Similia 01

Exercice 3 :

1. $(\forall n \geq 3)$ $2^{n-1} > n$

pour $n=3$ $2^2 = 4 > 3$ vrai

On suppose que $2^{n-1} > n$

et montrons que $2^n > n+1$

On a $2^{n-1} > n \Rightarrow 2^n > 2n$

or $n > 1$ $\Rightarrow n+n > n+1$

$\Rightarrow 2n > n+1$

d'où $2^n > n+1$ $\forall n \geq 3$

Donc $2^{n-1} > n$ $\forall n \geq 3$

2-a. (I) $x^{n-1} = n$

* pour $n=1$ $n-1=0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^*$ $x^{n-1} = 1$

Donc $S = \{\mathbb{R}^*\}$

* pour $n=2$

$x = 2$ Donc $S = \{2\}$

pour $n \geq 3$ On a $2^{n-1} > n$ et $n = x^{n-1}$

$\Rightarrow 2^{n-1} > x^{n-1}$ $(x^{n-1}$ et $2^{n-1}) \in \mathbb{N}^*$

$\ln \nearrow$ $\Rightarrow (n-1)\ln(2) > (n-1)\ln x$ car $2 > 0$ et $x > 0$

$n \neq 1$ car $n \geq 3$ $\Rightarrow \ln x < \ln 2$

$\Rightarrow \boxed{x < 2}$

$S =]0, 2[$

3) (E) $a^b = b^a$

1- p est premier m.q $p/a \Leftrightarrow p/b$

$p/a \Leftrightarrow p/a^b \Leftrightarrow p/b^a$

p est premier $\Leftrightarrow p/b$

4)- $a \neq b$

(i) on suppose que:

$a = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \dots p_n^{a_m} \times p^{\alpha_1}$

$b = q_1^{\beta_1} \times q_2^{\beta_2} \times \dots q_n^{\beta_m} \times p^{\beta}$

$(a)^b = (b)^a \Rightarrow p_1^{a_1 b} \times p_2^{a_2 b} \dots \times p_n^{a_m b} \times p^{\alpha b} = q_1^{\beta_1 a} \times q_2^{\beta_2 a} \dots \times q_n^{\beta_n a} \times p^{\beta a}$

Donc $p^{\beta a} / p_1^{a_1 b} \times p_2^{a_2 b} \times \dots \times p_n^{a_n b} \times p^{\alpha_1 b}$

$p^{\alpha_1 b} / q_1^{\beta_1 b} \times \dots q_n^{\beta_n b} \times p^{\beta a}$

or $p \wedge p_1 = 1$ et $p \wedge p_2 = 1 \dots$

$\Rightarrow p \wedge p_n = 1$

d'aprés gauss $p^{\beta a} / p^{\alpha b}$ et $p^{\alpha b} / p^{\beta a}$

Alors $p^{\beta a} = p^{\alpha b} \Rightarrow \alpha b = \beta = a$

ii) On suppose par l'absurde que $b \not/ a$ et $a \not/ b$

$\exists p_1 / a$ et $p_1 \not/ b$ et $\exists p_2 / b$ et $p_2 \not/ a$

d'après 3_a $p/a \Leftrightarrow p/b$ ce qui est absurde

Exercice 4 :

$D_G = \mathbb{R}$

$$G(x) = \int_0^x \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}\,dt = F(x) - F(0)$$

On note $g(t) = \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est le quotient de deux f^ts dérivables

$t \longrightarrow 2$ car c'est une f^t cte

$t \longrightarrow \sqrt{1+4t^2}$ car $\begin{cases} 1+4t^2 > 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \\ t \longrightarrow \sqrt{t} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^+ \end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt{1+4t^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ g est continue sur $\mathbb{R}$, d'où elle admet une primitive qu'on note $F(t)$ dérivable sur $\mathbb{R}$

t.q $F'(t) = g(t)$

$u : \begin{cases} x \longrightarrow x \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \\ u(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \\ F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases}$

$\Rightarrow x \longrightarrow F(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

D'où $x \longrightarrow G(x)$ est dérivable car c'est la somme de deux f^ts dérivables

$x \longrightarrow F(x)$ et $x \longrightarrow F(0)$

On a :

$G(x) = F(x) - F(0)$

$\Rightarrow G'(x) = F'(x) = g(x) = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}}$

Donc $G'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} > 0$

$\Rightarrow$ G est str $\nearrow$

Scanné avec CamScanner

3- montrons que G est impair

$$G(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\,dt$$

$\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow -x \in \mathbb{R}$

Donc:

$$G(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\,dt = F(-x) - \cancel{F(0)}^{0}$$

or $F(-x) = -F(x)$

car en dérivant $-F'(x) = -F'(x)$

d'où $G(-x) = -F(x) = -G(x)$

donc G est impaire

2-a m.q $(\forall t \geq 0)$ $\frac{1}{1+2t} \leq \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$

$$\frac{1}{1+2t} \leq \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+4t^2} \leq 1+2t$

$\Leftrightarrow \cancel{1}+\cancel{4t^2} \leq 1+4t^2+4t$

$\Leftrightarrow 4t \geq 0$ Vrai

b- on a $\frac{1}{1+2t} \leq \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$

$u: t \rightarrow 1/1+2t$ est continue sur $\mathbb{R}$, $v: t \rightarrow 1/\sqrt{1+4t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $x > 0$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{1}{1+2t}\,dt \leq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\,dt$$

et on sait que $\int_0^x \frac{1}{1+2t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2}{1+2t}\,dt$

