L'institution : Lycée qualifiante Ibn Alyassamine ***Province*** : Hay Hassani - Casablanca	***Titre du cour*** : Arithmétique dans l'ensemble " $\mathbb{Z}$ " ***Niveau*** : 1er . BAC. SM. Fr	***Enseignante*** : Hind LOTFI

Fiche technique

Contenu	Capacités attendues	Prérequis
➢ La divisibilité dans $\mathbb{Z}$. ➢ Nombres premiers. ➢ Décomposition en facteurs premiers. ➢ PGCD de deux entiers. ➢ PPCM de deux entiers. ➢ Congruence dans $\mathbb{Z}$.	➢ Détermination du PGCD de deux entiers en utilisant l'algorithme d'Euclide ou la décomposition en facteurs premiers. ➢ Etre capable de déterminer si un nombre donné est premier ou non. ➢ Utiliser la congruence dans l'étude de la division e l'inverse.	➢ Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\ et\ \mathbb{R}$. ➢ Les opérations sur les nombres pairs et les nombres impairs. ➢ Les multiples et les diviseurs d'un nombre.

Instructions pédagogiques	➢ Utiliser les différentes démonstrations, en particulier la récurrence. ➢ Fournir aux élèves des outils et des techniques pour étudier les nombres relatifs et ses propriétés. ➢ Utiliser les propriétés de la congruence pour traiter des problèmes sur la division euclidienne.

Durée	Contenu	Le rôle du professeur	Le rôle de l'élève	Objectifs, difficultés et erreurs
20 min 20 min	**Activité 1:** 1) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation : $(E): x^2 - y^2 = 25$ 2) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{Z}^2$ **Solution :** 1) Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ On a : $(E) \Leftrightarrow (x+y)(x-y) = 25$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{1}\ x-y=1 \\ \boxed{2}\ x+y=25 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \boxed{3}\ x-y=5 \\ \boxed{4}\ x+y=5 \end{cases}$ $(car\ x+y \geq 0\ et\ 25 \geq 0\ donc\ x-y \geq 0)$ $\boxed{1} + \boxed{2} \Longrightarrow 2x = 26 \Longrightarrow x = 13$ $\boxed{2} \Longrightarrow y = 25 - 13 = 12$ $\boxed{3} + \boxed{4} \Longrightarrow 2x = 10 \Longrightarrow x = 5$ $\boxed{4} \Longrightarrow y = 5 - x = 0$ Donc : $(x, y) = (13,12)\ ou\ (x, y) = (5,0)$ On vérifie facilement que les deux couples $(13,12)$ et $(5,0)$ vérifient l'équation (E) Ainsi : $S_{\mathbb{N}^2} = \{(13,12); (5,0)\}$ 2) On remarque que si un couple (x, y) est une solution de (E) dans $\mathbb{N}^2$; alors les couples $(-x, y);\ (x, -y)\ et\ (-x, -y)$ sont aussi des solutions de (E) dans$\mathbb{Z}^2$. Donc : $S_{\mathbb{Z}^2} = \left\{ \begin{matrix} (-13,-12); (-13,12); (13,-12); \\ (13,12); (-5,0); (5,0) \end{matrix} \right\}$	- Ecrire l'activité sur le tableau en expliquant avec des exemples simples s'il est nécessaire.	- Ecrire l'activité sur le cahier en faisant attention avec l'explication. -Concentration avec la solution collective faite au tableau. -Recopier la solution dans le cahier et poser des questions.	-Permettre aux élèves de distinguer entre les solutions d'une équation dans $\mathbb{N}$ et ses solutions dans $\mathbb{Z}$. -La confusion entre les solutions de (E) dans $\mathbb{N}$ et ses solutions dans $\mathbb{Z}$.
20 min 20 min	**Activité 2:** 1) Décomposer en produit de facteurs premiers les deux nombres : 4900 et 18900 2) En déduire : $PPCM(4900,18900) et\ PGCD(4900,18900)$	- Ecrire l'activité sur le tableau.	-Ecrire l'activité sur le cahier.	-Permettre aux élèves de calculer le $PGCD$ et le $PPCM$ de deux entiers en utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers.

