \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a-x & b-y \\ 5(b-y) & a-x \end{pmatrix}$$

نضع: $\alpha = a - x$ و$\beta = b - y$

لدينا: $\alpha \in \mathbb{Z}$ و $\beta \in \mathbb{Z}$ و$M + (-N) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 5\beta & \alpha \end{pmatrix}$ أي $M + (-N) \in E$

إذن $$\begin{cases} E \neq \phi \\ (\forall M,N \in E);M + (-N) \in E \end{cases}$$

يعني أن E زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(\mathscr{M}_2(IR);+)$

وبالتالي فإن $(E,+)$ زمرة تبادلية.

• لنبين أن E جزء مستقر من $(\mathscr{M}_2(IR);\times)$

ليكن M وN عنصرين من E حيث: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix}$ و$N = \begin{pmatrix} x & y \\ 5y & x \end{pmatrix}$، مع a وb وx وy عناصر من $\mathbb{Z}$

لدينا: $$M \times N = \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 5y & x \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ax+5by & ay+bx \\ 5bx+5ay & 5by+ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+5by & ay+bx \\ 5(ay+bx) & ax+5by \end{pmatrix}$$

نضع: $\alpha = ax + 5by$ و$\beta = ay + bx$

لدينا: $\alpha \in \mathbb{Z}$ و $\beta \in \mathbb{Z}$ و$M \times N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 5\beta & \alpha \end{pmatrix}$ أي: $M \times N \in E$

إذن: $(\forall M,N \in E);M \times N \in E$

يعني أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(IR);\times)$

• لدينا E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(IR);\times)$، وبما أن الضرب $\times$ تجميعي وتوزيعي بالنسبة للجمع + في فإن القانون $\times$ تجميعي في E وتوزيعي بالنسبة للقانون + في E.

• لدينا القانون $\times$ يقبل عنصرا محايدا I في $\mathcal{M}_2(IR)$ مع $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ومن أجل $a=1$ و$b=0$ في $I \in E$.

إذن I هو العنصر المحايد في $(E;\times)$

• ليكن M وN عنصرين من E حيث: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix}$ و $N = \begin{pmatrix} x & y \\ 5y & x \end{pmatrix}$

لدينا:

$$N \times M = \begin{pmatrix} x & y \\ 5y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ax + 5by & bx + ay \\ 5ay + 5by & 5by + ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + 5by & ay + bx \\ 5(ay + bx) & ax + 5by \end{pmatrix}$$

وحسب ما سبق لدينا: $M \times N = \begin{pmatrix} ax + 5by & ay + bx \\ 5(ay + bx) & ax + 5by \end{pmatrix}$

ومنه $M \times N = N \times M$

وبالتالي فإن $(\forall M,N \in E); M \times N = N \times M$

يعني القانون $\times$ تبادلي في E.

إذن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

2. أ) لنبين أن: $(\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2):\ a^2 - 5b^2 = 0 \iff a = b = 0$

ليكن a وb عنصرين من $\mathbb{Z}$.

• إذا كان $a=b=0$ فإن $a^2-5b^2=0$

• نفترض أن $a^2-5b^2=0$، لنبين أن $a=0$ و$b=0$

لدينا $a^2-5b^2=0$ أي $a^2=5b^2$

إذا كان $b \neq 0$ فإن $\frac{a^2}{b^2} = 5$ أي $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 5$ ومنه: $\sqrt{5} = \left|\frac{a}{b}\right|$

وبما أن a وb من $\mathbb{Z}$ فإن $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ إذن $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$، وهذا غير ممكن،

إذن $b=0$ ومنه $a^2=0$ أي $a=0$

إذن: $a^2 - 5b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$

وبالتالي فإن: $(\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2); a^2 - 5b^2 = 0 \iff a = b = 0$

ب) لنبين أن $(E;+;\times)$ حلقة كاملة

أي: $(\forall M,N \in E); M \times N \Rightarrow M = \theta$ أو $N = \theta$

حيث θ هي المصفوفة المنعدمة، العنصر المحايد للقانون +.

ليكن M وN عنصرين من E بحيث: $M \times N = \theta$ مع $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix}$ و $N = \begin{pmatrix} x & y \\ 5y & x \end{pmatrix}$

وa وb وx وy عناصر من $\mathbb{Z}$.

لدينا $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + 5by & ay + bx \\ 5(ay + by) & ax + 5by \end{pmatrix} \Longleftrightarrow M \times N = \theta$

ومنه فإن: $\begin{cases} ax + 5by = 0 \\ ay + bx = 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} ax + (5b)y = 0 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$

باعتبار (x,y) كمجهول فإن محددة هذه النظمة هي: $\Delta = \begin{vmatrix} a & 5b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - 5b^2$

إذا كان $\Delta \neq 0$ فإن $(x,y)=(0,0)$ أي $N = \theta$

إذا كان $\Delta = 0$ فإنه لدينا $a=b=0$ حسب السؤال 2. أ)

ومنه فإن $M = \theta$

إذن: $M = \theta$ أو $N = \theta$ ومنه فإن $(E;+;\times)$ حلقة كاملة.

3. أ) لنبين أن $(F;+)$ زمرة جزئية للزمرة $(E;+)$

• لدينا $F \subset E$ و$F \neq \phi$ لأن $\theta \in F$ من أجل $x=y=0$

• ليكن M وN عنصرين من F، لدينا

$$M \in F \Longleftrightarrow (\exists (x;y) \in \mathbb{Z}^2)\ ;\ M = \begin{pmatrix} 2x - y & y \\ 5y & 2x - y \end{pmatrix}$$

و

$$N \in F \Longleftrightarrow (\exists (z;t) \in \mathbb{Z}^2)\ ;\ N = \begin{pmatrix} 2z - t & t \\ 5t & 2z - t \end{pmatrix}$$

ومنه فإن:

$$M + (-N) = \begin{pmatrix} 2x - y & y \\ 5y & 2x - y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2z + t & -t \\ -5t & -2z + t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x - y - 2z + t & y - t \\ 5y - 5t & 2x - y - 2z + t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2(x - z) - (y - t) & y - t \\ 5(y - t) & 2(x - z) - (y - t) \end{pmatrix}$$

