## التمرين 1

نعتبر قانون التركيب الداخلي * المعرف في $\mathbb{Z}$ بمايلي:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \; x * y = xy(x+y)$$

1) بين أن القانون * تبادلي.

2) أ- احسب $2 * ((1*(-1))$ و $1*((-1))*2)$

ب- هل القانون * تجميعي؟

3) حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة $x*1=0$

## الحل

**1) لنبين أن القانون * تبادلي.**

ليكن $x$ و$y$ من $\mathbb{Z}$، لدينا: $x*y=xy(x+y)=yx(y+x)=y*x$

(لأن الجمع والضرب تبادليان في $\mathbb{Z}$)

إذن: $x*y=y*x \; ; \; \left(\forall (x;y) \in \mathbb{Z}^2\right)$ ومنه * تبادلي.

**2) أ- لنحسب $2*((1*(-1))$ و $1*((-1))*2)$**

لدينا: $(1*(-1))*2=(1\times(-1)(1+(-1))*2$

$$=0*2=0$$

و $1*((-1)*2)=1*((-1)\times(2)(-1+2))$

$$=1*(-2)=-2(1-2)=2$$

**ب- هل القانون * تجميعي؟**

حسب السؤال السابق، لدينا: $1*((-1)*2) \neq (1*(-1))*2$

يعني أن القانون * ليس تجميعيا.

**3) لنحل في المجموعة $\mathbb{Z}$ المعادلة: $x*1=0$**

ليكن $x$ من $\mathbb{Z}$، لدينا: $x*1=0 \Leftrightarrow x(x+1)=0$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ أو } x=-1$$

إذن مجموعة حلول المعادلة هي: $\{0;-1\}$.

## التمرين 2

نُعرّف على $IR^+$ قانون التركيب الداخلي * بمايلي: $(\forall (a;b) \in IR^{+2}) \; ; \; a*b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

1) أ- احسب $1*(4*9)$ و $(1*4)*9$

ب- هل القانون * تجميعي؟

2) بين أن القانون * تبادلي.

3) بين أن القانون * يقبل عنصرا محايدا.

4) ما عناصر $IR^+$ القابلة للمماثلة بالنسبة للقانون $*$؟

## الحل

1) أ- لنحسب $(4*9)*1$ و$(1*4)*9$

لدينا: $1*(4*9) = 1*(\sqrt{4}-\sqrt{9})^2 = 1*1 = 0$

و$(1*4)*9 = (\sqrt{1}-\sqrt{4})^2 * 9 = 1*9 = 4$

ب- هل القانون $*$ تجميعي؟

لدينا حسب السؤال السابق: $1*(4*9) \neq (1*4)*9$

إذن القانون $*$ ليس تجميعيا.

2) لنبين أن القانون $*$ تبادلي.

ليكن $a$ و$b$ من $IR^+$، لدينا:

$$a*b = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = (\sqrt{b}-\sqrt{a})^2 = b*a$$

إذن: $(\forall (a;b) \in IR^{+2})\ ;\ a*b = b*a$ ومنه $*$ تبادلي.

3) لنبين أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا.

لدينا القانون $*$ تبادلي في $IR^+$ ومنه: $e$ هو العنصر المحايد في $(IR^+,*)$ إذا وفقط إذا كان:

$(\forall x \in IR^+)\ ;\ x*e = x$

لدينا:

$$(\forall x \in IR^+)\ x*e = x \Leftrightarrow (\forall x \in IR^+)\ ;\ (\sqrt{x}-\sqrt{e})^2 = x$$
$$\Leftrightarrow (\forall x \in IR^+)\ ;\ e - 2\sqrt{e}.\sqrt{x} = 0$$
$$\Leftrightarrow (\forall x \in IR^+)\ ;\ \sqrt{e}(\sqrt{e}-2\sqrt{x}) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{e} = 0$$
$$\Leftrightarrow e = 0$$

إذن 0 هو العنصر المحايد في $(IR^+,*)$.

4) لنحدد عناصر المجموعة $IR^+$ القابلة للمماثلة:

ليكن $x$ و$y$ عنصرين من $IR^+$، لدينا:

$$x*y = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y}$$
$$\Leftrightarrow x = y$$

ومنه كل عنصر من $IR^+$ له مماثل في $(IR^+,*)$ هو نفسه.

## التمرين 3

نعرف في المجموعة $IN$ قانون التركيب الداخلي $T$ بمايلي:

$aTb=a+b-1$ إذا كان $a$ و$b$ فرديين.

$aTb=a+b$ إذا كان $a$ و$b$ زوجيين.

$aTb = |a-b|$ إذا كان $a$ و$b$ مختلفي الزوجية.

1) أ- احسب $2T4$ و$2T5$ و$2T13$.

ب- احسب $(2T5)T8$ و$2T(5T8)$.

2) هل القانون $T$ تبادلي؟ تجميعي؟ علل جوابك.

3) هل القانون $T$ يقبل عنصرا محايدا؟

## الحل

1) أ- • لنحسب $2T4$

لدينا 2 و4 عددان زوجيان ومنه: $2T4=2+4=6$

• لنحسب $2T5$

لدينا 2 عدد زوجي و5 عدد فردي ومنه: $2T5 = |2-5| = 3$

• لنحسب $2T13$

لدينا 2 عدد زوجي و13 عدد فردي ومنه: $2T13 = |2-13| = 11$

ب- لنحسب $(2T5)T8$ و$2T(5T8)$

لدينا: $(2T5)T8 = (|2-5|)T8 = 3T8 = |3-8| = 5$

و $2T(5T8) = 2T(|5-8|) = 2T3 = |2-3| = 1$

إذن: $(2T5)T8=5$ و$2T(5T8)=1$

2) • هل القانون $T$ تبادلي؟

ليكن $a$ و$b$ عنصرين من $IN$، لدينا ثلاث حالات:

الحالة 1: $a$ و$b$ عددان فرديان:

لدينا: $aTb=a+b-1=b+a-1=bTa$

الحالة 2: $a$ و$b$ عددان زوجيان:

لدينا: $aTb=a+b=b+a=bTa$

الحالة 3: $a$ و$b$ لهما زوجية مختلفة:

لدينا: $aTb = |a-b| = |b-a| = bTa$

إذن كخلاصة نستنتج أن: $(\forall (a;b) \in IN^2)\ ;\ aTb = bTa$

يعني أن القانون $T$ تبادلي.

• هل القانون $T$ تجميعي؟

لدينا حسب السؤال السابق: $(2T5)T8=5$ و$2T(5T8)=1$

يعني أن: $(2T5)T8 \neq 2T(5T8)$

إذن القانون $T$ ليس تجميعيا.

- هل القانون $T$ يقبل عنصرا محايدا؟

لتكن $P$ مجموعة الأعداد الزوجية و$I_I$ مجموعة الأعداد الفردية في $IN$.

$e$ العنصر المحايد في $(IN;T)$ إذا وفقط إذا كان: $aTe=a$ و $eTa = a$ ; $(\forall a \in IN)$

- نفترض أن $e$ عدد فردي:

لدينا: $(\forall a \in IN)\ ;\ eTa = a \Leftrightarrow ((\forall a \in I)\ ;\ eTa = a)$ و $((\forall a \in P)\ ;\ eTa = a)$

$\Leftrightarrow ((\forall a \in I)\ ;\ a + e - 1 = a)$ و $((\forall a \in P)\ ;\ |a - e| = a)$

$\Leftrightarrow e = 1$ و $e=0$

إذن العنصر المحايد ليس عددا فرديا.

- نفترض أن $e$ عدد زوجي.

لدينا:

$(\forall a \in IN)\ ;\ eTa = a \Leftrightarrow ((\forall a \in I)\ ;\ eTa = a)$ و $((\forall a \in P)\ ;\ eTa = a)$

$\Leftrightarrow ((\forall a \in I)\ ;\ |a - e| = a)$ و $((\forall a \in P)\ ;\ a + e = a)$

$\Leftrightarrow e = 0$

وبما أن القانون تبادلي فإن: $(\forall a \in IN)\ ;\ 0Ta = aT0 = a$

إذن 0 هو العنصر المحايد في $(IN;T)$.

## التمرين 4

نزود $IR$ بالقانون الداخلي $*$ المعرف بمايلي: $(\forall x,y \in IR)\ ;\ x * y = xy - 3x - 3y + 12$

1) أ- حدد العنصر المحايد $e$ في $(IR,*)$.

ب- حدد العناصر القابلة للمماثلة في $(IR,*)$.

2) أ- بين أن $]3; +\infty[$ جزء مستقر من $(IR,*)$.

ب- ليكن $x$ عنصرا من $]3; +\infty[$ و $x'$ مماثلة $x$ في $(IR,*)$.

هل $x'$ ينتمي إلى $]3; +\infty[$؟

## الحل

1) أ- لنحدد العنصر المحايد $e$ في $(IR,*)$.

$e$ العنصر المحايد في $(IR,*)$ إذا وفقط إذا كان: $e * x = x$ و $x * e = x$ ; $(\forall x \in IR)$

لدينا: $(\forall x \in IR)\ ;\ e * x = x \Leftrightarrow (\forall x \in IR)\ ;\ ex - 3e - 3x + 12 = x$

$\Leftrightarrow (\forall x \in IR)\ ;\ (x - 3)e - 4(x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow (\forall x \in IR)\ ;\ (x - 3)(e - 4) = 0$

$\Leftrightarrow ((\forall x \in IR)\ ;\ x = 3)$ أو $e=4$

بما أن العبارة: $(\forall x \in IR)\ ;\ x = 3$ خاطئة فإن $e=4$.

ونتحقق من أن: $(\forall x \in IR)\ ;\ x * 4 = x$؛ أو ملاحظة أن القانون $*$ تبادلي في $IR$.

إذن 4 هو العنصر المحايد في $(IR,*)$.

ب- تحديد العناصر القابلة للماثلة في $(IR,*)$.

ليكن $x$ و$a$ عنصرين من $IR$، لدينا: $x*a=4 \Leftrightarrow ax-3x-3a+12=4$

$$\Leftrightarrow x(a-3)=3a-8$$

إذا كان: $a\neq 3$ فإن: $x*a=4 \Leftrightarrow x=\dfrac{3a-8}{a-3}$

ومنه إذا كان $a\neq 3$ فإن $a$ يقبل مماثلا في $(IR,*)$ هو: $\dfrac{3a-8}{a-3}$

والعلاقة: $a*\left(\dfrac{3a-8}{a-3}\right)=4$ محققة لأن القانون $*$ تبادلي في $IR$.

وبالتالي فإن كل عنصر من $IR-\{3\}$ له مماثل في $(IR,*)$.

**2) أ- لنبين أن $]3;+\infty[$ جزء مستقر من $(IR,*)$.**

ليكن $x$ و$y$ عنصرين من $]3;+\infty[$، لدينا:

$$x*y=x(y-3)-3(y-3)+3=(y-3)(x-3)+3$$

وبما أن: $x>3$ و$y>3$ فإن $(x-3)(y-3)>0$ ومنه فإن: $(x-3)(y-3)+3>3$ أي $x*y>3$

إذن: $(\forall x,y\in\,]3,+\infty[)\ ;\ x*y\in\,]3;+\infty[$

يعني أن $]3;+\infty[$ جزء مستقر من $(IR,*)$.

ب- ليكن $x$ عنصرا من $]3;+\infty[$.

لدينا مماثل $x$ في $(IR,*)$ هو: $x'=\dfrac{3x-8}{x-3}$

وبما أن $x'-3=\dfrac{3x-8-3x+9}{x-3}=\dfrac{1}{x-3}$ و$x-3>0$ فإن: $x'-3>0$

يعني $x'$ مماثل $x$ من $]3;+\infty[$ في $(IR,*)$ ينتمي $]3;+\infty[$.

## التمرين 5

نعتبر قانون التركيب الداخلي $*$ المعرف على $IR$ بمايلي: $\forall(x,y)\in IR^2\ ;\ x*y=xy-2(x+y)+6$

1) أ- بين أن $*$ تبادلي وتجميعي.

ب- بين أن $*$ يقبل عنصرا محايدا.

2) أ- هل لكل عنصر من $IR$ مماثل بالنسبة للقانون $*$؟

ب- نضع $E=]2;+\infty[$

بين أن $E$ جزء مستقر من $(IR,*)$.

## الحل

**1) أ- لنبين أن القانون $*$ تبادلي.**

ليكن $x$ و$y$ من $IR$، لدينا: $x*y=xy-2(x+y)+6=yx-2(y+x)+6=y*x$

(لأن الجمع والضرب تبادليان في $IR$)

إذن: $(\forall(x;y)\in IR^2)\ ;\ x*y=y*x$ وبالتالي القانون $*$ تبادلي في $IR$.

- لنبين أن القانون $\circ$ تجميعي:

ليكن $x$ و$y$ و$z$ من $IR$، لدينا:

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (xy - 2(x + y) + 6) * z\\ &= (xy - 2(x + y) + 6)z - 2(xy - 2(x + y) + 6 + z) + 6\\ &= xyz - 2xy - 2yz + 6z - 2xy + 4x + 4y - 12 - 2z + 6\\ &= xyz - 2xz - 2yz - 2xy + 4x + 4y + 4z - 6\end{aligned}$$

ولدينا من جهة أخرى:

$$\begin{aligned}x * (y * z) &= x * (yz - 2(y + z) + 6)\\ &= x(yz - 2(y + z) + 6) - 2(x + yz - 2(y + z) + 6) + 6\\ &= xyz - 2xy - 2xz + 6x - 2x - 2yz + 4y + 4z - 12 + 6\\ &= xyz - 2xz - 2yz - 2xy + 4x + 4y + 4z - 6\end{aligned}$$

ومنه: $(\forall (x;y;z) \in IR^3) \ ; \ (x * y) * z = x * (y * z)$

إذن: القانون $\circ$ تجميعي في $IR$.

**ب- لنبين أن القانون $\circ$ يقبل عنصرا محايدا.**

لدينا القانون $\circ$ تبادلي في $IR$ ومنه فإن:

$e$ هو العنصر المحايد في $(IR;\circ)$ إذا وفقط إذا كان: $(\forall x \in IR) \ ; \ x * e = x$

لدينا: $(\forall x \in IR) \ ; \ x * e = x \Leftrightarrow (\forall x \in IR) \ ; \ xe - 2(x + e) + 6 = x$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow (\forall x \in IR) \ ; \ (e - 3)x + 6 - 2e = 0\\ &\Leftrightarrow (\forall x \in IR) \ ; \ (e - 3)(x - 2) = 0\\ &\Leftrightarrow (e = 3) \text{ أو } ((\forall x \in IR) \ ; \ x - 2 = 0)\end{aligned}$$

وكون العبارة: $(\forall x \in IR) \ ; \ x - 2 = 0$ عبارة خاطئة فإن: $e=3$

إذن 3 هو العنصر المحايد في $(IR;\circ)$.

**2) أ- لنحدد عناصر المجموعة $IR$ التي تقبل مماثلا في $(IR;*)$.**

ليكن $x$ من $IR$ و$x'$ (إذا وجد) مماثله بالنسبة للقانون $\circ$.

لدينا: $x * x' = 3 \Leftrightarrow xx' - 2(x + x') + 6 = 3$

$$\Leftrightarrow x'(x - 2) = 2x - 3$$

- إذا كان: $x \neq 2$ فإن: $x * x' = 3 \Leftrightarrow x' = \dfrac{2x - 3}{x - 2}$

وبما أن $\circ$ تبادلي فإن: $x' * x = 3 \Leftrightarrow x' = \dfrac{2x - 3}{x - 2}$

- إذا كان: $x=2$ فإن $x'$ غير موجود.

إذن كل عنصر $x$ من $IR-\{2\}$، يقبل مماثلا $x'$ في $(IR;\circ)$ هو: $x' = \dfrac{2x - 3}{x - 2}$

**ب- لنبين أن $E$ جزء مستقر من $(IR;\circ)$.**

أي لنبين أن: $(\forall (x;y) \in E^2) \ ; \ x * y \in E$

ليكن $x$ و$y$ من المجال $]2; +\infty[$، لدينا:

$$\begin{aligned}(x * y) - 2 &= xy - 2(x + y) + 4 = xy - 2x - 2y + 4\\ &= x(y - 2) - 2(y - 2) = (y - 2)(x - 2)\end{aligned}$$

لدينا: $x \in ]2; +\infty[$ و $y \in ]2; +\infty[$ يعني أن: $(x-2)(y-2)>0$

إذن: $(x * y) > 2$ أي: $x * y \in ]2; +\infty[$

وبالتالي: $(\forall (x;y) \in E^2)$ ; $x * y \in E$

إذن: $E$ جزء مستقر من $(IR;\circ)$.

## التمرين 6

نزود $IR_+^*$ بالقانون التركيب الداخلي $\circ$ المعرف كمايلي: $(\forall (x,y) \in (IR_+^*)^2)$ ; $x * y = \dfrac{xy}{x + y}$

1) هل القانون $\circ$ تجميعي؟

2) هل القانون $\circ$ يقبل عنصرا محايدا؟

3) حدد مجموعة العناصر المنتظمة في $(IR_+^*, *)$.

## الحل

1) ليكن $x$ و$y$ و$z$ عناصر من $IR_+^*$، لدينا:

$$(x * y) * z = \left(\frac{xy}{x + y}\right) * z = \frac{\dfrac{xyz}{x + y}}{\dfrac{xy}{x + y} + z} = \frac{xyz}{xy + xz + yz}$$

و

$$x * (y * z) = x * \left(\frac{yz}{y + z}\right) = \frac{\dfrac{xyz}{y + z}}{x + \dfrac{yz}{y + z}} = \frac{xyz}{xy + xz + yz}$$

ومنه: $(x * y) * z = x * (y * z)$

إذن: $(\forall (x,y,z) \in (IR_+^*)^3)$ ; $(x * y) * z = x * (y * z)$

يعني أن القانون $\circ$ تجميعي في $(IR_+^*, *)$.

