المحتويات

I التحليل

I -1 مسألة رقم 01

الجزء الأول:

1. بين أن: $(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[), \dfrac{x^2-x}{2\ln(x)} \leq \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \leq \frac{x^2-x}{\ln(x)}$.
2. نعتبر الدالة φ المعرفة على المجال $]0,1[\cup]1,+\infty[$ كما يلي:

$$\varphi(x) = \frac{x-1}{\ln(x)} \text{ و } \varphi(0)=0 \text{ و } \varphi(1)=1 \text{ .}$$

(ا) بين أن : $(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[), x-1-x\ln(x) < 0$ ، ثم استنتج رتابة الدالة φ على المجال $[0,+\infty[$.

(ب) باستعمال رتابة الدالة φ، بين أن:

$$(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[), x-1 \leq \int_x^{x^2} \frac{\varphi(t)}{\ln(t)}dt \leq \frac{x^2-1}{2} \text{ .}$$

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة φ المعرفة على المجال $]0,1[\cup]1,+\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = -\ln(x+1) + \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \text{ و } f(0)=f(1)=0 \text{ .}$$

1. بين أن الدالة f متصلة و قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر .
2. ادرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f .
3. تحقق من أن: $(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[), \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\varphi(t)}{\ln(t)}dt = f(x) + \ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$ ، ثم استنتج أن الدالة f متصلة و قابلة للاشتقاق في النقطة ذات الأفصول $x_0 = 1$.
4. بين أنه يوجد α من المجال $]0,1[$ بحيث : $f'(\alpha) = 0$. (يمكنك استعمال مبرهنة رول)

5. استنتج رتابة الدالة f على المجال $[0,+\infty[$.

6. نعتبر الدالة ψ المعرفة على المجال $]0,1[\cup]1,+\infty[$ كما يلي:

$$\psi(x)=(x+1)\exp\left(-\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln(t)}\right)$$ و $\psi(0)=\psi(1)=1$.

(ا) تحقق من أن: $(\forall x\in[0,+\infty[)\,,\psi(x)=\exp\left(-f(x)\right)$

(ب) ضع جدول تغيرات الدالة ψ على المجال $[0,+\infty[$.

(ج) أنشئ المنحنى الممثل للدالة ψ في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.
(نأخذ: $\alpha\simeq 0,3$ و $\psi(\alpha)\simeq 1,2$)

$\therefore$ نقبل أن المنحنى الممثل للدالة ψ يقبل نقطة انعطاف، أفصولها β بحيث :
$\beta\in\left]\frac{3}{2},2\right[$.

7. بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\,(\exists!\gamma_n>0)\,,\dfrac{\psi(\gamma_n)}{\gamma_n}=\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{\psi(\alpha)}{\alpha}$، ثم بين أن المتتالية $(\gamma_n)_{n\geq1}$ متقاربة محددا نهايتها.

I -2 مسألة رقم 02

ليكن x عنصرا من المجال $[0,+\infty[$، نعتبر المعادلة : $(\mathcal{F}_x):t^3+xt+1=0$.

1. بين أن المعادلة $(\mathcal{F}_x)$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$، و الذي نرمز له ب $f(x)$.

2. بين أن الدالة f سالبة قطعا و محدودة على $[0,+\infty[$.

3. استنتج أن الدالة f متصلة على المجال $]0,+\infty[$.

4. بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ، ثم بين أنه :

$$(\forall x>0)\,,\qquad f'(x)+\frac{f(x)}{x+3f^2(x)}=0\ .$$

5. استنتج منحى تغيرات الدالة f ، ثم احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

6. هل الدالة متصلة على اليمين في الصفر ؟

I -3 مسألة رقم 03

على المجال $[1,+\infty[$،نعرف الدالتين: $f(t)=\dfrac{t-1}{\ln(t)}$ و $f(1)=1$ و الدالة :

$F(x)=\displaystyle\int_{x^2}^{x}\frac{f(t)}{\ln(t)}dt$ و $F(1)=-\ln(2)$.

1. بين أن الدالة f متصلة على المجال $[1,+\infty[$.
2. (ا) باستعمال مكاملة بالأجزاء،برهن أنه:

$$(\forall x\in]1,+\infty)\,,\ F(x)-F(1)=\frac{x(x-1)(x+2)}{2}\cdot f(x)+\int_{x^2}^{x}\left(2+\frac{1}{t}\right)f(t)dt\ .$$

(ب) استنتج أن الدالة F متصلة على اليمين في 1.

3. (ا) أثبت أنه: $(\forall x\in]1,+\infty[)\,(\exists c_x\in\left[x,x^2\right]),\, F(x)=\left(x-x^2\right)\cdot\dfrac{c_x-1}{\ln^2(c_x)}$

ثم استنتج أنه :

$$\left(\forall x\geq\left[\sqrt{2},+\infty\right[\right),\ \frac{F(x)}{x}+\left(\frac{f(x)}{2}\right)^2\leq 0\ .$$

(ب) استنتج حساب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$، ثم اول النتيجة المحصل عليها هندسيا.

4. احسب $F'(x)$ لكل x من المجال $]1,+\infty[$ ، ثم حدد منحى تغيرات الدالة F.
5. (ا) باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية مرتين، بين أنه :

$$(\forall x\in]1,+\infty)\,(\exists\,(c,d)\in\,]1,x[)\,(c>d)\,,\ \frac{F(x)+\ln(2)}{x-1}=-\left(\frac{c+2}{2}\right)\cdot d^2$$

(ب) ادرس قابلية اشتقاق الدالة F في النقطة ذات الافصول $x_0=1$ ، ثم اول النتيجة المحصل عليها هندسيا.

6. أنشئ و بعناية ، المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

I -4 مسألة رقم 04

الجزء الأول:

ليكن n من $\mathbb{N}^*$ و الدالة ψ_n المعرفة على $\mathbb{R}^{*+}$ بما يلي : $\psi_n(x) = -nx + \ln(x)$.

1. (ا) حدد : $\lim\limits_{x\to 0^+} \psi_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} \psi_n(x)$.

(ب) بين أنه لكل $x \in \mathbb{R}^{*+}$ ، لدينا : $\psi_n'(x) = \dfrac{-nx+1}{x}$ ، ثم ضع جدول تغيرات الدالة ψ_n على $\mathbb{R}^{*+}$.

(ج) بين أن : $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, \quad 2x - 1 > \ln(x)$.

2. بين أن لكل $n \in \mathbb{N}^*$ ، المعادلة : $\psi_n(x) =$ تقبل بالضبط حلين إثنين هما : α_n و β_n بحيث : $0 < \alpha_n < \dfrac{1}{n}$ و $\beta_n > 2$.

3. احسب : $\lim\limits_{n\to +\infty} \alpha_n$ ، ثم بين أنه : $\lim\limits_{n\to +\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = \dfrac{1}{e^2}$.

4. بين أن المتتالية $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة ، ثم احسب النهايتين :

$$\lim_{n\to +\infty} \beta_n \text{ و } \lim_{n\to +\infty} \frac{n(\beta_n - 2)}{\ln(2)} .$$

الجزء الثاني:

لتكن المتتالية $(\mathcal{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\mathcal{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(\theta)d\theta, \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

1. احسب كل من $\mathcal{I}_1$ و $\mathcal{I}_2$.

2. بين أن المتتالية $(\mathcal{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة .

3. (ا) تحقق من أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \mathcal{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \sin^n(\theta)d\theta + \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(\theta)d\theta$.

(ب) استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \quad \mathcal{I}_n \leq \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} + \dfrac{\pi}{2} \cdot \left[\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right]^n$.

