التمرين 33

ليكن $a \in IR$ والتطبيق $T_a: P \to P$

$$M(x,y) \mapsto M'(x',y'): \begin{cases} x' = e^a x \\ y' = ae^a x + e^a y \end{cases}$$

نضع: $\mathfrak{I} = \{T_a / a \in IR\}$

1. بين أن o قانون داخلي في $\mathfrak{I}$

2. أ- بين أن $(\mathfrak{I}, o)$ زمرة تبادلية.

ب- بين أن التطبيق: $h:(IR, +) \to (\mathfrak{I}, o)$ تشاكل تقابلي.

$$a \mapsto T_a$$

3. نضع $\mathfrak{I}' = \{T_a / a \in \mathbb{Z}\}$

أ- بين أن $(\mathfrak{I}', o)$ زمرة تبادلية.

ب- لتكن $T_a \in \mathfrak{I}'$ ونضع $(T_a)^0 = I$ (حيث I هو التطبيق المطابق ل (P))

$$(\forall n \in IN); (T_a)^{n+1} = (T_a)^n o T_a \text{ و } (T_a)^{-n} = \left[(T_a)^n\right]^{-1}$$

بين أن $(\forall p \in \mathbb{Z})(T_a)^p = T_{pa}$

ج- ليكن $(a,b) \in IN^* \times IN^*$ و $H = \{(T_a)^p o (T_b)^q / (p,q) \in \mathbb{Z}^2\}$

بين أن H زمرة جزئية من $(\mathfrak{I}', o)$.

الحل

لدينا: $T_a: P \to P$

$$M \mapsto M' \begin{cases} x' = e^a x \\ y' = ae^a x + e^a y \end{cases}$$

• لنحدد $T_b o T_a$:

ليكن $(P) \xrightarrow{T_a} (P) \xrightarrow{T_b} (P)$

$$M \mapsto M_1 \mapsto M'$$

أي: $\begin{cases} x' = e^b x_1 \\ y' = be^b x_1 + e^b y_1 \end{cases}$ و $\begin{cases} x_1 = e^a x \\ y_1 = ae^a x + e^a y \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} x' = e^{a+b} x \\ y' = be^{a+b} x + ae^{a+b} x + e^{a+b} y \end{cases}$

إذن: $\begin{cases} x' = e^{a+b} x \\ y' = (a+b) e^{a+b} x + e^{a+b} y \end{cases}$

$T_b oT_a : P \to P$

وبالتالي :

$$M \mapsto M' : \begin{cases} x' = e^{a+b} \\ y' = (a+b)e^{a+b} + e^{a+b}y \end{cases}$$

إذن : $T_b oT_a = T_{a+b}$

ومنه $T_b oT_a \in \Im$ إذن o قانون تركيب داخلي في $\Im$

2. أ) لدينا حسب السؤال (1) : $T_b oT_a = T_{b+a} = T_{a+b} = T_a oT_b$

ومنه القانون "o" تبادلي في $\Im$.

• ليكن $M' \in P$

لنبين أن : $\exists! M \in P \; T_a(M) = M'$

لدينا :

$$T_a(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = e^a x \\ y' = ae^a x + e^a y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{-a}x' \\ y' = ax' + e^a y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{-a}x' \\ e^a y = -ax' + y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{-a}x' \\ y = -ae^{-a}x' + e^{-a}y' \end{cases}$$

وبالتالي : $(\forall M' \in P) \; ; \; (\exists! M \in P) \; : T_a(M) = M'$

ومنه : T_a تقابل من P نحو P، ولدينا : $(\forall a \in IR) \;\; T_a^{-1} = T_{-a}$

إذن $\Im \subset B(P,P)$ ($B(P,P)$ مجموعة التقابلات من P نحو P)

وبما أن $(B(P;P);o)$ زمرة. وَ $\Im$ جزء مستقر من $(B(P;P);o)$ فإن o تجميعي في $\Im$.

• لدينا : $T_o = Id_{(p)}$ ومنه $Id_{(p)} \in \Im$

ولدينا : $(T_a^{-1}) = T_{-a}$ ومنه $T_a^{-1} \in \Im$

وبالتالي : $(\Im, o)$ زمرة تبادلية

ب) لدينا : $h : (IR, +) \to (\Im, o)$

$a \mapsto T_a$

ليكن $(a;b) \in IR^2$ لدينا : $h(a+b) = T_{a+b} = T_a oT_b = h(a)oh(b)$

ومنه : h تشاكل من $(IR,+)$ نحو $(\Im, o)$

• لدينا : $f \in \Im \Leftrightarrow (\exists a \in IR) \; ; f = T_a = h(a)$

ومنه h شمولي.

• ليكن (a,b) من IR^2.

لدينا :

$$h(a) = h(b) \Leftrightarrow T_a = T_b$$

$$\Leftrightarrow T_a oT_a^{-1} = T_b oT_a^{-1}$$

$$\Leftrightarrow T_0 = T_b oT_{-a}$$

$$\Leftrightarrow T_0 = T_{b-a}$$

إذن: $b-a=0$ ومنه $a=b$.

إذن: h تبايني ومنه h تقابل وبالتالي h تشاكل تقابلي.

3) $\mathfrak{I}' = \{T_a / a \in \mathbb{Z}\}$

أ) لدينا: $\mathfrak{I} = \{T_a / a \in IR\}$

ومنه: $\mathfrak{I}' \subset \mathfrak{I}$

لدينا "o" تبادلي وتجميعي في $\mathfrak{I}$ إذن فهو كذلك في $\mathfrak{I}'$

$(\forall a \in \mathbb{Z})\ ;\ T_a^{-1} = T_{-a}$

بما أن $(\forall a \in \mathbb{Z})\ ;\ -a \in \mathbb{Z}$

فإن: $T_{-a} = T_a^{-1} \in \mathfrak{I}'$

إذن، كل عنصر من $\mathfrak{I}'$ له مماثل في $\mathfrak{I}'$.

ولدينا: $Id_{(p)} = T_0 \in \mathfrak{I}'$

ومنه: T_0 هو العنصر المحايد ل $\mathfrak{I}'$

وبالتالي: $(\mathfrak{I}', o)$ زمرة تبادلية.

ب) لنبين أن: $(T_a)^p = T_{pa}\ ;\ (\forall p \in \mathbb{Z})$

لنبين على الخاصية في IN بالترجع.

لدينا: $(T_a)^0 = Id_{(p)} = T_0$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $p=0$

ليكن $p \in IN$

نفترض أن $(T_a)^p = T_{pa}$ ونبين أن: $(T_a)^{p+1} = T_{(p+1)a}$

لدينا: $(T_a)^{p+1} = (T_a)^p o T_a = T_{pa} o T_a = T_{ap+a} = T_{(p+1)a}$

وبالتالي: $(\forall p \in IN)\ ;\ (T_a)^p = T_{ap}$

• ليكن $p \in \mathbb{Z}^-$ لدينا: $-p \in IN$

ومنه: $(T_a)^p = (T_a^{-p})^{-1} = (T_{-pa})^{-1} = T_{pa}$

وبالتالي: $(\forall p \in \mathbb{Z})\ ;\ (T_a)^p = T_{ap}$

ج) ليكن $a \in IN^*$ و $b \in IN^*$

و $H = \{(T_a)^p o (T_b)^q / (p,q) \in \mathbb{Z}^2\}$

لدينا: $(T_a)^p o (T_b)^q = T_{pa} o T_{bq} = T_{pa+qb}$

ومنه: $(\forall f \in H)\ ;\ f \in \mathfrak{I}'$

يعني أن: $H \subset \mathfrak{I}'$

لدينا $p = q = 0 \Rightarrow (T_a)^p o (T_b)^q = I$

أي إن: $I \in H$

ومنه $H \neq \phi$

• ليكن f و g من H

لدينا :
$$f = T_{pa+qb};(p,q) \in \mathbb{Z}^2$$
$$g = T_{p'a+q'b};(p';q') \in \mathbb{Z}^2$$
$$fog^{-1} = T_{pa+qb}o\,(T_{p'a+q'b})^{-1}$$
$$= T_{pa+qb}oT_{-p'a-q'b}$$
$$= T_{(p-p')a+(q-q')b}$$

نضع : $(p'' = p - p' \in \mathbb{Z})$ و $(q'' = q - q' \in \mathbb{Z})$

ومنه : $fog^{-1} = T_{p''a+q''b};(p'',q'') \in \mathbb{Z}^2$

إذن : $fog^{-1} \in H \quad (\forall (f;g) \in H^2)$

وبالتالي : (H,o) زمرة جزئية للزمرة $(\Im',o)$.

التمرين 34

نعتبر المجموعة E المعرفة بمايلي : $E = \left\{M(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ x\ell nx & x \end{pmatrix} / x \in IR_+^* \right\}$

ليكن φ التطبيق المعرف بمايلي : $\varphi : IR_+^* \to E$
$$x \mapsto M(x)$$

1. بين أن φ تشاكل تقابلي من $(IR_+^*, \times)$ نحو $(E,\times)$
2. ماهي بنية $(E,\times)$؟
3. حدد المصفوفتين : $(M(x))^{-1}$ و $(M(x))^n$، حيث : $x \in IR_+^*$ و $n \in IN^*$

الحل

1. • لنبين أن φ تشاكل من $(IR_+^*, \times)$ نحو $(E,\times)$

ليكن x و y عنصرين من IR_+^* ، لدينا :
$$M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ x\ell nx & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 0 \\ y\ell ny & y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} xy & 0 \\ xy\ell nx + xy\ell ny & xy \end{pmatrix}$$

وبما أن :
$$xy\ell nx + xy\ell ny = xy(\ell nx + \ell ny)$$
$$= xy\ell n(xy)$$

فإن :
$$M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ xy\ell n(xy) & xy \end{pmatrix} = M(xy)$$

ومنه فإن :
$$\varphi(xy) = \varphi(x) \times \varphi(y)$$

إذن: $(\forall x,y \in IR_+^*);\varphi(xy) = \varphi(x)\times\varphi(y)$

يعني أن φ تشاكل من $(IR_+^*,\times)$ نحو $(E,\times)$

• لنبين أن φ تقابل.

لدينا: $(\forall M \in E):(\exists x \in IR_+^*)/M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ x\ell nx & x \end{pmatrix}$

يعني أن $(\forall M \in E);(\exists x \in IR_+^*)/\varphi(x) = M$

أي أن φ تطبيق شمولي.

ليكن x وy عنصرين من IR_+^* بحيث $\varphi(x) = \varphi(y)$

لدينا $\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & 0 \\ x\ell nx & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ y\ell ny & y \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow x = y$ و $x\ell nx = y\ell ny$

$\Leftrightarrow x = y$

ومنه فإن: $(\forall x,y \in IR_+^*);\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y$

يعني أن φ تطبيق تبايني.

ومنه فإن φ تطبيق تقابلي.

وبالتالي فإن φ تشاكل تقابلي من $(IR_+^*,\times)$ نحو $(E,\times)$

2. بنية $(E,\times)$

لدينا $(IR_+^*,\times)$ و$(E,\times)$ متشاكلتان تقابليا و$(IR_+^*,\times)$ زمرة تبادلية ومنه فإن $(E,\times)$ زمرة تبادلية.

3. لدينا: $(M(x))^{-1} = (\varphi(x))^{-1} = \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ -\frac{\ell nx}{x} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$

و $(M(x))^n = (\varphi(x))^n = \varphi(x^n) = \begin{pmatrix} x^n & 0 \\ nx^n\ell nx & x^n \end{pmatrix}$

التمرين 35

نعتبر المجموعة E المعرفة بمايلي: $E = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix} / (a;b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$

1) بين أن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية

2) أ- بين أن: $(\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2)$: $a^2 - 5b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

ب- بين أن الحلقة $(E;+;\times)$كاملة.

3) نعتبر المجموعة التالية: $F\left\{\begin{pmatrix} 2x-y & y \\ 5y & 2x-y \end{pmatrix} / (x;y) \in \mathbb{Z}^2\right\}$

أ- بين أن $(F,+)$ زمرة جزئية للزمرة $(E,+)$

ب- بين أن: $(\forall X \in E)\ ;\ (\forall M \in F)\ ;\ X\times M \in F$

1) لنبين أن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية

• لنبين أن: $(E,+)$ زمرة تبادلية.

لدينا $E \subset \mathcal{M}_2(IR)$ و$(\mathcal{M}_2(IR);+)$ زمرة تبادلية ومنه يكفي أن نبين أن $(E,+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(\mathcal{M}_2(IR);+)$.

$E \neq \phi$، لأن $\theta \in E$ حيث θ هي المصفوفة المنعدمة.

ليكن M وN عنصرين من E؛

لدينا: $M \in E \Leftrightarrow (\exists (a;b) \in \mathbb{Z}^2);M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix}$

و $N \in N \Leftrightarrow (\exists (x;y) \in \mathbb{Z}^2);N = \begin{pmatrix} x & y \\ 5y & x \end{pmatrix}$

ومنه فإن: $M + (-N) = \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x & -y \\ -5y & -x \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a-x & b-y \\ 5(b-y) & a-x \end{pmatrix}$$

نضع: $\alpha = a - x$ و$\beta = b - y$

لدينا: $\alpha \in \mathbb{Z}$ و $\beta \in \mathbb{Z}$ و $M + (-N) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 5\beta & \alpha \end{pmatrix}$ أي $M + (-N) \in E$

إذن
$$\begin{cases} E \neq \phi \\ (\forall M,N \in E);M + (-N) \in E \end{cases}$$

يعني أن E زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(\mathcal{M}_2(IR);+)$

وبالتالي فإن $(E,+)$ زمرة تبادلية.

• لنبين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(IR);\times)$

ليكن M وN عنصرين من E حيث: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix}$ و $N = \begin{pmatrix} x & y \\ 5y & x \end{pmatrix}$، مع a وb وx وy عناصر من $\mathbb{Z}$

لدينا:
$$M \times N = \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 5y & x \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ax + 5by & ay + bx \\ 5bx + 5ay & 5by + ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + 5by & ay + bx \\ 5(ay + bx) & ax + 5by \end{pmatrix}$$

نضع: $\alpha = ax + 5by$ و $ay + bx = \beta$

لدينا: $\alpha \in \mathbb{Z}$ و $\beta \in \mathbb{Z}$ و $M \times N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 5\beta & \alpha \end{pmatrix}$ أي: $M \times N \in E$

إذن: $(\forall M,N \in E);M \times N \in E$

يعني أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(IR);\times)$

• لدينا E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(IR);\times)$، وبما أن الضرب × تجميعي وتوزيعي بالنسبة للجمع + في $\mathcal{M}_2(IR)$، فإن القانون × تجميعي في E وتوزيعي بالنسبة للقانون + في E.

• لدينا القانون × يقبل عنصرا محايدا I في $\mathcal{M}_2(IR)$ مع $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ومن أجل $a=1$ و$b=0$ يكون لدينا $I \in E$.

إذن I هو العنصر المحايد في $(E;\times)$

• ليكن M وN عنصرين من E حيث: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix}$ و $N = \begin{pmatrix} x & y \\ 5y & x \end{pmatrix}$

لدينا:

$$N \times M = \begin{pmatrix} x & y \\ 5y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ax + 5by & bx + ay \\ 5ay + 5by & 5by + ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + 5by & ay + bx \\ 5(ay + bx) & ax + 5by \end{pmatrix}$$

وحسب ما سبق لدينا: $M \times N = \begin{pmatrix} ax + 5by & ay + bx \\ 5(ay + bx) & ax + 5by \end{pmatrix}$

ومنه $M\times N=N\times M$

وبالتالي فإن $(\forall M, N \in E); M \times N = N \times M$

يعني القانون × تبادلي في E.