نضع: $\alpha = x - z$ و $\beta = y - t$

لدينا: $\alpha \in \mathbb{Z}$ و $\beta \in \mathbb{Z}$ و $M + (-N) = \begin{pmatrix} 2\alpha - \beta & \beta \\ 5\beta & 2\alpha - \beta \end{pmatrix}$

إذن $M + (-N) \in F$

ومنه فإن: $(\forall M,N \in F); M + (-N) \in F$

وبالتالي فإن F زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(E;+)$

ب) لنبين أن: $(\forall X \in E);(\forall M \in F);X \times M \in F$

ليكن X عنصرا من E وM عنصرا من F، لدينا:

$$X \in E \iff (\exists(a;b) \in \mathbb{Z}^2);X = \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix}$$

وَ

$$M \in F \iff (\exists(x;y) \in \mathbb{Z}^2);M = \begin{pmatrix} 2x-y & y \\ 5y & 2x-y \end{pmatrix}$$

ومنه فإن:

$$X \times M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x-y & y \\ 5y & 2x-y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a(2x-y)+5by & ay+b(2x-y) \\ 5b(2x-y)+5by & 5by+a(2x-y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2ax-ay+5by & ay+2bx-by \\ 5(ay+2bx-by) & 2ax-ay+5by \end{pmatrix}$$

نضع $\beta = ay+2bx-by$

لنحدد α بحيث: $2ax-ay+5by = 2\alpha - \beta$

لدينا: $2\alpha - \beta = 2ax-ay+5by \iff 2\alpha = 2ax-ay+5by+ay+2bx-by$

$$\iff 2\alpha = 2ax+2bx+4by$$

$$\iff \alpha = ax+bx+2by$$

إذن:

$$X \times M = \begin{pmatrix} 2\alpha-\beta & \beta \\ 5\beta & 2\alpha-\beta \end{pmatrix}$$

حيث $\alpha \in \mathbb{Z}$ و $\beta \in \mathbb{Z}$ ومنه فإن $X \times M \in F$

التمرين 36

نعتبر المجموعة:

$$E = \left\{ M_a = \begin{pmatrix} 2^a & 0 \\ a2^a & 2^a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{Z} \right\}$$

1) بين أن $(E,\times)$ زمرة تبادلية متشاكلة تقابليا مع $(\mathbb{Z},+)$.

2) بين أن $(\forall p \in \mathbb{Z})\ ;\ (M_a)^p = M_{ap}$

3) نعتبر a و b من $\mathbb{Z}$ ولتكن $F_{(a,b)} = \{(M_a)^p \times (M_b)^q / (p,q) \in \mathbb{Z}^2\}$

أ- بين أن $F_{(a,b)}$ زمرة جزئية من $(E,\times)$

ب- ليكن c من $\mathbb{Z}$ بين أن $M_c \in F_{(a,b)} \iff c$ يقسم $a \wedge b$

ج- استنتج أن $F_{(a,b)} = E \iff a \wedge b = 1$

Scanné avec CamScanner

الحل

1) نعتبر التطبيق :
$$f: \mathbb{Z} \to E$$
$$a \mapsto f(a) = M_a$$

لنبين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z};+)$ نحو $(E;\times)$.

حسب تعريف المجموعة E، لدينا : $(\forall A \in E) \quad (\exists a \in \mathbb{Z}) \quad : A=M_a=f(a)$

ومنه f تطبيق شمولي.

ليكن $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$ بحيث $f(a)=f(b)$، لدينا :

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\iff M_a = M_b \\ &\iff 2^a = 2^b \text{ و } a2^a=b2^b \\ &\iff 2^{a-b} = 1 \text{ و } a2^a=b2^b \\ &\iff a - b = 0 \text{ و } a2^a=b2^b \\ &\iff a = b \end{aligned}$$

ومنه f تطبيق تبايني

وبالتالي f تطبيق تقابلي، لدينا :

ليكن $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$

$$f(a+b) = M_{a+b} = \begin{pmatrix} 2^{a+b} & 0 \\ (a+b)\,2^{a+b} & 2^{a+b} \end{pmatrix}$$

و :
$$f(a)f(b) = M_aM_b = \begin{pmatrix} 2^a & 0 \\ a2^a & 2^a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^b & 0 \\ b2^b & 2^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{a+b} & 0 \\ (a+b)\,2^{a+b} & 2^{a+b} \end{pmatrix}$$

ومنه : $(\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2) \quad ; \quad f(a+b) = f(a)f(b)$

إذن f تشاكل تقابلي

وبما أن $(\mathbb{Z};+)$ زمرة تبادلية فإن $(E;\times)$ زمرة تبادلية

2) لنبين أن : $(M_a)^p = M_{ap} \quad (\forall p \in \mathbb{Z})$

لنبين بالترجع أن $(\forall p \in IN)\,(M_a)^p = M_{ap}$

لدينا $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ و $(M_a)^0=I$ ومنه $(M_a)^0=M_0$ أي الخاصية صحيحة من أجل $p=0$

ليكن $p \in IN$، نفترض أن $M_a^p = M_{pa}$ ونبين أن : $M_a^{p+1} = M_{(p+1)a}$

$$\begin{aligned} M_{(p+1)a} = f((p+1)a) &= f(pa + a) = f(pa)f(a) \\ &= M_{pa} \times M_a \\ &= M_a^p \times M_a^1 \\ &= M_a^{p+1} \end{aligned}$$

وبالتالي :
$$(\forall p \in IN) \; ; \quad M_a^p = M_{pa}$$

ليكن $p \in \mathbb{Z}^-$ ، لنبين أن $M_a^p = M_{pa}$

$$M_a^p = (M_a^{-1})^{-p} = \left(f(-a)\right)^{-p} = (M_{-a})^{-p} = M_{pa}$$

(بما أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z};+)$ نحو $(E;\times)$

فإن: $M_{-a} = M_a^{-1}$ أي $f(-a)=(f(a))^{-1}$)

3) $F_{(a,b)} = \left\{M_a^p \times M_b^q / (p,q) \in \mathbb{Z}^2\right\}$

أ) لدينا: $M_a^0 \times M_b^0 = I \times I = I$ ومنه $I \in F(a,b)$

(حيث: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ العنصر المحايد للزمرة $(E;\times)$)

إذن $F_{(a,b)} \neq \phi$

ليكن X وY عنصرين من $F_{(a,b)}$

لدينا: $\exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2 : X = M_a^p \times M_b^q$

