AREF : Fès - Meknès

Direction Provinciale : Fès

Lycée Youssef Bno Tachafine

Résumé Maths : 2 BAC SM BIOF

zhr.math@gmail.com Whatsapp : 06 06 39 22 82

Prof.

Karza Zouhair

version finale / 16 avril 2020

zouhairkarza

Limites et continuité

1 la continuité en un point.

Définition 1 :

soient f une fonction numérique définie sur un intervelle ouvert I et $a \in I$.
On dit f est continue en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Définition 2 :

soit f une fonction numérique définie sur un intervelle de type $[a, b]$.
$\star$ On dit que f est continue à droite en a si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
$\star$ On dit que f est continue à gauche en b si $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Proposition 3 :

$$f \text{ est continue en } a \Leftrightarrow f \text{ est continue à droite et à gauche en } a$$

Remarque 4 :

la partie entière n'est pas continue en tout n de $\mathbb{Z}$.

2 la continuité sur un intervalle.

Définition 5 :

$\star$ on dit que f est une fonction continue sur un intervelle ouvert I s'elle est continue en tout point de I.
$\star$ on dit que f est une fonction sur un intervelle $[a, b]$ s'elle est continue sur $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.

Remarques 6 :

$\star$ la partie entière est continue sur l'intervalle $[n, n+1[$ pour tout n de $\mathbb{Z}$.
$\star$ si f est continue sur un intervalle I alors elle est continue sur tout intervalle $J \subset I$.

Proposition 7 :

Les fonctions polynomiales, les fonctions rationnelles, les fonctions : $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur leur domaine de définition.

3 Les opérations sur les fonctions continues.

Proposition 8 :

soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\star$ les fonctions $f + g$, λf et $f \times g$ sont continues sur I .
$\star$ si de plus g ne s'annule pas sur I, alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I .

Proposition 9 :

$\star$ si f et g sont deux fonctions continues sur I et J respectivement avec $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est continue sur I.
$\star$ soient I un intervalle ouvert, $a \in I$, f une fonction définie sur I avec $\lim_{x \to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et g est une fonction continue sur J avec $f(I) \subset J$ alors $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = g(l)$.

4 L'image d'un intervalle par une fonction continue

Proposition 10 :

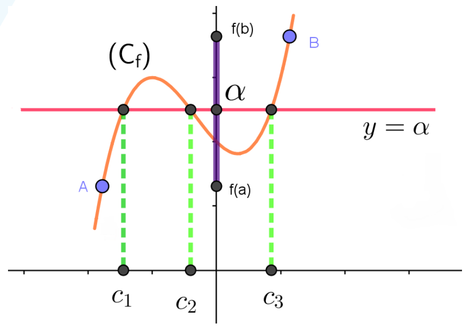
⋆ l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
⋆ l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

I	$f(I)$ si f est continue et str $\nearrow$	$f(I)$ si f est continue et str $\searrow$
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$]a,b]$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),f(b)]$	$[f(b),\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$[a,b[$	$[f(a),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),f(a)]$
$]a,b[$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$[a,+\infty[$	$[f(a),\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x),f(a)]$
$]a,+\infty[$	$]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x),\lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
$]-\infty,b]$	$]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x),f(b)]$	$[f(b),\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)[$
$]-\infty,b[$	$]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)[$
$]-\infty,+\infty[$	$]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x),\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x),\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)[$

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 11 :

soient f une fonction continue sur un intervalle I et $a,b\in I$.
Pour tout α compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un c compris entre a et b tel que $f(c)=\alpha$.
(autrement l'équation $f(x)=\alpha$ admet au moins une solution)



Corollaire 12 :

soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a,b]$.
Pour tout α compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un unique $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=\alpha$.
(autrement l'équation $f(x)=\alpha$ admet une unique solution sur $[a,b]$)

Corollaire 13 :

soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $f(a)\times f(b)<0$. Alors :
⋆ l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution $\alpha\in]a,b[$.
⋆ si de plus f est strictement monotone, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in]a,b[$.

La méthode de dichotomie :

Le but de cette méthode est d'approcher la solution d'une équation de type $f(x)=0$.
Si f est continue et strictement monotone sur $[a,b]$ telle que $f(a)\times f(b)<0$, alors $\exists!\alpha\in]a,b[/f(\alpha)=0$.
On a deux cas :

⋆ si $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\times f(b)<0$ alors $\alpha\in\left]\dfrac{a+b}{2},b\right[$.

⋆ si $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\times f(a)<0$ alors $\alpha\in\left]a,\dfrac{a+b}{2}\right[$.

On continue de cette manière jusqu'à l'encadrement demandé de α.

5 La fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone.

Définition 14 :

soient f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et $J = f(I)$.
La fonction qui lie chaque élèment y de J avec l'unique élèment x de I tel que $f(x) = y$ s'appelle la fonction réciproque de f notée f^{-1}.

Conséquences 15 :

soient f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et f^{-1} sa réciproque. On a :
$\star$ $\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in f(I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$ $\star$ $(\forall x \in I) : (f^{-1} \circ f)(x) = x$ $\star$ $(\forall x \in f(I)) : (f \circ f^{-1})(x) = x$

Proposition 16 :

soient f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et f^{-1} sa réciproque. On a :
$\star$ f^{-1} est continue sur $f(I)$.
$\star$ f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$ avec f et f^{-1} ont la même monotonie.
$\star$ $(C_{f^{-1}})$ est symetrique à (C_f) par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.

6 La fonction racine $n^{ième}$.

Proposition 17 :

soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Alors elle admet une fonction réciproque sera noté $\sqrt[n]{\ }$.

Conséquences 18 :

$$\star \quad \sqrt[n]{\ } : \begin{array}{lll} [0,+\infty[& \to & [0,+\infty[\\ x & \to & \sqrt[n]{x} \end{array}$$

$\star$ $(\forall x, y \in [0, +\infty[) : \quad \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$

$\star$ $(\forall x \in [0, +\infty[) : \quad (\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$

Définition 19 :

Si $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$, on pose

$$(\forall x \in]0, +\infty[) \ : \ x^r = \sqrt[q]{x^p}$$

Propriétés 20 :

$\star$ La fonction $x \mapsto x^r$ est continue sur $]0, +\infty[$, pour tout $r \in \mathbb{Q}$.
$\star$ pour tout $r, r' \in \mathbb{Q}$ et pour tout $x, y \in]0, +\infty[$ on a :

$$x^r > 0 \quad ; \quad x^{r+r'} = x^r \times x^{r'} \quad ; \quad x^{rr'} = (x^r)^{r'} \quad ; \quad \frac{1}{x^r} = x^{-r}$$

$$\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'} \quad ; \quad (xy)^r = x^r y^r \quad ; \quad \left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r} \quad ;$$

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} \qquad \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = \frac{x-y}{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{y^2})}$$

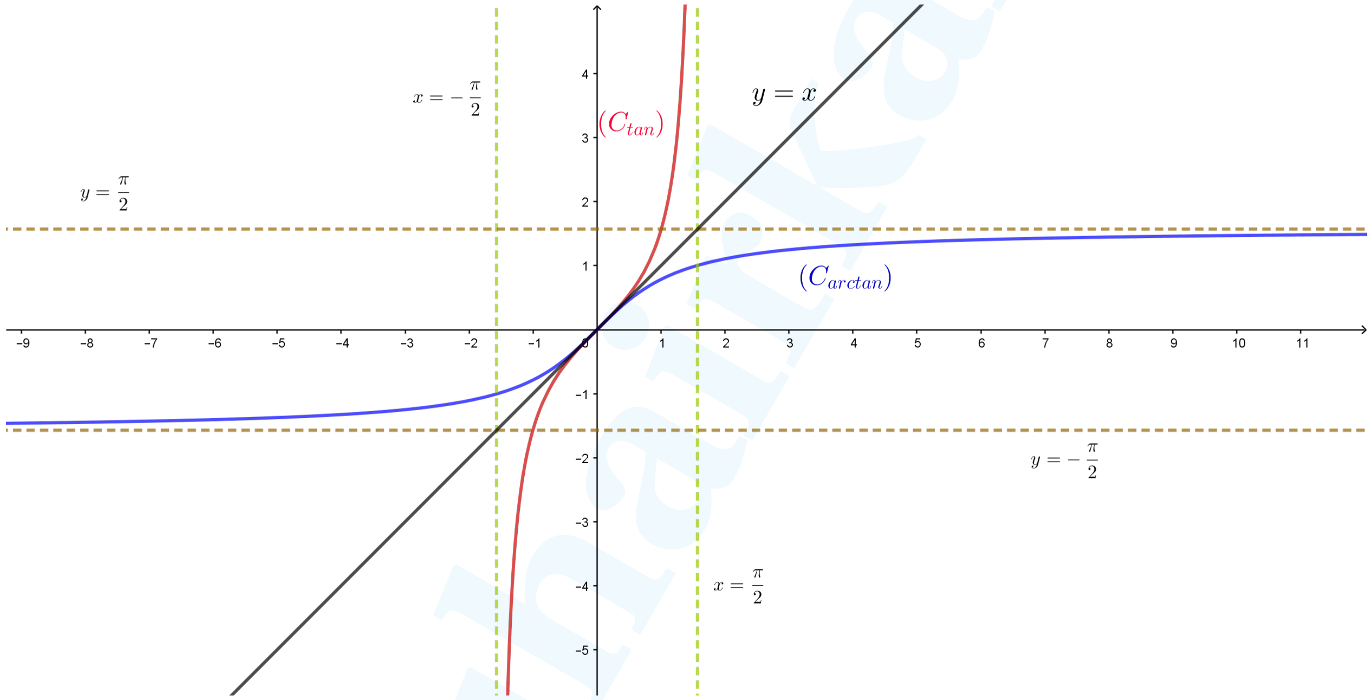
7 La fonction arctan.

Proposition 21 :

La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Alors elle admet une fonction réciproque sera noté arctan.

Propriétés 22 :

⋆ La fonction $x \mapsto \arctan(x)$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
⋆ $(\forall x \in \mathbb{R})$: $\tan(\arctan(x)) = x$
⋆ $\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$: $\arctan(\tan(x)) = x$
⋆ $(\forall x \in \mathbb{R}); \left(\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$: $\arctan(x) = y \Longleftrightarrow x = \tan(y)$
⋆ $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$
⋆ la courbe $(C_{\arctan})$:



Dérivabilité et étude de fonctions

1 Dérivabilite en un point et sur un intervalle

Définitions 23 :

Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et $a, b \in I$ tels que $a < b$.
⋆ On dit que f est dérivable au point a s'il existe un réel l tel que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$.
l s'appelle le nombre dérivé de f au point a et sera noté $f'(a)$. On écrit : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$.
⋆ On dit que f est <u>dérivable à droite</u> au point a s'il existe un réel l tel que $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$.
l s'appelle le nombre dérivé à droite de f au point a et sera noté $f'_d(a)$. On écrit : $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_d(a)$.
⋆ On dit que f est <u>dérivable à gauche</u> au point a s'il existe un réel l tel que $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$.
l s'appelle le nombre dérivé à gauche f au point a et sera noté $f'_g(a)$. On écrit : $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_g(a)$.
⋆ On dit que f est dérivable sur I s'elle est dérivable en tout point de I.
⋆ On dit que f est dérivable sur $[a, b]$ s'elle est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite de a et dérivable à gauche de b .

Proposition 24 :

$$f \text{ est dérivable au point } a \iff \begin{cases} f \text{ est dérivable à droite de } a \\ f \text{ est dérivable à gauche de } a \\ f'_d(a) = f'_g(a) \end{cases}$$

Conséquences 25 :

⋆ Si f est dérivable au point a alors (C_f) admet une tangente d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ au point $(a, f(a))$.
⋆ Si f est dérivable à droite au point a alors (C_f) admet une demi-tangente d'équation $\begin{cases} y = f'_d(a)(x - a) + f(a) \\ x \geqslant a \end{cases}$ au point $(a, f(a))$.
⋆ Si f est dérivable à gauche au point a alors (C_f) admet une demi-tangente d'équation $\begin{cases} y = f'_g(a)(x - a) + f(a) \\ x \leqslant a \end{cases}$ au point $(a, f(a))$.
⋆ Si f est dérivable au point a, la fonction g définie par $g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ est une approximation affine de f au voisinage de a et on a :

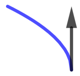
$$x \simeq a \Longrightarrow f(x) \simeq g(x)$$

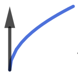
Exemple 26 :

$$f(x) = \sqrt{x}, \ a = 1 \Longrightarrow g(x) = \frac{x + 1}{2}$$
$$1,01 \simeq 1 \Longrightarrow f(1,01) \simeq g(1,01) \Longrightarrow \sqrt{1,01} \simeq 1,005$$

⋆ Si $\lim\limits_{x\to a^{\pm}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ alors (C_f) admet une demi-tangente verticale d'équation $x = a$.

