EXERCICES D'APPLICATION

GROUPE – MORPHISME DE GROUPES

EXERCICE 01

Soit : $E = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 - y^2 = 1\}$

Pour tout $(x;y) \in E$ et $(x';y') \in E$, on pose :

$$(x;y)\top(x';y') = (xx' + yy';\ xy' + yx')$$

1) Montrer que $\top$ est une loi de composition interne dans E.

2) Montrer que $(E;\top)$ est un groupe commutatif.

EXERCICE 02

On considère l'intervalle $I =]-1;1[$ de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que : $(\forall (a;b) \in I^2) \quad -1 < \dfrac{a+b}{1+ab} < 1$

2) On définit sur I une loi de composition interne $*$ comme suit : $(\forall (a;b) \in I^2) \quad a * b = \dfrac{a+b}{1+ab}$

Montrer que $(I;*)$ est un groupe commutatif.

EXERCICE 03

On définit sur l'ensemble $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ une loi de composition interne comme suit :

$$(a;b)*(c;d) = (ac;bc+d)$$

1) Montrer que $(G;*)$ est un groupe.

2) On considère l'ensemble :

$$H = \{(1;x) \in G \ / \ x \in \mathbb{R}\}$$

Montrer que H est un sous-groupe de $(G;*)$.

EXERCICE 04

On considère l'ensemble $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On définit sur E une loi de composition interne $*$ comme suit :

Pour tous $(x;y)$ et $(z;t)$ de E :

$$(x;y)*(z;t) = (xz;\ xt + z^n y)$$

où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Montrer que $(E;*)$ est un groupe non commutatif.

EXERCICE 05

Soit $(G;*)$ un groupe d'élément neutre e.

On note a^{-1} le symétrique de a.

On considère l'application f définie de G dans G par :

$$f(a) = a^{-1}$$

Montrer que f est un isomorphisme si, et seulement si, le groupe $(G;*)$ est commutatif.

EXERCICE 06

On considère l'ensemble :

$$E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\dfrac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ / \ x \in \mathbb{R} \right\}$$

1) Calculer $M(x) \times M(x')$ pour tout $(x;x') \in \mathbb{R}^2$.

2) Montrer que $(E;\times)$ est un groupe.

EXERCICE 07

$(E;*)$ est un groupe d'élément neutre e.

Pour un élément $a \in E$ donné $(a \neq e)$, on définit la loi $\top$ sur E par : $(\forall (x;y) \in E^2) \quad x \top y = x * y * a$

Montrer que $(E;\top)$ est un groupe commutatif.

EXERCICE 08

Soit $(G;*)$ un groupe d'élément neutre e.

On note a^{-1} le symétrique de a. Soit H un sous-groupe de $(G;*)$ et $n \in G$ (n donné). Montrer que l'ensemble $H_n = \{n * h * n^{-1}\}$ est un sous-groupe de $(G;*)$.

EXERCICE 10

Soit p et q deux nombres premiers positifs distincts.

Montrer que : $H=\{p^m q^n \ / \ (m;n)\in\mathbb{Z}^2\}$

est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*;\times)$.

EXERCICE 11

Soit f un morphisme de groupe $(G;\top)$ dans un groupe $(G';\perp)$. Soit H' un sous-groupe de $(G';\perp)$.

Montrer que $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de $(G;\top)$.

EXERCICE 12

On munit $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ comme suit : $(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2)\quad x*y=x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}$

et on considère l'application s définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $$s(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

1) Montrer que s est un isomorphisme de $(\mathbb{R};+)$ dans $(\mathbb{R};*)$.

2) En déduire la structure de $(\mathbb{R};*)$ en déterminant son élément neutre et le symétrique de tout élément dans $(\mathbb{R};*)$.

3) Pour tout $x\in\mathbb{R}$ et pour tout entier $n\geq 2$, on pose :

$$x^{(n)}=\underbrace{x*x*\ldots*x}_{n\ fois}$$

Calculer $x^{(n)}$.

EXERCICE 13

On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$, on considère l'application φ_a définie par :

$$\varphi_a:\ \mathcal{P}\to\mathcal{P}$$
$$M(x;y)\mapsto M'(x';y')$$

avec : $x'=x+\ln a$ et $y'=ay$

On considère l'ensemble : $F=\{\varphi_a \ / \ a\in\mathbb{R}_+^*\}$

1) Montrer que la composition des applications « o » est une loi de composition interne dans F.