Solution :

1)

$$\begin{array}{r|l} 4900 & 2 \\ 2450 & 2 \\ 1225 & 5 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18900 & 2 \\ 9450 & 2 \\ 4725 & 3 \\ 1575 & 3 \\ 525 & 3 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$4900 = 2^2 \times 5^2 \times 7^2 \qquad 18900 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^1$

2) D'après ce qui précède :

$$PPCM(4900{,}18900) = 2^2 \times 5^2 \times 7^1 = 700$$
$$PGCD(4900{,}18900) = 2^2 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^2$$
$$= 132300$$

Remarque :

On peut déterminer le $PGCD(4900{,}18900)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

	Diviseur	Reste
18900	4900	4200
4900	4200	700
4200	700	0

D'où $PGCD(4900{,}18900) = 700$

- Ecrire des rappels sur le tableau pour aider les élèves.

- comprendre les rappels et les recopies sur le cahier.

- Essayer de résolver les questions de l'activité.

- Autre méthode pour calculer le $PGCD$ de deux entiers.

Activité 3:

20 min 1) En utilisant l'algorithme d'Euclide montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \wedge (n+1) = 1$$

20 min 2) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$PGCD[(n+2)(n+3); n^2 + 5n + 7]$$

Solution :

1)

- Ecrire l'activité sur le tableau en rappelant la méthode de calculer le $PGCD$ de deux entiers en utilisant l'algorithme

- Recopier l'activité sur le cahier.

- Concentration avec les rappels.

- Essayer de résolver les questions de

- Savoir que le $PGCD$ de deux entiers successives est égale à 1.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>Diviseur</td><td>Reste</td></tr>
<tr><td>$n+1$
n</td><td>n
1</td><td>1
0</td></tr>
</table>
Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \wedge (n+1) = 1$
2) On a $PGCD\,[(n+2)(n+3); n^2+5n+7]$
$= PGCD[n^2+5n+6; n^2+5n+7]$
$= PGCD[n^2+5n+6; (n^2+5n+6)+1] = 1$
$(D'après (1))$ Donc
$PGCD\,[(n+2)(n+3); n^2+5n+7] = 1$
</td>
<td>d'Euclide.</td>
<td>l'activité.
- Poser des questions.
- Recopier la solution sur le cahier.</td>
<td>- Le $PGCD$ de deux entiers est le dernier diviseur.</td>
</tr>
<tr>
<td>5 min</td>
<td>
I. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$
1. Définition :
On considère deux entiers relatifs a et b avec $b \neq 0$. On dit que b divise a et on note b/a s'il existe un entier relatif K tel que $a = K \times b$.
On dit aussi que b est un diviseur de a et que a est un multiple de b.
Remarque :
Puisque : $a = K \times b \Leftrightarrow a = (-K) \times (-b)$
$\Leftrightarrow -a = (-K) \times b$
Alors : $-b/a \ et \ b/-a$
</td>
<td>- Ecrire la définition sur le tableau avec précision.</td>
<td>- Recopier la définition sur le cahier après la comprendre.</td>
<td>- Définir la divisibilité dans $\mathbb{Z}$.
- La confusion entre les diviseurs et les multiples.
- $-a / b \Longrightarrow a = K \times b$</td>
</tr>
<tr>
<td>15 min</td>
<td>
Conséquences immédiates :
• Tout entier relatif divise 0
• Les seuls diviseurs de $-1 \ et \ 1$ sont $-1 \ et \ 1$
• $-1 \ et \ 1$ divisent tout entier relatif a
• Pour tout entier relatif a ; $-a$ et a sont des diviseurs de a
• Deux entiers relatifs opposés ont les mêmes diviseurs
</td>
<td>- Expliquer les conséquences immédiates.</td>
<td>- Participer et donner des exemples.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>
Exemples :
➢ $3/27 (car\ 27 = 9 \times 3)\ et\ -8/56\ \big(car\ 56 = (-7) \times (-8)\big)$
➢ L'ensemble des diviseurs de 4 dans $\mathbb{Z}$ est : $\{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$
</td>
<td>- Demander aux élèves de donner des exemples.</td>
<td>- Comprendre les exemples.
- Ecrire les exemples sur le cahier.</td>
<td>- Exemples illustratifs de la définition.
- Permettre aux élèves de certaines relations</td>
</tr>
</table>