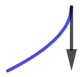
$\lim\limits_{x\to a^{-}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$

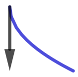




$\lim\limits_{x\to a^{+}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to a^{-}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$





$\lim\limits_{x\to a^{+}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$

2 Les opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 27 :

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors :
⋆ $f+g$ est dérivable sur I et on a : $(f+g)' = f' + g'$.
⋆ αf est dérivable sur I et on a : $(\alpha f)' = \alpha f'$.
⋆ Si de plus $g \neq 0$ sur I alors $\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$.
⋆ Si de plus $g \neq 0$ sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = -\dfrac{f'g - g'f}{g^2}$.

Proposition 28 :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I et J respectivement telles que $f(I) \subset J$, alors $f \circ g$ est dérivable et on a : $(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$.

Proposition 29 :

Soit f une fonction bijective et dérivable sur I telle que $f(I) = J$ alors sa réciproque f^{-1} est dérivable sur J et on a :

$$(\forall x \in J) \ : \ \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Conséquences 30 :

⋆ La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et on a :

$$(\forall x \in]0, +\infty[) : \ (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

⋆ Si $f > 0$ et dérivable sur I alors $\sqrt[n]{f}$ est dérivable sur I avec $n \in \mathbb{N}^*$ et on a :

$$\left(\sqrt[n]{f}\right)' = \frac{f'}{n\sqrt[n]{f^{n-1}}}$$

⋆ arctan est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et on :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ : \ \arctan'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

⋆ Si f est dérivable sur I alors $\arctan \circ f$ est dérivable sur I et on a : $(\arctan \circ f)' = \dfrac{f'}{1+f^2}$
⋆ Si $f > 0$ et dérivable sur I alors f^r est dérivable sur I avec $r \in \mathbb{Q}^*$ et on a : $(f^r)' = r f' f^{r-1}$

3 Théorème d'accroissements finies (TAF) - théorème de Rolle

Théorème 31 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$. On a :

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\end{cases} \overset{TAF}{\Longrightarrow} \quad (\exists c \in]a,b[) : \ f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

Théorème 32 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$. On a :

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ f(a) = f(b) \end{cases} \overset{Rolle}{\Longrightarrow} \quad (\exists c \in]a,b[) : \ f'(c) = 0$$

4 Les primitives d'une fonction

Définition 33 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle fonction primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $(\forall x \in I) : F'(x) = f(x)$.

Proposition 34 :

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
Les fonctions primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto F(X) + C$ où C est une constante réelle.

Proposition 35 :

Soient f une fonction définie sur un intervalle I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
Si f admet une fonction primitive sur I alors il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

Proposition 36 :

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}$.
Si F et G sont deux fonctions primitives de f et g respectivement sur I, alors $F + kG$ est une primitive de $f + kg$ sur I.

Tableau des primitives des fonctions usuelles

la fonction f	les primitives de f	intervalle
$x \mapsto k, \ k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto kx + c, \ c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n, \ n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \ c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{x} + c, \ c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}, \ n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$x \mapsto -\frac{1}{n-1}.\frac{1}{x^{n-1}} + c, \ c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c, \ c \in \mathbb{R}$	$]0, +\infty[$

la fonction f	les primitives de f	intervalle
$x \mapsto x^r,\ r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$	$x \mapsto \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$	$]0, +\infty[$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \tan(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \arctan(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Tableau des primitives et les opérations .

la fonction f définie sur I	une primitive de f sur I	conditions
$u' + v'$	$u + v$	
$u'v + v'u$	uv	
$\dfrac{u'v - v'u}{v^2}$	$\dfrac{u}{v}$	$v \neq 0$ sur I
$u'u^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	$u \neq 0$ sur I
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$\dfrac{u'}{(\sqrt[n]{u})^{n-1}},\ n \in \mathbb{N}^*$	$n\sqrt[n]{u}$	$u > 0$ sur I
$u'u^r,\ r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$	$\dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$u > 0$ sur I
$x \mapsto u'(ax+b),\ a \in \mathbb{R}^*\ et\ a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{a}u(ax+b)$	$]0, +\infty[$
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$	
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$	
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$	
$\dfrac{u'}{\cos^2(u)}$	$\tan(u)$	$u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi; \forall k \in \mathbb{Z}$

5 Les branches infinies

Les branches infinies

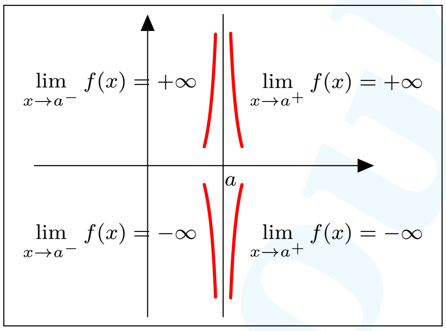
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \neq 0$
    - $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax) = b$: la droite $y = ax + b$ est une asymptote oblique
    - $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \infty$: (C_f) admet une branche parabolique suivant $(D) : y = ax$
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$: (C_f) admet une branche parabolique suivant (OX)
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$: (C_f) admet une branche parabolique suivant (OY)
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \beta$: la droite $x = \beta$ est une asymptote horizontale
- $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \infty$: la droite $x = \alpha$ est une asymptote verticale

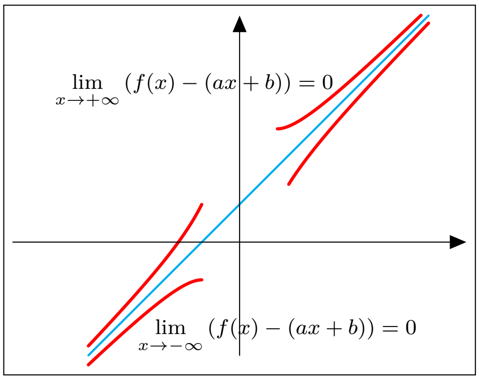
La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $\pm\infty$ $\iff \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$

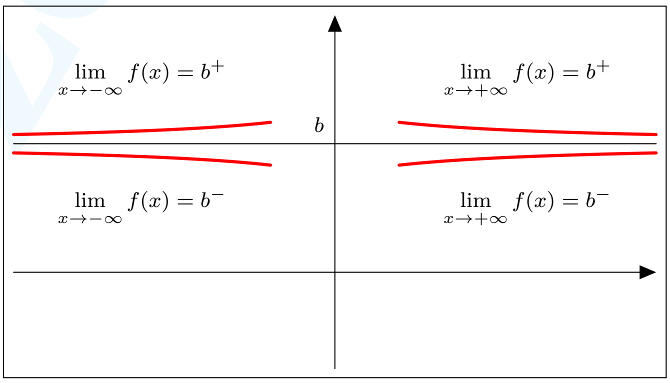
Attention ⚠

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty \not\Rightarrow$ (C_f) admet une branche parabolique suivant La droite d'équation $y = ax$ au voisinage de $\pm\infty$

Asymptotes :

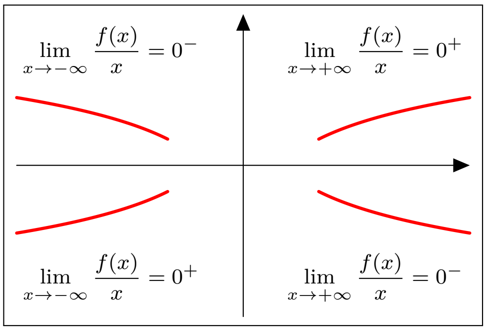


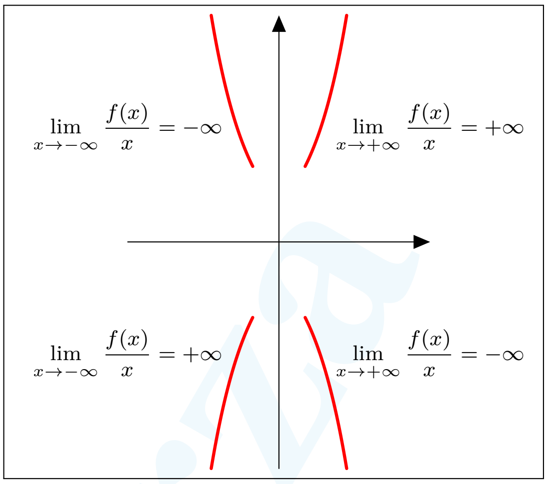


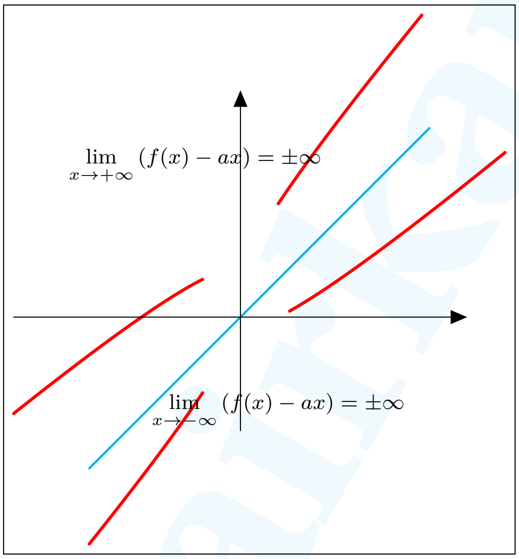


zouhairkarza

Les branches paraboliques :







6 Concavité

x		a	
f''	$-$	0	$+$
(C_f)	concave		convexe

x		a	
f''	$+$	0	$-$
(C_f)	convexe		concave

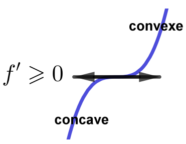
$M(a,f(a))$ est un point d'inflexion

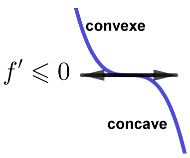
Proposition 37 :

Si f'' s'annule en a de I et change de signes au voisinage de a, alors le point $A(a,f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f).

Proposition 38 :

Si f' s'annule en a de I et ne change pas de signes au voisinage de a, alors le point $A(a,f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f).





7 Parité - symétrie - périodicité

Parité - periodicité :

type de f	définition	conséquences
f est paire	$(\forall x \in D_f) : \begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$	$\star$ il suffit de l'étudier sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ $\star$ (C_f) est symetrique par % à (OY)
f est impaire	$(\forall x \in D_f) : \begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$	$\star$ il suffit de l'étudier sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ $\star$ (C_f) est symetrique par % à O
f est périodique de période T $(T > 0)$	$(\forall x \in D_f) : \begin{cases} x + T \in D_f \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$	il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur T

Symetrie :

propriètè	équivalent à	conséquences
la droite $x = a$ est un axe de symetrie de (C_f)	$(\forall x \in D_f) : \begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a-x) = f(x) \end{cases}$	il suffit de l'étudier sur $D_f \cap [a, +\infty[$
la point $\Omega(a,b)$ est un centre de symetrie de (C_f)	$(\forall x \in D_f) : \begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a-x) = 2b - f(x) \end{cases}$	il suffit de l'étudier sur $D_f \cap [a, +\infty[$

zouhairkarza

Les suites numériques

1 La suite majorée, minorée et bornée

Définition 39 :

⋆ On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est majorée s'il existe un réel M tel que $(\forall n \geqslant n_0) : U_n \leqslant M$.
⋆ On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est minorée s'il existe un réel m tel que $(\forall n \geqslant n_0) : U_n \geqslant m$.
⋆ On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est bornée s'il existe un réel positif C tel que $(\forall n \geqslant n_0) : |U_n| \leqslant C$.
(ie. la suite est majorée et minorée à la fois)

Remarques 40 :

⋆ Toute suite positive est minorée par 0.
⋆ Toute suite négative est majorée par 0.

2 La suite monotone

Définition 41 :

On dit qu'une suite est monotone s'elle est croissante ou décroissante.

Proposition 42 :

⋆ $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} \geqslant U_n$ $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} - U_n \geqslant 0$.
⋆ $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est strictement croissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} > U_n$ $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} - U_n > 0$.
⋆ $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} \leqslant U_n$ $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} - U_n \leqslant 0$.
⋆ $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est strictement décroissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} < U_n$ $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} - U_n < 0$.
⋆ $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est constante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} = U_n$.