2) On considère l'application :

$$f:\mathbb{R}_+^*\to F$$
$$a\mapsto\varphi_a$$

a) Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*;\times)$ dans $(F;o)$.

b) En déduire la structure de $(F;o)$.

c) Déterminer le symétrique de φ_a dans $(F;o)$, pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$.

EXERCICE 15

On considère l'ensemble : $E=\left\{\frac{1+2p}{1+2q} \ / \ (p;q)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

Montrer que $(E;\times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Q};\times)$.

EXERCICE 16

1) Soit A, J et I les trois matrices carrées d'ordre 2 définies par :

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}\ ;\ J=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\ ;\ I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

a) Déterminer $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $A=aJ+bI$

b) Calculer J^2 en fonction de J.

c) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout $n\in\mathbb{N}$, la relation suivante :

$$A^n=(-2)^n I+\frac{1}{2}\left(4^n-(-2)^n\right)J$$

d) Donner l'expression explicite de A^n sous forme d'une matrice carrée d'ordre 2.

e) Montrer que A est inversible et donner A^{-1}.

2) On note (v_n) et (w_n) les deux suites définies par : $v_0=3$, $w_0=3$ et les relations suivantes : $(n\in\mathbb{N})$

$$\begin{cases}v_{n+1}=v_n+3w_n\\w_{n+1}=3v_n+w_n\end{cases}\quad\text{et on pose : } X_n=\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}$$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ X_n=A^nX_0$

b) En déduire l'expression de X_n en fonction de n.

c) Calculer les valeurs de v_n et w_n en fonction de n.

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 32

On considère les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\;;\;B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\;;\;I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

1) Calculer B^2 et B^n pour tout entier $n\geq 2$.

2) a) Exprimer A en fonction de I et B.

b) En déduire A^n en fonction de $n\in\mathbb{N}^*$.

EXERCICE 33

On considère les deux matrices suivantes : $\left(a\in\mathbb{R}^*\right)$

$$D=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad N=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

1) a) Calculer N^2 et N^3.

b) Vérifier que : $ND=DN$

2) On considère la matrice : $A=N+D$

Exprimer A^n en fonction de a et n. $(n\in\mathbb{N}^*)$

EXERCICE 34

On considère dans $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble suivant :

$$G=\left\{M=\begin{pmatrix}1&x&y\\0&1&z\\0&0&1\end{pmatrix}\;/\;(x;y;z)\in\mathbb{R}^3\right\}$$

1) Montrer que G est stable dans $\left(\mathbb{M}_3(\mathbb{R})\;;\times\right)$.

2) Montrer que $(G;\times)$ est un groupe.

3) Déterminer l'ensemble C défini par :

$$C=\left\{A\in G\;/\forall M\in G;\;AM=MA\right\}$$

EXERCICE 35

Soit H et K deux sous-groupes d'un groupe $(G;*)$.

Montrer que : $H\cup G$ est un sous-groupe de $(G;*)$ si, et seulement si : $H\subset G$ ou $G\subset H$

EXERCICE 36

Soit K un ensemble fini tel que $(K;+;\times)$ est un corps commutatif. On pose : $K^*=K-\{0\}$

Montrer que : $\displaystyle\prod_{x\in K^*}x=-1$

EXERCICE 37

Soit $(G;*)$ un groupe d'élément neutre e.

Pour tout $x\in G$, on note $x^2=x*x$ et x' le symétrique le symétrique de x dans $(G;*)$

Montrer que si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

C1) $\left(\forall(a;b)\in G^2\right)\quad(a*b)^2=a^2*b^2$.

C2) $(\forall a\in G)\quad a^2=e$.

C3) $(\forall a\in G)\quad a'=a$.

alors le groupe $(G;*)$ est commutatif.

EXERCICE 38

On considère l'ensemble :

$$E=\left\{M_a=\begin{pmatrix}2^a&0\\a2^a&2^a\end{pmatrix}\;/\;a\in\mathbb{Z}\right\}$$

1) Montrer que $(E;\times)$ est un groupe commutatif isomorphe à $(\mathbb{Z};+)$.