2) إذا وجد عنصر محايد $e$ في $(IR_+^*, *)$ يجب أن يكون لدينا: $(\forall x \in IR_+^*)$ ; $x * e = x$

(نلاحظ أن القانون $\circ$ تبادلي في $IR_+^*$).

لدينا:

$$\begin{aligned}(\forall x \in IR_+^*) ; x * e = x &\Leftrightarrow (\forall x \in IR_+^*) ; \frac{ex}{e + x} = x\\ &\Leftrightarrow (\forall x \in IR_+^*) ; ex = ex + x^2\\ &\Leftrightarrow (\forall x \in IR_+^*) ; x = 0\end{aligned}$$

وبما أن العبارة الأخيرة خاطئة فإنه لا يوجد عنصر محايد في $(IR_+^*, *)$.

3) ليكن $a$ عنصرا من $IR_+^*$.

نفترض أن: $(\forall x,y \in IR_+^*)$ ; $a * x = a * y$

ومنه فإن:
$$a * x = a * y \Leftrightarrow \frac{ax}{a+x} = \frac{ay}{a+y}$$
$$\Leftrightarrow x(a+y) = y(a+x)$$
$$\Leftrightarrow ax = ay$$
$$\Leftrightarrow x = y \qquad (a \neq 0)$$

إذن: $(\forall (x,y) \in IR_+^* \times IR_+^*)\ a * x = a * y \Rightarrow x = y$ وبالتالي في $(IR_+^*, *)$ كل عنصر $a$ منتظم.

## التمرين ٦

ليكن $a \in IR_+^*$ و $G = ]-a,a[$

نعرف العملية التالية: $\forall (x,y) \in G^2 \ ; \ xTy = \dfrac{x+y}{1+\dfrac{xy}{a^2}}$

1) بين أن $T$ قانون تركيب داخلي في $G$.

2) بين أن $T$ تبادلي وتجميعي.

3) بين أن $T$ يقبل عنصرا محايدا.

4) حدد عناصر $G$ التي تقبل مماثلا.

## الحل

**1) لنبين أن $T$ قانون تركيب داخلي في $G$.**

أي لنبين أن: $(\forall (x;y) \in G^2) \ ; \ xTy \in G$

ليكن $x$ و$y$ من $G$، لدينا: $xTy = \dfrac{x+y}{1+\dfrac{xy}{a^2}} = \dfrac{a^2(x+y)}{a^2+xy}$

لدينا:
$$xTy \in G \Leftrightarrow xTy \in ]-a;a[ \ .$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{a^2(x+y)}{a^2+xy}\right| < a$$
$$\Leftrightarrow |a(x+y)| < |a^2+xy|$$
$$\Leftrightarrow a^2(x^2+2xy+y^2) < a^2\left(a^2+2xy+\frac{x^2y^2}{a^2}\right)$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2 < a^2+\frac{x^2y^2}{a^2}$$
$$\Leftrightarrow (x^2-a^2) - \frac{y^2}{a^2}(x^2-a^2) < 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-a^2)(a^2-y^2) < 0$$

بما أن: $x \in ]-a;a[$ و $y \in ]-a;a[$ فإن: $x^2<a^2$ و $y^2<a^2$

يعني أن العبارة: $(x^2-a^2)(a^2-y^2)<0$ عبارة صحيحة، إذن: $(\forall (x,y) \in G^2) \ ; \ xTy \in G$

وبالتالي $T$ قانون تركيب داخلي في $G$.

2) لنبين أن القانون $T$ تبادلي:

ليكن $x$ و$y$ من $G$، لدينا: $xTy = \dfrac{x+y}{1+\dfrac{xy}{a^2}} = \dfrac{y+x}{1+\dfrac{yx}{a^2}} = yTx$ (لأن الجمع والضرب تبادليان في $IR$)

إذن: $(\forall (x;y) \in G^2)\ ;\ xTy = yTx$ ومنه: $T$ قانون تبادلي في $G$.

• لنبين أن القانون $T$ تجميعي:

ليكن $x$ و$y$ و$z$ من $G$، لدينا:

$$(xTy)Tz = \left(\frac{x+y}{1+\frac{xy}{a^2}}\right)Tz = \left(\frac{a^2(x+y)}{a^2+xy}\right)Tz$$

$$= \frac{\frac{a^2(x+y)}{a^2+xy}+z}{1+\frac{(x+y)z}{a^2+xy}} = \frac{a^2(x+y+z)+xyz}{a^2+xy+xz+yz} \qquad (1)$$

ولدينا من جهة أخرى:

$$xT(yTz) = xT\left(\frac{y+z}{1+\frac{yz}{a^2}}\right) = xT\left(\frac{a^2(y+z)}{a^2+yz}\right)$$

$$= \frac{x+\frac{a^2(y+z)}{a^2+yz}}{1+\frac{x(y+z)}{a^2+yz}} = \frac{a^2x+xyz+a^2y+a^2z}{a^2+yz+xy+xz}$$

$$= \frac{a^2(x+y+z)+xyz}{a^2+xy+xz+yz} \qquad (2)$$

من (1) و(2) نستنتج أن: $(xTy)Tz = xT(yTz)$

إذن: $(\forall (x;y;z) \in G^3)\ ;\ (xTy)Tz = xT(yTz)$ وبالتالي القانون $T$ تجميعي في $G$.

3) لنبين أن القانون $T$ يقبل عنصرا محايدا.

لدينا القانون $T$ تبادلي في $G$ ومنه: $e$ هو العنصر المحايد في $(G,T)$ إذا وفقط إذا كان: $(\forall x \in G)\ ;\ xTe = x$

لدينا:
$$(\forall x \in G)\ ;\ xTe = x \Leftrightarrow (\forall x \in ]-a;a[)\ ;\ \frac{x+e}{1+\frac{ex}{a^2}} = x$$
$$\Leftrightarrow (\forall x \in ]-a;a[)\ ;\ a^2(x+e) = x(a^2+ex)$$
$$\Leftrightarrow (\forall x \in ]-a;a[)\ ;\ e(a^2-x) = 0$$
$$\Leftrightarrow e = 0$$

لأن العبارة $(\forall x \in ]-a;a[)\ ;\ a^2 - x = 0$ عبارة خاطئة.

إذن 0 هو العنصر المحايد في $(G;T)$.

4) لنحدد عناصر $G$ التي تقبل مماثلا.

ليكن $x$ من $G$ و$x'$ مماثله في $(G;T)$، لدينا:

$$xTx' = 0 \Leftrightarrow \frac{x + x'}{1 + \frac{xx'}{a^2}} = 0$$
$$\Leftrightarrow x + x' = 0$$
$$\Leftrightarrow x' = -x$$

وبما أن $T$ تبادلي فإن: $x'Tx = 0 \Leftrightarrow x' = -x$

إذن كل عنصر $x$ من $G$ يقبل مماثلا في $G$ هو $-x$.

## التمرين 8

نعرّف على المجال $]-1;1[$ قانونا $T$ بمايلي: $(\forall x, y \in ]-1;1[) \ ; \ xTy = \frac{x+y}{1+xy}$

1) بين أن $T$ قانون تركيب داخلي في $]-1;1[$.

2) بين أن القانون الداخلي $T$ تجميعي في $]-1;1[$.

3) حدد العنصر المحايد $e$ في $(]-1;1[;T)$.

4) بين أن كل عنصر $x$ من $]-1;1[$ يقبل مماثلا في $(]-1;1[;T)$.

## الحل

1) لنبين أن $T$ قانون تركيب داخلي في $]-1;1[$ .

يعني: $(\forall x, y \in ]-1;1[) \ ; \ xTy \in ]-1;1[$

ليكن $x$ و$y$ عنصرين من المجال $]-1;1[$، لدينا: $(xTy) - 1 = \frac{x + y - 1 - xy}{1 + xy} = \frac{(x-1)(1-y)}{1+xy}$

و $(xTy) + 1 = \frac{x + y + 1 + xy}{1 + xy} = \frac{(x+1)(y+1)}{1+xy}$

وبما أن $|x| < 1$ و$|y| < 1$ فإن $|xy| < 1$ أي $-1 < xy < 1$ ومنه فإن: $1+xy>0$

ولدينا: $x-1<0$ و$1-y>0$ ومنه فإن $(x-1)(1-y)<0$ إذن: $\frac{(x-1)(1-y)}{1+xy} < 0$ أي: $xTy<1$

ولدينا: $x+1>0$ و$y+1>0$ ومنه فإن $(x+1)(y+1)>0$

إذن: $\frac{(x+1)(y+1)}{1+xy} > 0$ أي: $-1<xTy$ ، وبالتالي فإن: $xTy \in ]-1;1[$

إذن: $(\forall x, y \in ]-1;1[) \ ; \ xTy \in ]-1;1[$، يعني أن: $T$ قانون تركيب داخلي في $]-1;1[$.

2) لنبين أن القانون $T$ تجميعي في $]-1;1[$.

لتكن $x$ و$y$ و$z$ عناصر من $]-1;1[$، لدينا:

$$(xTy)Tz = \frac{x+y}{1+xy}Tz = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + z.\frac{x+y}{1+xy}} = \frac{x + y + z(1+xy)}{1 + xy + z(x+y)} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$$

ولدينا: $xT(yTz) = xT\dfrac{y+z}{1+yz} = \dfrac{x+\dfrac{y+z}{1+yz}}{1+x.\dfrac{y+z}{1+yz}} = \dfrac{x(1+yz)+z+z}{1+yz+x(y+z)} = \dfrac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$

ومنه فإن: $(xTy)Tz = xT(yTz)$، إذن: $(\forall x,y,z \in ]-1;1[)\ ;\ (xTy)Tz = xT(yTz)$

يعني أن القانون $T$ تجميعي في $]-1;1[$.

**3) تحديد العنصر المحايد $e$.**

نلاحظ أن القانون $T$ تبادلي في $]-1;1[$، ومنه فإن:

$e$ هو العنصر المحايد في $(]-1,1[;T)$ إذا وفقط إذا كان: $(\forall x \in ]-1;1[)\ ;\ xTe = x$

لدينا: $(\forall x \in ]-1;1[)\ ;\ xTe = x \Leftrightarrow (\forall x \in ]-1;1[)\ ;\ \dfrac{x+e}{1+xe} = x$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in ]-1;1[)\ ;\ x+e = x+x^2e$$
$$\Leftrightarrow (\forall x \in ]-1;1[)\ ;\ (x^2-1)e = 0$$

يعني أن $e=0$، إذن $0$ هو العنصر المحايد في $(]-1,1[;T)$

**4) لنبين أن كل عنصر من $]-1;1[$ له مماثل في $(]-1,1[;T)$.**

ليكن $x$ و$y$ عنصرين من $]-1;1[$، لدينا: $xTy = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+y}{1+xy} = 0$

$$\Leftrightarrow x+y = 0$$
$$\Leftrightarrow -x = y$$

ومنه $x$ يقبل مماثلا في $(]-1,1[;T)$ هو $-x$.

## التمرين 9

نعرف في $\mathbb{C}$، قانون التركيب الداخلي $*$ بمايلي:

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2;\ z * z' = zz' + i(z+z') - (1+i)$$

1) بين أن $*$ تبادلي وتجميعي.

2) حدد العنصر المحايد $e$ لهذا القانون.

3) حدد مجموعة الأعداد التي تقبل مماثلا بالنسبة ل $*$.

## الحل

**1) لنبين أن القانون $*$ تجميعي.**

ليكن $z$ و$z'$ و$z''$ من $\mathbb{C}$، لدينا:

$$\begin{aligned}(z*z')*z'' &= (zz' + i(z+z') - (1+i)) * z''\\ &= (zz' + i(z+z') - (1+i))z'' + i(zz' + i(z+z') - (1+i) + z'') - (1+i)\\ &= zz'z'' + i(zz''+z'z'') - (1+i)z'' + izz' - (z+z') + 1 - i + iz'' - 1 - i\\ &= zz'z'' + i(zz''+z'z''+zz') - (z+z'+z'') - 2i \qquad (1)\end{aligned}$$

ولدينا من جهة أخرى:

$$z * (z' * z'') = z * (z'z'' + i(z' + z'') - (1 + i)$$
$$= z(z'z'' + i(z' + z'') - (1 + i)) + i(z + z'z'' + i(z' + z'') - (1 + i)) - (1 + i)$$
$$= zz'z'' + i(zz' + zz'') - (1 + i)z + iz + iz'z'' - (z' + z'') + 1 - i - 1 - i$$
$$= zz'z'' + i(zz' + zz'' + z'z'') - (z + z' + z'') - 2i$$

(2)

من (1) و(2) نستنتج أن: $(z * z') * z'' = z * (z' * z'')$

إذن: $(\forall (z;z';z'') \in \mathbb{C}^3)\ ;\ (z * z') * z'' = z * (z' * z'')$

وبالتالي القانون $*$ تجميعي في $\mathbb{C}$.

**- لنبين أن القانون $*$ تبادلي:**

ليكن $z$ و$z'$ من $\mathbb{C}$، لدينا:

$$z * z' = zz' + i(z + z') - (1 + i)$$
$$= z'z + i(z' + z) - (1 + i)$$ (لأن الجمع والضرب تبادليان في $\mathbb{C}$)
$$= z' * z$$

إذن: $(\forall (z;z') \in \mathbb{C}^2)\ ;\ z * z' = z' * z$

وبالتالي القانون $*$ تبادلي في $\mathbb{C}$.

**2) لنحدد العنصر المحايد $e$ للقانون $*$:**

لدينا القانون $*$ تبادلي ومنه $e$ هو العنصر المحايد في $(\mathbb{C};*)$ إذا وفقط إذا كان: $(\forall z \in \mathbb{C})\ ;\ z * e = z$

لدينا:

$$(\forall z \in \mathbb{C})\ ;\ z * e = z \Leftrightarrow (\forall z \in \mathbb{C})\ ;\ ez + i(e + z) - (1 + i) = z$$
$$\Leftrightarrow (\forall z \in \mathbb{C})\ ;\ (e + i - 1)z + (ie - (1 + i)) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} e + i - 1 = 0 \\ ie - (1 + i) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} e = 1 - i \\ e = \dfrac{1 + i}{i} = 1 - i \end{cases}$$

إذن $e=1-i$ هو العنصر المحايد في $(\mathbb{C};*)$

**3) لنحدد مجموعة الأعداد التي تقبل مماثلا بالنسبة للقانون $*$.**

ليكن $z$ من $\mathbb{C}$ و$z'$ مماثله بالنسبة للقانون $*$ في $\mathbb{C}$.

لدينا:

$$z * z' = e \Leftrightarrow zz' + i(z + z') - (1 + i) = 1 - i$$
$$\Leftrightarrow z'(z + i) = - iz + 2$$

- إذا كان $z \neq - i$ فإن: $z * z' = e \Leftrightarrow z' = \dfrac{-iz + 2}{z + i}$

وبما أن القانون $*$ تبادلي فإن: $z' * z = e \Leftrightarrow z' = \dfrac{-iz + 2}{z + i}$

- إذا كان $z=-i$ فإن $z'$ غير موجود.

إذن كل عنصر $z$ من $\mathbb{C} -\{-i\}$، يقبل مماثلا $z'$ هو $\dfrac{-iz + 2}{z + i}$ بالنسبة للقانون $*$.

## التمرين 10

$E$ مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين $*$ و$T$.
نفترض أن $e$ العنصر المحايد للقانون $*$ وأن $f$ العنصر المحايد للقانون $T$.
ونفترض أن: $\forall (x;y;u;v) \in E^4 : (x*y)T(u*v) = (xTu)*(yTv)$
1) بين أن $e=f$
2) بين أن $\forall (a,b) \in E^2 \ ; \ a*b = aTb$
3) بين أن $*$ تبادلي وتجميعي.

## الحل

1) لنبين أن: $e=f$
لدينا: $(\forall (x;y;u;v) \in E^4) \ ; \ (x*y)T(u*v) = (xTu)*(yTv)$
بأخذ: $x=e$ و$y=f$ و$u=f$ و$v=e$ لدينا: $(e*f)T(f*e) = (eTf)*(fTe)$
أي: $fTf = e*e$ (حسب تعريف $e$ و$f$) إذن $e=f$
2) لنبين أن: $\forall (a,b) \in E^2 \ ; \ a*b = aTb$
ليكن $a$ و$b$ عنصرين من $E$، لدينا:
$a*b = (a*e)T(b*e) = (aTb)*(eTe) = (aTb)*e = aTb$ (لأن $e=f$)
إذن: $(\forall (a;b) \in E^2) \ ; \ a*b = aTb$
3) $*$ لنبين أن القانون $*$ تبادلي.
ليكن $a$ و$b$ من $E$، لدينا: $a*b = (e*a)T(b*e) = (eTb)*(aTe) = b*a$
إذن: $(\forall (a;b) \in E^2) \ ; \ a*b = b*a$، وبالتالي القانون $*$ تبادلي في $E$.
$*$ لنبين أن القانون $*$ تجميعي.
ليكن $a$ و$b$ و$c$ من $E$، لدينا:

$$(a*b)*c = (a*b)Tc = (a*b)T(e*c) = (aTe)*(bTc) = a*(bTc) = a*(b*c)$$

إذن: $(\forall (a;b;c) \in E^2) \ ; \ (a*b)*c = (a*b)*c$، وبالتالي القانون $*$ تجميعي في $E$.

## التمرين 11

نعرّف في $IR$ قانون تركيب داخلي $T$ بمايلي: $(\forall x;y \in IR) \ ; \ xTy = axy + b(x+y) + c$
حيث $a$ و$b$ و$c$ أعداد حقيقية مع: $ab \neq 0$
1) كيف يمكن اختيار الأعداد $a$ و$b$ و$c$ بحيث يكون القانون $T$ تجميعيا في $IR$؟
2) نفترض أن القانون الداخلي $T$ تجميعي في $IR$.
أ- بين أن $T$ يقبل عنصرا محايدا $e$ يتم تحديده بدلالة $a$ و$b$.
ب- ادرس وجود $x'$ مماثل للعنصر $x$ في $(IR,T)$.

1) شرط تجميعية القانون $T$.