$= [\ln(1+2t)]_0^x$

$= \ln(1+2x)$

$=$

Donc $\ln(1+2x) \leq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} dt$

D'après limite et ordre

$\lim_{+\infty} G(x) = \lim_{+\infty} \ln(1+2x) = +\infty$

car $\lim_{+\infty} 1+2x = +\infty$ $\quad u = 1+2x$

$\lim_{u \to +\infty} \ln(u) = +\infty$

3- a m q $\quad 1+4t^2 \geq (1+t)^2$

$(1+t)^2 = t^2 + 2t + 1$

càd m.q $1+4t^2 \geq t^2 + 2t + 1$

$\Rightarrow 3t^2 - 2t \geq 0$

on pose $u(t) = 3t^2 - 2t$

t est dérivable sur $\mathbb{R}$ en partie sur $[1; +\infty[$

$u'(t) = 6t - 2$

$u'(t) = 0 \Leftrightarrow 6t = 2$

$\Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$

or $t > \frac{1}{3}$ (car $t > 1$)

$\Rightarrow 6t - 2 > 0$

$\Rightarrow u'(t) > 0$

càd u est str $\nearrow$ $\forall t \geq 1$

On a $t \geq 1 \overset{u \nearrow}{\Rightarrow} u(t) \geq u(1)$

$\Rightarrow u(t) \geq 1 > 0$

d'où $3t^2 - 2t > 0 \quad \forall t \geq 1$

Scanné avec CamScanner

~~On a $x>1 \Rightarrow$~~

On a $1+4t^2 \geq (1+t)^2$

$u: t \to \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$ et $v: t \to 1/_{t+1}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ en partie sur $]1;+\infty[$

$\Rightarrow \sqrt{1+4t^2} \geq 1+t$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \leq \frac{1}{1+t}$

$\Rightarrow \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} dt \leq \int_1^x \frac{1}{1+t}$

$\Rightarrow G(1) - G(0) + \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} dt \leq G(1) - G(0) + \int_1^x \frac{1}{1+t} dt$

$\Rightarrow \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} dt \leq G(1) + \int_1^x \frac{1}{1+t} dt$

$\Rightarrow G(x) \leq G(1) + [\ln(t+1)]_1^x$

$\Rightarrow G(x) \leq G(1) + \ln(x+1) - \ln(2)$

Il suffit de m.q

$\ln(x+1) - \ln 2 < 2\ln(x+1) - \ln 4$

$\Rightarrow \cancel{\ln(x+1)} - \ln(2) < \cancel{2\ln(x+1)} - 2\ln 2$

$\Rightarrow 0 < \ln(x+1) - \ln(2)$

$\Rightarrow \ln(2) < \ln(x+1)$

$\overset{e}{\Rightarrow} 2 < x+1$

$\Rightarrow x > 1$ vrai

c- On a $G(x) < G(1) - \ln 4 + 2\ln(x+1)$

D'après limite et ordre

$\lim_{+\infty} \frac{G(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{G(1) - \ln(4)}{x} + \frac{2\ln(x+1)}{x}$

$= \lim_{+\infty} \underbrace{\frac{G(1) - \ln(4)}{x}}_{0} + \underbrace{\frac{\ln(x+1)}{x+1}}_{0} \cdot \underbrace{\frac{x+1}{x}}_{(1+1/x) = 0} \cdot 2$

$\Rightarrow \lim_{+\infty} G(x)/x = 0$

Γ_G admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses

b- d'après 1-a G est continue sur $\mathbb{R}$ et str ↗

Donc G est bij de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

$G'(x) = f(x)$

$$\begin{cases} G(x) = y \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(y) = x \\ \forall y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On a G est dérivable sur $\mathbb{R}$, et F est sa f^{t} réc

$\Rightarrow F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$(G^{-1})'(G(x)) = \frac{1}{G'(x)}$$

$$\Rightarrow F'(G(x)) = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{1+4x^2}}}$$

$$\Rightarrow F'(G(x)) = \frac{1}{2}\sqrt{1+4x^2}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1+4\cdot(G^{-1}(x))^2}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+4F^2(x)}$$

F' est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $\begin{cases} 1+4F^2(x) > 0 \\ x \longrightarrow \sqrt{x} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^{*}_{+} \end{cases}$

$\Rightarrow F'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ $\rightarrow \sqrt{1+4F^2(x)}$

$\Leftrightarrow F$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

Scanné avec CamScanner

On a $F'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1+4F^2(x)}$

$$F''(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{8\,F'(x)\,.\,F(x)}{2\sqrt{1+4F^2(x)}}\right)$$

$$\Rightarrow \cancel{2}\,\frac{\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{\sqrt{1+4F^2(x)}}\,.\,F(x)}{\cancel{2}\,\cancel{\sqrt{1+4F^2(x)}}} = F''(x)$$

Donc $F''(x) - f(x) = 0$

d- $F''(0) = f(0)$

On sait que $G(0) = \int_0^0 \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\,dt = 0$

$$\Rightarrow G(0) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = G^{-1}(0) = f(0)$$

càd $f(0) = F''(0) = 0$

et on a $F'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1+4F^2(x)}$

$$F'(0) = \frac{1}{2}\sqrt{1+4F^2(0)} = \frac{1}{2}$$