و: $\exists (m,n) \in \mathbb{Z}^2 : Y = M_a^m \times M_b^n$

تذكر أنه: إذا كان $(E;\circ)$ زمرة تبادلية فإن مماثل $a \circ b$ هو $b' \circ a'$ أي $(a \circ b)' = b' \circ a'$

وبما أن $(E;\times)$ زمرة تبادلية فإن

$$XY^{-1} = (M_a^p \times M_b^q)(M_a^m \times M_b^n)^{-1}$$
$$= (M_a^p \times M_b^q)(M_b^{-n} \times M_a^{-m})$$
$$= M_a^{p-m} \times M_b^{q-n}$$

ومنه: $XY^{-1} \in F_{(a,b)}$

إذن $F_{(a,b)}$ زمرة جزئية للزمرة $(E;\times)$

ب) ليكن c من $\mathbb{Z}$

لنبين أن: $a \wedge b$ تقسم $c \iff M_c \in F_{(a,b)}$

$$M_c \in F_{(a,b)} \iff \exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2 M_c = M_a^p \times M_b^q$$
$$\iff \exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2 M_c = M_{pa} \times M_{qb}$$
$$\iff \exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2 M_c = M_{pa+qb}$$
$$\iff \exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2 c = pa + qb$$

(لأن: f تطبيق تبايني)

ليكن $d = a \wedge b$ لدينا: $\begin{cases} d/a \\ d/b \end{cases}$ ومنه $d/pa+qb$ إذن d/c

وبالتالي: $M_c \in F_{(a,b)} \Rightarrow (a \wedge b)/c$

عكسيا:

$(a \wedge b)/c \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}); c = k(a \wedge b)$

$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(\exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2); c = k(pa + qb)$

$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(\exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2); M_c = M_{k(pa+qb)}$

$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(\exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2); M_c = M^k_{pa+qb}$

$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(\exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2); M_c = (M_a^p \times M_b^q)^k$

$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(\exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2); M_c = M_a^{kp} \times M_b^{kq}$

$\Rightarrow M_c \in F_{(a,b)}$

وبالتالي $M_c \in F_{(a,b)} \Longleftrightarrow (a \wedge b)/c$

ج) لدينا: $a \wedge b = 1 \Longleftrightarrow \exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2 : pa + qb = 1$

$\Longleftrightarrow \exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2 : M_{pa+qb} = M_1$

$\Longleftrightarrow \exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2 : M_a^p \times M_b^q = M_1$

$E = F_{(a,b)} \Rightarrow M_1 \in F_{(a,b)}$

ومنه: $\Rightarrow \exists (p;q) \in \mathbb{Z}^2 : M_1 = M_a^p \times M_b^q$

$\Rightarrow a \wedge b = 1$

عكسيا: نفترض أن $a \wedge b = 1$ أي: $\exists (p;q) \in \mathbb{Z}^2 : M_1 = M_a^p \times M_b^q$

لدينا $F_{(a,b)} \subset E$ لنبين أن: $E \subset F_{(a,b)}$

ليكن M_c عنصراً من E لدينا: $M_c = M_1^c = (M_a^p \times M_b^q)^c = M_a^{pc} \times M_b^{qc}$

ومنه: $M_c \in F_{(a,b)}$

إذن: $E \subset F_{(a,b)}$ وبالتالي: $E = F_{(a,b)}$

التمرين 37

لكل $(a;b)$ من $\mathbb{Z}^2$، نعتبر المصفوفة $M_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}$.

في $\mathcal{M}_2(R)$ لتكن E مجموعة الآتية: $E = \left\{M_{(a;b)} / a^2 - 2b^2 = 1\right\}$

1) نضع: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$ تحقق أن A تنتمي إلى E.

2) أ- بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(R);\times)$ وأن القانون $\times$ تبادلي في E.

ب- بين أن جميع عناصر E تقبل مقلوبا في E بالنسبة لقانون التركيب الداخلي $\times$.

ج- بين أن $(E;\times)$ زمرة تبادلية.

3) نضع: $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$، ولكل n من IN: $A^{n+1} = A^n \times A$

نعتبر المجموعة: $G = \{A^n | n \in N\}$

أ– تحقق من أن: $G \subset E$

ب– لتكن H مجموعة معاملات مصفوفات G بالنسبة لعملية × في E.

بيّن أن: $H = \{B^n / n \in N\}$ حيث: $B = \begin{pmatrix} 3 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$

ج– بيّن أن: $G \cup H$ زمرة جزئية من $(E;\times)$.

الحل

1) لنتحقق من أن $A \in E$

لدينا: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$

و $E = \{M_{(a;b)} / a^2 - 2b^2 = 1\}$

مع $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}$; $(\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2)$

لدينا: $A=M(3,2)$

ولدينا: $3^2-2\times 2^2=9-8=1$ ومنه $A \in E$

2) أ– لنبين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(IR);\times)$.

ليكن $M(a,b)$ و$M(a',b')$ عنصرين من E لدينا:

$M(a',b') = \begin{pmatrix} a' & b'\sqrt{2} \\ b'\sqrt{2} & a' \end{pmatrix}$ و $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}$ ، حيث $a^2-2b^2=1$ و $a'^2-2b'^2=1$

$$M(a,b) \times M(a',b') = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b'\sqrt{2} \\ b'\sqrt{2} & a' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} aa' + 2bb' & (a'b + ab')\sqrt{2} \\ (a'b + ab')\sqrt{2} & aa' + 2bb' \end{pmatrix}$$
$$= M(aa' + 2bb'; a'b + ab')$$

لدينا: $a'b + ab' \in \mathbb{Z}$ و $aa' + 2bb' \in \mathbb{Z}$

ولدينا:

$$(aa' + 2bb')^2 - 2(a'b + b'a)^2 = a^2a'^2 + 4aa'bb' + 4b^2b'^2 - 2a'^2b^2 - 4aa'bb' - 2b'^2a'^2$$
$$= a'^2(a^2 - 2b^2) + 2b'^2(2b^2 - a^2)$$
$$= (a^2 - 2b^2) + (a'^2 - 2b'^2)$$
$$= 1 \times 1$$
$$= 1$$

وبالتالي: $M(a,b) \times M(a',b') \in E$

إذن: E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(IR);\times)$.