Remarques 43 :

⋆ Une suite croissante est minorée par son premier terme.(ie. $(\forall n \geqslant n_0) : U_n \geqslant U_{n_0}$)
⋆ Une suite décroissante est majorée par son premier terme.(ie. $(\forall n \geqslant n_0) : U_n \leqslant U_{n_0}$)

3 La suite arithmétique - la suite géométrique

	une suite arithmétique	une suite géométrique
définition	$(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} = U_n + r$	$(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} = qU_n$
terme général	$(\forall n \geqslant n_0) : U_n = U_p + (n-p)r$	$(\forall n \geqslant n_0) : U_n = U_p \times q^{n-p}$
la somme $S_n = U_p + ... + U_n$	$S_n = \left(\dfrac{n-p+1}{2}\right)(U_p + U_n)$	$S_n = \left(\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)\times U_p\ ;(q \neq 1)$

Exemple 44 :

⋆ $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ⋆ $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$

4 Limite d'une suite

Définition 45 :

$\star$ On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est convergente s'elle admet une limite finie l qd $n \longrightarrow +\infty$ et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$

$\star$ On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est divergente s'elle n'est pas convergente.

Proposition 46 :

Soit $r \in \mathbb{Q}^*$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} n^r = \begin{cases} +\infty & si\ r > 0 \\ 0 & si\ r < 0 \end{cases}$$

Critères de convergence :

$\star$ Toute suite croissante et majorée est convergente.

$\star$ Toute suite décroissante et minorée est convergente.

$\star$ $\begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : |U_n - l| \leqslant V_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0 \end{cases} \Longrightarrow (U_n)_{n\geqslant n_0}\ est\ convergente\ et\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$

$\star$ $\begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : W_n \leqslant U_n \leqslant V_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = l \end{cases} \Longrightarrow (U_n)_{n\geqslant n_0}\ est\ convergente\ et\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$

$\star$ $\begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : U_n \leqslant V_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty\ et\ (U_n)_{n\geqslant n_0}\ est\ divergente$

$\star$ $\begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : W_n \leqslant U_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty\ et\ (U_n)_{n\geqslant n_0}\ est\ divergente$

Ordre et convergence :

$\star$ $\begin{cases} (\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant k) :\ U_n \geqslant 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \end{cases} \Longrightarrow l \geqslant 0$ $\star$ $\begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : U_n \leqslant V_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l\ et\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l' \end{cases} \Longrightarrow l \leqslant l'$

Suites de type $f(U_n) = U_{n+1}$:

$$\begin{cases} f\ est\ continue\ sur\ un\ intervale\ fermé\ I \\ f(I) \subset I \\ U_{n_0} \in I \\ (U_n)_{n\geqslant n_0}\ est\ convergente \\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \end{cases} \Longrightarrow l\ est\ une\ solution\ de\ l'équation\ f(x) = x\ sur\ I$$

Les suites adjascentes :

Définition 47 :

On dit $(U_n)_{n\geqslant p}$ et $(V_n)_{n\geqslant q}$ sont deux suites adjacentes si :

$\star$ $(U_n)_{n\geqslant p}$ est croissante et $(V_n)_{n\geqslant q}$ est décroissante. $\star$ $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n - V_n) = 0$

Proposition 48 :

$(U_n)_{n\geqslant p}$ et $(V_n)_{n\geqslant q}$ sont deux suites adjacentes $\Longrightarrow$ elles sont convergentes et ont la même limite.

Les fonctions logarithmiques

1 Le logarithme népérien

Définition 49 :

Le logarithme népérien est la primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et qui s'annule en 1.
On la note ln.

Conséquences 50 :

$\star$ Le domaine de définition de ln est $]0,+\infty[$.
$\star$ $\ln(1) = 0$.
$\star$ ln est une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a : $\quad (\forall x \in]0,+\infty[) \;:\; \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$
$\star$ ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
$\star$ Pour tous a et b de $]0,+\infty[$: $\quad a < b \Longleftrightarrow \ln(a) < \ln(b) \quad \ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b.$
$\star$ $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1 \quad \ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$

Une propriètè fondamentale :
Pour tous a et b de $]0,+\infty[$: $\quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$

Proposition 51 :

Pour tous a et b de $]0,+\infty[$ et r de $\mathbb{Q}$ on a :
$\star$ $\ln(\dfrac{1}{a}) = -\ln(a)$ $\quad\star$ $\ln(\dfrac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$
$\star$ $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$ $\quad\star$ $\ln(a^r) = r\ln(a)$

Proposition 52 :

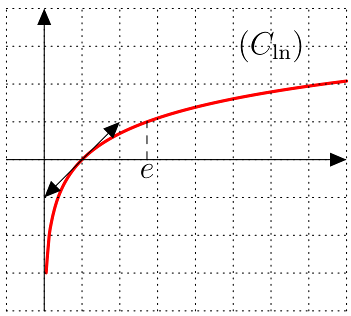
$\star$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ $\quad\star$ $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$ $\quad\star$ $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$
$\star$ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\quad\star$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ $\quad\star$ $\lim\limits_{x\to0^+} x.\ln(x) = 0$
$\star$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$ $\quad\star$ $\lim\limits_{x\to0^+} x^n.\ln(x) = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

Proposition 53 :

L'équation $\ln(x) = 1$ admet une unique solution noté e telle que $e = 2,718....$

T.v et $(C_{\ln})$:

x	0	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	‖	$+$
ln	‖ $-\infty$	↗ $+\infty$



zouhair karza

2 La dérivée logarithmique d'une fonction

Définition 54 :

Soit u une fonction dérivable et ne s'annule jamais sur un intervalle I.
La fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ s'appelle La dérivée logarithmique de u sur I.

Proposition 55 :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I telle qu'elle ne s'annule jamais sur I, alors la fonction $f : x \mapsto \ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I et sa dérivée est La dérivée logarithmique de u.

càd $$(\forall x \in I) \ : \ f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Proposition 56 :

Soit u une fonction dérivable et ne s'annule jamais sur un intervalle I.
Les fonctions primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto \ln(|u(x)|) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

3 Le logarithme à base a $(a > 0eta \neq 1)$

Définition 57 :

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.
Le logarithme à base a est la fonction noté $\log_a$ et définie sur $]0, +\infty[$ par : $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.
Si $a = 10$ on note $\log_{10} = \log$.

Conséquences 58 :

$\log_a(a) = 1$ $\qquad$ $\log_a(e) = \dfrac{1}{\ln(a)}$ $\qquad$ $\log_a(1) = 0$ $\qquad$ $\log_e = \ln$

Proposition 59 :

Soient $x, y \in]0, +\infty[$ et $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On a :

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad ; \quad \log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \quad ; \quad \log_a(x^r) = r\log_a(x) \ , \ (\forall r \in \mathbb{Q})$$

Proposition 60 :

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, la fonction $\log_a$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$(\forall x \in]0, +\infty[) \ : \ \log_a'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$$

$0 < a < 1$

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$\log_a'$	$-$
$\log_a$	$+\infty \searrow -\infty$

$a > 1$

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$\log_a'$	$+$
$\log_a$	$-\infty \nearrow +\infty$

zouhairkarza

Les fonctions exponentielles

1 La fonction exponentielle népérienne

Définition 61 :

La réciproque de la fonction ln s'appelle La fonction exponentielle népérienne notée exp : $\mathbb{R} \to]0, +\infty[$.

Autre expression de exp :

Soient $r \in \mathbb{Q}$ et $a \in]0, +\infty[$, On a : $\exp(r) = a \Leftrightarrow r = \ln(a) \Leftrightarrow \ln(e^r) = \ln(a) \Leftrightarrow a = e^r$.
Donc $\exp(r) = e^r$ pour tout r de $\mathbb{Q}$. On prolonge cette expression à $\mathbb{R}$ et on aura :

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}) \ : \ \exp(x) = e^x}$$

Propriétés 62 :

⋆ La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
⋆ $e^1 = e$ $\qquad e^0 = 1$ $\qquad e^x > 0 \ , \ (\forall x \in \mathbb{R})$.
⋆ $(\forall x \in \mathbb{R}) : \ln(e^x) = x$ $\qquad (\forall x \in]0, +\infty[) : e^{\ln(x)} = x$
⋆ $\begin{cases} e^x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ y \in]0, +\infty[\end{cases}$
⋆ Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$, on a :

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y \qquad e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$$

$$e^x \times e^y = e^{x+y} \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \qquad e^{rx} = (e^x)^r$$

⋆ Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a \in]0, +\infty[$, on a :

$$e^x > a \Leftrightarrow x > \ln(a) \qquad e^x < a \Leftrightarrow x < \ln(a)$$

Proposition 63 :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \ , \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

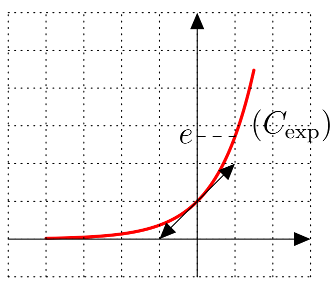
$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} x e^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} x^n e^x = 0 \ , \ (\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Proposition 64 :

⋆ La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)' = e^x$, $(\forall x \in \mathbb{R})$.
⋆ Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a : $(e^u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}$, $(\forall x \in I)$.

T.v et $(C_{\exp})$:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
e^x	$+$
e^x	$0 \nearrow +\infty$



zouhairkarza

2 L'exponentielle à base a ($a > 0 eta \neq 1$)

Définition 65 :

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.
L'exponentielle à base a est la fonction $\exp_a \; : \; x \mapsto e^{x\ln(a)} = a^x$ et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \; : \; \exp_a(x) = e^{x\ln(a)} = a^x$$

Propriétés 66 :

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On a :

$\star$ $\quad a^x \times a^y = a^{x+y} \qquad a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} \qquad \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad a^{xy} = (a^x)^y \qquad a^x = e^y \Leftrightarrow x = y$

$\star$ La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) \; : \; (a^x)' = \ln(a)a^x$.

$\star$ $\begin{cases} a^x < a^y \Leftrightarrow x > y & , 0 < a < 1 \\ a^x < a^y \Leftrightarrow x < y & , a > 1 \end{cases}$

$\star$

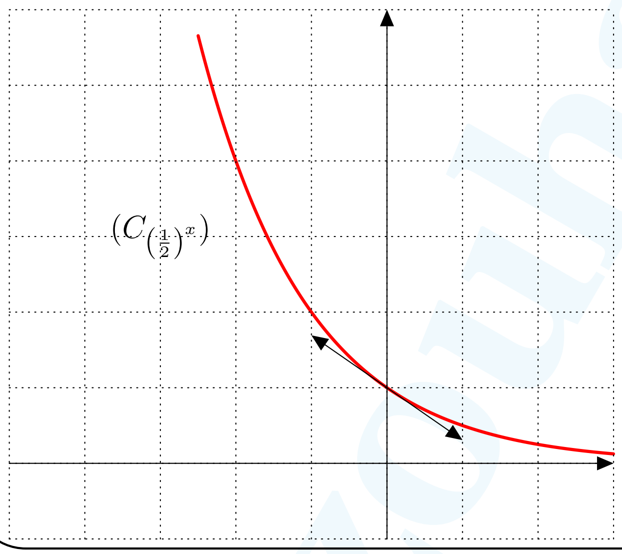
$0 < a < 1$

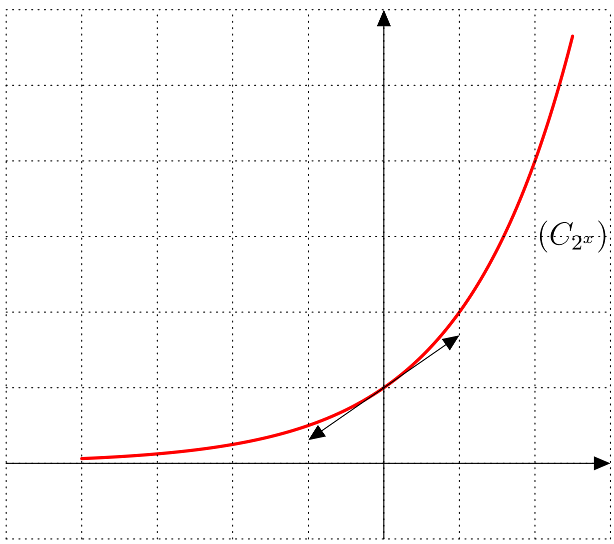
x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\ln(a)a^x$	$-$
a^x	$+\infty \searrow 0$

$a > 1$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\ln(a)a^x$	$+$
a^x	$0 \nearrow +\infty$

$a = \dfrac{1}{2}$ $\qquad\qquad$ $a = 2$





zouhairkarza

Les nombres complexes

1 L'ensemble des nombres complexes

L'équation $x^2 = -1$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$. On imagine qu'il existe un nombre imaginaire noté i, solution de cette équation.
On va construire un ensemble noté $\mathbb{C}$ plus grand que $\mathbb{R}$ qu'est engendré par le couple $(1, i)$ (càd. tout élèment de $\mathbb{C}$ est combinaison linéaire de 1 et i à coefficients dans $\mathbb{R}$).

