PR : ABOULFADIL YASSINE	**Géométrie dans l'espace**	**2 BAC PC/SVT**

Dans ce cours, l'espace est rapporté à un repère orthonormé	$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1- Le produit scalaire et le produit vectoriel dans l'espace :

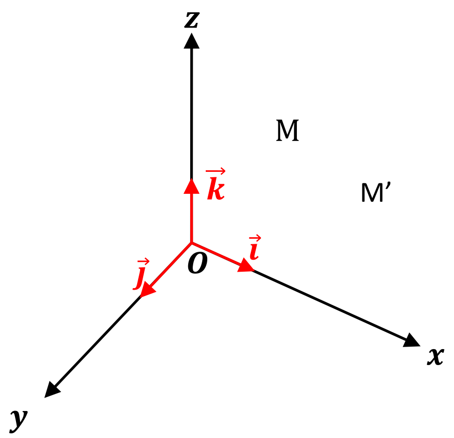
a- Les coordonnées d'un point :

Soit M un point de l'espace tel que : M(x, y, z)

x : L'abscisse du point M.

y : L'ordonnée du point M.

z : La cote du point M.



b- Les coordonnées d'un vecteur :

Soient M et M' deux point de l'espace tel que : M(x, y, z) et M'(x', y', z').

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MM'}$: $\overrightarrow{\boldsymbol{MM'}}(\boldsymbol{x'-x};\boldsymbol{y'-y};\boldsymbol{z'-z})$

D'autre façon $\overrightarrow{\boldsymbol{MM'}}=(\boldsymbol{x'-x})\vec{\boldsymbol{i}}+(\boldsymbol{y'-y})\vec{\boldsymbol{j}}+(\boldsymbol{z'-z})\vec{\boldsymbol{k}}$

c- Le produit scalaire :

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs de l'espace tel que : $\vec{U}(a,b,c)$ et $\vec{V}(a',b',c')$

$\vec{\boldsymbol{U}}.\vec{\boldsymbol{V}}=\boldsymbol{aa'}+\boldsymbol{bb'}+\boldsymbol{cc'}$ **(Produit scalaire)**

d- La norme d'un vecteur :

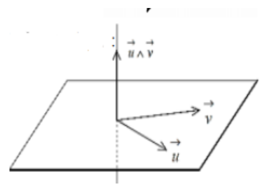
Soit $\vec{U}$ un vecteur de l'espace tel que : $\vec{U}(a,b,c)$

$\|\vec{\boldsymbol{U}}\|=\sqrt{\boldsymbol{a^2+b^2+c^2}}$ **(Norme d'un vecteur)**

e- Le produit vectoriel :

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs de l'espace tel que : $\vec{U}(a,b,c)$ et $\vec{V}(a',b',c')$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & a & a'\\ \vec{j} & b & b'\\ \vec{k} & c & c'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b & b'\\ c & c'\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a & a'\\ c & c'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a & a'\\ b & b'\end{vmatrix}\vec{k}$$ **(Produit vectoriel)**



Remarque : $\vec{\boldsymbol{U}}.\vec{\boldsymbol{V}}=\|\vec{\boldsymbol{U}}\|\times\|\vec{\boldsymbol{V}}\|\times\cos\left(\overline{\vec{\boldsymbol{U}},\vec{\boldsymbol{V}}}\right)$

$\|\vec{\boldsymbol{U}}\wedge\vec{\boldsymbol{V}}\|=\|\vec{\boldsymbol{U}}\|\times\|\vec{\boldsymbol{V}}\|\times\sin\left(\overline{\vec{\boldsymbol{U}},\vec{\boldsymbol{V}}}\right)$

f- Orthogonalité de deux vecteurs dans l’espace :

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs de l’espace.

$\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

g- Vecteurs colinéaires :

On dit que deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires lorsqu’il existe un réel k tel que : $\vec{U} = k.\vec{V}$

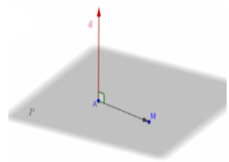
avec $k \in IR^*$

2- Plan et vecteur normal :

Soit $\vec{n}\ (a, b, c)$ un vecteur non nul, et $A(x_A\ , y_A\ , z_A\ )$ un point de l’espace.

L'ensemble des points M de l’espace qui vérifient : $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ est le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. Une équation cartésienne de ce plan , s’écrit sous la forme : $ax + by + cz + d = 0$

Si A , B et C sont trois points non alignés, alors $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC), et dans ce cas on peut déduire l’équation cartésienne du plan (ABC) à l’aide de l’équivalence suivante : $M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)=0$



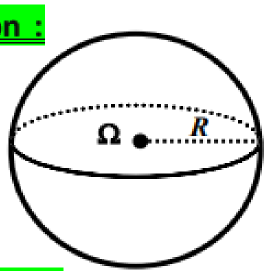
3- La sphère :

Equation cartésienne d’une sphère définie par le centre et le rayon :

Une équation de la sphère (S) de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R avec $(R \succ 0)$. Est :

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ *que l’on peut écrire :*

$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ *ou* $d=a^2+b^2+c^2-R^2$.