يكون القانون $T$ تجميعيا في $IR$ إذا وفقط إذا كان: $(\forall (x;y;z) \in IR^3)$ ; $(xTy)Tz = xT(yTz)$

ليكن $x$ و$y$ و$z$ عناصر من $IR$، لدينا:

$$(xTy)Tz=(axy+b(x+y)+c)Tz$$
$$=a(axy+b(x+y)+c)z+b(axy+b(x+y)+c+z)+c$$
$$=a^2xyz+ab(xz+yz+xy)+b^2(x+y)+acz+bz+bc+c$$

و

$$xT(yTz)=xT(ayz+b(y+z)+c)$$
$$=ax(ayz+b(y+z)+c)+b(x+ayz+b(y+z)+c)+c$$
$$=a^2xyz+ab(xy+xz+yz)+b^2(y+z)+acx+bc+bx+c$$

ومنه فإن:

$$(xTy)Tz = xT(yTz) \Leftrightarrow b^2x + bz + acz = b^2z + acx + bx$$
$$\Leftrightarrow b^2(x-z) - b(x-z) - ac(x-z) = 0$$
$$\Leftrightarrow (b^2 - b - ac)(x-z) = 0$$

إذن القانون $T$ تجميعي في $IR$ إذا وفقط إذا كان: $(\forall (x;y;z) \in IR^3)$ ; $(b^2 - b - ac)(x-z) = 0$

يعني أن: $b^2-b-ac=0$، وبالتالي فإنه إذا كان $b^2=b+ac$ فإن القانون $T$ تجميعي في $IR$.

2) نفترض أن: $b^2=b+ac$

أ- العنصر المحايد في $(IR,T)$.

لدينا القانون $T$ تبادلي في $IR$.

إذا وجد عنصر محايد $e$ في $(IR,T)$ يجب أن يكون لدينا: $(\forall x \in IR)$ ; $xTe = x$

لدينا:

$$(\forall x \in IR) ; xTe = x \Leftrightarrow (\forall x \in IR) ; axe + b(x+e) + c = x$$
$$\Leftrightarrow (\forall x \in IR) ; (ae + b - 1)x + be + c = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} ae + b - 1 = 0 \\ be + c = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} e = \dfrac{1-b}{a} \\ e = \dfrac{-c}{b} \end{cases}$$

($ab \neq 0$ يعني أن $a \neq 0$ و $b \neq 0$)

ولدينا:

$$b^2 = b + ac \Leftrightarrow b(b-1) = ac$$
$$\Leftrightarrow \frac{b-1}{a} = \frac{c}{b}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1-b}{a} = \frac{-c}{b}$$

ومنه فإن القانون $T$ يقبل عنصرا محايدا هو: $e = \dfrac{1-b}{a}$

ب- دراسة وجود العناصر القابلة للمماثلة في $(IR;T)$.

ليكن $x$ عنصرا من $IR$.

العنصر $x$ يقبل مماثلا في $(IR,T)$ إذا وفقط إذا كان: $(\exists x' \in IR)\ ;\ xTx' = -\dfrac{c}{b}$

لدينا: $xTx' = -\dfrac{c}{b} \Leftrightarrow axx' + b(x+x') + c = -\dfrac{c}{b}$

$\Leftrightarrow abxx' + b^2(x+x') + bc = -c$

$\Leftrightarrow x'(abx + b^2) = -c - bc - b^2x$

إذا كان $x \neq -\dfrac{b}{a}$ فإن $x' = -\dfrac{c + bc + b^2x}{b(ax+b)}$

ومنه كل عنصر $x$ من $IR - \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$ يقبل مماثلا بالنسبة للقانون $T$ هو: $x' = -\dfrac{c + bc + b^2x}{b(ax+b)}$

## التمرين 12

ليكن $f$ تشاكلا من $(E,\ast)$ نحو $(F,T)$.

1) $B$ جزء مستقر من $(F,T)$.

بين أن $\overset{-1}{f}(B)$ جزء مستقر من $(E,\ast)$.

2) $A$ جزء مستقر من $(E,\ast)$.

بين أن $f(A)$ جزء مستقر من $(F,T)$.

## الحل

**تذكر أن:** ∗ $(\forall B \in P(F))\ ;\ \overset{-1}{f}(B) \subset E$

∗ $x \in \overset{-1}{f}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

**1) لنبين أن $\overset{-1}{f}(B)$ جزء مستقر من $(E,\ast)$**

ليكن $x_1$ و$x_2$ من $\overset{-1}{f}(B)$ لنبين أن: $x_1 \ast x_2 \in \overset{-1}{f}(B)$

لدينا: $\begin{cases} x_1 \in \overset{-1}{f}(B) \Leftrightarrow f(x_1) \in B \\ x_2 \in \overset{-1}{f}(B) \Leftrightarrow f(x_2) \in B \end{cases}$

بما أن $B$ جزء مستقر من $(F,T)$ فإن: $f(x_1)Tf(x_2) \in B$

وبما أن $f$ تشاكل من $(E;\ast)$ نحو $(F;T)$ فإن: $f(x_1)Tf(x_2) = f(x_1 \ast x_2)$

ومنه: $f(x_1 \ast x_2) \in B$ إذن: $x_1 \ast x_2 \in \overset{-1}{f}(B)$، وبالتالي: $(\forall (x_1,x_2) \in (\overset{-1}{f}(B))^2\ ;\ x_1 \ast x_2 \in \overset{-1}{f}(B)$

يعني أن $\overset{-1}{f}(B)$ جزء مستقر من $(E;\ast)$.

**تذكر أن:** ∗ $(\forall A \in P(E))\ ;\ f(A) \subset F$

∗ $y \in f(A) \Leftrightarrow (\exists x \in A) / f(x) = y$

**2) لنبين أن $f(A)$ جزء مستقر من $(F;T)$.**

ليكن $y_1$ و$y_2$ من $f(A)$، لنبين أن: $y_1Ty_2 \in f(A)$

لدينا: $\begin{cases} y_1 \in f(A) \Leftrightarrow (\exists x_1 \in A) / f(x_1) = y_1 \\ y_2 \in f(A) \Leftrightarrow (\exists x_2 \in A) / f(x_2) = y_2 \end{cases}$

ومنه:
$$y_1Ty_2 = f(x_1)Tf(x_2)$$
$$= f(x_1 * x_2) \quad ((F;T) \text{ نحو } (E;\circ) \text{ لأن } f \text{ تشاكل من })$$

وبما أن $A$ جزء مستقر من $(E;\circ)$ فإن: $x_1 * x_2 \in A$، إذن: $f(x_1 * x_2) \in f(A)$ أي: $y_1Ty_2 \in f(A)$

وبالتالي: $(\forall (y_1;y_2) \in (f(A))^2) \; ; \; y_1Ty_2 \in f(A)$، يعني أن $f(A)$ جزء مستقر من $(F;T)$.

## التمرين 13

نعتبر التطبيق $f$ من $(IR_+^*, \times)$ نحو $(IR, +)$ بحيث: $(\forall x, y \in IR_+^*) \; ; \; f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

1) أ- احسب $f(1)$.

ب- بين أن: $(\forall x \in IR_+^*) \; ; \; f\left(\frac{1}{x}\right) = - f(x)$

2) بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن: $(\forall x \in IR_+^*) \; ; \; (\forall n \in IN) \; ; \; f(x^n) = nf(x)$

3) بين أن $f$ تشاكل من $(IR_+^*, \times)$ نحو $(IR,+)$.

## الحل

1) أ- حساب $f(1)$

لدينا: $(\forall x, y \in IR_+^*) \; ; \; f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

وبالأخص من أجل $x=y=1$ يكون لدينا: $f(1) = f\left(\frac{1}{1}\right) = f(1) - f(1)$

ومنه فإن: $f(1)=0$

ب- لنبين أن: $(\forall x \in IR_+^*) \; ; \; f\left(\frac{1}{x}\right) = - f(x)$

ليكن $x$ عنصرا من $IR_+^*$ لدينا: $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1) - f(x)$

وبما أن $f(1)=0$ فإن $f\left(\frac{1}{x}\right) = - f(x)$، إذن: $(\forall x \in IR_+^*) \; ; \; f\left(\frac{1}{x}\right) = - f(x)$

2) ليكن $x$ عنصرا من $IR_+^*$.

لنبين باستعمال الاستدلال بالترجع أن: $(\forall n \in IN) \; ; \; f(x^n) = nf(x)$

من أجل $n=0$ لدينا: $x^0=1$ و $f(1)=0$ و $0.f(x)=0$

إذن $f(x^0)=0f(x)$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

ليكن $n$ عنصرا من $IN$، نفترض أن $f(x^n)=nf(x)$ ونبين أن: $f(x^{n+1})=(n+1)f(x)$

لدينا: $f(x^{n+1}) - f(x) = f\left(\frac{x^{n+1}}{x}\right) = f(x^n)$

وحسب افتراض الترجع فإن: $f(x^{n+1})-f(x)=nf(x)$، يعني أن: $f(x^{n+1})=nf(x)+f(x)=(n+1)f(x)$

إذن: $(\forall n \in IN) \; ; \; f(x^n) = nf(x)$، وبالتالي فإن: $(\forall x \in IR_+^*) \; ; \; (\forall n \in IN) \; ; \; f(x^n) = nf(x)$

3) لنبين أن $f$ تشاكل من $(IR_+^*, \times)$ نحو $(IR,+)$.

أي: $(\forall x, y \in IR_+^*) \; ; \; f(xy) = f(x) + f(y)$

ليكن $x$ و$y$ عنصرين من $IR_+^*$ لدينا: $f(xy) - f(x) = f\left(\frac{xy}{x}\right) = f(y)$

ومنه فإن: $f(xy)=f(x)+f(y)$، وبالتالي فإن: $f(xy) = f(x) + f(y)$ ; $(\forall x, y \in IR_+^*)$

## التمرين 14

نعتبر القانون $\circ$ المعرف بمايلي: $(\forall (x;y) \in IR^2)$ ; $x * y = x + y - xy$ والتطبيق: $\begin{aligned} f: IR &\to IR \\ x &\mapsto 1-x \end{aligned}$

1) بين أنه إذا كان $g$ تشاكلا تقابليا من $(E;\circ)$ نحو $(F;T)$ فإن $g^{-1}$ تشاكل تقابلي من $(F;T)$ نحو $(E;\circ)$.

2) أ- بين أن $f$ تشاكل تقابلي من $(IR;\circ)$ نحو $(IR;\times)$ ثم استنتج خاصيات $\circ$ في $IR$.

ب- ليكن $a \in IR$، نضع: $\begin{cases} a_1 = a \\ a_2 = a * a \\ a_{n+1} = a_n * a \; ; \; (\forall n \in IN^*) \end{cases}$

باستعمال التشاكل $f$، حدد $a_n$ بدلالة $a$ و$n$.

## الحل

- لدينا: $g:(E;*) \to (F;T)$ تشاكل تقابلي.

ومنه التطبيق $g:E \to F$ تطبيق تقابلي ومنه فإنه يقبل تقابلا عكسيا $g^{-1}$ حيث:

$g^{-1}:F \to E$ تطبيق تقابلي.

**1) لنبين أن $g^{-1}$ تشاكل من $(F;T)$ نحو $(E;*)$.**

ليكن $y_1$ و$y_2$ من $F$، لنبين أن: $g^{-1}(y_1Ty_2) = g^{-1}(y_1) * g^{-1}(y_2)$

لدينا: $\begin{cases} y_1 \in F \Leftrightarrow \exists! x_1 \in E / g(x_1) = y_1 \\ y_2 \in F \Leftrightarrow \exists! x_2 \in E / g(x_2) = y_2 \end{cases}$

ومنه: $g^{-1}(y_1Ty_2) = g^{-1}(g(x_1)Tg(x_2)) = g^{-1}(g(x_1 * x_2)) = x_1 * x_2 = g^{-1}(y_1) * g^{-1}(y_2)$

(لأن $g$ تشاكل من $(E;\circ)$ نحو $(F;T)$)

إذن: $(\forall (y_1;y_2) \in F^2)$ ; $g^{-1}(y_1Ty_2) = g^{-1}(y_1) * g^{-1}(y_2)$، وبالتالي $g^{-1}$ تشاكل تقابلي من $(F;T)$ نحو $(E;\circ)$.

**2) أ- لنبين أن $f$ تشاكل تقابلي من $(IR;\circ)$ نحو $(IR;\times)$.**

- لنبين أن $f$ تشاكل.

ليكن $x$ و$y$ من $IR$، لدينا:

$$\begin{aligned} f(x * y) &= f(x + y - xy) \\ &= 1 - (x + y - xy) = xy - x - y + 1 \end{aligned}$$

ولدينا: $f(x)\times f(y)=(1-x)(1-y)=1-x-y+xy$ ، إذن: $(\forall (x;y) \in IR^2)$ ; $f(x * y) = f(x) \times f(y)$

وبالتالي $f$ تشاكل من $(IR;\circ)$ نحو $(IR;\times)$.

- لنبين أن $f$ تقابل:

طريقة 1: لدينا $f$ متصلة على $IR$ (لأنها دالة حدودية) وتناقصية قطعا على $IR$
إذن $f$ تقابل من $IR$ نحو $f(IR)$ أي نحو $IR$.

طريقة 2: ليكن $y$ من $IR$، هل يوجد $x$ وحيد من $IR$ بحيث: $f(x)=y$

لدينا: $f(x) = y \Leftrightarrow 1 - x = y$

$\Leftrightarrow x = 1 - y$

إذن لكل $y$ من $IR$، المعادلة: $f(x)=y$ حيث $x$ هو المجهول، تقبل حلا وحيدا في $IR$ وبالتالي $f$ تقابل من $IR$ نحو $IR$.

**• استنتاج خاصيات $*$ في $IR$:**

لدينا $f$ تشاكل تقابلي من $(IR;*)$ نحو $(IR;\times)$.

ومنه وحسب السؤال 1-، لدينا $f^{-1}$ تشاكل تقابلي من $(IR;\times)$ نحو $(IR;*)$ وبالتالي خاصيات القانون $*$ تُستَنْتج كالتالي:

$\times$ تجميعي في $IR$ ومنه $*$ تجميعي في $E$.

$\times$ تبادلي في $IR$ ومنه $*$ تبادلي في $E$.

1 هو العنصر المحايد في $IR$) ومنه $f(1) = 0$ هو العنصر المحايد في $(E,*)$.

كل عنصر يخالف 0 له مماثل في $(IR;\times)$ ومنه كل عنصر يخالف $f(0)=0$ له مماثل في $(E,*)$.

**ب- لنحدد $a_n$ بدلالة $a$ و $n$.**

لدينا $f^{-1}$ تشاكل تقابلي من $(IR;\times)$ نحو $(IR;*)$، ومنه: $(\exists! b \in IR) / f^{-1}(b) = a$ أي: $b=1-a$

$$a_2 = a * a = f^{-1}(b) * f^{-1}(b) = f^{-1}(b \times b) = f^{-1}(b^2)$$
$$= 1 - b^2 = 1 - (1 - a)^2$$

لنبين باستعمال البرهان بالترجع أن: $(\forall n \in IN^*) ; a_n = 1 - (1 - a)^n$

من أجل $n=1$، لدينا $a_1=a$ و $1-(1-a)^1=1-1+a=a$

إذن $a_1=1-(1-a)^1$؛ يعني أن الخاصية صحيحة من أجل $n=1$.

ليكن $n$ عنصرا من $IN^*$،

نفترض أن: $a_n=1-(1-a)^n$ لنبين أن: $a_{n+1}=1-(1-a)^{n+1}$

لدينا:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n * a \\ &= (1 - (1 - a)^n) * a \\ &= 1 - (1 - a)^n + a - a(1 - (1 - a)^n) \\ &= 1 - (1 - a)^n + a(1 - a)^n \\ &= 1 - (1 - a)^{n+1} \end{aligned}$$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ وبالتالي: $(\forall n \in IN^*) \; ; \; a_n = 1 - (1 - a)^n$

## التمرين 15

نضع $I=IR^+$، نعرف في $I$ القانون $T$ بمايلي: $(\forall (x;y) \in I^2) \; ; \; xTy = \sqrt{x^2 + y^2}$

1) بين أن التطبيق: $\varphi : I \to I$
$x \mapsto x^2$

تشاكل تقابلي من $(I;T)$ نحو $(I;+)$

2) استنتج خاصيات $T$ في $I$.

3) احسب: $\underbrace{aTaT....Ta}_{n \text{ مرة}}$

## الحل

1) • لنبين أن التطبيق $\varphi$ تشاكل من $(I;T)$ نحو $(I;+)$.

ليكن $x$ و$y$ من $I$، لدينا:

$$\begin{aligned}\varphi(xTy) &= \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}) \\ &= (\sqrt{x^2 + y^2})^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ &= \varphi(x) + \varphi(y)\end{aligned}$$

إذن $(\forall (x;y) \in I^2) \; ; \; \varphi(xTy) = \varphi(x) + \varphi(y)$

وبالتالي $\varphi$ تشاكل من $(I;T)$ نحو $(I;+)$.

• لنبين أن $\varphi$ تقابل من $I$ نحو $I$.

لدينا الدالة: $\varphi : x \mapsto x^2$ متصلة وتزايدية قطعا على $IR^+$، إذن $\varphi$ تقابل من $IR^+$ نحو $\varphi(IR^+) = IR^+$

إذن $\varphi$ تشاكل تقابلي من $(I;T)$ نحو $(I;+)$.

2) لنستنتج خاصيات $T$ في $I$:

لدينا $\varphi$ تشاكل تقابلي من $(I;T)$ نحو $(I;+)$ ومنه خاصيات $T$ في $I$ تُسْتَنْتَج من خاصيات + في $I$.

لدينا: + تجميعي في $IR^+$ إذن $T$ تجميعي في $I$.

+ تبادلي في $IR^+$ إذن $T$ تبادلي في $I$.

0 هو العنصر المحايد في $(IR^+;+)$ إذن $\varphi(0) = 0$ هو العنصر المحايد في $(I;T)$.

