ومنه فإن : $S_2 = \dfrac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(1-x)^2}$

ب- i- حساب M^2 و M^3:

لدينا : $M^2=(xI+yJ)^2=x^2I+2xyJ$ ، لأن : $J^2=\theta$ أي : $M^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 2xy \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$

ولدينا : $M^3=M^2\times M=(x^2I+2xyJ)(xI+yJ)=x^3I+x^2yJ+2x^2yJ=x^3+3x^2yJ$

أي : $M^3 = \begin{pmatrix} x^3 & 3x^2y \\ 0 & x^3 \end{pmatrix}$

ii- من خلال السؤال السابق يمكن أن نتظنن أن : $M^p = \begin{pmatrix} x^p & px^{p-1}y \\ 0 & x^p \end{pmatrix}$

لنبين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $(\forall p \in IN^* - \{1\});\, M^p = \begin{pmatrix} x^p & px^{p-1}y \\ 0 & x^p \end{pmatrix}$

الخاصية صحيحة من أجل $p=2$ و $p=3$.

ليكن p عنصرا من IN مع $p \geq 2$ نفترض أن : $M^p = \begin{pmatrix} x^p & px^{p-1}y \\ 0 & x^p \end{pmatrix}$

لنبين أن : $M^{p+1} = \begin{pmatrix} x^{p+1} & (p+1)x^py \\ 0 & x^{p+1} \end{pmatrix}$

لدينا :

$$\begin{aligned} M^{p+1} &= M^p\times M = (x^pI+px^{p-1}yJ)(xI+yJ) \\ &= x^{p+1}I+x^pyJ+px^pyJ+px^{p-1}y^2J^2 \\ &= x^{p+1}I+(p+1)x^pyJ \end{aligned}$$

إذن : $M^{p+1} = \begin{pmatrix} x^{p+1} & (p+1)x^py \\ 0 & x^{p+1} \end{pmatrix}$

وبالتالي فإن : $(\forall p \in IN^* - \{1\});\, M^p = \begin{pmatrix} x^p & px^{p-1}y \\ 0 & x^p \end{pmatrix} = x^pI + px^{p-1}yJ$

iii- الاستنتاج:

لدينا :

$$\begin{aligned} A &= I+M+M^2+\ldots+M^{n-1} \\ &= I+(xI+yJ)+(x^2I+2xyJ)+(x^3I+3x^2yJ)+\ldots+(x^{n-1}I+(n-1)x^{n-2}yJ) \\ &= (1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})I+(y+2xy+3x^2y+\ldots+(n-1)x^{n-2}y)J \\ &= (1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})I+y(1+2x+3x^2+\ldots+(n-1)x^{n-2})J \\ &= S_1I+yS_2J \end{aligned}$$

ومنه فإن : $A = \left(\dfrac{1-x^n}{1-x}\right)I + y\left(\dfrac{(n-1)x^n - nx^{n-1}+1}{(1-x)^2}\right)J$

iv- تحديد $(x;y)^n$:

بما أن φ تشاكل تقابلي من $(F;\times)$ نحو $(G;T)$ فإن:

$$\begin{aligned}(x;y)^n &= (x;y)T(x;y)T...T(x;y)\\ &= \varphi(xI+yJ)T\varphi(xI+yJ)T...T\varphi(xI+yJ)\\ &= \varphi(M)T\varphi(M)T...T\varphi(M)\\ &= \varphi(M^n)\end{aligned}$$

ولدينا: $M^n=x^nI+nx^{n-1}J$

ومنه فإن: $\varphi(M^n)=(x^n;nx^{n-1}y)$

إذن: $$\begin{aligned}(x;y)^n &= (x;y)T(x;y)T...T(x;y)\\ &= (x^n;nyx^{n-1})\end{aligned}$$

التمرين ٦٥

نعتبر المجموعة التالية: $E=\{z\in C/z=a+bj\,;(a;b)\in\mathbb{Z}^2\}$

1) تحقق من أن: $1+j+j^2=0$

2) بين أن: $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

3) حدد المجموعة: $F=\{z\in E/|z|=1\}$

4) نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ النظمة: $(S)\begin{cases}ax-by=1\\ bx+(a-b)y=0\end{cases}$ مع: $(a;b)\in\mathbb{Z}^{*2}$

أ- تحقق من أن محددة (S) هي: $\Delta=|a+jb|^2$

ب- بين أنه إذا كانت (S) تقبل حلا فإن: $a\wedge b=1$.

ج- استنتج أن (S) تقبل حلا إذا كان: $\Delta=1$.

5) استنتج أن مجموعة عناصر الحلقة $(E;+;\times)$ التي تقبل مقلوبا هي F.

الحل

1) لنتحقق من أن: $1+j+j^2=0$

نذكر أن: $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $j^2=\bar{j}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

لدينا: $1+j+j^2=1+j+\bar{j}=1+2(\mathcal{Re}(j))=1-1=0$

إذن: $1+j+j^2=0$

2) لنبين أن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

نذكر أن: $(\mathbb{C};+;\times)$ جسم تبادلي

- لدينا: $E\subset\mathbb{C}$ و$(\mathbb{C};+)$ زمرة تبادلية، ومنه يكفي أن نبين أن $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(\mathbb{C};+)$.

- لدينا $E \neq \phi$ لأن: $j \in E$ (من أجل $a=0$ و$b=1$)
- ليكن z_1 وz_2 من E بحيث: $z_1=a_1+b_1j$ و$z_2=a_2+b_2j$ مع $(a_1;b_1) \in \mathbb{Z}^2$ و $(a_2;b_2) \in \mathbb{Z}^2$

لدينا: $-z_2=-a_2-b_2j$ هو مماثل z_2 في $(\mathbb{C};+)$، ومنه: $z_1+(-z_2)=a_1+b_1j+(-a_2-b_2j)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)j$

وبما أن: $a_1-a_2 \in \mathbb{Z}$ و $b_2-b_1 \in \mathbb{Z}$ فإن: $z_1+(-z_2) \in E$

إذن: $(\forall(z_1;z_2) \in E^2);\, z_1+(-z_2) \in E$

وبالتالي $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(\mathbb{C};+)$، إذن $(E;+)$ زمرة تبادلية.

- لنبين أن E جزء مستقر من $(\mathbb{C};+)$.

ليكن z_1 وz_2 من E بحيث: $z_1=a_1+b_1j$ و$z_2=a_2+b_2j$ مع $(a_1;b_1) \in \mathbb{Z}^2$ و $(a_2;b_2) \in \mathbb{Z}^2$

لدينا: $z_1 \times z_2=(a_1+b_1j)\times(a_2+b_2j)=a_1a_2+a_1b_2j+a_2b_1j+b_1b_2j^2$

$$=a_1a_2+(a_1b_2+a_2b_1)j+b_1b_2(-1-j)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1-b_1b_2)j$$

وبما أن: $a_1a_2-b_1b_2 \in \mathbb{Z}$ و $a_1b_2+a_2b_1-b_1b_2 \in \mathbb{Z}$ فإن: $z_1 \times z_2 \in E$

ومنه: $(\forall(z_1;z_2) \in E^2);\, z_1 \times z_2 \in E$

إذن E جزء مستقر بالضرب في $\mathbb{C}$.

وبما أن $(\mathbb{C};+;\times)$ جسم تبادلي فإن $\times$ تبادلي وتجميعي وتوزيعي بالنسبة للقانون $+$ في E

يعني أن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية.

ولدينا 1 هو العنصر المحايد في $(\mathbb{C}^*;\times)$ و$1 \in E$ من أجل $a=1$ و$b=0$

وبالتالي: $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

3) لنحدد المجموعة F:

ليكن z من E، بحيث: $z=a+bj$ مع $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$، لدينا:

$$\begin{aligned} z \in F &\Leftrightarrow |z|=1 \\ &\Leftrightarrow |a+bj|=1 \\ &\Leftrightarrow (a+bj)(a+b\bar{j})=1 \\ &\Leftrightarrow a^2+ab(j+\bar{j})+b^2\bar{j}j=1 \\ &\Leftrightarrow a^2-ab+b^2=1 \\ &\Leftrightarrow \left(a-\frac{b}{2}\right)^2=1-\frac{3}{4}b^2 \end{aligned}$$

لدينا: $\left(a-\frac{b}{2}\right)^2=1-\frac{3}{4}b^2 \Rightarrow 1-\frac{3}{4}b^2 \geq 0$ و $b \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow b^2 \leq \frac{4}{3} \text{ و } b \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow -\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq b \leq \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ و } b \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow b=-1$ أو $b=0$ أو $b=1$

• إذا كان $b=0$ فإن: $a^2=1$ يعني أن $a=1$ أو $a=-1$، ومنه: $z=1$ أو $z=-1$

• إذا كان $b=1$ فإن $a^2-a=0$ يعني أن: $a=0$ أو $a=1$، ومنه: $z=j$ أو $z=1+j$

• إذا كان $b=-1$ فإن: $a^2+a=0$ يعني أن: $a=0$ أو $a=-1$، ومنه: $z=-j$ أو $z=-1-j$

إذن: $F \subset \{1; -1; j; -j; 1+j; -1-j\}$

عكسيا، لدينا: $|1| = |-1| = |j| = |-j| = |1+j| = |-1-j| = 1$ (تحقق من ذلك)

إذن: $F = \{1; -1; j; -j; 1+j; -1-j\}$

4) أ- لنتحقق من أن محددة (S) هي: $\Delta = |a+jb|^2$

لدينا: $(S): \begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + (a-b)y = 0 \end{cases}$ مع $(a;b) \in \mathbb{Z}^{*2}$

لدينا: $\Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & (a-b) \end{vmatrix} = a(a-b) + b^2 = a^2 - ab + b^2$

وبما أن: $|a+jb|^2 = (a+jb)(a+\bar{j}b) = a^2 - ab + b^2$

فإن: $\Delta = |a+jb|^2$

ب- لنبين أنه إذا كانت (S) تقبل حلا فإن: $a \wedge b = 1$

ليكن $(x_0;y_0)$ حلا للنظمة (S)، ومنه فهو يحقق المعادلة: $ax_0-by_0=1$

إذن حسب مبرهنة $BEZOUT$ فإن: $a \wedge b = 1$.

ج- لنستنتج أن (S) تقبل حلا إذا كان $\Delta = 1$.

ليكن $(x_0;y_0)$ حلا للنظمة (S) يعني أن: $x_0 \in IZ^*$ و $y_0 \in IZ^*$

لدينا: $x_0 = \dfrac{\Delta x_0}{\Delta} = \dfrac{b-a}{\Delta}$ و $y_0 = \dfrac{\Delta y_0}{\Delta} = \dfrac{-b}{\Delta}$

ومنه:

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z}^* \\ y_0 \in \mathbb{Z}^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{b-a}{\Delta} \in \mathbb{Z}^* \\ \dfrac{-b}{\Delta} \in \mathbb{Z}^* \\ \Delta \in \mathbb{Z}^* \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta | b-a \\ \Delta | -b \\ \Delta \in \mathbb{Z}^* \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta | b \\ \Delta | a \\ \Delta \in \mathbb{Z}^* \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta | a \wedge b \\ \Delta \in \mathbb{Z}^* \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta = 1$ أو $\Delta = -1$ (لأن $a \wedge b = 1$)

وبما أن $\Delta = |a + jb|^2$ فإن: $\Delta > 0$ إذن: $\Delta = 1$

5) لنستنتج أن مجموعة عناصر الحلقة التي تقبل مقلوبا هي F:

ليكن z عنصرا من E بحيث: $z=a+bj$ مع $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$

و z' مقلوبه في E بحيث: $z=x+yj$ مع $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$

لدينا: $z \times z' = 1 \iff (a+bj)(a+yj) = 1$

$$\iff (ax - by) + (ay + bx - by)j = 1$$

$$\iff \begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + (a-b)y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \Delta = 1$$

$$\iff |a + bj| = 1$$

$$\iff |z| = 1$$

$$\iff z \in F$$

ومنه F هي مجموعة العناصر التي تقبل مقلوبا في الحلقة $(E;+;\times)$.

التمرين 65

نعتبر المجموعة التالية: $A = \{a + b\sqrt{2} \,/\, (a;b) \in \mathbb{Z}^2\}$

1) أ- بين أن: $(\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2);\, a + b\sqrt{2} = 0 \iff a = b = 0$

ب- استنتج أن: $(\forall (a;b;a';b') \in \mathbb{Z}^4);\, a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2} \iff a = a'$ و $b=b'$

2) بين أن $(A;+;\times)$ حلقة تبادلية وواحدية.

3) ليكن φ التطبيق المعرف بما يلي:

$$\varphi : A \to A$$
$$a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$$

وليكن N التطبيق المعرف بما يلي:

$$N : A \to IR$$
$$x \mapsto x\varphi(x)$$

$N(x)$ يسمى منظم x.

أ- اكتب منظم $a + b\sqrt{2}$ بدلالة a وb، استنتج أن $N(x) \in \mathbb{Z}$ لكل x من A وأن $N(x)=0$ تستلزم $x=0$.

ب- بين أن φ تشاكل من $(A;\times)$ إلى $(A;\times)$، ثم استنتج أن: $(\forall (x;y) \in A^2);\, N(xy) = N(x)N(y)$

ج- ليكن x عنصرا من A.

بين أن x له مقلوب في $(A^*;\times)$ إذا وفقط إذا كان: $N(x) \in \{-1;1\}$.

4) بين أن $(A;+;\times)$ حلقة كاملة.

5) ليكن g التطبيق المعرف بما يلي:

$$g: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to A$$
$$(a;b) \mapsto a + b\sqrt{2}$$

أ- بين أن g تطبيق تقابلي.

ب- حدد قانون تركيب داخلي T في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ لكي يكون التطبيق g تشاكلا من $(\mathbb{Z}^2;T)$ إلى $(A;\times)$.