5 min	**2. Propriétés:** Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls. 1 Si c divise b et b divise a, alors c divise a. 2 Si a divise b et b divise a, alors a et b sont égaux ou opposés. 3 Si c divise a et b, alors pour tous entiers relatifs u et v, c divise $ua + vb$.	- Ecrire les propriétés sur le tableau. - Réécrire ces propriétés sur le tableau en utilisant les symboles mathématiques.	- Ecrire les propriétés sur le cahier de manière claire.	au but de la simplification.
15 min	***Démonstration :*** 1 Comme c/b et b/a ,$\exists(K,K') \in \mathbb{Z}^2/b = Kc$ et $a = K'b$. D'où $a = (KK')c$ et $KK' \in \mathbb{Z}$ donc $c\ /\ a$ 2 Comme a/b et b/a ; $\exists(K,K') \in \mathbb{Z}^2/b = Ka$ et $a = K'b$. On obtient $a = K'(Ka) = (K'K)a$. Comme $a \neq 0, K'K = 1$. Ainsi K et K' sont des diviseurs de 1 . Donc: ➢ Soit $K' = K = 1$ i.e. a et b sont égaux. ➢ Soit $K' = K = -1$ i.e. a et b sont opposés. 3 Comme c/a et c/b ,$\exists(K,K') \in \mathbb{Z}^2/a = Kc$ et $b = K'c$. Alors $\forall(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ $ua + vb = u(Kc) + v(K'c) = (uK + vK')c$ Avec : $(uK + vK') \in \mathbb{Z}$, ce qui prouve que : $c\ /\ (ua + vb)$	- Expliquer la démonstration en donnant des exemples illustratifs.	- Comprendre la démonstration et la recopier sur le cahier.	- S'habituer à gérer la relation de la divisibilité dans $\mathbb{Z}$.
10 min	**II. Division euclidienne** **1. Division euclidienne dans $\mathbb{N}$** ***Théorème :*** Pour tout entier naturel a et pour tout entier naturel b non nul, il existe un unique couple (q, r) d'entiers tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$ q: quotient et r: le reste de la division eucludienne de a par b . ***Démonstration :***	- Ecrire le théorème sur le tableau en l'expliquant.	- Ecrire le théorème sur le cahier en faisant attention à ses conditions.	- Déterminer le reste de la division euclidienne de a sur b. - Ne pas faire attention à la relation $0 \leq r < b$ - S'habituer avec le principe de démontrer

25 min	***L'existence :*** Considérons l'ensemble $H = \{K \in \mathbb{N} / Kb \leq a\}$ On a $H \neq \emptyset$ $(car\ 0 \in H)$ et si $K \in H$ alors $Kb \leq a$ et on a : $b \in \mathbb{N}^*$ i.e. $1 \leq b$ donc $K \times 1 \leq K \times b \leq a$ i.e. $K \leq Kb \leq a$ donc $(\forall K \in H)$ $K \leq a$, d'où H est majorée par a. Puisque $H \subset \mathbb{N}$, $H \neq \emptyset$ et H majorée par a alors H admet un plus grand élément q . Soient $q = Max\ H$ et $r = a - bq$. On a $r = a - bq$, donc $a = bq + r$ Montrons que $0 \leq r < b$ →On a : $q = Max\ H$ donc $q \in H$. D'où $qb \leq a$ $i.e.$ $0 \leq a - qb = r$ → On a : $q = Max\ H$, donc $(q+1) \notin H$ c.-à-d. $(q+1)b > a$ c.-à-d. $a < bq + b$ donc $r = a - bq < b$ d'où $0 \leq r < b$ par conséquent : il existe un couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$	- Expliquer pourquoi la démonstrat-ion est divisée en deux tranches. - Expliquer chaque étape.	- Concentration avec les étapes de la démonstration. - Poser des questions.	les théorèmes, les propriétés,…
15 min	***L'unicité :*** Supposons que : $\exists\ (q_1; r_1), (q_2; r_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que $\begin{cases} a = bq_1 + r_1 \text{ et } 0 \leq r_1 < b \\ a = bq_2 + r_2 \text{ et } 0 \leq r_2 < b \end{cases}$ alors $-b < -r_2 \leq 0$ et $-b < r_1 - r_2 < b$ de plus: $r_1 - r_2 = b(q_2 - q_1)$ ce qui donne $-1 < q_2 - q_1 < 1$ donc $q_2 - q_1 = 0$ et $r_1 - r_2 = 0$ et par suite : $q_1 = q_2\ et\ r_1 = r_2$ **2. Division eucludienne dans $\mathbb{Z}$**		- Ecrire la démonstration sur le cahier.	
5 min	***Théorème :*** $\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ $\exists!\ (q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r \leq \lvert b \rvert$. q: quotient et r: le reste de la division eucludienne de a par b .	- Ecrire le théorème sur le tableau et l'expliquer.	- Ecrire le théorème sur le cahier.	- Ne pas faire attention à la relation : $0 \leq r < \lvert b \rvert$ - Déterminer le reste de la division euclidienne de a sur b.
25 min	***Démonstration :*** L'unicité du couple (q, r) a été démontrée pour	- Donner une vision sur la	- Comprendre la démarche de la	