(ج) أثبت أن : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(\cos(x))}{x^3} = -\infty$ ، ثم حدد نهاية المتتالية $(\mathcal{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. (ا) بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا :

- $\mathcal{I}_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} \cdot \mathcal{I}_n$ ؛
- $(n+1)\mathcal{I}_{n+1}\mathcal{I}_n = \dfrac{\pi}{2}$ ؛
- $1 \leq \dfrac{\mathcal{I}_n}{\mathcal{I}_{n+1}} \leq \dfrac{n+2}{n+1}$.

(ب) استنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\mathcal{I}_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

I -5 مسألة رقم 05

الجزء الأول:

لتكن f الدالة المعرفة بمايلي : $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad (\forall x \in \mathbb{R})$.

1. بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $]-1,1[$ ، محددا تقابلها العكسي f^{-1}.
2. أنشئ $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، حيث : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$.
3. ليكن $\lambda \in]0,1[$ و لتكن σ_λ مساحة الحيز (Δ_λ) المحصور بين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ و المستقيمين : $x = 0$ و $x = \lambda$.
بين أن تعبير σ_λ يكتب على الشكل التالي : $(cm^2) \quad \lambda^2 - 2\ln\left(\dfrac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2}\right)$.

الجزء الثاني:

لكل $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^+$ ، نضع : $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x (f(u))^n\,du$ و $F_0(x) = x$.

1. احسب : $F_1(x)$ بدلالة x .
2. بين أن : $0 \leq F_n(x) \leq x\,(f(x))^n$ ، ثم استنتج قيمة النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$.
3. (ا) تحقق من أن : $(\forall x \in \mathbb{R}),\ f'(x) = 1 - (f(x))^2$.

(ب) استنتج أن : $(\forall k \in \mathbb{N}),\ F_{k+2}(x) = F_{k+1}(x) - \dfrac{1}{k+1}(f(x))^{k+1}$

و أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\;\; F_{2n}(x) = x - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \left(f(x)\right)^{2k-1} .$$

4. باستعمال ما سبق ،احسب النهاية التالية: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\times 3^{2k-1}}$.

I -6 مسألة رقم 06

■ **الجزء الأول:**

1. بين أن $\ln(\alpha)+\alpha=0$, $\left(\exists!\alpha \in \left]\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right[\right)$ ،ثم ضع جدول إشارة $\ln(x)+x$ لكل $x>0$.

2. نضع: $\forall x>0, \quad \varphi(x)=e^{1/x}$.

(ا) تحقق من أن : $\forall x>0, \quad \varphi(x)=x \Longleftrightarrow \frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

(ب) بين أن $\forall x \in \left[\frac{3}{2},3\right], \quad |\varphi'(x)| \le \frac{4}{9}e^{2/3}$.

3. نعتبر المتتالية $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي $\Gamma_0=2$ و $\Gamma_{n+1}=\varphi(\Gamma_n)$.

(ا) بين أن $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma_n \in \left[\frac{3}{2},3\right]$.

(ب) باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية،بين أن المتتالية $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها.

(ج) بين أن المتتالية $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها و المعرفة بما يلي : $\gamma_n=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Gamma_j$.

■ **الجزء الثاني:**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $f(0)=0$ و $\forall x>0, \quad f(x)=\ln(x)\cdot e^{1/x}$. ليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

2. بين أن f متصلة على $[0,+\infty[$.

3. بين أن f قابلة اشتقاق على اليمين في 0 و أن $f'_d(0)=0$، ثم أول النتيجة هندسيا.

4. بين أن $\forall x>0,\quad f'(x)=\dfrac{x+\ln(x)}{x^2}\cdot e^{-1/x}$، ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

5. اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة $A(1,0)$.(نقبل أن النقطة $A(1,0)$ نقطة أنعطاف للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$)

6. أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.(نأخذ: $f(\alpha)=-0,1$)

■ **الجزء الثالث:**

نعتبر الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بما يلي : $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)dt$.

1. بين أن $\forall u\in\mathbb{R}, e^{-u}\geq 1-u$ واستنتج أن $\forall t\geq 1,\quad f(t)\geq \ln(t)-\dfrac{\ln(t)}{t}$.

2. استنتج أن $\forall x\geq 1,\quad F(x)\geq x\ln(x)-x-\dfrac{\ln^2(x)}{2}$.

3. بين أن $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=+\infty$.

4. أول هندسيا النتيجة المحصلة عليها في السؤال 3. الجزء الثالث .

5. بين أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+$ ثم أحسب مشتقتها الأولى.

6. ليكن $n\in\mathbb{N}$.

(ا) بين أن المعادلة $F(x)=n$ تقبل حلا وحيدا $\beta_n>1$.

(ب) بين أن المتتالية $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية و أنها غير مكبورة ، ثم استنتج نهايتها.

(ج) بين أن $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\beta_n}{\sqrt[3]{n}}=+\infty$.

I -7 مسألة رقم 07

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$F(x)=\int_x^{2x}\frac{dt}{1+u^2(t)}\ \text{و}\ F(0)=0\ \text{، حيث :}\ u(x)=\frac{\sin(x)}{x}\ .$$

1. بين أن الدالة F فردية .

2. (ا) بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}), 0 \leq F(x) \leq x$.

(ب) استنتج أن الدالة F متصلة على اليمين في الصفر .

3. (ا) بين أن : $\frac{F(x)}{x} = \frac{1}{1+u^2(c_x)}$, $(\forall x \in]0,+\infty[)\ (\exists c_x \in [x, 2x])$.

(ب) استنتج أن الدالة F قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفرمحددا $F'_d(0)$.

4. (ا) بين أن F قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و أن :

$$(\forall x \in]0,+\infty[),\ F'(x) = \frac{1+u^2(x)\left(1+\sin^2(x)\right)}{(1+u^2(x))\,(1+u^2(x)\cos^2(x))} .$$

(ب) استنتج رتابة الدالة F على المجالين $[0,+\infty[$ و $]-\infty,0]$ ، ثم ضع جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.

5. (ا) أثبت أن لكل t من المجال $]0,+\infty[$ ، لدينا :

$$\frac{t^2}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+u^2(t)} \leq 1 \quad \text{و} \quad \frac{1}{1+u^2(t)} \leq \frac{1}{t^2} .$$

(ب) استنتج أنه لكل x من $]0,+\infty[$ ، لدينا :

$$x + \arctan(x) - \arctan(2x) \leq F(x) \leq x \quad \text{و} \quad 0 \leq x - F(x) \leq \frac{1}{2x} .$$

(ج) احسب النهايتين : $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

6. ارسم المنحنى $(\mathcal{C}_F)$ في معلم متعامد و ممنظم $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

I -8 مسألة رقم 08

الجزء الأول:

لتكن v الدالة العددية المعرفة على المجال $[-2,+\infty[$ بما يلي : $v(x) = \sqrt{\frac{x+2}{e^x}}$.

1. احسب : $\lim_{x\to+\infty} v(x)$ ، ثم أول النتيجة المحصل عليها هندسيا .

2. ادرس قابلية اشتقاق الدالة v على اليمين في النقطة ذات الأفصول $x_0 = -2$ ، ثم أول النتيجة المحصل عليها هندسيا .

3. لكل عنصر x من المجال $]-2, +\infty[$ ، أثبت أنه : $v'(x) = -\dfrac{x+1}{2v(x)}$ ، ثم ضع جدول تغيرات الدالة v.

4. ارسم المنحنى $(\mathcal{C}_v)$ في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة $\mathcal{V}$ المعرفة على المجال $\left[\dfrac{1}{e^2}, +\infty\right[$ بما يلي : $\mathcal{V}(x) = \displaystyle\int_0^{\ln(x)} v(t)dt$.

ولتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي : $u_n = \dfrac{2^n \cdot (n!)}{(2n+1)!} \displaystyle\int_{-2}^{-1} v(t) \cdot (t+2)^n \, dt$.

1. بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \,, \; 0 \leq u_n \leq \dfrac{e}{2n+1}$ ، ثم استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها .

2. لكل n من $\mathbb{N}^*$، نضع : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{2^k \cdot (k!)}{(2k+1)!}$.

(ا) باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أنه :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \,, \; u_{n+1} - u_n = -2\sqrt{e} \cdot \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(2n+3)!} .$$

(ب) استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \,, \; S_n = \dfrac{u_0 - u_n}{2\sqrt{e}}$.

(ج) بين أن : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{F\left(\frac{1}{e}\right) - F\left(\frac{1}{e^2}\right)}{2\sqrt{e}}$.

I -9 مسألة رقم 09

الجزء الأول:

1. (ا) بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) \,, \; e^x(x-1) + 1 \geq 0$.

(ب) بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) \,, \; e^x - 1 \geq x\sqrt{e^x}$.

2. (ا) بين أن : $\left|\frac{e^x-1}{x}-1\right| \leq \left|\frac{e^x-x-1}{x^2}-\frac{1}{2}\right|$, $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$.

(ب) استنتج أن : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-x-1}{x^2}$.

الجزء الثاني:

لتكن φ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\varphi(x) = \ln\left(\frac{x}{e^x-1}\right) \text{ لكل } x \neq 0 \text{ و } \varphi(0)=0 \text{ .}$$

1. احسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\varphi(x)}{x}$

ثم أول النتائج المحصل عليها هندسيا.

2. أثبت أن الدالة متصلة و قابلة للاشتقاق في الصفر ، حيث : $\varphi'(0) = -\frac{1}{2}$.

3. (ا) أثبت أن الدالة φ رتيبة على $\mathbb{R}$.

(ب) بين أن الدالة φ' تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$.

الجزء الثالث :

لتكن ϕ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\phi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \varphi(u)du \text{ لكل } x \neq 0 \text{ و } \phi(0)=0$$

.وليكن $(\mathcal{C}_\phi)$ منحنى الدالة ϕ في معلم متعامد ممنظم $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. بين أن الدالة ϕ متصلة في الصفر .

2. (ا) تحقق من أن : $\phi(-x)-\phi(x) = \frac{x}{2}$, $(\forall x \in \mathbb{R})$.

(ب) ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$ ، بين أن :

$$-\frac{x}{4} \leq \phi(x) \leq \frac{\varphi(x)}{2} \text{ و } \varphi(-x) \leq \phi(x)+\frac{x}{2} \leq \frac{\varphi(-x)}{2} \text{ .}$$

3. (ا) حدد نهاية الدالة ϕ عند $+\infty$ ثم ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathcal{C}_\phi)$ بجوار $+\infty$.

(ب) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathcal{C}_\phi)$ بجوار $-\infty$.

4. (ا) بين أن الدالة ϕ قابلة للاشتقاق في الصفر محددا $\phi'(0)$.

(ب) بين أن الدالة ϕ قابلة للاشتقاق على المجال $\mathbb{R}^*$ و أن لكل x عنصر من المجال $\mathbb{R}^*$:

$$\phi'(x) = \frac{\varphi(x) - \phi(x)}{x} .$$

(ج) ضع جدول تغيرات الدالة ϕ على المجال $\mathbb{R}^*$.

5. أنشئ $(\mathcal{C}_\phi)$.

الجزء الرابع

لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نعرف المتتاليتين $(a_n)_{n\geq 1}$ و $(b_n)_{n\geq 1}$ بما يلي :

$$a_n = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{j=1}^{n}\varphi(j)\right) = \frac{1}{n^2}\left(\varphi(1)+\varphi(2)+\cdots+\varphi(n)\right)$$

و

$$b_n = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{j=1}^{n}\varphi(-j)\right) = \frac{1}{n^2}\left(\varphi(-1)+\varphi(-2)+\cdots+\varphi(-n)\right) .$$

1. بين أن المتتالية $(b_n)_{n\geq 1}$ متقاربة و أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

2. باستعمال تقارب المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ ، برهن على أن :

$$\sqrt{e} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n^2]{\prod_{i=1}^{n}(e^i - 1)} .$$

I -10 مسألة رقم 10

الجزء الأول: ليكن n من $\mathbb{N}^*$. نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $]n,+\infty[$ بما يلي :

$f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{x-k}$. نعتبر $\lambda > 0$ عددا ثابتا.

1. (ا) بين أن الدالة f_n تقابل $]n,+\infty[$ من نحو $]0,+\infty[$.

(ب) استنتج أن المعادلة : $f_n(x) = \lambda$ تقبل حلا وحيدا λ_n في $]n,+\infty[$.

(ج) حدد نهاية المتتالية $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ معللا جوابك .

(د) نضع : $H_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}$. بين أن : $H_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.

2. (ا) بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي n_0 بحيث يكون لكل $n \geq n_0$: $\lambda_n > n+1$.

(ب) بين أن : $\int_{\lambda_n-n-1}^{\lambda_n} \frac{dt}{t} \leq \lambda \leq \int_{\lambda_n-n}^{\lambda_n+1} \frac{dt}{t}$ ، ثم استنتج تأطيرا للحدين λ_3 و λ_9.
ماذا تستنتج بالنسبة لحدود المتتالية $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ ؟ .

<u>الجزء الثاني:</u> نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]\ln(2), +\infty[$ بما يلي :

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{e^x}{2} - 1\right) \text{ .}$$

1. (ا) احسب النهايات التالية مع إعطاء التأويل الهندسي : $\lim_{x\to(\ln(2))^+} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
و $\lim_{x\to+\infty} (f(x)+x)$.

(ب) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]\ln(2), +\infty[$ و أن :

$$(\forall x \in]\ln(2), +\infty[)\ ,\ f'(x) = \frac{2+e^x}{2-e^x} \text{ .}$$

(ج) ضع جدول تغيرات الدالة f على $]\ln(2), +\infty[$.

(د) ادرس تقعر منحنى الدالة f .

(ه) أنشئ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2. نضع : $\mathcal{I} =]\ln(2), +\infty[$.

(ا) بين أن f تقابل من $\mathcal{I}$ نحو مجال $\mathcal{J}$ ينبغي تحديده ، محددا التقابل العكسي f^{-1} .

(ب) نضع : $\alpha = f^{-1}(0)$. بين أن لكل x من المجال $\mathcal{I}$ ، لدينا : $x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leq \alpha$.

3. لتكن $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$\alpha_0 = \ln(3) \qquad \text{و} \qquad (\forall n \in \mathbb{N})\ ,\ \alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)} \text{ .}$$

(ا) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ,\ \alpha_n \in]\ln(2), \alpha]$.

(ب) بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبة ، ثم استنتج أنها متقاربة .

(ج) حدد نهاية المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معللا جوابك .

II الأعداد العقدية

II -1 مسألة رقم 01

لكل n من $\mathbb{N}^*$، نعرف المتتالية $(S_n(\theta))_{n\geq 1}$ بما يلي:

$$S_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\theta)}{k}$$ ، حيث: $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. بين أن : $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 2x\cos(\theta) + 1} = \frac{\pi - \theta}{2\sin(\theta)}$.
(لاحظ أن: $x^2 - 2x\cos(\theta) + 1 = (x - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)$)

2. ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$.

(ا) بين أن: $\sum_{k=0}^{n-1} \left(xe^{i\theta}\right)^k + \frac{x^n e^{in\theta}}{1 - xe^{i\theta}} = \frac{1}{1 - xe^{i\theta}}, (\forall x \in [0, 1])$.