إذن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

2. أ) لنبين أن: $(\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2)$: $a^2 - 5b^2 = 0 \iff a = b = 0$

ليكن a وb عنصرين من $\mathbb{Z}$.

• إذا كان $a=b=0$ فإن $a^2-5b^2=0$

• نفترض أن $a^2-5b^2=0$، لنبين أن $a=0$ و$b=0$

لدينا $a^2-5b^2=0$ أي $a^2=5b^2$

إذا كان $b \neq 0$ فإن $\frac{a^2}{b^2} = 5$ أي $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 5$ ومنه: $\sqrt{5} = \left|\frac{a}{b}\right|$

وبما أن a وb من $\mathbb{Z}$ فإن $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ إذن $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$، وهذا غير ممكن،

إذن $b=0$ ومنه $a^2=0$ أي $a=0$

إذن: $a^2 - 5b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$

وبالتالي فإن: $(\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2); a^2 - 5b^2 = 0 \iff a = b = 0$

ب) لنبين أن $(E;+;\times)$ حلقة كاملة

أي: $(\forall M, N \in E); M \times N \Rightarrow M = \theta$ أو $N = \theta$

حيث θ هي المصفوفة المنعدمة، العنصر المحايد للقانون +.

ليكن M وN عنصرين من E بحيث: $M \times N = \theta$ مع $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix}$ و $N = \begin{pmatrix} x & y \\ 5y & x \end{pmatrix}$

وa وb وx وy عناصر من $\mathbb{Z}$.

لدينا $$M \times N = \theta \iff \begin{pmatrix} ax + 5by & ay + bx \\ 5(ay + by) & ax + 5by \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ومنه فإن: $\begin{cases} ax + 5by = 0 \\ ay + bx = 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} ax + (5b)y = 0 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$

باعتبار (x,y) كمجهول فإن محددة هذه النظمة هي: $\Delta = \begin{vmatrix} a & 5b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - 5b^2$

إذا كان $\Delta \neq 0$ فإن $(x,y)=(0,0)$ أي $N = \theta$

إذا كان $\Delta = 0$ فإنه لدينا $a=b=0$ حسب السؤال 2. أ)

ومنه فإن $M = \theta$

إذن: $M = \theta$ أو $N = \theta$ ومنه فإن $(E;+;\times)$ حلقة كاملة.

3. أ) لنبين أن $(F;+)$ زمرة جزئية للزمرة $(E;+)$

- لدينا $F \subset E$ و$F \neq \phi$ لأن $\theta \in F$ من أجل $x=y=0$

- ليكن M وN عنصرين من F، لدينا

$$M \in F \iff (\exists (x;y) \in \mathbb{Z}^2)\ ;\ M = \begin{pmatrix} 2x - y & y \\ 5y & 2x - y \end{pmatrix}$$

و $$N \in F \iff (\exists (z;t) \in \mathbb{Z}^2)\ ;\ N = \begin{pmatrix} 2z - t & t \\ 5t & 2z - t \end{pmatrix}$$

ومنه فإن: $$M + (-N) = \begin{pmatrix} 2x - y & y \\ 5y & 2x - y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2z + t & -t \\ -5t & -2z + t \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2x - y - 2z + t & y - t \\ 5y - 5t & 2x - y - 2z + t \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2(x - z) - (y - t) & y - t \\ 5(y - t) & 2(x - z) - (y - t) \end{pmatrix}$$

نضع: $\alpha = x - z$ و $\beta = y - t$

لدينا: $\alpha \in \mathbb{Z}$ و $\beta \in \mathbb{Z}$ و $M + (-N) = \begin{pmatrix} 2\alpha - \beta & \beta \\ 5\beta & 2\alpha - \beta \end{pmatrix}$

إذن $M + (-N) \in F$

ومنه فإن: $(\forall M, N \in F); M + (-N) \in F$

وبالتالي فإن F زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(E;+)$

ب) لنبين أن: $(\forall X\in E);(\forall M\in F);X\times M\in F$

ليكن X عنصرا من E وM عنصرا من F، لدينا:

$$X\in E\Longleftrightarrow(\exists(a;b)\in\mathbb{Z}^2);X=\begin{pmatrix}a&b\\5b&a\end{pmatrix}$$

وَ

$$M\in F\Longleftrightarrow(\exists(x;y)\in\mathbb{Z}^2);M=\begin{pmatrix}2x-y&y\\5y&2x-y\end{pmatrix}$$

ومنه فإن:

$$X\times M=\begin{pmatrix}a&b\\5b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2x-y&y\\5y&2x-y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a(2x-y)+5by&ay+b(2x-y)\\5b(2x-y)+5by&5by+a(2x-y)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2ax-ay+5by&ay+2bx-by\\5(ay+2bx-by)&2ax-ay+5by\end{pmatrix}$$

نضع $\beta=ay+2bx-by$

لنحدد α بحيث: $2ax-ay+5by=2\alpha-\beta$

لدينا: $2\alpha-\beta=2ax-ay+5by\Longleftrightarrow2\alpha=2ax-ay+5by+ay+2bx-by$

$$\Longleftrightarrow2\alpha=2ax+2bx+4by$$

$$\Longleftrightarrow\alpha=ax+bx+2by$$

إذن: $X\times M=\begin{pmatrix}2\alpha-\beta&\beta\\5\beta&2\alpha-\beta\end{pmatrix}$

حيث $\alpha\in\mathbb{Z}$ و $\beta\in\mathbb{Z}$ ومنه فإن $X\times M\in F$

التمرين 36

نعتبر المجموعة: $E=\left\{M_a=\begin{pmatrix}2^a&0\\a2^a&2^a\end{pmatrix}/a\in\mathbb{Z}\right\}$

1) بين أن $(E,\times)$ زمرة تبادلية متشاكلة تقابليا مع $(\mathbb{Z},+)$.

2) بين أن $(\forall p\in\mathbb{Z})\ ;\ (M_a)^p=M_{ap}$

3) نعتبر a وb من $\mathbb{Z}$ ولتكن $F_{(a,b)}=\left\{(M_a)^p\times(M_b)^q/(p,q)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

أ- بين أن $F_{(a,b)}$ زمرة جزئية من $(E,\times)$

ب- ليكن c من $\mathbb{Z}$ بين أن $a\wedge b$ يقسم $c\Longleftrightarrow M_c\in F_{(a,b)}$

ج- استنتج أن $F_{(a,b)}=E\Longleftrightarrow a\wedge b=1$

1) نعتبر التطبيق :

$$f: \mathbb{Z} \to E$$
$$a \mapsto f(a) = M_a$$

لنبين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z};+)$ نحو $(E;\times)$.

حسب تعريف المجموعة E، لدينا: $(\forall A \in E) \quad (\exists a \in \mathbb{Z}) \quad : A=M_a=f(a)$

ومنه f تطبيق شمولي.

ليكن $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$ بحيث $f(a)=f(b)$، لدينا :

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\iff M_a = M_b \\ &\iff 2^a = 2^b \text{ و } a2^a=b2^b \\ &\iff 2^{a-b} = 1 \text{ و } a2^a=b2^b \\ &\iff a - b = 0 \text{ و } a2^a=b2^b \\ &\iff a = b \end{aligned}$$

ومنه f تطبيق تبايني

وبالتالي f تطبيق تقابلي، لدينا :

ليكن $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$

$$f(a+b) = M_{a+b} = \begin{pmatrix} 2^{a+b} & 0 \\ (a+b)\,2^{a+b} & 2^{a+b} \end{pmatrix}$$

و:

$$f(a)f(b) = M_aM_b = \begin{pmatrix} 2^a & 0 \\ a2^a & 2^a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^b & 0 \\ b2^b & 2^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{a+b} & 0 \\ (a+b)\,2^{a+b} & 2^{a+b} \end{pmatrix}$$

ومنه: $(\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2) \;\; ; \;\; f(a+b) = f(a)f(b)$

إذن f تشاكل تقابلي

وبما أن $(\mathbb{Z};+)$ زمرة تبادلية فإن $(E;\times)$ زمرة تبادلية

2) لنبين أن: $(\forall p \in \mathbb{Z}) \quad (M_a)^p = M_{ap}$

لنبين بالترجع أن $(\forall p \in IN)\,(M_a)^p = M_{ap}$

لدينا $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ و $(M_a)^0=I$ ومنه $(M_a)^0=M_0$ أي الخاصية صحيحة من أجل $p=0$

ليكن $p \in IN$، نفترض أن $M_a^p = M_{pa}$ ونبين أن: $M_a^{p+1} = M_{(p+1)a}$

$$\begin{aligned} M_{(p+1)a} &= f\big((p+1)a\big) = f(pa+a) = f(pa)f(a) \\ &= M_{pa} \times M_a \\ &= M_a^p \times M_a^1 \\ &= M_a^{p+1} \end{aligned}$$

وبالتالي: $(\forall p \in IN) \;\; ; \;\; M_a^p = M_{pa}$

ليكن $p \in \mathbb{Z}^-$ ، لنبين أن $M_a^p = M_{pa}$

$$M_a^p = (M_a^{-1})^{-p} = \left(f(-a)\right)^{-p} = (M_{-a})^{-p} = M_{pa}$$

(بما أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z};+)$ نحو $(E;\times)$

فإن: $f(-a)=(f(a))^{-1}$ أي $M_{-a} = M_a^{-1}$)

3) $F_{(a,b)} = \left\{M_a^p \times M_b^q / (p,q) \in \mathbb{Z}^2\right\}$

أ) لدينا: $M_a^0 \times M_b^0 = I \times I = I$ ومنه $I \in F(a,b)$

(حيث: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ العنصر المحايد للزمرة $(E;\times)$)

إذن $F_{(a,b)} \neq \phi$

ليكن X و Y عنصرين من $F_{(a,b)}$

لدينا: $\exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2 : X = M_a^p \times M_b^q$

و: $\exists (m,n) \in \mathbb{Z}^2 : Y = M_a^m \times M_b^n$

نذكر أنه: إذا كان $(E;*)$ زمرة تبادلية فإن مماثل $a*b$ هو $b'*a'$ أي $(a*b)'=b'*a'$

وبما أن $(E;\times)$ زمرة تبادلية فإن

$$\begin{aligned} XY^{-1} &= (M_a^p \times M_b^q)(M_a^m \times M_b^n)^{-1} \\ &= (M_a^p \times M_b^q)(M_b^{-n} \times M_a^{-m}) \\ &= M_a^{p-m} \times M_b^{q-n} \end{aligned}$$

ومنه: $XY^{-1} \in F_{(a,b)}$

إذن $F_{(a,b)}$ زمرة جزئية للزمرة $(E;\times)$

ب) ليكن c من $\mathbb{Z}$

لنبين أن: $a \wedge b$ تقسم $c \iff M_c \in F_{(a,b)}$

$$\begin{aligned} M_c \in F_{(a,b)} &\iff \exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2 M_c = M_a^p \times M_b^q \\ &\iff \exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2 M_c = M_{pa} \times M_{qb} \\ &\iff \exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2 M_c = M_{pa+qb} \\ &\iff \exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2 c = pa + qb \end{aligned}$$

(لأن: f تطبيق تبايني)

ليكن $d = a \wedge b$ لدينا: $\begin{cases} d/a \\ d/b \end{cases}$ ومنه $d/pa+qb$ إذن d/c

وبالتالي: $M_c \in F_{(a,b)} \Rightarrow (a \wedge b)/c$

عكسيا:
$$(a \wedge b)/c \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}); c = k(a \wedge b)$$
$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(\exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2); c = k(pa+qb)$$
$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(\exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2); M_c = M_{k(pa+qb)}$$
$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(\exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2); M_c = M_{pa+qb}^k$$
$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(\exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2); M_c = (M_a^p \times M_b^q)^k$$
$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(\exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2); M_c = M_a^{kp} \times M_b^{kq}$$
$$\Rightarrow M_c \in F_{(a,b)}$$

وبالتالي $M_c \in F_{(a,b)} \Longleftrightarrow (a \wedge b)/c$

ج) لدينا:
$$a \wedge b = 1 \Longleftrightarrow \exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2 : pa+qb = 1$$
$$\Longleftrightarrow \exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2 : M_{pa+qb} = M_1$$
$$\Longleftrightarrow \exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2 : M_a^p \times M_b^q = M_1$$

ومنه:
$$E = F_{(a,b)} \Rightarrow M_1 \in F_{(a,b)}$$
$$\Rightarrow \exists (p;q) \in \mathbb{Z}^2 : M_1 = M_a^p \times M_b^q$$
$$\Rightarrow a \wedge b = 1$$

عكسيا: نفترض أن $a \wedge b = 1$ أي: $\exists (p;q) \in \mathbb{Z}^2 : M_1 = M_a^p \times M_b^q$

لدينا $F_{(a,b)} \subset E$ لنبين أن: $E \subset F_{(a,b)}$

ليكن M_c عنصراً من E لدينا: $M_c = M_1^c = (M_a^p \times M_b^q)^c = M_a^{pc} \times M_b^{qc}$

ومنه: $M_C \in F_{(a,b)}$

إذن: $E \subset F_{(a,b)}$ وبالتالي: $E=F_{(a,b)}$

التمرين 37

لكل $(a;b)$ من $\mathbb{Z}^2$، نعتبر المصفوفة $M_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}$.

في $\mathcal{M}_2(R)$ لتكن E مجموعة الآتية: $E = \{M_{(a;b)}/a^2 - 2b^2 = 1\}$

1) نضع: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$ تحقق أن A تنتمي إلى E.

2) أ- بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(R);\times)$ وأن القانون $\times$ تبادلي في E.

ب- بين أن جميع عناصر E تقبل مقلوبا في E بالنسبة لقانون التركيب الداخلي $\times$.

ج- بين أن $(E;\times)$ زمرة تبادلية.

3) نضع: $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$، ولكل n من IN: $A^{n+1}=A^n \times A$

نعتبر المجموعة: $G = \{A^n / n \in N\}$

أ- تحقق من أن: $G \subset E$

ب- لتكن H مجموعة مماثلات مصفوفات G بالنسبة لعملية $\times$ في E.

بيّن أن: $H = \{B^n | n \in N\}$ حيث: $B = \begin{pmatrix} 3 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$

ج- بيّن أن: $G \cup H$ زمرة جزئية من $(E;\times)$.

الحل

1) لنتحقق من أن $A \in E$

لدينا: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$

و$E = \{M_{(a;b)} / a^2 - 2b^2 = 1\}$

مع $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}$; $(\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2)$

لدينا: $A=M(3,2)$

ولدينا: $3^2-2\times2^2=9-8=1$ ومنه $A \in E$

2) أ- لنبين أن E جزء مستقر من $(\mathscr{M}_2(IR);\times)$

ليكن $M(a,b)$ و$M(a',b')$ عنصرين من E لدينا:

$M(a',b') = \begin{pmatrix} a' & b'\sqrt{2} \\ b'\sqrt{2} & a' \end{pmatrix}$ و $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}$ ، حيث $a^2-2b^2=1$ و$a'^2-2b'^2=1$

$$M(a,b) \times M(a',b') = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b'\sqrt{2} \\ b'\sqrt{2} & a' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} aa' + 2bb' & (a'b + ab')\sqrt{2} \\ (a'b + ab')\sqrt{2} & aa' + 2bb' \end{pmatrix}$$
$$= M(aa' + 2bb'; a'b + ab')$$

لدينا: $a'b + ab' \in \mathbb{Z}$ و $aa' + 2bb' \in \mathbb{Z}$

ولدينا:

$$(aa' + 2bb')^2 - 2(a'b + b'a)^2 = a^2a'^2 + 4aa'bb' + 4b^2b'^2 - 2a'^2b^2 - 4aa'bb' - 2b'^2a'^2$$
$$= a'^2(a^2 - 2b^2) + 2b'^2(2b^2 - a^2)$$
$$= (a^2 - 2b^2) + (a'^2 - 2b'^2)$$
$$= 1 \times 1$$
$$= 1$$

وبالتالي: $M(a,b) \times M(a',b') \in E$

إذن: E جزء مستقر من $(\mathscr{M}_2(IR);\times)$

ولدينا: $a'b+ab'=ab'+a'b$ و $aa'+2bb'=a'a+2b'b$

ومنه: $M(a',b')\times M(a,b)=M(aa'+2bb';a'b+ab')$

$=M(a,b)\times M(a',b')$

إذن القانون × تبادلي في E.