2) Montrer que pour tout $p\in\mathbb{Z}$: $(M_a)^p=M_{ap}$

3) Soit $(a;b)\in\mathbb{Z}^2$ et on considère l'ensemble :

$$F_{(a;b)}=\left\{(M_a)^p\times(M_b)^q\;/\;(p;q)\in\mathbb{Z}^2\right\}$$

a) Montrer que $F_{(a;b)}$ est un sous-groupe de $(E;\times)$.

b) Soit $c\in\mathbb{Z}$. Montrer que :

$$M_c\in F_{(a;b)}\Leftrightarrow(c\text{ divise }a\wedge b)$$

c) En déduire que : $F_{(a;b)}=E\Leftrightarrow a\wedge b=1$

EXERCICE 39

On considère l'ensemble E définie par :

$$E=\left\{M(x)=\begin{pmatrix} x & 0 \\ x\ln x & x \end{pmatrix} / x\in\mathbb{R}_+^*\right\}$$

et on considère l'application ψ définie par :

$$\psi : \mathbb{R}_+^* \to E$$
$$x \mapsto M(x)$$

1) Montrer que ψ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^* ; \times)$ dans $(E;\times)$.

2) Quelle est la structure de $(E;\times)$?

3) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

Calculer les matrices : $(M(x))^{-1}$ et $(M(x))^n$

EXERCICE 40

Soit I et J les deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ données :

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } J=\begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ où } p\in\mathbb{R}$$

On considère l'ensemble :

$$E=\left\{M(x;y)=\begin{pmatrix} x & py \\ y & x \end{pmatrix} / (x;y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

1) Vérifier que $J^2=pI$ puis montrer que $(E;+;\times)$ est est un anneau commutatif unitaire.

2) On suppose que $p<0$ et on pose : $E^*=E-\{O\}$

On considère l'application φ de E^* dans $\mathbb{C}^*$ définie par :

$$(\forall M(x;y)\in E^*) \quad \varphi(M(x;y))=x+iy\sqrt{-p}$$

a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(E^*;\times)$ dans $(\mathbb{C}^*;\times)$.

b) Quelle est la structure de $(E^*;\times)$?

c) Développer $(\sqrt{-p}+i)^2$ puis en déduire les solutions dans E^* de l'équation : $X^2=(-p-1)I+2J$

EXERCICE 41

On définit sur $E=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ une loi de composition interne $*$ comme suit :

$$(x;y)*(x';y')=\left(xx';\frac{y'}{x}+x'y\right)$$

1) Montrer que $(E;*)$ est un groupe.

Le groupe $(E;*)$ est-il commutatif ? Justifier.

2) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ et on pose :

$$\Gamma(f)=\{(x;f(x)) / x\in\mathbb{R}^*\}$$

a) Montrer que $\Gamma(f)$ est une partie stable de $(E;*)$ si, et seulement si :

$$(\forall(x;y)\in(\mathbb{R}^*)^2) \quad f(xy)=\frac{1}{x}f(y)+yf(x)$$

b) Soit f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f_k(x)=k\left(x-\frac{1}{x}\right) \quad \text{où } k\in\mathbb{R}$$

Montrer que $(\Gamma(f_k);*)$ est un sous-groupe de $(E;*)$.

c) Montrer que si $\Gamma(f)$ est stable de $(E;*)$, alors :

$$(\forall(x;y)\in(\mathbb{R}^*)^2) \quad \left(y-\frac{1}{y}\right)f(x)=\left(x-\frac{1}{x}\right)f(y)$$

d) Montrer que $(\Gamma(f);*)$ est un sous-groupe de $(E;*)$ si, et seulement si : $(\exists k\in\mathbb{R})\ f=f_k$

EXERCICE 42

On considère l'ensemble F définie par :

$$F=\left\{\begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} / (x;y)\in\mathbb{Q}^2\right\}$$

1) Montrer que $(F;+)$ est un groupe commutatif.

2) Montrer que $(F;+;\times)$ est un anneau unitaire.

3) a) Soit $(x;y)\in\mathbb{Q}^2$. Montrer l'équivalence suivante :

$$x^2=2y^2 \Leftrightarrow x=y=0$$

b) Montrer que $(F;+;\times)$ est un corps commutatif.

c) Résoudre dans F l'équation suivante :

$$(X \in F) \; ; \; X^2 - 4X + 3I = O$$

(O est la matrice nulle et I est la matrice identité)

EXERCICE 43

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que :

$$a = re^{i\alpha} \text{ avec : } |a| = r \text{ et } \alpha \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$M(x;y) = \begin{pmatrix} x & y \\ -r^2 y & x + 2ry\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Soit E l'ensemble : $E = \{M(x;y) \,/\, (x;y) \in \mathbb{R}^2\}$

1) a) Montrer que $(E;+)$ est un groupe commutatif.

b) Montrer que $(E;+;\times)$ est un corps commutatif.