الحل

1) أ- لنبين أن: $\left(\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2 ; a + b\sqrt{2} = 0 \Longleftrightarrow a = b = 0\right)$

$(\Leftarrow)$ بديهي

$(\Rightarrow)$ لنبين أن: $a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow a = b = 0$

ليكن a وb من $\mathbb{Z}$ بحيث: $a + b\sqrt{2} = 0$

- إذا كان $b=0$ فإن $a=0$

- إذا كان $b \neq 0$، لدينا: $a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow \sqrt{2} = -\dfrac{a}{b}$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$$

وهذا تناقض إذن $b=0$ ومنه $a=0$.

وبالتالي: $\left(\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2 ; a + b\sqrt{2} = 0 \Longleftrightarrow a = b = 0\right)$

ب- لنستنتج أن: $\left(\forall (a;b;a';b') \in \mathbb{Z}^4\right) ; a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2} \Longleftrightarrow a = a'$ و $b=b'$

ليكن $(a;b;a';b')$ من $\mathbb{Z}^4$، لدينا:

$$\begin{aligned} a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2} &\Longleftrightarrow (a - a') + \sqrt{2}(b - b') = 0 \\ &\Longleftrightarrow a - a' \text{ و } b - b' = 0 \\ &\Longleftrightarrow a = a' \text{ و } b = b' \end{aligned}$$

2) لنبين أن $(A;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

لدينا: $A \subset IR$ و$(\mathbb{R};+;\times)$ جسم تبادلي، إذن يكفي أن نبين أن:

- $(A;+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(\mathbb{R};+)$.
- A جزء مستقر من $(\mathbb{R}^*;\times)$.
- $1 \in A$

- لنبين أن $(A;+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(\mathbb{R};+)$.

• لدينا: $A \neq \phi$ لأن $1 \in A$ من أجل $a=1$ و$b=0$.

• ليكن x وy من A بحيث: $x = a + b\sqrt{2}$ و $y = a' + b'\sqrt{2}$ مع $(a;b;a';b') \in \mathbb{Z}^4$

لدينا: $-y = -a' - b'\sqrt{2}$ هو مماثل y في $(\mathbb{R};+)$ ومنه:

$$x+(-y)=(a+b\sqrt{2})+(-a'-b'\sqrt{2})$$
$$=(a-a')+(b-b')\sqrt{2}$$

وبما أن: $a-a'\in\mathbb{Z}$ و $b-b'\in\mathbb{Z}$

فإن: $x+(-y)\in A$

ومنه: $(\forall(x;y)\in A^2);x+(-y)\in A$

إذن: $(A;+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(\mathbb{R};+)$، وبالتالي $(A;+)$ زمرة تبادلية.

- لنبين أن A جزء مستقر من $(\mathbb{R}^*;\times)$.

ليكن x وy من A بحيث: $x=a+b\sqrt{2}$ و $y=a'+b'\sqrt{2}$ مع $(a;b)\in\mathbb{Z}^2$ و $(a';b')\in\mathbb{Z}^2$

لدينا: $x\times y=(a+b\sqrt{2})\times(a'+b'\sqrt{2})$
$$=(aa'+2bb')+(ab'+ba')\sqrt{2}$$

وبما أن: $aa'+2bb'\in\mathbb{Z}$ و $ab'+ba'\in\mathbb{Z}$

فإن: $x\times y\in A$

ومنه: $(\forall(x;y)\in A^2);x\times y\in A$

إذن A جزء مستقر من $(IR;\times)$ ومنه $\times$ تبادلي وتجميعي وتوزيعي بالنسبة ل+ في A.

ولدينا $1\in A$ و1 هو العنصر المحايد ل $\times$ في $(\mathbb{R};+;\times)$، إذن 1 هو العنصر المحايد ل× في A.

وبالتالي $(A;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

3) أ- • **لنكتب منظم $a+b\sqrt{2}$ بدلالة a وb:**

لدينا: $N(a+b\sqrt{2})=(a+b\sqrt{2})\varphi(a+b\sqrt{2})$
$$=(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})$$
$$=a^2-2b^2$$

إذن: $N(a+b\sqrt{2})=a^2-2b^2$

• **استنتاج (1):** ليكن x من A بحيث: $x=a+b\sqrt{2}$ و $(a;b)\in\mathbb{Z}^2$

لدينا: $N(x)=a^2-2b^2$

بما أن: $a\in\mathbb{Z}$ و$b\in\mathbb{Z}$ فإن: $a^2-2b^2\in\mathbb{Z}$

ومنه: $(\forall x\in A);N(x)\in\mathbb{Z}$

استنتاج (2): ليكن x من A بحيث: $x=a+b\sqrt{2}$ و $(a;b)\in\mathbb{Z}^2$

لدينا:
$$N(x)=0\Rightarrow x\varphi(x)=0$$
$$\Rightarrow x=0 \text{ أو } \varphi(x)=0$$
$$\Rightarrow x=0 \text{ أو } a-b\sqrt{2}=0$$
$$\Rightarrow x=0 \text{ أو } a=b=0$$
$$\Rightarrow x=0$$

إذن: $(\forall x \in A) ; N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

ب- لنبين أن: φ تشاكل من $(A;\times)$ إلى $(A;\times)$.

ليكن x وy من A بحيث: $x = a + b\sqrt{2}$ و $y = a' + b'\sqrt{2}$ مع $(a;b;a';b') \in \mathbb{Z}^4$

لدينا: $$\varphi(x \times y) = \varphi\left[(aa' + 2bb') + (ab' + ba')\sqrt{2}\right]$$
$$= (aa' + 2bb') - (ab' + ba')\sqrt{2}$$

ولدينا من جهة أخرى:

$$\varphi(x) \times \varphi(y) = (a - b\sqrt{2}) \times (a' - b'\sqrt{2}) = aa' - ab'\sqrt{2} - ba'\sqrt{2} + 2bb'$$
$$= (aa' + 2bb') - (ab' + ba')\sqrt{2}$$

إذن: $(\forall (x;y) \in A^2) ; \varphi(x \times y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$ ؛ ومنه φ تشاكل من $(A;\times)$ إلى $(A;\times)$.

• لنستنتج أن: $(\forall (x,y) \in A^2) ; N(x \times y) = N(x) \times N(y)$

ليكن ليكن x وy من A، لدينا:

$$N(x \times y) = xy\varphi(xy)$$
$$= xy\varphi(x)\varphi(y)$$
$$= (x\varphi(x)) \times (y\varphi(y))$$
$$= N(x) \times N(y)$$

إذن: $(\forall (x,y) \in A^2) ; N(x \times y) = N(x) \times N(y)$

ج- ليكن x من A وx' مقلوبه في $(A^*;\times)$،

لدينا: $$x \times x' = 1 \Rightarrow N(x \times x') = N(1) = 1$$
$$\Rightarrow N(x) \times N(x') = 1$$

بما أن: $N(x) \in \mathbb{Z}$

فإن: $N(x') \in \mathbb{Z}$

$x \times x' = 1 \Rightarrow (N(x) = 1$ و $N(x') = 1)$ أو $(N(x) = -1$ و $N(x') = -1)$
$$\Rightarrow N(x) \in \{-1;1\}$$

عكسيا لدينا: $N(x) \in \{-1;1\} \Rightarrow N(x) = 1$ أو $N(x) = -1$

$\Rightarrow x\varphi(x) = 1$ أو $x\varphi(x) = -1$

$\Rightarrow x\varphi(x) = 1$ أو $x(-\varphi(x)) = 1$

$\Rightarrow$ x يقبل مقلوبا في $(A^*;\times)$

4) لنبين أن $(A;+;\times)$ حلقة كاملة.

ليكن x وy من A، لدينا:

$$x \times y = 0 \Rightarrow N(xy) = 0$$
$$\Rightarrow N(x) \times N(y) = 0$$
$$\Rightarrow N(x) = 0 \text{ أو } N(y) = 0$$ (لأن $\forall x \in A; N(x) \in \mathbb{Z}$)
$$\Rightarrow x = 0 \text{ أو } y = 0$$ (حسب 4) أ-)

إذن: $(\forall (x;y) \in A^2); x \times y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ أو } y = 0$

وبالتالي $(A;+;\times)$ حلقة كاملة.

5) أ- لنبين أن g تطبيق تقابلي.

- لنبين أن g تطبيق تبايني.

ليكن $(a;b)$ و$(a';b')$ من $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ بحيث: $g((a;b))=g((a';b'))$

لدينا:

$$g((a;b)) = g((a';b')) \Rightarrow a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow a = a' \text{ و } b = b'$$ (حسب 1) أ-)
$$\Rightarrow (a;b) = (a';b')$$

إذن gتطبيق تبايني.

- لنبين أن g تطبيق شمولي.

ليكن x من A، لدينا: (حسب تعريف المجموعة A)

$$x \in A \Rightarrow \exists (a;b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}' x = a + b\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow \exists (a;b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\ x = g((a;b))$$

إذن g تطبيق شمولي وبالتالي g تطبيق تقابلي.

ب- لنحدد قانونا تركيب داخليا T في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

ليكن $x = a + b\sqrt{2}$ و $y = a' + b'\sqrt{2}$ عنصرين من A، بحيث: $(a;b;a';b') \in \mathbb{Z}^4$

لدينا حسب ما سبق: $x \times y = (aa' + 2bb') + (ab' + ba')\sqrt{2}$

باعتبار القانون الداخلي T المعرف على $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ بما يلي: $(a;b)T(a';b') = (aa' + 2bb'; ab' + ba')$

لدينا:

$$g((a;b)T(a';b')) = g((aa' + 2bb', ab' + ba'))$$
$$= (aa' + 2bb') + (ab' + ba')\sqrt{2}$$
$$= (a + b\sqrt{2}) \times (a' + b'\sqrt{2})$$
$$= g((a;b)) \times g((a';b'))$$

إذن g تشاكل من $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z};T)$ نحو $(A;\times)$ حيث T هو القانون التركيب الداخلي المعرف سابقا.

ليكن $(E;+;.)$ فضاءا متجهيا حقيقيا بعده 3.

ولتكن $S=\{\vec{u_1};\vec{u_2}\}$ أسرة حرة من E.

نضع $\bar{S}=\{\vec{u}\in E/\exists(\alpha,\beta)\in IR^2;\vec{u}=\alpha\vec{u_1}+\beta\vec{u_2}\}$.

بين أن: $\vec{u}\notin\bar{S} \Leftrightarrow \{\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u}\}$ أسرة حرة.

الحل

نفترض أن: $\vec{u}\notin\bar{S}$

، لنبين أن: $\{\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u}\}$ أسرة حرة.

ليكن $(\alpha;\beta;\gamma)$ من IR^3 بحيث $\alpha\vec{u_1}+\beta\vec{u_2}+\gamma\vec{u}=\vec{0}$

بالخلف نفترض أن $\gamma\neq 0$، إذن: $\vec{u}=-\dfrac{\alpha}{\gamma}\vec{u_1}-\dfrac{\beta}{\gamma}\vec{u_2}$

وبالتالي: $\vec{u}\in S$ وهذا تناقض، ومنه: $\gamma=0$

ولدينا: $\alpha\vec{u_1}+\beta\vec{u_2}=\vec{0}$

وبما أن: $\{\vec{u_1};\vec{u_2}\}$ أسرة حرة من E، فإن: $\alpha=\beta=0$

إذن: $\alpha=\beta=\gamma=0$ ؛ ومنه الأسرة $\{\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u}\}$ أسرة حرة

عكسيا نفترض أن $\{\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u}\}$ أسرة حرة، لنبين أن: $\vec{u}\notin\bar{S}$

بالخلف: نفترض أن $\vec{u}\in\bar{S}$.

إذن: $\vec{u}=\alpha\vec{u_1}+\beta\vec{u_2}$: $(\exists(\alpha;\beta)\in IR^2)$

وهذا يعني أن الأسرة $\{\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u}\}$ أسرة مقيدة وهذا تناقض ومنه: $\vec{u}\notin\bar{S}$

وبالتالي: $\vec{u}\notin\bar{S} \Leftrightarrow \{\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u}\}$ أسرة حرة.

التمرين 62

في الفضاء المتجهي $(IR^2;+;.)$ نعتبر المتجهات: $\vec{u}=(2;1)$ و $\vec{v}=(6;3)$ و $\vec{w}=(1;3)$

أ) بين أن الأسرة $(\vec{u};\vec{v})$ أسرة مقيدة.

ب) بين أن الأسرة $(\vec{v};\vec{w})$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي IR^2.

ج) نعتبر المتجهة $\vec{t}(5;0)$

اكتب $\vec{t}$ كتالفية خطية للمتجهتين $\vec{v}$ و $\vec{w}$.

2) نضع : $E = \{(x;y) \in IR^2 / y = 2x\}$

بين أن $(E; +; .)$ فضاء متجهي حقيقي محددا بعده.

الحل

1) أ- لدينا : $\vec{v} = (6;3) = 3(2;1) = 3\vec{u}$ ، ومنه الأسرة $(\vec{u};\vec{v})$ أسرة مقيدة

ب- لنبين أن الأسرة $(\vec{v};\vec{w})$ أساس للفضاء IR^2.

ليكن $(a;b)$ من IR^2 بحيث : $a\vec{v} + b\vec{w} = \vec{0}$

لدينا : $a\vec{v} + b\vec{w} = (6a;3a) + (b;3b) = (6a+b;3a+3b)$

ومنه : $a\vec{v} + b\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow 6a + b = 0$ و $3a+3b=0$

$\Rightarrow 6a + b = 0$ و $a=-b$

$\Rightarrow 5a = 0$ و $a=-b$

$\Rightarrow a = 0$ و $b=0$

إذن الأسرة $(\vec{v};\vec{w})$ أسرة حرة

وبما أن $\dim IR^2=2$ فإن: $(\vec{v};\vec{w})$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي IR^2.