ب) ليكن $M(a,b)$ عنصراً من E.

لدينا: $M(a;b)=\begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}; (\exists (a;b)\in \mathbb{Z}^2)$ و $a^2=2b^2=1$

بما أن: $\det M(a,b)=\begin{vmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{vmatrix}=a^2-2b^2=1\neq 0$

فإن $M(a,b)$ تقبل مقلوبا في $M_2(IR)$

ولدينا: $M^{-1}(a,b)=\begin{pmatrix} a & -b\sqrt{2} \\ -b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}=M(a;-b)$ و $(a;-b)\in ZI^2$

إذن: $M^{-1}(a,b)\in E$

وهذا يعني أن كل عنصر من E يقبل مقلوبا في E بالنسبة لقانون التركيب الداخلي ×.

ج) لدينا: $\begin{cases} I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=M(1,0) \\ 1^2-2\times 0^2=1 \end{cases}$ ومنه: $I\in E$

إذن: $E\neq \phi$

لدينا حسب السؤال 2) أ) E جزء مستقر من $(\mathscr{M}_2(IR;\times))$ وأن القانون × تبادلي في E.

وبما أن القانون × تجميعي في $(\mathscr{M}_2(IR;\times))$ فإنه كذلك في $(E,\times)$

ولدينا: $I\in E$ وكل عنصر من E يقبل مقلوبا بالنسبة للقانون × إذن $(E,\times)$ زمرة تبادلية.

3) لدينا: $A^0=I$ و $A^{n+1}=A^n\times A$; $(\forall n\in IN)$ و $G=\{A^n/n\in IN\}$

أ) لنتحقق من أن: $G\subset E$

لدينا حسب 1) $A\in E$ ، وبما أن: $(E,\times)$ زمرة تبادلية فإن $A^n\in E$

لكل n من IN (بالبرهان بالترجع: لدينا $\left.\begin{matrix} A^n\in E \\ A\in E \end{matrix}\right\}$ ومنه $(A^n\times A=A^{n+1}\in E$

وبما أن $A^n\in E$; $(\forall n\in IN)$

فإن: $G\subset E$

ب) H هي مجموعة مماثلات مصفوفات G بالنسبة للقانون × في E.

لدينا: $B=\begin{pmatrix} 2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}=A^{-1}$

ليكن X عنصرا من H، لدينا: $(\exists Y \in A) : Y^{-1}=X$

وبما أن: $Y \in A \iff ((\exists n \in IN); Y = A^n)$

فإن: $X = (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ (لأن: $(E,\times)$ زمرة تبادلية) إذن: $X=B^n$

وهذا يعني أن $X \in \{B^n / n \in IN\}$

عكسيا لدينا: $\{B^n / n \in IN\} \subset H$ (لأن: $A^{-1}=B$ و $A \in G$ ومنه $B^n=(A^n)^{-1}$)

وبالتالي: $H = \{B^n / n \in IN\}$

ج) لنبين أن $G \cup H$ زمرة جزئية للزمرة (E,x)

لدينا: $I \in G$ ومنه $I \in G \cup H$ إذن $G \cup H \neq \phi$

ليكن X و Y عنصرين من $G \cup H$

الحالة (1) إذا كان $(X;Y) \in G^2$ فإن: $(\exists n \in IN): X = A^n$

$(\exists p \in IN): Y = A^p$

ومنه: $XY^{-1}=A^n(A^p)^{-1}$

$=A^{n-p}$

إذن: $XY^{-1} \in G \cup H$

الحالة (2) إذا كان $(X;Y) \in H^2$ فإن: $(\exists n \in IN) X = B^n$

$(\exists p \in IN) Y = B^p$

ومنه: $XY^{-1}=B^n \times B^{-p}$

$=B^{n-p}$

إذن $XY^{-1} \in G \cup H$

الحالة (3) إذا كان $X \in G$ و $Y \in H$ ، لدينا: $\exists p \in IN: Y = B^p$ و $(\exists n \in IN): X = A^n$

ومنه: $XY^{-1}=A^nA^p=A^{n+p}$ (لأن: $B^{-1}=A$)

ومنه: $XY^{-1} \in G \cup H$

الحالة (4) إذا كان $X \in H$ و $Y \in G$

فإن: $(\exists p \in IN): (X = B^p)$ و $(\exists n \in IN): Y = A^n$

$XY^{-1}=B^p \times B^n=B^{n+p}$ (لأن: $A^{-1}=B$)

ومنه: $XY^{-1} \in G \cup H$

إذن في جميع الحالات: $(\forall X \in G \cup H)(\forall Y \in G \cup H) XY^{-1} \in G \cup H$

و $G \cup H \neq \phi$

وبالتالي $(G \cup H; \times)$ زمرة جزئية من $(E,\times)$.

التمرين 38

نعتبر المجموعة التالية: $E = \left\{T_\alpha \in \mathcal{M}_2(IR) / T_\alpha = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ \alpha e^\alpha & e^\alpha \end{pmatrix}, \alpha \in IR\right\}$

1. بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(IR),\times)$.

2. نعتبر التطبيق f من IR نحو E المعرف كمايلي: $(\forall \alpha \in IR); f(\alpha) = T_\alpha$

أ) بين أن f تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ نحو $(E,\times)$، ثم استنتج أن $(E,\times)$ زمرة تبادلية.

ب) بين أن كل مصفوفة T_α من E تقبل مقلوبا T_α^{-1} ثم حدد T_α^{-1}.

3. نضع: $F = \{T_\alpha \in E / \alpha \in \mathbb{Z}\}$

بين أن $(F,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(E,\times)$

الحل

1. لنبين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(IR),\times)$.

ليكن M وN عنصرين من E، لدينا:

$$M \in E \iff (\exists \alpha \in IR) / M = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ \alpha e^\alpha & e^\alpha \end{pmatrix}$$

و

$$N \in E \iff (\exists \beta \in IR) / N = \begin{pmatrix} e^\beta & 0 \\ \beta e^\beta & e^\beta \end{pmatrix}$$

ومنه فإن:

$$M \times N = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ \alpha e^\alpha & e^\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^\beta & 0 \\ \beta e^\beta & e^\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^\alpha e^\beta & 0 \\ \alpha e^\alpha e^\beta + \beta e^\alpha e^\beta & e^\alpha e^\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\alpha+\beta} & 0 \\ (\alpha+\beta) e^{\alpha+\beta} & e^{\alpha+\beta} \end{pmatrix}$$

وبما أن $\alpha + \beta \in IR$ فإن $M \times N \in E$

إذن: $(\forall M, N \in E); M \times N \in E$

يعني أن $(E,\times)$ جزء مستقر من $(M_2(IR),\times)$.

2. أ) لنبين أن f تشاكل تقابلي

ليكن M وN عنصرين من E، حيث $M = T_\alpha$ و$N = T_\beta$ مع α وβ من IR.

لدينا $f(\alpha) = M$ و$f(\beta) = N$ و$f(\alpha + \beta) = T_{\alpha+\beta}$

وحسب السؤال السابق لدينا $M \times N = T_{\alpha+\beta}$ ومنه فإن $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) \times f(\beta)$

إذن $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) \times f(\beta)$ $(\forall \alpha, \beta \in IR)$؛ يعني أن f تشاكل من $(IR,+)$ نحو $(E,\times)$

• لدينا $(\forall M \in E); (\exists \alpha \in IR) / M = T_\alpha$

أي $(\forall M \in E);(\exists \alpha \in IR)/f(\alpha) = M$ ؛ يعني أن f تطبيق شمولي.

• ليكن α و β عنصرين من IR بحيث: $f(\alpha) = f(\beta)$

لدينا: $f(\alpha) = f(\beta) \Longleftrightarrow T_\alpha = T_\beta$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ \alpha e^\alpha & e^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\beta & 0 \\ \beta e^\beta & e^\beta \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow e^\alpha = e^\beta \text{ و } \alpha e^\alpha = \beta e^\beta$$

$$\Longleftrightarrow e^\alpha = e^\beta \text{ و } \alpha e^\alpha = \beta e^\beta$$

$$\Longleftrightarrow \alpha = \beta$$

يعني أن f تطبيق تبايني

وبالتالي فإن f تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ نحو $(E,\times)$

الاستنتاج:

لدينا f تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ نحو $(E,\times)$ و$(IR,+)$ زمرة تبادلية إذن $(E,\times)$ زمرة تبادلية.

ب) • ليكن T_α عنصرا من IR.

لدينا: $\det T_\alpha = \begin{vmatrix} e^\alpha & 0 \\ \alpha e^\alpha & e^\alpha \end{vmatrix}$

$$= e^{2\alpha}$$

وبما أن: $e^{2\alpha} > 0$ فإن $\det T_\alpha \neq 0$

ومنه فإن: T_α تقبل مقلوبا T_α^{-1} في $(\mathcal{M}_2(IR),\times)$.

ولدينا $-\alpha$ هو مماثل α في $(IR,+)$ وf تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ نحو $(E,\times)$ ومنه فإن:

$$T_\alpha^{-1} = \left(f(\alpha)\right)^{-1} = f(-\alpha) = T_{-\alpha}$$

أي: $T_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ -\alpha e^{-\alpha} & e^{-\alpha} \end{pmatrix}$ ولدينا: $T_\alpha^{-1} \in E$

3. لنبين أن $(F,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(E,\times)$.

• $F \subset E$ و $F \neq \phi$ لأن $T_0 = I_2 \in F$

• ليكن T_α وT_β عنصرين من F. أي $\alpha \in \mathbb{Z}$ و $\beta \in \mathbb{Z}$

لدينا $T_{-\beta}$ هو مقلوب T_β في $(E,\times)$.

ومنه فإن:

$$T_\alpha \times T_\beta^{-1} = T_\alpha \times T_{-\beta}$$

$$= f(\alpha) \times f(-\beta) = f(\alpha - \beta) = T_{\alpha-\beta}$$

وبما أن $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}$ فإن $T_\alpha \times T_\beta^{-1} \in F$

إذن $(\forall M, N \in F); M \times N^{-1} \in F$

وبالتالي فإن $(F,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(E,\times)$.

التمرين 39

ليكن I وJ عنصرين من $\mathscr{M}_2(IR)$ بحيث: $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix}0&p\\1&0\end{pmatrix}$

نعتبر المجموعة: $E=\left\{M(x;y)=\begin{pmatrix}x&py\\y&x\end{pmatrix}/(x;y)\in IR^2\right\}$، حيث p عدد حقيقي.

1. تحقق من أن $J^2=pI$، ثم بين أن: $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

2. نفترض أن $p<0$

نعتبر التطبيق φ من E^* نحو $\mathbb{C}^*$ المعرف بمايلي:

$$(\forall M(x;y)\in E^*);\varphi(M(x;y))=x+iy\sqrt{-p}$$

أ) بين أن φ تشاكل تقابلي من $(E^*;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$

ب) ما بنية $(E^*;\times)$؟

ج) انشر $\left(\sqrt{-p}+i\right)^2$، ثم حدد حلول المعادلة: $X\in E^*;X^2=(-p-1)I+2J$

الحل

1. • لنتحقق من أن: $J^2=pI$

لدينا: $J^2=\begin{pmatrix}0&p\\1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&p\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p&0\\0&p\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

ومنه فإن $J^2=pI$

• لنبين أن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

لدينا: زمرة $E\subset\mathscr{M}_2(IR)$ و$(\mathscr{M}_2(IR),+)$ زمرة تبادلية ومنه يكفي أن نبين أن $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(\mathscr{M}_2(IR),+)$.

لدينا: $E\neq\phi$ لأن $I\in E$

ليكن $M(x;y)$ و$M(a;b)$ عنصرين من E، لدينا:

$$M(x;y)+(-M(a;b))=\begin{pmatrix}x&py\\y&x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-a&-pb\\-b&-a\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x-a&p(y-b)\\y-b&x-a\end{pmatrix}=M(x-a;y-b)$$

إذن: $M(x;y)+(-M(a;b))\in E$

وبالتالي $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(\mathscr{M}_2(IR),+)$.

ومنه $(E;+)$ زمرة تبادلية.

– لنبين أن E جزء مستقر من $(\mathscr{M}_2(IR),\times)$.

لتكن $M(x;y)$ و$M(a;b)$ عنصرين من E، لدينا:

$M(x;y)=xI+yJ$ و $M(a;b)=aI+bJ$

ومنه : $M(x;y)\times M(a;b)=(xI+yJ)(aI+bJ)$

$=xaI+xbJ+yaJ+ybJ^2$

$=xaI+(xb+ya)J+ybpI$

$=(xa+ybp)I+(xb+ya)J$

$=M(xa+ybp;xb+ya)$

إذن: $M(x;y)\times M(a,b)\in E$

وبالتالي E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(IR),\times)$.

لدينا E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(IR),\times)$ والقانون $\times$ تجميعي وتوزيعي بالنسبة للقانون $+$ في $\mathcal{M}_2(IR)$ ومنه فإن القانون $\times$ تجميعي وتوزيعي بالنسبة للقانون $+$ في E.

I هو العنصر المحايد في $(\mathcal{M}_2(IR),\times)$ و $I\in E$، ومنه فإن I هو العنصر المحايد في $(E,\times)$.

لدينا $(\forall M,N\in E); M\times N=N\times M$

يعني أن القانون $\times$ تبادلي في E.

وبالتالي فإن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

2. أ) • لنبين أن φ تشاكل من $(E^*;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$

ليكن $M(x;y)$ و$M(a;b)$ عنصرين من E^*، لدينا : $M(x;y)\times M(a;b)=M(xa+ybp;xb+ya)$

ومنه $\varphi\big(M(x;y)\times M(a;b)\big)=(xa+ybp)+i(xb+ya)\sqrt{-p}$

ولدينا: $(x+iy\sqrt{-p})(a+ib\sqrt{-p})=xa+i(bx+ya)\sqrt{-p}+ybp$

$=(xa+ybp)+i(bx+ya)\sqrt{-p}$

ومنه فإن: $\varphi\big(M(x;y)\times M(a;b)\big)=(x+iy\sqrt{-p})\times(a+ib\sqrt{-p})$

$=\varphi\big(M(x;y)\big)\times\varphi\big(M(a;b)\big)$

إذن φ تشاكل من $(E^*;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$

• لنبين أن φ تقابل

ليكن $M(x;y)$ و$M(a;b)$ عنصرين من E بحيث $\varphi\big(M(x;y)\big)=\varphi\big(M(a;b)\big)$

لدينا : $\varphi\big(M(x;y)\big)=\varphi\big(M(a;b)\big)\Rightarrow x+iy\sqrt{-p}=a+ib\sqrt{-p}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=a \\ y\sqrt{-p}=b\sqrt{-p}\end{cases}$$

$\Rightarrow x=a$ و $y=b$

ومنه فإن: $M(x;y)=M(a;b)$

إذن φ تطبيق تبايني.

