SÉRIE D'EXERCICES N°8 – (GROUPES + MORPHISMES + MATRICES)		
LYCÉE MOHAMMED ZERKTOUNI	2ème BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES	**Prof : Amine SOUHIR**

Exercice 1 :

On définit sur $\mathbb{R}$ la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\left(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\right): x*y = x^2y^2+x+y$$

1. Montrer que la loi $*$ est commutative dans $\mathbb{R}$.

2. La loi $*$ est-elle associative dans $\mathbb{R}$?

3. Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre e dans $\mathbb{R}$ à déterminer.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $(E_1): 1*x=0$ et $(E_2): 1*x=1$.

5. Déterminer l'ensemble des éléments symétrisables par la loi $*$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :

On considère l'ensemble $E=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, et pour tout $(x,y)\in E$ on pose : $x*y=x+y-xy\sqrt{2}$.

1. Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans E.

2. Montrer que $(E,*)$ est un groupe commutatif.

Exercice 3 :

On considère l'ensemble $E=\left\{(x,y)\in\mathbb{Z} \,/\, x^2-2y^2=1\right\}$.

Pour tout $(x,y)\in E$, $(x',y')\in E$ on pose : $(x,y)\top(x',y')=(xx'+2yy', xy'+x'y)$.

1. Montrer que $\top$ est une loi de composition interne dans E.

2. Montrer que $(1,0)$ est l'élément neutre pour $(E,\top)$.

3. Montrer que $\top$ est associative dans E.

4. Déterminer l'ensemble des éléments symétrisables par la loi $\top$ dans E.

Exercice 4 :

On définit sur $\mathbb{R}$ la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\left(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\right): x*y = xy-3(x+y)+12$$

1. Montrer que la loi $*$ est commutative dans $\mathbb{R}$.

2. Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre e dans $\mathbb{R}$ à déterminer.

3. Montrer que la loi $*$ est associative dans $\mathbb{R}$.

4. Est-ce que 3 est symétrisable par la loi $*$ dans $\mathbb{R}$?

5. Montrer que $F=\mathbb{R}\setminus\{3\}$ est une partie stable de $(\mathbb{R},*)$.

6. Montrer que $(F,*)$ est un groupe commutatif.

Exercice 5 :

On définit dans $\mathbb{C}$ la loi de composition interne $*$ définie par :

Pour tout $z=x+iy$ et $z=x'+iy'$ où $(x,x',y,y')\in\mathbb{R}^4$: $z*z'=(x+x'+xx')+i(y+y')$

1. Montrer que la loi $*$ est commutative et associative dans $\mathbb{C}$.

2. Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre e dans $\mathbb{C}$ à déterminer.

3. Déterminer l'ensemble des éléments symétrisables par la loi $*$ dans $\mathbb{C}$.

4. On pose $G=\left\{z\in\mathbb{C} \,/\, \mathrm{Re}(z)\neq -1\right\}$, montrer que $(G,*)$ est un groupe commutatif.

5. On pose $H=\left\{x+i\ln(1+x) \,/\, x>-1\right\}$, montrer que $(H,*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$.

Exercice 6 :

On définit sur l'intervalle $I =]-1,1[$ la loi $\perp$ par : $\left(\forall(x,y) \in I^2\right) : x \perp y = \dfrac{x+y}{1+xy}$.

1. Montrer que $\perp$ est une loi de composition interne sur I.

2. On considère l'application $f : x \mapsto \dfrac{1-e^x}{1+e^x}$.

a. Montrer que f est un morphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(I,\perp)$.

b. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ vers I et que pour tout $x \in I : f^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.

c. En déduire que $(I,\perp)$ est un groupe commutatif, puis déterminer son élément neutre et le symétrique de tout élément $x \in I$ par la loi $\perp$.

d. Pour tout $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $x_n = \underbrace{x \perp x \perp ... \perp x}_{n \text{ fois}}$.

Montrer que $x_n = \dfrac{(1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^n + (1-x)^n}$

3. On pose $E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix} / \, x \in I \right\}$.

a. Montrer que pour tout $(x,y) \in I^2 : M(x) \times M(y) = M(x \perp y)$.

b. En déduire que $(E,\times)$ est un groupe commutatif.

c. Montrer que $\left(M\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)^n = M\left(\dfrac{3^n-1}{3^n+1}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7 :

On considère dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice B tel que $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $B^2 = B$.

2. Est-ce que la matrice B est inversible dans $\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times\right)$?

3. Montrer que $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) : B^n = B$.

Exercice 8 :

On définit sur $\mathbb{R}^*$ la loi de composition interne $\top$ définie par :

$$\left(\forall(x,y) \in \left(\mathbb{R}^*\right)^2\right) : x \top y = 2xy$$

1. Montrer que la loi $\top$ est associative et commutative dans $\mathbb{R}^*$.

2. Montrer que la loi $\top$ admet un élément neutre dans $\mathbb{R}^*$ à déterminer.

3. En déduire la structure de $(\mathbb{R}^*,\top)$.

4. On pose $E = \left\{ M_x = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} / \, x \in \mathbb{R}^* \right\}$.

a. Est-ce que les matrices $M_x \in E$ sont inversibles dans $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times\right)$? Justifier.

b. Montrer que E est une partie stable de $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times\right)$.

c. On considère l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & E \\ x & \mapsto & M_x \end{array}$.

Montrer que l'application φ est isomorphisme de $(\mathbb{R}^*,\top)$ vers $(E,\times)$.

d. En déduire la structure de $(E,\times)$.

e. Déterminer l'élément neutre de $(E,\times)$, puis M_x^{-1} pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 9 :

On considère les ensembles $G = \left\{ \begin{pmatrix} 2^a & b \\ 0 & 2^{-a} \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ et $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / b \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Montrer que $(G,\times)$ est un groupe non commutatif.

2. Montrer que $(H,\times)$ est un sous-groupe de $(G,\times)$.

Exercice 10 :

On considère les ensembles $E = \left\{ M_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a - \frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R} \right\}$ et $F = \left\{ N_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a - \frac{1}{a}\right) \\ -a\sqrt{3} & -a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R} \right\}$.

1. On considère l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & E \\ a & \mapsto & M_a \end{array}$, montrer que φ est isomorphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(E,\times)$ et en déduire la structure de $(E,\times)$.

2. Montrer que $\left(\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}^*\right)^2\right) : N_a \times N_b = M_{\frac{b}{a}}$.

3. On pose $G = E \cup F$, montrer que $(G,\times)$ est un groupe, ce groupe est-il commutatif ?

Exercice 11 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Vérifier que : $A^3 - 3A^2 + 3A = I_3$.

3. En déduire que A est inversible puis déterminer son inverse A^{-1}.

Exercice 12 :

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times,+)$ est un anneau unitaire, son zéro est la matrice $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et son unité est la matrice $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice $A = \begin{pmatrix} a & d \\ c & b \end{pmatrix}$ où $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\begin{cases} ad - bc = 1 \\ a + d = 1 \end{cases}$.

1. Montrer que $A^2 - A + I_2 = O_2$.

2. En déduire que la matrice A est inversible dans l'anneau $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times,+)$ et déterminer son inverse A^{-1}.

3. Vérifier que $A^3 = -I_3$, puis en déduire A^n selon les valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$.