ملحوظة:

يمكن أيضا أن نبين أن الأسرة $(\vec{v};\vec{w})$ أسرة مولدة للفضاء IR^2

بالفعل: لتكن $\vec{X} = (x,y)$ متجهة من IR^2 ، لنحدد α و β من IR بحيث $\vec{X} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$

لدينا : $\vec{X} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} \Longleftrightarrow (x,y) = (6\alpha + \beta; 3\alpha + 3\beta)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 6\alpha + \beta = x \\ 3\alpha + 3\beta = y \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -15\alpha = y - 3x \\ \alpha + \beta = \frac{1}{3}y \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{5}x - \frac{1}{15}y \\ \beta = \frac{1}{3}y - \alpha \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{5}x - \frac{1}{15}y \\ \beta = \frac{1}{3}y + \frac{1}{15}y - \frac{1}{5}x \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{5}x - \frac{1}{15}y \\ \beta = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y \end{cases}$$

وبالتالي: $(\forall \vec{X} \in IR^2)(\exists(\alpha;\beta) \in IR^2): \vec{X} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$

أي أن الأسرة $(\vec{v};\vec{w})$ أسرة مولدة للفضاء IR^2، وبما أنها حرة فإنها أساس للفضاء IR^2.

ج) لنحدد x وy من IR بحيث $\vec{t} = x\vec{v} + y\vec{w}$

لدينا: $\vec{t} = x\vec{v} + y\vec{w} \Longleftrightarrow (6x + y; 3x + 3y) = (5;0)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 6x + y = 5 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = - x \\ 5x = 5 \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow x = 1$ و $y=-1$

إذن: $\vec{t} = \vec{v} - \vec{w}$، وهذا يعني أن $\vec{t}$ تأليفة خطية للمتجهتين $\vec{v}$ و $\vec{w}$.

2) لنبين أن $(E; +; .)$ فضاء متجهي حقيقي

بما أن: $E \subset IR^2$ و$(IR^2; +; .)$ فضاء متجهي حقيقي، فإنه يكفي أن نبين أن $(E; +; .)$ فضاء جزئي من الفضاء $(IR^2; +; .)$.

لدينا: $\vec{0} = (0;0)$ عنصر من E، إذن $E \neq \phi$

ليكن $\vec{a}$ و$\vec{b}$ عنصرين من E وα وβ عنصرين من IR.

لدينا: $\vec{a} = (x;y)$ مع $y=2x$ و $\vec{b}(x';y')$ مع $y'=2x'$

ومنه: $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = (\alpha x + \beta x'; \alpha y + \beta y')$

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = (\alpha x + \beta x'; 2\alpha x + 2\beta x')$$
$$= (x'', y'')$$

حيث: $x'' = \alpha x + \beta x'$ و $y''=2x''$

إذن: $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \in E$

وبالتالي: $(E,+,.)$ فضاء جزئي للفضاء المتجهي الحقيقي $(IR^2; +; .)$.

التمرين 13

ليكن $(E; +; .)$ فضاء متجهي حقيقي و$(\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3})$ أسرة حرة في الفضاء المتجهي E.

نضع: $\vec{x} = \alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2} + \alpha_3\vec{e_3}$، حيث: $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3) \in IR^3$

و $\vec{u_1} = \vec{x} + \vec{e_1}$ و $\vec{u_2} = \vec{x} + \vec{e_2}$ و $\vec{u_3} = \vec{x} + \vec{e_3}$

بين أن الأسرة $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ مقيدة إذا وفقط إذا كان: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -1$

لتكن λ_1 وλ_2 وλ_3 عناصرا من IR.

لدينا: $\lambda_1\vec{u_1}+\lambda_2\vec{u_2}+\lambda_3\vec{u_3}=\vec{0}$

يكافئ: $(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\vec{x}+\lambda_1\vec{e_1}+\lambda_2\vec{e_2}+\lambda_3\vec{e_3}=\vec{0}$

يكافئ: $(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\left(\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}+\alpha_3\vec{e_3}\right)+\lambda_1\vec{e_1}+\lambda_2\vec{e_2}+\lambda_3\vec{e_3}=\vec{0}$

يكافئ:

$$(\alpha_1(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_1)\vec{e_1}+\left(\alpha_2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_2\right)\vec{e_2}+\left(\alpha_3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_3\right)\vec{e_3}=\vec{0}$$

وبما أن: $\left(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\right)$ أسرة حرة في E فإنه لدينا:

$$(S):\begin{cases}\alpha_1\left(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\right)+\lambda_1=0\\ \alpha_2\left(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\right)+\lambda_2=0\\ \alpha_3\left(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\right)+\lambda_3=0\end{cases}$$

وبجمع معادلات النظمة (S) نحصل على المتساوية التالية:

$$\left(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\right)\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+1\right)=0$$

ومنه لدينا حالتان:

- إذا كان: $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+1\neq 0$ أي: $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\neq -1$

فإن: $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$

وبتعويض هذه القيمة في النظمة (S) يكون لدينا $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

ومنه فإن: $(\forall\lambda_1;\lambda_2;\lambda_3\in IR);\lambda_1\vec{u_1}+\lambda_2\vec{u_2}+\lambda_3\vec{u_3}=\vec{0}\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

يعني أن الأسرة $\left(\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3}\right)$ حرة.

إذن: إذا كان $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\neq -1$ فإن الأسرة $\left(\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3}\right)$ حرة

أي الأسرة $\left(\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3}\right)$ مقيدة تستلزم $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-1$

- إذا كان $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+1=0$

في هذه الحالة نأخذ: $\lambda_1=\alpha_1$ و$\lambda_2=\alpha_2$ و$\lambda_3=\alpha_3$

يكون لدينا: $\alpha_1\vec{u_1}+\alpha_2\vec{u_2}+\alpha_3\vec{u_3}=\vec{0}$ و$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\neq(0,0,0)$

إذ لو كان $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,0)$ فإن: $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$ وهذا تناقض

وبالتالي: فإن الأسرة $\left(\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3}\right)$ مقيدة.

التمرين ٦٤

نعتبر الدوال العددية g_1 وg_2 وg_3 بحيث: $g_1(x)=e^x$ و $g_2(x)=xe^x$ و $g_3(x)=e^{-x}$

ولتكن E المجموعة المعرفة بما يلي:

$$E=\left\{f\in\mathcal{F}(IR;IR)\,/\,f=\alpha g_1+\beta g_2+\gamma g_3;(\alpha;\beta;\gamma)\in IR^3\right\}$$

1) بين أن $(E\,;+\,;.)$ فضاء متجهي حقيقي.

2) بين أن: $f \in E \quad (\forall f \in E)$

3) بين أن: $(g_1\,;g_2\,;g_3)$ أساس في الفضاء E.

الحل

1- لنبين أن $(E\,;+\,;.)$ فضاء متجهي حقيقي.

لدينا: $E \subset \mathscr{F}(IR\,;IR)$ و $(\mathscr{F}(IR\,;IR);+;.)$ فضاء متجهي حقيقي،

ومنه يكفي أن نبين أن $(E\,;+\,;.)$ فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي $(\mathscr{F}(IR\,;IR);+;.)$.

- لدينا: $E \neq \phi$ لأن: $g_1 \in E$ من أجل $\alpha = 1$ و $\beta = 0$ و $\gamma = 0$

- ليكن f_1 و f_2 عنصرين من E و a و b عددين حقيقيين، لدينا:

$$f_1 \in E \Leftrightarrow (\exists(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1) \in IR^3);\, f_1 = \alpha_1 g_1 + \beta_1 g_2 + \gamma_1 g_3$$

$$f_2 \in E \Leftrightarrow (\exists(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2) \in IR^3);\, f_2 = \alpha_2 g_1 + \beta_2 g_2 + \gamma_2 g_3$$

لكل x من IR، لدينا:

$$\begin{aligned}(af_1 + bf_2)(x) &= (af_1)(x) + (bf_2)(x)\\ &= af_1(x) + bf_2(x)\\ &= a(\alpha_1 g_1 + \beta_1 g_2 + \gamma_1 g_3)(x) + b(\alpha_2 g_1 + \beta_2 g_2 + \gamma_2 g_3)(x)\\ &= a(\alpha_1 g_1(x) + \beta_1 g_2(x) + \gamma_1 g_3(x)) + b(\alpha_2 g_1(x) + \beta_2 g_2(x) + \gamma_2 g_3(x))\\ &= (a\alpha_1 + b\alpha_2)g_1(x) + (a\beta_1 + b\beta_2)g_2(x) + (a\gamma_1 + b\gamma_2)g_3(x)\\ &= ((a\alpha_1 + b\alpha_2)g_1 + (a\beta_1 + b\beta_2)g_2 + (a\gamma_1 + b\gamma_2)g_3)(x)\end{aligned}$$

إذن: $af_1 + bf_2 = \alpha g_1 + \beta g_2 + \gamma g_3$

حيث: $\alpha = a\alpha_1 + b\alpha_2$ و $\beta = a\beta_1 + b\beta_2$ و $\gamma = a\gamma_1 + b\gamma_2$ مع: $(\alpha;\beta;\gamma) \in IR^3$

وبالتالي: $(\forall (f_1;f_2) \in E^2);(\forall (a;b) \in IR^2)\ af_1 + bf_2 \in E$

ومنه: $(E\,;+\,;.)$ فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي $(\mathscr{F}(IR;IR);+;.)$

وبالتالي: $(E\,;+\,;.)$ فضاء متجهي حقيقي.

ب) لنبين أن: $(\forall f \in E);\, f' \in E$

ليكن x من IR، لدينا: $f(x) = \alpha g_1(x) + \beta g_2(x) + \gamma g_3(x)$

$$= \alpha e^x + \beta x e^x + \gamma e^{-x}$$

لدينا: الدالة f قابلة للاشتقاق على IR ولدينا لكل x من IR:

$$f'(x) = \alpha e^x + \beta e^x + \beta x e^x - \gamma e^{-x} = (\alpha + \beta)e^x + \beta x e^x - \gamma e^{-x}$$

$$= (\alpha + \beta)g_1(x) + \beta g_2(x) - \gamma g_3(x) = ((\alpha + \beta)g_1 + \beta g_2 - \gamma g_3)(x)$$

إذن: $f' = (\alpha+\beta)g_1 + \beta g_2 - \gamma g_3$

وبما أن: $(\alpha+\beta;\beta;-\gamma) \in IR^3$ فإن: $f' \in E$

إذن: $(\forall f \in E); f' \in E$

ج) لنبين أن $(g_1;g_2;g_3)$ أساس في الفضاء E.

- لدينا: $(\forall f\in E)(\exists(\alpha;\beta;\gamma)\in IR^3) / f = \alpha g_1+\beta g_2+\gamma g_3$

إذن كل متجهة من E هي عبارة عن تأليفة خطية للمتجهات g_1 و g_2 و g_3

وبالتالي: $(g_1;g_2;g_3)$ أسرة مولدة للفضاء المتجهي E.

- لنبين أن $(g_1;g_2;g_3)$ أسرة حرة.

ليكن a و b و c من IR بحيث $ag_1+bg_2+cg_3=\theta$، حيث: θ هي الدالة المنعدمة

أي: $\theta : IR \to IR$

$x \mapsto \theta(x)=0$

لدينا:
$$ag_1+bg_2+cg_3=\theta \Rightarrow (\forall x\in IR); ag_1(x)+bg_2(x)+cg_3(x)=0$$
$$\Rightarrow (\forall x\in IR); ae^{x}+bxe^{x}+ce^{-x}=0 \quad ⊛$$

طريقة (1): لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} ae^{x}+bxe^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(ae^{x}+bxe^{x}+ce^{x})=0$

إذن: $c=0$ ومنه:

$$ag_1+bg_2+cg_3=\theta \Rightarrow (\forall x\in IR); ae^{x}+bxe^{x}=0$$
$$\Rightarrow (\forall x\in IR); a+bx=0 \quad ((\text{لأن}\ (\forall x\in IR); e^{x}\neq 0)$$
$$\Rightarrow a=b=0$$

ومنه: $ag_1+bg_2+cg_3=\theta \Rightarrow a=b=c=0$

إذن: $(g_1;g_2;g_3)$ أسرة حرة وبالتالي $(g_1;g_2;g_3)$ أساس في الفضاء E.

طريقة (2): لدينا حسب ⊛: $(\forall x\in IR); ae^{x}+bxe^{x}+ce^{-x}=0$

من أجل $x=0$، لدينا: $a+c=0$: (1)

من أجل $x=\ln 2$، لدينا: $2a+(2\ln 2)b+\frac{c}{2}=0$ أي: $4a+(4\ln 2)b+c=0$: (2)

من أجل $x=\ln\frac{1}{2}$، لدينا: $-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b\ln 2+2c=0$ أي: $a+b\ln 2-4c=0$: (3)

لدينا النظمة التالية:
$$\begin{cases} a+c=0 \\ 4a+(4\ln 2)b+c=0 \\ a+b\ln 2-4c=0 \end{cases}$$

يعني أن:
$$\begin{cases} a=-c \\ 3a+(4\ln 2)b=0 \\ 5a+b\ln 2=0 \end{cases}$$

بعد حل النظمة الأخيرة نجد : $a=b=c=0$

إذن $(g_1 ; g_2 ; g_3)$ أسرة حرة.

التمرين 65

نعتبر المجموعة E المعرفة بما يلي: $E = \{(x ; y ; z) \in IR^3 / x - y + 3z = 0\}$

1) بين أن $(E ; + ; .)$ فضاء متجهي حقيقي.

2) نعتبر في الفضاء المتجهي $(IR^3 ; + ; .)$ المتجهتين: $\vec{e_1} = (1 ; 1 ; 0)$ و $\vec{e_2} = (0 ; 3 ; 1)$

أ- بين أن $(\vec{e_1} ; \vec{e_2})$ أسرة مولدة للفضاء المتجهي $(E ; + ; .)$ ؛

ب- بين أن الأسرة $(\vec{e_1} ; \vec{e_2})$ حرة في الفضاء المتجهي $(IR^3 ; + ; .)$ ؛

ج- استنتج $\dim E$.