3) لنحسب $\underbrace{aTaT...Ta}_{n \text{ مرة}}$ حيث $n \in IN^* - \{1\}$

لدينا: $aTa = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

و$aTaTa = (aTa)Ta = (a\sqrt{2})Ta = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$

لنبين باستعمال البرهان بالترجع أن: $(\forall n \in IN^* - \{1\}) \; \underbrace{aTaT...Ta}_{n \text{ مرة}} = a\sqrt{n}$

من أجل $n=2$، لدينا حسب ما سبق الخاصية محققة.

ليكن $n$ عنصرا من $IN^* - \{1\}$.

نفترض أن: $\underbrace{aTaT...Ta}_{n \text{ مرة}} = a\sqrt{n}$ ؛

لنبين أن: $\underbrace{aTaT...Ta}_{(n+1) \text{ مرة}} = a\sqrt{n+1}$

لدينا:

$$\underbrace{aTaT\ldots Ta}_{(n+1) \text{ مرة}} = (\underbrace{aTaT\ldots Ta}_{n \text{ مرة}})Ta$$

$$= (a\sqrt{n})Ta \quad \text{(حسب افتراض الترجع)}$$

$$= \sqrt{na^2 + a^2}$$

$$= a\sqrt{n+1}$$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

وبالتالي: $(\forall n \in IN^* - \{1\})\ \underbrace{aTaT...Ta}_{n \text{ مرة}} = a\sqrt{n}$

## التمرين 16

نعرف في $IR$ القانون $*$ بمايلي: $(\forall (x;y) \in IR^2)\ ;\ x * y = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}$

نعتبر التطبيق:

$$\varphi: IR \to IR$$
$$x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1) بين أن $\varphi$ تشاكل تقابلي من $(IR;+)$ نحو $(IR;*)$.

2) استنتج خاصيات $*$.

## الحل

1) • **لنبين أن $\varphi$ تشاكل تقابلي من $(IR;+)$ نحو $(IR;*)$.**

ليكن $x$ و$y$ من $IR$، لدينا: $\varphi(x+y) = \dfrac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2}$

و:

$$\varphi(x) * \varphi(y) = \varphi(x)\sqrt{1+\varphi(y)^2} + \varphi(y)\sqrt{1+\varphi(x)^2}$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2}.\sqrt{1 + \frac{(e^y - e^{-y})^2}{4}} + \frac{e^y - e^{-y}}{2}.\sqrt{1 + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4}}$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{4}.\sqrt{4 + e^{2y} - 2 + e^{-2y}} + \frac{e^y - e^{-y}}{4}.\sqrt{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{4}.\sqrt{(e^y + e^{-y})^2} + \frac{e^y - e^{-y}}{4}.\sqrt{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y})}{4} + \frac{(e^y - e^{-y})(e^x + e^{-x})}{4}$$

$$= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-x-y} + e^{x+y} + e^{y-x} - e^{x-y} - e^{-x-y}}{4}$$

$$= \frac{(e^{x+y} - e^{-x-y})}{2} = \varphi(x+y)$$

إذن: $(\forall (x;y) \in IR^2)\ ;\ \varphi(x+y) = \varphi(x) * \varphi(y)$

ومنه $\varphi$ تشاكل من $(IR;+)$ نحو $(IR;*)$.

**• لنبين أن $\varphi$ تقابل.**

– الدالة $\varphi$ متصلة على $IR$ لأنها مجموع دالتين متصلتين على $IR$ هما: $x \mapsto \frac{1}{2}e^{x}$ و $x \mapsto \frac{1}{2}e^{-x}$

– الدالة $\varphi$ قابلة للاشتقاق على $IR$ ولدينا: $(\forall x \in IR)\ ;\ \varphi'(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

ومنه: $(\forall x \in IR)\ ;\ \varphi'(x) > 0$ يعني أن $\varphi$ تزايدية قطعا على $IR$.

إذن $\varphi$ تقابل من $IR$ نحو $\varphi(IR)$ أي $\varphi$ تقابل من $IR$ نحو $IR$.

وبالتالي $\varphi$ تشاكل تقابلي من $(IR;+)$ نحو $(IR;*)$.

**2) استنتاج خاصيات ***

لدينا $\varphi$ تشاكل تقابلي من $(IR;+)$ نحو $(IR;*)$ ومنه جميع خاصيات * في $IR$ تُسْتَنْتَجُ من خاصيات + في $IR$.

لدينا:

+ تجميعي وتبادلي في $IR$ ومنه * تجميعي وتبادلي في $IR$.

0 هو العنصر المحايد في $(IR;+)$ إذن $\varphi(0) = 0$ هو العنصر المحايد في $(IR;*)$.

$-x$ هو مماثل $x$ في $(IR;+)$ إذن $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ هو مماثل $\varphi(x)$ في $(IR;*)$.

## التمرين ١٦

نضع $E=IR^{*}\times IR$

ونعرف في $E$ القانون الداخلي $T$ كالتالي: $(a,b)T(a',b') = (aa', ab'+b)\ ;\ \begin{cases}\forall (a,b) \in E \\ \forall (a',b') \in E\end{cases}$

1) أ– بين أن $T$ تجميعي.

• هل $T$ تبادلي؟

ب– بين أن $T$ يقبل عنصرا محايدا وأن كل عنصر من $E$ يقبل مماثلا.

2) نضع: $F = \{(a,0)\ /a \in IR^{*}\}$

و $f: IR^{*} \to F$

$a \mapsto (a,0)$

بين أن $F$ جزء مستقر في $(E,T)$ وأن $f$ تشاكل شمولي من $(IR^{*},\times)$ نحو $(F,T)$.

3) لتكن $A$ مجموعة الدوال التآلفية $f_{(a,b)}$ من $IR$ نحو $IR$. (أي: $f_{(a,b)}(x)=ax+b$).

أ– بين أن $o$ قانون داخلي في $A$.

ب– بين أن التطبيق: $\varphi: (E,T) \to (A,o)$ تشاكل شمولي. ثم استنتج خاصيات $o$ في $A$.

$(a,b) \mapsto f_{(a,b)}$

## الحل

1) أ– **• لنبين أن $T$ تجميعي.**

ليكن $(a;b)$ و $(a';b')$ و $(a'';b'')$ من $E$، لدينا:

$$[(a;b)T(a';b')]T(a'';b'') = (aa';ab'+b)T(a'';b'')$$
$$= (aa'a'';aa'b''+ab'+b)$$

و: $(a;b)T[(a';b')T(a'';b'')] = (a;b)T(a'a'';a'b''+b')$
$$= (aa'a'', aa'b'' + ab' + b)$$
$$(\forall ((a;b);(a';b');(a'';b'')) \in E^3);[(a;b)T(a';b')]T(a'';b'') = (a;b)T[(a';b')T(a'';b'')]$$

القانون $T$ تجميعي في $E$.

ب- • لنبين أن $T$ يقبل عنصرا محايدا.

$(e_1;e_2)$ هو العنصر المحايد في $(E;T)$ إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall (a;b) \in E) \ ; \ (a;b)T(e_1;e_2) = (a;b)$$
و $$(\forall (a;b) \in E) \ ; \ (e_1;e_2)T(a;b) = (a;b)$$

لدينا: $(\forall (a;b) \in E) \ ; \ (a;b)T(e_1;e_2) = (a;b) \Leftrightarrow (\forall (a;b) \in E) \ ; \ (ae_1, ae_2 + b) = (a;b)$
$$\Leftrightarrow (\forall a \in IR^*) \ ; \ ae_1 = a \text{ و } ae_2=0$$
$$\Leftrightarrow e_1 = 1 \text{ و } e_2=0$$

ولدينا: $(\forall (a;b) \in E) \ ; \ (1;0)T(a;b) = (1 \times a; 1 \times b + 0) = (a;b)$

إذن $(1;0)$ هو العنصر المحايد في $(E;T)$.

**• لنبين أن كل عنصر من $E$ يقبل مماثلا بالنسبة للقانون $T$.**

ليكن $(a;b)$ عنصرا من $E$ و $(a';b')$ مماثله بالنسبة للقانون $T$.

لدينا: $(a;b)T(a';b') = (1;0) \Leftrightarrow (aa';ab'+b) = (1;0)$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} aa' = 1 \\ ab' + b = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a' = \dfrac{1}{a} \\ b' = -\dfrac{b}{a} \end{cases} \quad (a \in IR^* \text{ لأن})$$

ولدينا: $\left(\frac{1}{a}; -\frac{b}{a}\right)T(a;b) = \left(\frac{1}{a} \times a; \frac{1}{a} \times b + \left(-\frac{b}{a}\right)\right) = \left(1; \frac{b}{a} - \frac{b}{a}\right) = (1;0)$

إذن كل عنصر $(a;b)$ من $E$ يقبل مماثلا في $E$ هو $\left(\frac{1}{a}; -\frac{b}{a}\right)$ بالنسبة للقانون $T$.

2) **• لنبين أن $F$ جزء مستقر في $(E;T)$:**

لنبين أن: $(\forall (a;0);(b;0)) \in F^2) : (a;0)T(b;0) \in F$

ليكن $(a;0)$ و $(b;0)$ عنصرين من $F$، لدينا: $(a;0)T(b;0)=(ab;0)$

وبما أن $ab \in IR^*$ فإن $(ab;0) \in F$

إذن: $(\forall ((a;0);(b;0)) \in F^2) \ ; \ (a;0)T(b;0) \in F$

**• لنبين أن $f$ تشاكل شمولي من $(IR^*;\circ)$ نحو $(F;T)$.**

- لنبين أن $f$ تشاكل:

ليكن $a$ و $b$ عنصرين من $IR^*$، لدينا: $f(ab)=(ab;0)$ و $f(a)Tf(b)=(a;0)T(b;0)=(ab;0)$

إذن $(\forall (a;b) \in IR^{*2}) \ ; \ f(a \times b) = f(a)Tf(b)$، ومنه $f$ تشاكل من $(IR^*;\times)$ نحو $(F;T)$.

- لنبين أن $f$ تطبيق شمولي.

ليكن $y$ من $F$، هل يوجد على الأقل $a$ من $IR^*$ بحيث $f(a)=y$

لدينا: $y \in F \Leftrightarrow (\exists a \in IR^*)\,/y = (a;0)$

$\Leftrightarrow (\exists a \in IR^*)\,/y = f(a)$

ومنه: $(\forall y \in F)(\exists a \in IR^*)\,/f(a) = (a;0) = y$

إذن $f$ تطبيق شمولي وبالتالي $f$ تشاكل شمولي من $(IR^*;\times)$ نحو $(F;T)$.

**3) أ- لنبين أن $o$ قانون تركيب داخلي في $A$.**

ليكن $f_{(a;b)}$ و$f_{(a';b')}$ عنصرين من $A$، لنبين أن $f_{(a;b)}of_{(a';b')} \in A$

لدينا: $(\forall x \in IR)\ ;\ f_{(a;b)}(x) = ax + b$ و $f_{(a';b')}(x)=a'x+b'$

ليكن $x$ من $IR$، لدينا: $(f_{(a;b)}of_{(a';b')})(x)=f_{(a;b)}(f_{(a';b')}(x))$

$=f_{(a;b)}(a'x+b')$

$=a(a'x+b')+b$

$=aa'x+(ab'+b)$

لدينا: $(\forall x \in IR)\ ;\ (f_{(a;b)}of_{(a';b')})(x) = aa'x + (ab' + b)$

إذن: $f_{(a;b)}of_{(a';b')}$ دالة تآلفية معرفة من $IR$ نحو $IR$ يعني أن: $(f_{(a;b)}of_{(a';b')}) \in A$

وبالتالي $o$ قانون تركيب داخلي في $A$.

**ب- • لنبين أن التطبيق $\varphi$ تشاكل من $(E;T)$ نحو $(A;o)$.**

ليكن $(a;b)$ و$(a';b')$ عنصرين من $E$، لدينا:

(حسب السؤال أ-) $\varphi((a;b)T(a';b')) = \varphi((aa';ab' + b)) = f_{(aa';ab'+b)}$

$= f_{(a;b)}of_{(a';b')} = \varphi(a;b))\,o\varphi((a';b'))$

إذن $\varphi$ تشاكل من $(E;T)$ نحو $(A;o)$.

**• لنبين أن $\varphi$ تطبيق شمولي من $E$ نحو $A$.**

لتكن $f$ عنصرا من $A$، لدينا: $f \in A \Leftrightarrow (\exists (a;b) \in IR^* \times IR)\,/f = f_{(a;b)}$

$\Leftrightarrow (\exists (a;b) \in IR^* \times IR)\,/f = \varphi(a;b)$

$\Leftrightarrow (\exists (a;b) \in E)\,/\varphi(a;b) = f$

إذن: $(\forall f \in A)(\exists (a;b) \in E)\,/\varphi(a;b) = f$

وبالتالي $\varphi$ تطبيق شمولي.

**• استنتاج خاصيات $o$ في $A$.**

لدينا $\varphi$ تشاكل شمولي يعني أن جميع خاصيات القانون $o$ في $A$ تُسْتَنْتَج من خاصيات $T$ في $E$ ومنه:

• $T$ تجميعي في $E$ ومنه $o$ تجميعي في $A$

• $(1;0)$ هو العنصر المحايد ومنه $\varphi(1;0) = f_{(1;0)}$ أي $f_{(1;0)}: x \mapsto x$ هو العنصر المحايد في $(A;o)$.

• $\left(\dfrac{1}{a};-\dfrac{b}{a}\right)$ هو مماثل $(a;b)$ ومنه $f_{\left(\frac{1}{a};-\frac{b}{a}\right)}$ هو مماثل $f_{(a;b)}$ في $(A;o)$.

## التمرين 18

نعتبر المجموعة $E=\left\{\frac{1+2p}{1+2q} \ / \ (p;q)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

بين أن $(E;\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{Q}^*;\times)$

## الحل

من الواضح أن: $E\subset\mathbb{Q}^*$

• لدينا: $E\neq\phi$ لأن: $1\in E$ من أجل $p=q=0$

• ليكن $x$ و$y$ عنصرين من $E$.

لدينا: $\exists(a,b)\in\mathbb{Z}^2;\ x=\frac{1+2a}{1+2b}$

$\exists(c,d)\in\mathbb{Z}^2;\ y=\frac{1+2c}{1+2d}$

(لاحظ أن: $\forall x\in E\ ;\ x\neq 0$)

ومنه: $xy^{-1}=\frac{(1+2a)(1+2d)}{(1+2b)(1+2c)}=\frac{1+2(a+d+2ad)}{1+2(b+c+2bc)}$

نضع $p=a+d+2ad$ و$q=b+c+2bc$

لدينا: $p\in\mathbb{Z}$ و $q\in\mathbb{Z}$، ومنه: $\exists(p,q)\in\mathbb{Z}^2;\ xy^{-1}=\frac{1+2p}{1+2q}$، وهذا يعني أن: $xy^{-1}\in E$

لدينا إذن: $\left.\begin{array}{r} E\neq\phi \\ \forall(x;y)\in E^2\quad xy^{-1}\in E\end{array}\right\}$

ومنه $(E,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{Q}^*;\times)$

## التمرين 19

نعتبر المجموعتين: $A=\left\{2^n\times 3^m / (n,m)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

$B=\left\{2^{3p}\times 3^{2q} / (p,q)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

1) بين أن $(A,\times)$ زمرة تبادلية.

2) بين أن $B$ زمرة جزئية للزمرة $(A,\times)$.

## الحل

1) $A=\left\{2^n\times 3^m / (n,m)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

لدينا: $A\subset\mathbb{Q}^*$ و$(\mathbb{Q}^*;\times)$ زمرة تبادلية يكفي إذن أن نبين $(A,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{Q}^*;\times)$.

• بما أن $1\in A$ (وذلك من أجل $n=m=0$) فإن $A\neq\phi$

• ليكن $x$ و$y$ عنصرين من $A$.

لدينا: $\exists(n;m)\in\mathbb{Z}^2;\ x=2^n\times 3^m$

$\exists(n';m')\in\mathbb{Z}^2;\ y=2^{n'}\times 3^{m'}$

بما أن: $(\mathbb{Q}^*;\times)$ زمرة تبادلية فإن $y^{-1}=2^{-n'}\times 3^{-m'}$ ، ومنه: $xy^{-1}=(2^n\times 3^m)(2^{-n'}\times 3^{-m'})=2^{n-n'}\times 3^{m-m'}$

نضع: $p=n-n'$ و $q=m-m'$ ، ومنه: $\exists (p;q) \in \mathbb{Z}^2;\ xy^{-1} = 2^p \times 3^q$

وهذا يعني أن: $xy^{-1} \in A$

لدينا إذن: $\left.\begin{matrix} A \neq \phi \\ xy^{-1} \in A \end{matrix}\right\}$ $\forall (x;y) \in A^2$

أي أن $(A;\times)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(\mathbb{Q}^*;\times)$، ومنه: $(A;\times)$ زمرة تبادلية

2) بوضع: $n=3p$ و $m=2q$ نحصل على: $(\forall x \in B)\ ;\quad \exists (n;m) \in \mathbb{Z}^2; x = 2^n \times 3^m$

ومنه: $B \subset A$

لدينا: $1 \in B$ ومنه $B \neq \phi$

ولدينا $\forall (x;y) \in B^2; xy^{-1} \in B$ (تأكد من ذلك)، ومنه: $(B;\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(A;\times)$.

## التمرين 20

نعرف على $IR$ قانون التركيب الداخلي $*$ بمايلي: $a * b = a + b + ab \quad \forall (a,b) \in IR^2$

1) ادرس خاصيات $*$

2) هل $(IR,\circ)$ زمرة؟

3) حدد $S$ مجموعة عناصر $IR$ التي تقبل مماثلا في $(IR,*)$.

4) ليكن $a \in IR$: نضع: $a_1=a$ و $a_{n+1}=a_n * a$ لكل $n$ من $IN^*$.

$(i)$ احسب $a_2$ و $a_3$

$(ii)$ احسب $a_n$ بدلالة $n$.