2) a) Montrer que :

$$(\forall z \in \mathbb{C})(\exists!(x;y) \in \mathbb{R}^2) \;/\; z = x + ay$$

On pose donc : $M(x;y) = M(z)$

b) Soit φ l'application définie de $\mathbb{C}$ dans E par :

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \;\; \varphi(z) = M(z)$$

Montrer que φ est un morphisme de $(\mathbb{C};\times)$ dans $(E;\times)$.

c) Calculer $(\varphi(a))^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 44

Partie A :

Soit $(G;*)$ un groupe commutatif et f une bijection de G dans un ensemble H. On considère la loi de composition interne $\top$ définie sur H par :

$$(\forall (x;y) \in H^2) \;\; x \top y = f\left(f^{-1}(x) * f^{-1}(y)\right)$$

1) Montrer que f est un isomorphisme de $(G;*)$ dans $(H;\top)$.

2) En déduire la structure de $(H;\top)$.

Partie B :

Soit a un réel et g la bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ défini :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; g(x) = x + a$$

1) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Soit $*$ la loi de composition interne définie sur $\mathbb{R}$ par : $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2) \;\; x * y = x + y - a$

a) Montrer que $(\mathbb{R};*)$ un groupe commutatif.

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha * \alpha * \ldots * \alpha}_{n \text{ fois}}$$

Calculer α^n en fonction de n.

3) Soit $\top$ la loi de composition interne définie sur $E = \mathbb{R} - \{a\}$ par :

$$(\forall (x;y) \in E^2) \;\; x \top y = (x-a)(y-a) + a$$

a) Montrer que $(E;\top)$ est un groupe commutatif et déterminer son élément neutre.

b) Soit $\beta \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\beta^n = \underbrace{\beta \top \beta \top \ldots \top \beta}_{n \text{ fois}}$$

Calculer β^n en fonction de n.

Partie C :

Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $I =]-m;m[$ et on considère la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; f_m(x) = m\left(\frac{e^{2mx} - 1}{e^{2mx} + 1}\right)$$

1) Montrer que f_m est bijective de $\mathbb{R}$ dans I.

2) Déterminer $f_m^{-1}(x)$ pour tout $x \in I$.

3) Calculer $f_m\left(f_m^{-1}(x) + f_m^{-1}(y)\right)$ pour tout $(x;y) \in I^2$.

4) Pour tout $(x;y) \in I^2$, on pose :

$$x * y = \frac{m^2(x+y)}{m^2 + xy}$$

Montrer que $(I;*)$ est un groupe commutatif.

EXERCICE 17

Soit T et $\perp$ deux lois de composition interne dans $\mathbb{R}$ définies par : Pour tout $(x;y)\in\mathbb{R}^2$,

$$x\perp y=2y-x \quad \text{et} \quad x\top y=\frac{1}{2}(x+y)$$

1) Étudier les propriétés des lois T et $\perp$.
2) a) Montrer que la loi T est distributive par rapport à la loi $\perp$.
   b) Montrer que la loi $\perp$ est distributive par rapport à la loi T.

EXERCICE 18

On définit sur $\mathbb{R}^2$ deux lois de composition interne + et $\times$ comme suit : Pour tous $(a;b)$ et $(a';b')$ de $\mathbb{R}^2$,

$$(a;b)+(a';b')=(a+a';b+b')$$
$$(a;b)\times(a';b')=(aa';\ ab'+ba')$$

Montrer que $(\mathbb{R}^2;+;\times)$ est un anneau commutatif unitaire.

EXERCICE 19

On définit sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ deux lois de composition interne T et $*$ comme suit : Pour tout $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$,

$$x\top y=x+y+3 \quad \text{et} \quad x*y=xy+3x+3y+6$$

1) Montrer que $(\mathbb{Z};\top)$ est un groupe commutatif.
2) Montrer que $(\mathbb{Z};\top;*)$ est un anneau commutatif.

EXERCICE 20

On munit $\mathbb{Z}^2$ de deux lois de composition interne + et $\times$ comme suit : Pour tous $(a;b)$ et $(a';b')$ de $\mathbb{Z}^2$,

$$(a;b)+(a';b')=(a+a';b+b')$$
$$(a;b)\times(a';b')=(aa'+2bb';\ ab'+ba')$$

Montrer que $(\mathbb{Z}^2;+;\times)$ est un anneau commutatif.