	les entiers naturels. Le principe de la démonstration est le même pour les entiers relatifs.	démonstration du théorème.	démonstration.	
5 min	**III. Les nombres premiers** **Définitions :** • Un entier naturel n distinct de 1 est dit premier lorsqu'il admet pour seuls diviseurs dans $\mathbb{N}$ les entiers 1 et n. • Un entier distinct de 1 non premier est dit composé. **Remarque :** • 1 n'est ni premier, ni composé. • 0 n'est ni premier, ni composé.	- Ecrire les définitions sur le tableau en utilisant des exemples simples.	- Ecrire les définitions sur le cahier en faisant attention avec l'explication des exemples simples.	- Distinction entre un nombre premier et un nombre composé. - Pourquoi 0 et 1 ne sont ni premiers ni composés ?
15 min	**Propriété ① :** Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Le plus petit diviseur de n compris entre 2 et n est premier. **Démonstration :** Soit n un entier strictement supérieur à 1. Soit p le plus petit des diviseurs de n compris entre 2 et n. Raisonnons par l'absurde pour établir que p est premier, s'il ne l'était pas, il serait composé et il admettrait un diviseur d tel que $1 < d < p$ mais d serait alors un diviseur de n plus petit que p, ce qui contredit la définition de p .	- Ecrire la propriété sur le tableau. - Ecrire la démonstration sur le tableau en expliquant les étapes.	- Ecrire la propriété sur le cahier. - Se concentrer avec les étapes de la démonstration.	- Utilisation du raisonnement par absurde. - Comprendre la propriété.
15 min	**Propriété ② :** Tout entier naturel n composé admet un diviseur premier au plus égal à $\sqrt{n}$. **Démonstration :** Soit n un entier naturel composé. D'après la propriété précédente ; le plus petit diviseur de n compris entre 2 et n est premier. Notons-le d . d est distinct de n puisque n est composé. On peut écrire $n = d \times d'$; avec $2 \leq d \leq d' \leq n$ $(d' \neq 1$ sinon on aurait $n = d)$ on en déduit $dd \leq dd'$ Soit $d^2 \leq n$ ou encore $d \leq \sqrt{n}$	- Ecrire la propriété sur le tableau. - Ecrire la démonstration sur le tableau en expliquant les étapes.	- Ecrire la propriété sur le cahier. - Concentration avec les étapes de la démonstration. - Poser des questions.	- Aider l'élève à comprendre la propriété.
20 min	**Propriété ③ :** Il existe une infinité de nombre premier. **Démonstration :** Raisonnons par l'absurde en supposons qu'il existe	- Ecrire la propriété sur le	- Ecrire la propriété sur le	