## الحل

1) • ليكن $a$ و $b$ عنصرين من $IR$

لدينا $a+b=b+a$ و $ab=ba$ ومنه $a * b=b * a$، إذن القانون $*$ تبادلي

• ليكن $a$ و $b$ و $c$ من $IR$ لدينا:

$$(a\circ b)\circ c=(a+b+ab)\circ c=a+b+ab+c+c(a+b+ab)=a+b+c+ab+ac+bc+abc$$

$$a\circ(b\circ c)=a\circ(b+c+bc)=a+b+c+bc+a(b+c+bc) =a+b+c+bc+ab+ac+abc$$

ومنه: $\forall (a;b;c) \in IR^3\ ; (a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$

إذن: القانون $\circ$ تجميعي

• إذا كان $e$ العنصر المحايد للقانون $*$ إذا وجد يكون لدينا $e * a = a * e = a \quad (\forall a \in IR)$

$$a * e = a \Longleftrightarrow a + e + ea = a$$

$$\Longleftrightarrow e(1 + a) = 0$$

– إذا كان $a \neq -1$ فإن $e=0$

– إذا كان $a=-1$: $0\circ(-1)=0+(-1)+0(-1)=-1$، ومنه $a * 0 = a \quad (\forall a \in IR)$

وبما أن القانون $\circ$ تبادلي فإن: $(\forall a \in IR) a * 0 = 0 * a = a$

ومنه 0 هو العنصر المحايد للقانون $*$ في $IR$.

• ليكن $a \in IR$ و $a'$ مماثله بالنسبة للقانون $*$ إذا وجد يحقق $a' * a = a * a' = 0$

لدينا: $a * a' = 0 \iff a + a' + a'a = 0$

$$\iff a'(1 + a) = a$$

إذا كان $a \neq -1$ فإن $a' = \dfrac{-a}{1+a}$

إذا كان $a=-1$: $(-1) * a' = -1 + a' = -1 \neq 0$

إذن $-1$ لا يقبل مماثلا

2) $(IR;*)$ ليست زمرة لأن $-1$ لا يقبل مماثلا في $(IR;*)$

3) عناصر $IR$ التي تقبل مماثل في $(IR;*)$ هي عناصر المجموعة: $S = IR - \{-1\}$

4) ليكن $a \in IR$

لدينا:

$$a_2 = a * a = a + a + a^2 = a^2 + 2a = (a+1)^2 - 1 \quad (i)$$

و

$$a_3 = a_2 * a = (a^2+2a) * a = a^2+2a+a+a(a^2+2a) = a^2+3a+a^3+2a^2$$
$$= a^3+3a^2+3a = (a+1)^3 - 1$$

($i\,i$) حسب $i$) لنبين بالترجع أن: $(\forall n \geq 2)\ ;\ a_n = (a+1)^n - 1$

من أجل $n=2$ لدينا حسب السؤال $(i)$ $\quad a_2=(a+1)^2-1$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n=2$

ليكن $n$ من $IN$ و $n \geq 2$

نفترض أن: $a_n(a+1)^n-1$ ونبين أن: $a_{n+1}=(a+1)^{n+1}-1$

لدينا:

$$a_{n+1} = a_n * a = a_n + a + a.a_n$$
$$= (a+1)^n - 1 + a + a((a+1)^n - 1)$$
$$= (a+1)^n + a + a(a+1)^n - a - 1$$
$$= (a+1)^n(1+a) - 1 = (a+1)^{n+1} - 1$$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

وبالتالي حسب مبدإ الترجع: $(\forall n \geq 2)\, a_n = (a+1)^n - 1$

## التمرين 21

ليكن $T$ قانونَ تركيب داخليّ معرفا على $IR$ بمايلي: $(\forall (x,y) \in IR^2)\ ;\ xTy = x + y + mxy$

حيث $m$ عدد حقيقي غير منعدم.

1) بين أن القانون $T$ تبادلي وتجميعي

2) ليكن $G = IR - \left\{-\dfrac{1}{m}\right\}$

أ- بين أن $G$ جزء مستقر من $(IR, T)$.

ب- بين أن $(G, T)$ زمرة تبادلية.

## الحل

1) ◦ لدينا: $xTy = yTx$ ; $(\forall (x,y) \in IR^2)$، ومنه فإن القانون $T$ تبادلي في $IR$.

◦ ليكن $x$ و$y$ و$z$ عناصر من $IR$، لدينا:

$$(xTy)Tz=(x+y+mxy)Tz=x+y+mxy+z+mz(x+y+mxy)$$
$$=x+y+z+m(xy+xz+yz)+m^2xyz$$

ولدينا:
$$xT(yTz)=xT(y+z+myz)=x+y+z+myz+mx(y+z+myz)$$
$$=x+y+z+m(xy+xz+yz)+m^2xyz$$

ومنه فإن: $(\forall (x,y,z) \in IR^3); (xTy)\,Tz = xT\,(yTz)$

يعني أن القانون $T$ تجميعي في $IR$.

**2) أ- لنبين أن $G$ جزء مستقر من $(IR,T)$**

ليكن $x$ و$y$ عنصرين من $G$، لدينا:

$$(xTy) + \frac{1}{m} = x + y + mxy + \frac{1}{m} = mx\left(\frac{1}{m} + y\right) + \left(y + \frac{1}{m}\right)$$
$$= \left(y + \frac{1}{m}\right)(mx + 1) = \frac{1}{m}\left(x + \frac{1}{m}\right)\left(y + \frac{1}{m}\right)$$

وبما أن $x \neq -\frac{1}{m}$ و$y \neq -\frac{1}{m}$، أي $x + \frac{1}{m} \neq 0$ و$y + \frac{1}{m} \neq 0$ فإن $\left(x + \frac{1}{m}\right)\left(y + \frac{1}{m}\right) \neq 0$.

ومنه فإن: $(xTy) + \frac{1}{m} \neq 0$ يعني أن $xTy \in G$، إذن: $(\forall (x,y) \in G^2); xTy \in G$

يعني أن $G$ جزء مستقر من $(IR,T)$

**ب- لنبين أن $(G,T)$ زمرة تبادلية.**

◦ $G$ جزء مستقر من $(IR,T)$ والقانون $T$ تبادلي وتجميعي في $IR$ ومنه فإن القانون $T$ تبادلي وتجميعي في

◦ لدينا: $xT0 = x$ , $(\forall x \in G)$

ومنه فإن $0$ هو العنصر المحايد في $(G;T)$

◦ ليكن $a$ عنصرا من $G$، لنحدد $x$ من $G$ بحيث: $xTa=0$

لدينا:
$$xTa = 0 \Leftrightarrow x + a + mxa = 0$$
$$\Leftrightarrow x(1 + ma) = -a$$

وبما أن $a \neq -\frac{1}{m}$ فإن: $1 + ma \neq 0$ ومنه فإن: $xTa = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-a}{1 + ma}$

ولدينا: $\frac{-a}{1 + ma} + \frac{1}{m} = \frac{1}{m(1 + ma)}$ ومنه فإن: $\frac{-a}{1 + ma} \neq -\frac{1}{m}$ أي: $\frac{-a}{1 + ma} \in G$

إذن: $(\forall a \in G); (\exists x \in G) / xTa = 0$

يعني أن كل عنصر من $G$ يقبل مماثلا في $(G,T)$

وبالتالي فإن $(G,T)$ زمرة تبادلية.

## التمرين 22

ليكن $(G,.)$ زمرة و $a$ عنصرا من $G$.
نعرّف في المجموعة $G$ قانون التركيب الداخلي $*$ بمايلي: $(\forall (x,y) \in G^2)$ ; $x * y = xa^{-1}y$
ليكن $f$ التطبيق من $G$ نحو $G$ المعرف بمايلي: $(\forall x \in G)$ ; $f(x) = ax$
1) بين أن $f$ تشاكل تقابلي من $(G,.)$ نحو $(G;*)$.
2) ماهي بنية $(G,*)$؟

## الحل

1) • لنبين أن $f$ تشاكل من $(G,.)$ نحو $(G,*)$.
ليكن $x$ و$y$ عنصرين من $G$، لدينا:

$$f(x)*f(y)=(ax)*(ay)=(ax)a^{-1}(ay)=ax(a^{-1}a)y$$

ليكن $e$ العنصر المحايد للزمرة $(G,.)$
بما أن $e=a^{-1}a$ فإن: $ax(a^{-1}a)y=axey=axy$، ومنه فإن: $f(x)*f(y)=axy=f(xy)$
إذن: $(\forall x, y \in G);f(xy) = f(x) * f(y)$، وهذا يعني أن $f$ تشاكل من $(G,.)$ نحو $(G,*)$.

• لنبين أن $f$ تقابل
ليكن $y$ عنصرا من $G$ ، لنحل في $G$ المعادلة: $f(x)=y$، لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Longleftrightarrow ax = y \\ &\Longleftrightarrow a^{-1}(ax) = a^{-1}y \\ &\Longleftrightarrow (a^{-1}a)x = a^{-1}y \\ &\Longleftrightarrow ex = a^{-1}y \\ &\Longleftrightarrow x = a^{-1}y \end{aligned}$$

ومنه فإن المعادلة $f(x)=y$ تقبل حلا وحيدا في $G$ هو $a^{-1}y$، إذن: $(\forall y \in G);(\exists! x \in G) / f(x) = y$
يعني أن $f$ تطبيق تقابلي من $G$ نحو $G$، وبالتالي فإن $f$ تشاكل تقابلي من $(G,.)$ نحو $(G,*)$.
2) بنية $(G,*)$.
لدينا $(G,.)$ و$(G,*)$ متشاكلتان تقابليا و$(G,.)$ زمرة ، ومنه فإن $(G,*)$ زمرة

## التمرين 23

لتكن $(G,o)$ زمرة عنصرها المحايد $e$. ليكن $s$ عنصرا ثابتا من $G$ يخالف $e$ و$s^{-1}$ مماثل $s$ في الزمرة $(G,o)$.
نعرّف في $G$ قانون التركيب الداخلي $*$ بمايلي: $(\forall a,b \in G);\ a * b = aosob$
ونعتبر التطبيق $\varphi$ المعرف بمايلي: $\varphi: G \to G$

$$a \mapsto aos^{-1}$$

1) أ- بين أن $\varphi$ تشاكل تقابلي من $(G,o)$ نحو $(G,*)$.
ب- استنتج بنية $(G,*)$.

2) أ- حدد $\varepsilon$ العنصر المحايد في $(G,_*)$.

ب- ليكن $a$ عنصرا من $G$. حدد $a'$ مماثل $a$ في $(G,_*)$.

3) نفترض أن الزمرة $(G,o)$ تبادلية ونعرّف في $G$ قانون التركيب الداخلي $T$ بمايلي: $(\forall a,b \in G); aTb = e$

بين أن $(G\ ,\ o\ ,\ T)$ حلقة تبادلية.

## الحل

**1) لنبين أن $\varphi$ تشاكل تقابلي من $(G,o)$ نحو $(G,*)$.**

- ليكن $a$ و$b$ عنصرين من $G$، لدينا: $\varphi(aob) = (aob)os^{-1}$

وَ $\varphi(a) * \varphi(b) = (aos^{-1}) * (bos^{-1})$

$$= (aos^{-1})oso(bos^{-1})$$

$$=ao(s^{-1}os)o(bos^{-1})$$ (لأن $o$ تجميعي)

$$=aoeo(bos^{-1})$$ (لأن $sos^{-1}=e$)

$$=ao(bos^{-1})$$ ($e$ هو العنصر المحايد)

$$=(aob)os^{-1}$$

ومنه فإن: $\varphi(aob) = \varphi(a) * \varphi(b)$ إذن: $(\forall a,b \in G);\ \varphi(aob) = \varphi(a) * \varphi(b)$

يعني أن $\varphi$ تشاكل من $(G,o)$ نحو $(G,*)$.

- ليكن $b$ عنصرا من $G$

لنحل في المجموعة $G$ المعادلة $\varphi(a) = b$

لدينا: $\varphi(a) = b \iff aos^{-1} = b$

$$\iff (aos^{-1})os = bos$$

$$\iff ao(s^{-1}os) = bos$$

$$\iff aoe = a = bos$$

إذن المعادلة $\varphi(a) = b$ تقبل حلا وحيدا في $G$ أي $(\forall b \in G);\ (\exists! a \in G)\ /\ \ \varphi(a) = b$

يعني أن $\varphi$ تطبيق تقابلي من $G$ نحو $G$، وبالتالي فإن $\varphi$ تشاكل تقابلي من $(G,o)$ نحو $(G,*)$.

ب- الاستنتاج

لدينا $\varphi$ تشاكل تقابلي من $(G,o)$ نحو $(G,*)$ و$(G,o)$ زمرة، إذن $(G,*)$ زمرة.

2) أ- تحديد $\varepsilon$ العنصر المحايد في $(G,*)$.

لدينا $\varphi$ تشاكل تقابلي من $(G,o)$ نحو $(G,*)$ و$e$ هو العنصر المحايد في $(G,o)$ ومنه فإن $\varphi(e)$ هو العنصر المحايد في $(G,*)$.

يعني أن $\varepsilon = \varphi(e) = e0s^{-1} = s^{-1}$

ب- تحديد $a'$ مماثل $a$ في $(G,*)$.

حسب تعريف قانون التركيب الداخلي $\circ$ في $G$.

لدينا: $a' \circ a = a'osoa$

ومنه فإن: $a' * a = \varepsilon \Longleftrightarrow a'osoa = s^{-1}$

$\Longleftrightarrow a' = s^{-1}o(soa)^{-1}$

$\Longleftrightarrow a' = s^{-1}oa^{-1}os^{1}$

إذن $a' = s^{-1}oa^{-1}os^{-1}$، حيث $a^{-1}$ مماثل $a$ في $(G,o)$.

3) لنبين أن $(G,o,T)$ حلقة تبادلية.

لدينا: $(G,o)$ زمرة تبادلية.

نبين أن القانون $T$ تبادلي.

ليكن $a$ و $b$ عنصرين من $G$.

لدينا $aTb=e$ و $bTa=e$ ومنه فإن: $aTb=bTa$ إذن $(\forall a,b \in G); aTb = bTa$، يعني أن القانون $T$ تبادلي

نبين أن القانون $\circ$ تجميعي

ليكن $a$ و $b$ و $c$ عناصر من $G$

لدينا: $(aTb)Tc=eTc=e$ و $aT(bTc)=aTe=e$ ومنه فإن: $aT(bTc)=(aTb)Tc$

إذن: $(\forall a,b,c \in G); aT(bTc) = (aTb)Tc$ يعني أن القانون $T$ تجميعي

لنبين أن القانون $T$ توزيعي بالنسبة للقانون $o$.

ليكن $a$ و $b$ و $c$ عناصرا من $G$.

لدينا $aT(boc)=e$ لأن $b0c \in G$، ولدينا $(aTb)o(aTc)=eoe=e$ ومنه فإن $aT(boc)=(aTb)o(aTc)$

ولدينا كذلك $(boc)Ta=(bTa)o(cTa)$ لأن القانون $o$ تبادلي والقانون $T$ تبادلي.

إذن $$(\forall a,b,c \in G);\begin{cases} aT(boc) = (aTb)o(aTc) \\ (boc)Ta = (bTa)o(cTa) \end{cases}$$

يعني أن القانون $T$ توزيعي بالنسبة للقانون $o$ وبالتالي فإن $(G,o,T)$ حلقة تبادلية.

## التمرين 24

نزود المجموعة $IR$ بقانون التركيب الداخلي $T$ المعرف بمايلي:

$$(\forall x,y \in IR) \ ; \ xTy = \begin{cases} \sqrt[7]{x^7 + y^7} & ; x^7 + y^7 \geq 0 \\ -\sqrt[7]{-(x^7 + y^7)} & ; x^7 + y^7 \leq 0 \end{cases}$$

وليكن $f$ التطبيق من $IR$ نحو $IR$ المعرف بمايلي: $\begin{cases} f(x) = \sqrt[7]{x} & ; x \geq 0 \\ f(x) = -\sqrt[7]{-x} & ; x \leq 0 \end{cases}$

1) بين أن $f$ تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ نحو $(IR,T)$

2) ماهي بنية $(IR,T)$؟

## الحل

1) لنبين أن $f$ تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ نحو $(IR,T)$

• ليكن $x$ و$y$ عنصرين من $IR$

إذا كان $x+y \geq 0$ فإن $f(x+y)=\sqrt[7]{x+y}$

ولدينا $(f(x))^7=x$ و$(f(y))^7=y$ ومنه فإن $(f(x))^7+(f(y))^7=x+y$ ،

وبما أن $x+y \geq 0$ فإن $(f(x))^7+(f(y))^7 \geq 0$

إذن: $f(x)Tf(y)=\sqrt[7]{(f(x))^7+(f(y))^7}=\sqrt[7]{x+y}=f(x+y)$

إذا كان $x+y \leq 0$ فإن $f(x+y)=-\sqrt[7]{-(x+y)}$

ولدينا $(f(x))^7+(f(y))^7=x+y$ وبما أن: $x+y \leq 0$ فإن: $(f(x))^7+(f(y))^7 \leq 0$

إذن: $f(x)Tf(y)=-\sqrt[7]{-(f(x))^7+(f(y))^7}=-\sqrt[7]{-(x+y)}=f(x+y)$

إذن: $f(x+y)=f(x)Tf(y)$ ;$(\forall (x,y)\in IR^2)$

يعني أن $f$ تشاكل من $(IR,+)$ نحو $(IR,T)$ (1)

• لدينا الدالة $x \mapsto \sqrt[7]{x}$ تقابل من $IR^+$ نحو $IR^+$

ليكن $y$ عنصرا من $IR$.

إذا كان $y \geq 0$ فإنه يوجد عنصر وحيد $x$ من $IR^+$ بحيث: $\sqrt[7]{x}=y$ ، أي $f(x)=y$

إذا كان $y \leq 0$ (أي $-y \geq 0$) فإنه يوجد عنصر وحيد $x$ من $IR^+$ بحيث $-y=\sqrt[7]{x}$ أي $-\sqrt[7]{-x}$ ...