ولدينا: $a'b+ab'=ab'+a'b$ و $aa'+2bb'=a'a+2b'b$

ومنه: $M(a',b')\times M(a,b)=M(aa'+2bb';a'b+ab')$

$=M(a,b)\times M(a',b')$

إذن القانون × تبادلي في E.

ب) ليكن $M(a,b)$ عنصراً من E.

لدينا: $M(a;b)=\begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}$; $(\exists (a;b) \in \mathbb{Z}^2)$ و $a^2-2b^2=1$

بما أن: $\det M(a,b)=\begin{vmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{vmatrix}=a^2-2b^2=1\neq 0$

فإن $M(a,b)$ تقبل مقلوبا في $M_2(IR)$

ولدينا: $M^{-1}(a,b)=\begin{pmatrix} a & -b\sqrt{2} \\ -b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}=M(a;-b)$ و $(a;-b)\in ZI^2$

إذن: $M^{-1}(a,b)\in E$

وهذا يعني أن كل عنصر من E يقبل مقلوبا في E بالنسبة لقانون التركيب الداخلي ×.

ج) لدينا: $\begin{cases} I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=M(1,0) \\ 1^2-2\times 0^2=1 \end{cases}$ ومنه: $I\in E$

إذن: $E\neq \phi$

لدينا حسب السؤال 2) أ) E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(IR);\times)$ وأن القانون × تبادلي في E.

وبما أن القانون × تجميعي في $(\mathcal{M}_2(IR);\times)$ فإنه كذلك في $(E,\times)$

ولدينا: $I\in E$ وكل عنصر من E يقبل مقلوبا بالنسبة للقانون × إذن $(E,\times)$ زمرة تبادلية.

3) لدينا: $A^0=I$ و $A^{n+1}=A^n\times A$; $(\forall n\in IN)$ و $G=\{A^n/n\in IN\}$

أ) لنتحقق من أن: $G\subset E$

لدينا حسب 1) $A\in E$، وبما أن: $(E,\times)$ زمرة تبادلية فإن $A^n\in E$

لكل n من IN (بالبرهان بالترجع: لدينا $\left.\begin{matrix} A^n\in E \\ A\in E \end{matrix}\right\}$ ومنه $(A^n\times A=A^{n+1}\in E$

وبما أن $A^n\in E$; $(\forall n\in IN)$

فإن: $G\subset E$

ب) H هي مجموعة مماثلات مصفوفات G بالنسبة للقانون × في E.

لدينا: $B=\begin{pmatrix} 2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}=A^{-1}$

ليكن X عنصرا من H، لدينا: $Y^{-1}=X$: $(\exists Y \in A)$

وبما أن: $Y \in A \Longleftrightarrow ((\exists n \in IN); Y = A^n)$

فإن: $X = (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ (لأن: $(E,\times)$ زمرة تبادلية) إذن: $X=B^n$

وهذا يعني أن $X \in \{B^n / n \in IN\}$

عكسيا لدينا: $\{B^n / n \in IN\} \subset H$ (لأن: $A^{-1}=B$ و $A \in G$ ومنه $B^n=(A^n)^{-1}$)

وبالتالي: $H = \{B^n / n \in IN\}$

ج) لنبين أن $G \cup H$ زمرة جزئية للزمرة $(E,\times)$

لدينا: $I \in G$ ومنه $I \in G \cup H$ إذن $G \cup H \neq \phi$

ليكن X وY عنصرين من $G \cup H$

الحالة (1) إذا كان $(X;Y) \in G^2$ فإن: $(\exists n \in IN): X = A^n$

$(\exists p \in IN): Y = A^p$

ومنه: $XY^{-1}=A^n(A^p)^{-1}$

$=A^{n-p}$

إذن: $XY^{-1} \in G \cup H$

الحالة (2) إذا كان $(X;Y) \in H^2$ فإن: $(\exists n \in IN) X = B^n$

$(\exists p \in IN) Y = B^p$

ومنه: $XY^{-1}=B^n \times B^{-p}$

$=B^{n-p}$

إذن $XY^{-1} \in G \cup H$

الحالة (3) إذا كان $X \in G$ و $Y \in H$ ، لدينا: $(\exists n \in IN): X = A^n$ و $\exists p \in IN: Y = B^p$

ومنه: $XY^{-1}=A^nA^p=A^{n+p}$ (لأن: $B^{-1}=A$)

ومنه: $XY^{-1} \in G \cup H$

الحالة (4) إذا كان $X \in H$ و $Y \in G$

فإن: $(\exists n \in IN): Y = A^n$ و $(\exists p \in IN): (X = B^p)$

$XY^{-1}=B^p \times B^n=B^{n+p}$ (لأن: $A^{-1}=B$)

ومنه: $XY^{-1} \in G \cup H$

إذن في جميع الحالات: $(\forall X \in G \cup H)(\forall Y \in G \cup H) XY^{-1} \in G \cup H$

و $G \cup H \neq \phi$

وبالتالي $(G \cup H; \times)$ زمرة جزئية من $(E,\times)$.

Scanné avec CamScanner

التمرين 38

نعتبر المجموعة التالية: $E = \left\{T_\alpha \in \mathcal{M}_2(IR) / T_\alpha = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ \alpha e^\alpha & e^\alpha \end{pmatrix}, \alpha \in IR\right\}$

1. بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(IR),\times)$.

2. نعتبر التطبيق f من IR نحو E المعرف كمايلي: $(\forall\alpha \in IR); f(\alpha) = T_\alpha$

أ) بين أن f تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ نحو $(E,\times)$، ثم استنتج أن $(E,\times)$ زمرة تبادلية.

ب) بين أن كل مصفوفة T_α من E تقبل مقلوبا T_α^{-1} ثم حدد T_α^{-1}.

3. نضع: $F = \{T_\alpha \in E / \alpha \in \mathbb{Z}\}$

بين أن $(F,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(E,\times)$.

الحل

1. لنبين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(IR),\times)$.