	un nombre fini d'entiers premiers. Soit p le plus grand d'entre eux, et soit N le produit de tous ces nombres premiers : $N = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times p$ Soit à présent $N' = N + 1$. Le reste de la division euclidienne de N' par $2, 3, 5, 7$ ou p est 1 , donc N' n'est divisible par aucun des entiers : $2, 3, 5, 7, \ldots , p$ or, d'après la propriété 2 ; l'un au moins des entiers premiers divise N' . On a aussi abouti une contradiction.	tableau. - Ecrire la démonstrat-ion sur le tableau en expliquant chaque étape.	cahier. - Se concentrer avec la démarche de la propriété et sa démonstration.	- Comprendre la propriété.
5 min	***Propriété 4 :*** Soit $n \geq 2$ un entier naturel, si aucun des entiers compris entre 2 et $\sqrt{n}$ ne divise n, alors n est premier. ***Démonstration :*** C'est la contraposée de l'implication dans propriété 2.	- Donner des exemples s'il est nécessaire. - Ecrire la propriété sur le tableau	- Essayer de comprendre les exemples. - Ecrire la propriété sur le cahier.	- Utiliser des propriétés précédentes pour démontrer cette propriété.
10 min	***IV. Décomposition en facteurs premiers*** ***Théorème :*** Tout entier $n \geq 2$ se décompose d'une et d'une seule manière en un produit de nombres premiers. Autrement dit, pour tout entier $n \geq 2$, il existe des nombres premiers deux à deux distincts $p_1, \ldots , p_k$ et des entiers strictement positifs $\alpha_1, \ldots , \alpha_k$ uniquement déterminés à l'ordre près, tels que : $n = {p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \ldots \times {p_k}^{\alpha_k}$	- Ecrire le théorème sur le tableau. - Récrire le théorème sur le tableau en utilisant des symboles mathématiq-ues .	- Ecrire le théorème sur le cahier. - Essayer de comprendre chaque phrase.	
30 min	***Démonstration :*** ***→L'existence de la décomposition :*** On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 2$, il s'écrit comme un produit de nombres premiers étant lui-même premier. Soit $n \geq 3$ un entier. Supposons que tous les entiers strictement inférieurs à n s'écrivent comme le stipule le théorème et montrons que la conclusion subsiste pour l'entier n. Il y a deux cas : Soit n est premier, soit n composé. • Si n est premier c'est fini. • Supposons que n soit composé. Ainsi, il s'écrit $n = dd'$ avec $2 \leq d < n$ et $2 \leq d' < n$. Les entiers d et d' relèvent de l'hypothèse de	- Expliquer pourquoi la démonstrati-on se faite en deux parties.	- Se concentrer avec chaque étape de la démonstration.	- Utiliser le raisonnement par récurrence.

	récurrence et on peut écrire : $d = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_k$ et $d' = p_1' \times p_2' \ldots \times p_{k'}'$ pour des nombres premiers p_i et p_i'. Il ne reste qu'à effectuer le produit pour conclure.		- Poser des questions.	
20 min	***→L'unicité de la décomposition :*** Supposons que : $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_k = p_1' \times p_2' \times \ldots \times p_{k'}'$ pour certains nombres premiers p_i et p_i'. On veut montrer que $K = K'$ et que les p_i sont égaux aux p_i' à l'ordre près. Raisonnons par l'absurde. Parmi les contre-exemples dont on vient de supposer l'existence, il en est au moins un pour lequel $min(K, K')$ est minimal. Considérons un de ceux-ci. Le nombre premier p_1 divise le produit $p_1' \times p_2' \times \ldots \times p_{k'}'$ donc il divise p_i' pour un certain entier i . Or, les diviseurs de p_i' (qui est premier) ne sont que 1 et p_i'. Comme $p_1 \neq 0$, il ne reste plus que la possibilité $p_i = p_i' = p$. On peut alors simplifier l'égalité $p_1 p_2 \ldots p_k = p_1' p_2' \ldots p_{k'}'$ on divisant par p, obtenant ainsi un contre-exemple plus petit. C'est une contradiction, ce qui prouve l'unicité.	- Laisser les élèves pour recopier la première partie de la démonstrati-on. - Après un pause de deux minutes commencer à écrire la deuxième partie de la démonstrati-on.		- Utiliser le raisonnement par l'absurde. - Comprendre le théorème.
	Exemples : Activité ② ; $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7^1$; $300 = 2^2 \times 3^1 \times 5^2$	- Ecrire l'exemple sur le tableau.	- Comprendre l'exemple et l'écrire sur le cahier.	
5 min	**V. PGCD de deux entier** **1. Définition :** Soients $a, b \in \mathbb{Z}$ deux entiers, non tous les deux nuls. Le plus grand entier qui divise à la fois a et b s'appelle le plus grand commun diviseur de a, b et se note $PGCD(a, b)$.	- Ecrire la définition sur le tableau.		- Rappeler le PGCD de deux entiers.
10 min	Exemples : ➢ $PGCD(21,14) = 7; PGCD(12,32) = 4;$ $PGCD(a, ka) = a \ \ \forall (k, a) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^*)$ ➢ Pour tout $a \geq 0$ on a : $PGCD(a, 0) = a \ et \ PGCD(a, 1) = 1$	- Ecrire l'exemple sur le tableau.		- Exemples illustratifs de la définition.