ليكن $z=x+iy$ عنصرا من $\mathbb{C}^*$، هل يوجد $M(a;b)$ من E بحيث $\varphi(M(a;b)) = z$؟

لدينا: $\varphi(M(a;b)) = z \Leftrightarrow a + ib\sqrt{-p} = x + iy$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b\sqrt{-p} = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = \dfrac{y}{\sqrt{-p}} \end{cases}$$

ومنه: $M(a,b) = M\left(x; \dfrac{y}{\sqrt{-p}}\right)$

إذن φ تطبيق شمولي وبالتالي φ تشاكل تقابلي من $(E^*;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$

ب) بنية $(E^*;\times)$

لدينا $(E^*;\times)$ و$(\mathbb{C}^*;\times)$ متشاكلتان تقابليا و $(\mathbb{C}^*;\times)$ زمرة تبادلية ومنه فإن زمرة تبادلية $(E^*;\times)$.

ج) لدينا: $\left(\sqrt{-p} + i\right)^2 = -p - 1 + 2i\sqrt{-p}$

• لنحل في E^* المعادلة: $X^2=(-p-1)I+2J$

ليكن $M(x;y)$ عنصرا من E^*، لدينا:

$$X^2 = (-p-1)I + 2J \Leftrightarrow \left(M(x;y)\right)^2 = M(-p-1;2)$$

$$\Leftrightarrow \varphi\left((M(x;y))^2\right) = \varphi\left(M(-p-1;2)\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\varphi(M(x;y))\right)^2 = \varphi\left(M(-p-1;+2)\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x + iy\sqrt{-p}\right)^2 = -p - 1 + 2i\sqrt{-p}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + iy\sqrt{-p}\right)^2 = \left(\sqrt{-p} + i\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x + iy\sqrt{-p} = \sqrt{-p} + i \text{ أو } x + iy\sqrt{-p} = -\sqrt{-p} - i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{-p} \\ y\sqrt{-p} = 1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = -\sqrt{-p} \\ y\sqrt{-p} = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{-p} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{-p}} \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = -\sqrt{-p} \\ y = \dfrac{-1}{\sqrt{-p}} \end{cases}$$

إذن:

$$S = \left\{ M\left(\sqrt{-p}; \frac{1}{\sqrt{-p}}\right); M\left(-\sqrt{-p}; \frac{-1}{\sqrt{-p}}\right) \right\}$$

التمرين 40

نضع $I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ؛ $\theta_2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

لكل $A = \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ نعرف $T(A)=a+d$ و $D(A)=ad-bc$ و $A \neq \theta_2$

ونعتبر المجموعات: $E_1 = \{A \in \mathcal{M}_2(IR) / A^2 = I_2\}$

$E_2 = \{A \in \mathcal{M}_2(IR) / |D(A)| = 1\}$

$E_3 = \{A \in \mathcal{M}_2(IR) / A = \alpha I_2 ; \alpha \in IR\}$

1) بين أن $(\forall A, B \in \mathcal{M}_2(IR)) : D(AB) = D(A).D(B)$

2) بين أن $(\forall A \in \mathcal{M}_2(IR)) : A^2 = T(A)A - D(A).I_2$

تطبيق حدد A_0^{-1} حيث $A_0 = \begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

3) بين أن $A \in E_1 \Rightarrow A \in E_2$

هل العكس صحيح؟

4) ليكن $A \in \mathcal{M}_2(IR)$ و $A \notin E_3$: بين أن $(A \in E_1 \iff T(A) = 0$ و $D(A)=-1)$

5) باعتبار $A_0 = \begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ و $B_0 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & -1\end{pmatrix}$، بين أن $(E_1;\times)$ ليست زمرة.

6) حدد $E_1 \cap E_3$

7) بين أن $(E_2;\times)$ زمرة هل هي تبادلية؟

8) $\mathcal{H} = \left\{f \in F(IR,IR) / \forall x \in IR - \left\{\frac{-d}{b}\right\}\ f(x) = \frac{ax+c}{bx+d}\ /\ (a,b,c,d) \in IR^4 \right.$ و $\left. ad - bc \neq 0\right\}$

ليكن التطبيق: $\varphi : E_2 \to \mathcal{H}$

$\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix} \mapsto f$

بين أن φ تشاكل شمولي من $(E_2;\times)$ نحو $(\mathcal{H},\circ)$

ثم استنتج بنية $(\mathcal{H},\circ)$.

الحل

1) لنبين أن: $(\forall (A,B) \in \mathcal{M}_2(IR))\ ;\ D(AB) = D(A)D(B)$

ليكن $A = \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix}a' & c'\\ b' & d'\end{pmatrix}$ عنصرين من $\mathcal{M}_2(IR)$

لدينا: $AB = \begin{pmatrix}aa' + cb' & ac' + cd'\\ ba' + db' & bc' + dd'\end{pmatrix}$

ومنه:

$$D(AB)=(aa'+cb')(bc'+dd')-(ac'+cd')(ba'+db')$$
$$=ada'd'+bcb'c'-bca'd'-adb'c'$$

$=ada'd'-adb'c'+bcb'c'-bca'd'$
$=ad(a'd'-b'c')-bc(a'd'-b'c')$
$=(ad-bc)(a'd'-b'c')$
$=D(A)D(B)$

2) لنبين أن: $(\forall A \in \mathcal{M}_2(IR))\ ;\ A^2 = T(A)A - D(A)I_2$

ليكن $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ عنصرا من $\mathcal{M}_2(IR)$

لدينا: $A^2 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ac+cd \\ ab+bd & bc+d^2 \end{pmatrix}$

و $T(A)A - D(A)I_2 = T(A)\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} - D(A)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aT(A) & cT(A) \\ bT(A) & dT(A) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} D(A) & 0 \\ 0 & D(A) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a^2+ad & ac+cd \\ ab+bd & d^2+ad \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ac+cd \\ ab+bd & bc+d^2 \end{pmatrix}$

$= A^2$

تطبيق لنحدد A_0^{-1} حيث $A_0 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

لدينا: $D(A_0)=-1$ و $T(A_0)=0$

ومنه: $A_0^2 = T(A_0)A_0 - D(A_0)I_2$
$= I_2$

وبالتالي: $A_0^{-1} = A_0$

3) لنبين أن: $A \in E_1 \Rightarrow A \in E_2$

ليكن A من المجموعة E_1، لدينا $A^2=I_2$

حسب السؤال (1): $D(A^2)=D(A)D(A)=(D(A))^2$

وبما أن: $A^2=I_2$ فإن $D(A^2)=1$

ومنه: $(D(A))^2=1$ وبالتالي $|D(A)|=1$ ؛ إذن: $A \in E_2$

وهذا يعني أن: $(\forall A \in E_1); A \in E_2$ ؛ ومنه: $E_1 \subset E_2$

عكسيا: نعتبر $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

لدينا: $D(A)=1$ ومنه $A \in E_2$

و $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 25 & 14 \end{pmatrix}$ أي $A^2 \neq I_2$ ، وهذا يعني أن: $(\exists A \in E_2)/A \notin E_1$

ومنه عكس الاستلزام $(A \in E_1 \Rightarrow A \in E_2)$ غير صحيح.

4) ليكن $A \in \mathcal{M}_2(IR)$ و $A \notin E_3$

لنبين أن: $A \in E_1 \Longleftrightarrow (T(A) = 0$ و $D(A)=1)$

$$A \in E_1 \iff A^2 = I_2$$
$$\iff T(A)A - D(A)I_2 = I_2$$
$$\iff T(A)A = (1 + D(A))I_2$$

بما أن $A \notin E_3$ فإن $A \neq \alpha I$; $(\forall \alpha \in IR)$

ومنه: $T(A)A = (1 + D(A))I_2 \Rightarrow \begin{cases} T(A) = 0 \\ D(A) = -1 \end{cases}$

(لو كان $T(A) \neq 0$ لكان $A = \left(\dfrac{1 + D(A)}{T(A)}\right)I_2$ ، أي $A \in E_3$ وهذا تناقض)

إذن: $A \in E_1 \Rightarrow T(A) = 0$ و $D(A)=-1$

عكسيا إذا كان: $T(A)=0$ و $D(A)=-1$ فإن $A^2=T(A)A-D(A)I_2=0+I_2=I_2$

ومنه: $A \in E_1$

وبالتالي $A \in E_1 \iff T(A) = 0$ و $D(A)=-1$

5) لدينا $A_0 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ و $B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

بما أن $T(A_0)=0$ و $D(A_0)=-1$ فإن $A_0 \in E_1$ ؛ وبما أن $T(B_0)=0$ و $D(B_0)=-1$ فإن $B_0 \in E_1$

ولدينا $A_0 \times B_0 = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ ومنه: $D(A_0 \times B_0)=1$ و $T(A_0 \times B_0) = 13 \neq 0$

إذن $A_0 \times B_0 \notin E_1$

وهذا يعني أن E_1 جزء من $\mathcal{M}_2(IR)$ غير مستقر بالنسبة للقانون × إذن $(E_1;\times)$ ليست زمرة.

6) لنحدد $E_1 \cap E_3$

$$A \in E_1 \cap E_3 \iff A \in E_1 \text{ و } A \in E_3$$
$$\iff A^2 = I_2 \text{ و } A = \alpha I_2 (\alpha \in IR)$$
$$\iff \alpha^2 I_2 = I_2 \text{ و } A = \alpha I_2$$
$$\iff \alpha^2 = 1 \text{ و } A = \alpha I_2$$
$$\iff A = I_2 \text{ أو } A=-I_2$$

ومنه: $E_1 \cap E_3 = \{I_2; -I_2\}$

7) لنبين أن: $(E_2;\times)$ زمرة

لدينا: $E_2 \subset \mathcal{M}_2(IR)$

ليكن A و B عنصرين من E_2

لدينا: $|D(AB)| = |D(A)D(B)|$

$= |D(A)||D(B)|$

$= 1\times 1$ ومنه: $A \times B \in E_2$

$= 1$

إذن: E_2 جزء مستقر من $(\mathscr{M}_2(IR);\times)$.

وبما أن القانون $\times$ تجميعي في $M_2(IR)$ فإنه كذلك في E_2.

• لدينا: $|D(I_2)| = 1$ ومنه: $I_2 \in E_2$

وبما أن: $(\forall A \in \mathscr{M}_2(IR))\ ;\ A \times I_2 = I_2 \times A = A$

فإن $(\forall A \in E_2)\ ;\ A \times I_2 = I_2 \times A = A$

ومنه I_2 هو العنصر المحايد للقانون $\times$ في E_2

• ليكن $A \in E_2$ لدينا $|D(A)| = 1$

إذن $D(A) \neq 0$ وبالتالي A يقبل مقلوبا في $\mathscr{M}_2(IR)$

لدينا: $1=D(I_2)=D(A\times A^{-1})=D(A)\times D(A^{-1})$

ومنه: $1 = |D(A)||D(A^{-1})|$

بما أن $|D(A)| = 1$ فإن $|D(A^{-1})| = 1$

وبالتالي: $A^{-1} \in E_2$، وهذا يعني أن كل عنصر A من E_2 له مقلوب في E_2.

وبالتالي $(E_2;\times)$ زمرة

• لدينا: $|D(A_0)| = 1$ و $|D(B_0)| = 1$

ومنه $A_0 \in E_2$ و $B_0 \in E_2$

لكن $B_0A_0 \neq A_0B_0$ (تحقق من ذلك)

وبالتالي القانون $\times$ غير تبادلي في E_2.

8) $\varphi : E_2 \to \mathscr{H}$

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \to f$$

حيث $f(x) = \frac{ax + c}{bx + d}$; $\left(\forall x \in IR - \left\{-\frac{d}{c}\right\}\right)$ و $ad - bc \neq 0$

• ليكن $f \in \mathscr{H}$ إذن: يوجد (a, b, c, d) من IR^4 بحيث:

$f(x) = \frac{ax + c}{bx + d}$; $\left(\forall x \in IR - \left\{\frac{-b}{c}\right\}\right)$ و $ad - bc \neq 0$

إذن باعتبار $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ يكون لدينا $\varphi(A) = f$

ومنه φ تطبيق شمولي

• لنبين أن φ تشاكل من $(E_2;\times)$ نحو $(\mathscr{H};\circ)$

ليكن A و B عنصرين من E_2 بحيث $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$

بما أن $|D(A)|=1$ و $|D(B)|=1$ فإن $ad-bc\neq 0$ و $a'd'-b'c'\neq 0$

ولدينا: $AB=\begin{pmatrix} aa'+cb' & ac'+cd' \\ ba'+db' & bc'+dd' \end{pmatrix}$ ومنه بوضع $\varphi(A)=f$ و $\varphi(B)=g$ و $\varphi(AB)=h$

يكون لدينا:

$$h(x)\frac{(aa'+cb')x+ac'+cd'}{(ba'+db')x+bc'+dd'}\ ;\ \left(\forall x\in IR-\left\{-\frac{bc'+dd'}{ac'+cd'}\right\}\right)$$

لدينا: $$f(x)=\frac{ax+c}{bx+d}\ ;\ \left(\forall x\in IR-\left\{-\frac{d}{c}\right\}\right)$$

$$g(x)=\frac{a'x+c'}{b'x+d'}\ ;\ \left(\forall x\in IR-\left\{-\frac{d'}{c'}\right\}\right)$$

لدينا: $\varphi(A)o\varphi(B)=fog$

ولكل $x\in D_{fog}$ لدينا:

$$(fog)(x)=\frac{a\left(\frac{a'x+c'}{b'x+d'}\right)+c}{b\left(\frac{a'x+c'}{b'x+d'}\right)+d}$$

$$=\frac{aa'x+ac'+cb'x+cd'}{ba'x+bc'+db'x+dd'}$$

$$=\frac{(aa'+cb')x+ac'+cd'}{(ba'+db')x+bc'+dd'}$$

$$=h(x)$$

ومنه: $\varphi(A)o\varphi(B)=\varphi(AB)$

إذن φ تشاكل من $(E_2;\times)$ نحو $(\mathscr{H};o)$

وبما أن φ شمولي فإن $\varphi(E_2)=\mathscr{H}$

إذن: $(\mathscr{H};o)$ زمرة

التمرين 41

لتكن المجموعة A المعرفة بمايلي: $A=\left\{M(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}/x\in IR\right\}$

نعتبر التطبيق f بحيث: $f:IR\to A$

$x\mapsto M(x)$

1) بين أن f تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ إلى $(A,\times)$.

2) استنتج بنية $(A,\times)$

3) ليكن $M(x)$ و $M(y)$ عنصرين من A. احسب $M^{-1}(x)\times M^{-1}(y)$

1) لنبين أن: f تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ نحو $(A,\times)$.

• ليكن $M(x)$ و$M(y)$ عنصرين من A

لدينا:
$$M(x)\times M(y)=\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & y\\ -y & 1 & -\frac{y^2}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & x+y\\ -x-y & 1 & -xy-\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & (x+y)\\ -(x+y) & 1 & -\frac{(x+y)^2}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$=M(x+y)$$

ليكن $(x,y)\in IR^2$ لدينا: $f(x+y)=M(x+y)=M(x)M(y)=f(x)f(y)$

ومنه f تشاكل من $(IR,+)$ نحو $(A,\times)$.

• ليكن $(x,y)\in IR^2$ لدينا:
$$f(x)=f(y)\iff M(x)=M(y)$$
$$\iff -x=-y \text{ و } x=y \text{ و } \frac{-x^2}{2}=\frac{-y^2}{2}$$
$$\iff x=y$$

ومنه f تطبيق تبايني

وحسب تعريف المجموعة A لدينا:
$$(\forall A\in A)\ \ (\exists x\in IR):\ \ A=M(x)=f(x)$$

ومنه: f تطبيق شمولي، وبالتالي: f تقابل

وبما أن f تشاكل من $(IR,+)$ نحو $(A,\times)$.

فإن f تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ نحو $(A,\times)$.

2) لنستنتج بنية من $(A,\times)$.

بما أن f تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ نحو $(A,\times)$، و$(IR,+)$ زمرة تبادلية فإن $(A,\times)$ زمرة تبادلية.