حيث $x \leq 0$

إذن $(\forall y\in IR);\ (\exists! x\in IR)\ /\ f(x)=y$ ، يعني أن $f$ تطبيق تقابلي من $IR$ نحو $IR$. (2)

وبالتالي من (1) و(2) نستنتج أن $f$ تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ نحو $(IR,T)$

2) بنية $(IR,T)$.

لدينا $f$ تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ نحو $(IR,T)$ و$(IR,+)$ زمرة تبادلية ومنه فإن $(IR,T)$ زمرة تبادلية.

## التمرين 25

نضع $I=]0,+\infty[$

1) بين أن: $(\forall x,y\in I):\ e^{x+y}-e^x-e^y+2>1$

2) نعرّف على $I$ قانون التركيب الداخلي $T$ بما يلي: $(\forall x,y\in I);\ xTy=\ln(e^{x+y}-e^x-e^y+2)$

وليكن التطبيق: $f: I \to I$

$x \mapsto \ln(x+1)$

أ- بين أن $f$ تشاكل تقابلي من $(I,\times)$ نحو $(I,T)$ ; ب- استنتج بنية $(I,T)$.

## الحل

1) ليكن $x$ و$y$ عنصرين من المجال $I$. لنبين أن: $e^{x+y}-e^x-e^y+2>1$

لدينا: $(e^{x+y}-e^x-e^y+2)-1=e^xe^y-e^x-e^y+1=e^y(e^x-1)-(e^x-1)=(e^x-1)(e^y-1)$

بما أن $x>0$ و$y>0$ فإن $e^x>1$ و$e^y>1$ أي $e^x-1>0$ و$e^y-1>0$ ومنه فإن $(e^x-1)(e^y-1)>0$

يعني أن: $e^{x+y}-e^x-e^y+2>1$، إذن: $(\forall x, y \in I): e^{x+y} - e^x - e^y + 2 > 1$

2) أ- لنبين أن $f$ تشاكل تقابلي من $(I,\times)$ نحو $(I,T)$.

. ليكن $x$ و$y$ عنصرين من $I$.

لدينا $f(xy) = \ln(xy+1)$ و $f(x)Tf(y) = \ln\left(e^{f(x)+f(x)} - e^{f(x)} - e^{f(y)} + 2\right)$

وبما أن:
$$\begin{aligned} e^{f(x)+f(y)} - e^{f(x)} - e^{f(y)} + 2 &= e^{\ln(1+x)+\ln(1+y)} - e^{\ln(x+1)} - e^{\ln(y+1)} + 2 \\ &= e^{\ln((x+1)(y+1))} - (x+1) - (y+1) + 2 \\ &= (x+1)(y+1) - x - y = xy + 1 \end{aligned}$$

فإن: $f(x)Tf(y) = \ln(xy+1)$، ومنه فإن: $f(xy)=f(x)Tf(y)$

إذن $(\forall x, y \in I);\ f(x\times y) = f(x)Tf(y)$، يعني أن $f$ تشاكل من $(I,\times)$ نحو $(I,T)$

. ليكن $y$ عنصرا من $I$، لنحل في $I$ المعادلة $f(x)=y$

لدينا: 
$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff y = \ln(x+1) \\ &\iff e^y = x+1 \\ &\iff x = e^y - 1 \end{aligned}$$

وبما أن $y>0$ فإن $e^y-1>0$ أي $x>0$، ومنه فإن: $(\forall y \in I); (\exists! x \in I) \ / \ f(x) = y$

يعني أن $f$ تطبيق تقابلي من $I$ نحو $I$ ، وبالتالي فإن $f$ تشاكل تقابلي من $(I,\times)$ نحو $(I,T)$.

ب- الاستنتاج.

لدينا $f$ تشاكل تقابلي من $(I,\times)$ نحو $(I,T)$ و$(I,\times)$ زمرة تبادلية ومنه فإن $(I,T)$ زمرة تبادلية.

## التمرين 26

لتكن $(G,*)$ زمرة عنصرها المحايد $e$

نضع $a^0=e$ و $(\forall n \in IN)\, a^n = \underbrace{a * a * \ldots * a}_{n \text{ مرة}}$

و
$$(\forall n \in \mathbb{Z}^-)\, a^{-n} = \underbrace{a^{-1} * a^{-1} * \ldots * a^{-1}}_{n \text{ مرة}}$$

نضع
$$H = \{a^n / n \in \mathbb{Z}\}$$

1) بين أن $(H,*)$ زمرة جزئية للزمرة $(G,*)$.

2) بين أن $H$ هي أصغر زمرة جزئية للزمرة $(G,*)$ التي تحتوي على $a$.

## الحل

1) لدينا $H \neq \phi$ لأن $e \in H$ مع $a^0=e$

ليكن $x$ و$y$ عنصرين من $H$؛

ومنه : $(\exists n \in \mathbb{Z}); x = a^n$ و $(\exists m \in \mathbb{Z}); y = a^m$

لدينا $x * y^{-1}=a^n * a^{-m}=a^{n-m}$

وبما أن $n - m \in \mathbb{Z}$ فإن $x * y^{-1} \in H$ ومنه $(H,*)$ زمرة جزئية للزمرة $(G,*)$.

2) لتكن $K$ زمرة جزئية للزمرة $(G,*)$ و$a \in K$

ليكن $x \in H$، إذن $(\exists n \in \mathbb{Z}); x = a^n$

إذا كان: $n \in IN$ فإن $x=a^n=\underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ مرة}}$

بما أن $(K,*)$ زمرة فإن $x \in K$

إذا كان $n \in \mathbb{Z}^-$ فإن $x=a^n=a^{-1} * a^{-1} * \dots * a^{-1}$

لدينا $a \in K$ ومنه $a^{-1} \in K$ ومنه $x \in K$

وبالتالي: $(\forall x \in H); x \in K$ أي $H \subset K$

إذن: $H$ هي أصغر زمرة جزئية للزمرة $(G,*)$ التي تحتوي على $a$.

## التمرين 27

لتكن $(G,.)$ زمرة و$a$ عنصرا من $G$.

نعتبر التطبيق $f_a$ من $G$ نحو $G$ المعرف بمايلي: $(\forall x \in G); f_a(x) = axa^{-1}$

1) بين أن $f_a$ تشاكل تقابلي من $(G,.)$ نحو $(G,.)$

2) بين أن $(\forall (a,b) \in G^2); f_a o f_b = f_{ab}$

3) نعتبر المجموعة $H$ المعرفة بمايلي: $H = \{f_a \ / \ a \in G\}$

بين أن $(H,o)$ زمرة.

## الحل

1) • لنبين أن $f_a$ تشاكل من $(G,.)$ نحو $(G,.)$

ليكن $x$ و$y$ عنصرين من $G$، لدينا: $f(xy)=a(xy)a^{-1}=a(xey)a^{-1}$

حيث $e$ هو العنصر المحايد في $(G,.)$.

وبما أن $e=a^{-1}a$ والقانون تجميعي في $G$ فإن:

$$a(xey)a^{-1}=a(xa^{-1}ay)a^{-1}=(axa^{-1})(aya^{-1})=f_a(x)f_a(y)$$

ومنه فإن: $f_a(xy)=f_a(y)f_a(y)$

وبالتالي فإن: $(\forall x,y \in G); f_a(xy) = f_a(x)f_a(y)$

يعني أن $f_a$ تشاكل من $(G,.)$ نحو $(G,.)$

• لنبين أن $f_a$ تقابل.

ليكن $y$ عنصرا من $G$، لنحل في $G$ المعادلة: $f_a(x)=y$

لدينا:
$$f_a(x) = y \iff y = axa^{-1}$$
$$\iff a^{-1}ya = a^{-1}(axa^{-1})a$$
$$\iff a^{-1}ya = (a^{-1}a)x(a^{-1}a)$$

ولدينا $a^{-1}a=e$ ومنه فإن: $f_a(x) = y \iff x = a^{-1}ya$

يعني أن المعادلة $f_a(x)=y$ تقبل حلا وحيدا في $G$.

إذن: $(\forall y \in G)(\exists! x \in G) / y = f_a(x)$؛ يعني أن $f_a$ تطبيق تقابلي

وبالتالي $f_a$ تشاكل تقابلي من $(G,.)$ نحو $(G,.)$

2) لنبين أن: $(\forall (a,b) \in G^2);\ f_a o f_b = f_{ab}$

ليكن $a$ و $b$ عنصرين من $G$.

وليكن $x$ عنصرا من $G$، لدينا:
$$f_a o f_b(x)=f_a(f_b(x))=f_a(bxb^{-1})=a(bxb^{-1})a^{-1}=(ab)x(b^{-1}a^{-1})$$

وبما أن: $b^{-1}a^{-1}=(ab)^{-1}$

فإن:
$$f_a o f_b(x)=(ab)x(ab)^{-1}$$
$$=f_{ab}(x)$$

ومنه فإن: $(\forall x \in G);\ f_a o f_b(x) = f_{ab}(x)$

يعني أن: $f_a o f_b=f_{ab}$

إذن: $(\forall (a,b) \in G^2); f_a o f_b = f_{ab}$

3) لنبين أن $(H,o)$ زمرة.

نعتبر التطبيق $\varphi$ من $G$ نحو $H$ المعرف بمايلي: $(\forall a \in G); \varphi(a) = f_a$

لدينا: $(\forall a,b \in G); f_a o f_b = f_{ab}$

يعني أن $(\forall a,b \in G);\ \varphi(ab) = \varphi(a) o \varphi(b)$

ومنه فإن $\varphi$ تشاكل من $(G,.)$ نحو $(H,o)$

وبما أن: $\varphi(G) = \{\varphi(a) \ / \ a \in G\} = \{f_a \ / \ a \in G\} = H$

فإن $\varphi$ تطبيق شمولي.

إذن $\varphi$ تشاكل من $(G,.)$ نحو $(H,o)$ و $\varphi(G) = H$ و $(G,.)$ زمرة ومنه $(H,o)$ زمرة.

## التمرين 28

لكل زوج $(a,b)$ من $IR^*\times IR$ نعرف التطبيق $f_{(a,b)}$ بمايلي:
$$f_{(a,b)}: IR \to IR$$
$$x \mapsto ax + b$$

ونضع $G = \{f_{(a,b)} / (a,b) \in IR^* \times IR\}$

1) بين أن $(G,o)$ زمرة غير تبادلية.

2) ليكن التطبيق $\varphi$ المعرف بمايلي:
$$\varphi: IR^* \times IR \to G$$
$$(a,b) \mapsto \varphi(a;b) = f_{(a,b)}$$

أ) بين أن $\varphi$ تقابل

ب) عرف قانون تركيب داخلي $T$ على $IR^*\times IR$ لكي يكون $\varphi$ تشاكلا تقابليا من $(IR^*\times IR;T)$ نحو $(G,o)$.
ماهي طبيعة $(IR^*\times IR;T)$؟

## الحل

لدينا: $G = \left\{f_{(a;b)} / (a;b) \in IR^* \times IR\right\}$، حيث: $(\forall x \in IR);\ f_{(a;b)}(x) = ax + b$

**1) لنبين أن: $(G;o)$ زمرة غير تبادلية**

لدينا: $G \subset B(IR;IR)$ حيث $B(IR;IR)$ هي مجموعة التقابلات من $IR$ نحو $IR$.

ولدينا $(B(IR.;IR);o)$ زمرة غير تبادلية،

إذن يكفي أن نبين أن $(G;o)$ زمرة جزئية للزمرة $(B(IR.;IR);o)$

• لدينا: $Id_{IR}=f_{(1,0)}$ ومنه: $Id_{IR} \in G$ وهذا يعني أن: $G \neq \phi$

• ليكن $f_{(a;b)}$ و$f_{(c;d)}$ عنصرين من $G$

لنحدد $f^{-1}_{(a,b)}$ العنصر المماثل للعنصر $f_{(a;b)}$ بالنسبة للقانون $o$ (أي التقابل العكسي للتقابل $f_{(a;b)}$)

ليكن: $y \in IR$

$$f_{a,b}(x) = y \iff ax + b = y$$
$$\iff ax = y - b$$
$$\iff x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$$

ومنه $f_{(a,b)}$ تقابل من $IR$ نحو $IR$ وتقابله العكسي هو: $f^{-1}_{(a;b)} = f_{\left(\frac{1}{a}; -\frac{b}{a}\right)}$

• ليكن $x \in IR$

$$f_{(c;d)} \circ f^{-1}_{(a;b)}(x) = f_{(c;d)}\left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}\right)$$
$$= c\left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}\right) + d$$
$$= \frac{c}{a}x - \frac{bc}{a} + d$$
$$= \frac{c}{a}x + \frac{ad - bc}{a}$$
$$= f_{\left(\frac{c}{a}; \frac{ad-bc}{a}\right)}(x)$$

ومنه: $f_{(c;d)} \circ f^{-1}_{(a;b)} = f_{\left(\frac{c}{a}; \frac{ad-bc}{a}\right)}$

إذن: $f_{(c;d)} \circ f^{-1}_{(a;b)} \in G$

وبالتالي: $(G;o)$ زمرة جزئية للزمرة $(B(IR;IR),o)$، إذن $(G;o)$ زمرة.

2) لدينا:
$$\varphi : IR^* \times IR \to G$$
$$(a;b) \mapsto \varphi_{(a;b)} = f_{(a;b)}$$

أ) لنبين أن $\varphi$ تقابل.

لدينا حسب تعريف المجموعة $G$: $(\forall g \in G)(\exists (a;b) \in IR^* \times IR) : \varphi((a;b)) = f_{(a;b)} = g$

وهذا يعني أن $\varphi$ تطبيق شمولي

لنبين أن $\varphi$ تطبيق تبايني

ليكن $(a;b) \in IR^* \times IR$ و $(c;d) \in IR^* \times IR$ بحيث $\varphi(a;b) = \varphi(c;d)$

$$\varphi(a;b) = \varphi(c;d) \Leftrightarrow f_{(a;b)} = f_{(c;d)}$$
$$\Leftrightarrow (\forall x \in IR) f_{(a;b)}(x) = f_{(c;d)}(x)$$
$$\Leftrightarrow (\forall x \in IR) ax + b = cx + d$$
$$\Leftrightarrow a = c \text{ و } b = d$$
$$\Leftrightarrow (a;b) = (c;d)$$

ومنه $\varphi$ تطبيق تبايني

وبالتالي $\varphi$ تقابل.

ب) لنعرف قانون تركيب داخلي $T$ على $IR^* \times IR$ بحيث يكون $\varphi$ تشاكلا من $(IR^* \times IR;T)$ نحو $(G,o)$

أي لكي يتحقق:
$$(\forall x \in IR) \; ; \; \left(\varphi((a,b)T(c,d))\right)(x) = \left(\varphi(a;b) o \varphi(c;d)\right)(x)$$

لدينا:
$$\left(\varphi(a;b) o \varphi(c;d)\right)(x) = f_{(a;b)} o f_{(c;d)}(x)$$
$$= f_{(a;b)}(cx + d)$$
$$= a(cx + d) + b$$
$$= acx + ad + b$$
$$= f_{(ac;ad+b)}(x)$$

**تذكير:**

إذا كان $f$ تشاكلا تقابليا من $(E,T)$ نحو $(F,\circ)$ فإن $f^{-1}$ أيضا تشاكل تقابلي من $(F,\circ)$ نحو $(E,T)$

إذن يكفي أن يكون القانون $T$ معرف كالتالي:
$$(\forall (a;b) \in IR^* \times IR) \; ; \; (\forall (c;d) \in IR^* \times IR)$$
$$(a;b)T(c;d) = (ac; ad + b)$$

لدينا: $\varphi^{-1}$ تشاكل تقابلي من $(G;o)$ نحو $(IR^* \times IR);T)$ و $(G;o)$ زمرة

ومنه: $(IR^* \times IR);T)$ زمرة

ملحوظة:

لتكن: $f(x) = -x+1$ و $g(x) = 2x+1$ عنصرين من $G$

$$(\forall x \in IR) gof(x) = 2(-x+1) + 1 = -2x + 3$$
$$(\forall x \in IR) fog(x) = -(2x+1) + 1 = -2x$$

ومنه: $gof \neq fog$

إذن القانون $o$ غير تبادلي في $G$.

## التمرين 29

نعرّف في المجموعة $IR^2$ قانون التركيب الداخلي $*$ بمايلي :

$$(\forall (x,y),(x',y') \in IR^2);(x,y) * (x',y') = (x + x' + xx', y + y')$$

ونعتبر المجموعة $G$ المعرفة بمايلي : $G = \{(x,y) \in IR^2; x \neq -1\}$

1. أ) بين أن $(G;*)$ جزء مستقر من $(IR^2,*)$.

ب) بين أن $(G,*)$ زمرة تبادلية.

2. نعتبر المجموعة $H$ المعرفة بمايلي : $H = \{(x, \ln(1+x)) / x \in ]-1,+\infty[\}$

بين أن $(H,*)$ زمرة جزئية للزمرة $(G,*)$.

## الحل

**1. أ) لنبين أن $G$ جزء مستقر في $(IR^2,*)$.**

ليكن $(x,y)$ و$(a,b)$ عنصرين من $G$.

لدينا : $(x,y)*(a,b)=(x+a+xa,y+b)$ ولدينا $x+a+xa+1=x(1+a)+(1+a)$

$=(1+a)(1+x)$

وبما أن $x \neq -1$ و$a \neq -1$ أي $x+1 \neq 0$ و$a+1 \neq 0$ فإن $(1+a)(1+x) \neq 0$

ومنه فإن: $x+a+xa \neq -1$

إذن: $(x+a+xa, y+b) \in G$ أي $(x,y)*(a,b) \in G$

وبالتالي فإن: $(\forall (x,y),(a,b) \in G)\ ; (x,y)*(a,b) \in G$

يعني أن $G$ جزء مستقر من $(IR^2,*)$.

**ب) لنبين أن $(G,*)$ زمرة تبادلية.**

– تبادلية القانون $*$

ليكن $(x,y)$ و$(a,b)$ عنصرين من $G$.