الحل

1) لنبين أن: $(E ; + ; .)$ فضاء متجهي حقيقي

لدينا: $E \subset IR^3$ و $(IR^3 ; + ; .)$ فضاء متجهي حقيقي، ومنه يكفي أن نبين أن E فضاء جزئي للفضاء المتجهي الحقيقي $(IR^3 ; + ; .)$

- $E \neq \phi$، لأن: $(0 ; 0 ; 0) \in E$

- ليكن $(x ; y ; z)$ و $(a ; b ; c)$ عنصرين من E، أي: $x-y+3z=0$ و $a-b+3c=0$؛

وليكن α و β عنصرين من IR، لدينا:

$$\begin{aligned}\alpha (x ; y ; z) + \beta (a ; b ; c) &= (\alpha x ; \alpha y ; \alpha z) + (\beta a ; \beta b ; \beta c)\\ &= (\alpha x + \beta a ; \alpha y + \beta b ; \alpha z + \beta c)\end{aligned}$$

وبما أن:

$$\begin{aligned}\alpha x + \beta a - (\alpha y + \beta b) + 3 (\alpha z + \beta c) &= \alpha x - \alpha y + 3\alpha z + \beta a - \beta b + 3\beta c\\ &= \alpha (x - y + 3z) + \beta (a - b + 3c)\\ &= \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0\end{aligned}$$

فإن: $(\alpha x + \beta a ; \alpha y + \beta b ; \alpha z + \beta c) \in E$

أي: $\alpha (x; y; z) + \beta (a; b; c) \in E$

إذن: $(\forall (X; Y) \in E^2), (\forall (\alpha; \beta) \in IR^2) ; \alpha X + \beta Y \in E$

يعني: E فضاء جزئي للفضاء المتجهي الحقيقي $(IR^3; +; .)$

وبالتالي: $(E;+;.)$ فضاء متجهي حقيقي.

2) أ- لنبين أن $(\vec{e_1};\vec{e_2})$ أسرة مولدة للفضاء المتجهي E.

ليكن $(x;y;z)$ عنصرا من E، لدينا: $x-y+3z=0$، أي: $y=x+3z$

ومنه:

$$\begin{aligned}(x;y;z) &= (x;x+3z;z)\\ &= (x;x;0)+(0;3z;z)\\ &= x(1;1;0)+z(0;3;1) = x\vec{e_1}+z\vec{e_2}\end{aligned}$$

أي: $(x;y;z)$ تأليفة خطية للعنصرين $\vec{e_1}$ و $\vec{e_2}$

إذن: $(\forall \vec{u}\in E),(\exists(x;y)\in IR^2);\vec{u}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}$

يعني: $(\vec{e_1};\vec{e_2})$ أسرة مولدة للفضاء المتجهي الحقيقي $(E;+;.)$.

ب- لنبين أن $(\vec{e_1};\vec{e_2})$ حرة في الفضاء المتجهي $(IR^3;+;.)$.

ليكن α و β عنصرين من IR، بحيث: $\alpha\vec{e_1}+\beta\vec{e_2}=\vec{0}$

لنبين أن: $\alpha=\beta=0$.

لدينا:

$$\begin{aligned}\alpha\vec{e_1}+\beta\vec{e_2}=\vec{0} &\Rightarrow \alpha(1;1;0)+\beta(0;3;1)=(0;0;0)\\ &\Rightarrow (\alpha;\alpha;0)+(0;3\beta;\beta)=(0;0;0)\\ &\Rightarrow (\alpha;\alpha+3\beta;\beta)=(0;0;0)\\ &\Rightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \alpha+3\beta=0\\ \beta=0\end{cases}\\ &\Rightarrow \alpha=\beta=0\end{aligned}$$

إذن: $(\forall(\alpha;\beta)\in IR^2);\alpha\vec{e_1}+\beta\vec{e_2}=\vec{0}\Rightarrow\alpha=\beta=0$

يعني: $(\vec{e_1};\vec{e_2})$ أسرة حرة في الفضاء المتجهي $(IR^3;+;.)$.

ج- استنتاج:

لدينا: $(\vec{e_1};\vec{e_2})$ أسرة حرة ومولدة للفضاء المتجهي الحقيقي $(E;+;.)$.

ومنه: $(\vec{e_1};\vec{e_2})$ تكوّن أساسا للفضاء المتجهي E، إذن: $dimE=2$

التمرين 76

نعتبر المجموعة

$$E=\{(a,a,b)/(a,b)\in IR^2\}$$

1) بين أن: $(E;+;.)$ فضاء متجهي حقيقي.

2) حدد أساسا للفضاء $(E;+;.)$

الحل

1) لنبين أن $(E;+;.)$ فضاء متجهي حقيقي.

لدينا: $E \subset IR^3$ و$(IR^3;+;.)$ فضاء متجهي حقيقي، ومنه يكفي أن نبين أن $(E;+;.)$ فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي $(IR^3;+;.)$.

لدينا: $E \neq \phi$ لأن $(0;0;0) \in E$ من أجل $a=b=0$

ليكن $(a;a;b)$ و$(a';a';b')$ عنصرين من E حيث a وa' وb وb' أعداد حقيقية وليكن α وβ من IR،

لدينا:

$$\begin{aligned}\alpha.(a;a;b) + \beta.(a';a';b') &= (\alpha a;\alpha a;\alpha b) + (\beta a';\beta a';\beta b')\\ &= (\alpha a + \beta a';\alpha a + \beta a';\alpha b + \beta b')\\ &= (a'';a'';b'')\end{aligned}$$

حيث $a'' = \alpha a + \beta a'$ و$b'' = \alpha b + \beta b'$

لدينا: $a'' \in IR$ و$b'' \in IR$ ومنه: $(a'';a'';b'') \in E$ ؛ إذن:

$$(\forall(\alpha;\beta) \in IR^2);\left(\forall((a;a;b);(a';a';b')) \in E^2\right) ;\ \alpha.(a;a;b) + \beta.(a';a';b') \in E$$

يعني أن: $(E;+;.)$ فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي الحقيقي $(IR^3;+;.)$

وبالتالي: $(E;+;.)$ فضاء متجهي حقيقي

2) لنحدد أساسا للفضاء المتجهي $(E;+;.)$

• لتكن $\vec{u}$ متجهة من E، لدينا:

$$\begin{aligned}\vec{u} \in E &\Longleftrightarrow \exists(a;b) \in IR^2 / \vec{u} = (a;a;b)\\ &\Longleftrightarrow \exists(a;b) \in IR^2 / \vec{u} = a.(1;1;0) + b.(0;0;1)\end{aligned}$$

بوضع $\vec{e_1} = (1;1;0)$ و$\vec{e_2} = (0;0;1)$، لدينا:

$$(\forall \vec{u} \in E)\ (\exists(a;b) \in IR^2) / \vec{u} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2}$$

إذن: $(\vec{e_1};\vec{e_2})$ أسرة مولدة للفضاء المتجهي الحقيقي $(E;+;.)$.

• ليكن α وβ من IR بحيث: $\alpha.\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} = (0;0;0)$

لدينا:

$$\begin{aligned}\alpha.\vec{e_1} + \beta.\vec{e_2} = (0;0;0) &\Rightarrow (\alpha;\alpha;0) + (0;0;\beta) = (0;0;0)\\ &\Rightarrow (\alpha;\alpha;\beta) = (0;0;0)\\ &\Rightarrow \alpha = \beta = 0\end{aligned}$$

إذن: $(\vec{e_1};\vec{e_2})$ أسرة حرة ومولدة للفضاء المتجهي $(E;+;.)$ وبالتالي $(\vec{e_1};\vec{e_2})$ أساس للفضاء المتجهي $(E;+;.)$.

التمرين ٦٦

نعتبر المجموعة E المعرفة بما يلي: $E = \{(x;y;z;t) \in IR^4 / x + y - t = 0\}$

1) أ- بين أن: $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(IR^4;+)$؛

ب- بين أن: $(E;+;.)$ فضاء متجهي حقيقي؛

ج- حدد أساسا للفضاء المتجهي الحقيقي E.

2) نعتبر في الفضاء المتجهي $(IR^4;+;.)$ المتجهات $\vec{v_1} = (2;0;0;2)$ و $\vec{v_2} = (0;-1;0;-1)$ و $\vec{v_3} = (0;1;1;1)$.

بين أن الأسرة $(\vec{v_1};\vec{v_2};\vec{v_3})$ أساس للفضاء المتجهي E.

الحل

1) أ- لنبين أن $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(IR^4;+)$.

- $E \neq \phi$، لأن: $(0;0;0;0) \in E$
- ليكن $(x;y;z;t)$ و$(a;b;c;d)$ عنصرين من E، يعني: $x+y-t=0$ و$a+b-d=0$

لدينا: $-(a;b;c;d)=(-a;-b;-c;-d)$،

ومنه: $(x;y;z;t)+(-(a;b;c;d))=(x;y;z;t)+(-a;-b;-c;-d)$

$=(x-a\ ;\ y-b\ ;\ z-c\ ;\ t-d)$

وبما أن: $(x-a)+(y-b)-(t-d)=(x+y-t)-(a+b-d)=0-0=0$

فإن: $(x-a\,;y-b\,;z-c\,;t-d) \in E$

أي: $(x;y;z;t)+(-(a;b;c;d)) \in E$

إذن: $(\forall((x;y;z;t),(a;b;c;d)) \in E^2);(x;y;z;t)+(-(a;b;c;d)) \in E$

يعني أن $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(IR^4;+)$.

وبالتالي: $(E;+)$ زمرة تبادلية.

ب- لنبين أن: $(E;+;.)$ فضاء متجهي حقيقي.

لدينا: $E \subset IR^4$ و$(IR^4;+;.)$ فضاء متجهي حقيقي، ومنه:

يكفي أن نبين أن E فضاء جزئي للفضاء المتجهي $(IR^4;+;.)$

- لدينا: $(\forall (X;Y) \in E^2);X+Y \in E$، لأن $(E;+)$ زمرة تبادلية.
- ليكن α عنصرا من IR و$(x;y;z;t)$ عنصرا من E، أي: $x+y-t=0$

لنبين أن: $\alpha(x;y;z;t) \in E$

لدينا: $\alpha(x;y;z;t)=(\alpha x;\alpha y;\alpha z;\alpha t)$

وبما أن: $\alpha x+\alpha y-\alpha t=\alpha(x+y-t)=\alpha\times 0=0$

فإن: $(\alpha x;\alpha y;\alpha z;\alpha t)\in E$، أي: $\alpha(x;y;z;t)\in E$

إذن: $(\forall\alpha\in IR),(\forall X\in E)\;;\;\alpha X\in E$

وبالتالي: E فضاء جزئي للفضاء المتجهي الحقيقي $(IR^4;+;.)$

ومنه: $(E;+;.)$ فضاء متجهي حقيقي.

ج- لنحدد أساسا للفضاء E.

ليكن $(x;y;z;t)$ عنصرا من E، لدينا: $x+y-t=0$، أي: $y=t-x$،

ومنه: $(x;y;z;t)=(x;-x+t;z;t)$

$=(x;-x;0;0)+(0;t;0;t)+(0;0;z;0)$

$=x(1;-1;0;0)+t(0;1;0;1)+z(0;0;1;0)$

نضع: $\vec{e}_1=(1;-1;0;0)$ و $\vec{e}_2=(0;1;0;1)$ و $\vec{e}_3=(0;0;1;0)$

ومنه: $(x;y;z;t)=x\vec{e}_1+t\vec{e}_2+z\vec{e}_3$

إذن: $(\forall\vec{u}\in E),(\exists!(x;t;z)\in IR^3)\,/\,\vec{u}=x\vec{e}_1+t\vec{e}_2+z\vec{e}_3$

يعني: $(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(E;+;.)$.

2) لنبين أن: $(\vec{v}_1;\vec{v}_2;\vec{v}_3)$ أساس للفضاء E.

لدينا: $\vec{v}_1=2\vec{e}_1+2\vec{e}_2$ و $\vec{v}_2=-\vec{e}_2$ و $\vec{v}_3=\vec{e}_2+\vec{e}_3$

يعني: $\vec{v}_1(2;2;0)$ و $\vec{v}_2(0;-1;0)$ و $\vec{v}_3(0;1;1)$ بالنسبة للأساس $(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$.

وبما أن: $\det(\vec{v}_1;\vec{v}_2;\vec{v}_3)=\begin{vmatrix}2&0&0\\2&-1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=-2$

أي: $\det(\vec{v}_1;\vec{v}_2;\vec{v}_3)\neq 0$ فإن: $(\vec{v}_1;\vec{v}_2;\vec{v}_3)$ أسرة حرة في الفضاء E.

ولدينا: $(E;+;.)$ فضاء متجهي حقيقي بعده 3، ومنه: $(\vec{v}_1;\vec{v}_2;\vec{v}_3)$ أساس للفضاء المتجهي E.

التمرين 78

E مجموعة الدوال الحدودية التي درجتها أصغر أو يساوي 2، $(E;+;.)$ فضاء متجهي حقيقي بعده 3.

1- نعتبر الحدوديات P_1 و P_2 و P_3 المعرفة بما يلي: $P_1(x)=x^2+x$ و $P_2(x)=x+1$ و $P_3(x)=x^2+1$

بين أن الأسرة (P_1, P_2, P_3) أساس للفضاء E.

2- نعتبر الحدودية: $P(x)=ax^2+bx+c$ ؛

حدد إحداثيات P في الأساس (P_1, P_2, P_3).

3- نعتبر الحدوديات التالية: $f_1(x)=2x^2+x+1$; $f_2(x)=-x^2+3x+2$; $f_3(x)=2x+1$

بين أن الأسرة (f_1, f_2, f_3) أساس للفضاء E.

الحل

1- لنبين أن الأسرة (P_1, P_2, P_3) أساس للفضاء E.