3) لنحسب $M^{-1}(x)\times M^{-1}(y)$

بما أن f تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ نحو $(A,\times)$،

فإن:
$$M^{-1}(x)\times M^{-1}(y)=(f(x))^{-1}\times(f(y))^{-1}$$
$$=f(-x)\times f(-y)$$
$$=f(-x-y)=M(-x-y)$$

التمرين 42

لتكن A المجموعة المعرفة بمايلي: $A = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & -\frac{x^2}{2} & 1 \end{pmatrix} / x \in IR \right\}$

1) بين أن A جزء مستقر من $(\mathscr{M}_3(IR),\times)$

2) نعتبر التطبيق f المعرف بمايلي: $f: IR \to A$
$x \mapsto M(x)$

أ) بين أن f تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ إلى $(A,\times)$.

ب) استنتج أن $(A,\times)$ زمرة تبادلية.

ج) ليكن x وy عنصرين من IR حدد المصفوفة $(M(x)\times M(y))^{-1}$

د) حل في المجموعة A المعادلة $X^2=K$، حيث X هو المجهول و $K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

الحل

1) لنبين أن A جزء مستقر من $(\mathscr{M}_3(IR),\times)$

ليكن $M(x)$ و$M(y)$ عنصرين من A، بحيث:

$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & \frac{-x^2}{2} & 1 \end{pmatrix}$ و $M(y) = \begin{pmatrix} 1 & -y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y & \frac{-y^2}{2} & 1 \end{pmatrix}$، مع x وy من IR

لدينا:

$$M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & \frac{-x^2}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y & \frac{-y^2}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -y-x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x+y & -yx-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -(x+y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x+y & -\frac{(x+y)^2}{2} & 1 \end{pmatrix} = M(x+y)$$

ومنه فإن: $(\forall M,N \in A); M \times N \in A$، يعني أن A جزء مستقر من $(\mathscr{M}_3(IR),\times)$

2. أ) لنبين أن f تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ إلى $(A,\times)$.

• ليكن $M(x)$ و$M(y)$ عنصرين من A.

لدينا حسب السؤال السابق : $M(x)\times M(y)=M(x+y)$

يعني أن : $f(x+y)=f(x)\times f(y)$

ومنه فإن : $(\forall (x,y) \in IR^2); f(x+y)=f(x)\times f(y)$

أي f تشاكل من $(IR,+)$ إلى $(A,\times)$.

• لدينا : $(\forall M \in A); (\exists x \in IR) / M = M(x)$

يعني أن $(\forall M \in A); (\exists x \in IR) / f(x) = M$

أي أن f تطبيق شمولي.

• ليكن x وy عنصرين من IR بحيث : $f(x)=f(y)$

$$f(x)=f(y) \Longleftrightarrow M(x)=M(y)$$
$$\Longleftrightarrow \frac{x^2}{2}=\frac{y^2}{2} \text{ و } x=y$$
$$\Longleftrightarrow |x|=|y| \text{ و } x=y$$
$$\Longleftrightarrow x=y$$

إذن f تطبيق تبايني ومنه فإن f تطبيق تقابلي

وبالتالي فإن f تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ إلى $(A,\times)$.

ب) الاستنتاج :

لدينا $(IR,+)$ و$(A,\times)$ متشاكلتان تقابليا و$(IR,+)$ زمرة تبادلية ومنه فإن $(A,\times)$ زمرة تبادلية.

ج) تحديد $(M(x)\times M(y))^{-1}$

لدينا :
$$(M(x)\times M(y))^{-1}=(f(x)\times f(y))^{-1}$$
$$=(f(x+y))^{-1}$$
$$=f(-x-y)=M(-x-y)$$

ومنه فإن : $(M(x)\times M(y))^{-1}=M(-x-y)$

3) لنحل في A المعادلة : $X^2=K$

لدينا : $K=M(1)$

ليكن x عنصرا من IR، بحيث : $X=M(x)$، لدينا :

$$X^2=K \Longleftrightarrow (M(x))^2=M(1)$$
(لأن f تشاكل) $$\Longleftrightarrow (f(x))^2=f(1)$$
$$\Longleftrightarrow f(2x)=f(1)$$
(لأن f تقابل) $$\Longleftrightarrow 2x=1$$
$$\Longleftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

ومنه فإن حلول المعادلة $X^2=K$ في A هي المصفوفة $M\left(\frac{1}{2}\right)$.

التمرين 43

نعتبر المجموعة: $S = \left\{ M_a = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ ae^a & e^a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / a \in IR \right\}$

1) بين أن $\times$ قانون تركيب داخلي في S.

2) ليكن $\varphi : IR \to S$

$a \mapsto M_a$

أ) بين أن φ تشاكل تقابلي بين $(S,\times)$ نحو $(IR;+)$

ب) استنتج بنية $(S,\times)$

3) بين أن $(M_a)^k = M_{ka}$; $(\forall k \in \mathbb{Z})$

الحل

1) ليكن M_a وM_b عنصرين من S، لدينا:

$$M_a \times M_b = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ ae^a & e^a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^b & 0 & 0 \\ be^b & e^b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{a+b} & 0 & 0 \\ (a+b)e^{a+b} & e^{a+b} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{a+b}$$

ومنه: $M_a \times M_b \in S$ وبالتالي $\times$ قانون تركيب داخلي في المجموعة S.

2) لدينا: $\varphi : IR \to S$

$a \mapsto M_a$

أ) لنبين أن φ تشاكل تقابلي من $(IR;+)$ نحو $(S,\times)$

– ليكن $(a;b)$ من IR^2 لدينا: $\varphi(a+b) = M_{a+b} = M_a \times M_b = \varphi(a) \times \varphi(b)$

ومنه φ تشاكل من $(IR;+)$ نحو $(S,\times)$

– ليكن $(a;b)$ من IR^2 لدينا:

$$\begin{aligned} \varphi(a) = \varphi(b) &\Leftrightarrow M_a = M_b \\ &\Leftrightarrow e^a = e^b \text{ و } ae^a = be^b \\ &\Leftrightarrow a = b \end{aligned}$$

ومنه φ تطبيق تبايني

– حسب تعريف المجموعة S لدينا: $(\forall A \in S)(\exists a \in IR): A = M_a = \varphi(a)$

إذن φ تطبيق شمولي

وبالتالي φ تشاكل تقابلي من $(IR;+)$ نحو $(S,\times)$

ب) بنية $(S,\times)$

لدينا $(IR;+)$ زمرة تبادلية و φ تشاكل تقابلي من $(IR;+)$ نحو $(S,\times)$ ومنه من $(S,\times)$ زمرة تبادلية.

3) لنبين أن $M_a^k = M_{ka}$ $(\forall k \in IN)$

• لنبين بالترجع أن: $M_a^k = M_{ka}$ $(\forall k \in IN)$

• لدينا: $M_a^0 = I = M_0$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $k=0$

• ليكن $k \in IN$، نفترض أن: $M_a^k = M_{ka}$ ونبين أن $M_a^{k+1} = M_{(k+1)a}$

لدينا: $M_a^{k+1} = M_a^k \times M_a = M_{ka} \times M_a = f(ka) \times f(a) = f(ka+a)$

$= f((k+1)a) = M_{(k+1)a}$

ومنه حسب مبدإ الترجع: $M_a^k = M_{ka}$ $(\forall k \in IN)$

ليكن $k \in \mathbb{Z}^-$ لدينا: $(S,\times)$ زمرة تبادلية

ومنه: (لأن $-k \in IN$) $M_a^k = (M_a^{-1})^{-k} = (M_{-a})^{-k} = M_{ka}$

وبالتالي: $(\forall k \in \mathbb{Z})$: $M_a^k = M_{ka}$

التمرين 44

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا.

نعتبر المجموعة التالية: $A = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} a^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / x \in IR \right\}$

ليكن f التطبيق المعرفة بمايلي: $f : IR \to A$

$x \mapsto M(x)$

1. أ) بين أن f تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ إلى $(A,\times)$

ب) استنتج بنية $(A,\times)$. ليكن x عنصرا من IR حدد المصفوفة $(M(x))^{-1}$

2. ليكن n عنصرا من $IN^* - \{1\}$ و x عنصرا من IR.

أعط تعبير $(M(x))^n$ بدلالة n و x و a.

الحل

1. أ) لنبين أن f تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ إلى $(A,\times)$

• ليكن x و y عنصرين من IR.

لدينا:

$$f(x+y) = M(x+y)$$

$$= \begin{pmatrix} a^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

و

$$M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} a^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^x a^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ومنه فإن $f(x+y)=M(x)\times M(y)=f(x)\times f(y)$

إذن: $(\forall x,y\in IR);f(x+y)=f(x)\times f(y)$

يعني أن f تشاكل من $(IR,+)$ إلى $(A,\times)$

• ليكن M عنصرا من A، لدينا حسب تعريف المجموعة A:

$(\exists x\in IR)/M=\begin{pmatrix} a^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$، أي $(\exists x\in IR)/f(x)=M$

إذن: $(\forall M\in A);(\exists x\in IR)/M=f(x)$

يعني أن f تطبيق شمولي.

• ليكن x وy عنصرين من IR بحيث: $f(x)=f(y)$

لدينا: $$f(x)=f(y)\iff \begin{pmatrix} a^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\iff a^x=a^y$ و $x=y$

$\iff x=y$

ومنه فإن $(\forall x,y\in IR);f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$

يعني أن f تطبيق تبايني.

إذن f تطبيق تقابلي من IR نحو A.

وبالتالي فإن f تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ إلى $(A,\times)$

ب) الاستنتاج:

لدينا f تشاكل تقابلي من $(IR,+)$ إلى $(A,\times)$ و$(IR,+)$ زمرة تبادلية ومنه فإن $(A,\times)$ زمرة تبادلية.

• لدينا $-x$ هو مماثل العنصر x في $(IR,+)$ وf تشاكل من $(IR,+)$ إلى $(A,\times)$ ومنه فإن:

$$(M(x))^{-1}=(f(x))^{-1}=f(-x)=M(-x)$$

أي: $$(M(x))^{-1}=\begin{pmatrix} a^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. لنبين أن: $(\forall n\in IN^*-\{1\});(M(x))^n=M(nx)$

من أجل $n=2$ لدينا $(M(x))^2=f(x)\times f(x)$

$=f(x+x)=f(2x)=M(2x)$

ومنه:

$(M(x))^2=M(2x)$

ليكن n عنصرا من IN و$n\geq 2$ نفترض أن $(M(x))^n=M(nx)$ ونبين أن: $(M(x))^{n+1}=M((n+1)x)$

لدينا:

$$(M(x))^{n+1}=(M(x))^{n}\times M(x)$$

(حسب افتراض الترجع) $=M(nx)\times M(x)$

$$=f(nx)\times f(x)$$

$$=f(nx+x)=f((n+1)x)=M((n+1)x)$$

إذن $(\forall n\in IN^{*}-\{1\});(M(x))^{n}=M(nx)$

ومنه فإن: $(M(x))^{n}=\begin{pmatrix}a^{nx}&0&0\\0&1&nx\\0&0&1\end{pmatrix}$

التمرين 45

لتكن $\mathcal{M}_3(IR)$ مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة الثالثة:

نعتبر المجموعة G المعرفة بمايلي:

$$G=\left\{M\in IM_3(IR)/M=\begin{pmatrix}1&x&y\\0&1&z\\0&0&1\end{pmatrix};(x,y,z)\in IR^3\right\}$$

1. بين أن G جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(IR),\times)$
2. بين أن $(G,\times)$ زمرة تبادلية

الحل

1) ليكن M وN عنصرين من G.

بحيث: $N=\begin{pmatrix}1&x'&y'\\0&1&z'\\0&0&1\end{pmatrix}$ و $M=\begin{pmatrix}1&x&y\\0&1&z\\0&0&1\end{pmatrix}$

لدينا:

$$M\times N=\begin{pmatrix}1&x&y\\0&1&z\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x'&y'\\0&1&z'\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x+x'&y'+xz'+y\\0&1&z+z'\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ومنه: $M\times N\in G$

إذن G جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(IR),\times)$

2) لنبين أن $(G,\times)$ زمرة تبادلية

$$NM=\begin{pmatrix}1&x'&y'\\0&1&z'\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x&y\\0&1&z\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x+x'&y+x'z+y'\\0&1&z+z'\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$=MN$

ومنه: الضرب تبادلي في G.

بما أن G جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(IR),\times)$ والقانون $\times$ تجميعي في $\mathcal{M}_3(IR)$ فإنه كذلك في G.

لدينا: من أجل $x=y=z=0$; $M=I_3$

حيث $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ العنصر المحايد للضرب في $(\mathcal{M}_3(IR),\times)$.

إذن I_3 هو العنصر المحايد للضرب في G

ليكن M عنصراً من G.

$$\det M=\begin{vmatrix}1&x&y\\0&1&z\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

ومنه M يقبل مقلوباً في $\mathcal{M}_3(IR)$

لكي يكون $M\times N=I_3$ يجب ويكفي أن يكون لدينا: $y'+xz'+y=0$ و $z+z'=0$ و $x+x'=0$

أي $y'=xz-y$ و $z'=-z$ و $x'=-x$

إذن: $M^{-1}=N=\begin{pmatrix}1&-x&xz-y\\0&1&-z\\0&0&1\end{pmatrix}$

وبالتالي: $(\forall M\in G);M^{-1}\in G$

إذن $(G,\times)$ زمرة تبادلية.

3) ليكن $M\in G$ و $n\in IN$ بحيث $n\geq 2$

التمرين 46

الجزء الأول:

لكل x و y عنصرين من $G=IR-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ نضع: $x\circ y=x+y-2xy$

1. بين أن $\circ$ قانون تركيب داخلي في G.
2. بين أن $(G,\circ)$ زمرة تبادلية.
3. بين أن: $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{n\text{ مرة}}=\frac{1}{2}\left(1-(1-2x)^n\right)$ $(\forall x\in G);(\forall n\in IN^*-\{1\})$

الجزء الثاني:

لتكن A المجموعة المعرفة بمايلي: $A=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}1-x&0&x\\0&1&0\\x&0&1-x\end{pmatrix}/x\in G\right\}$

1. بين أن A جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(IR);\times)$.

2. نعتبر التطبيق φ من G نحو A المعرف بمايلي: $(\forall x \in G); \varphi(x) = M(x)$

أ) بين أن φ تشاكل تقابلي من $(G,*)$ إلى $(A,\times)$

ب) ماهي بنية $(A,\times)$؟

ج) ليكن n عددا طبيعيا غير منعدم و $K = M\left(-\frac{1}{2}\right)$

بين أن $K^n = M\left(\frac{1-2^n}{2}\right)$ و $(K^n)^{-1} = M\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

الحل

1. لنبين أن $*$ قانون تركيب داخلي G.

يعني أن: $(\forall (x,y) \in G^2); x * y \in G$

ليكن x و y عنصرين من G، لدينا:

$$(x * y) - \frac{1}{2} = x + y - 2xy - \frac{1}{2}$$
$$= -2x\left(y - \frac{1}{2}\right) + \left(y - \frac{1}{2}\right)$$
$$= \left(y - \frac{1}{2}\right)(-2x + 1) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

وبما أن $x \neq \frac{1}{2}$ و $y \neq \frac{1}{2}$ فإن $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) \neq 0$

يعني أن $(x * y) - \frac{1}{2} \neq 0$ ومنه فإن $x * y \in G$

إذن: $(\forall (x,y) \in G^2); x * y \in G$

2. لنبين أن $(G,*)$ زمرة تبادلية

- القانون $*$ تبادلي في G، لأن: $(\forall (x,y) \in G^2); x * y = y * x$
- تجميعية القانون $*$ في G.