Définition 67 :

L'ensemble $\mathbb{C}$ est définie par : $\mathbb{C} = \{z = a + ib/(a, b) \in \mathbb{R}^2 \; et \; i^2 = -1\}$.
⋆ $a + ib$ s'appelle l'écriture algébrique (unique pour tout élèment de $\mathbb{C}$) de z.
⋆ a s'appelle la partie réelle de z sera notée $\mathfrak{Re}(z)$.
⋆ b s'appelle la partie imaginaire de z sera notée $\mathfrak{Im}(z)$.
⋆ L'ensemble des nombres imaginaires pures sera noté $i\mathbb{R}$.

Proposition 68 :

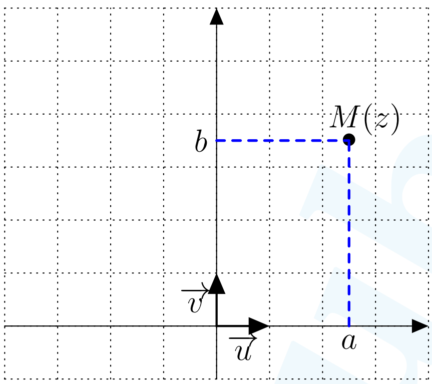
Soient $z, z' \in \mathbb{C}$:

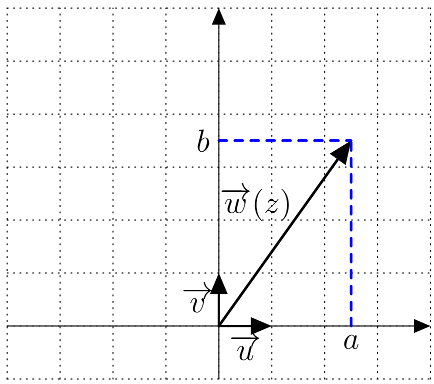
$$z = z' \iff \mathfrak{Re}(z) = \mathfrak{Re}(z') \; et \; \mathfrak{Im}(z) = \mathfrak{Im}(z')$$

$$z \in \mathbb{R} \iff \mathfrak{Im}(z) = 0 \qquad\qquad z \in i\mathbb{R} \iff \mathfrak{Re}(z) = 0$$

La représentation graphique d'un nombre complexe :

Le plan (P)(appelé après le plan complexe) minue d'un repère orthonormé directe $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
⋆ Tout point $M(a, b)$ du plan (P) est une image d'un unique nombre complexe $z = a + ib$, on écrit $M(z)$. De plus z s'appelle l'affixe de M et on écrit $z = aff(M)$.
⋆ Tout vecteur $\overrightarrow{w}(a, b)$ du plan (P) est une image d'un unique nombre complexe $z = a + ib$, on écrit $\overrightarrow{w}(z)$. De plus z s'appelle l'affixe de $\overrightarrow{w}$ et on écrit $z = aff(\overrightarrow{w})$.





Conséquences 69 :

⋆ Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses appelé l'axe réel.
⋆ Les nombres imaginaires pures sont les affixes des points de l'axe des ordonnés appelé l'axe imaginaire.

Proposition 70 :

Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $\overrightarrow{w}(z_{\overrightarrow{w}})$, $\overrightarrow{t}(z_{\overrightarrow{t}})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$aff(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A \quad ; \quad aff(\overrightarrow{w} + \overrightarrow{t}) = aff(\overrightarrow{w}) + aff(\overrightarrow{t}) \quad ; \quad aff(\alpha\overrightarrow{w}) = \alpha.aff(\overrightarrow{w})$$

Proposition 71 :

Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $I(z_I)$ telle que I est le milieu de $[AB]$. On a :
⋆ $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$ ⋆ Si A, B et C sont distincts, alors : A, B et C sont rectilignes $\Leftrightarrow \dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$

2 Conjugué d'un nombre complexe - module d'un nombre complexe

Définition 72 :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe tel que $a, b \in \mathbb{R}$. Le conjugué de z est le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.

Proposition 73 :

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$\star$ $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et en général : $\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}$. $\star$ $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ et en général : $\overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}$.

$\star$ Si $z' \neq 0$, alors $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$. $\star$ $\overline{(z^n)} = \overline{z}^n$.

Conséquences 74 :

Soit $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$z + \overline{z} = 2\Re e(z) \quad ; \quad z - \overline{z} = 2i\Im m(z) \quad ; \quad \overline{\overline{z}} = z \quad ; \quad \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$$
$$; \quad z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z \quad ; \quad z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z \quad ;$$

Définition 75 :

Le plan complexe minue d'un repère orthonormé directe $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Soit $M(z)$ un point du plan complexe tel que $z = a + ib$ et $a, b \in \mathbb{R}$.
Le module du nombre complexe z est la distance OM sera noté $|z|$ et on a : $OM = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Proposition 76 :

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$\star$ $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ et en général : $\left|\prod_{k=1}^{n} z_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |z_k|$.

$\star$ Si $z' \neq 0$, alors $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$ et $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$. $\star$ $|z^n| = |z|^n$. $\star$ $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

Conséquences 77 :

$\star$ $z\overline{z} = |z|^2$ $\star$ $|\overline{z}| = |-z| = |z|$ $\star$ $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ $\star$ $z = z' \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} |z| = |z'|$.

$\star$ Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ du plan complexe, on a : $AB = |z_B - z_A|$.

3 L'argument et la forme trigonomètrique d'un nombre complexe

Définition 78 :

Soit $M(z)$ dans le plan complexe, minue d'un repère orthonormé directe $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, tel que $z \neq 0$.

On appelle argument de z qu'on note $arg(z)$ toute mesure de l'angle orientée $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}})$ en radian et on écrit $arg(z) \equiv \overline{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})}[2\pi]$.

Remarque 79 :

0 est le seul nombre complexe qui n'a pas d'argument.

Proposition 80 :

Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$\star$ $arg(zz') \equiv arg(z) + arg(z')[2\pi]$ et en général : $arg\left(\prod_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} arg(z_k)$.

$\star$ $arg\left(\frac{1}{z'}\right) \equiv -arg(z')[2\pi]$ $\star$ $arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv arg(z) - arg(z')[2\pi]$ $\star$ $arg\,(z^n) \equiv n\; arg(z)[2\pi]$

Proposition 81 :

Soient $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ et $D(d)$ des points du plan complexe $C \neq D$ on a :

$\star$ Si $A \neq B$ on a : $\overline{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB})} \equiv arg(b-a)[2\pi]$.

$\star$ Si $A \neq B$ et $A \neq C$ on a : $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \equiv arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$.

$\star$ Si $A \neq B$ et $C \neq D$ on a : $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})} \equiv arg\left(\dfrac{d-c}{b-a}\right)[2\pi]$.

Remarques 82 :

$\star$ $(\forall z \in \mathbb{R}_+^*)$: $arg(z) \equiv 0[2\pi]$. $\star$ $(\forall z \in \mathbb{R}_-^*)$: $arg(z) \equiv \pi[2\pi]$.

$\star$ $(\forall z \in i\mathbb{R}_+^*)$: $arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. $\star$ $(\forall z \in i\mathbb{R}_-^*)$: $arg(z) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

Proposition 83 :

Tout nombre complexe non nul $z = a+ib$ s'écrit sous la forme $z = r[\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)]$ où $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\cos(\alpha) = \dfrac{a}{r}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{b}{r}$.

Définition 84 :

L'écriture $z = r[\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)]$ s'appelle la forme trigonomètrique du nombre complexe z et on note $z = [r, \alpha]$.
(ie. tout nombre complexe non nul est bien déterminé par son module et son argument)

Proposition 85 :

Soient $z = [r, \alpha]$ et $z = [r', \alpha']$ de $\mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$-z = [r, \alpha+\pi] \quad ; \quad \overline{z} = [r, -\alpha] \quad ; \quad zz' = [rr', \alpha+\alpha'] \quad ; \quad \frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r}, -\alpha\right]$$

$$\frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}, \alpha-\alpha'\right] \quad ; \quad z^n = [r^n, n\times\alpha]$$

La formule de Moivre

Pour tout couple $(n, \alpha) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}$ on a : $(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$.

Remarque 86 :

La formule de Moivre sert à calculer $\cos(n\alpha)$ et $\sin(n\alpha)$ en fonction de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.

4 La notation exponentielle d'un nombre complexe non nul.

Définition 87 :

$\star$ Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on note par $e^{i\alpha}$ le nombre complexe $\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$ et on écrit $\cos(\alpha)+i\sin(\alpha) = e^{i\alpha}$.
$\star$ Pour tout nombre complexe non nul z, on appelle la notation exponentielle la notation $re^{i\alpha}$ où $z = [r, \alpha]$ et on écrit $z = re^{i\alpha}$.

Proposition 88 :

Pour tous $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$\star$ $\overline{e^{i\alpha}} = e^{-i\alpha}$ $\star$ $(e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha}$ $\star$ $e^{i\alpha}e^{i\alpha'} = e^{i(\alpha+\alpha')}$ $\star$ $\dfrac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha'}} = e^{i(\alpha-\alpha')}$

Proposition 89 :

Les formules d'Euler : $\boxed{\cos(\alpha) = \dfrac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}}$ et $\boxed{\sin(\alpha) = \dfrac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}}$

Remarque 90 :

On utilise les formules d'Euler dans la linéarisation de $\cos^n(x)$ ou $\sin^n(x)$ ou $\cos^n(x)\sin^m(x)$. Càd les transformées en somme des termes de types $a\cos(kx) + b\sin(kx)$ en développant $\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n$ ou $\left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^n$.

Exemples 91 :

$$\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x) \qquad \sin^4(x) = \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$$

5 Les racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul.

Définition 92 :

Soient u un nombre complexe non nul et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
On dit que le nombre complexe z est une racine n-ième (ou racine d'ordre n) du nombre complexe u si $z^n = u$.

Proposition 93 :

Tout nombre complexe non nul $z = re^{i\alpha}$ tel que $r > 0$, admet n racines n-ièmes qui sont :

$$z_k = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \quad , \qquad k \in \{0, 1, ..., n-1\}$$

Proposition 94 :

La somme des racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul est nulle. $\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} = 0\right)$

Conséquences 95 :

⋆ Les racines n-ièmes de l'unité sont : $u_k = e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$
⋆ Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées.
⋆ Les racines cubiques de l'unité sont : 1, $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{j}$.
⋆ Les racines 4-ièmes de l'unité sont 1, -1, i et $-i$.

Proposition 96 :

$$1 + j + j^2 = 0 \quad ; \quad \overline{j} = j^2 \quad ; \quad j^3 = (\overline{j})^3 = 1 \quad ; \quad j\overline{j} = 1$$

Proposition 97 :

Toute équation $az^2 + bz + c = 0$ tels que $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$ admet :
⋆ une solution double $z = -\dfrac{b}{2a}$ si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.
⋆ deux solutions différentes $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ si $\Delta \neq 0$ avec δ est une racine carrée de Δ.

Conséquences 98 :

Si z_1 et z_2 sont les deux solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ $(a \neq 0)$ alors :
⋆ $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$ pour tout z de $\mathbb{C}$.
⋆ $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.

zouhair karza

6 Les transformations dans le plan et les nombres complexes .

$M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par une transformation dans le plan.

Nature de la transformation	Définition	Description complexe
une translation du vecteur $\overrightarrow{u}(b)$	$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$	$z' = z + b$
une homothétie de centre $\Omega(w)$ et de rapport k	$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$z' = k(z-w)+w$
une rotation de centre $\Omega(w)$ et d'angle θ $(M \neq \Omega)$	$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \overline{(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})} \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$	$\begin{cases} \lvert z'-w \rvert = \lvert z-w \rvert \\ arg\left(\dfrac{z'-w}{z-w}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$ $\Leftrightarrow z' = e^{i\theta}(z-w)+w$

zouhairkarza

Les équations différentielles

1 L'équation $y' = ay + b$

L'équation différentielle sans ou avec une condition initiale	La solution générale
$y' = ay \,;\, a \neq 0$	$y(x) = ce^{ax} \,;\, c \in \mathbb{R}$
$\begin{cases} y' = ay \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} ; a \neq 0$	$y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$
$y' = ay + b \,;\, a \neq 0$	$y(x) = ce^{ax} - \dfrac{b}{a} \,;\, c \in \mathbb{R}$
$\begin{cases} y' = ay + b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} ; a \neq 0$	$y(x) = \left(y_0 + \dfrac{b}{a}\right) e^{a(x-x_0)} - \dfrac{b}{a}$

2 L'équation $y'' + ay' + by = 0$

L'équation différentielle	L'équation caractéristique	cas	Solutions de l'éq.car	La solution génarale de l'équation différentielle
$y'' + ay' + by = 0$	$r^2 + ar + b = 0$	$\Delta > 0$	deux solutions réelles différentes r_1 et r_2	$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ telle que $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
		$\Delta = 0$	une solution réelle double r	$y(x) = (C_1 x + C_2)e^{rx}$ telle que $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
		$\Delta < 0$	deux solutions complexes conjuguées $r_1 = p + iq$ et $r_2 = p - iq$	$y(x) = (C_1 \cos(qx) + C_2 \sin(qx))e^{px}$ telle que $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Calcul intégral

1 L'intégrale d'une fonction continue sur un segment

Définition 99 :

Soient f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et F sa primitive sur $[a,b]$.
Le nombre $F(b)-F(a)$ s'appelle l'intégrale de f de a à b noté $\int_a^b f(x)dx$ et se lit " l'intégrale de a à b de $f(x)dx$ ".