Equation cartésienne d’une sphère définie par l’un de ces diamètres :

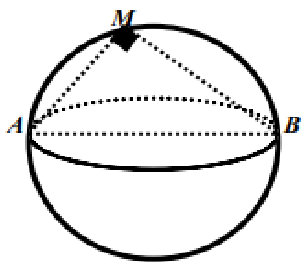
Soit A et B deux points de l’espace tel que : $(A \neq B)$.

L'ensemble des points M de l’espace tels que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ est la sphère dont $[AB]$ est l’un de ces diamètres.

Une équation cartésienne de cette sphère est :

$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$

avec $A(x_A,y_A,z_A)$ *et* $B(x_B,y_B,z_B)$.



Remarque: Dans ce cas la sphère (S) est de centre Ω milieu du segment [AB] et de rayon $r=\frac{AB}{2}$.

Etude de analytique de l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$.

Soit a, b, c et d quatre nombres réels tels que $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ et (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace qui vérifient : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$.

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0 \Leftrightarrow x^2+ax+y^2+by+z^2+cz+d=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2+d=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-d$$

- **Si :** $\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-d\succ 0$: *l'ensemble des points $M(x,y,z)$ est la sphère (S) de centre $\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$ et rayon $R=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-d}$.*
- **Si :** $\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-d=0$: *(S) est l'ensemble $\left\{\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)\right\}$.*
- **Si :** $\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-d\prec 0$: *(S) est l'ensemble vide.*

4- La distance :

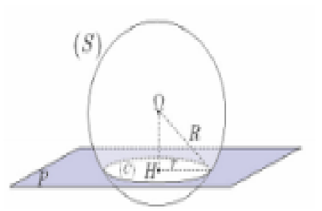
La distance entre deux points A et B est égale à : $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
La distance entre un point M et un plan (P) d'équation cartésienne : $ax+by+cz+d=0$ est : $d(M;(P))=\dfrac{\left\|ax_M+by_M+cz_M+d\right\|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
La distance entre un point M et une droite $\Delta(A;\vec{u})$ est : $d(M;(\Delta))=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$

5- Intersection d'une sphère et un plan :

Soit H la projection orthogonale du centre Ω sur le plan (P)

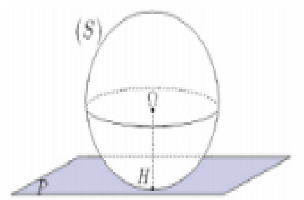
On pose : $d=\Omega H=d(\Omega;(P))$

$d\prec R$



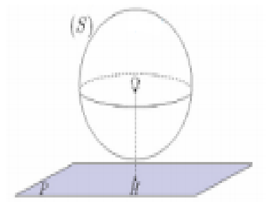
Le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (C) de centre H et de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}$

$d=R$



Le plan (P) est tangent à la sphère (S)

$d\succ R$

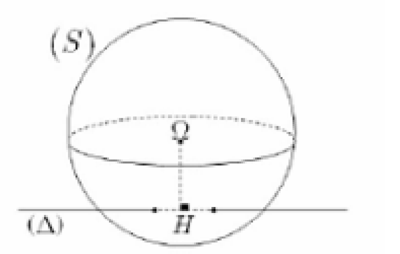
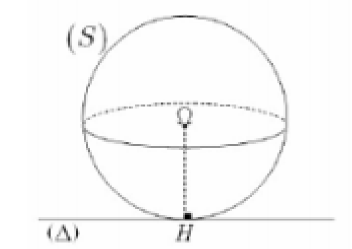
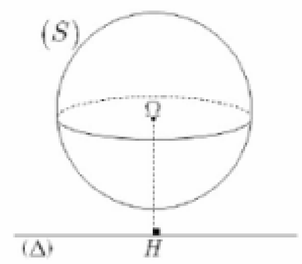


Le plan (P) ne coupe pas la sphère (S)

6- Intersection d'une sphère et une droite :

Soit H la projection orthogonale du centre Ω sur la droite (Δ)

On pose : $d = \Omega H = d(\Omega;(\Delta))$

$d \prec R$	$d = R$	$d \succ R$
		
La droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points différents	La droite (Δ) est tangente à la sphère (S)	La droite (Δ) ne coupe pas la sphère (S)

7- L'aire d'un triangle – l'aire d'un parallélogramme :

- ✓ ***Soit ABC un triangle, son aire est :*** $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$.
- ✓ ***Soit ABCD un parallélogramme, son aire est :*** $S_{ABCD} = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$.

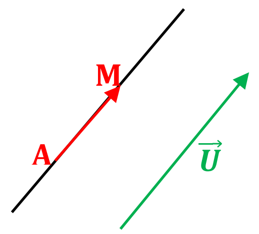
8- la représentation paramétrique d'une droite :

Soit une droite (D) passe par un point A tel que : $A(x_A, y_A, z_A)$

et de vecteur directeur $\vec{U}(a, b, c)$.

Soit l'ensemble des points $M(x\,, y, z)$ de la droite (D) qui vérifient

la relation : $\overrightarrow{AM} = k.\vec{U}$



$$\overrightarrow{AM} = k.\vec{U} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = a.k \\ y - y_A = b.k \\ z - z_A = c.k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + a.k \\ y = y_A + b.k \\ z = z_A + c.k \end{cases} \quad (k \in IR)$$ est une représentation paramétrique de la droite (D).