ليكن x و y و z عناصر من G، لدينا:

$$(x * y) * z = (x+y-2xy) * z$$
$$= x+y-2xy+z-2z(x+y-2xy)$$
$$= x+y+z-2(xy+xz+yz)+4xyz$$

و

$$x * (y * z) = x * (y+z-2yz) = x+y+z-2yz-2x(y+z-2yz)$$
$$= x+y+z-2(xy+xz+yz)+4xyz$$

ومنه فإن: $(x * y) * z = x * (y * z)$ إذن: $(\forall x,y,z \in G); (x * y) * z = x * (y + z)$

يعني أن القانون $*$ تجميعي في G.

- تحديد العنصر المحايد في $(G,*)$

لدينا $(\forall x \in G); x * 0 = x$ ومنه فإن 0 هو العنصر المحايد في $(G,*)$

- العناصر القابلة للماثلة.

ليكن a عنصرا من G، لنحدد x من G بحيث $x * a = 0$

لدينا: $x * a = 0 \Longleftrightarrow x + a - 2ax = 0$

$\Longleftrightarrow x(1 - 2a) = - a$

$\Longleftrightarrow x = \frac{a}{2a - 1}$ (لأن $a \neq \frac{1}{2}$)

ولدينا: $\frac{a}{2a-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2(2a-1)}$ و $\frac{1}{2(2a-1)} \neq 0$

ومنه فإن: $\frac{a}{2a-1} \in G$

إذن كل عنصر a من G له مماثل في $(G,*)$ هو: $\frac{a}{2a-1}$

وبالتالي فإن $(G,*)$ زمرة تبادلية.

3. ليكن x عنصرا من G.

لنبين أن $(\forall x \in G);(\forall n \in IN^* - \{1\})\quad \underbrace{x * x * \ldots * x}_{n \text{ مرة}} = \frac{1}{2}\left(1 - (1 - 2x)^n\right)$

لكل عنصر n من $IN^* - \{1\}$ نضع: $u_n = \underbrace{x * x * \ldots * x}_{n \text{ مرة}}$

لنبين باستعمال الاستدلال بالترجع أن: $(\forall n \in IN^* - \{1\}); u_n = \frac{1}{2}\left(1 - (1 - 2x)^n\right)$

من أجل $n=2$، لدينا: $u_2 = x * x = 2x - 2x^2$

و $\frac{1}{2}\left(1 - (1 - 2x)^2\right) = \frac{1}{2}(4x - 4x^2) = 2x - 2x^2$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=2$

ليكن n عنصرا من IN و $n \geq 2$. نفترض أن: $u_n = \frac{1}{2}\left(1 - (1 - 2x)^n\right)$

ونبين أن: $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 - (1 - 2x)^{n+1}\right)$

لدينا:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n * x = u_n + x - 2xu_n \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - (1 - 2x)^n\right) + x - x\left(1 - (1 - 2x)^n\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - 2x)^n + x(1 - 2x)^n \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - 2x)^n(1 - 2x) = \frac{1}{2}\left(1 - (1 - 2x)^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

يعني أن $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 - (1 - 2x)^{n+1}\right)$، أي الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

وبالتالي فإن: $(\forall n \in IN^* - \{1\}); u_n = \frac{1}{2}\left(1 - (1 - 2x)^n\right)$

الجزء الثاني:

1. لنبين أن A جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(IR);\times)$

ليكن $M(x)$ و $M(y)$ عنصرين من A، لدينا:

$M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}$ و $M(y) = \begin{pmatrix} 1-y & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1-y \end{pmatrix}$ ، حيث x و y عنصران من IR.

لدينا:

$$M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-y & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1-y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1-x)(1-y)+xy & 0 & y(1-x)+x(1-y) \\ 0 & 1 & 0 \\ x(1-y)+y(1-x) & 0 & xy+(1-x)(1-y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-(x+y-2xy) & 0 & x+y-2xy \\ 0 & 1 & 0 \\ x+y-2xy & 0 & 1-(x+y-2xy) \end{pmatrix}$$

ومنه فإن: $M(x) \times M(y) = M(x+y-2y)$

إذن: A جزء مستقر من $(\mathscr{M}_3(IR);\times)$

2. أ) • لنبين أن φ تشاكل من $(G,*)$ نحو $(A,\times)$

ليكن x وy عنصرين من G، لدينا : $M(x) \times M(x) = M(x+y-2xy)$

يعني أن $\varphi(x+y-2xy) = \varphi(x) \times \varphi(y)$

ومنه فإن $\varphi(x*y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$

إذن: $(\forall x,y \in G); \varphi(x*y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$

يعني أن φ تشاكل من $(G,*)$ نحو $(A,\times)$

• لنبين أن φ تقابل

- لدينا: $(\forall M \in A); (\exists x \in G) / M = M(x)$

أي $(\forall M \in A); (\exists x \in G) / M = \varphi(x)$

يعني أن φ تطبيق شمولي

- ليكن x وy عنصرين من G، لدينا: $\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow M(x) = M(y)$

$$\Leftrightarrow 1-x = 1-y \text{ و } x=y$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

ومنه فإن: $(\forall x,y \in G); \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y$

يعني أن φ تبايني، إذن φ تقابل

وبالتالي فإن φ تشاكل تقابلي من $(G,*)$ نحو $(A,\times)$

ب) بنية $(A,\times)$

لدينا $(G,\circ)$ نحو $(A,\times)$ متشاكلتان تقابليا و$(G,\circ)$ زمرة تبادلية ومنه فإن $(A,\times)$ زمرة تبادلية.

ج) ◦ لنبين أن: $K^n = M\left(\frac{1-2^n}{2}\right)$

لدينا: $K^n = \left(M\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^n = \left(\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^n$ وبما أن φ تشاكل من $(G,\circ)$ نحو $(A,\times)$ فإن:

$$\left(\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^n = \varphi\Big(\underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right) * \left(-\frac{1}{2}\right) * \dots * \left(-\frac{1}{2}\right)}_{n \text{ مرة}}\Big)$$

وحسب السؤال 3. الجزء الأول، لدينا من أجل $x = -\frac{1}{2}$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) * \left(-\frac{1}{2}\right) * \dots * \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \left(1 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^n\right) = \frac{1}{2}(1 - 2^n)$$

ومنه فإن: $K^n = \varphi\left(\frac{1-2^n}{2}\right) = M\left(\frac{1-2^n}{2}\right)$

◦ لنبين أن $(K^n)^{-1} = M\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

لدينا: $(K^n)^{-1} = \left(\varphi\left(\frac{1-2^n}{2}\right)\right)^{-1} = \varphi\left(\left(\frac{1-2^n}{2}\right)'\right)$ حيث $\left(\frac{1-2^n}{2}\right)'$ هو مماثل $\frac{1-2^n}{2}$ في $(G,\circ)$

وبما أن: $\left(\frac{1-2^n}{2}\right)' = \dfrac{\frac{1-2^n}{2}}{2\left(\frac{1-2^n}{2}\right) - 1} = \frac{2^n - 1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$

فإن: $(K^n)^{-1} = \varphi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = M\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

التمرين 47

نعرّف في المجموعة IR قانوني التركيب الداخلي $*$ و T بما يلي:

$$(\forall (x,y) \in IR^2); x * y = x + y - 1$$

$$(\forall (x,y) \in IR^2); xTy = x + y - xy$$

1) ليكن f التطبيق من IR نحو IR المعرف بما يلي: $(\forall x \in IR); f(x) = x + 1$.

أ- بين أن f تشاكل تقابلي من $(IR, +)$ إلى $(IR, *)$.

ب- ما بنية $(IR, *)$؟

ج- ليكن x عنصرا من IR. لكل عنصر x من IN^* نضع: $x^n = \underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ مرة}}$

بين أن: $(\forall n \in IN^*); x^n = nx - n + 1$.

2) بين أن $(IR, *, T)$ جسم تبادلي.

الحل

1) أ- • لنبين أن f تشاكل من $(IR, +)$ نحو $(IR, *)$.

ليكن x وy عنصرين من IR، لدينا: $f(x+y)=x+y+1$

و
$$f(x) * f(y) = (x + 1) * (y + 1)$$
$$= (x + 1) + (y + 1) - 1 = x + y + 1$$

ومنه فإن: $f(x + y) = f(x) * f(y)$

وبالتالي فإن: $(1)\ (\forall (x, y) \in IR^2) ; f(x + y) = f(x) * f(y)$

• لنبين أن f تطبيق تقابلي.

ليكن y عنصرا من IR لدينا: $f(x) = y \Leftrightarrow x + 1 = y$
$$\Leftrightarrow x = y - 1$$

ومنه فإن: $(2)\ (\forall y \in IR) ; (\exists! x \in IR) ; f(x) = y$

وبالتالي من (1) و(2) نستنتج أن f تشاكل تقابلي من $(IR, +)$ نحو $(IR, *)$.

ب- بنية $(IR, *)$:

لدينا f تشاكل تقابلي من $(IR, +)$ نحو $(IR, *)$ و$(IR, +)$ زمرة تبادلية ومنه فإن $(IR, *)$ زمرة تبادلية.

ج- لنبين أن: $(\forall n \in IN^*) ; x^n = nx - n + 1$، باستعمال الاستدلال بالترجع

من أجل $n=1$ لدينا $1x-1+1=x$ و$x^1=x$

إذن: $x^1=1x-1+1$

ليكن n عنصرا من IN^*، نفترض أن $x^n=nx-n+1$ ونبين أن: $x^{n+1}=(n+1)x-(n+1)+1$ أي: $x^{n+1}=(n+1)x-n$

$$x^{n+1} = x * x * \dots * x \ \text{(n+1 مرة)}$$
$$= x^n * x$$

وحسب افتراض الترجع: $x^{n+1} = (nx - n + 1) * x$

إذن: $x^{n+1}=nx-n+1+x-1=(n+1)x-n$

وبالتالي فإن: $(\forall n \in IN^*) ; x^n = nx - n + 1$

2) لنبين أن: $(IR, *, T)$ جسم تبادلي.

لدينا $(IR, *)$ زمرة تبادلية (العنصر المحايد هو 1).

يبقى أن نبين أن: $(IR - \{1\}, T)$ زمرة تبادلية والقانون T توزيعي بالنسبة للقانون $*$.

• لنبين أن $(IR - \{1\}, T)$ زمرة تبادلية.

ليكن g التطبيق من IR^* نحو $IR-\{1\}$ المعرف كما يلي: $g(x)=1-x$

لنبين أن g تشاكل تقابلي من $(IR^*, \times)$ نحو $(IR - \{1\}, T)$.

- لدينا $(\forall y \in IR - \{1\}) ; (\exists! x \in IR^*) / g(x) = y$. أي g تطبيق تقابلي.

- ليكن x وy عنصرين من IR^* لدينا: $f(xy)=1-xy$

و
$$f(x)\,T f(y) = (1-x)\,T\,(1-y)$$
$$= 1 - x + 1 - y - (1-x)(1-y)$$
$$= 2 - x - y - (1 - y - x + xy)$$
$$= 1 - xy$$

ومنه فإن: $f(xy) = f(x)\,T f(y)$

إذن: $(\forall x, y \in IR^*)\,;\, f(xy) = f(x)\,T f(y)$

وبالتالي فإن g تشاكل تقابلي من $(IR^*, \times)$ نحو $(IR - \{1\}, T)$.

وبما أن $(IR^*, \times)$ زمرة تبادلية فإن: $(IR - \{1\}, T)$ زمرة تبادلية.

• لنبين أن T توزيعي بالنسبة للقانون $*$.

ليكن x و y و z عناصر من IR، لدينا:

$$xT(y * z) = xT(z + y - 1)$$
$$= x + (z + y - 1) - x(y + z - 1)$$
$$= (x + y - xy) + (x + z - xz) - 1$$
$$= (xTy) + (xTz) - 1$$
$$= (xTy) * (xTz)$$

وبما أن القانون T تبادلي وأن القانون $*$ تبادلي فإن: $(y * z)Tx = (yTx) * (zTx)$

إذن: $(\forall (x, y, z) \in IR)\,;\begin{cases} xT(y * z) = (xTy) * (xTz) \\ (y * z)\,Tx = (yTx) * (zTx) \end{cases}$

وبالتالي فإن $(IR, *, T)$ جسم تبادلي.

التمرين 48

نعرف في IR^2 القانونين الداخليين:

$(a;b)+(a';b')=(a+a';b+b')$ و $(a;b)\times(a';b')=(aa';ab'+ba')$

بين أن $(IR^2; +; \times)$ حلقة تبادلية وواحدية.

الحل

– لنبين أن $(IR^2;+)$ زمرة تبادلية.

• لنبين أن القانون + تبادلي.

ليكن $(a;b)$ و $(a';b')$ عنصرين من IR^2، لدينا:

$$(a;b)+(a';b')=(a+a';b+b')=(a'+a;b'+b)=(a';b')+(a;b)$$

إذن: $(\forall ((a;b);(a';b')) \in IR^2 \times IR^2)\,;\,(a;b) + (a';b') = (a';b') + (a;b)$

وبالتالي + قانون تبادلي في IR^2.

• لنبين أن القانون + تجميعي.

لتكن $(a;b)$ و$(a';b')$ و$(a'';b'')$ ثلاث عناصر من IR^2، لدينا :

$$\begin{aligned}\left[(a;b)+(a';b')\right]+(a'';b'') &= (a+a';b+b')+(a'';b'')\\ &= ((a+a')+a'';(b+b')+b'')\\ &= (a+(a';a'');b+(b';b''))\\ &= (a;b)+(a'+a'';b'+b'')\\ &= (a;b)+\left[(a';b')+(a'';b'')\right]\end{aligned}$$

إذن:

$$\left(\forall\left((a;b);(a';b');(a'';b'')\right)\in IR^2\times IR^2\times IR^2\right);\left[(a;b)+(a';b')\right]+(a'';b'')=(a;b)+\left[(a';b')+(a'';b'')\right]$$

وبالتالي + قانون تجميعي في IR^2.

- $(0;0)$ هو العنصر المحايد في $(IR^2;+)$ (تحقق من ذلك)
- كل عنصر $(a;b)$ من IR^2 يقبل مماثلا في $(IR^2;+)$ هو $(-a;-b)$. (تحقق من ذلك)

إذن $(IR^2;+)$ زمرة تبادلية.

- لنبين أن القانون × تجميعي في IR^2.

لتكن $(a;b)$ و$(a';b')$ و$(a'';b'')$ ثلاث عناصر من IR^2، لدينا :

$$\begin{aligned}\left[(a;b)\times(a';b')\right]\times(a'';b'') &= (aa';ab'+ba')\times(a'';b'')\\ &= (aa'a'';aa'b''+aa''b+a''a'b)\end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}(a;b)\times\left[(a';b')\times(a'';b'')\right] &= (a;b)\times(a'a'';a'b''+a''b')\\ &= (aa'a'';aa'b''+aa''b'+a'a''b)\end{aligned}$$

إذن لكل $(a;b)$ و$(a';b')$ و$(a'';b'')$ من IR^2، لدينا :

$$(a;b)\times\left[(a';b')\times(a'';b'')\right]=\left[(a;b)\times(a';b')\right]\times(a'';b'')$$

يعني أن القانون × تجميعي في IR^2.

- لنبين أن القانون × تبادلي في IR^2.

لتكن $(a;b)$ و$(a';b')$ عنصرين من IR^2، لدينا :

$$(a;b)\times(a';b')=(aa';ab'+ba')=(a'a;a'b+b'a)=(a';b')\times(a;b)$$

إذن:

$$\left(\forall\left((a;b);(a';b')\right)\in IR^2\times IR^2\right);(a;b)\times(a';b')=(a';b')\times(a;b)$$

يعني أن القانون × تبادلي في IR^2.

- لنبين أن القانون × توزيعي بالنسبة لـ+ في IR^2.