ليكن α و β و γ عناصرا من IR بحيث: $\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = \theta$

لنبين أن: $\alpha = \beta = \gamma = 0$

لدينا: $\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = \theta$

يعني أن: $(\forall x \in IR); \alpha P_1(x) + \beta P_2(x) + \gamma P_3(x) = 0$

يعني أن: $(\forall x \in IR); (\alpha + \gamma)x^2 + (\alpha + \beta)x + \beta + \gamma = 0$

ومنه فإن: $\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$

ولدينا:

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ 2\beta = 0 \\ 2\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

ومنه: $(\forall (\alpha;\beta;\gamma) \in IR^3); \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = \theta \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

يعني أن: (P_1, P_2, P_3) أسرة حرة في الفضاء E.

وبما أن: $(E,+,.)$ فضاء متجهي بعده 3، فإن الأسرة (P_1, P_2, P_3) تكوّن أساسا للفضاء E.

2) لنحدد إحداثيات P في الأساس (P_1, P_2, P_3).

لدينا P عنصر من E و(P_1, P_2, P_3) أساس للفضاء E، ومنه فإن:

$(\exists! (\alpha;\beta;\gamma) \in IR^3) / P = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$

إذن: $(\forall x \in IR) ; P(x) = (\alpha + \gamma)x^2 + (\alpha + \beta)x + \beta + \gamma$

وبما أن: $(\forall x \in IR) ; P(x) = ax^2 + bx + c$

فإن: $\begin{cases} \alpha + \gamma = a \\ \alpha + \beta = b \\ \beta + \gamma = c \end{cases}$

ولدينا: $\begin{cases} \alpha + \gamma = a \\ \alpha + \beta = b \\ \beta + \gamma = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = a \\ \beta - \gamma = b - a \\ \beta + \gamma = c \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{a+b-c}{2} \\ \beta = \dfrac{b+c-a}{2} \\ \gamma = \dfrac{a+c-b}{2} \end{cases}$$

إذن: $\left(\frac{a+b-c}{2} ; \frac{b+c-a}{2} ; \frac{c+a-b}{2}\right)$ هو مثلوث إحداثيات P في الأساس (P_1, P_2, P_3)

3) لنبين أن الأسرة $(f_1; f_2; f_3)$ أساس للفضاء E.

لنحدد إحداثيات f_1 وf_2 وf_3 بالنسبة للأساس $(P_1; P_2; P_3)$

حسب السؤال السابق لدينا: $f_1=P_1+0.P_2+P_3$ و $f_2=0.P_1+3P_2-P_3$ و $f_3 = \frac{1}{2}P_1 + \frac{3}{2}P_2 - \frac{1}{2}P_3$

يعني أن: $f_1(1;0;1)$ و $f_2(0;3;-1)$ و $f_3\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ بالنسبة للأساس: (P_1, P_2, P_3).

وبما أن: $\det(f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}$

أي: $\det(f_1, f_2, f_3) \neq 0$ فإن: (f_1, f_2, f_3) حرة في E

ولدينا: E فضاء متجهي حقيقي بعده 3، ومنه فإن (f_1, f_2, f_3) أساس للفضاء E.

التمرين 69

نعتبر الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathscr{F}(IR, IR), +, .)$ للدوال العددية من IR نحو IR.

لتكن A مجموعة الدوال الحدودية $x \mapsto P(x)$ ذات الدرجة أصغر أو تساوي 2 والتي تحقق ما يلي:

$$\int_0^1 xP(x)\,dx = 0$$

1- نضع: $P_1(x) = x - \frac{2}{3}$ و $P_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}$; $(\forall x \in IR)$

أ) بين أن الأسرة (P_1, P_2) حرة في الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathscr{F}(IR; IR); +; .)$

ب) بين أن: $(\forall P \in A);(\exists(\alpha;\beta) \in IR^2) / P = \alpha P_1 + \beta P_2$

2- بين أن $(A;+;.)$ فضاء متجهي حقيقي بعده 2.

الحل

1) أ- لنبين أن $(P_1 ; P_2)$ أسرة حرة

ليكن α وβ عنصرين من IR بحيث: $\alpha P_1 + \beta P_2 = \theta$ (θ الدالة المنعدمة)

لنبين أن: $\alpha = \beta = 0$

لدينا: $\alpha P_1 + \beta P_2 = \theta \Rightarrow (\forall x \in IR);(\alpha P_1 + \beta P_2)(x) = \theta(x)$

$$\Rightarrow (\forall x \in IR);\alpha P_1(x) + \beta P_2(x) = 0$$

$$\Rightarrow (\forall x \in IR);\alpha\left(x - \frac{2}{3}\right) + \beta\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow (\forall x \in IR);\beta x^2 + \alpha x - \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{2}\beta = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

إذن: $(\forall(\alpha;\beta) \in IR^2);\alpha P_1 + \beta P_2 = \theta \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

يعني: الأسرة (P_1,P_2) حرة في الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathscr{F}(IR;IR);+;.)$

ب- لنبين أن: $(\forall P \in A);(\exists(\alpha;\beta) \in IR^2) / P = \alpha P_1 + \beta P_2$

ليكن P عنصرا من A، يعني: $(\forall x \in IR)$; $P(x)=ax^2+bx+c$

حيث a وb وc أعداد حقيقية و $\int_0^1 xP(x)\,dx = 0$

لنحدد α وβ من IR، بحيث: $P = \alpha P_1 + \beta P_2$.

لدينا: $\int_0^1 xP(x)\,dx = \int_0^1 (ax^3 + bx^2 + cx)\,dx$

$$= \left[\frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{3}bx^3 + \frac{1}{2}cx^2\right]_0^1 = \frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c$$

وبما أن: $\int_0^1 xP(x)\,dx = 0$ فإن: $\frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c = 0$، أي: $c = -\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b$

ليكن x عنصرا من IR، لدينا:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= ax^2 + bx - \frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b = a\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) + b\left(x - \frac{2}{3}\right) = aP_1(x) + bP_2(x)$$

إذن: $(\forall x \in IR);P(x) = aP_1(x) + bP_2(x) = (aP_1 + bP_2)(x)$

أي: $P=aP_1+bP_2$ (أي: $\alpha = a$ و $\beta = b$)

وبالتالي: $(\forall P \in A);(\exists(\alpha;\beta) \in IR^2) / P = \alpha P_1 + \beta P_2$

2) لنبين أن: $(A\,;+\,;.)$ فضاء متجهي حقيقي بعده 2.

لدينا: $(\mathcal{F}(IR\,;IR)\,;+\,;.)$ و $A \subset \mathcal{F}(IR\,;IR)$ فضاء متجهي حقيقي، ومنه يكفي أن نبين A فضاء جزئي للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathcal{F}(IR\,;IR)\,;+\,;.)$.

- $A \neq \phi$، لأن: $\theta \in A$، θ هي الدالة المنعدمة
- ليكن P وQ عنصرين من A، وα و β عنصرين من IR، لدينا:

$$\begin{cases} P \in A \iff (\exists (a;b) \in IR^2)/P = aP_1 + bP_2 \\ Q \in A \iff (\exists (c;d) \in IR^2)/Q = cP_1 + dP_2 \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \alpha P + \beta Q &= \alpha(aP_1 + bP_2) + \beta(cP_1 + dP_2) \\ &= \alpha aP_1 + \alpha bP_2 + \beta cP_1 + \beta dP_2 \\ &= (\alpha a + \beta c)P_1 + (\alpha b + \beta d)P_2 \end{aligned}$$

وبما أن: $\alpha a + \beta c$ و $\alpha b + \beta d$ عددان حقيقيان، فإن: $(\alpha a + \beta c)P_1 + (\alpha b + \beta d)P_2 \in A$

أي: $\alpha P + \beta Q \in A$.

إذن: $(\forall (P\,;Q) \in A^2);(\forall (\alpha\,;\beta) \in IR^2);\alpha P + \beta Q \in A$

وبالتالي: A فضاء جزئي للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathcal{F}(IR\,;IR)\,;+\,;.)$

ومنه: $(A\,;+\,;.)$ فضاء متجهي حقيقي.

- لدينا: $(P_1\,;P_2)$ أسرة حرة ومولدة للفضاء المتجهي الحقيقي $(A\,;+\,;.)$

ومنه: $(P_1\,;P_2)$ تكون أساسا للفضاء المتجهي A ؛

إذن: A فضاء متجهي حقيقي بعده 2.

التمرين 80

نعتبر المجموعة التالية: $E = \{f : x \mapsto (ax+b)e^{2x}\ /(a,b) \in IR^2\}$

1) بين أن $(E\,;+\,;.)$ فضاء متجهي حقيقي.

2) لتكن f_1 وf_2 الدالتين العدديتين المعرفتين على IR بما يلي: $f_1(x)=e^{2x}$ و $f_2(x)=xe^{2x}$

بين أن الأسرة $B=(f_1, f_2)$ أساس للفضاء المتجهي E.

3) بين أن الدالة $g : x \mapsto \int_0^x \left(t + \frac{1}{2}\right)e^{2t}dt$ تنتمي إلى المجموعة E محددا زوج إحداثيتها بالنسبة للأساس B.

الحل

1) لنبين أن $(E\,;+\,;.)$ فضاء متجهي حقيقي.

لدينا: $E \subset \mathcal{F}(IR\,;IR)$ و $(\mathcal{F}(IR\,;IR)\,;+\,;.)$ فضاء متجهي حقيقي،

ومنه يكفي أن نبين أن $(E\,;+\,;.)$ فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي $(\mathcal{F}(IR\,;IR)\,;+\,;.)$

- لدينا: $E \neq \phi$ لأن θ الدالة المنعدمة تنتمي إلى E من أجل $a=b=0$

- ليكن f_1 وf_2 عنصرين من E و α و β عددين حقيقيين،

لدينا: $f_1 \in E \Leftrightarrow (\exists (a_1\,;b_1) \in IR^2) / (\forall x \in IR)\,; f_1(x) = (a_1x + b_1)e^{2x}$

$f_2 \in E \Leftrightarrow (\exists (a_2\,;b_2) \in IR^2) / (\forall x \in IR)\,; f_2(x) = (a_2x + b_2)e^{2x}$

لكل x من IR، لدينا:

$$\begin{aligned}(\alpha f_1 + \beta f_2)(x) &= (\alpha f_1)(x) + (\beta f_2)(x)\\ &= \alpha f_1(x) + \beta f_2(x)\\ &=(a_1\alpha x + \alpha b_1)e^{2x} + (\beta a_2 x + \beta b_2)e^{2x}\\ &=((a_1\alpha + \beta a_2)x + (\alpha b_1 + \beta b_2))e^{2x}\end{aligned}$$

وبما أن: $\alpha b_1 + \beta b_2 \in IR$ و $a_1\alpha + \beta a_2 \in IR$ فإن: $\alpha f_1 + \beta f_2 \in E$

إذن: $(\forall (f_1\,;f_2) \in E^2)\,; (\forall (\alpha\,;\beta) \in IR^2)\,; \alpha f_1 + \beta f_2 \in E$

يعني أن $(E\,;+\,;.)$ فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathcal{F}(IR\,;IR)\,;+\,;.)$

وبالتالي: $(E\,;+\,;.)$ فضاء متجهي حقيقي.

2) لنبين أن (f_1, f_2) أساس للفضاء E.

• ليكن f عنصرا من E، لدينا حسب تعريف المجموعة E

$(\exists (a,b) \in IR^2) / (\forall x \in IR)\,; f(x) = (ax + b)e^{2x}$

أي: $(\exists (a,b) \in IR^2) / (\forall x \in IR)\,; f(x) = bf_1(x) + af_2(x)$

أي: $(\exists (a,b) \in IR^2) / f = bf_1 + af_2$

ومنه فإن: (f_1, f_2) أسرة مولدة للفضاء E.

• ليكن α و β عنصرين من IR، بحيث: $\alpha f_1 + \beta f_2 = \theta$

لدينا: $(\forall x \in IR)\,;(\alpha f_1 + \beta f_2)(x) = 0$

يعني أن: $(\forall x \in IR)\,;(\alpha + \beta x)e^{2x} = 0$

ومنه فإن: $\begin{cases}\alpha = 0\\ (\alpha + \beta)e = 0\end{cases}$ من أجل $x=0$ و$x=1$ على التوالي

إذن: $\alpha = \beta = 0$

ومنه فإن (f_1, f_2) أسرة حرة.

وبالتالي $(f_1; f_2)$ أساس للفضاء E.

3) لدينا الدالة $t \mapsto \frac{1}{2}te^{2t}$ هي دالة أصلية للدالة $t \mapsto \left(1+\frac{1}{2}\right)e^{2t}$ على IR

ومنه فإن:

$$(\forall x \in IR);\ g(x) = \left[\frac{1}{2}te^{2t}\right]_0^x$$
$$= \frac{1}{2}xe^{2x}$$

إذن: $g = 0.f_1 + \frac{1}{2}f_2$

يعني أن: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ هو زوج إحداثيتي g بالنسبة للأساس (f_1, f_2).

التمرين 81

$(\mathscr{F}(IR^{*+}; IR), +, .)$ هو الفضاء المتجهي الحقيقي لمجموعة الدوال العددية المعرفة على IR^{*+}.

لكل (a,b) من IR^2 ولكل x من IR^{*+} نضع: $f_{(a,b)}(x) = x^a e^{bx}$ و $\varphi_{(a,b)}(x) = \ln\left[f_{(a,b)}(x)\right]$

لتكن المجموعة $F = \left\{\varphi_{(a,b)} / a, b \in IR\right\}$

1) بين أن $(F, +)$ زمرة جزئية من $(\mathscr{F}(IR^{*+}, IR), +)$.

2) أ- تحقق من أن لكل $\varphi_{(a,b)}$ من F ولكل λ من IR لدينا: $\lambda.\varphi_{(a,b)} \in F$.

ب- استنتج أن $(F, +, .)$ فضاء متجهي حقيقي.

ج- بين أن $\left(\varphi_{(0,1)}; \varphi_{(1,0)}\right)$ أساس للفضاء المتجهي F ثم حدد بعد F.

الحل

1) لنبين أن $(F ; +)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathscr{F}(IR^{*+}, IR), +)$.