ليكن M وN عنصرين من E، لدينا:

$$M \in E \Leftrightarrow (\exists\alpha \in IR) / M = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ \alpha e^\alpha & e^\alpha \end{pmatrix}$$

و

$$N \in E \Leftrightarrow (\exists\beta \in IR) / N = \begin{pmatrix} e^\beta & 0 \\ \beta e^\beta & e^\beta \end{pmatrix}$$

ومنه فإن:

$$M \times N = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ \alpha e^\alpha & e^\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^\beta & 0 \\ \beta e^\beta & e^\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^\alpha e^\beta & 0 \\ \alpha e^\alpha e^\beta + \beta e^\alpha e^\beta & e^\alpha e^\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\alpha+\beta} & 0 \\ (\alpha+\beta) e^{\alpha+\beta} & e^{\alpha+\beta} \end{pmatrix}$$

وبما أن $\alpha + \beta \in IR$ فإن $M \times N \in E$

إذن: $(\forall M,N \in E); M \times N \in E$

يعني أن $(E,\times)$ جزء مستقر من $(M_2(IR),\times)$.

2. أ) لنبين أن f تشاكل تقابلي

ليكن M وN عنصرين من E، حيث $M = T_\alpha$ و$N = T_\beta$ مع α وβ من IR.

لدينا $f(\alpha) = M$ و $f(\beta) = N$ و $f(\alpha + \beta) = T_{\alpha+\beta}$

وحسب السؤال السابق لدينا $M \times N = T_{\alpha+\beta}$ ومنه فإن $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) \times f(\beta)$

إذن $(\forall\alpha,\beta \in IR); f(\alpha + \beta) = f(\alpha) \times f(\beta)$؛ يعني أن f تشاكل من $(IR,+)$ نحو $(E,\times)$

• لدينا $(\forall M \in E); (\exists\alpha \in IR) / M = T_\alpha$

Scanné avec CamScanner

أي $M = f(\alpha)/(\exists\alpha \in IR);(\forall M \in E)$ ؛ يعني أن f تطبيق شمولي.

• ليكن α وβ عنصرين من IR بحيث: $f(\alpha) = f(\beta)$

لدينا: $f(\alpha) = f(\beta) \Leftrightarrow T_\alpha = T_\beta$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ \alpha e^\alpha & e^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\beta & 0 \\ \beta e^\beta & e^\beta \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow e^\alpha = e^\beta \text{ و } \alpha e^\alpha = \beta e^\beta$$

$$\Leftrightarrow e^\alpha = e^\beta \text{ و } \alpha e^\alpha = \beta e^\beta$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta$$

يعني أن f تطبيق تبايني

وبالتالي فإن f تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ نحو $(E,\times)$

الاستنتاج:

لدينا f تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ نحو $(E,\times)$ و$(IR,+)$ زمرة تبادلية إذن $(E,\times)$ زمرة تبادلية.

ب) • ليكن T_α عنصرا من IR.

لدينا: $\det T_\alpha = \begin{vmatrix} e^\alpha & 0 \\ \alpha e^\alpha & e^\alpha \end{vmatrix}$

$$= e^{2\alpha}$$

وبما أن: $e^{2\alpha} > 0$ فإن $\det T_\alpha \neq 0$

ومنه فإن: T_α تقبل مقلوبا T_α^{-1} في $(\mathcal{M}_2(IR),\times)$.

ولدينـا $-\alpha$ هـو مماثـل α فـي $(IR,+)$ وf تشـاكل تقابلـي مـن $(IR,+)$ نحـو $(E,\times)$ ومنـه فـإن

$$T_\alpha^{-1} = (f(\alpha))^{-1} = f(-\alpha) = T_{-\alpha}$$

أي: $T_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ -\alpha e^{-\alpha} & e^{-\alpha} \end{pmatrix}$ ولدينا: $T_\alpha^{-1} \in E$

3. لنبين أن $(F,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(E,\times)$.

• $F \subset E$ و$F \neq \phi$ لأن $T_0 = I_2 \in F$

• ليكن T_α وT_β عنصرين من F. أي $\alpha \in \mathbb{Z}$ و $\beta \in \mathbb{Z}$

لدينا $T_{-\beta}$ هو مقلوب T_β في $(E,\times)$.

ومنه فإن:

$$T_\alpha \times T_\beta^{-1} = T_\alpha \times T_{-\beta}$$
$$= f(\alpha) \times f(-\beta) = f(\alpha - \beta) = T_{\alpha-\beta}$$

وبما أن $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}$ فإن $T_\alpha \times T_\beta^{-1} \in F$

إذن $(\forall M,N \in F); M \times N^{-1} \in F$

وبالتالي فإن $(F,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(E,\times)$.

Scanné avec CamScanner

التمرين 39

ليكن I و J عنصرين من $\mathcal{M}_2(IR)$ بحيث: $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix}0&p\\1&0\end{pmatrix}$

نعتبر المجموعة: $E=\left\{M(x;y)=\begin{pmatrix}x&py\\y&x\end{pmatrix}/(x;y)\in IR^2\right\}$، حيث p عدد حقيقي.

1. تحقق من أن $J^2=pI$، ثم بين أن: $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

2. نفترض أن $p<0$

نعتبر التطبيق φ من E^* نحو $\mathbb{C}^*$ المعرف بمايلي:

$(\forall M(x;y)\in E^*);\varphi(M(x;y))=x+iy\sqrt{-p}$

أ) بين أن φ تشاكل تقابلي من $(E^*;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$

ب) ما بنية $(E^*;\times)$؟

ج) انشر $\left(\sqrt{-p}+i\right)^2$، ثم حدد حلول المعادلة: $X\in E^*;X^2=(-p-1)I+2J$

الحل

1. • لنتحقق من أن: $J^2=pI$

لدينا: $J^2=\begin{pmatrix}0&p\\1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&p\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p&0\\0&p\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

ومنه فإن $J^2=pI$

• لنبين أن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

لدينا: زمرة $(\mathcal{M}_2(IR),+)$ و $E\subset\mathcal{M}_2(IR)$ زمرة تبادلية ومنه يكفي أن نبين أن $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(\mathcal{M}_2(IR),+)$.

لدينا: $E\neq\phi$ لأن $I\in E$

ليكن $M(x;y)$ و $M(a;b)$ عنصرين من E، لدينا:

$$M(x;y)+(-M(a;b))=\begin{pmatrix}x&py\\y&x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-a&-pb\\-b&-a\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x-a&p(y-b)\\y-b&x-a\end{pmatrix}=M(x-a;y-b)$$

إذن: $M(x;y)+(-M(a;b))\in E$

وبالتالي $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(\mathcal{M}_2(IR),+)$.