(ب) تحقق من أن: $\frac{\sin(\theta)}{x^2 - 2x\cos(\theta) + 1} = \Im\left(\frac{e^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}}\right), (\forall x \in [0, 1])$ ،
حيث: $\Im(z)$ يرمز للجزء التخيلي للعدد العقدي z.

(ج) استنتج أنه :
$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), S_n(\theta) = \frac{\pi - \theta}{2} - \int_0^1 x^n \cdot \left(\frac{\sin((n+1)\theta) - x\sin(n\theta)}{x^2 - 2x\cos(\theta) + 1}\right) dx.$$

3. بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، لدينا :
$$\left|\int_0^1 x^n \cdot \left(\frac{\sin((n+1)\theta) - x\sin(n\theta)}{x^2 - 2x\cos(\theta) + 1}\right) \cdot dx\right| \leq \frac{2}{(n+1)\sin^2(\theta)}.$$

4. استنتج،من كل ماسبق، أن المتتالية $(S_n(\theta))_{n\geq 1}$ متقاربة ،محددا نهايتها.

II -2 مسألة رقم 02

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ ، المعادلة :

$$(E_m) : z^2 - (m + \overline{m})z + m\overline{m} + i(m - \overline{m}) + 1 = 0$$ ، حيث: $m \in \mathbb{C}^*$.

1. (ا) تحقق من أن مميز المعادلة (E_m)، Δ يكتب على الشكل: $\Delta = (m - \overline{m} + 2i)^2$.

(ب) حل المعادلة (E_m).

2. في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$، نعتبر النقط :

$A(m)$ ، $B(\overline{m})$ ، $C(m-i)$ و $D(\overline{m}+i)$.

(ا) بين أن النقط: A ، B ، C و D مستقيمية .

(ب) • نعتبر الدوران $\mathcal{R}_1$ الذي مركزه A و زاوية دورانه هي: θ_1 ؛

• نعتبر الدوران $\mathcal{R}_2$ الذي مركزه B و زاوية دورانه هي: θ_2 ، حيث : $\theta_1 - \theta_2 = \pi$؛

• نعتبر النقط : M و M' و M'' و التي ألحاقها على التوالي z ، z' و z'' بحيث : $\mathcal{R}_1(M) = M'$ و $\mathcal{R}_2(M) = M''$.

المطلوب:حدد مجموعة النقط $M(z)$: التي من أجلها تكون النقط M و M' و M'' مستقيمية ؟ .

II -3 مسألة رقم 03

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. نعتبر النقطتين A و B ذات اللحقين على التوالي : $a = 1 - i$ و $b = 2 + \sqrt{3} + i$.

1. تحقق من أنه : $\frac{b}{a} = \left(1+\sqrt{3}\right) e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم اكتب العدد العقدي b على شكله الأسي .

2. لتكن B_1 صورة النقطة B بالدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{6}$.
حدد لحق B_1 ، و استنتج أن النقطة B_1 مماثلة النقطة B بالنسبة للمحور $(O, \overrightarrow{u})$.

3. لتكن M نقطة من المستوى و النقطة M_1 صورتها بالدوران $\mathcal{R}$ و لتكن M' مماثلة النقطة M_1 بالنسبة للمحور $(O, \overrightarrow{u})$.
و لتكن $(\mathcal{H})$ مجموعة النقط M من المستوى ، بحيث : $M = M'$.

(ا) تحقق من أن النقطتين O و B تنتميان إلى المجموعة $(\mathcal{H})$.

(ب) لتكن M نقطة من المستوى و $M \neq O$ ، و لحقها هو $z = re^{i\theta}$ حيث : $r > 0$.
بين أن لحق النقطة M' هو $z' = re^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}$ ، ثم حدد قيم θ التي من أجلها تنتمي النقطة M إلى المجموعة $(\mathcal{H})$.

(ج) بين أن النقط : M و B و O تكون مستقيمية إذا و فقط إذا كانت M تنتمي إلى المجموعة $(\mathcal{H})$ ، ثم حدد المجموعة $(\mathcal{H})$.

II -4 مسألة رقم 04

المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.

ليكن n من $\mathbb{N}^*$ ، نعتبر الدوران $(\mathcal{R}_n)$ الذي مركزه النقطة B ذات اللحق 1 و زاوية دورانه $\dfrac{\pi}{2^n}$ ؛ و نضع : $(\forall M\in(\mathcal{P}))\,,\ \mathcal{R}_n(M)=M_n$.

1. تحقق من أن : $(\forall M\in(\mathcal{P}))\,,\ \mathcal{R}_{n+1}^{-1}(M_n)=\mathcal{R}_{n+1}(M)$.
2. استنتج أنه لكل نقطة M من $(\mathcal{P})$ و تخالف النقطة B، لدينا :

$$\frac{M_nM_{n+1}}{BM}=2\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

و أنه $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right)\equiv\left(\dfrac{3}{2^{n+2}}-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\pi\quad[2\pi]$.

3. نضع : $\varphi_n=\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2}OO_k$ ، حيث : $O_k=\mathcal{R}_k(O)$ لكل $k\in\{2,3,\cdots,n+2\}$.

(ا) بين أن : $\dfrac{\alpha}{2}\le\sin(\alpha)\le\alpha\ ,\ \left(\forall\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]\right)$.

(ب) بين أن المتتالية $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة ، و أن نهايتها L تحقق : $\dfrac{\pi}{4}\le L\le\dfrac{\pi}{2}$.

II -5 مسألة رقم 05

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. نعتبر المعادلة :

$(E):z^2-(1+i)(\omega+2i)z-4(\omega+i)=0$ ، حيث $\omega\in\mathbb{C}$.

z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) بحيث : $z_2\in\mathbb{R}\iff\omega=0$.

1. (ا) بين أن مميز المعادلة (E) ، Δ يكتب على الشكل: $((1-i)(\omega+2i))^2$.

(ب) اسينتج حلول المعادلة (E) .

فيما يلي، نعتبر النقط $A(z_1)$ ، $B(z_2)$ و $M(-2+2i)$.

2. بين أن النقط (A ، B و M مستقيمية) $\iff|\omega|=2$.
3. نفترض أن $|\omega|\neq2$. ليكن $\mathcal{R}$ الدوران الذي مركزه M و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$.

(ا) بين أن الصيغة العقدية للدوران $\mathcal{R}$ هي $z' = i \cdot z + 4i$.

(ب) حدد لحق النقطة C صورة A بالدوران $\mathcal{R}$.

(ج) لتكن D صورة B بالدوران $\mathcal{R}$. بين أن $AD = BC$ و $(AD) \perp (BC)$.

II -6 مسألة رقم 06

الجزء الأول: في المجموعة $\mathbb{C}$ ، المعادلة :

$$(E_a) : z^2 - (3a - 2i)z + 2a^2 - 4ai = 0$$ ، حيث : $a \in \mathbb{C}$.

1. (ا) بين أن : $\Delta = (a + 2i)^2$ ، حيث : Δ هو مميز المعادلة (E_a) .

   (ب) استنتج مجموعة حلول المعادلة (E_a) .

2. في هذا السؤال،نفترض أن : $a = 1 + i$ ، وليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة بحيث : $|z_1| < |z_2|$.

   (ا) اكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي ، ثم تحقق من أنه: $z_1^3 + z_2 = 0$.

   (ب) استنتج على الشكل الجبري الجذور المكعبة للعدد z_2 .

الجزء الثاني: المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
نعتبر النقط: $I(z_I = i)$ و $J(z_J = 2a)$ و $K(z_J = a - 2i)$.

1. بين أن النقط I و J و K مستقيمية إذا وفقط إذا كان $a \in i\mathbb{R}$.