... anneau unitaire.

On définit sur A une loi de composition interne T comme suit : $(\forall(x;y)\in A^2)\quad x\top y=xy-yx$

1) Montrer que : $(\forall(x;y)\in A^2)\quad x\top y=-(y\top x)$
2) Montrer que la loi T n'est pas associative.
3) Montrer que $(A;\top)$ n'admet pas d'élément neutre.
4) Montrer que T est distributive par rapport à la loi ...
5) Montrer que pour tout $(x;y;z)\in A^3$:

$$x\top(y\top z)+y\top(z\top x)+z\top(x\top y)=0$$

et que : $y\top(x\top z)=x\top(y\top z)-(x\top y)\top z$

EXERCICE 22

Soit $(A;+;\times)$ un anneau unitaire tel que pour tout x ... $x^{12}=x$. On note 0_A le zéro de A et 1_A son élément ...

1) Montrer que : $(\forall x\in A)\quad x=-x$
2) Montrer que : $(\forall x\in A)\quad x^8+x^4=0_A$.
   (Remarquer que : $(x+1_A)^{12}=x+1_A$)
3) Montrer que : $(\forall x\in A)\quad x^2=x$

EXERCICE 23

On considère l'ensemble :

$$E=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ 7b & a\end{pmatrix} \,/\, (a;b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$$

1) Montrer que $(E;+;\times)$ est un anneau commutat...
2) Soit a et b deux éléments de $\mathbb{Z}$. Montrer que :

$$a^2-7b^2=0 \Leftrightarrow (a=0 \text{ ou } b=0)$$

3) Montrer que l'anneau $(E;+;\times)$ est intègre.

EXERCICE 24

On considère l'ensemble :

$$K=\left\{a+b\sqrt{5} \,/\, a\in\mathbb{Q} \text{ et } b\in\mathbb{Q}\right\}$$

Montrer que $(K;+;\times)$ est un corps commutatif.

EXERCICE 25

On considère l'ensemble $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

1) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = \bar{2}$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est vide.

2) On considère l'ensemble $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

On munit A des deux lois de composition interne :

$$(x_1;y_1)\oplus(x_1;y_1) = (x_1 + x_2 \,;\, y_1 + y_2)$$

$$(x_1;y_1)\otimes(x_1;y_1) = (x_1x_2 + 2y_1y_2 \,;\, x_1y_2 + x_2y_1)$$

Montrer que $(A;\oplus;\otimes)$ est un anneau commutatif.

3) Soit $B = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\times\{\bar{0}\}$. Trouver un morphisme de B dans $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\,;+\,;\times)$.

EXERCICE 26

On considère l'ensemble :

$$E = \left\{ M(x;y) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x+y \end{pmatrix} / (x;y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1) Montrer que E est une partie stable pour l'addition et la multiplication dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Montrer que $(E;+;\times)$ est un anneau commutatif

L'anneau $(E;+;\times)$ est-il intègre ? Justifier

3) Montrer que $(E;+;\times)$ est un corps commutatif.

4) Résoudre dans E l'équation : $-X^2 + 4X - 3I = 0$

EXERCICE 27

On définit sur l'ensemble $\mathbb{C}$ une loi de composition interne $*$ comme suit :

$$(\forall (z;z') \in \mathbb{C}^2) \quad z * z' = z - z' - i$$

1) Montrer que $(\mathbb{C};*)$ est un groupe commutatif.

2) Soit $m \in \mathbb{C}^*$. On définit sur $\mathbb{C}$ une loi de composition interne $\top$ comme suit :

$$(\forall (z;z') \in \mathbb{C}^2) \; z \top z' = mizz' + m(z+z') + i(1-m)$$

a) Montrer que $\top$ est commutative et distributive par rapport à la loi $*$ dans $\mathbb{C}$.

b) Montrer que $(\mathbb{C};*;\top)$ est un corps commutatif.

EXERCICE 28

On considère l'ensemble :

$$K = \left\{ M(x;y) = \begin{pmatrix} x & x \\ -5y & x+2y \end{pmatrix} / (x;y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Montrer que $(K;+;\times)$ est un corps commutatif.