Notation 100 :

Le nombre $\int_a^b f(x)dx$ s'écrit aussi $[F(x)]_a^b$ et on a : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$.

Remarque 101 :

Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$, on peut remplacer la variable x par t, s, ... donc :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(s)ds = ...$$

Conséquences 102 :

Si f est continue sur $[a,b]$ alors : $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ et $\int_a^a f(x)dx = 0$.

2 Relation de Chasles - la linéarité de l'intégrale

Proposition 103 :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a,b et c de I et $k \in \mathbb{R}$.

$\star$ La relaion de Chasles : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

$\star$ La linéarité de l'intégrale : $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ et $\int_a^b (kf)(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

3 Intégrale et ordre

Proposition 104 :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $a$et b de I tels que $a \leqslant b$.

$\star$ Si f est positive sur $[a,b]$ alors : $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.

$\star$ Si $g(x) \leqslant f(x)$ pour tout x de $[a,b]$ alors : $\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)dx$.

$\star$ $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$.

$\star$ $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$ avec $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$.

4 La valeur moyenne

Proposition & Définition 105 :

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $a$et b de I tels que $a < b$.

⋆ Il existe au moins un c de $[a, b]$ tel que : $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx.$

⋆ Le nombre $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ s'appelle la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a, b]$.

Remarque 106 :

$f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ n'est que le T.A.F appliqué à F (primitive de f) exprimé à l'aide d'une intégrale.

5 Techniques de calcul intégral

1- Calcul direct : se fait par trouver une primitive de la fonction à intégrer sur l'intervalle I .

Exemples 107 :

$\displaystyle\int_1^5 kdx = \int_1^5 (kx)'dx = [kx]_1^5 = 5k - k = 4k\,;\, \forall k \in \mathbb{R}$

$\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}dx = \int_1^e \ln'(x)dx = [\ln(x)]_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1$

2- L'intégration par partie :

Proposition & Définition 108 :

Soient f et g deux fonctions dérivables et leurs dérivées sont continues sur un intervalle $[a, b]$. Alors on a :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

l'utilisation de cette relation s'appelle la technique d'intégration par partie.

Exemple 109 :

$\displaystyle\int_1^e \ln(x)dx = \int_1^e (x)'\ln(x)dx = [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e x\times\frac{1}{x}dx = e - (e-1) = 1.$

3- Changement de variables :

Proposition 110 :

Soit g une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que g' une continue sur $[a, b]$. Soit f une fonction continue sur $g([a, b])$. Alors :

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt.$$

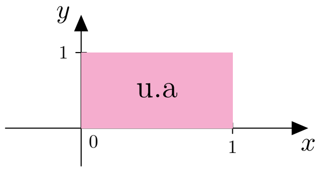
Exemple 111 :

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx \overset{t=\sqrt{x}}{=\!=\!=} \int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{2}} \frac{t}{t^2+1}.2tdt = 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2}{t^2+1}dt = 2\int_1^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt = \ldots$$

6 Calcul des aires et volumes

1- Calcul des aires.

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
L'unité de l'aire est $u.a = ||\vec{i}|| \times ||\vec{j}||$.



Proposition 112 :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et (C_f) sa courbe. L'aire comprise entre (C_f) , (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathscr{A}(f, a, b) = \left(\int_a^b |f(x)|dx\right) u.a.$$

Remarque 113 :

(1) Si f est positive sur $[a, b]$, alors $\mathscr{A}(f, a, b) = \left(\int_a^b f(x)dx\right) u.a.$

(2) Si f est négative sur $[a, b]$, alors $\mathscr{A}(f, a, b) = -\left(\int_a^b f(x)dx\right) u.a.$

(3) Si f change de signe sur $[a, b]$, alors on utilise la relation de Chasles pour calculer $\mathscr{A}(f, a, b)$.

Proposition 114 :

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et (C_f) et (C_g) leurs courbes. L'aire comprise entre (C_f) , (C_g) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathscr{A}(f, g, a, b) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|dx\right) u.a$$

2- Calcul des volumes.

L'espace est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
L'unité de volume est $u.v = ||\vec{i}|| \times ||\vec{j}|| \times ||\vec{k}||$.

Proposition 115 :

Soient un solide compris entre deux plans paralèlles d'équations $z = a$ et $z = b$.
On note par $S(t)$ l'aire d'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $z = t$ (la section du solide par dans le plan d'équation $z = t$).
Si la fonction $t \mapsto S(t)$ est continue sur l'intervalle $[a; b]$, alors le volume V du solide , en u.v. est donné par :

$$V = \int_a^b S(t)dt.$$

Proposition 116 :

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$, et (C_f) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.On note D le domaine limité par (C_f), l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
Alors le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de D autour de l'axe (Ox) est

$$V = \pi \left(\int_a^b (f(t))^2 dt\right) u.v.$$

7 Calcul de quelques limites des suites à l'aide d'une intégrale

Théorème 117 :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right).$$

Si f est strictement monotone sur $[a;b]$ ou f est dérivable et f' est bornée $[a;b]$, alors les suites (s_n) et (S_n) convergent et admettent $\int_a^b f(x)dx$ comme limite commune.

Exemple 118 :

Soit $(u_n)_{n>0}$ la suite définie par : $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-0}{n}\sum_{i=1}^{i=n} f\left(0 + i\frac{1-0}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt = \ln(2),$$

avec $f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ qu'est strictement décroissante sur $[0;1]$.

zouhairkarza

L'arithmétique

1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Définition 119 :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.
On dit que b divise a et on écrit $b|a$ s'il existe k de $\mathbb{Z}$ tel que $a = kb$.

$$\text{i.e } \quad b|a \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} \ : \ a = kb$$

Remarques 120 :

1. Si b divise a alors on dit que b est un diviseur de a ou a est un multiple de b.
2. L'ensemble des multiples de b est l'ensemble $b.\mathbb{Z} = \{kb/k \in \mathbb{Z}\}$.
3. On a $\quad b|a \quad \Rightarrow |b| \leqslant |a|$, $\forall(a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}$.

Propriétés 121 :

1. On a $a|a$, $\forall a \in \mathbb{Z}$. On dit que la relation "divise" est réflexive.
2. Si $b|a$ et $a|c$ alors $b|c$ pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$. On dit que la relation "divise" est transitive.
3. Si $b|a$ et $a|b$ alors $|a| = |b|$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

Théorème 122 :

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$. Alors $\exists!(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tels que $\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leqslant r < |b| \end{cases}$.

2 Congruence modulo n

Définition 123 :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que a congrue b modulo n et on écrit $a \equiv b[n]$ si n divise $a - b$. C-à-d :

$$a \equiv b[n] \ \Leftrightarrow \ n|(a - b) \ \Leftrightarrow \ (\exists k \in \mathbb{Z}) \ : \ a - b = kn$$

Propriétés 124 :

(de la relation "Congruence modulo n")

1. Réflexive $a \equiv a[n]$, $\forall a \in \mathbb{Z}$.
2. Symétrique $a \equiv b[n] \Rightarrow b \equiv a[n]$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$.
3. Transitive $a \equiv b[n]$ et $b \equiv c[n] \Rightarrow a \equiv c[n]$, $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$.

On dit que la relation "Congruence modulo n" est une relation d'équivalence.

Proposition 125 :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
$a \equiv b[n]$ est équivalente à dire que a et b ont le même reste de la division euclidienne sur n.

L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{(n-1)}\}$ avec $\overline{r} = \{a \in \mathbb{Z}/a \equiv r[n]\}$, $\forall r \in \{0, 1, ..., n-1\}$.
On a : $\quad \mathbb{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup ... \cup \overline{(n-1)}$.

Homogènité de la relation "Congruence modulo n" avec la somme et le produit :

Proposition 126 :

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Si $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$ alors $a + c \equiv b + d[n]$ et $ac \equiv bd[n]$.

Conséquences 127 :

1. $\overline{r + r'} = \overline{r} + \overline{r'}$ et $\overline{r \times r'} = \overline{r} \times \overline{r'}$.
2. $a \equiv b[n] \Rightarrow a^p \equiv b^p[n]$, $\forall (a, b, n, p) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

3 Le plus grand commun diviseur

Définition 128 :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$.
Le plus grand commun diviseur (pgcd) de a et b est le plus grand diviseur commun strictement positif de a et b noté $a \wedge b$.

$$\delta = a \wedge b \Longleftrightarrow \begin{cases} \delta \in D_a \cap D_b \\ (\forall x \in D_a \cap D_b) : x \leqslant \delta \end{cases}$$

où D_a est l'ensemble des diviseurs de a.

Propriétés 129 :

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$. On a :
$a \wedge b = b \wedge a$ $\quad (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ $\quad a \wedge a = |a|$

Proposition 130 :

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que b ne divise pas a et $a \equiv r[b]$. On a : $\quad a \wedge b = b \wedge r$.

Corollaire 131 :

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.
$a \wedge b$ est le dernier reste non nul dans la division successive de a sur b.

Théorème 132 :

1. Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$ et $\delta = a \wedge b$. Il existe (u, v) de $\mathbb{Z}$ tels que $\delta = ua + vb$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$ et $\delta = a \wedge b$. On a : $\quad D_a \cap D_b = D_\delta$.

Corollaire 133 :

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$. Si $a \wedge b = \delta$ alors $ac \wedge bc = |c|\delta$.

Remarque 134 :

On peut définir le pgcd de plusieurs nombres entiers en nuls de même façon.
Si $\delta = a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n$ alors il existe $(u_1, ..., u_n) \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\delta = \sum_{k=1}^{n} u_k a_k$.

4 Les nombres premiers entre eux

Définition 135 :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$. On dit que a et b sont premiers entre eux si $a \wedge b = 1$.

Théorème 136 :

(de Bezout)

$$a \wedge b = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2) \ : \ au + bv = 1$$

Corollaire 137 :

$a \wedge b = \delta \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{a}{\delta} \wedge \dfrac{b}{\delta} = 1$

Théorème 138 :

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$\begin{cases} c|ab \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Rightarrow c|b$ (Thm de Gauss) ; $\begin{cases} a|c \\ b|c \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow ab|c$; $\begin{cases} ab \equiv ac[n] \\ a \wedge n = 1 \end{cases} \Rightarrow b \equiv c[n]$

Conséquence 139 :

Si $a \wedge b = 1$ alors $(\forall x \in \mathbb{Z}), (\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2) : x = au + bv$.

Propriétés 140 :

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$ et $n, m \in \mathbb{N}^*$.

$\begin{cases} a \wedge c = 1 \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \wedge bc = 1$; $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \wedge b^n = 1$; $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a^n \wedge b^m = 1$

Définition 141 :

On dit que $a_1, a_2, ..., a_n$ de $\mathbb{Z}^*$ sont premiers entre eux si $a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n = 1$.

Remarque 142 :

les $a_1, a_2, ..., a_n$ de $\mathbb{Z}^*$ sont premiers entre eux n'implique pas qu'ils sont 2 à 2 premiers entre eux.

Théorème 143 :

$a_1, a_2, ..., a_n$ de $\mathbb{Z}^*$ sont premiers entre eux $\Leftrightarrow (\exists (u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{Z}^n) : a_1u_1 + ... + a_nu_n = 1$.

Théorème 144 :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $\delta = a \wedge b$.
L'équation $ax + by = c$ admet des solutions ssi $\delta|c$.

zouhairkarza

5 Le plus petit commun multiple

Définition 145 :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Le plus petit commun multiple (ppcm) de a et b est le petit multiple commun positif strictement de a et b noté $a \vee b$.