2. فيما يلي، نفترض أن $a \notin i\mathbb{R}$. خارج المثلث IJK ، ننشئ النقطة H بحيث يكون المثلث JKH قائم الزاوية في النقطة H.

   i) بين أن لحق النقطة H يكتب على الشكل :

$$z_H = \frac{(3 - i)a + 2 - 2i}{2} \text{ أو } z_H = \frac{(3 + i)a - 2 - 2i}{2}$$.

   ii) استنتج قيم a التي من أجلها يكون الرباعي $IJHK$ مربعا ؟

II -7 مسألة رقم 07

في المجموعة $\mathbb{C}$ ، المعادلة :

$$(E_\theta) : 2z^2 - 2e^{i\theta}z + i\sin(\theta)e^{i\theta} = 0$$ ، حيث : $\theta \in]0,\pi[$.

1. حل المعادلة (E_θ) مبرزا مراحل الحل ،ثم اكتب حلولها على الشكل المثلثي.
2. المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.
نعتبر النقط : $M(e^{i\theta})$ و $I(1)$ و $J(-1)$ و $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$. و ليكن h التحاكي الذي مركزه M و نسبته 2 و r الدوران الذي مركزه M و زاويته $-\dfrac{\pi}{2}$.
(ا) بين أن المثلث MIJ قائم الزاوية في M ، ثم استنتج أن المستقيم (IJ) يوازي المستقيم (M_1M_2) .
(ب) a) بين أن : $h(M_1) = I$ و $h(M_2) = J$.
b) بين أن النقط M و J و $r(I)$ مستقيمية .
c) استنتج أن : $\dfrac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1} \in i\mathbb{R}$.
(ج) حدد قيم θ التي من أجلها يكون محيط المثلث MIJ قصويا.

II -8 مسألة رقم 08

ليكن m عدد عقدي غير منعدم، نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$(F_m) : m^2z^2 + m^3z + 1 - im^2 = 0 \quad .$$

1. (ا) تحقق من أن مميز المعادلة (F_m) يكتب على الشكل : $m^2(m^2+2i)^2$.
(ب) اعط حلول المعادلة (F_m) .
2. المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.
نعتبر النقط : $A\left(z_A = -\dfrac{m^2+i}{m}\right)$ و $B\left(z_A = \dfrac{i}{m}\right)$ و $M(z_M = m)$.
(ا) بين أن : $\arg(m) \equiv \pm\dfrac{\pi}{4}\ [\pi] \iff \dfrac{m-z_A}{m-z_B} \in \mathbb{R}$.
(ب) استنتج مجموعة النقط $M(m)$ بحيث تكون النقط A و B و M مستقيمية .

3. ليكن r الدوران الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{2}$. نضع : $r(A) = A'$ و $r(M) = M'$ و $r^{-1}(M) = B'$.

(ا) حدد لحق كل من النقطتين A' و B' .

(ب) بين أن : B هي منتصف القطعة $[B'M']$.

(ج) ليكن I منتصف القطعة $[AM]$ و z_I لحقها . أثبت أن : $\frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_I} \in i\mathbb{R}$ ، ثم استنتج أنه : $(A'B') \perp (BI)$ و $A'B' = 2BI$.

II -9 مسألة رقم 09

المستوى $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
وليكن (a, b) من $\mathbb{R}^2$.

1. فيما يلي، نفترض أن : $ab \neq 0$ ، ونعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$(E) : 2z^2 - 4az + 2a^2 + \left(1 + i\sqrt{3}\right) b^2 = 0 .$$

(ا) تحقق من أن : $u = a + b\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ حل للمعادلة (E) .

(ب) استنتج مجموعة حلول المعادلة (E) .

(ج) تحقق من أن : $\left|u^2\right| + \left|v^2\right| = 2\left|a + ib\right|^2$ ، ثم اكتب $u - v$ على الشكل المثلثي.

(د) لتكن A و B و E و U و V خمس نقط من $(\mathcal{P})$ التي ألحاقها على التوالي : a و b و $a - b$ و u و v .

(a) بين أن النقط A و U و V مستقيمية .

(b) بين أن المستقيمين (EU) و (EV) متعامدان .

(c) انطلاقا من النقطتين A و B ، اعط طريقة هندسية لإنشاء النقطتين U و V .

2. $(\mathcal{H})$ هي مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى ذات اللحق $z = a + ib$ بحيث : $a^2 - ab + b^2 = 1$.

(a) أثبت أنه : $\sqrt{\frac{2}{3}} \leq |z| \leq \sqrt{2} \implies M \in (\mathcal{H})$ ، ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها .

(b) ليكن $(\mathcal{D})$ القرص الذي مركزه النقطة J ذات اللحق $j=\sqrt{\frac{2}{3}}(1+i)$ و شعاعه : $r=2\sqrt{2}$ ، وليكن $(\mathcal{D}')$ مماثله بالنسبة للنقطة O. بين أن :

$(\mathcal{H})\subset((\mathcal{D})\cap((\mathcal{D}'))$.

(c) لتكن الدائرة $(\mathcal{C})$ التي تحصر القرص $(\mathcal{D})$ ، و $(\mathcal{C}')$ مماثلتها بالنسبة للنقطة O . حدد نقطتي تقاطع الدائرتين $(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{C}')$ (نرمز لهما ب P و S و يكفي تحديد لحقيهما)

(d) بين أن المستقيم (PS) هو محور تماثل $(\mathcal{H})$.

3. ليكن h التحاكي الذي مركزه O و نسبته $\frac{1}{2}$ و r الدوران الذي مركزه O وزاويته $\pi-\arctan(3)$. ولتكن T و Q صورتي S و P بالتطبيق $r\circ h$.

(ا) بين أن النقطتين T و Q تنتميان $(\mathcal{H})$.

(ب) بين أن الرباعي $PQST$ متوازي الأضلاع .

II -10 مسألة رقم 10

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$: المعادلة $(E_m): z^2-2mz-2(1+i)=0$: حيث $m\in\mathbb{C}$.

1. (ا) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $(E_{i\sqrt{2}})$.

(ب) أن من تحقق النقط O و $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ تكوِّن مثلثا قائم الزاوية في النقطة O ، حيث z_1 و z_2 حلي المعادلة $(E_{i\sqrt{2}})$.

2. لتكن في المستوى العقدي ، النقط : $M(m)$ و $N(2m)$ و $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ ، حيث z_1 و z_2 حلي المعادلة (E_m) . و لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(m)$ التي من أجلها يكون المثلث OM_1M_2 قائم الزاوية في النقطة O .

(ا) بين أن : (المثلث OM_1M_2 قائم الزاوية في O) $\iff 4\left|m^2\right|=|\Delta|$ ، حيث Δ هو مميز المعادلة (E_m) .

(ب) بين أن : $x^2-y^2+2xy+2=0 \iff M(x,y)\in(\Gamma)$.
(بوضع: $m=x+iy$)

(ج) بين أنه إذا كانت $M(m)\in(\Gamma)$ فإن الرباعي OM_1NM_2 مستطيل ، ثم إعط طريقة هندسية لإنشاء النقطتين M_1 و M_2 بحيث عمدة العدد العقدي z_1 معلومة .