لدينا : $(x,y)*(a,b)=(x+a+xa,y+b)$ وَ $(a,b)*(x,y)=(a+x+ax,b+y)$

$=(x+a+xa,y+b)$

إذن: $(x,y)*(a,b)=(a,b)*(x,y)$

وبالتالي فإن: $(\forall (x,y),(a,b) \in G);(x;y)*(a,b)=(a,b)*(x,y)$

يعني أن القانون $*$ تبادلي في $G$.

– تجميعية القانون $*$

ليكن $(x,y)$ و$(a,b)$ و$(z,t)$ عناصرا من $G$

لدينا :

$$(a,b)*[(x,y)*(z,t)] = (a,b)*(x+z+xz, y+t)$$
$$= (a+x+z+xz+a(x+z+xz), b+y+t)$$
$$= (a+x+z+xz+xa+az+axz, b+y+t)$$

ولدينا:

$$[(a,b)*(x,y)]*(z,t) = (a+x+ax, b+y)*(z,t)$$
$$= (a+x+ax+z+z(a+x+ax, b+y+t)$$
$$= (a+x+z+ax+za+zx+axz, b+y+t)$$
$$= (a+x+z+xz+xa+az+axz, b+y+t)$$

ومنه فإن: $(a,b)*[(x,y)*(z,t)] = [(a,b)*(x,y)]*(z,t)$

إذن $(\forall X,Y,Z \in G); X*(Y*Z) = (X*Y)*Z$

يعني أن القانون ∘ تجميعي في $G$.

- العنصر المحايد للقانون ∘ في $G$.

ليكن $(a,b)$ عنصرا من $G$، لدينا

$$(\forall (x,y) \in G); (x,y)*(a,b) = (x,y) \Longleftrightarrow (\forall (x,y) \in G); (x+a+xa, y+b) = (x,y)$$

$$\Longleftrightarrow (\forall (x,y) \in G); \begin{cases} x+a+xa = x \\ y+b = y \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow (\forall (x,y) \in G); \begin{cases} a(x+1) = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

ومنه فإن: $a=0$ و $b=0$

إذن: $(\forall (x,y) \in G); (x,y)*(0,0) = (x,y)$

و $(0,0)*(x,y)=(x,y)$ محققة لأن القانون * تبادلي.

يعني أن $(0,0)$ هو العنصر المحايد للقانون * في $G$

- العناصر القابلة للمماثلة

ليكن $(x,y)$ و$(a,b)$ عنصرين من $G$ لدينا

$$(x,y)*(a,b) = (0,0) \Longleftrightarrow (x+a+xa, y+b) = (0,0)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x(a+1)+a = 0 \\ y+b = 0 \end{cases}$$

وبما أن $(a,b) \in G$ فإن $a \neq -1$

ومنه فإن: $x(1+a)+a = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{-a}{1+a}$

إذن:

$$(x,y)*(a,b) = (0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-a}{1+a} \\ y = -b \end{cases}$$

لدينا: $\dfrac{-a}{1+a} + 1 = \dfrac{1}{1+a}$ ومنه فإن $\dfrac{-a}{1+a} \neq -1$

إذن: $\left(\dfrac{-a}{1+a}, -b\right) \in G$

يعني أن $(a,b)$ يقبل مماثلا بالنسبة للقانون ∘ في $G$.

وبالتالي

$$(\forall (a,b) \in G); (\exists (x,y) \in G) / \begin{cases} (a,b)*(x,y) = (0,0) \\ (x,y)*(a,b) = (0,0) \end{cases}$$

أي أن كل عنصر من $G$ قابل للمماثلة بالنسبة للقانون $*$ في $G$.

وبالتالي فإن $(G,*)$ زمرة تبادلية.

2. لنبين أن $(H,*)$ زمرة جزئية للزمرة $(G,*)$.

• $H \subset G$

• $H \neq \phi$ لأن $(0,0) \in H$ من أجل $x=0$

• ليكن $X$ و$Y$ عنصرين من $H$ لدينا:

$$X \in H \Leftrightarrow \left(\exists x \in ]-1,+\infty[\right)/X=\left(x,\ln(1+x)\right)$$

و $$Y \in H \Leftrightarrow \left(\exists a \in ]-1,+\infty[\right)/Y=\left(a,\ln(1+a)\right)$$

لدينا $X'=\left(-\frac{x}{1+x},-\ln(1+x)\right)$ هو مماثل العنصر $X$ في $(G,*)$.

ومنه فإن:

$$Y*X'=\left(a,\ln(1+a)\right)*\left(\frac{-x}{1+x},-\ln(1+x)\right)$$

$$=\left(a-\frac{x}{1+x}-\frac{ax}{1+x},\ln(1+a)-\ln(1+x)\right)$$

$$=\left(\frac{a-x}{1+x},\ln\left(\frac{1+a}{1+x}\right)\right)$$

وبما أن: $\frac{1+a}{1+x}=\frac{a-x}{1+x}+1$ فإن: $Y*X'=\left(\frac{a-x}{1+x},\ln\left(1+\frac{a-x}{1+x}\right)\right)$

ولدينا $x>-1$ و$a>-1$ أي $a+1>0$ و$b+1>0$ ومنه فإن $\frac{a-x}{1+x}+1>0$ أي $\frac{a-x}{1+x}>-1$

إذن $\left(\exists \alpha \in ]-1,+\infty[\right)/Y*X'=\left(\alpha,\ln(1+\alpha)\right)$، (حيث: $\alpha=\frac{a-x}{1+x}$)

يعني أن: $Y*X' \in H$

وبالتالي فإن $(H,*)$ زمرة جزئية للزمرة $(G,*)$.

## التمرين 30

نزود المجموعة $G=IR^*\times IR$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بمايلي:

$$(\forall (x,y),(x',y') \in G);(x,y)*(x',y')=\left(xx',xy'+\frac{y}{x'}\right)$$

1. بين أن $(G,*)$ زمرة. هل القانون $*$ تبادلي في $G$؟

2. حدد المجموعة $C$ المعرفة بمايلي:

$$C=\{(x,y)\in G/\forall (a,b)\in G;(x,y)*(a,b)=(a,b)*(x,y)\}$$

3. بين أن $IR^*\times\{0\}$ و$\{1\}\times IR$ و$\mathbb{Q}^*\times\mathbb{Q}$ زمرات جزئية للزمرة $(G,*)$.

4. نعتبر المجموعة $H=\left\{\left(x,k\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)/x\in IR^*\right\}$ حيث: $k\in IR$

بين أن $(H,*)$ زمرة جزئية تبادلية للزمرة $(G,*)$.

## الحل

1. لنبين $(G,*)$ أن زمرة.

- تجميعية القانون $*$ في $G$

ليكن $(a,b)$ و$(c,b)$ و$(e,f)$ عناصر من $G$، لدينا:

$$(a,b)*[(c,d)*(e,f)] = (a,b)*\left(ce, cf + \frac{d}{e}\right)$$

$$= \left(ace, acf + \frac{ad}{e} + \frac{b}{ce}\right)$$

و

$$[(a,b)*(c,d)]*(e,f) = \left(ac, ad + \frac{b}{c}\right)*(e,f)$$

$$= \left(ace, acf + \frac{ad}{e} + \frac{b}{ce}\right)$$

ومنه فإن: $[(a,b)*(c,d)]*(e,f) = (a,b)*[(c,d)*(e,f)]$

إذن القانون $*$ تجميعي في $G$

- تحديد العنصر المحايد في $(G,*)$.

لنحدد $(a,b)$ من $G$ بحيث: $(a,b)*(x,y)=(x,y)$ و $(\forall (x,y) \in G); (x,y)*(a,b) = (x,y)$

$(\forall (x,y) \in G); (x,y)*(a,b) = (x,y)$ يكافئ: $(\forall (x,y) \in G); \left(xa, xb + \frac{y}{a}\right) = (x,y)$

يكافئ: $(\forall (x,y) \in G); \begin{cases} xa = x \\ xb + \frac{y}{a} = y \end{cases}$

يكافئ: $(\forall (x,y) \in G); \begin{cases} x(a-1) = 0 \\ xab + y(a-1) = 0 \end{cases}$

إذن: $a-1=0$ و $ab=0$ أي $a=1$ و $b=0$

ولدينا: $(1,0)*(x,y)=(x,y)$

ومنه فإن $(1,0)$ هو العنصر المحايد في $(G,*)$

- العناصر القابلة للمماثلة.

ليكن $(a,b)$ عنصرا من $G$، لنحدد $(x,y)$ من $G$ بحيث: $(a,b)*(x,y)=1$ و $(x,y)*(a,b)=(1,0)$

لدينا: $(x,y)*(a,b) = (1,0) \iff \left(xa, xb + \frac{y}{a}\right) = (1,0)$

$$\iff \begin{cases} xa = 1 \\ xb + \frac{y}{a} = 0 \end{cases}$$

$$\iff x = \frac{1}{a} \text{ و } y=-b$$

ولدينا: $(a,b)*\left(\frac{1}{a}, -b\right) = (1,0)$

ومنه فإن كل عنصر $(a,b)$ من $G$ له مماثل في $(G,*)$ هو $\left(\frac{1}{a}, -b\right)$

وبالتالي فإن $(G,*)$ زمرة.

• لدينا: $(1,1) * (3,0) = \left(3, \frac{1}{3}\right)$ و$(3,0) \circ (1,1) = (3,3)$

ومنه فإن $(3,0) * (1,1) \neq (1,1) * (3,0)$

إذن القانون $\circ$ غير تبادلي في $G$.

2. تحديد المجموعة $C$.

ليكن $(x,y)$ و$(a,b)$ عنصرين من $G$، لدينا:

$$(x,y) * (a,b) = \left(xa, xb + \frac{y}{a}\right) \quad و \quad (a,b) * (x,y) = \left(ax, ay + \frac{b}{x}\right)$$

ومنه فإن:

$$(a,b) \in C \iff (\forall (x,y) \in G); xb + \frac{y}{a} = ay + \frac{b}{x}$$
$$\iff (\forall (x,y) \in G); x^2ab + yx = a^2xy + ab$$
$$\iff (\forall (x,y) \in G); ab(x^2 - 1) + (1 - a^2)xy = 0$$
$$\iff \begin{cases} ab = 0 \\ a^2 = 1 \end{cases}$$
$$\iff (a = 1 \text{ و } b=0) \text{ او } (a=-1 \text{ و } b=0)$$

إذن: $C = \{(1,0), (-1,0)\}$

**3. • لنبين أن $H_1 = IR^* \times \{0\}$ زمرة جزئية للزمرة $(G,*)$**

- لدينا $H_1 \neq \phi$ لأن $(1,0) \in H_1$

- ليكن $X=(x,0)$ و$Y=(y,0)$ عنصرين من $H_1$

لدينا $\left(\frac{1}{y}, 0\right)$ هو مماثل $Y$ في $(G,*)$.

ومنه فإن: $X * Y^{-1} = (x,0) * \left(\frac{1}{y}, 0\right)$

$$= \left(\frac{x}{y}, 0\right)$$

إذن: $X * Y^{-1} \in H_1$ لأن $\frac{x}{y} \neq 0$

ومنه فإن $H_1$ زمرة جزئية للزمرة $(G,*)$.

**• لنبين أن $H_2 = \{1\} \times IR$ زمرة جزئية $(G,*)$.**

- لدينا $H_2 \neq \phi$، لأن $(1,0) \in H_2$

- ليكن $X=(1,x)$ و$Y=(1,y)$ عنصرين من $H_2$.

لدينا $(1,-y)$ هو مماثل $(1,y)$ في $(G,*)$

ومنه فإن $X * Y^{-1} = (1,x) * (1,-y)$

$= (1, x-y)$

إذن: $X * Y^{-1} \in H_2$

وبالتالي فإن $(H_2,*)$ زمرة جزئية للزمرة $(G,\circ)$.

**لنبين أن $H_3=\mathbb{Q}^*\times\mathbb{Q}$ زمرة جزئية للزمرة $(G,\circ)$.**

- $H_3 \neq \phi$ لأن $(1,0) \in H_3$

- ليكن $X=(a,b)$ و $Y(c,d)$ عنصرين من $H_3$.

لدينا: $\left(\frac{1}{c}, -d\right)$ هو مماثل $(c,d)$ في $(G,*)$.

ومنه فإن: $X * Y^{-1} = (a,b) * \left(\frac{1}{c}, -d\right)$

$$= \left(\frac{a}{c}, bc - ad\right)$$

وبما أن $\frac{a}{c} \in \mathbb{Q}^*$ و $bc - ad \in \mathbb{Q}$ فإن $\left(\frac{a}{c}, bc - ad\right) \in H_3$

إذن $X * Y^{-1} \in H_3$

وبالتالي فإن $(H_3,*)$ زمرة تبادلية جزئية للزمرة $(G,\circ)$.

**4- لنبين أن $(H,\circ)$ زمرة جزئية تبادلية للزمرة $(G,\circ)$.**

- $H \neq \phi$ لأن $(1,0) \in H$

- ليكن $X = \left(x, k\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$ و $Y = \left(y, k\left(y - \frac{1}{y}\right)\right)$ عنصرين من $H$.

لدينا: $\left(\frac{1}{y}, k\left(\frac{1}{y} - y\right)\right)$ هو مماثل $Y$ في $(G,\circ)$.

ومنه فإن: $X * Y^{-1} = \left(x, k\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) * \left(\frac{1}{y}, k\left(\frac{1}{y} - y\right)\right)$

$$= \left(\frac{x}{y}, xk\left(\frac{1}{y} - y\right) + k\left(x - \frac{1}{x}\right)y\right)$$

$$= \left(\frac{x}{y}, k\left(\frac{x}{y} - xy + xy - \frac{y}{x}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{x}{y}, k\left(\frac{x}{y} - \frac{1}{\frac{x}{y}}\right)\right)$$

ولدينا $\frac{x}{y} \neq 0$ ومنه فإن: $X * Y^{-1} \in H$

إذن $(H,\circ)$ زمرة جزئية للزمرة $(G,\circ)$.

- تبادلية القانون $\circ$ في $H$.

ليكن $X = \left(x, k\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$ و $Y = \left(y, k\left(y - \frac{1}{y}\right)\right)$ عنصرين من $H$.

لدينا:

$$X * Y = \left(x, k\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) * \left(y, k\left(y - \frac{1}{y}\right)\right)$$

$$= \left(xy, xk\left(y - \frac{1}{y}\right) + k\left(x - \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{y}\right)$$

$$= \left(xy, k\left(xy - \frac{1}{xy}\right)\right)$$

و

$$Y * X = \left(y, k\left(y-\frac{1}{y}\right)\right) * \left(x, k\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \left(yx, yk\left(x-\frac{1}{x}\right) + k\left(y-\frac{1}{y}\right)\times\frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(yx, k\left(xy-\frac{1}{xy}\right)\right)$$

ومنه فإن: $X \circ Y = Y \circ X$

يعني أن القانون $\circ$ تبادلي في $H$.

وبالتالي فإن $(H,\circ)$ زمرة جزئية تبادلية للزمرة $(G,\circ)$.

## التمرين 31

نعتبر المجموعة $E$ المعرفة كمايلي: $E=\{z\in\mathbb{C} / z = x+iy$ و $(x,y)\in IR^2$ و $xy>0\}$

1) أ- هل $E$ جزء مستقر من $(\mathbb{C},+)$؟

ب- هل $E$ جزء مستقر من $(\mathbb{C},\times)$؟

2) نعرّف في المجموعة $\mathbb{C}$ القانون $\circ$ كمايلي:

$$z * z' = xx' + iyy' \quad ; \quad \begin{cases}(\forall z \in \mathbb{C}); z = x+iy; (x,y)\in IR^2 \\ (\forall z' \in E); z' = x'+iy'; (x',y')\in IR^2\end{cases}$$

أ) بين أن القانون $\circ$ داخلي في $E$.

ب) بين أن $(E,\circ)$ زمرة تبادلية.

3) نعتبر التطبيق $f$ من $E$ نحو $IR$ المعرف بمايلي:

$$f(z) = \ln(xy) \quad ; \quad \left((\forall z\in E) \; ; \; z = x+iy \text{ و } (x,y)\in IR^2\right)$$

أ) بين أن $f$ تشاكل من $(E,\circ)$ نحو $(IR,+)$

ب) حدد المجموعة $N$ المعرفة كمايلي: $N=\{z\in E / f(z)=0\}$

هل $f$ تطبيق تقابلي؟

## الحل

1. أ) هل $E$ جزء مستقر من $(\mathbb{C},+)$؟

ليكن $z$ و $z'$ عنصرين من $E$، لدينا:

$xy>0$ و $z=x+iy$ / $(\exists (x,y)\in IR^2)$ و $x'y'>0$ و $z'=x'+iy'$ / $(\exists (x',y')\in IR)$

ومنه فإن: $z+z'=(x+x')+i(y+y')$

يكون لدينا: $z+z'\in E$ إذا وفقط إذا كان $(x+x')(y+y')>0$

نأخذ: $x=1$ و $x'=-1$ و $y>0$ و $y'<0$

لدينا: $xy>0$ و $x'y'>0$ أي $z\in E$ و $z'\in E$

ولكن $(x+x')(y+y')=0$ أي $z+z' \notin E$

إذن $E$ ليس جزء مستقر من $(\mathbb{C},+)$.

**ب) هل $E$ جزء مستقر من $(\mathbb{C},\times)$؟**

باستعمال كتابة $z$ و $z'$ السابقة نحسب $z \times z'$.

لدينا:

$$z\times z=(x+iy)(x'+iy')=(xx'-yy')+i(xy'+yx')$$

ويكون لدينا $zz' \in E$ إذا وفقط إذا كان: $(xx'-yy')(xy'+yx')>0$

ولكن نأخذ مثلا: $x=y$ و $x'=y'$

إذن $xy>0$ و $x'y'>0$ أي $z \in E$ و $z' \in E$

و $(xx'-yy')(xy'+yx')=0$ أي $zz' \in E$

وبالتالي فإن $E$ ليس جزءا مستقرا من $(\mathbb{C},\times)$.