ومنه $(E;+)$ زمرة تبادلية.

- لنبين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(IR),\times)$.

لتكن $M(x;y)$ و $M(a;b)$ عنصرين من E، لدينا:

$M(a;b)=aI+bJ$ و $M(x;y)=xI+yJ$

ومنه : $M(x;y)\times M(a;b)=(xI+yJ)(aI+bJ)$

$=xaI+xbJ+yaJ+ybJ^2$

$=xaI+(xb+ya)J+ybpI$

$=(xa+ybp)I+(xb+ya)J$

$=M(xa+ybp;xb+ya)$

إذن: $M(x;y)\times M(a,b)\in E$

وبالتالي E جزء مستقر من $(\mathscr{M}_2(IR),\times)$.

لدينا E جزء مستقر من $(\mathscr{M}_2(IR),\times)$ والقانون $\times$ تجميعي وتوزيعي بالنسبة للقانون $+$ في $\mathscr{M}_2(IR)$ ومنه فإ
القانون $\times$ تجميعي وتوزيعي بالنسبة للقانون $+$ في E.

I هو العنصر المحايد في $(\mathscr{M}_2(IR),\times)$ و $I\in E$ ، ومنه فإن I هو العنصر المحايد في $(E,\times)$.

لدينا $(\forall M,N\in E);M\times N=N\times M$

يعني أن القانون $\times$ تبادلي في E.

وبالتالي فإن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

2. أ) •لنبين أن φ تشاكل من $(E^*;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$

ليكن $M(x;y)$ و $M(a;b)$ عنصرين من E^* ، لدينا: $M(x;y)\times M(a;b)=M(xa+ybp;xb+ya)$

Scanné avec CamScanner

إذن φ تطبيق تبايني.

ليكن $z=x+iy$ عنصرا من $\mathbb{C}^{\bullet}$، هل يوجد $M(a;b)$ من E بحيث $z = \varphi(M(a;b))$؟

لدينا: $\varphi(M(a;b)) = z \iff a + ib\sqrt{-p} = x + iy$

$$\iff \begin{cases} a = x \\ b\sqrt{-p} = x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = x \\ b = \dfrac{y}{\sqrt{-p}} \end{cases}$$

ومنه: $M(a,b) = M\left(x;\dfrac{y}{\sqrt{-p}}\right)$

إذن φ تطبيق شمولي وبالتالي φ تشاكل تقابلي من $(E^{\bullet};\times)$ نحو $(\mathbb{C}^{\bullet};\times)$

ب) بنية $(E^{\bullet};\times)$

لدينا $(E^{\bullet};\times)$ و$(\mathbb{C}^{\bullet};\times)$ متشاكلتان تقابليا و $(\mathbb{C}^{\bullet};\times)$ زمرة تبادلية ومنه فإن زمرة تبادلية $(E^{\bullet};\times)$.

ج) لدينا: $\left(\sqrt{-p} + i\right)^2 = - p - 1 + 2i\sqrt{-p}$

• لنحل في $E^{\bullet}$ المعادلة: $X^2=(-p-1)I+2J$

ليكن $M(x;y)$ عنصرا من $E^{\bullet}$، لدينا:

$$X^2 = (- p - 1)I + 2J \iff \left(M(x;y)\right)^2 = M(- p - 1; 2)$$

$$\iff \varphi\left((M(x;y))^2\right) = \varphi\left(M(- p - 1; 2)\right)$$

$$\iff \left(\varphi(M(x;y))\right)^2 = \varphi\left(M(- p - 1; + 2)\right)$$

$$\iff \left(x + iy\sqrt{-p}\right)^2 = - p - 1 + 2i\sqrt{-p}$$

$$\iff \left(x + iy\sqrt{-p}\right)^2 = \left(\sqrt{-p} + i\right)^2$$

$$\iff x + iy\sqrt{-p} = \sqrt{-p} + i \text{ أو } x + iy\sqrt{-p} = - \sqrt{-p} - i$$

$$\iff \begin{cases} x = \sqrt{-p} \\ y\sqrt{-p} = 1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = - \sqrt{-p} \\ y\sqrt{-p} = - 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \sqrt{-p} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{-p}} \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = - \sqrt{-p} \\ y = \dfrac{-1}{\sqrt{-p}} \end{cases}$$

إذن: $S = \left\{M\left(\sqrt{-p};\dfrac{1}{\sqrt{-p}}\right);M\left(-\sqrt{-p};\dfrac{-1}{\sqrt{-p}}\right)\right\}$

التمرين 40

نضع $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ؛ $\theta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

لكل $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ نعرف $T(A)=a+d$ و $D(A)=ad-bc$ وَ $A \neq \theta_2$

ونعتبر المجموعات :

$$E_1 = \{A \in \mathcal{M}_2(IR) / A^2 = I_2\}$$
$$E_2 = \{A \in \mathcal{M}_2(IR) / |D(A)| = 1\}$$
$$E_3 = \{A \in \mathcal{M}_2(IR) / A = \alpha I_2; \alpha \in IR\}$$

1) بين أن $(\forall A, B \in \mathcal{M}_2(IR)): D(AB) = D(A).D(B)$

2) بين أن $(\forall A \in \mathcal{M}_2(IR)): A^2 = T(A)A - D(A).I_2$

تطبيق حدد A_0^{-1} حيث $A_0 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

3) بين أن $A \in E_1 \Rightarrow A \in E_2$

هل العكس صحيح؟

4) ليكن $A \in \mathcal{M}_2(IR)$ و $A \notin E_3$: بين أن $(A \in E_1 \Longleftrightarrow T(A) = 0$ و $D(A)=-1)$

5) باعتبار $A_0 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ و $B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ ، بين أن $(E_1;\times)$ ليست زمرة.

6) حدد $E_1 \cap E_3$

7) بين أن $(E_2;\times)$ زمرة هل هي تبادلية؟

8) $\mathcal{H}=\left\{f \in F(IR, IR) / \forall x \in IR - \left\{\frac{-d}{b}\right\} f(x) = \frac{ax + c}{bx + d} \;/\; (a,b,c,d) \in IR^4 \text{ و } ad - bc \neq 0\right\}$

ليكن التطبيق :

$$\varphi: E_2 \to \mathcal{H}$$
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto f$$

بين أن φ تشاكل شمولي من $(E_2;\times)$ نحو $(\mathcal{H},\circ)$

ثم استنتج بنية $(\mathcal{H},\circ)$.