5 min	**2. *Théorème (multiplicativité du PGCD)*:** Soient a, b et k trois entiers naturels non nuls. On a : $PGCD(ka, kb) = k\ PGCD(a, b)$.	- Ecrire le théorème sur le tableau.	- Ecrire le théorème sur le cahier.	- Savoir d'autres méthodes et manières pour calculer le PGCD de deux entiers.
30 min	***Démonstration :*** Posons : $\delta = PGCD(a, b)$ et $\delta_1 = PGCD(ka, kb)$ $\exists (q_1, q_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / a = q_1 \cdot \delta \ et\ b = q_2 \cdot \delta$ On a: $ka = k\delta q_1$ et $kb = k\delta q_2$; $k\delta$ divise ka et kb donc $k\delta$ divise δ_1 . $\exists q \in \mathbb{N}^* : \delta_1 = qk\delta \qquad (*)$ $\exists (q_3, q_4) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / ka = q_3 \delta_1 \ et\ kb = q_4 \delta_1$ D'après$(*)$, on aura : $ka = qk\delta q_3$ et $kb = qk\delta q_4$ or k est non nul donc : $a = q\delta q_3$ et $b = q\delta q_4$. $q\delta$ divise a et b, donc qδ divise δ ; $q\delta$ et δ son deux entiers naturels multiples l'un de l'autre, ils sont donc égaux. En remplaçant $q\delta$ par δ dans $(*)$ on obtient : $\boxed{\delta_1 = k\delta} \qquad C.Q.F.D$	- Ecrire la démonstrati-on sur le tableau en expliquant chaque étape.	- Se concentrer avec la démarche de la démonstration. - Poser des questions.	- Comprendre le théorème.
10 min	**Exercice :** Déterminer $PGCD(300; 375)$ **Solution :** On a : $PGCD(300; 375) = PGCD(25 \times 12; 25 \times 15)$ $= 25\ PGCD(12; 15)$ et puisque $PGCD(12; 15) = 3$ alors $PGCD(300; 375) = 25 \times 3 = 75$	- Ecrire l'exercice sur le tableau. - Donner cinq ou sept minutes aux élèves pour chercher la solution. - Ecrire la solution sur le tableau.	- Chercher la solution de l'exercice. - Ecrire la solution sur le cahier.	- Facilité le calcul du PGCD de deux entiers.
15 min	**3. *Algorithme d'Euclide*:** Soit a et b deux entiers tels que $0 < b \leq a$. Considérons l'algorithme : Entrée : $a\ et\ b$ Traitement : Calculer le reste r de la division euclidienne de a par b. Tant que $r \neq 0$ a prend la valeur b et b prend la valeur r . Calculer le reste de la division euclidienne de a par b . Fin tant que Sortie : Afficher b	- Ecrire et expliquer en même temps l'algorithme sur le	- Ecrire l'algorithme d'Euclide sur le cahier.	- Calculer le reste de la division euclidienne de a par b.