Propriétés 146 :

1. Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$. On a :
   $a \vee b = b \vee a$; $(a \vee b)|c| = ac \vee bc$; $a \vee a = |a|$; $b|a \Leftrightarrow a \vee b = |a|$
2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$ et $a \vee b = m$. Tout multiple commun de a et b est un multiple de m.

Théorème 147 :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$, $a \vee b = m$ et $a \wedge b = \delta$. On a $m\delta = |ab|$.

Conséquence 148 :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$. On a : $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \vee b = |ab|$.

Définition 149 :

Soient $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{Z}^*$.
Le petit multiple commun strictement positif de $a_1, a_2, ..., a_n$ s'appelle le ppcm de $a_1, a_2, ..., a_n$.

6 Les nombres premiers

Définitions 150 :

Soient $a, d \in \mathbb{Z}^*$.

1. On dit que d est un diviseur effectif de a si $d|a$ et $d \notin \{-1, 1, -a, a\}$.
2. On dit que a est un nombre premier si a n'a pas des diviseurs effectifs et $|a| \neq 1$.

Propriétés 151 :

1. Si p et q sont deux nombres premiers tels que $|p| \neq |q|$ alors ils sont premiers entre eux. $(\not\Leftarrow)$
2. Si p est premier alors on a : $p \nmid a \Rightarrow a$ et p sont premiers entre eux.
3. Si a non premier de $\mathbb{Z}^* \setminus \{-1, 1\}$ alors le petit diviseur effectif positif de a est un nombre premier.
4. L'ensemble des nombres premiers est infini.

Théorème 152 :

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.
Si n est non premier alors il existe un nombre premier p tel que $p|n$ et $p^2 \leqslant n$.

Conséquence 153 :

Pour vérifier qu'un entier $n \geqslant 2$ est premier ou non, on détermine tous les nombres premiers p tels que $p^2 \leqslant n$.

1. Si l'un de ces nombres divise n alors n est non premier.
2. Sinon, n est premier.

Proposition 154 :

Soient p un nombre premier et $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$p|a_1a_2...a_n \Rightarrow (\exists i \in \{1, 2, ..., n\})/\ p|a_i$$

Conséquence 155 :

Soient $p, p_1, p_2, ..., p_n$ des nombres premiers positifs. Alors :

$$p|p_1p_2...p_n \Rightarrow (\exists i \in \{1, 2, ..., n\})/\ p = p_i$$

Théorème 156 :

(**Décomposition en facteurs premiers**)
Chaque nombre $n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1, 1\}$ s'écrit d'une façon unique de la forme $n = \epsilon.p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r}$ telle que $p_1, p_2, ..., p_r$ des nombres premiers différents 2 à 2 et $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ des nombres entiers naturels non nuls et $\epsilon = \pm 1$.
Cette écriture s'appelle la Décomposition de n en facteurs premiers.

Corollaire 157 :

Soit $n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1, 1\}$ tel que $n = \epsilon.p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r}$ sa décomposition en facteurs premiers.

1. $d|n \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, 2, ..., r\}), (\exists \beta_i \in \mathbb{N})/ \begin{cases} d = \epsilon' p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_r^{\beta_r} \\ 0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i \\ \epsilon' \in \{-1, 1\} \end{cases}$.
2. $n|m \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, 2, ..., r\}), (\exists \lambda_i \in \mathbb{N})/ \begin{cases} m = \epsilon' p_1^{\lambda_1}p_2^{\lambda_2}...p_r^{\lambda_r} \\ 0 \leqslant \alpha_i \leqslant \lambda_i \\ \epsilon' \in \{-1, 1\} \end{cases}$.

Corollaire 158 :

Soient $n = \epsilon.p_1^{\alpha_{p_1}}p_2^{\alpha_{p_2}}...p_r^{\alpha_{p_r}}$ et $m = \epsilon'.q_1^{\beta_{q_1}}q_2^{\beta_{q_2}}...q_{r'}^{\beta_{q_{r'}}}$.
Posons $P = \{p_1, p_2, ..., p_r\}$, $Q = \{q_1, q_2, ..., q_{r'}\}$ et $\Delta = P \cap Q$. Alors :

1. $a \wedge b = \prod_{t \in \Delta} t^{\inf(\alpha_t, \beta_t)}$
2. $a \vee b = \prod_{t \in \Delta} t^{\sup(\alpha_t, \beta_t)} \times \prod_{p \in P \setminus \Delta} p^{\alpha_p} \times \prod_{q \in Q \setminus \Delta} q^{\beta_q}$

7 Les systèmes de numération

Définition 159 :

une base d'un système de numération est le cardinal de l'ensemble des nombres utilisés pour représenter les nombres entiers naturels.

Exemples 160 :

1. La base du système de numération **décimale** est 10 et l'ensemble des nombres utilisés est $\{0, 1, 2, ..., 9\}$.
2. La base du système de numération **binaire** est 2 et l'ensemble des nombres utilisés est $\{0, 1\}$.

Proposition 161 :

Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a > 1$.

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k, r_k, q_k \in \mathbb{N}) \ : \ \begin{cases} n = a^k q_k + r_k \\ 0 \leqslant r_k < a^k \\ 0 \leqslant q_k < a \end{cases}$$

Proposition 162 :

Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a > 1$.

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})(\exists (r_1, ..., r_k) \in \mathbb{N}^k) \ : \ \begin{cases} n = \sum\limits_{i=1}^{i=k} r_i a^i \\ 0 \leqslant r_i < a \ , \ (\forall i \in \{1, 2, ..., k\}) \end{cases}$$

et on écrit : $n = \overline{r_k r_{(k-1)} ... r_2 r_1}^{(a)}$.
De plus si $n > 0$ alors $r_k > 0$.

Méthode pratique

$$\text{Si} \quad \begin{array}{c|c} n & a \\ \cline{2-2} \boxed{r_1} & q_1 \ \big| \ a \\ & \boxed{r_2} \ \big| \ q_2 \quad \cdot \\ & \quad \ddots \\ & \qquad q_k \ \big| \ a \\ & \qquad \boxed{r_k} \ \big| \ 0 \end{array} \quad \text{alors } n = \overline{r_k r_{(k-1)} ... r_2 r_1}^{(a)}$$

Propriétés 163 :

Soient $n == \overline{r_k r_{(k-1)} ... r_2 r_1}^{(a)}$ et $m == \overline{s_l s_{(l-1)} ... s_2 s_1}^{(a)}$. Alors :

1. $k < l \Rightarrow n < m$.
2. si $l = k$ on compare les nombres à partir du gauche. Si $\begin{cases} r_k = s_k \\ r_{k-1} = s_{k-1} \\ ... \\ r_{i+1} = s_{i+1} \\ r_i < s_i \end{cases}$ alors $n < m$.

zouhairkarza

Les probabilités

1 Vocabulaire

Définition 164 :

Une expérience aléatoire est une expérience où on ne peut pas prévoir avec certitude ces résultats avant de l'effectuer comme le lancer d'une pièce de monnaie, le lancer d'un dé ... leurs résultats dépendent du **hasard**.

Vocabulaires :

1. Chaque résultat d'une expérience aléatoire s'appelle **une éventualité**.
2. L'ensemble de toutes les éventualités s'appelle **univers** et souvant noté Ω.
3. Toute partie de Ω s'appelle **un événement**.
4. Les événements formés d'un seul élément sont appelés **événements élémentaires**.
5. Etant donné un univers Ω, l'événement Ω est **l'événement certain**.
6. L'ensemble vide est **l'événement impossible**.
7. Etant donné un univers Ω, soient A et B deux événements.
   (a) L'événement formé des éventualités qui sont dans A **et** dans B est noté $A \cap B$.
   (b) L'événement formé des éventualités qui sont dans A **ou** dans B est noté $A \cup B$.
   (c) L'ensemble des éventualités qui ne sont pas dans A constitue un événement appelé **événement contraire** de A, noté $\overline{A}$.
   (d) A et B sont **incompatibles** si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

2 Espaces probalisés finis

Définitions 165 :

Soit $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ un ensemble non vide et fini.

1. Si on associe à chaque élément a_i de Ω un nombre $p_i \in [0,1]$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$ et tel que $\sum_{i=1}^{i=n} p_i = 1$, alors on dit qu'on a définie une probabilité p sur Ω.
2. On dit que la probabilité de l'événement élémentaire $\{a_i\}$ est le nombre p_i pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$ et on note $p(\{a_i\}) = p_i$ ou $p(a_i) = p_i$.
3. Le couple (Ω, p) s'appelle un **espace probabilisé fini**.

Définition 166 :

Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini et A un événement.
La probabilité de A est la somme des probabilités des événements élémentaires contenus dans A notée $p(A)$.

Remarques :

1. Toute probabilité sur Ω est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$.
2. $p(\varnothing) = 0$ et $p(\Omega) = 1$.

Propriétés 167 :

Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini et A et B deux événements.

1. $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.
2. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
3. Si A et B sont incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

1- Equiprobabilité

Définition 168 :

On dit qu'il y a **équiprobabilité** quand tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Remarque 169 :

Dans les exercices, l'équiprobabilité peut être déclarée explicitement comme elle peut être déduite des conditions de l'expérience telles que : « dé équilibré ou parfait », « boule tirée de l'urne au hasard », « boules indiscernables »...

Proposition 170 :

Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini où il y a **équiprobabilité** et A un événement. Alors on :

$$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{\text{le nombre de cas favorables}}{\text{le nombre de cas possibles}}$$

2- Probabilité conditionnelle

Définition 171 :

Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini et A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$.
La probabilité de réalisation de B sachant que A est déjà réalisé est : $p_A(B) = p(B|A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

Proposition 172 :

(1) Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini et A et B deux événements de probabilités non nulles. On a :

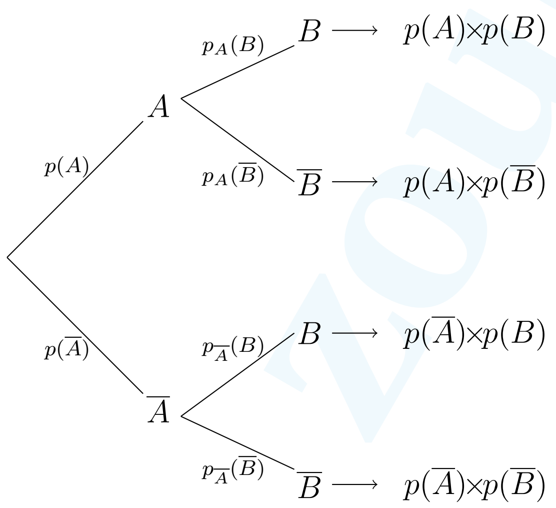
$$p(A \cap B) = p(A)p_A(B) = p(B)p_B(A),$$

c'est **la formule des probabilités composées**.

(2) Si Ω est la réunion de deux événements non nuls et non homogènes A_1 et A_2, alors pour tout événement B on a :

$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) = p(A_1)p_{A_1}(B) + p(A_2)p_{A_2}(B).$$

Arbres pondérés



Règles de construction :

1. La somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est 1.
2. La probabilité de l'événement correspondant à un trajet est le produit des probabilités des différentes branches composant ce trajet.

zouhair karza

3- Indépendance

Définition 173 :

Soient A et B deux événements d'une même expérience aléatoire.
On dit que A et B sont indépendants si : $p(A \cap B) = p(A) \times p^{(}B)$.

Proposition 174 :

Soient A et B deux événements d'une même expérience aléatoire tels que $p(A) \neq 0$.
A et B sont indépendants si et seulement si $p_A(B) = p(B)$.

Remarques 175 :

(1) Si A et B sont deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$, alors :

$$p_B(A) = p(B) \Leftrightarrow p_A(B) = p(B).$$

(2) A et B sont indépendants veut dire que la réalisation de chacun d'eux n'est pas influencée par la réalisation de l'autre.

3 Indépendance de deux épreuves.

Exemples 176 :

Deux urnes u_1 et u_2 contiennent des boules de certains couleurs.

(1) Si on tire une boule de chaque urne, alors cette expérience contient deux épreuves indépendants. Si $A = A_1$ et A_2 est un événement de cette éxpérience avec A_1 et A_2 sont deux événements des deux épreuves relatives aux urnes respectivement, alors :

$$p(A) = p(A_1) \times p(A_2).$$

Par exemple si	$A =$" obtenir une boule noir de u_1 et obtenir une boule jaune de u_2 ".
Alors	$A_1 =$" obtenir une boule noir de u_1 "
et	$A_2 =$" obtenir une boule jaune de u_2 ".