III البنيات الجبرية

III -1 مسألة رقم 01

في مجموعة المصفوفات المربعة $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ،نضع : $\mathcal{O}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ ، $\mathcal{I}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ، $\mathcal{J}=\begin{pmatrix}0&1\\-2&2\end{pmatrix}$ ، و نعتبر المجموعة الجزئية :

$$\mathcal{F}=\left\{\mathcal{M}(a,b)=\begin{pmatrix}a&b\\-2b&a+2b\end{pmatrix}/\,(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

1. بين أن : $(\mathcal{F},+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي ،ثم حدد أساسا له و بعده.
2. بين أن : $\mathcal{F}$ جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.
3. نعتبر التطبيق φ و المعرف من $\mathbb{C}$ نحو $\mathcal{F}$ ، والذي يربط كل عدد عقدي $z=a+ib$ حيث: $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ ؛ بالمصفوفة $\mathcal{M}(a-b,b)$.
   (ا) بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(\mathcal{F}-\{\mathcal{O}\},\times)$.
   (ب) استنتج بنية: $(\mathcal{F}-\{\mathcal{O}\},\times)$.
   (ج) حدد بنية : $(\mathcal{F},+,\times)$.
   (د) حل في المجموعة $\mathcal{F}$، المعادلة التالية: $\mathcal{J}\times\mathcal{X}^3=-4\mathcal{I}$ حيث المجهول هو المصفوفة $\mathcal{X}$.
4. برهن أن:

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}),\mathcal{J}^n=-\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right)\mathcal{I}+\left(\sqrt{2}\right)^{n}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\mathcal{J}$$

III -2 مسألة رقم 02

نعتبر المجموعة : $\mathcal{G}=\{z\in\mathbb{C},\quad |z|<1\}$.

1. بين أن : $(\forall(z,z')\in\mathcal{G}\times\mathcal{G})),1+z\overline{z'}\neq 0$.

2. لكل (z,z') من $\mathcal{G}\times\mathcal{G}$، نضع: $z*z'=\dfrac{z+z'}{1+z\overline{z'}}$.

(ا) بين أن : $(\forall\,(z,z')\in\mathcal{G}\times\mathcal{G}))\,,|1+z\overline{z'}|^2-|z+z'|^2=\left(1-|z|^2\right)\left(1-|z'|^2\right)$.

(ب) استنتج أن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة $\mathcal{G}$.

(ج) هل القانون $*$ تبادلي في المجموعة $\mathcal{G}$ ؟(علل جوابك)

(د) بين أن $(\mathcal{G},*)$ زمرة غير تبادلية .

3. نعتبر المجموعة : $\mathcal{H}_\theta=\left\{z=\alpha\cdot e^{i\theta},\ \alpha\in]-1,1[\right\}$، حيث : $\theta\in\mathbb{R}$.

(ا) تحقق من أن :

$$(\forall(z,z')\in\mathcal{H}_\theta\times\mathcal{H}_\theta)\,,(\forall(\alpha,\alpha')\in]-1,1[\times]-1,1[)\,;z*z'=\frac{\alpha+\alpha'}{1+\alpha\cdot\alpha'}\cdot e^{i\theta}\ .$$

(ب) استنتج أن $\mathcal{H}_\theta$ جزء مستقر من $(\mathcal{G},*)$، ثم بين أن $(\mathcal{H}_\theta,*)$ زمرة تبادلية .

III -3 مسألة رقم 03

لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$ ، نضع : $\mathcal{N}(a,b)=\begin{pmatrix}a & b\\ -5b & a+2b\end{pmatrix}$ و نعتبر المجموعة :
$\mathcal{H}=\left\{\mathcal{N}(a,b)\ /\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$. نضع : $\mathcal{I}=\mathcal{N}(0,0)$ و $\mathcal{J}=\mathcal{N}(0,1)$.

1. (ا) بين أن $(\mathcal{H},+)$ زمرة تبادلية .

(ب) بين أن $\mathcal{J}=2\mathcal{J}-5\mathcal{I}$ ، ثم استنتج أن $\mathcal{H}$ جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

(ج) بين أن $(\mathcal{H},+,\times)$ جسم تبادلي .

2. ليكن $(\mathbb{C},+,\cdot)$ فضاءً متجهيا بعده 2 .

(ا) بين أن الأسرة $(1,1+2i)$ أساس للفضاء $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

(ب) استنتج أنه كل عدد عقدي z يكتب بكيفية وحيدة و هي :
$z=a+b(1+2i)$، حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

(ج) ليكن $z=a+b(1+2i)$. نعتبر التطبيق φ المعرف من $(\mathbb{C},+)$ نحو $(\mathcal{H},+)$ ، و الذي يربط كل عدد عقدي z بالمصفوفة $\mathcal{N}(a,b)$.

◁ بين أن φ تشاكل تقابلي من $\mathbb{C}$ نحو $\mathcal{H}$.

(د) بين أن : $(\forall z, z' \in \mathbb{C}),\ \varphi(z \times z') = \varphi(z) \times \varphi(z')$.

3. (ا) أثبت أنه : $\varphi\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{-5\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$.

(ب) لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، بين أن :

$$\left[\varphi\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^n = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) & \frac{1}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \\ \frac{-5}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \end{pmatrix} .$$

III -4 مسألة رقم 04

A- لتكن $(A, +, \times)$ حلقة واحدية وليكن a عنصرا من A بحيث:

$$a^n = 0_A \quad \text{و} \quad (\exists n \in \mathbb{N} - \{0, 1\})\,;\ a^{n-1} \neq 0_A\ .$$

1. بين أن العنصر a لا يقبل مقلوبا في الحلقة $(A, +, \times)$.

2. بين أن العنصر $1_A - a$ يقبل مقلوبا في الحلقة $(A, +, \times)$ ينبغي تحديده .

B- نعتبر المصفوفتين : $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ، $\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

ولكل (a, b) من $\mathbb{R}^2$ ،نضع : $\mathcal{M}_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$. في مجموعة المصفوفات المربعة $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ، نعتبر المجموعة الجزئية : $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_{(a,b)} / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. بين أن : $(\mathcal{M}, +)$ زمرة تبادلية .

2. بين أن $\mathcal{M}$ مستقرة بالنسبة لضرب المصفوفات في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. استنتج أن : $(\mathcal{M}, +, \times)$ حلقة . هل هي كاملة ؟

4. بين أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ \left(\mathcal{M}_{(a,b)}\right)^n = 2^{n-1}\left(a^n \cdot \mathcal{H} + b^n \cdot \mathcal{K}\right)\ .$$

III -5 مسألة رقم 05

لتكن $(\mathcal{G},*)$ زمرة تبادلية،عنصرها المحايد e. لكل $a\in\mathcal{G}$، نضع:

$$a^0=e,\quad a^1=a,\quad a^{n+1}=a^n*a$$ لكل n من $\mathbb{N}$.

وليكن a^{-1} مماثل a في $(\mathcal{G},*)$. نفترض أنه يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم ℓ بحيث : $a^\ell=e$.

نعتبر المجموعتين :

$\mathcal{E}=\left\{x\in\mathcal{G}|(\exists k\in\mathbb{Z}),\quad x=a^k\right\}$ و $\mathcal{F}=\left\{x\in\mathcal{G}|(\exists k\in\mathbb{Z}),\quad x=b^k\right\}$

حيث $b=a^q$ مع q عدد صحيح طبيعي غير منعدم يخالف 1 .

1. بين أن $(\mathcal{E},*)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathcal{G},*)$ و أن $(\mathcal{F},*)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathcal{E},*)$.

2. بين الاستلزام التالي: $\ell\wedge q=1\Longrightarrow\mathcal{E}=\mathcal{F}$.

III -6 مسألة رقم 06

في المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ نعرف قانون التركيب الداخلي $\star$ كما يلي :

$$\left(\forall(x,y)\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right),\quad x\star y=\arctan\left(\sqrt{3}+\tan(x)+\tan(y)\right).$$

1. بين أن $\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\star\right)$ زمرة تبادلية .

2. لكل x من المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ، نضع : $f(x)=\sqrt{3}+\tan(x)$.

   (ا) بين أن f تشاكل تقابلي من $\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\star\right)$ نحو $(\mathbb{R},+)$.

   (ب) استنتج مرة أخرى بنية $\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\star\right)$.