35 min	Cet algorithme est appelé algorithme d'Euclide. ***Remarque :*** Le $PGCD$ de a et b est le dernier reste non nul obtenu dans la succession des divisions de l'algorithme d'Euclide. ***Démonstration :*** On écrit les divisions euclidiennes successives $a = bq_0 + r_0$ avec $0 \leq r_0 < b$ ➢ Si $r_0 = 0$, on arrête à cette étape et $PGCD(a, b) = b$ $\quad$ (car b / a) ➢ Si $r_0 \neq 0$, l'entier a prend la valeur b et b prend la valeur r_0: $b = r_0q_1 + r_1$ avec $0 \leq r_1 < r_0$. ➢ Si $r_1 = 0$, on arrête à cette étape et $PGCD(b, r_0) = PGCD(r_0, r_1) = r_0$ ➢ $r_1 \neq 0$, b prend la valeur r_0 et r_0 prend la valeur r_1: $r_0 = r_1q_2 + r_2$ avec $0 \leq r_2 < r_1$ . ... On construit ainsi une suite de restes $r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots$. Si aucun reste n'est nul, la suite (r_n) est une suite strictement décroissante d'entiers naturels, ce qui est absurde puisqu'une suite ne peut exister. Il existe donc un entier naturel n tel que : $r_{n+1} = 0$ et $r_n \neq 0$ $\quad$ (car on a supposé que $r_0 \neq 0$) . Comme $r_{n+1} = 0$ l'algorithme s'arrête et comporte bien un nombre fini d'étapes. De plus, comme $r_{n+1} = 0$ $r_n = PGCD(r_n, r_{n+1}) = PGCD(r_{n-1}, r_n) = \cdots$ $= PGCD(r_2, r_1)$ $= PGCD(r_1, r_0) = PGCD(b, r_0)$ $= PGCD(a, b)$	tableau. - Expliquer la remarque sur le tableau. - Ecrire la démonstrati-on sur le tableau en expliquant chaque étape.	- Comprendre la remarque. - Se concentrer avec les étapes de la démonstration. - Poser des questions.	- Autre méthode pour calculer le PGCD de deux entiers. - Expliquer l'algorithme d'Euclide.
10 min	Application : Calculons $PGCD(2670; 368)$ On écrit les divisions euclidiennes successives :	- Donner cinq minutes aux	- Chercher la solution de	- S'habituer avec le calcul du PGCD de deux entiers en utilisant

	$2070 = 5 \times 368 + 230$ $368 = 1 \times 230 + 138$ $230 = 1 \times 138 + 92$ $138 = 1 \times 92 + \boxed{46}$ $92 = 2 \times 46 + 0$ (condition d'arrêt) $PGCD(2670; 368) = 48$	élèves pour faire l'application - Ecrire la correction sur le tableau.	l'application. - Ecrire la solution sur le cahier.	l'algorithme d'Euclide.
10 min	**VI. PPCM de deux entiers** **1. Définition :** Le plus petit commun multiple des entiers naturels non nuls a et b est le plus petit élément de l'ensemble des multiples communs strictement positifs de a et b, et se note $PPCM(a, b)$.	- Ecrire la définition sur le tableau.	- Ecrire la définition sur le cahier.	
5 min	Exemples : $PPCM(12; 9) = 36; PPCM(2; 3) = 6$ $PPCM(10; 25) = 50$ ***Remarque :*** Le $PGCD$ et le $PPCM$ sont liés par la formule suivante:	- Ecrire et expliquer les exemples sur le tableau.	- Essayer de comprendre les exemples.	
35 min	**2. Proposition :** Si a, b sont des entiers non tous les deux nuls, alors : $PGCD(a, b) \times PPCM(a, b) = ab$ ***Démonstration :*** Posons $d = PGCD(a, b)$ et $m = \frac{ab}{PGCD(a,b)}$. Pour simplifier, on suppose $a > 0$ et $b > 0$. On écrit $a = da'$ et $b = db'$. Alors : $ab = d^2a'b'$ donc $m = da'b'$. Ainsi $m = ab' = a'b$ est un multiple de a et de b. →Il reste à montrer que c'est le plus petit multiple. Si n est un autre multiple de a et de b, alors $n = ka = lb$. Donc $kda' = ldb'$ et $ka' = lb'$. Or $PGCD(a', b') = 1$ et a' / lb' donc a' / l d'où $a'b / lb$ et ainsi $m = a'b / lb = n$. un autre résultat concernant le $PPCM$ qui se démontre en utilisant la décomposition en facteurs premiers. **3. Proposition :**	- Ecrire la proposition sur le tableau. - Ecrire la démonstrati-on sur le tableau en expliquant chaque étape.	- Ecrire la proposition sur le cahier. - Suivre avec les étapes de la démonstration en posant des questions.	- Savoir que le PGCD et le PPCM de deux entiers, sont liés. - Comprendre la proposition.