ليكن $\varphi_{(a,b)} \in F$، لدينا:

$$(\forall x \in IR^{*+});\ \varphi_{(a,b)}(x) = \ln\left(f_{(a,b)}(x)\right)$$
$$= \ln\left(x^a e^{bx}\right)$$
$$= \ln\left(x^a\right) + \ln\left(e^{bx}\right)$$
$$= a\ln x + b\ln e^x$$
$$= a\ln x + bx$$

• لدينا: الدالة المنعدمة عنصر من F (يكفي أن نأخذ $a=b=0$) ومنه: $F \neq \phi$

• ليكن $\varphi_{(a,b)}$ و $\varphi_{(a',b')}$ عنصرين من F ؛

لنبين أن: $\varphi_{(a',b')} - \varphi_{(a,b)} \in F$

ليكن x عنصرا من IR^{*+}، لدينا:

$$\left(\varphi_{(a',b')} - \varphi_{(a,b)}\right)(x) = \varphi_{(a',b')}(x) - \varphi_{(a,b)}(x) = (a'\ln x + b'x) - (a\ln x + bx)$$
$$= (a'-a)\ln x + (b'-b)x = \varphi_{(a'-a,\, b'-b)}(x)$$

إذن: $\varphi_{(a',b')} - \varphi_{(a,b)} = \varphi_{(a'-a,\, b'-b)}$

أي أن: $\varphi_{(a',b')} - \varphi_{(a,b)} \in F$

وبالتالي: $(F;+)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathscr{F}(IR^{*+}, IR),+)$.

2) أ- ليكن $\varphi_{(a,b)}$ عنصرا من F و $d \in IR$ λ عنصرا من IR؛

لنبين أن: $\lambda\varphi_{(a,b)} \in F$

لدينا:
$$\begin{aligned}(\forall x \in IR_+^*)\quad (\lambda\varphi_{(a,b)})(x) &= \lambda\varphi_{(a,b)}(x)\\ &= \lambda(a\ln x + bx)\\ &= (\lambda a)\ln x + (\lambda b)x\\ &= \varphi_{(\lambda a,\lambda b)}(x)\end{aligned}$$

ومنه: $\lambda\varphi_{(a,b)} = \varphi_{(\lambda a,\lambda b)}$

إذن: $\lambda\varphi_{(a,b)} \in F$

ب) لنستنتج أن $(F,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي.

لدينا: $F \neq \phi$ (لأن $(F;+)$ زمرة)

ليكن $\varphi_{(a,b)}$ و $\varphi_{(a',b')}$ عنصرين من F و α و β عنصرين من IR.

لدينا: $\alpha\varphi_{(a,b)} \in F$ و $\beta\varphi_{(a',b')} \in F$ (وذلك حسب السؤال 2) أ)

ومنه: بما أن $(F;+)$ زمرة فإن: $\alpha\varphi_{(a,b)} + \beta\varphi_{(a',b')} \in F$

إذن: $(F,+,.)$ فضاء جزئي للفضاء $(E,+,.)$ حيث $E = \mathscr{F}(IR^{*+};IR)$

وبالتالي: $(F,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي.

ج) لنبين أن $(\varphi_{(0,1)};\varphi_{(1,0)})$ أساسٌ للفضاء المتجهي F ونحدد $dimF$

لدينا: $(\forall x \in IR^{*+});\begin{cases}\varphi_{(0,1)}(x) = x\\ \varphi_{(1,0)}(x) = \ln x\end{cases}$

وحسب ما سبق لدينا:

$$(\forall x \in IR^{*+});\varphi_{(a,b)}(x) = a\varphi_{(1,0)}(x) + b\varphi_{(0,1)}(x)$$

حيث: $(a;b) \in IR^2$

إذن: $(\forall g \in F)\ \ (\exists(a;b) \in IR^2): g = \varphi_{(a,b)} = a\varphi_{(1,0)} + b\varphi_{(0,1)}$

أي: أن الأسرة $(\varphi_{(1,0)};\varphi_{(0,1)})$ أسرة مولدة للفضاء المتجهي الحقيقي F

لنبين أنها حرة

ليكن (α,β) من IR^2 بحيث: $\alpha\varphi_{(1,0)} + \beta\varphi_{(0,1)} = \theta$; θ الدالة المنعدمة

ومنه: $\alpha \ln x + \beta x = 0$ $(\forall x \in IR^{*+})$

نأخذ $x=1$ نحصل على $\beta = 0$ ؛ نأخذ $x=e$ نحصل على: $\alpha + \beta e = 0$

وبالتالي: $\alpha = \beta = 0$

إذن: الأسرة $(\varphi_{(1,0)} ; \varphi_{(0,1)})$ أسرة حرة

أي: $(\varphi_{1,0} ; \varphi_{0,1})$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(F ; + ; .)$

وبالتالي: $\dim F = 2$.

التمرين 82

نعرف في المجموعة $E=IR_+^* \times IR$ قانون التركيب الداخلي + بما يلي:

$$(\forall (x;y),(x';y') \in E);(x;y) + (x';y') = (xx';y+y')$$

وقانون التركيب الخارجي. معاملاته في IR بما يلي:

$$(\forall \alpha \in IR);(\forall (x;y) \in E):\alpha.(x;y) = (x^{\alpha};\alpha y)$$

1- نعتبر التطبيق:

$$\varphi : IR^2 \to E$$
$$(x;y) \mapsto (e^x;y)$$

(باعتبار $(IR^2 ; + ; .)$ الفضاء المتجهي الحقيقي الاعتيادي).

أ) بين أن φ تشاكل تقابلي من $(IR^2 ; +)$ نحو $(E ; +)$

ب) i) استنتج أن $(E ; +)$ زمرة تبادلية

ii) حدد العنصر المحايد في $(E ; +)$. ما مماثل (x,y) في $(E ; +)$؟

2- بين أن: $(E ; + ; .)$ فضاء متجهي حقيقي.

الحل

1) أ- • لنبين أن φ تشاكل من $(IR^2 ; +)$ نحو $(E ; +)$.

ليكن $(x ; y)$ و $(x' ; y')$ عنصرين من IR^2، لدينا: $(x;y)+(x';y')=(x+x';y+y')$

ومنه: $\varphi((x;y) + (x';y')) = \varphi((x + x';y + y')) = (e^{x+x'};y + y')$

ولدينا: $\varphi((x;y)) + \varphi((x';y')) = (e^x;y) + (e^{x'};y) = (e^x \times e^{x'};y + y') = (e^{x+x'};y + y')$

إذن: $\varphi((x;y) + (x';y')) = \varphi((x;y)) + \varphi((x';y'))$

وبالتالي: $(\forall (x;y),(x';y') \in IR^2);\varphi((x;y) + (x';y')) = \varphi((x;y)) + \varphi((x';y'))$

يعني: φ تشاكل من $(IR^2 ; +)$ نحو $(E ; +)$.

• لنبين أن φ تقابل

ليكن $(a;b)$ عنصرا من E؛

لنبين أن المعادلة: $\varphi((x;y)) = (a;b)$ تقبل حلا وحيدا في IR^2.

لدينا: $\varphi((x;y)) = (a;b) \Longleftrightarrow (e^{x};y) = (a;b)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} e^{x} = a \\ y = b \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow x = \ln a \text{ و } y=b$$

ومنه: المعادلة $\varphi((x;y)) = (a;b)$ تقبل حلا وحيدا في IR^2.

إذن: $(\forall (a;b) \in E);(\exists!(x;y) \in IR^2) / \varphi((x;y)) = (a;b)$

يعني أن: φ تطبيق تقابلي من IR^2 نحو E.

وبالتالي: φ تشاكل تقابلي من $(IR^2 ; +)$ نحو $(E ; +)$.

ب- i) استنتاج

لدينا: $(IR^2 ; +)$ و$(E ; +)$ متشاكلتان تقابليا و$(IR^2 ; +)$ زمرة تبادلية

ومنه: $(E ; +)$ زمرة تبادلية.

ii) • تحديد العنصر المحايد في $(E ; +)$

لدينا: φ تشاكل تقابلي $(IR^2 ; +)$ نحو $(E ; +)$ و$(0;0)$ هو العنصر المحايد في $(IR^2 ; +)$،

ومنه: $\varphi((0;0)) = (1;0)$ هو العنصر المحايد في $(E ; +)$.

• تحديد مماثل $(x;y)$ في $(E ; +)$

نرمز بالرمز $(x;y)'$ لمماثل العنصر $(x;y)$ في $(E ; +)$

لدينا: $\varphi((\ln x ; y)) = (x;y)$

وبما أن: $(-lnx ; -y)$ هو مماثل $(lnx ; y)$ في $(IR^2 ; +)$،

فإن:
$$(x;y)' = (\varphi((\ln x;y)))'$$
$$= \varphi((-\ln x; -y)) = (e^{-\ln x}; -y) = \left(\frac{1}{x};y\right)$$

2) لنبين أن $(E ; + ; \ )$ فضاء متجهي حقيقي.

• لدينا: $(E ; +)$ زمرة تبادلية

• لنبين أن الخاصيات الأربعة محققة في $(E ; + ; .)$

P_1 - ليكن α وβ عنصرين من IR و$(x;y)$ عنصرا من E، لدينا:

$$(\alpha + \beta).(x;y) = (x^{\alpha+\beta};(\alpha+\beta)y) = (x^{\alpha}x^{\beta};\alpha y + \beta y)$$
$$= (x^{\alpha};\alpha y) + (x^{\beta};\beta y) = \alpha.(x;y) + \beta.(x;y)$$

- P_2 ليكن α وβ عنصرين من IR و$(x;y)$ عنصرا من E، لدينا :

$$(\alpha\beta).(x;y) = (x^{\alpha\beta};\alpha\beta y)$$

$$\alpha.(\beta.(x;y)) = \alpha.(x^{\beta};\beta y) = ((x^{\beta})^{\alpha};\alpha\beta y) = (x^{\alpha\beta};\alpha\beta y)$$

و

ومنه: $(\alpha\beta).(x;y) = \alpha.(\beta.(x;y))$

- P_3 ليكن α عنصرا من IR و(x,y) و(x',y') عنصرين من E، لدينا :

$$\begin{aligned}\alpha.((x,y) + (x';y')) &= \alpha(xx' ; y + y')\\ &= ((xx')^{\alpha} ; \alpha(y + y'))\\ &= (x^{\alpha}x'^{\alpha} ; \alpha y + \alpha y')\\ &= (x^{\alpha};\alpha y) + (x'^{\alpha};\alpha y') = \alpha.(x;y) + \alpha.(x';y')\end{aligned}$$

P_4 : ليكن $(x;y)$ عنصرا من E، لدينا : $1.(x;y)=(x^1;y)=(x;y)$

وبالتالي: $(E ; + ; .)$ فضاء متجهي حقيقي.

التمرين 83

في الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathcal{M}_2(IR) ; + ; .)$

نضع $A = \begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ و $I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

1) بين أن: $(A; I)$ أسرة حرة في $(\mathcal{M}_2(IR); + ; .)$.

2) نضع $E = \left\{\begin{pmatrix}-2x + y & 2x\\ 2x & 3x + y\end{pmatrix} / (x;y) \in IR^2\right\}$

بين أن $(E ; + ; .)$ فضاء متجهي حقيقي بعده 2.

الحل

1) لنبين أن $(A;I)$ أسرة حرة في $\mathcal{M}_2(IR)$..

ليكن $(\alpha;\beta)$ من IR^2 بحيث $\alpha I + \beta A = O_2$

حيث O_2 المصفوفة المنعدمة أي: $O_2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

لدينا:

$$\begin{aligned}\alpha I + \beta A &= \alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\alpha - 2\beta & 2\beta\\ 2\beta & \alpha + 3\beta\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ومنه: $\beta = 0$ و $\alpha + 3\beta = 0$ و $\alpha - 2\beta = 0$

أي: $\alpha = \beta = 0$

إذن الأسرة $(I; A)$ أسرة حرة.

2) لنبين أن $(E ; + ; .)$ فضاء متجهي حقيقي ونحدد بعده.

نلاحظ أن:

$$(\forall M \in E);(\exists (x;y) \in IR^2): M = xA + yI$$

ليكن M و N عنصرين من E و α و β عنصرين من IR.

لدينا: $\exists (x;y) \in IR^2 ; M = xA + yI$

و $\exists (x';y') \in IR^2 ; N = x'A + y'I$

ومنه:
$$\alpha M + \beta N = \alpha (xA + yI) + \beta (x'A + y'I)$$
$$= (\alpha x + \beta x')A + (\alpha y + \beta y')I$$

نضع $x'' = \alpha x + \beta x'$ و $y'' = \alpha y + \beta y'$

إذن: $\exists (x'',y'') \in IR^2 : \alpha M + \beta N = x''A + y''I$

وهذا يعني أن $\alpha M + \beta N \in E$

لدينا: $E \neq \phi$ لأن المصفوفة المنعدمة عنصر من E

و $(\forall (M;N) \in E^2);(\forall (\alpha;\beta) \in IR^2); \alpha M + \beta N \in E$

إذن: $(E; + ;.)$ فضاء جزئي من الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathscr{M}_2(IR) ; + ; .)$

وبالتالي $(E; + ;.)$ فضاء متجهي حقيقي.

لدينا: $(\forall M \in E); (\exists (x,y) \in IR^2): M = xA + yI$

وهذا يعني أن الأسرة (A,I) أسرة مولدة للفضاء E

وبما أن هذه الأسرة أسرة حرة فإنها إذن أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(E; + ;.)$

إذن: $\dim E = 2$ أي بعده 2.

التمرين 84

نضع: $A = \begin{pmatrix} -1 & b & b \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ، حيث b عدد حقيقي غير منعدم

و $B = A + I$ ، حيث: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) أ) احسب B^2 و B^3.

ب) تحقق أن: $(I-B)(I+B+B^2)=I$

ج) استنتج أن A تقبل مقلوب A^{-1} ثم حدد A^{-1}

2) ليكن E الفضاء المتجهي الحقيقي المولد بالأسرة $(I; B; B^2)$

أ) بين أن: $(I;B;B^2)$ أسرة حرة.