لتكن $(a;b)$ و$(a';b')$ و$(a'';b'')$ ثلاث عناصر من IR^2، لدينا :

$$\begin{aligned}(a;b)\times\left[(a';b')+(a'';b'')\right] &= (a;b)\times(a'+a'';b'+b'') \quad (1)\\ &= (a(a'+a'');a(b'+b'')+b(a'+a''))\end{aligned}$$

ولدينا :
$$[(a;b)\times(a';b')]+[(a;b)\times(a'';b'')]=(aa';ab'+ba')+(aa'';ab''+ba'')$$
$$=(aa'+aa'';ab'+ba'+ab''+ba'')$$
$$=(a(a'+a'');a(b'+b'')+b(a'+a''))\qquad(2)$$

من (1) و(2) نستنتج أن لكل $(a;b)$ و$(a';b')$ و$(a'';b'')$ ثلاث عناصر من IR^2، لدينا :

$$(a,b)\times[(a',b')+(a'',b'')]=[(a,b)\times(a',b')]+[(a,b)\times(a'',b'')]$$

وبما أن $\times$ تبادلي في IR^2 فإن :

$$[(a';b')+(a'';b'')]\times(a;b)=[(a';b')\times(a;b)]+[(a'';b'')\times(a;b)]$$

إذن القانون $\times$ توزيعي بالنسبة للقانون + في IR^2.

وبالتالي $(IR^2;+;\times)$ حلقة تبادلية.

- لنبين أن الحلقة $(IR^2;+;\times)$ واحدية.

$(e_1;e_2)$ العنصر المحايد في $(IR^2;\times)$ إذا وفقط إذا كان :

$$(\forall(a;b)\in IR^2);(a;b)\times(e_1;e_2)=(a;b)\iff(\forall(a;b)\in IR^2);(ae_1;ae_2+be_1)=(a;b)$$
$$\iff\begin{cases}(\forall a\in IR);a(e_1-1)=0\\(\forall(a;b)\in IR^2);ae_2+be_1=b\end{cases}$$
$$\iff e_1=1 \text{ و } e_2=0$$

إذن $(1;0)$ هو العنصر المحايد في $(IR^2;\times)$.

وبالتالي $(IR^2;+;\times)$ حلقة تبادلية وواحدية.

التمرين 49

ليكن α حلا للمعادلة $z^2+z+1=0$ في المجموعة $\mathbb{C}$.

نعتبر المجموعة $\mathbb{Z}[\alpha]$ المعرفة بما يلي : $\mathbb{Z}[\alpha]=\{a+b\alpha/(a;b)\in\mathbb{Z}^2\}$.

1) أ- بين أن $\mathbb{Z}[\alpha]$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{C};\times)$.

ب- بين أن $\mathbb{Z}[\alpha]$ جزء مستقر من $(\mathbb{C};\times)$.

ج- بين أن $(\mathbb{Z}[\alpha];+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

د- بين أن : $\mathbb{Z}[\alpha]=\mathbb{Z}[\bar{\alpha}]$

2) ليكن f التطبيق المعرف بما يلي :
$$f:\mathbb{Z}[\alpha]\to\mathbb{Z}$$
$$a+\alpha b\mapsto a^2+b^2-ab$$

أ- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{Z}[\alpha]);f(x)=0\iff x=0$

وأن : $(\forall x,y\in\mathbb{Z}[\alpha]);f(xy)=f(x)f(y)$

ب- لتكن G مجموعة العناصر من $\mathbb{Z}[\alpha]$ التي تقبل مقلوبا في $(\mathbb{Z}[\alpha];+;\times)$.

أ- حدد $f(G)$

ii- حدد المجموعة G.

3) نعتبر المجموعة: $\mathbb{Q}[\alpha]=\{a+b\alpha\,/\,(a;b)\in\mathbb{Q}^2\}$.

أ- بين أن $\mathbb{Q}[\alpha]$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{C};+)$.

ب- بين أن $\mathbb{Q}[\alpha]$ جزء مستقر من $(\mathbb{C};\times)$.

ج- بين أن $(\mathbb{Q}[\alpha];+;\times)$ جسم تبادلي.

الحل

1) لنبين أن $\mathbb{Z}[\alpha]$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{C};\times)$.

- $\mathbb{Z}[\alpha]\subset\mathbb{C}$.
- $\mathbb{Z}[\alpha]\neq\phi$ لأن $0\in\mathbb{Z}[\alpha]$ من أجل $a=b=0$.
- ليكن z و z' عنصرين من $\mathbb{Z}[\alpha]$، لدينا:

$$z\in\mathbb{Z}[\alpha]\Leftrightarrow\left(\exists(a;b)\in\mathbb{Z}^2\right)/z=a+\alpha b$$

و $$z'\in\mathbb{Z}[\alpha]\Leftrightarrow\left(\exists(a';b')\in\mathbb{Z}^2\right)/z'=a'+\alpha b'$$

لدينا: $-z'=-a'-\alpha b'$ هو مماثل z' في $(\mathbb{C};\times)$.

ومنه فإن: $z+(-z')=(a-a')+\alpha(b-b')$

وبما أن: $a-a'\in\mathbb{Z}$ و $b-b'\in\mathbb{Z}$ فإن: $z+(-z')\in\mathbb{Z}[\alpha]$

إذن: $(\forall z;z'\in\mathbb{Z}[\alpha]);z+(-z')\in\mathbb{Z}[\alpha]$

وبالتالي فإن $(\mathbb{Z}[\alpha];+)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{C};\times)$.

ب- لنبين أن $\mathbb{Z}[\alpha]$ جزء مستقر من $(\mathbb{C};\times)$.

ليكن z و z' عنصرين من $\mathbb{Z}[\alpha]$، لدينا:

$$z\in\mathbb{Z}[\alpha]\Leftrightarrow\left(\exists(a,b)\in\mathbb{Z}^2\right)/z=a+\alpha b$$

و $$z'\in\mathbb{Z}\alpha]\Leftrightarrow\left(\exists(a',b')\in\mathbb{Z}^2\right)/z'=a'+\alpha b'$$

ومنه فإن:

$$\begin{aligned}z\times z'&=(a+\alpha b)(a'+\alpha b')\\&=aa'+\alpha(ab'+ba')+\alpha^2bb'\end{aligned}$$

وبما أن α جذر للمعادلة $z^2+z+1=0$، فإن: $\alpha^2=-1-\alpha$

إذن:

$$\begin{aligned}z\times z'&=aa'+\alpha(ab'+ba')+(-1-\alpha)bb'\\&=(aa'-bb')+\alpha(ab'+ba'-bb')\end{aligned}$$

ولدينا: $aa'-bb'\in\mathbb{Z}$ و $ab'+ba'-bb'\in\mathbb{Z}$

ومنه فإن: $z\times z'\in\mathbb{Z}[\alpha]$

إذن: $(\forall z;z'\in\mathbb{Z}[\alpha]);z\times z'\in\mathbb{Z}[\alpha]$

أي إن $\mathbb{Z}[\alpha]$ جزء مستقر من $(\mathbb{C};\times)$.

ج- لنبين أن: $(\mathbb{Z}[\alpha]; +; \times)$ حلقة تبادلية واحدية.

- $(\mathbb{Z}[\alpha]; +)$ زمرة تبادلية.
- القانون × تجميعي وتبادلي في $\mathbb{C}$ وتوزيعي بالنسبة للقانون + في $\mathbb{C}$ و $\mathbb{Z}[\alpha]$ جزء مستقر بالنسبة للجمع والضرب ومنه فإن القانون × تجميعي في $\mathbb{Z}[\alpha]$ وتبادلي في $\mathbb{Z}[\alpha]$ وتوزيعي بالنسبة للقانون + في $\mathbb{Z}[\alpha]$.
- العنصر 1 هو العنصر المحايد في $(\mathbb{C};\times)$ و $1 \in \mathbb{Z}[\alpha]$ من أجل $x=1$ و$y=0$.

إذن 1 هو العنصر المحايد في $(\mathbb{Z}[\alpha]; \times)$.

- وبالتالي فإن $(\mathbb{Z}[\alpha]; +; \times)$ حلقة تبادلية واحدية.

د- لنبين أن $\mathbb{Z}[\alpha] = \mathbb{Z}[\overline{\alpha}]$

لدينا: $\mathbb{Z}[\overline{\alpha}] = \{a + b\overline{\alpha} / (a,b) \in \mathbb{Z}\}$

ولدينا α و$\overline{\alpha}$ هما جذرا المعادلة $z^2+z+1=0$ في $\mathbb{C}$.

ومنه فإن: $\alpha + \overline{\alpha} = -1$ و $\alpha\overline{\alpha} = 1$

- ليكن z عنصرا من $\mathbb{Z}[\alpha]$، لدينا $z = a + \alpha b$ مع $(a,b) \in \mathbb{Z}$

ومنه فإن: $z = a + (-1 - \overline{\alpha})b = (a - b) + \overline{\alpha}(-b)$

وبما أن: $a - b \in \mathbb{Z}$ و $-b \in \mathbb{Z}$ فإن: $z \in \mathbb{Z}[\overline{\alpha}]$

إذن: $\mathbb{Z}[\alpha] \subset \mathbb{Z}[\overline{\alpha}]$

ليكن z عنصرا من $\mathbb{Z}[\overline{\alpha}]$، لدينا: $z = a + \overline{\alpha}b$ مع $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$

ومنه فإن: $z = a + \overline{\alpha}b = a + (-1 - \alpha)b = (a - b) + \alpha(-b)$

يعني أن: $z \in \mathbb{Z}[\alpha]$ ومنه: $\mathbb{Z}[\overline{\alpha}] \subset \mathbb{Z}[\alpha]$

وبالتالي فإن: $\mathbb{Z}[\alpha] = \mathbb{Z}[\overline{\alpha}]$

2) أ- ليكن x عنصرا من $\mathbb{Z}[\alpha]$ بحيث: $x = a + \alpha b$ و $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$

إذا كان $b=0$ فإن: $f(x) = a^2 = |a|^2$

إذا كان: $b \neq 0$ فإن:

$$f(x) = a^2 + b^2 - ab$$
$$= b^2\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right) + 1\right) = b^2\left(\left(-\frac{a}{b}\right)^2 + \left(-\frac{a}{b}\right) + 1\right)$$

وبما أن α و$\overline{\alpha}$ هما جذرا الحدودية z^2+z+1 في $\mathbb{C}$ فإن:

$$f(x) = b^2\left(-\frac{a}{b} - \alpha\right)\left(-\frac{a}{b} - \overline{\alpha}\right)$$
$$= (a + b\alpha)(a + b\overline{\alpha}) = (a + b\alpha)(\overline{a + b\alpha})$$
$$= |a + b\alpha|^2$$

إذن: $(\forall x \in \mathbb{Z}[\alpha]) ; f(x) = |x|^2$

حيث: $|x|$ هو معيار العدد العقدي x.

وبالتالي فإن: $(\forall x \in \mathbb{Z}[\alpha]) ; f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

و $(\forall (x,y) \in \mathbb{Z}[\alpha]) ; f(xy) = f(x)f(y)$

ب- i- تحديد $f(G)$:

لدينا f تشاكل من $(\mathbb{Z}[\alpha]; \times)$ نحو $(\mathbb{Z}; \times)$ حسب:

النتيجة التالية: $(\forall x, y \in \mathbb{Z}[\alpha]) ; f(xy) = f(x) \times f(y)$

ولدينا: $(\forall x \in \mathbb{Z}[\alpha]) ; f(x) \in IN$ لأن: $f(x) \in \mathbb{Z}$ و $f(x) \geq 0$.

ليكن x عنصرا من G.

لدينا: $f(x)=f(x^{-1})=f(x.x^{-1})=f(1)=1$ في IN

إذن: $f(x)=1$ لأن 1 هو العنصر الوحيد الذي يقبل مقلوبا في IN عكسيا:

إذا كان $f(x)=1$ مع x من $\mathbb{Z}[\alpha]$ أي: $x\bar{x} = 1$

يعني أن $x \in G$ وبالتالي فإن $f(G)=\{1\}$

ii- تحديد G

ليكن: $x = a + b\alpha$ عنصرا من G؛ لدينا: $f(x)=1$

ومنه: $f(x) = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - ab - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4}b^2$$

ولدينا: $\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4}b^2 \Rightarrow 1 - \frac{3}{4}b^2 \geq 0$ و $b \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow b^2 < 2 \text{ و } b \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow b \in \{-1; 0; 1\}$$

- إذا كان: $b=0$ فإن: $a^2=1$، أي: $a=1$ أو $a=-1$.

ومنه: $x=1$ أو $x=-1$

إذا كان: $b=1$ فإن: $a^2-a=0$، أي: $a=0$ أو $a=1$، ومنه: $x = \alpha$ أو $z = 1 + \alpha$

إذا كان: $b=-1$ فإن: $a^2+a=0$، أي: $a=0$ أو $a=-1$، ومنه: $x = -\alpha$ أو $x = -1 - \alpha$

إذن: $G = \{-1; 1; \alpha; -\alpha; 1 + \alpha; -1 - \alpha\}$

3) أ- لنبين أن $\mathbb{Q}[\alpha]$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{C};+)$.

- $\mathbb{Q}[\alpha] \subset \mathbb{C}$

- $\mathbb{Q}[\alpha] \neq \phi$، لأن: $0 \in \mathbb{Q}[\alpha]$ ، من أجل $a=b=0$.

• ليكن z و z' عنصرين من $\mathbb{Q}[\alpha]$، لدينا :

$$z \in \mathbb{Q}[\alpha] \Leftrightarrow \left(\exists (a;b) \in \mathbb{Q}^2\right) / z = a + \alpha b$$

$$z' \in \mathbb{Q}[\alpha] \Leftrightarrow \left(\exists (a';b') \in \mathbb{Q}^2\right) / z' = a' + \alpha b'$$

لدينا: $-z' = -a' - \alpha b'$ هو مماثل z' في $(\mathbb{C};+)$.

ومنه: $z + (-z') = (a - a') + \alpha(b - b')$

وبما أن: $a - a' \in \mathbb{Q}$ و $b - b' \in \mathbb{Q}$ فإن: $z + (-z') \in \mathbb{Q}$

إذن: $(\forall z; z' \in \mathbb{Q}[\alpha]); z + (-z') \in \mathbb{Q}[\alpha]$

وبالتالي فإن: $\mathbb{Q}[\alpha]$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(\mathbb{C};+)$.

ب- لنبين أن $\mathbb{Q}[\alpha]$ جزء مستقر من $(\mathbb{C};\times)$.

ليكن: $z = a + \alpha b$ و $z' = a' + \alpha b'$ عنصرين من $\mathbb{Q}[\alpha]$، لدينا:

$$z \times z' = (a + \alpha b)(a' + \alpha b') = aa' + \alpha(ab' + ba') + \alpha^2 bb'$$

وبما أن α جذر للمعادلة $z^2+z+1=0$ فإن: $\alpha^2 = -1 - \alpha$

ومنه: $z \times z' = (aa' - bb') + \alpha(ab' + ba' - bb')$

ولدينا: $aa' - bb' \in \mathbb{Q}$ و $ab' + ba' - bb' \in \mathbb{Q}$

ومنه: $z \times z' \in \mathbb{Q}[\alpha]$.

إذن: $(\forall z; z' \in \mathbb{Q}[\alpha]); z \times z' \in \mathbb{Q}[\alpha]$

يعني أن: $\mathbb{Q}[\alpha]$ جزء مستقر من $(\mathbb{C};\times)$.

ج- لنبين أن $(\mathbb{Q}[\alpha]; +; \times)$ جسم تبادلي.

• $(\mathbb{Q}[\alpha]; +)$ زمرة تبادلية.

• لنبين أن: $(\mathbb{Q}[\alpha] - \{0\}; \times)$ زمرة تبادلية.