   (ج) بين أن المجموعة $\left\{\arctan\left(\ln(x)-\sqrt{3}\right)/x>0\right\}$ زمرة جزئية من $\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\star\right)$.

3. لكل x من المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ، نضع : $x^{(n)}=\underbrace{x\star x\cdots\star x}_{n\text{ مرة}}$ ، حيث : $n\in\mathbb{N}^*$.

   (ا) حدد تعبير $x^{(n)}$ بدلالة x و n .

   (ب) في المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ، المعادلة التالية: $x^{(2016)}=x+2017\pi$.

III -7 مسألة رقم 07

A- نزود $G=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي $\top$ و المعرف كما يلي :

$$\forall(x,y)\in G,\forall(x',y')\in G;(x,y)\top(x',y')=\left(xx',\sqrt[n]{x}y'+x'y\right)$$

حيث : n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

1. بين أن $(G,\top)$ زمرة غير تبادلية .
2. أثبت أن $(\mathcal{H},\top)$ زمرة تبادلية ، حيث : $\mathcal{H}=\{(1,y)\,/y\in\mathbb{Z}\}$.

B- نعتبر المجموعة الجزئية : $\mathcal{D}=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}\sqrt[n]{x} & y\\ 0 & x\end{pmatrix}/(x,y)\in G\right\}$.

1. بين أن $\mathcal{D}$ جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.
2. بين أن التطبيق φ الذي يربط كل زوج (x,y) بالمصفوفة $M(x,y)$ تشاكل تقابلي $(G,\top)$ من نحو $(\mathcal{D},\times)$ ، ثم استنتج بنية $(\mathcal{D},\times)$ محددا مقلوبا للمصفوفة $M(x,y)$.
3. نضع : $\mathcal{A}=M(1,1)$ و $\mathcal{I}=(1,0)$ ، ونعتبر المجموعة :

$$\mathcal{F}=\left\{a\mathcal{I}+b\mathcal{A}/(a,b)\in\mathbb{Z}^2\right\}.$$

(ا) تحقق من أن : $\mathcal{A}^2=-\mathcal{I}+2\mathcal{A}$.

(ب) بين أن $(\mathcal{F},+,\times)$ حلقة تبادلية و واحدية .

(ج) هل $(\mathcal{F},+,\times)$ بجسم ، وهل هي حلقة كاملة ؟

III -8 مسألة رقم 08

في المجال $\mathcal{I}=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ نعرف قانون التركيب الداخلي $*$ بما يلي:

$$\forall(x,y)\in\mathcal{I}^2,\qquad x*y=\arctan\left(\tan(x)+\tan(y)-1\right).$$

1. بين أن $(\mathcal{I},*)$ زمرة تبادلية.
2. لكل x من $\mathcal{I}$ ، نضع: $f(x)=\tan(x)-1$.

(ا) بين أن f تقابل من $\mathcal{I}$ نحو $\mathbb{R}$ ، محددا تقابله العكسي f^{-1} .

(ب) بين أن f^{-1} تشاكل من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(\mathcal{I},*)$.

(ج) استنتج مرة أخرى،بنية $(\mathcal{I},*)$.

3. لكل x من $\mathcal{I}$ ، نضع: $x^{(n)} = x * x * \cdots * x$ (تتم العملية *، n مرة) . نعتبر في المجموعة $\mathcal{I}$، المعادلة: $(E_n) : x^{(n)} + x^3 = 0$.

(ا) بين المعادلة (E_n) تقبل حلا وحيدا α_n في المجال $\mathcal{I}$ حيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

(ب) أثبت أنه، لكل n عدد صحيح طبيعي غير منعدم ،لدينا : $0 \leq \alpha_n < \dfrac{\pi}{4}$.

(ج) برهن على أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ،متقاربة محددا نهايتها.

III -9 مسألة رقم 09

لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$ ، نعتبر المصفوفة : $M(a,b) = \begin{pmatrix} a+\dfrac{b}{\sqrt{2}} & -\dfrac{b}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{3b}{\sqrt{2}} & a-\dfrac{b}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

في الحلقة $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ ، نعتبر المجموعة : $\mathcal{H} = \left\{M(a,b)/(a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

1. بين أن $(\mathcal{H},+)$ زمرة تبادلية .

2. بين أن $\mathcal{H}$ جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

3. بين أن التطبيق ϕ الذي يربط كل عدد عقدي $z = a+ib$ بالمصفوفة $M(a,b)$ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(\mathcal{H},\times)$.

4. استنتج أن : $(\mathcal{H},+,\times)$ جسم تبادلي .

III -10 مسألة رقم 10

نعرف على $\mathbb{R}$ قانون التركيب الداخلي * المعرف بما يلي :

$$\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2, a * b = \ln\left(e^a + e^b\right) .$$

1. (ا) هل القانون * تجميعي ؟

(ب) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x * (x * x) = 0$.

2. بين أنه : $(\exists x \in \mathbb{R}) , \ a = b * x$ إذا و فقط إذا كان $a > b$.هل هو وحيد ؟

3. تحقق أنه لكل a و b و c من $\mathbb{R}$: $a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$.
هل الجمع + توزيعي بالنسبة للقانون $*$ ؟

IV الحسابيات

IV -1 مسألة رقم 01

ليكن $n \in \mathbb{N}$. نفترض أن $n \geq 5$ و أنه يوجد زوج (a,b) من $\mathbb{N}^{*2}$ بحيث :

$\dfrac{a}{b} = \tan\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$ مع : a و b أوليان فيما بينهما .

نضع : $z = a + ib$ و $\theta = \arg(z) \in]-\pi, \pi[$.

1. أحسب θ بدلالة a و b، ثم بين أن : $(a+ib)^n = (a-ib)^n$.
2. إستنتج أن : $-2\left(2ib\right)^{n-1} = (a-ib)\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} C_n^k (a-ib)^{n-1-k}\left(2ib\right)^{k-1}\right)$.
3. إستنتج أن : a^2+b^2 يقسم $\left(2b\right)^{2n-2}$.
4. إستنتج أن : $\exists k \in \{1,2,\cdots,2n-2\}\,; a^2+b^2 = 2^k$.
5. بين أن: $k=1$ ، ثم إستنتج أنه : $n = 8$.

IV -2 مسألة رقم 02

الجزء الأول:

ليكن $p \in \mathbb{P}$ ، بحيث:$p \geq 3$، و ليكن x عددا من $\mathbb{Z}$ بحيث : $a^2+1 \equiv 0 \quad [p]$.

1. بين أن:$p \equiv 1 \quad [4]$.(يمكنك إستعمال مبرهنة فيرما)
2. لتكن $\mathcal{I}$ مجموعة الأعداد الأولية و التي تكتب على شكل: $4k+1$.

نضع: $\mathcal{P} = \left(2\prod\limits_{p_i \in \mathcal{I}} p_i\right)^2 + 1$.

(ا) بين أن : 3 لا يقسم $\mathcal{P}$.

(ب) أثبت أنه:$p|\mathcal{P} \Longrightarrow p \equiv 1 \quad [4]$.

(ج) إستنتج أن المجموعة $\mathcal{I}$ غير منتهية.

الجزء الثاني:

1. ليكن $(a,b)\in\mathbb{N}^{*2}$، بحيث $a\neq b$ و $ab(a+b)$ يقبل القسمة على a^2+ab+b^2.
   بين أنه: $\dfrac{|a-b|}{\sqrt[3]{ab}}>1$.
2. بين أنه : لكل زوج (a,b) من $\mathbb{N}^{*2}$ بحيث يكون: $a\wedge b=1$ و $ab=c^n$ مع $(c,n)\in\mathbb{N}^{*2}$ ؛ يوجد زوج $(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^{*2}$ بحيث يحقق : $(\alpha^n,\beta^n)=(a,b)$.