**2. أ) لنبين أن $*$ قانون داخلي في $E$.**

ليكن $z$ و $z'$ عنصرين من $E$، لدينا:

$xy>0$ و $(\exists(x,y) \in IR^2)$ / $z=x+iy$ وَ $x'y'>0$ و $z'=x'+iy'$ / $(\exists(x',y') \in IR^2)$

وَ $z \circ z'=xx'+iyy'$

يكون لدينا $z * z' \in E$ إذا وفقط إذا كان $xx'(yy')>0$

وبما أن $xx'>0$ و $yy'>0$ فإن $(xx')(yy')>0$ ومنه فإن $z * z' \in E$

إذن $z * z' \in E$ ; $(\forall z,z' \in E)$

يعني أن $\circ$ قانون تركيب داخلي في $E$

**ب) لنبين أن $(E,\circ)$ زمرة تبادلية.**

• **تجميعية القانون $\circ$ في $E$.**

ليكن $z$ و $z'$ و $z''$ عناصر من $E$، بحيث:

$z=x+iy$ و $xy>0$ ; $z'=x'+iy'$ و $x'y'>0$ ; $z''=x''+iz''$ و $x''y''>0$

لدينا

$$(z\circ z')\circ z''=(xx'+iyy')\circ(x''+iy'') \quad \text{و} \quad z\circ(z'\circ z'')=(x+iy)\circ(x'x''+iy'y'')$$

$$=xx'x''+iyy'y'' \qquad\qquad =xx'x'+iyy'y''$$

ومنه فإن $(z\circ z')\circ z''=z\circ(z'\circ z'')$

يعني أن القانون $\circ$ تجميعي في $E$.

• **تبادلية القانون $\circ$ في $E$.**

لدينا $z'\circ z=x'x+iy'y$ و $z\circ z'=xx'+iyy'$

ومنه فإن $z\circ z'=z'\circ z$

يعني أن القانون $\circ$ تبادلي في $E$.

• تحديد العنصر المحايد في $(E,*)$

$a=\alpha+i\beta$ عنصر محايد في $(E,*)$ إذا وفقط إذا كان: $z*a=z \;;\; (\forall z\in E)$

لدينا: $z*a=z \Longleftrightarrow x\alpha+iy\beta=x+iy$

$\Longleftrightarrow x\alpha=x$ و $y\beta=y$

ومنه فإن $(\forall z\in E); z*a=z$ يكافئ $(\beta-1)y=0$ و $(\alpha-1)x=0 ;(\forall x,y\in IR)$

إذن $\alpha=1$ و $\beta=1$

وبالتالي فإن $1+i$ هو العنصر المحايد في $(E,*)$

• العناصر القابلة للمماثلة.

لدينا $z*z'=1+i \Longleftrightarrow xx'+iyy'=1+i$

$\Longleftrightarrow xx'=1$ و $yy'=1$

$\Longleftrightarrow x'=\frac{1}{x}$ و $y'=\frac{1}{y}$

(لاحظ أن $xy>0$ تستلزم أن $x\neq 0$ و $y\neq 0$)

ومنه فإن كل عنصر $z=x+iy$ من $E$ يقبل مماثلا في $(E,*)$ هو: $\frac{1}{x}+i\frac{1}{y}$

وبالتالي فإن $(E,*)$ زمرة تبادلية.

3. أ) لنبين أن $f$ تشاكل.

ليكن $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$ من $E$.

لدينا:
$$\begin{aligned}f(z*z')&=f(xx'+iyy')\\&=\ln\big((xx').(yy')\big)\\&=\ln(xy)+\ln(x'y')\\&=f(z)+f(z')\end{aligned}$$

ومنه فإن $f$ تشاكل من $(E,*)$ نحو $(IR,+)$.

ب) تحديد المجموعة $N$

ليكن $z$ عنصرا من $E$، حيث: $z=x+iy$ مع $(x,y)\in IR^2$ و $xy>0$

لدينا:
$$\begin{aligned}z\in N&\Longleftrightarrow f(z)=0\\&\Longleftrightarrow \ln(xy)=0\\&\Longleftrightarrow xy=1\\&\Longleftrightarrow y=\frac{1}{x}\end{aligned}$$

ومنه فإن: $N=\left\{x+i\frac{1}{x} \;/\; x\in IR^*\right\}$

لدينا $f(1+i)=f(-1-i)=0$ و $1+i\neq -1-i$

ومنه فإن $f$ تطبيق غير تبايني.

## التمرين 32

نعرّف في المجموعة $E = \mathbb{C}\times\mathbb{C}$ قانون التركيب الداخلي $T$ بمايلي :

$$(\forall (a,b),(x,y) \in E);(a,b)T(x,y) = (ax + b\overline{y}, ay + b\overline{x})$$

1. أ) بين أن القانون $T$ تجميعي وغير تبادلي ويقبل عنصرا محايدا.

ب) ليكن $(a,b)$ عنصرا من $E$.

احسب $(a,b)T(0,0)$، هل $(E,T)$ زمرة؟

2. نعتبر المجموعة $F$ المعرفة كمايلي: $F = \{(a,b) \in E/|a| \neq |b|\}$

أ) ليكن $(a,b)$ و$(c,d)$ عنصرين من $F$.

بين أن: $(a,b)T(c,d) \notin F \Longleftrightarrow (a,b) \notin F$ أو $(c,d) \notin F$

استنتج أن $F$ جزء مستقر من $(E,T)$.

ب) بين أن $F$ هي مجموعة العناصر القابلة للمماثلة في $(E,T)$

ماهي بنية $(F,T)$؟

ج) نعتبر المجموعات التالية : $I = \mathbb{C}^*\times\{0\}$ ; $K = \{0\}\times\mathbb{C}^*$ ; $H = IR^*\times\{0\}$

بين أن $H$ و$I$ زمرتين جزئيتين للزمرة $(F,T)$. هل $K$ زمرة جزئية للزمرة $(F,T)$؟

## الحل

1. أ) لنبين أن القانون $T$ تجميعي في $E$.

ليكن $x=(a,b)$ و$y=(c,d)$ و$z=(e,f)$ عناصر من $E$، لدينا :

$$\begin{aligned}(xTy)Tz &= [(a,b)T(c,d)]T(e,f) = (ac + b\overline{d}, ad + b\overline{c})T(e,f)\\ &= ((ac + b\overline{d})e + (ad + b\overline{c})\overline{f}, (ac + b\overline{d})f + (ad + b\overline{c})\overline{e})\\ &= (ace + b\overline{d}e + ad\,\overline{f} + b\overline{c}\overline{f}, acf + b\overline{d}f + ad\overline{e} + b\overline{c}\overline{e})\end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}xT(yTz) &= (a,b)T[(c,d)T(e,f)]\\ &= (a,b)T(ce + d\,\overline{f}, cf + d\overline{e})\\ &= (a(ce + d\,\overline{f}) + b(\overline{cf + d\overline{e}}), a(cf + d\overline{e}) + b(\overline{ce + d\overline{f}}))\\ &= (ace + ad\,\overline{f} + b(\overline{c}\overline{f} + \overline{d}e), acf + ad\overline{e} + b(\overline{c}\overline{e} + \overline{d}f))\\ &= (ace + b\overline{d}e + ad\,\overline{f} + b\overline{c}\overline{f}, acf + b\overline{d}f + ad\overline{e} + b\overline{c}\overline{e})\end{aligned}$$

ومنه فإن: $(xTy)T=xT(yTz)$

إذن: $(\forall x,y,z \in E);(xTy)Tz = xT(yTz)$

يعني أن القانون $T$ تجميعي في $E$.

• القانون $T$ غير تبادلي.

يكفي إيجاد مثال مضاد :

لدينا : $(i,i)T(i,-i)=(-1-1,1+1)=(-2,2)$

و $(i,-i)T(i,i)=(-1-1,-1-1)=(-2,-2)$

ومنه فإن : $(i,i)T(i,-i) \neq (i,-i)T(i,i)$

وبالتالي فإن القانون $T$ غير تبادلي.

• العنصر المحايد للقانون $T$

ليكن $(e,f)$ عنصرا من $E$.

$(e,f)$ عنصر محايد في $(E,T)$ إذا وفقط إذا كان :

$$(e,f)T(x,y)=(x,y) \text{ و } (x,y)T(e,f)=(x,y) \; ; \; (\forall (x,y) \in E)$$

ليكن $(x,y)$ عنصرا من $E$، لدينا :

$$(e,f)T(x,y)=(x,y) \iff (ex+f\overline{y}, ey+f\overline{x})=(x,y)$$

$$\iff \begin{cases} ex+f\overline{y}=x \\ ey+f\overline{x}=y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (e-1)x+f\overline{y}=0 \\ (e-1)y+f\overline{x}=0 \end{cases}$$

ومنه فإنه لدينا :

$$\left((\forall (x,y) \in E); \begin{cases} (e-1)x+f\overline{y}=0 \\ (e-1)y+f\overline{x}=0 \end{cases}\right) \Rightarrow e-1=0 \text{ و } f=0$$

إذن : $(e,f)=(1,0)$

ونتحقق من أن : $(\forall (x,y) \in E) \; ; \; (x,y)T(1,0)=(x,y)$

وبالتالي فإن $(1,0)$ هو العنصر المحايد في $(E,T)$.

ب) • حساب : $(a,b)T(0,0)$

لدينا :
$$(a,b)T(0,0)=(a\times0+b\times0, a\times0+b\times0)$$
$$=(0,0)$$

• الاستنتاج:

بما أن : $(\forall (a,b) \in E); (a,b)T(0,0)=(0,0)$

و $(0,0) \neq (1,0)$ علما أن $(1,0)$ هو العنصر المحايد في $(E,T)$ فإن العنصر $(0,0)$ لا يقبل مماثلا في $(E,T)$.

إذن $(E,T)$ ليس بزمرة.

2. لنبين أن : $(a,b)T(c,d) \notin F \iff (a,b) \notin F$ أو $(c,d) \notin F$

لدينا : $(a,b)T(c,d)=(ac+b\overline{d}, ad+b\overline{c})$

وحسب تعريف المجموعة $F$ يكون لدينا

$$(a,b)T(c,d) \notin F \iff (ac + b\bar{d}, ad + b\bar{c}) \notin F$$
$$\iff |ac + b\bar{d}| = |ad + b\bar{c}|$$
$$\iff |ac + b\bar{d}|^2 = |ad + b\bar{c}|^2$$

وبما أن:
$$|ac + b\bar{d}|^2 = (ac + b\bar{d})(\overline{ac} + \bar{b}d)$$
$$= |a|^2|c|^2 + ac\bar{b}d + b\bar{d}\overline{ac} + |b|^2|d|^2$$

وَ
$$|ad + b\bar{c}|^2 = (ad + b\bar{c})(\overline{ad} + \bar{b}c)$$
$$= |a|^2|d|^2 + ad\bar{b}c + b\bar{c}\overline{ad} + |b|^2|c|^2$$

فإن:
$$(a,b)T(c,d) \notin F \iff |a|^2|c|^2 + |b|^2|d|^2 = |a|^2|d|^2 + |b|^2|c|^2$$
$$\iff |a|^2(|c|^2 - |d|^2) + |b|^2(|d|^2 - |c|^2) = 0$$
$$\iff (|c|^2 - |d|^2)(|a|^2 - |b|^2) = 0$$
$$\iff |c| = |d| \text{ أو } |a| = |b|$$

ولدينا:
$$(a,b) \notin F \iff |a| = |b|$$
$$(c,d) \notin F \iff |c| = |d|$$

ومنه فإن
$$(a,b)T(c,d) \notin F \iff (a,b) \notin F \text{ أو } (c,d) \notin F$$

• الاستنتاج:

ليكن $(a,b)$ و$(c,d)$ عنصرين من $F$.

لدينا حسب ما سبق: $(a,b)T(c,d) \in F \iff (a,b) \in F$ و $(c,d) \in F$

أي $(a,b)T(c,d) \in F$

ومنه فإن: $\left(\forall (a,b),(c,d) \in F\right)\ ;\ (a,b)T(c,d) \in F$

يعني أن $F$ جزء مستقر من $(E,T)$.

**ب) لنبين أن $F$ هي مجموعة العناصر القابلة للمماثلة في $(E,T)$**

• ليكن $(a,b)$ عنصرا من $F$.

لنبين أن $(a,b)$ يقبل مماثلا في $(E,T)$.

أي $(\exists (x,y) \in E) / (a,b)T(x,y) = (1,0)$ وَ $(x,y)T(a,b) = (1,0)$

لدينا:
$$(a,b)T(x,y) = (1,0) \iff (ax + b\bar{y}, ay + b\bar{x}) = (1,0)$$
$$\iff \begin{cases} ax + b\bar{y} = 1 \\ b\bar{x} + ay = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} ax + b\bar{y} = 1 \\ \bar{b}x + \overline{a}\bar{y} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

محددة النظمة (1) هي: $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{vmatrix} = |a|^2 - |b|^2$

ولدينا $(a,b)$ عنصر من $F$ أي $|b| \neq |a|$ ومنه فإن: $\Delta \neq 0$

وبالتالي فإن النظمة (1) تقبل حلا وحيدا هو:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & \overline{a} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\overline{a}}{|a|^2 - |b|^2} \quad \text{و} \quad \overline{y} = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ \overline{b} & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-\overline{b}}{|a|^2 - |b|^2}$$

أي: $(x,y) = \left(\frac{\overline{a}}{|a|^2 - |b|^2}, \frac{-b}{|a|^2 - |b|^2}\right)$

ونتحقق من أن: $\left(\frac{a}{|a|^2 - |b|^2}, \frac{-b}{|a|^2 - |b|^2}\right) T(a,b) = (1,0)$

وبالتالي فإن كل عنصر من $F$ قابل للمماثلة في $(E,T)$.

• عكسيا: ليكن $(a,b)$ عنصرا من $E$.

نفترض أن $(a,b)$ له مماثل في $(E,T)$، ونبين أن: $(a,b) \in F$

لدينا:

$$(\exists (x,y) \in E) \,/\, (x,y)T(a,b) = (1,0) \text{ و } (a,b)T(x,y) = (1,0)$$

يعني أن $(x,y)$ هو مماثل $(a,b)$ في $(E,T)$.

ومنه فإن النظمة: $\begin{cases} ax + b\overline{y} = 1 \\ \overline{b}x + \overline{a}\overline{y} = 0 \end{cases}$ تقبل حلا وحيدا في $E$.

وبالتالي يجب أن تكون محددتها $\Delta$ غير منعدمة (حسب كرامر)

أي $\Delta = |a|^2 - |b|^2 \neq 0$ أي $|a| \neq |b|$

وبالتالي فإن $(a,b) \in F$

إذن $F$ هي مجموعة العناصر القابلة للماثلة في $(E,T)$.

• بنية $(F,T)$.

• لدينا $F$ جزء مستقر من $(E,T)$ وبما أن القانون $T$ تجميعي في $E$ فإن القانون $T$ تجميعي في $F$.

• لدينا $(1,0)$ هو العنصر المحايد في $(E,T)$ و $(1,0) \in F$ ومنه فإن $(1,0)$ هو العنصر المحايد في $(F,T)$.

• ليكن $(a,b)$ عنصر من $F$.

$(a,b)$ يقبل مقلوبا في $(E,T)$ هو $(a,b)'$.

ولدينا $((a,b)')' = (a,b)$ ومنه فإن $(a,b)' \in F$

وبالتالي فإن $(F,T)$ زمرة.

**ج) • لنبين أن $(H,T)$ زمرة جزئية للزمرة $(F,T)$.**

لدينا $H = IR^* \times \{0\} = \{(x,0) \quad / \quad x \in IR^*\}$

$H \subset F$ لأن: $(\forall (x,0) \in H \,;\, |x| \neq 0)$

$H \neq \phi$ لأن $(1,0) \in H$

ليكن $(x,0)$ و$(y,0)$ عنصرين من $H$.

لدينا $\left(\frac{x}{|x|^2}, 0\right)$ هو مماثل $(x,0)$ في $(F,T)$.

ومنه فإن $(y,0)\,T(x,0)' = (y,0)\,T\left(\frac{x}{|x|^2}, 0\right)$

$$= \left(\frac{xy}{|x|^2}, 0\right)$$

وبما أن $x \neq 0$ و$y \neq 0$ فإن $\frac{xy}{|x|^2} \neq 0$ أي $\left(\frac{xy}{|x|^2}, 0\right) \in H$

ومنه فإن $(y,0)\,T(x,0)' \in H$

وبالتالي فإن $(H,T)$ زمرة جزئية للزمرة $(F,T)$.

**• لنبين أن $(I,T)$ زمرة جزئية للزمرة $(F,T)$.**

لدينا: $I = \mathbb{C}^* \times \{0\} = \{(x,0)\ /\ x \neq 0\}$

بما أن: $\forall (x,0) \in I; |x| \neq 0$ فإن $I \subset F$

$H \neq \phi$ لأن $(1,0) \in I$

ليكن $(x,0)$ و$(y,0)$ عنصرين من $I$.

لدينا $\left(\frac{\bar{x}}{|x|^2}, 0\right)$ هو مماثل $(x,0)$ في $(F,T)$

ومنه فإن $(y,0)\,T(x,0)' = (y,0)\,T\left(\frac{\bar{x}}{|x|^2}, 0\right)$

$$= \left(\frac{y\bar{x}}{|x|^2}, 0\right)$$

ولدينا $x \neq 0$ و$y \neq 0$ ومنه: $\frac{y\bar{x}}{|x|^2} \neq 0$ أي $\left(\frac{y\bar{x}}{|x|^2}, 0\right) \in I$

إذن $(y,0)\,T(x,0)' \in I$

وبالتالي فإن $(I,T)$ زمرة جزئية للزمرة $(F,T)$

• لدينا: $K = \{(0,x)\ /\ x \in IR^*\}$

ليكن $(0,x)$ و$(0,y)$ عنصرين من $K$.

لدينا $(0,x)T(0,y)=(xy,0)$

وبما أن $x \neq 0$ و$y \neq 0$ فإن $xy \neq 0$ ومنه فإن $(xy,0) \notin K$

وبالتالي $K$ جزء غير مستقر في $(E,T)$.

إذن $(K,T)$ ليس زمرة جزئية للزمرة $(F,T)$.