الحل

1) لنبين أن : $(\forall (A,B) \in \mathcal{M}_2(IR))\;;\; D(AB) = D(A)D(B)$

ليكن $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ عنصرين من $\mathcal{M}_2(IR)$

لدينا : $AB = \begin{pmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{pmatrix}$

ومنه :

$$D(AB)=(aa'+cb')(bc'+dd')-(ac'+cd')(ba'+db')$$
$$=ada'd'+bcb'c'-bca'd'-adb'c'$$

$$=ada'd'-adb'c'+bcb'c'-bca'd'$$
$$=ad(a'd'-b'c')-bc(a'd'-b'c')$$
$$=(ad-bc)(a'd'-b'c')$$
$$=D(A)D(B)$$

2) لنبين أن: $(\forall A \in \mathcal{M}_2(IR))\ ;\ A^2 = T(A)A - D(A)I_2$

ليكن $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ عنصرا من $\mathcal{M}_2(IR)$

لدينا: $A^2 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ac+cd \\ ab+bd & bc+d^2 \end{pmatrix}$

و: $T(A)A - D(A)I_2 = T(A)\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} - D(A)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aT(A) & cT(A) \\ bT(A) & dT(A) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} D(A) & 0 \\ 0 & D(A) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a^2+ad & ac+cd \\ ab+bd & d^2+ad \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ac+cd \\ ab+bd & bc+d^2 \end{pmatrix}$$
$$= A^2$$

تطبيق لنحدد A_0^{-1} حيث $A_0 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

لدينا: $T(A_0)=0$ و $D(A_0)=-1$

ومنه: $A_0^2 = T(A_0)A_0 - D(A_0)I_2$
$= I_2$

وبالتالي: $A_0^{-1} = A_0$

3) لنبين أن: $A \in E_1 \Rightarrow A \in E_2$

ليكن A من المجموعة E_1، لدينا $A^2=I_2$

حسب السؤال (1): $D(A^2)=D(A)D(A)=(D(A))^2$

وبما أن: $A^2=I_2$ فإن $D(A^2)=1$

ومنه: $(D(A))^2=1$ وبالتالي $|D(A)| = 1$ ؛ إذن: $A \in E_2$

وهذا يعني أن: $(\forall A \in E_1); A \in E_2$ ؛ ومنه: $E_1 \subset E_2$

عكسيا: نعتبر $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

لدينا: $D(A)=1$ ومنه $A \in E_2$

و $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 25 & 14 \end{pmatrix}$ أي $A^2 \neq I_2$ ؛ وهذا يعني أن: $(\exists A \in E_2)/A \notin E_1$

ومنه عكس الاستلزام $(A \in E_1 \Rightarrow A \in E_2)$ غير صحيح.

4) ليكن $A \in \mathcal{M}_2(IR)$ و $A \notin E_3$

لنبين أن: $A \in E_1 \Leftrightarrow (T(A) = 0$ و $D(A)=1)$

$$\begin{aligned} A \in E_1 &\iff A^2 = I_2 \\ &\iff T(A)A - D(A)I_2 = I_2 \\ &\iff T(A)A = (1 + D(A))I_2 \end{aligned}$$

بما أن $A \notin E_3$ فإن $A \neq \alpha I$; $(\forall \alpha \in IR)$

ومنه: $T(A)A = (1 + D(A))I_2 \Rightarrow \begin{cases} T(A) = 0 \\ D(A) = -1 \end{cases}$

(لو كان $T(A) \neq 0$ لكان $A = \left(\frac{1 + D(A)}{T(A)}\right)I_2$ ؛ أي $A \in E_3$ وهذا تناقض)

إذن: $A \in E_1 \Rightarrow T(A) = 0$ و $D(A)=-1$

عكسيا إذا كان: $T(A)=0$ و $D(A)=-1$ فإن

$$A^2=T(A)A-D(A)I_2=0+I_2=I_2$$

ومنه: $A \in E_1$

وبالتالي $A \in E_1 \iff T(A) = 0$ و $D(A)=-1$

5) لدينا $A_0 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ و $B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

بما أن $T(A_0)=0$ و $D(A_0)=-1$ فإن $A_0 \in E_1$ ؛ وبما أن $T(B_0)=0$ و $D(B_0)=-1$ فإن $B_0 \in E_1$

ولدينا $A_0 \times B_0 = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ ومنه: $D(A_0 \times B_0)=1$ و $T(A_0 \times B_0) = 13 \neq 0$

إذن $A_0 \times B_0 \notin E_1$

وهذا يعني أن E_1 جزء من $\mathcal{M}_2(IR)$ غير مستقر بالنسبة للقانون × إذن $(E_1;\times)$ ليست زمرة.

6) لنحدد $E_1 \cap E_3$

$$\begin{aligned} A \in E_1 \cap E_3 &\iff A \in E_1 \text{ و } A \in E_3 \\ &\iff A^2 = I_2 \text{ و } A = \alpha I_2 (\alpha \in IR) \\ &\iff \alpha^2 I_2 = I_2 \text{ و } A = \alpha I_2 \\ &\iff \alpha^2 = 1 \text{ و } A = \alpha I_2 \\ &\iff A = I_2 \text{ أو } A = -I_2 \end{aligned}$$

ومنه: $E_1 \cap E_3 = \{I_2; -I_2\}$

7) لنبين أن: $(E_2;\times)$ زمرة

لدينا: $E_2 \subset \mathcal{M}_2(IR)$

ليكن A و B عنصرين من E_2

لدينا:

$$\begin{aligned} |D(AB)| &= |D(A)D(B)| \\ &= |D(A)||D(B)| \\ &= 1 \times 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ومنه: $A \times B \in E_2$

إذن: E_2 جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(IR);\times)$

وبما أن القانون $\times$ تجميعي في $M_2(IR)$ فإنه كذلك في E_2.