- لدينا، القانون $\times$ تجميعي وتبادلي في $\mathbb{C}$، وتوزيعي بالنسبة للقانون $+$ في $\mathbb{C}$، و $\mathbb{Q}[\alpha]$ جزء مستقر بالنسبة للجمع والضرب؛ ومنه فإن القانون $\times$ تجميعي وتبادلي في $\mathbb{Q}[\alpha]$ وتوزيعي بالنسبة للقانون $+$ في $\mathbb{Q}[\alpha]$.

- العنصر 1 هو العنصر المحايد في $(\mathbb{C};\times)$ و $1 \in \mathbb{Q}[\alpha]$، من أجل: $a=1$ و $b=0$.

ومنه: 1 هو العنصر المحايد في $(\mathbb{Q}[\alpha]; \times)$.

- ليكن z عنصرا من $\mathbb{Q}[\alpha]$ و $z \neq 0$، حيث: $z = a + \alpha b$ مع: $(a;b) \neq (0;0)$.

لدينا: $$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + \alpha b} = \frac{a + \overline{\alpha} b}{a^2 + b^2 - ab}$$

وبما أن: $\alpha + \overline{\alpha} = -1$ فإن: $a + \overline{\alpha} b = (a - b) + \alpha(-b)$

إذن: $\frac{1}{z} = \frac{a-b}{a^2+b^2-ab} + \alpha\left(\frac{-b}{a^2+b^2-ab}\right)$

ولدينا: $\frac{a-b}{a^2+b^2-ab}$ و $\frac{-b}{a^2+b^2-ab}$ ينتميان إلى $\mathbb{Q}$.

ومنه فإن: $z^{-1} \in \mathbb{Q}[\alpha]$.

إذن، كل عنصر z من $\mathbb{Q}[\alpha]$ يخالف 0، يقبل مقلوبا في $(\mathbb{Q}[\alpha]; \times)$.

وبالتالي نستنتج أن: $(\mathbb{Q}[\alpha]; +; \times)$ جسم تبادلي.

التمرين 50

ليكن α و β حلي المعادلة: $x^2-2x-2=0$ في المجموعة IR.

نعتبر المجموعة التالية: $A = \{a + \alpha b / (a;b) \in \mathbb{Z}^2\}$

1- بين أن $(A;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

2- ليكن $(a;b)$ و $(a';b')$ عنصرين من $\mathbb{Z}^2$.

أ- بين أن: $a + \alpha b = 0 \iff (a = 0$ و $b = 0)$

ب- استنتج أن: $a + \alpha b = a' + \alpha b' \iff (a = a'$ و $b = b')$

ج- بين أن $a + \beta b \in A$ وأن: $(a + \alpha b) \times (a + \beta b) \in \mathbb{Z}$

3) ليكن f تطبيقا من A إلى A ويحقق الشروط التالية:

(E):
i) f تشاكل من $(A;\times)$ نحو $(A;+)$
ii) f تشاكل من $(A;\times)$ نحو $(A;\times)$
iii) $(\forall m \in \mathbb{Z}); f(m) = m$

أ- بين أن $f(\alpha)$ حل للمعادلة $x^2-2x-2=0$ في IR.

ب- حدد جميع التطبيقات f من A نحو A والتي تحقق الشروط (E).

الحل

1) لنبين أن حلقة تبادلية واحدية.

• لنبين أن $(IR;+)$ زمرة تبادلية.

لدينا $A \subset IR$ و $(IR;+)$ زمرة تبادلية ومنه يكفي أن نبين أن $(IR;+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(IR;+)$.

- $A \neq \phi$ لأن: $0 \in A$ من أجل: $a=b=0$

- ليكن x و y عنصرين من A، لدينا:

$x \in A \iff (\exists(a,b) \in \mathbb{Z}); x = a + \alpha b$

و $y \in A \iff (\exists(c,d) \in \mathbb{Z}); y = c + \alpha d$

بما أن $(IR;+)$ في y هو مماثل $-y=-(c+\alpha d)$ فإن:

$$x+(-y)=a+\alpha b-c-\alpha d=(a-c)+\alpha(b-d)$$

ولدينا: $a-c\in\mathbb{Z}$ و $b-d\in\mathbb{Z}$ ومنه فإن: $x+(-y)\in A$

إذن $(A;+)$ زمرة جزئية للزمرة $(IR;+)$.

وبالتالي فإن $(A;+)$ زمرة تبادلية.

• ليكن x وy عنصرين من A بحيث: $x=a+\alpha b$ و $y=c+\alpha d$

مع a وb وc وd عناصر من $\mathbb{Z}$، لدينا:

$$xy=(a+\alpha b)(c+\alpha d)=ac+(ad+bc)\alpha+bd\alpha^2$$

بما أن α حل للمعادلة $x^2-2x-2=0$ فإن: $\alpha^2=2\alpha+2$

ومنه: $xy=ac+(ad+bc)\alpha+bd(2\alpha+2)$
$$=ac+2bd+\alpha(ad+bc+2bd)$$

ولدينا $ac+2bd\in\mathbb{Z}$ و $ad+bc+2bd\in\mathbb{Z}$ ومنه فإن: $xy\in A$

إذن: $(\forall x,y\in A);x\times y\in A$؛ يعني أن A جزء مستقر من $(IR;\times)$.

– لدينا القانون $\times$ تجميعي في IR وتوزيعي بالنسبة للقانون + في IR وA جزء مستقر بالنسبة للضرب والجمع فإن القانون $\times$ تجميعي في A وتوزيعي بالنسبة للقانون + في A.

• لدينا 1 هو العنصر المحايد في $(IR;\times)$ و$1\in A$ ومنه فإن 1 هو العنصر المحايد في $(A;\times)$.

• لدينا القانون $\times$ تبادلي في IR وA جزء مستقر من $(IR;\times)$ ومنه فإن القانون $\times$ تبادلي في A.

– وبالتالي فإن $(A;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

2) أ– لنبين أن $a+\alpha b=0\iff a=b=0$

إذا كان: $a=b=0$ فإن: $a+\alpha b=0$

نفترض أن $a+\alpha b=0$، لنبين أن $a=0$ و$b=0$.

إذا كان $b\neq 0$ فإنه لدينا: $\alpha=-\dfrac{a}{b}$ أي: $\alpha\in\mathbb{Q}$

وبما أن: $\alpha=1+\sqrt{3}$ أو $\alpha=1-\sqrt{3}$ فإن: $\alpha=\sqrt{3}$

أي: $\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$ وهذا تناقض، إذن $b=0$ ومنه فإن $a=0$

إذن: $a+\alpha b=0\Rightarrow a=b=0$

وبالتالي فإن: $a+\alpha b=0\iff a=b=0$

ب– الاستنتاج

لدينا: $a+\alpha b=a'+\alpha b'\iff(a-a')+\alpha(b-b')=0$

$\Leftrightarrow a - a' = 0$ و $b-b'=0$

$\Leftrightarrow a = a'$ و $b=b'$

ج- • لنبين أن $a + \beta b \in A$

لدينا: α و β هما حلا المعادلة $x^2-2x-2=0$ ومنه فإن: $\alpha + \beta = 2$ أي: $\beta = 2 - \alpha$

إذن: $a + \beta b = a + (2 - \alpha) b = (a + 2b) + \alpha(- b)$

ولدينا $-b \in \mathbb{Z}$ و $a + 2b \in \mathbb{Z}$ ومنه فإن: $a + \beta b \in A$

• لنبين أن: $(a + \alpha b) \times (a + \beta b) \in \mathbb{Z}$

لدينا: $(a + \alpha b) \times (a + \beta b) = a^2 + \alpha (ab) + \beta (ab) + \alpha\beta b^2$

$= a^2 + ab(\alpha + \beta) + \alpha\beta b^2$

وبما أن: $\alpha + \beta = 2$ و $\alpha\beta = - 2$ لأن α و β جذرا المعادلة $x^2-2x-2=0$

فإن: $(a + \alpha b) \times (a + \beta b) = a^2 + 2ab - 2b^2$

ولدينا: $a^2 + 2ab - 2b^2 \in \mathbb{Z}$ ومنه فإن: $(a + \alpha b) \times (a + \beta b) \in \mathbb{Z}$.

3) لنبين أن $f(\alpha)$ حل للمعادلة **$x^2-2x-2=0$.**

لدينا f تشاكل من $(A;\times)$ نحو $(A;\times)$ و $f(m)=m$ لكل m من $\mathbb{Z}$.

ومنه فإن: $(f(\alpha))^2 = f(\alpha)f(\alpha) = f(\alpha^2)$ لأن: $\alpha \in A$

و $-2f(\alpha) = f(- 2)f(\alpha) = f(-2\alpha)$

وبما أن f تشاكل من $(A;+)$ نحو $(A;+)$ فإن: $f(\alpha^2) + f(-2\alpha) = f(\alpha^2 - 2\alpha)$

ومنه فإن: $f(\alpha^2) + f(- 2\alpha) - 2 = f(\alpha^2 - 2\alpha) + f(- 2)$

$= f(\alpha^2 - 2\alpha - 2) = f(0) = 0$

إذن: $(f(\alpha))^2 - 2f(\alpha) - 2 = 0$، يعني أن $f(\alpha)$ حل للمعادلة $x^2-2x-2=0$ في IR^2.

ب- تحديد جميع التطبيقات f من A نحو A وتحقق (E).

ليكن x عنصرا من A حيث: $x = a + \alpha b$ مع $a \in \mathbb{Z}$ و $b \in \mathbb{Z}$

تبعا للشروط (E) لدينا: $f(x) = f(\alpha a + \alpha b)$

$= f(a) + f(\alpha b) = f(a) + f(b)f(\alpha) = a + bf(\alpha)$

بما أن $f(\alpha)$ جذر للمعالة $x^2-2x-2=0$ وعلما أن α و β هما جذرا هذه المعادلة فإن:

$f(\alpha) = \alpha$ أو $f(\alpha) = \beta$

ومنه فإن: $f(x) = a + \alpha b = x$ أو $f(x) = a + \beta b$

إذن يوجد تطبيقان من A نحو A ويحققان (E) هما:

$a + \alpha b \mapsto a + \alpha b$ ، $a + \alpha b \mapsto a + \beta b$.

التمرين 51

نعتبر المجموعة E المعرفة بما يلي: $E = \{a + b\sqrt{3} \,/\, (a;b) \in \mathbb{Z}^2\}$

1) بين أن: $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

2) أ- بين أن: $(\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2); (a + b\sqrt{3} = 0 \iff a = b = 0)$

ب- بين أن: $(\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2); (a^2 - 3b^2 = 0 \iff a = b = 0)$

ج- بين أن الحلقة $(E;+;\times)$ كاملة.

3) ليكن f التطبيق من $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ نحو E المعرف بما يلي:

$$(\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2); f((x;y)) = x + y\sqrt{3}$$

أ- بين أن f تطبيق تقابلي.

ب- حدد قانون تركيب داخلي T في $\mathbb{Z}^2$ لكي يكون f تشاكلا من $(\mathbb{Z}^2;T)$ إلى $(E;\times)$.

4) ليكن $\perp$ قانون تركيب داخلي معرف على E بما يلي:

$$\left(a + b\sqrt{3}\right) \perp \left(a' + b'\sqrt{3}\right) = aa' + bb'\sqrt{3}$$

أ- بين أن القانون $\perp$ تبادلي وتجميعي في E.

ب- بين أن القانون $\perp$ يقبل عنصرا محايدا في E.

ج- حدد العناصر القابلة للمماثلة في $(E;\perp)$.

الحل

1) لنبين أن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

• لنبين أن $(E;+)$ زمرة تبادلية.

لدينا $E \subset IR$ و$(IR;+)$ زمرة تبادلية، ومنه يكفي أن نبين أن $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(IR;+)$.

- $E \neq \phi$ لأن: $0 \in E$، من أجل $a=b=0$.

- ليكن x وy عنصرين من E، لدينا:

$$x \in E \iff (\exists (a;b) \in \mathbb{Z}^2) \,/\, x = a + b\sqrt{3}$$

و $$y \in E \iff (\exists (a';b') \in \mathbb{Z}^2) \,/\, y = a' + b'\sqrt{3}$$

ومنه فإن: $$x + (-y) = (a - a') + (b - b')\sqrt{3}$$

وبما أن: $a - a' \in \mathbb{Z}$ و $b - b' \in \mathbb{Z}$ فإن: $x + (-y) \in E$

إذن: $$(\forall x, y \in E); x + (-y) \in E$$

يعني أن $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(IR;+)$، وبالتالي فإن $(E;+)$ زمرة تبادلية.

• لنبين أن E جزء مستقر من $(IR;\times)$

ليكن x وy عنصرين من E، حيث: $x = a + b\sqrt{3}$ و $y = a' + b'\sqrt{3}$ مع: a وb وa' وb' عناصر من $\mathbb{Z}$

لدينا: $x \times y = aa' + 3bb' + (a'b + ab')\sqrt{3}$

وبما أن: $aa' + 3bb' \in \mathbb{Z}$ و $a'b + ab' \in \mathbb{Z}$، فإن: $x \times y \in E$

إذن: $(\forall x, y \in E); x \times y \in E$، يعني أن E جزء مستقر من $(IR;\times)$.

• لدينا E جزء مستقر من $(IR;\times)$ والقانون $\times$ تبادلي وتجميعي وتوزيعي بالنسبة للقانون $+$ في IR، ومنه فإن القانون $\times$ تبادلي وتجميعي في E، وتوزيعي بالنسبة للجمع في E.

• 1 هو العنصر المحايد في $(IR;\times)$، ومنه فإن 1 هو العنصر المحايد في $(E;\times)$

وبالتالي فإن: $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

2) أ- ليكن a وb عنصرين من $\mathbb{Z}$.

لنبين أن: $a + b\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

إذا كان: $a=b=0$ فإن: $a + b\sqrt{3} = 0$

نفترض أن: $a + b\sqrt{3} = 0$

إذا كان: $b \neq 0$ فإن: $\sqrt{3} = -\dfrac{a}{b}$، ولدينا: $-\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$، ومنه فإن: $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$، وهذا تناقض.

إذن $b=0$ ومنه نستنتج أن $a=0$.

وبالتالي فإن: $(\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2); a + b\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.

ب- ليكن a وb عنصرين من $\mathbb{Z}$.

لنبين أن: $a^2 - 3b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

لدينا: $a^2 - 3b^2 = 0 \Leftrightarrow (a - \sqrt{3}b)(a + b\sqrt{3}) = 0$

$\Leftrightarrow a + (-b)\sqrt{3} = 0$ أو $a + b\sqrt{3} = 0$

$\Leftrightarrow (a = -b = 0)$ أو $a = b = 0$

$\Leftrightarrow a = b = 0$

ومنه فإن: $(\forall (a;b) \in IZ^2); a^2 - 3b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.

ج- لنبين أن $(E;+;\times)$ حلقة كاملة.

يعني أن: $(\forall (x;y) \in E^2); x \times y = 0 \Rightarrow x = 0$ أو $y=0$

ليكن x وy عنصرين من E مع $x = a + b\sqrt{3}$ و $y = a' + b'\sqrt{3}$

وa وa' وb وb' عناصر من $\mathbb{Z}$، بحيث: $x \times y=0$

لدينا: $x \times y = (aa' + 3bb') + (a'b + ab')\sqrt{3}$

ولدينا: $aa' + 3bb' \in \mathbb{Z}$ و $a'b + ab' \in \mathbb{Z}$ وحسب السؤال 2) أ)

فإن: $x \times y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ba' + ab' = 0 \\ aa' + 3bb' = 0 \end{cases}$ (1)

باعتبار (a',b') كمجهول فإن محددة النظمة (1) هي: $\Delta = \begin{vmatrix} b & a \\ a & 3b \end{vmatrix} = 3b^2 - a^2$