(2) On considère une expérience où on tire une boule de l'urne u_1 une boule. Si le résultat est une boule blanche, alors on tire deux boules de l'urne u_2 et sinon on tire trois boules. Les deux épreuves dans cette expérience sont dépendants.

Epreuves répétées :

Proposition 177 :

On considère dans une expérience une épreuve où on s'interesse seulement à la réalisation ou pas d'un événement A avec $p = p(A)$.
On répéte cette épreuve indépendamment n fois dans les mêmes conditions. Alors la probabilité que l'événement A soit réalisé k fois exactement, avec $k \in \{0; 1; 2; ...; n\}$ est :

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

4 Variables aléatoires - Loi de probabilité d'une variable aléatoire.

Définitions 178 :

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

(1) Une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ s'appelle une variable aléatoire.

(2) Si $X(\Omega) = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$, alors déterminer la la loi de probabilité de la variable aléatoire X veut dire calculer, pour tout $i \in \{1; 2; ...; n\}$, la probabilité de la réunion de tous les événements d'images x_i par X. Cette réunion sera notée $(X = x_i)$.
On résume cette loi dans la tableau :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

(3) Si $x_1 < x_2 < ... < x_n$, alors :

$$p(X \leqslant \alpha) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } \alpha < x_1 \\ p_1 + p_2 + ... + p_i & , \text{ si } x_i \leqslant \alpha < x_{i+1} \\ 1 & , \text{ si } \alpha > x_n \end{cases}$$

5 Espérence mathématique - variance - écart type d'une variable aléatoire.

Définitions 179 :

Soient Ω l'univers d'une expérience aléatoire et X une variable aléatoire définie sur Ω.
On pose $X(\Omega) = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$ et $p_i = p(X = x_i)$ pour tout $i \in \{1; 2; ...; n\}$.

(1) L'espérense mathématique de la variable aléatoire X est le nombre réel noté $E(X)$ définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n.$$

(2) La variance de la variable aléatoire X est le nombre réel positif noté $V(X)$ définie par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - E(X))^2 p_i = (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + ... + (x_n - E(X))^2 p_n.$$

(3) L'écart type de la variable aléatoire X est le nombre réel positif noté $\sigma(X)$ définie par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Proposition 180 :

On a $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ avec $E(X^2) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 p_i = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + ... + x_n^2 p_n$.

6 La loi binomiale.

Définition 181 :

On considère une expérience aléatoire composée de n épreuves répétées et indépendantes deux à deux. Soit A un événement de probabilté p de cette épreuve.
On appelle une variable aléatoire binomiale X de paramètres p et n la variable aléatoire qu'est égale au nombre de fois la réalisation de A.

Proposition 182 :

Sous les mêmes hypothèses de la définition, on a :

(1) $X(\Omega) = \{0; 1; 2; ...; n\}$.

(2) Pour tout $k \in \{0; 1; ...; n\}$, on a $p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

(3) $E(X) = np$.

(4) $V(X) = np(1-p)$.

zouhairkarza

Loi de composition interne

Soit E un ensemble.

1 Loi de composition interne (LCI)

Définition 183 :

On appelle LCI toute application f de $E\times E$ dans E.
$f(x,y)$ s'appelle le composé de x et y dans cet ordre pour tout x,y de E.

Notation 184 :

On note $f(x,y)$ souvent par $x+y$, $x\times y$, $x\mathrm{T}y$, $x\perp y$ ou $x*y$ ... et si E est muni d'une LCI $*$ on note $(E,*)$.

Exemples 185 :

1. La somme et le produit usuels sont des LCI dans chaque ensemble des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. On note $(E,+)$ et $(E,\times)$ pour $E\in\{\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}\}$.

2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur I et à valeurs réelles.
   La somme et le produit dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ sont des LCI telles que Pour tous x de I et f et g de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, on a :
   $$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \text{ et } (f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$$
   On note $(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}),+)$ et $(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}),\times)$.
   $\circ$ est une LCI dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
3. On note par $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes, alors on a $(\mathcal{P},+)$, $(\mathcal{P},\times)$ et $(\mathcal{P},\circ)$.
   Soit n de $\mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n=\{P\in\mathcal{P}/deg(P)\leqslant n\}$. On a $(\mathcal{P}_n,+)$ mais $\times$ et $\circ$ ne sont pas des LCI.
4. Soit $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$. On a $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\times)$ telles que :
   $$\overline{x}+\overline{y}=\overline{x+y} \text{ et } \overline{x}\times\overline{y}=\overline{x\times y}$$
5. Les matrices carrées

   Définition 186 :

   Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on appelle matrice carrée réelle d'ordre n tout tableau de dimensions $n\times n$ sous la forme :
   $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n}\\ . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & .\\ a_{n1} & . & . & . & . & a_{nn}\end{pmatrix};a_{ij}\in\mathbb{R},\forall i,j\in\{1,2,...,n\}.$$
   En particulier :
   $$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})=\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix};(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\}$$
   $$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})=\{\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix};(a,b,c,d,e,f,g,h,i)\in\mathbb{R}^9\}$$

On définit :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \\ d = d' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \\ d = d' \\ e = e' \\ f = f' \\ g = g' \\ h = h' \\ i = i' \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ d+d' & e+e' & f+f' \\ g+g' & h+h' & i+i' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bd'+cg' & ab'+be'+ch' & ac'+bf'+ci' \\ da'+ed'+fg' & db'+ee'+fh' & dc'+ef'+fi' \\ ga'+hd'+ig' & gb'+he'+ih' & gc'+hf'+ii' \end{pmatrix} \quad (HP)$$

$+$ et $\times$ sont des LCI dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2 Partie stable pour une LCI - Loi induite

Définition 187 :

Soient $(E, *)$ et H une partie de E.
On dit que H est une partie stable pour $*$ si pour tous x et y de H on a : $x * y \in H$.

Définition 188 :

Soit H une partie stable de $(E, *)$.
L'application $g : H \times H \to H$, $(x, y) \mapsto x * y$ est une LCI dans H s'appelle la loi induite de $*$ qui définie sur E.

3 Propriétés d'une LCI

Définitions 189 :

Soit $(E, *)$.
Associativité : on dit que $*$ est associative ssi $(x * y) * z = x * (y * z)$, $\forall x, y, z \in E$.
Commutativité : on dit que $*$ est commutative ssi $x * y = y * x$, $\forall x, y \in E$.
L'élément neutre : on dit que $*$ poossède un élément neutre e ssi $x * e = e * x = x$, $\forall x \in E$.(unicité)
Le symétrique d'un élément : on suppose que $*$ possède un élément neutre e dans E. On dit que x de E a un symétrique dans $(E, *)$ ssi il existe x' de E tel que $x * x' = x' * x = e$.(unicité si $*$ est associative)

Un élt. simplifiable : on dit que a est régulier dans $(E, *)$ ssi $\forall (x, y) \in E^2$: $\begin{cases} x * a = y * a \Rightarrow x = y \\ a * x = a * y \Rightarrow x = y \end{cases}$.

Un élt. absorbant : on dit que a est absorbant dans $(E, *)$ ssi $\forall x \in E$: $x * a = e$ et $a * x = e$.

4 Morphisme

Définitions 190 :

Soient $(E,*)$ et $(F,\circledast)$.

(1) Toute application $f : E \to F$ telle que : $f(x*y) = f(x) \circledast f(y)$ pour tout (x,y) de E^2 s'appelle un morphisme de $(E,*)$ dans $(F,\circledast)$ (aussi appelé homomorphisme).

(2) Si de plus f est bijective alors f s'appelle un isomorphisme de $(E,*)$ dans $(F,\circledast)$.

(3) Tout morphisme de $(E,*)$ dans $(E,*)$ s'appelle un endomorphisme.

(4) Tout endomorphisme bijectif s'appelle un automorphisme.

Propriétés 191 :

Soit f un morphisme de $(E,*)$ dans $(F,\circledast)$.

1. $f(E)$ est une partie stable de $(F,\circledast)$.
2. Si $*$ est associative dans E alors $\circledast$ est associative dans $f(E)$.
3. Si $*$ est commutative dans E alors $\circledast$ est commutative dans $f(E)$.
4. Si e est l'élément neutre de $(E,*)$ alors $f(e)$ est l'élément neutre de $(f(E),\circledast)$.
5. Si $*$ admet un élément neutre dans E et x' est le symétrique de x dans $(E,*)$ alors $f(x)$ est symétrisable dans $(f(E),\circledast)$ et son symétrique est $f(x')$.

Remarques 192 :

Soit f un morphisme de $(E,*)$ dans $(F,\circledast)$.

1. f transmit les propriétés de $*$ dans E à $\circledast$ dans $f(E)$.
2. Si f est surjectif alors $f(E) = F$. Donc f transmit les propriétés de $*$ dans E à $\circledast$ dans F.

zouhair karza

Groupe - Anneau - Corps

1 Le groupe

Soit G un ensemble non vide.

Définition 193 :

Soit $(G,*)$. On dit que $(G,*)$ est un groupe si :

1. La loi $*$ est associative.
2. La loi $*$ admet un élément neutre dans G.
3. Tout élément de G a un symétrique dans $(G,*)$.

Si de plus $*$ est commutative, on dit que $(G,*)$ est un groupe commutatif (ou abélien).
Si G contient un nombre fini d'éléments on dit que $(G,*)$ est un groupe fini.

Propriétés 194 :

Soit $(G,*)$ un groupe et e son élément neutre.

1. Chaque élément de G a un unique symétrique x' dans $(G,*)$.
2. Pour tous x et y de G on a : $(x*y)'=y'*x'$.
3. Tout élément de G est simplifiable.
4. Soient $a,b\in G$. L'équation $a*x=b$ admet une unique solution dans G. Cette solution est $x=a'*b$.

Proposition 195 :

Soit $(G,*)$ un groupe et e son élément neutre.
Pour tout $(a,b)\in G^2$, l'équation $a*x=b$ admet une unique solution dans G qu'est $x=a'*b$.

Sous groupe

Définition 196 :

Soient $(G,*)$ un groupe et H une partie non vide de G.
On dit que $(H,*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$ si $(H,*)$ est un groupe.

Proposition 197 :

$$\begin{aligned}(H,*) \text{ est un sous-groupe de } (G,*) &\Leftrightarrow \begin{cases}1.\ H\neq\varnothing \text{ et } H\subset G\\ 2.\ H \text{ est stable par } *\\ 3.\ H \text{ est stable par passage au symétrique}\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}1.\ H\neq\varnothing \text{ et } H\subset G\\ 2.\ x*y\in H,\ \forall(x,y)\in H^2\\ 3.\ x'\in H,\ \forall x\in H\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}1.\ H\neq\varnothing \text{ et } H\subset G\\ 2.\ x*y'\in H,\ \forall(x,y)\in H^2\end{cases}\end{aligned}$$

Morphismes de groupes

Proposition 198 :

Soient $(G,*)$ et $(K,\circledast)$ deux groupes et f est un morphisme de $(G,*)$ dans $(K,\circledast)$.

1. Si e est l'élément neutre de $(G,*)$ alors $f(e)=e'$ est l'élément neutre de $(K,\circledast)$.
2. $(f(G),\circledast)$ est groupe.
3. Si de plus $(G,*)$ est un groupe abélien alors $(f(G),\circledast)$ est groupe abélien.

2 Anneau.

Soit A un ensemble non vide.

Définition 199 :

Supposons que A est muni de deux LCI $*$ et $\circledast$.

On dit que $\circledast$ est distributive sur $*$ ssi $\begin{cases}(1) : x \circledast (y * z) = (x \circledast y) * (x \circledast z) \\ (2) : (y * z) \circledast x = (y \circledast x) * (z \circledast x)\end{cases}$; $\forall (x, y, z) \in A^3$.

Remarque 200 :

Si $\circledast$ est commutative alors l'une des (1) et (2) suffit.

Définition 201 :

Supposons que A est muni de deux LCI $*$ et $\circledast$.

1. On dit que $(A, *, \circledast)$ est un anneau ssi $\begin{cases}\text{1. } (A, *) \text{ est une groupe abélien.} \\ \text{2. } \circledast \text{ est associative dans } A. \\ \text{3. } \circledast \text{ est distributive sur } *\end{cases}$.
2. On dit que $(A, *, \circledast)$ est un anneau unitaire si $(A, *, \circledast)$ est un anneau et $\circledast$ possède un élément neutre.
3. On dit que $(A, *, \circledast)$ est un anneau commutative si $(A, *, \circledast)$ est un anneau et $\circledast$ est commutative.

Exemple 202 :

$(\mathbb{R}, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

Proposition 203 :

Soit $(A, *, \circledast)$ un anneau unitaire. On a, pour tout $(x, y) \in A$, les propriétés suivantes :

(1) $0_A \circledast x = x \circledast 0_A = 0_A$.