EXERCICE 29

On considère l'ensemble :

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 2x & x & y \\ 2y & 2z & x \end{pmatrix} / (x;y;z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Montrer que $(L;+;\times)$ est un corps commutatif.

EXERCICE 30

Soit $(A;+;\times)$ un anneau unitaire d'élément unité 1.

Soit $(a;b) \in A^2$ tel que $1 - ab$ admet un inverse dans A.

1) Calculer $(1+bca)(1-ba)$ et $(1-ba)(1+bca)$ pour tout $c \in A$.

2) En déduire que $1 - ba$ est inversible dans A et que son inverse : $(1-ba)^{-1} = 1 + b(1-ab)^{-1}a$

EXERCICE 31

On considère l'ensemble : $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib / (a;b) \in \mathbb{Z}^2\}$

1) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est une partie stable de $(\mathbb{C};+)$ et de $(\mathbb{C};\times)$.

2) Montrer que $(\mathbb{Z}[i];\times)$ est un anneau commutatif unitaire.

3) Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des éléments inversibles dans $(\mathbb{Z}[i];\times)$. On pose : $(\forall z \in \mathbb{C})\; N(z) = z \times \bar{z} = |z|^2$

a) Soit $x \in \mathbb{Z}[i]$. Montrer que : $x \in \mathcal{U} \Leftrightarrow N(x) = 1$

b) En déduire que : $\mathcal{U} = \{1;-1;i;-i\}$

SE PRÉPARER AUX DEVOIRS

DEVOIR 1

Les parties A), B) et C) sont indépendantes.

Partie A :

On définit sur l'ensemble $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ une loi de composition interne comme suit :

Pour tous $(a;b)$ et $(c;d)$ de G :

$$(a;b)*(c;d) = (ac; ad+b)$$

1) Montrer que $*$ est associative dans G.

La loi $*$ est-elle commutative ?

2) Montrer que $(G;*)$ est un groupe.

3) On pose :

$H = \{(x;0) / x \in \mathbb{R}^*\}$ et $K = \{(1;x) / x \in \mathbb{R}\}$

a) Montrer que H et K sont des parties dans $(G;*)$.

b) Montrer que $(H;*)$ et $(K;*)$ sont des groupes commutatifs.

c) $*$ est-elle une loi de composition interne sur $H \cup K$? Justifier

4) On considère l'ensemble :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / (a;b) \in G \right\}$$

a) Montrer que E est stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); \times)$.

b) Montrer que $(E; \times)$ est un groupe.

Partie B :

On considère l'ensemble :

$$E = \left\{ M(a;b) = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix} / (a;b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

et on pose : $J = M(1;0)$ et $L = M(0;1)$

1) Montrer que $(E;+)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+)$ des matrices carrées d'ordre 2.

2) a) Calculer : L^2 ; J^2 ; JL ; LJ.

b) Montrer que $(E;+;\times)$ est un anneau commutatif.

3) a) Déterminer les diviseurs de zéro dans l'anneau $(E;+;\times)$.

b) L'anneau $(E;+;\times)$ est-il intègre ? Est-il un corps ?

4) Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(M(a;b))^n = 2^{n-1} M(a^n;b^n)$$

Partie C :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On définit sur l'ensemble $E = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{\alpha}\right\}$ une loi de composition interne $*$ comme suit :

$$(\forall (x;y) \in E^2) \quad x*y = x+y-\alpha xy$$

On considère l'application f définie de E sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = 1-\alpha x$$

1) a) Montrer que f est un isomorphisme de $(E;*)$ dans $(\mathbb{R}^*;*)$.

b) En déduire la structure de $(E;*)$ en déterminant son élément neutre e.

2) On note par x^{-1} le symétrique de x dans $(E;*)$.

On pose :

$$x^0 = e \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad x^n = \underbrace{x*x*\ldots*x}_{n\ fois}$$

$$\text{et } (\forall n \in \mathbb{Z}^-) \quad x^n = (x^{-1})^{-n}$$

On admet qu'on a pour tout $(m;n) \in \mathbb{Z}^2$:

$$x^n * x^m = x^{n+m} \quad \text{et} \quad (x*y)^n = x^n * y^n$$

On pose enfin : $G = \{x^n / n \in \mathbb{Z}\}$ où $x \in E$

a) Montrer que : $G = \left\{\frac{1}{\alpha}\left(1-(1-\alpha x)^n\right) / n \in \mathbb{Z}\right\}$

b) Montrer que G est un sous-groupe de $(E;*)$.