PR : ABOULFADIL YASSINE | **Les nombres complexes** | 2 BAC PC/SVT

1- Définition :

L'ensemble des nombres complexes s'écrit : $C = \{z = a + ib | (a, b) \in IR^2 et\ i^2 = -1\}$

2- L'écriture algébrique d'un nombre complexe :

L'écriture algébrique du nombre complexe z est : $z = a + ib$

a : Le nombre a est la partie réelle de z , notée : $Re(z) = a$

b : Le nombre b est la partie imaginaire de z , notée : $Im(z) = b$

Cas particulier :

- Si $Im(z)=0$, alors z est un nombre réel
- Si $Re(z)=0$, alors z est un nombre imaginaire pur

3- Egalité de deux nombres complexes :

Soit z et z' deux nombres complexes.

$$z = z' \Leftrightarrow Re(z) = Re(z') \text{ et } Im(z) = Im(z')$$

4- Le conjugué d'un nombre complexe :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe

Nous symbolisons le conjugué du nombre complexe z par $\bar{z}$

et on écrit : $\bar{z} = a - ib$

5- Propriété :

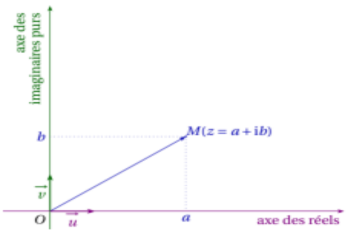
$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

6- Représentation géométrique d'un nombre complexe :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec : $(a; b) \in IR^2$

On relie le nombre complexe z avec le point $M\ (a; b)$

Le nombre z s'appelle l'affixe du point M et le point M s'appelle l'image du nombre z et on écrit : $M(z)$



7- L'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$

8 - L'affixe du point I centre du segment $[AB]$:

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

9- Module d'un nombre complexe :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe

Nous symbolisons le module du nombre complexe z par $|z|$

et on écrit : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

10- Propriétés des modules :

$\lvert -z \rvert = \lvert z \rvert$	$\lvert z_1 \times z_2 \rvert = \lvert z_1 \rvert \times \lvert z_2 \rvert$
$\left\lvert \frac{1}{z} \right\rvert = \frac{1}{\lvert z \rvert}$	$\left\lvert \frac{z_1}{z_2} \right\rvert = \frac{\lvert z_1 \rvert}{\lvert z_2 \rvert}$
$\lvert \bar{z} \rvert = \lvert z \rvert$	$\lvert z^n \rvert = \lvert z \rvert^n$

11- La distance AB :

$$AB = |z_B - z_A|$$

12- Points alignés :

On dit que A et B et C des points alignés si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in IR$

13- Résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec a et b et c des réels et $a \neq 0$:

Il faut d'abord calculer le discriminant (Δ) , donné par la formule : $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
l'équation $az^2 + bz + c = 0$ a deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2 \times a}$; $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2 \times a}$	**l'équation $az^2 + bz + c = 0$ a une unique solution réelle :** $z_0 = -\frac{b}{2a}$	**l'équation $az^2 + bz + c = 0$ a deux solutions réelles distinctes :** $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \times a}$; $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \times a}$

14- Forme trigonométrique d'un nombre complexe :

Pour déterminer la forme trigonométrique d'un nombre complexe z tel que $z = a + ib$ on passe par deux étapes :

1- On calcul r le module de z

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2- Factorisation par le module r :

$$z = r\left(\frac{a}{r} + i\frac{b}{r}\right)$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z = [r;\theta]$$

15- Propriétés de La forme trigonométrique :

Soit $z_1 = [r_1;\theta_1]$ et $z_2 = [r_2;\theta_2]$

$\frac{z_1}{z_2} = \left[\frac{r_1}{r_2};\theta_1 - \theta_2\right]$	$z_1 \times z_2 = [r_1 \times r_2;\theta_1 + \theta_2]$
$\frac{1}{z_1} = \left[\frac{1}{r_1};-\theta_1\right]$	$z_1{}^n = [r_1{}^n;n\theta_1]$
$-z_1 = [r_1;\pi + \theta_1]$	$\overline{z_1} = [r_1;-\theta_1]$

16- Formules d'EULER :

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\ ;\ \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

17- Formule de MOIVRE :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

18- la notation exponentielle d'un nombre complexe :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

La notation exponentielle du complexe z est : $z = re^{i\theta}$

19- Propriétés de la notation exponentielle d'un nombre complexe :

$$re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = (r \times r')e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$$

$$-re^{i\theta} = re^{i(\pi+\theta)}$$

$$\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$$

$$\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

$$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$$

20- Mesure de l'angle :

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$$

21- Propriétés des arguments :

$$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$$
$$\arg(z^n) \equiv n\arg(z)[2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)[2\pi]$$
$$\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$$
$$\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$$

Si a et b deux réels non nuls

$$a > 0 \Rightarrow \arg(a) \equiv 0[2\pi]$$
$$a < 0 \Rightarrow \arg(a) \equiv \pi[2\pi]$$
$$b > 0 \Rightarrow \arg(ib) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$
$$b < 0 \Rightarrow \arg(ib) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$
$$-\cos\theta + i\sin\theta = \cos(\pi-\theta) + i\sin(\pi-\theta)$$
$$-\cos\theta - i\sin\theta = \cos(\pi+\theta) + i\sin(\pi+\theta)$$
$$\sin\theta + i\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$-\sin\theta + i\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$
$$-\sin\theta - i\cos\theta = \cos\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

22- L'ensemble des points M(z) :

La relation complexe	La notion géométrique
$\lvert z - z_A \rvert = r \;;(r \succ 0)$	$AM = r$ M appartient au cercle de centre A et de rayon r
$\lvert z - z_A \rvert = \lvert z - z_B \rvert$	$AM = AB$ M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$

23- La nature du triangle :

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r; \pm\frac{\pi}{2}\right]$	ABC est un triangle rectangle au point A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1;\theta]$	ABC est un triangle isocèle au point A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm\frac{\pi}{2}\right]$	ABC est un triangle rectangle et isocèle au point A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm\frac{\pi}{3}\right]$	ABC est un triangle équilatéral

24- La représentation complexe de quelques transformations usuelles :

La transformation	La représentation complexe
La translation : $t_{\vec{u}}$	$z' = z + b$, avec b est l'affixe du vecteur $\vec{u}$
L'homothétie : $h(\Omega; k)$	$z' - \omega = k(z - \omega)$, avec ω l'affixe du point Ω
La rotation : $R(\Omega; \theta)$	$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$, avec ω l'affixe du point Ω

25- Parallélogramme :

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$

26- Carré :

ABCD est un carré si et seulement si :

- ABCD est un parallélogramme.
- Un triangle rectangle et isocèle au point.

27- Points cocycliques :

A , B , C et D sont circulaires si : $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in IR$ ou $\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in IR$

28- Losange :

ABCD est un losange si et seulement si :

- ABCD est un parallélogramme.
- AB=AD ou CB=CD