(2) $(-1_A) \circledast x = x \circledast (-1_A) = -x$.

(3) $(-x) \circledast y = x \circledast (-y) = -(x \circledast y)$.

(4) $(-x) \circledast (-y) = x \circledast y$.

Définition 204 :

Soit $(A, *, \circledast)$ un anneau et $x \in A \setminus \{0_A\}$.
On dit que x est un diviseur de zéro dans l'anneau A si il existe $y \in A \setminus \{0_A\}$ tel que :

$$x \circledast y = 0_A \quad \text{ou} \quad y \circledast x = 0_A.$$

Remarque 205 :

Un anneau $(A, *, \circledast)$ n'admet aucun diviseur de zéro veut dire que :

$$(\forall (x, y) \in^2 A) : \quad x \circledast y = 0_A \Leftrightarrow x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

Définition 206 :

On dit qu'un anneau $(A, *, \circledast)$ est intègre s'il n'est pas réduit à zéro et n'admet aucun diviseur de zéro.

Proposition 207 :

Soit $(A, *, \circledast)$ un anneau et $x \in A$.
Si x est inversible dans $(A, \circledast)$, alors x n'est pas un diviseur de zéro dans l'anneau $(A, *, \circledast)$.

zouhairkarza

3 Corps.

Définition 208 :

On appelle corps tout anneau unitaire $(K, *, \circledast)$ non réduit à zéro tel que tout élément autre que zéro est inversible pour la loi $\circledast$.
Un corps est dit commutatif si la deuxième loi est commutative.

Exemples 209 :

$(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$ et $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des corps commutatifs.

Proposition 210 :

Soit $(K, *, \circledast)$ un ensemble muni de deux LCI.
$(K, *, \circledast)$ est un corps ssi on a les trois axiomes :

$$\begin{cases} (1)\ (K, *) \text{ est un groupe commutatif.} \\ (2)\ (K \setminus \{0_K\}, \circledast) \text{ est un groupe.} \\ (3) \text{ La loi } \circledast \text{ est distributive par rapport à la loi } *. \end{cases}$$

Proposition 211 :

Soit $(K, *, \circledast)$ un corps. On a les propriétés suivantes :

(1) Tout élément de $K \setminus \{0_K\}$ est régulier pour $\circledast$.

(2) $(K, *, \circledast)$ est un anneau intègre.

(3) Pour tous $(a, b) \in K \setminus \{0_K\} \times K$, on a :

$$a \circledast x = b \Leftrightarrow x = a' \circledast b \quad \text{et} \quad x \circledast a = b \Leftrightarrow x = b \circledast a'.$$

zouhairkarza

Espace vectoriel

1 Loi de composition externe - Espace vectoriel.

Définition 212 :

Soient $\mathbb{K}$ un corps et E un ensemble.
Toute application de $\mathbb{K}\times E$ dans E s'appelle une loi de composition externe (L.C.E) de $\mathbb{K}$ sur E.
Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, on note en général l'image de (λ, x) par $\lambda \cdot x$ ou λx.

Remarque 213 :

Dans de nombreux cas on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Dans la suite on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 214 :

Un espace vectoriel réel (ou $\mathbb{R}$-espace vectoriel) e st un triplet $(E, +, \cdot)$ dans le quel E est un ensemble non vide muni :

(1) d'une LCI notée "+", telle que $(E, +)$ est groupe commutatif d'élément neutre 0_E.

(2) d'une L.C.E de $\mathbb{R}$ sur E appelé produit externe ou le produit par un scalaire notée "·" et possèdent les propriétés suivantes : $(\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2)(\forall(x, y) \in E^2)$

(a) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.

(b) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.

(c) $(\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$.

(d) $1 \cdot x = x$.

Notation 215 :

Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés des vecteurs. En absence d'informations sur la nature de ces éléments, on les note par $\overrightarrow{\cdot}$ ($\overrightarrow{x}, \overrightarrow{a}, \ldots$). Avec cette notation la définition précédante devient :

Définition 216 :

Un espace vectoriel réel (ou $\mathbb{R}$-espace vectoriel) e st un triplet $(E, +, \cdot)$ dans le quel E est un ensemble non vide muni :

(1) d'une LCI notée "+", telle que $(E, +)$ est groupe commutatif d'élément neutre $\overrightarrow{0_E}$.

(2) d'une L.C.E de $\mathbb{R}$ sur E appelé produit externe ou le produit par un scalaire notée "·" et possèdent les propriétés suivantes : $(\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2)(\forall(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2)$

(a) $(\lambda + \mu) \cdot \overrightarrow{x} = \lambda \cdot \overrightarrow{x} + \mu \cdot \overrightarrow{x}$.

(b) $\lambda \cdot (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \lambda \cdot \overrightarrow{x} + \lambda \cdot \overrightarrow{y}$.

(c) $(\lambda\mu) \cdot \overrightarrow{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \overrightarrow{x})$.

(d) $1 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$.

Proposition 217 :

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-e.v. Alors :

(1) Tout vecteur de E est un élément régulier (simplifiable) dans $(E, +)$.

(2) Pour tout $\overrightarrow{x} \in E$, on a : $0 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

(3) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $\lambda \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

(4) Pour tout $(\lambda, \overrightarrow{x}) \in \mathbb{R}\times E$, on a : $\lambda \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

Proposition 218 :

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{R}$-e.v. Alors :
(1) Pour tout $(\lambda,\overrightarrow{x})\in\mathbb{R}\times E$, on a : $(-\lambda)\cdot\overrightarrow{x}=\lambda\cdot(-\overrightarrow{x})=-(\lambda\cdot\overrightarrow{x})$.
(2) Pour tout $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\in E^2$, l'équation $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}$ admet une unique solution qu'est

$$x=\overrightarrow{v}+(-\overrightarrow{u})=\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}.$$

(3) Pour tout $(\lambda,\mu),(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})\in\mathbb{R}^2\times E^2$, on a

$$\lambda\cdot(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y})=\lambda\cdot\overrightarrow{x}-\lambda\cdot\overrightarrow{y}\quad\text{et}\quad(\lambda-\mu)\cdot\overrightarrow{x}=\lambda\cdot\overrightarrow{x}-\mu\cdot\overrightarrow{x}.$$

2 Sous-Espace vectoriel.

Définition 219 :

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{R}$-e.v. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si :

(1) $F\neq\varnothing$ et $F\subset E$.

(2) F est stable par l'addition.

(3) F est stable par le produit externe.

(4) $(F,+,\cdot)$ un $\mathbb{R}$-e.v.

Exemples 220 :

(1) $\{\overrightarrow{0}\}$ et E sont des sous-espaces de E. $\{\overrightarrow{0}\}$ est appelé le sous-espace nul de E.
(2) Si $\overrightarrow{u}\in E\setminus\{\overrightarrow{0}\}$, alors $\mathbb{R}\overrightarrow{u}=\{\lambda\cdot\overrightarrow{u}/\lambda\in\mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé la droite vectorielle dirigé par $\overrightarrow{u}$.

Proposition 221 :

Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{R}$-e.v. et F une partie de E. On a :

$$(F\text{ est un sous-espace vectoriel de }E)\Leftrightarrow\begin{cases}F\neq\varnothing\\(\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2)(\forall(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})\in E^2)\ :\ \lambda\cdot\overrightarrow{x}+\mu\cdot\overrightarrow{y}\in F.\end{cases}$$

3 Familles libres ou génératrices - Bases

Combinaisons linéaires.

Définition 222 :

Soient $\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},...,\overrightarrow{x_n}$ n vecteurs d'un $\mathbb{R}$-e.v. $(E,+,\cdot)$ avec $n\in\mathbb{N}^*$.
on appelle combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},...,\overrightarrow{x_n}$ (ou combinaison linéaire de la famille $(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},...,\overrightarrow{x_n})$ tout vecteur de la forme :

$$\sum_{i=1}^{i=n}\lambda_i\cdot\overrightarrow{x_i}=\lambda_1\cdot\overrightarrow{x_1}+...+\lambda_n\cdot\overrightarrow{x_n}\quad\text{avec}\quad\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{R}.$$

Les réels $\lambda_1,...,\lambda_n$ sont appelés les coefficients de cette combinaison linéaire.

Familles libres - Familles liées.

Définition 223 :

Soient $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n}$ n vecteurs d'un $\mathbb{R}$-e.v. $(E, +, \cdot)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) On dit que la famille $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n})$ est libre de E si pour tous $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \overrightarrow{x_i} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0.$$

Dans ce cas, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n}$ sont linéairement indépendants.

(2) Toute famille, qui n'est pas libre, est dite une famille liée.
Autrement, il existe une combinaison linéaire de cette famille de coefficients non tous nuls qui vaut $\overrightarrow{0}$.
Dans ce cas, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n}$ sont linéairement dépendants.

Proposition 224 :

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v.

(1) La famille $(\overrightarrow{x})$ est libre si et seulement si $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$.

(2) Les éléments d'une famille libre sont deux à deux ditincts.

(3) Toute sous famille d'une famille libre est libre.

(4) Toute famille contenant une sous famille liée est liée.

(5) Une famille est liée si et seulement si l'un de ces vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs.

Familles généreatrices.

Définition 225 :

Soient $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n}$ n vecteurs d'un $\mathbb{R}$-e.v. $(E, +, \cdot)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) On dit que $(\overrightarrow{x})$ est engendré par la famille $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n})$ s'il peut s'écrire comme combinaison linéaire de cette famille.

(2) On dit que la famille $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n})$ est génératrice si :

$$(\forall \overrightarrow{x} \in E)(\exists (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n) \quad : \quad \overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \overrightarrow{x_i}.$$

Dans ca cas, on dit que cette famille engendre E.

Bases.

Définition 226 :

Soient $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n}$ n vecteurs d'un $\mathbb{R}$-e.v. $(E, +, \cdot)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
La famille $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n})$ est dite base de E s'elle est libre et génératrice. i.e

$$(\forall \overrightarrow{x} \in E)(\exists! (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n) \quad : \quad \overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \overrightarrow{x_i}.$$

Dans ce cas, on note cette famille $\mathscr{B}$ et on écrit $\mathscr{B} = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n})$.
$\lambda_1, ..., \lambda_n$ s'appellent les composantes (ou coordonnées) de $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathscr{B}$ et on note $\overrightarrow{x}(\lambda_1, ..., \lambda_n)_{\mathscr{B}}$.

Remarque 227 :

Si un $\mathbb{R}$-espace vectoriel admet une base $\mathscr{B}$, alors cette base n'est pas unique ($2\mathscr{B}$ est aussi une base).

Proposition 228 :

Soient $\mathbb{R}$-e.v. $(E,+,\cdot)$ et $\mathscr{B}=(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},...,\overrightarrow{x_n})$ avec $n\in\mathbb{N}^*$ une base de E.

(1) Si $\overrightarrow{x}(\lambda_1,...,\lambda_n)_{\mathscr{B}}$ et $\overrightarrow{y}(\mu_1,...,\mu_n)_{\mathscr{B}}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, alors

$$\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}(\lambda_1+\mu_1,...,\lambda_n+\mu_n)_{\mathscr{B}} \quad \text{et} \quad \alpha\cdot\overrightarrow{x}(\alpha\lambda_1,...,\alpha\lambda_n)_{\mathscr{B}}.$$

(2) Toutes les bases de E ont le même cardinal qu'on appelle la dimension de E noté $\dim E$ et on écrit $\dim E=n$.

Proposition 229 :

Soit $\mathbb{R}$-e.v. $(E,+,\cdot)$ et $\mathscr{B}$ une base de E.

(1) Si $\dim E=2$ et $\mathscr{B}=(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$:

Soit $\mathscr{B}'=(\overrightarrow{u}(a,b)_{\mathscr{B}},\overrightarrow{v}(a',b')_{\mathscr{B}})$. Alors on a :

$$\mathscr{B}' \text{ est une base de } E \Leftrightarrow .\mathscr{B}' \text{ est génératrice de } E \Leftrightarrow \mathscr{B}' \text{ est libre de } E \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0.$$

(2) Si $\dim E=3$ et $\mathscr{B}=(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$:

Soit $\mathscr{B}'=(\overrightarrow{u}(a,b,c)_{\mathscr{B}},\overrightarrow{v}(a',b',c')_{\mathscr{B}},\overrightarrow{w}(a'',b'',c'')_{\mathscr{B}})$. Alors on a :

$$\mathscr{B}' \text{ est une base de } E \Leftrightarrow .\mathscr{B}' \text{ est génératrice de } E \Leftrightarrow \mathscr{B}' \text{ est libre de } E \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \neq 0.$$

zouhair karza