امتحان وطني تجريبي لنيل شهادة البكالوريا سنة 2018 مدة الإنجاز : 4 ساعات	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني	مادة الرياضيات شعبة العلوم الرياضية أ و ب المعامل: 9

Exercice 1 (2,5 points)

Soit *x* et *y* deux réels on pose $x \mathrm{T} y = xy - 3(x+y) + 12$

1) a) Démontrer que la loi T et commutative et associative et admet un élément neutre dans $\mathbb{R}$. (0,5 pt)

   b) Déterminer les éléments symétriques dans $(\mathbb{R}, \mathrm{T})$. (0,5 pt)

2) posons $G = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

   a) Démontrer que G est une partie stable dans $(\mathbb{R}, \mathrm{T})$. (0,25 pt)

   b) Démontrer que (G, T) est un groupe commutative . (0,5 pt)

3) On considère l'application φ de G vers $\mathbb{R}^*$ définie par $\varphi(x) = x - 3$

   Démontrer que φ est une morphisme bijective de (G, T) vers $(\mathbb{R}^*, \times)$. (0,75 pt)

Exercice 2 (3 points)

1. a. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ? Justifier. (0,25 pt)

   b. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 ? Justifier. (0,25 pt)

   c. En déduire que $6^{40} \equiv 1[11]$ et que $6^{40} \equiv 1[5]$. (0,25 pt)

   d. Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55. (0,25 pt)

2. Dans cette question *x* et *y* désignent des entiers relatifs.

   a. Montrer que l'équation (E) $65x - 40y = 1$ n'a pas de solution. (0,25 pt)

   b. Montrer que l'équation (E') $17x - 40y = 1$ admet au moins une solution. (0,25 pt)

   c. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E'). (0,5 pt)

   d. Résoudre l'équation (E'). (0,25 pt)

   e- En déduire qu'il existe un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1[40]$. (0,25 pt)

3. Pour tout entier naturel *a*, démontrer que si $a^{17} \equiv b[55]$ et si $a^{40} \equiv 1[55]$, alors $b^{33} \equiv a[55]$. (0,5 pt)

Exercice 3 (3 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1) Calculer $(1+3i)^2$ (0,25pt)

.

2) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombre complexes l'équation (E) :$z^2 - (1-i)z - 2i + 2 = 0$. (0,75 pt)

3) Soit $P(z) = z^3 + (-5+i)z^2 + (6-6i)z + 8i - 8$

   a)Vérifier que 4 est une solution de P. (0,25 pt)

   b) Vérifier que $P(z) = (z-4)(z^2 - (1-i)z - 2i + 2)$. (0,25 pt)

   c)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation$P(z) = 0$. (0,25 pt)

4) Dans Le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives

$z_A = 4$ et $z_B = 1 + i$ *et* $z_C = -2i$

   a) Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle. (0,75 pt)

   b) Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC est un carré. (0,5 pt)

Exercice 4 (11,5 points)

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2 on considère la fonction f_n définie sur]0 ; +∞ [par $f_n(x) = \dfrac{1+n\ln x}{x^2}$.

Partie A

I. Etude des fonctions f_n

1. Calculer $f_n'(x)$ et montrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur est $n-2-2n\ln x$. (0,5pt)

2. Résoudre l'équation $f_n'(x)=0$. Etudier le signe de $f_n'(x)$. (0,5 pt)

3. Déterminer les limites de f_n en $+\infty$ et en 0. (0,5 pt)

4. Etablir le tableau de variation de f_n et calculer sa valeur maximale en fonction de n. (0,5 pt)

II. Représentation graphique de quelques fonctions f_n.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ d'unité graphique 5 cm. On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans ce repère.

1. Tracer (C_2) et (C_3). (2 pts)

2. Calculer $f_{n+1}(x)-f_n(x)$. Cette différence est-elle dépendante de l'entier n. (0,25 pt)

3. Expliquer comment il est possible de construire la courbe de (C_4) à l'aide de (C_2) et (C_3). (0,5 pt)

4. Tracer (C_4). (1 pt)

Partie B : Calculs d'aires

1. Calculer à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $I=\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$. (0,5 pt)

2. En déduire l'aire en unités d'aire du domaine plan limité par les courbes (C_n) et (C_{n+1}) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. (0,25 pt)

3. On note A_n l'aire en unités d'aire du domaine plan limité par la courbe (C_n), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. Calculer A_2. Déterminer la nature de la suite (A_n) en précisant l'interprétation géométrique de sa raison. Exprimer A_n en fonction de n. (1 pt)

Partie C : Etude sur l'intervalle]1 ; +∞ [de l'équation $f_n(x)=1$

Dans toute la suite on prendra $n \geq 3$.

1. Vérifier que pour tout n, $e^{\frac{n-2}{2n}} > 1$ et $f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) > 1$ et en déduire que l'équation $f_n(x)=1$ n'a pas de solution sur l'intervalle $\left]1\,;e^{\frac{n-2}{2n}}\right[$. (1 pt)

2. On pose pour $t \geq 1$, $\varphi(t)=\dfrac{\ln t}{t}$. Etudier les variations de φ. (0,5 pt)

En déduire que pour tout t appartenant à]1 ; +∞ [, $\varphi(t) \leq \dfrac{1}{e}$, puis que pour tout $n \geq 3$, $f_n(n) < 1$. (0,5 pt)

3. Montrer que l'équation $f_n(x)=1$ a exactement une solution α_n sur $\left]e^{\frac{n-2}{2n}}, n\right[$. (0,5 pt)

4. Combien l'équation $f_n(x)=1$ a-t-elle de solutions sur]0 ; +∞ [? (0,5 pt)

5. Calculer $f_n\left(\sqrt{n}\right)$ et montrer que pour tout $n \geq e^2$, $f_n\left(\sqrt{n}\right) > 1$. (0,5 pt)

6. En déduire que pour $n \geq 8$ on a $\sqrt{n} < \alpha_n < n$ et donner la limite de la suite (α_n). (0,5 pt)