• لدينا: $|D(I_2)| = 1$ ومنه: $I_2 \in E_2$

وبما أن: $A \times I_2 = I_2 \times A = A \; ; \; (\forall A \in \mathcal{M}_2(IR))$

فإن $A \times I_2 = I_2 \times A = A \; ; \; (\forall A \in E_2)$

ومنه I_2 هو العنصر المحايد للقانون $\times$ في E_2

• ليكن $A \in E_2$ لدينا $|D(A)| = 1$

إذن $D(A) \neq 0$ وبالتالي A يقبل مقلوبا في $\mathcal{M}_2(IR)$

لدينا: $1=D(I_2)=D(A\times A^{-1})=D(A)\times D(A^{-1})$

ومنه: $1 = |D(A)||D(A^{-1})|$

بما أن $|D(A)| = 1$ فإن $|D(A^{-1})| = 1$

وبالتالي: $A^{-1} \in E_2$؛ وهذا يعني أن كل عنصر A من E_2 له مقلوب في E_2.

وبالتالي $(E_2;\times)$ زمرة

• لدينا: $|D(A_0)| = 1$ و $|D(B_0)| = 1$

ومنه $A_0 \in E_2$ و $B_0 \in E_2$

لكن $B_0A_0 \neq A_0B_0$ (تحقق من ذلك)

وبالتالي القانون $\times$ غير تبادلي في E_2.

8) $\varphi: E_2 \to \mathcal{H}$

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \to f$$

حيث $f(x) = \dfrac{ax+c}{bx+d} \; ; \; \left(\forall x \in IR - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}\right)$ و $ad - bc \neq 0$

• ليكن $f \in \mathcal{H}$ إذن: يوجد (a,b,c,d) من IR^4 بحيث:

$f(x) = \dfrac{ax+c}{bx+d} \; ; \; \left(\forall x \in IR - \left\{\dfrac{-b}{c}\right\}\right)$ و $ad - bc \neq 0$

إذن باعتبار $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ يكون لدينا $\varphi(A) = f$

ومنه φ تطبيق شمولي

• لنبين أن φ تشاكل من $(E_2;\times)$ نحو $(\mathcal{H};\circ)$

ليكن A و B عنصرين من E_2 بحيث $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$

بما أن $|D(A)| = 1$ و $|D(B)| = 1$ فإن $ad - bc \neq 0$ و $a'd' - b'c' \neq 0$

ولدينا : $AB = \begin{pmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{pmatrix}$ ومنه بوضع $\varphi(A) = f$ و $\varphi(B) = g$ و $\varphi(AB) = h$

يكون لدينا :

$$h(x)\frac{(aa' + cb')x + ac' + cd'}{(ba' + db')x + bc' + dd'} \; ; \; \left(\forall x \in IR - \left\{-\frac{bc' + dd'}{ac' + cd'}\right\}\right)$$

لدينا :

$$f(x) = \frac{ax + c}{bx + d} \; ; \; \left(\forall x \in IR - \left\{-\frac{d}{c}\right\}\right)$$

$$g(x) = \frac{a'x + c'}{b'x + d'} \; ; \; \left(\forall x \in IR - \left\{-\frac{d'}{c'}\right\}\right)$$

لدينا : $\varphi(A) o \varphi(B) = fog$

ولكل $x \in D_{fog}$ لدينا :

$$(fog)(x) = \frac{a\left(\frac{a'x + c'}{b'x + d'}\right) + c}{b\left(\frac{a'x + c'}{b'x + d'}\right) + d}$$

$$= \frac{aa'x + ac' + cb'x + cd'}{ba'x + bc' + db'x + dd'}$$

$$= \frac{(aa' + cb')x + ac' + cd'}{(ba' + db')x + bc' + dd'}$$

$$= h(x)$$

ومنه : $\varphi(A) o \varphi(B) = \varphi(AB)$

إذن φ تشاكل من $(E_2;\times)$ نحو $(\mathscr{H};o)$

وبما أن φ شمولي فإن $\varphi(E_2) = \mathscr{H}$

إذن: $(\mathscr{H};o)$ زمرة

التمرين 41

لتكن المجموعة A المعرفة بمايلي :

$$A = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / x \in IR \right\}$$

نعتبر التطبيق f بحيث : $f: IR \to A$

$$x \mapsto M(x)$$

1) بين أن f تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ إلى $(A,\times)$.

2) استنتج بنية $(A,\times)$

3) ليكن $M(x)$ و $M(y)$ عنصرين من A. احسب $M^{-1}(x)\times M^{-1}(y)$

Scanné avec CamScanner

الحل

1) لنبين أن: f تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ نحو $(A,\times)$.

• ليكن $M(x)$ و$M(y)$ عنصرين من A

لدينا:

$$M(x)\times M(y)=\begin{pmatrix}1&0&x\\-x&1&-\frac{x^2}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&y\\-y&1&-\frac{y^2}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&x+y\\-x-y&1&-xy-\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&(x+y)\\-(x+y)&1&-\frac{(x+y)^2}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=M(x+y)$$

ليكن $(x,y)\in IR^2$ لدينا : $f(x+y)=M(x+y)=M(x)M(y)=f(x)f(y)$

ومنه f تشاكل من $(IR,+)$ نحو $(A,\times)$.

• ليكن $(x,y)\in IR^2$ لدينا :

$$f(x)=f(y)\iff M(x)=M(y)$$

$$\iff -x=-y \text{ و } x=y \text{ و } \frac{-x^2}{2}=\frac{-y^2}{2}$$

$$\iff x=y$$

ومنه f تطبيق تبايني

وحسب تعريف المجموعة A لدينا :

$$(\forall A\in A)\ \ (\exists x\in IR):\ \ A=M(x)=f(x)$$

ومنه : f تطبيق شمولي، وبالتالي : f تقابل

وبما أن f تشاكل من $(IR,+)$ نحو $(A,\times)$.

فإن f تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ نحو $(A,\times)$.

2) لنستنتج بنية من $(A,\times)$.

بما أن f تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ نحو $(A,\times)$، و$(IR,+)$ زمرة تبادلية فإن $(A,\times)$ زمرة تبادلية.

3) لنحسب $M^{-1}(x)\times M^{-1}(y)$

بما أن f تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ نحو $(A,\times)$؛

فإن : $M^{-1}(x)\times M^{-1}(y)=(f(x))^{-1}\times(f(y))^{-1}$

$=f(-x)\times f(-y)$

$=f(-x-y)=M(-x-y)$