10 min	Si a/b et $b\ /\ c$ alors $PPCM(a,b)\ /\ c$. ***Remarque :*** a/c et $b/c \nRightarrow ab\ /\ c$ Par exemple : $6/36$ et $9/36$ mais $6 \times 9 \nmid 36$ Par contre : $PPCM(6;9) = 18\ /\ 36$ Autre exemple : (exercice) $4/100$ et $-50/100$ mais $4 \times (-50) = -200 \nmid 100$ (question aux élèves: déterminer $PPCM(4;-50)$)	- Ecrire la proposition sur le tableau. - Expliquer la différence entre $a \times b$ et $PPCM(a,b)$. - Demander aux élèves à déterminer $PPCM(4;-50)$.	- Ecrire la proposition sur le cahier. - Comprendre la remarque à l'aide des exemples et contre-exemples.	- Distinction entre *ab* et $PPCM(a,b)$. a/c et $b/c \Longrightarrow ab/c$
5 min	**$VII.$ *Congruence dans* $\mathbb{Z}$:** **1. *Définition* :** Si *a* et *b* ont le même reste dans la division euclidienne par n , on dit que a et congru b modulo n , ou *a* et *b* sont congrus modulo n , et on écrit : $a \equiv b[n]$	- Ecrire la définition sur le tableau.	- Ecrire la définition sur le cahier.	
10 min	Exemple : 17 est congru à 9 modulos 2, car 17 et 9 ont le même reste (1) dans la division euclidienne par 2. On vérifie que leur différence égale à 8 est multiple de 2. ***Remarque :*** On note aussi parfois $a \equiv b(mod\ n)$ Une autre formulation est : $a \equiv b[n] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}\ tel\ que\ a = b + kn$	- Expliquer l'exemple en motivant les élèves. - Ecrire et expliquer la remarque sur le tableau.	- Essayer de comprendre les exemples. - participation dans la classe.	- Exemple illustratif pour comprendre la définition.
15 min	***Proposition :*** ① La relation ‹‹ congru modulo n›› est une relation d'équivalence : ➢ $a \equiv a[n]$ ➢ $(a \equiv b[n]) \Longrightarrow (b \equiv a[n])$ ➢ $(a \equiv b[n]\ et\ b \equiv c[n]) \Longrightarrow a \equiv c[n]$ ② $(a \equiv b[n]\ et\ c \equiv d[n]) \Longrightarrow (a + c \equiv b + d[n])$ ③ $(a \equiv b[n]\ et\ c \equiv d[n]) \Longrightarrow (a \times c \equiv b \times d[n])$ ④ $(a \equiv b[n]) \Longrightarrow (\exists k \geq 0, a^k \equiv b^k[n])$	- Ecrire la proposition sur le tableau.	- Ecrire la proposition sur le cahier.	- Savoir d'autre relations de la congruence.

10 min	**Exemples :** ➢ $15 \equiv 1[7]\,;72 \equiv 2[7]\,;3 \equiv -11[7]$ ➢ $5x + 8 \equiv 3[5]\,;\ \forall x \in \mathbb{Z}$ ➢ $11^{2016} \equiv 1^{2016} \equiv 1[10]$	- Poser des questions aux élèves pour les motiver.	- Répondre aux questions.	- Exemples illustratifs simples.
20 min	***Démonstration :*** 1 et 2 : Il suffit d'utiliser la définition. 3 : On a : $a \equiv b[n]\ et\ c \equiv d[n]$ Donc $\exists(k,l) \in \mathbb{Z}^2\ tels\ que$: $a = b + kn\ et\ c = d + ln$ Alors $a \times c = (b + kn)(d + ln)$ $= bd + (bl + dk + kln)n$ qui est de la forme $bd + mn$ avec $m \in \mathbb{Z}$. Ainsi $a \times c \equiv b \times d[n]$ 4 : Par récurrence Pour $k = 2$; $(a \equiv b[n]) \Longrightarrow (\exists k \geq 0, a^k \equiv b^k[n])$ vraie Supposons que : $a^k \equiv b^k[n]$ et montrons que $a^{k+1} \equiv b^{k+1}[n]$.	- Demander aux élèves à faire la démonstration de 1 et 2. - Ecrire la démonstration sur le tableau en expliquant chaque étape.	- Suivre les étapes de la démonstration et essayer de démontrer 1 et 2.	- Démontrer des relations simples. - Comprendre la proposition.