ب) استنتج أن $(I; B; B^2)$ أساس في E ثم حدد بعد E.

الحل

1) أ) لدينا: $B = A + I = \begin{pmatrix} 0 & b & b \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ومنه: $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & b \\ 0 & -b & -b \end{pmatrix}$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ب) لنتحقق من أن: $(I-B)(I+B+B^2)=I$

لدينا: $(M_3(IR);+;x)$ حلقة واحدية

ومنه: $(I-B)(I+B+B^2)=I+B+B^2-B-B^2-B^3=I-B^3$

وبما أن: $B^3 = O_3$ (O_3 المصفوفة المنعدمة في $\mathscr{M}_3(IR)$).

فإن: $(I-B)\ (I+B+B^2)=I$

ج) لنستنتج أن A تقبل مقلوب A^{-1} ثم نحدد A^{-1}.

لدينا: $(I-B)(I+B+B^2)=I$ ويمكن أيضا أن نبين أن: $(I+B+B^2)(I-B)=I$

وبما أن: $-A=I-B$

فإن: $A(-I-B-B^2)=I$ و $(-I-B-B^2)A=I$

إذن: A تقبل مقلوب في $(\mathscr{M}_3(IR); \times)$ و $A^{-1}=-I-B-B^2$

2) أ) لنبين أن: $(I; B; B^2)$ أسرة حرة.

ليكن (α, β, γ) من IR^3 بحيث $\alpha I + \beta B + \gamma B^2 = O_3$ (1)

لدينا :
$$\alpha I + \beta B + \gamma B^2 = O_3 \Rightarrow B(\alpha I + \beta B + \gamma B^2) = O_3$$
$$\Rightarrow \alpha B + \beta B^2 = O_3 \quad (B^3 = O_3)$$
$$\Rightarrow \alpha B^2 + \beta B^3 = O_3 \quad (B^3 = O_3)$$
$$\Rightarrow \alpha B^2 = O_3 \text{ و } B^2 \neq O_3$$
$$\Rightarrow \alpha = 0$$

ولدينا :
$$\alpha I + \beta B + \gamma B^2 = O_3 \Rightarrow \beta B + \gamma B^2 = O_3$$
$$\Rightarrow \beta B^2 + \gamma B^3 = O_3$$
$$\Rightarrow \beta B^2 = 0 \quad (B^3 = O_3)$$
$$\Rightarrow \beta = 0 \quad (B^2 \neq O_3)$$

ولدينا :
$$\alpha I + \beta B + \gamma B^2 = O_3 \Rightarrow \gamma B^2 = 0 \quad (B^2 \neq O_3)$$
$$\Rightarrow \gamma = 0$$

وبالتالي: $\alpha = \beta = \gamma = 0$

إذن: الأسرة $(I; B; B^2)$ أسرة حرة

ب) لدينا $(I; B; B^2)$ أسرة حرة ومولدة للفضاء المتجهي الحقيقي E

إذن: $(I; B; B^2)$ أساس لـ E ؛ وبالتالي: $\dim E = 3$ (أي بعد E هو 3).

التمرين 85

ليكن I و A عنصرين من $\mathcal{M}_3(IR)$ بحيث:
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1- أ) بين أن: $A^3 = 5A - 4I$

ب) استنتج أن المصفوفة A تقبل مقلوبا A^{-1} يتم تحديده

2- نعتبر المجموعة التالية: $E = \{M \in \mathcal{M}_3(IR) : M = xI + yA + zA^2 ; (x, y, z) \in IR^3\}$

أ) بين أن $(E, +, .)$ فضاء متجهي حقيقي.

ب) بين أن الأسرة (I, A, A^2) أساس في الفضاء E.

3- أ) بين أن E جزء مستقر في $(\mathcal{M}_3(IR), \times)$.

ب) بين أن $(E, +, \times)$ حلقة واحدية.

ج) لتكن المصفوفة $N = I + A$. حدد إحداثيات المصفوفة N^3 بالنسبة للأساس (I, A, A^2).

1) أ- لنبين أن: $A^3=5A-4I$

لدينا: $A^2=\begin{pmatrix}5 & 4 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 2 & 4\end{pmatrix}$ و $A^3=\begin{pmatrix}-9 & 0 & 10\\ 0 & 1 & 0\\ 10 & 10 & -4\end{pmatrix}$

ولدينا: $5A-4I=\begin{pmatrix}-5 & 0 & 10\\ 0 & 5 & 0\\ 10 & 10 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & 0 & 10\\ 0 & 1 & 0\\ 10 & 10 & -4\end{pmatrix}$

ومنه: $A^3=5A-4I$

ب- استنتاج

لدينا: $A^3=5A-4I$، ومنه: $\frac{5}{4}A-\frac{1}{4}A^3=I$،

إذن: $A\left(\frac{5}{4}I-\frac{1}{4}A^2\right)=I$ و $\left(\frac{5}{4}I-\frac{1}{4}A^2\right)A=I$

يعني: A تقبل مقلوبا وأن: $A^{-1}=\frac{5}{4}I-\frac{1}{4}A^2$

2) أ- لنبين أن: $(E\,;+\,;.)$ فضاء متجهي حقيقي.

لدينا: $E\subset \mathcal{M}_3(IR)$ و $(\mathcal{M}_3(IR);+;.)$ فضاء متجهي حقيقي، ومنه يكفي أن نبين أن E فضاء جزئي للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathcal{M}_3(IR);+;.)$.

• $E\neq\phi$، لأن: $O_3\in E$ من أجل: $x=y=z=0$

• ليكن M و M' عنصرين من E، و α و β عنصرين من IR، لدينا:

$$M\in E\iff(\exists(x;y;z)\in IR^3)\,/\,M=xI+yA+zA^2$$
$$M'\in E\iff(\exists(x';y';z')\in IR^3)\,/\,M'=x'I+y'A+z'A^2$$

ومنه:
$$\begin{aligned}\alpha M+\beta M'&=\alpha(xI+yA+zA^2)+\beta(x'I+y'A+z'A^2)\\&=(\alpha x+\beta x')I+(\alpha y+\beta y')A+(\alpha z+\beta z')A^2\end{aligned}$$

وبما أن: $\alpha x+\beta x'$ و $\alpha y+\beta y'$ و $\alpha z+\beta z'$ أعداد حقيقية، فإن:

$(\alpha x+\beta x')I+(\alpha y+\beta y')A+(\alpha z+\beta z')A^2\in E$، أي: $\alpha M+\beta M'\in E$.

إذن: $(\forall(M;M')\in E^2);(\forall(\alpha;\beta)\in IR^2);\alpha M+\beta M'\in E$

يعني أن: E فضاء جزئي للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathcal{M}_3(IR);+;.)$

وبالتالي فإن: $(E\,;+\,;.)$ فضاء متجهي حقيقي.

ب- لنبين أن $(I;A;A^2)$ أساس في الفضاء E

• لدينا، حسب تعريف المجموعة E،

$$(\forall M \in E);(\exists (x;y;z) \in IR^3) / M = xI + yA + zA^2$$

يعني أن $(I; A; A^2)$ أسرة مولدة للفضاء المتجهي الحقيقي $(E; +; .)$.

• لنبين أن $(I; A; A^2)$ أسرة حرة.

ليكن x وy وz أعدادا حقيقية بحيث: $xI+yA+zA^2=O_3$

لدينا:
$$xI + yA + zA^2 = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y & 0 & 2y \\ 0 & y & 0 \\ 2y & 2y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5z & 4z & -2z \\ 0 & z & 0 \\ -2z & 2z & 4z \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x - y + 5z & 4z & 2y - 2z \\ 0 & x + y + z & 0 \\ 2y - 2z & 2y + 2z & x + 4z \end{pmatrix}$$

ومنه:
$$xI + yA + zA^2 = O_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 5z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + 4z = 0 \\ y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x = y = z = 0$$

إذن: $(\forall (x;y;z) \in IR^3); xI + yA + zA^2 = O_3 \Rightarrow x = y = z = 0$

أي: $(I; A; A^2)$ أسرة حرة

وبالتالي: الأسرة $(I; A; A^2)$ تكوّن أساسا للفضاء المتجهي الحقيقي $(E; +; .)$.

3) أ– لنبين أن E مستقر في $(\mathcal{M}_3(IR);\times)$

ليكن M وM' عنصرين من E بحيث: $M=xI+yA+zA^2$ و$M'=x'I+y'A+z'A^2$؛

مع: x وy وz وx' وy' وz' أعداد حقيقية، لدينا:
$$M \times M' = xx'I + (xy' + yx')A + (xz' + yy' + zx')A^2 + (yz' + zy')A^3 + zz'A^4$$

وبما أن: $A^3=5A-4I$ و$A^4=(5A-4I)\times A=5A^2-4A$

فإن:
$$M \times M' = (xx' - 4yz' - 4zy')I + (xy' + yx' + 5yz' + 5zy' - 4zz')A + (xz' + yy' + zx' + 5zz')A^2$$

ومنه: $M \times M' \in E$؛

إذن: $(\forall (M; M') \in E^2); M \times M' \in E$، أي E جزء مستقر في $(\mathcal{M}_3(IR);\times)$.

ب– لنبين أن: $(E; +; \times)$ حلقة واحدية

• $(E; +)$ زمرة تبادلية، لأن $(E; +; .)$ فضاء متجهي حقيقي.

• الضرب تجميعي وتوزيعي بالنسبة للجمع في $\mathcal{M}_3(IR)$، وبما أن E جزء مستقر في $(\mathcal{M}_3(IR);\times)$ فإن الضرب تجميعي وتوزيعي بالنسبة للجمع في E.

• $I \in E$ و I_3 هو العنصر المحايد في $(\mathcal{M}_3(IR);\times)$، ومنه فإن I هو العنصر المحايد في $(E;\times)$.

إذن: $(E;+;\times)$ حلقة واحدية.

ج- تحديد إحداثيات N^3 بالنسبة للأساس $(I;A;A^3)$

لدينا: $A\times I=I\times A$ ومنه:

$$\begin{aligned} N^3 = (I+A)^3 &= I^3 + 3I^2\times A + 3I\times A^2 + A^3 \\ &= I + 3A + 3A^2 + 5A - 4I \\ &= -3I + 8A + 3A^2 \end{aligned}$$

ومنه: $(-3;8;3)$ هو مثلوث إحداثيات N^3 بالنسبة للأساس $(I;A;A^3)$.

التمرين 86

نعتبر في المجموعة $\mathcal{M}_3(IR)$ المصفوفتين: $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ و $A=\begin{pmatrix}0&0&3\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

1- أ) احسب A^2 وA^3، ثم A^n بدلالة n من IN^* (ناقش حسب بواقي القسمة الإقليدية للعدد n على 3)

ب) تحقق من أن A تقبل مقلوبا A^{-1} ينبغي تحديده.

2- لتكن E المجموعة المعرفة بما يلي:

$$E=\left\{M\in\mathcal{M}_3(IR) / (\exists(a;b;c)\in IR^3); M = aI + bA + cA^2\right\}$$

أ) بيّن أن الأسرة $(I;A;A^2)$ حرة في الفضاء المتجهي $(\mathcal{M}_3(IR);+;.)$.

ب) بيّن أن $(E;+;.)$ فضاء متجهي حقيقي بعده 3.

3- أ) بين أن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

ب) احسب محددة $-\sqrt[3]{3}A + A^2$، هل $(E;+;\times)$ جسم؟

الحل

1- أ) • حساب A^2 لدينا:

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&3\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&3\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&0\\0&0&3\\1&0&0\end{pmatrix}$$

• حساب A^3 لدينا :

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

إذن : $A^3=3I$

ومنه فإن : $A^{3k}=3^k \times I$ لكل k من IN^*.

حساب A^n بدلالة n. ليكن n عنصرا من IN^*.

• إذا كان $n \equiv 0[3]$ أي : $n=3k$ مع $k \in IN^*$؛ فإن : $A^n = 3^{\frac{n}{3}}.I$

• إذا كان $n \equiv 1[3]$ أي : $n=3k+1$ مع $k \in IN$ فإن : $A^n = 3^{\frac{n-1}{3}}.A$

• إذا كان $n \equiv 2[3]$ أي : $n=3k+2$ مع $k \in IN$ فإن : $A^n = 3^{\frac{n-2}{3}}.A^2$

ب) لدينا : $A^3=3I$ يعني أن $A \times \left(\frac{1}{3}A^2\right) = I$ و $\left(\frac{1}{3}A^2\right) \times A = I$

ومنه فإن A تقبل مقلوبا A^{-1}، حيث : $A^{-1} = \frac{1}{3}A^2$

أي : $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2- أ) لتكن x و y و z عناصر من IR، بحيث : $xI + yA + zA^2 = \theta$

لنبين أن : $x=y=z=0$

لدينا : $$xI + yA + zA^2 = \begin{pmatrix} x & 3z & 3y \\ y & x & 3z \\ z & y & x \end{pmatrix}$$

ومنه فإن : $$xI + yA + zA^2 = \theta \iff \begin{pmatrix} x & 3z & 3y \\ y & x & 3z \\ z & y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff x=0 \text{ و } y=0 \text{ و } z=0$$

إذن : $(\forall x,y,z \in IR); xI + yA + zA^2 = \theta \Rightarrow x = y = z = 0$

يعني أن : $(I; A; A^2)$ أسرة حرة في الفضاء المتجهي $(\mathscr{M}_3(IR); +; .)$.