الجزء الثالث:

ليكن $(a,b)\in\mathbb{N}^{*2}$، بحيث: $a^2=2b^2+1$.

1. بين أن $a\wedge b=1$.
2. بين أن $(a+1)\wedge(a-1)=2$.
3. بين أن أحد العددين لا يقبل القسمة على 4.
4. نفترض أن $a-1$ لا يقبل القسمة على 4 .
   (ا) بين أنه: $(a+1)\wedge\left(\dfrac{a-1}{2}\right)=1$
   (ب) إستنتج أن العددين $\sqrt{\dfrac{a-1}{2}}$ و $\sqrt{a+1}$ عددان صحيحان طبيعيان، يقبلان القسمة على b.
5. نفترض أن: $p^3=3q^3+1$ حيث: $(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}$.
   بين أنه إذا كان 9 لا يقسم $(p-1)$ فإن العددين : $\sqrt[3]{\dfrac{p-1}{3}}$ و $\sqrt[3]{p^2+p+1}$ عددان صحيحان طبيعيان و يقسمان العدد q .

IV -3 مسألة رقم 03

1. (ا) حدد باقي القسمة الإقليدية للعدد 2017^{2017} على 7 .
   (ب) حدد تبعا لقيم العدد الصحيح الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11 .
   (ج) استنتج أن : $2017^{2017}+6\equiv 0\quad[77]$.

2. لكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع : $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} 2017^k$ و $a = 2017^{2017}$. و نعتبر في $\mathbb{Z}$ ، المعادلة التالية : $(E) : ax + \alpha_n \equiv 0 \ [11]$.

(ا) بين أنه إذا كان x حلا للمعادلة (E) ، فإن : $x \equiv 2\alpha_n \ [11]$.

(ب) حدد مجموعة حلول المعادلة (E) ، ثم استنتج حلولها القابلة للقسمة على 11 .

IV -4 مسألة رقم 04

الجزء الأول: ليكن $a \in \mathbb{Z}$ و ليكن p عددا أوليا أكبر قطعا من 5 بحيث : p يقسم العدد $(a^2 + a + 1)$.

1. بين أن : $a^3 \equiv 1 \quad [p]$.(لاحظ أن : $a^3 - 1 = (a-1)(a^2+a+1)$)

2. بين أن : $p \wedge (a-1) = 1$ و $p \wedge (a+1) = 1$.

3. باستعمال ما سبق، أثبت أن أصغر عدد صحيح طبيعي غير منعدم k يحقق $a^k \equiv 1 \quad [p]$ ، هو $k = 3$.(يمكنك استعمال البرهان بالخلف)

4. بتطبيق مبرهنة فيرما ، بين أن : $p \equiv 1 \quad [3]$.

الجزء الثاني: لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $A_n = (3(n!))^2 + 3(n!) + 1$.

1. بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$،يقبل قاسما أوليا p_n بحيث : $p_n > n$ و $p_n \equiv 1 \quad [3]$.(استعمل نتيجة السؤال 4. من الجزء الأول)

2. استنتج أنه توجد مالانهاية من الأعداد الأولية الموجبة و التي تكتب على الشكل: $3k+1$ ، حيث $k \in \mathbb{N}^*$.

IV -5 مسألة رقم 05

نضع : $D = a^2 + b^2$ ، حيث $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ و $a \wedge b = 1$.

1. (ا) بين أن : $(\forall k \in \mathbb{Z}), \ (2k+1)^4 \equiv 1[16]$.

(ب) استنتج أن : $D \equiv 1[16]$ أو $D \equiv 2[16]$.

2. ليكن p قاسما أوليا فرديا للعدد D .

(ا) بين أن : $p \wedge a = 1$.

(ب) استنتج أن :أو بين أنه يوجد عدد صحيح نسبي c ، بحيث : $ac \equiv -1[p]$.(استعمل مبرهنة بوزو و السؤال السابق)

(ج) استنتج أن : $(\exists x \in \mathbb{Z}),\ x^{r-1} \equiv 1[p]$ ، حيث : r هو باقي القسمة الإقليدية للعدد p على 8 .

(د) أثبت أنه : $p \equiv 1[8]$. (يمكنك استعمال البرهان بفصل الحالات)

IV -6 مسألة رقم 06

لتكن $(a_n)_{n\geq 0}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$a_0 = 2$ و $a_1 = 2a+1$ و $(\forall n \in \mathbb{N}),\ a_{n+2} = (2a+1)\,a_{n+1} - a(a+1)a_n$ ،

حيث $a \in \mathbb{N}^*$.

1. بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ a_{n+1} \wedge [a(a+1)] = 1$.
2. بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ a_{n+1} \wedge a_n = 1$.
3. بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ a_{2n+1} \equiv 0\ [2a+1]$.
4. (ا) بين الإستلزام التالي :

$$\left(\left(\forall (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{Z}^3\right),\ \alpha \wedge \beta = 1 \text{ و } \gamma|\alpha\right) \Rightarrow \alpha \wedge \beta\gamma = |\gamma| .$$

(ب) استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ a_{2n+3} \wedge a_{2n+1} = 1$.

IV -7 مسألة رقم 07

ليكن k من $\mathbb{Z} - \{-2015, 2\}$. نضع : $\varphi(k) = \dfrac{k+2015}{k-2}$.

1. (ا) بين أن : $(k-2) \wedge (k+2015) = (k-2) \wedge 2017$.

(ب) تحقق من أن 2017 عدد أولي .

(ج) حدد المجموعة التالية بتفصيل : $\mathcal{H}_1 = \{\varphi(k) \in \mathbb{Z}/k \in \mathbb{Z}\}$.

2. بين أن : $\alpha \wedge \beta = 1 \Rightarrow \beta^2 \wedge \left(\alpha^2 - \beta^2\right) = 1$.
3. حدد المجموعة التالية بتفصيل : $\mathcal{H}_2 = \left\{\sqrt{\varphi(k)} \in \mathbb{Q}/k \in \mathbb{Z}\right\}$.

IV -8 مسألة رقم 08

نعتبر العددين :

$$a = \sum_{k=0}^{9} 2011^k \quad \text{و} \quad b = \sum_{k=0}^{2009} 2011^k \quad .$$

1. (ا) بين أن : $a \equiv 60[100]$.

(ب) استنتج أنه : $\forall k \in \mathbb{N}^* - \{1\}; \quad a^k \equiv 0\ [100]$.

2. بين أن : $b \equiv 201a[100]$.

3. استنتج رقمي وحدات و عشرات العدد b .

IV -9 مسألة رقم 09

ليكن $a, b \in \mathbb{N}^*$ ؛ بحيث: $\forall n \in \mathbb{N}, a^n + n | b^n + n$. نفترض أن العددين a و b مختلفين، و يخالفان 1. ليكن p عددا أوليا موجبا بحيث: $(a-b) \wedge p = 1$.

1. تحقق من أن : $m = a(p-1) + p$ حل للنظمة (S):

$$(S) : \begin{cases} x \equiv & -a \ \ [p] \\ x \equiv & 1\ [p-1] \end{cases}.$$

2. إستنتج أن مجموعة حلول النظمة (S) هي : $\mathcal{S} = \{m + kp(p-1) | k \in \mathbb{Z}\}$.

3. (يمكنك استعمال مبرهنة فيرما الصغرى)

(ا) بين أن : $a \wedge p = 1$

(ب) بين أن : $a^m + m \equiv \ \ 0\ \ [p]$.

(ج) بين أن : $b^m + m \equiv \ \ b - a\ \ [p]$.

(د) إستنتج ؟.

IV -10 مسألة رقم 10

بين أنه إذا كان لكل n من $\mathbb{N}$ ، $a^n + n$ يقسم $b^n + n$ ، فإن $a = b$.