ثانوية محمد الخامس التأهيلية
الصويرة

Bac Blanc n°2 le 25 mai 2019

- La qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements interviendront pour une

  Part importante dans l'appréciation des copies

- Le sujet comporte trois exercices et un problème
  - Un exercice sur les structures algébriques
  - Un exercice sur les complexes
  - Un exercice d'arithmétique
  - Et un problème d'analyse

Les calculatrices ne sont pas autorisées

Exercice n°1 (4 , 5pts)

Partie I On définit sur $\mathbb{R}$ la loi $*$ par $x*y=\frac{1}{2}(1-2x)(2y-1)+\frac{1}{2}$

0.25pt	1) a- Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans $G=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$
0.25pt	b- vérifier que $\forall(x,y)\in G^2;x*y=x+y-2xy$
1pt	c- Montrer que $(G,*)$ est un groupe commutatif
	2) 2Soit $x\in G$; On pose $x^{(0)}=0;x^{(1)}=x;x^{(2)}=x*x$ et $\forall n\in(\mathbb{N}^*-\{1\});x^{(n)}=\underbrace{x*x*...x}_{nfois}$
0.5pt	a- 2Soit $x\in G$; Montrer par récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N});x^{(n)}=\frac{1}{2}\left(1-(1-2x)^n\right)$
0.25pt	b- Résoudre dans G l'équation $2x^{(2019)}+e^{2019}-1=0$

Partie II On pose $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$ et $M(x)=xA+I$ avec $x\in G$

	On considère l'ensemble $E=\{M(x)/x\in G\}$
0.5pt	1) Vérifier que $A^2=-2A$ puis montrer que E est stable dans $(M_2(\mathbb{R}),\times)$
0.75pt	2) Soit φ l'application de G vers E tel que $(\forall x\in G);\varphi(x)=M(x)$
	Montrer que φ est un isomorphisme de $(G,*)$ vers $(E,\times)$ puis en déduire la structure de $(E,\times)$
	3) On pose $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$
0.5pt	a- Vérifier que $B=M(1)$ puis déterminer B^{-1}
0.5pt	b- Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*),B^n=M\left(\frac{1-(-1)^n}{2}\right)$ et que $(B^n)^{-1}=B^n$

Exercice n°2 (3pts)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E):z^2-(2+m+im)z+im(2+m)=0\quad(m\in\mathbb{R})$

0.5pt	1) Vérifier que le discriminant de (E) est : $\Delta=(2+m-im)^2$
0.5pt	2) Résoudre l'équation (E) ,on notera z_1 la solution réelle et z_2 l'autre solution.
	3) Soit A l'image de z_1 et B l'image de z_2 . C et D les points tel que $ACBD$ soit un carré direct
1pt	a- Montrer que $d=1-i$ et $c=(1+i)(1+m)$
0.5pt	b- Déterminer (Δ) l'ensemble des points C lorsque m varie dans $\mathbb{R}$
0.5pt	4) Tracer (Δ) et les 4 carrés correspondants aux valeurs de m : $0,2,-1$ et -4

Exercice n°3 (2.5pt)

On considère dans $\mathbb{N}$ l'équation $(E): x^{103}+x-1\equiv 0[103]$

1pt — 1) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $2x-103y=1$

0.75pt — 2) a- Montrer que $(E)\Leftrightarrow 2x\equiv 1[103]$

0.75pt — b-Résoudre l'équation (E)

Problème

Partie I

0.25pt — 1) a- Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R});\int_0^x (t-x)^2dt=\frac{x^3}{3}$

0.5pt — b- Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R});\int_0^x (t-x)^2e^tdt=2e^x-x^2-2x-2$

0.25pt — c- Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}^+);\int_0^x (t-x)^2e^tdt\le e^x\int_0^x (t-x)^2dt$

0.5pt — 2) a- En déduire de ce qui précède que $(\forall x\in\mathbb{R}^+);\frac{x^2}{2}\le e^x-x-1\le\frac{x^2}{2}+\frac{x^3e^x}{6}$

0.25pt — b- Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$

3) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=e^{2x}-(x^2+2)e^x+1$

0.5pt — a- Montrer que φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

0.25pt — b- En déduire que $(\forall x>0);\varphi(x)>0$

Partie II

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} g(x)=\frac{xe^x}{e^x-1}+\ln\frac{x}{e^x-1};x\ne 0\\ g(0)=1\end{cases}$

0.5pt — 1) a- Montrer que g est une fonction paire

0.25pt — b- Montrer que g est continue en 0

0.5pt — c - Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}^*);g'(x)=\frac{\varphi(x)}{x(e^x-1)^2}$

0.25pt — 2) a- Montrer que g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

0.25pt — b-En déduire que $(\forall x\in\mathbb{R});g(x)\ge 1$

0.25pt — c- montrer que C_g admet une Branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de $-\infty$

Partie III

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)=\frac{2}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}; x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

0.5pt	1) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}): f(x)+f(-x)=2$ puis interpréter géométriquement ce résultat.
0.25pt	2) a- Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}^*): f(x)=2\frac{\ln(1+u(x))}{u(x)}\times\frac{e^x-x-1}{x^2}$ avec $u(x)=\frac{e^x-x-1}{x}$
0.25pt	b- En déduire que f est continue à droite en 0
0.25pt	3) a- vérifier que $(\forall x\in\mathbb{R}^*); f'(x)=\frac{2}{x^2}(g(x)-1)$
0.25pt	b- Montrer que $(\forall x>0); f(x)=2\left(1+\frac{1}{x}\ln(1-e^{-x})-\frac{\ln x}{x}\right)$
0.5pt	c-En déduire les branches infinie de C_f
0.25pt	4) Dresser le tableau de variations de la fonction f

partie IV Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\begin{cases} F(x)=\int_{1+x}^{e^x}\frac{1}{\ln t}dt; x>0 \\ F(0)=0 \end{cases}$

0.5pt	1) a- Montrer que $(\forall x>0); \frac{e^x-x-1}{x}\leq F(x)\leq\frac{e^x-x-1}{\ln(x+1)}$
0.5pt	b- Montrer que F est continue et dérivable à droite en 0 (on rappelle que $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$)
0.5pt	c- Déterminer la branche infinie de C_F .
0.25pt	2) a-Montrer que $(\forall x>0); F'(x)=\frac{e^x\ln(x+1)-x}{x\ln(x+1)}$
0.75pt	b-Montrer que $(\forall x>0); \exists c\in\,]0,x[\,/\, F'(x)\ln(1+x)=e^c\ln(1+c)+\frac{e^c-c-1}{c+1}$
0.25pt	c-En déduire que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

Fin