ب) • ليكن M و N عنصرين من E، لدينا $E \neq \phi$ لأن $I \in E$

و $M \in E \iff (\exists x, y, z \in IR) / M = xI + yA + zA^2$

و $N \in E \iff (\exists a, b, c \in IR) / N = aI + bA + cA^2$

ومنه : $M+N=(xI+yA+zA^2)+(aI+bA+cA^2)$

$=(x+a)I+(y+b)A+(z+c)A^2$

ولدينا: $x+a$ و$y+b$ و$z+c$ أعداد حقيقية ومنه: $M + N \in E$

إذن: $(\forall (M,N) \in E^2) ; M + N \in E$

• ليكن $M=xI+yA+zA^2$ عنصرا من E و α عددا حقيقيا، لدينا :

$\alpha.M = \alpha (xI + yA + zA^2)$

$= (\alpha x) I + (\alpha y) A + (\alpha z) A^2$

بما أن: αx وαy وαz أعداد حقيقية فإن $\alpha.M \in E$ إذن: $(\forall\alpha \in IR)(\forall M \in E) ; \alpha M \in E$

إذن E فضاء جزئي للفضاء المتجهي $(\mathcal{M}_3(IR);+;.)$ وبالتالي فإن $(E ; + ; .)$ فضاء متجهي حقيقي.

• لدينا: $(I; A; A^2)$ أسرة حرة

و $(\forall M \in E), (\exists (a;b;c) \in IR^3) \ / \ M = aI + bA + cA^2$

يعني أن: $(I; A; A^2)$ أسرة مولدة للفضاء المتجهي $(E ; + ; .)$.

وبالتالي فإن: $(I; A; A^2)$ أساس للفضاء المتجهي E.

إذن: $(E ; + ; .)$ فضاء متجهي حقيقي بعده 3.

3– أ) • لدينا $(E ; +)$ زمرة تبادلية، لأن $(E ; + ; .)$ فضاء متجهي حقيقي.

• ليكن $M=xI+yA+zA^2$ و $N=aI+bA+cA^2$ عنصرين من E، لدينا :

$M\times N=(xI+yA+zA^2)\times(aI+bA+cA^2)$

$=xaI+xbA+xcA^2+yaA+ybA^2+ycA^3+zaA^2+zbA^3+zcA^4$

وبما أن: $A^3=3I$ و $A^4=3A$ فإن: $M\times N=(xa+3yc+3zb)I+(xb+ya+3zc)A+(xc+yb+za)A^2$

أي:

$(\exists \alpha, \beta, \gamma \in IR) / M \times N = \alpha I + \beta A + \gamma A^2$

يعني أن: $M \times N \in E$، إذن: $(\forall (M;N) \in E^2) ; M \times N \in E$

ومنه فإن: E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(IR), \times)$

• E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(IR), \times)$ والقانون $\times$ تجميعي وتوزيعي بالنسبة للقانون + في $\mathcal{M}_3(IR)$، إذن القانون $\times$ تجميعي وتوزيعي بالنسبة للقانون + في E

• I هو العنصر المحايد في $(\mathcal{M}_3(IR), \times)$ و $I \in E$، إذن I هو العنصر المحايد في $(E, \times)$.

* لدينا $(\forall M,N\in E);\ \ M\times N=N\times M$

يعني القانون $\times$ تبادلي في E.

* وبالتالي فإن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

ب) لدينا:
$$-\sqrt[3]{3}A+A^2=-\sqrt[3]{3}\begin{pmatrix}0&0&3\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&3&0\\0&0&3\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-3\sqrt[3]{3}\\-\sqrt[3]{3}&0&3\\1&-\sqrt[3]{3}&0\end{pmatrix}$$

ومنه:
$$\det(A^2-\sqrt[3]{3}A)=\begin{vmatrix}0&3&-\sqrt[3]{3}\\-\sqrt[3]{3}&0&3\\1&-\sqrt[3]{3}&0\end{vmatrix}$$
$$=0\times\begin{vmatrix}0&3\\-\sqrt[3]{3}&0\end{vmatrix}+\sqrt[3]{3}\begin{vmatrix}3&-3\sqrt[3]{3}\\-\sqrt[3]{3}&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&-3\sqrt[3]{3}\\0&3\end{vmatrix}$$
$$=0+\sqrt[3]{3}\left(-3\left(\sqrt[3]{3}\right)^2\right)+9=9-9=0$$

لدينا: $\det\left(A^2-\sqrt[3]{3}A\right)=0$ ومنه فإن المصفوفة $A^2-\sqrt[3]{3}A$ لا تقبل مقلوبا في $(\mathcal{M}_3(IR),\times)$ ولدينا $A^2-\sqrt[3]{3}A$ عنصر من E ؛ ومنه فإن: $A^2-\sqrt[3]{3}A$ لا تقبل مقلوبا في $(E;\times)$ ؛

إذن: $(E,+,\times)$ ليس جسما.

التمرين 87

ليكن A عنصرا من $\mathcal{M}_3(IR)$ بحيث: $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

نعتبر المجموعة E المعرفة بما يلي: $E=\left\{M\in\mathcal{M}_3(IR)\ /\ M=xI+yA\,;(x;y)\in IR^2\right\}$

1– أ) بين أن $(E;+;.)$ فضاء متجهي حقيقي؛

ب) بين أن: $(\forall\alpha\in IR);A\neq\alpha I$، ثم استنتج أن الأسرة (I,A) أساس للفضاء E.

2– تحقق من أن $A^2=A+2I$، ثم استنتج أن A تقبل مقلوبا وأن A^{-1} تنتمي إلى E.

3– أ) بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(IR);\times)$؛

ب) بين أن $(E;+;\times)$ حلقة واحدية وتبادلية.

4– أ) بين أن المعادلة $X^2=X$ ؛ $X\in E$، تقبل أربعة حلول: المصفوفة المنعدمة والمصفوفة الوحدة، مصفوفتان نرمز لهما بالرمز: P وQ؛

ب) احسب الجداء $P\times Q$، هل P وQ تقبلان مماثلا في $(E,\times)$؟

ج) بين أن الأسرة $(P;Q)$ أساس للفضاء المتجهي E.

الحل

1) أ- لنبين أن $(E;+;.)$ فضاء متجهي حقيقي.

لدينا: $E \subset \mathcal{M}_3(IR)$ و $(\mathcal{M}_3(IR);+;.)$ فضاء متجهي حقيقي، ومنه يكفي أن نبين أن E فضاء جزئي للفضاء الحقيقي $(\mathcal{M}_3(IR);+;.)$.

• $E \neq \phi$، لأن: $O_3 \in E$ من أجل: $x=y=0$

• ليكن M و M' عنصرين من E، و α و β عنصرين من IR، لدينا:

$$\begin{cases} M \in E \Leftrightarrow (\exists (x;y) \in IR^2) / M = xI + yA \\ M' \in E \Leftrightarrow (\exists (x';y') \in IR^2) / M' = x'I + y'A \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \alpha M + \beta M' &= \alpha(xI + yA) + \beta(x'I + y'A) \\ &= \alpha xI + \alpha yA + \beta x'I + \beta y'A \\ &= (\alpha x + \beta x')I + (\alpha y + \beta y')A \end{aligned}$$

وبما أن: $\alpha x + \beta x'$ و $\alpha y + \beta y'$ عددان حقيقيان فإن: $(\alpha x + \beta x')I + (\alpha y + \beta y')A \in E$،

أي: $\alpha M + \beta M' \in E$ إذن: $(\forall (M;M') \in E^2);(\forall (\alpha;\beta) \in IR^2);\alpha M + \beta M' \in E$

يعني: E فضاء جزئي للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathcal{M}_3(IR);+;.)$؛

وبالتالي: $(E;+;.)$ فضاء متجهي حقيقي.

ب- • لنبين أن: $(\forall \alpha \in IR);A \neq \alpha I$

نفترض أنه يوجد على الأقل α من IR بحيث: $A = \alpha I$، لدينا:

$$A = \alpha I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ و } 1=0$$

وهذا غير ممكن، ومنه: $A \neq \alpha I$ لكل α من IR.

• استنتاج

لدينا: $(\forall M \in E);(\exists (x;y) \in IR^2) / M = xI + yA$ (حسب تعريف المجموعة E)،

وهذا يعني أن $(I;A)$ أسرة مولدة للفضاء المتجهي الحقيقي $(E;+;.)$.

• ليكن α و β عنصرين من IR، بحيث: $\alpha I + \beta A = O_3$

لنبين أن: $\alpha = \beta = 0$

إذا كان: $\beta \neq 0$، فإن: $\alpha I + \beta A = O_3 \Leftrightarrow A = -\dfrac{\alpha}{\beta}I$

وهذا غير ممكن، حسب السؤال السابق، ومنه: $\beta = 0$، أي: $\alpha I = O_3$، إذن: $\alpha = 0$

وبالتالي: $(\forall (\alpha;\beta) \in IR^2); \alpha I + \beta A = O_3 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

يعني أن: $(I; A)$ أسرة حرة في الفضاء المتجهي $(\mathscr{M}_3(IR); +; .)$

وبالتالي: الأسرة $(I; A)$ تكون أساسا للفضاء المتجهي $(E; +; .)$.

2) لنتحقق من أن: $A^2 = A + 2I$

لدينا:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + A = 2I + A$$

• استنتاج

لدينا: $A^2 = 2I + A$، ومنه: $\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I\right)A = A\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I\right) = I$

إذن المصفوفة A تقبل مقلوبا و $A^{-1} = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}A$ يعني أن: A^{-1} تنتمي إلى E.

3) أ– لنبين أن E جزء مستقر من $(\mathscr{M}_3(IR); \times)$

ليكن M و M' عنصرين من E بحيث: $M = xI + yA$ و $M' = x'I + y'A$

مع: x و y و x' و y' أعداد حقيقية، لدينا:

$$\begin{aligned} M \times M' &= (xI + yA)(x'I + y'A) = xx'I^2 + xy'I \times A + yx'A \times I + yy'A^2 \\ &= xx'I + xy'A + yx'A + yy'A^2 = xx'I + (xy' + yx')A + yy'A^2 \end{aligned}$$

وبما أن: $A^2 = A + 2I$، فإن:
$$\begin{aligned} M \times M' &= xx'I + (xy' + yx')A + yy'(A + 2I) \\ &= (xx' + 2yy')I + (xy' + yx' + yy')A \end{aligned}$$

ولدينا: $xx' + 2yy' \in IR$ و $xy' + yx' + yy' \in IR$، ومنه:

$(xx' + 2yy')I + (xy' + yx' + yy')A$ ينتمي إلى E، أي: $M \times M' \in E$.

إذن: $(\forall (M; M') \in E^2); M \times M' \in E$ يعني: E جزء مستقر من $(\mathscr{M}_3(IR); \times)$

ب– لنبين أن $(E; +; \times)$ حلقة واحدية وتبادلية.

• $(E; +)$ زمرة تبادلية، لأن $(E; +; .)$ فضاء متجهي حقيقي.

• E جزء مستقر بالنسبة للقانوني $+$ و$\times$، والضرب تجميعي وتوزيعي بالنسبة للجمع في $\mathscr{M}_3(IR)$، ومنه الضرب تجميعي وتوزيعي بالنسبة للجمع في E.

• $I \in E$ وI هو العنصر المحايد في $(\mathscr{M}_3(IR); \times)$، ومنه I هو العنصر المحايد في $(E; \times)$.

• $M \times M' = M' \times M$ لكل M من M' من E، يعني أن الضرب تبادلي في E.

إذن: $(E; +; \times)$ حلقة واحدية وتبادلية.

4) أ- لنحل في E المعادلة: $X^2=X$

ليكن X عنصرا من E، يوجد عنصر وحيد $(x; y)$ من IR^2، بحيث: $X=xI+yA$.

لدينا: $X^2=(x^2+2y^2)I+(y^2+2xy)A$، ومنه:

$$X^2 = X \iff (x^2+2y^2)I + (y^2+2xy)A = xI + yA$$
$$\iff \begin{cases} x^2+2y^2 = x \\ y^2+2xy = y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y(y+2x-1) = 0 \\ x^2+2y^2-x = 0 \end{cases}$$

• إذا كان: $y=0$ فإن $x^2-x=0$، ومنه: $x=0$ أو $x=1$

إذن: $X=O_3$ أو $X=I$

• إذا كان: $y \neq 0$ فإن: $y+2x-1=0$، أي: $y=1-2x$

ومنه: $x^2+2y^2-x=0 \iff x^2+2(1-2x)^2-x=0$

$$\iff 9x^2-9x+2=0$$

$$\iff x=\frac{1}{3} \text{ أو } x=\frac{2}{3}$$

إذا كان: $x=\frac{1}{3}$ فإن $y=\frac{1}{3}$ أي: $X=\frac{1}{3}I+\frac{1}{3}A$ ؛

إذا كان: $x=\frac{2}{3}$ فإن: $y=-\frac{1}{3}$ أي: $X=\frac{2}{3}I-\frac{1}{3}A$

إذن حلول المعادلة $X^2=X$ في E هي: I وO_3 و$P=\frac{1}{3}I+\frac{1}{3}A$ و$Q=\frac{2}{3}I-\frac{1}{3}A$

ب- حساب الجداء: $P\times Q$

لدينا:
$$P\times Q=\left(\frac{1}{3}I+\frac{1}{3}A\right)\left(\frac{2}{3}I-\frac{1}{3}A\right)=\frac{2}{9}I+\left(-\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\right)A-\frac{1}{9}A^2$$
$$=\frac{2}{9}I+\frac{1}{9}A-\frac{1}{9}(A+2I)=\frac{2}{9}I+\frac{1}{9}A-\frac{1}{9}A-\frac{2}{9}I=O_3$$

• لدينا: $P\times Q=O_3$ ومنه: P وQ قاسمان للصفر في $(E; +; \times)$

إذن: P وQ لا يقبلان مماثلا في $(E; \times)$

ج- لنبين أن $(P; Q)$ أساس للفضاء E.

لدينا: $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ هو زوج إحداثيتي P بالنسبة للأساس $(I; A)$؛

$\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ هو زوج إحداثيتي Q بالنسبة للأساس $(I; A)$

ومنه: $\det(P;Q)=\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix}=-\frac{1}{9}-\frac{2}{9}=-\frac{1}{3}$ أي: $\det(P;Q)\neq 0$، يعني أن $(P;Q)$ أسرة حرة

وبما أن: $dim\ E=2$ فإن: $(P; Q)$ أساس للفضاء المتجهي E.