2 باك علوم رياضية	تجريبي دورة ماي 2010	الأكاديمية الجهوية للتربية و التكوين
المعامل : 09	مادة الرياضيات	جهة الرباط سلا زمور زعير
مدة الإنجاز : أربع ساعات		نيابة الخميسات

- **التمرين رقم 01:**

نزود المجموعة $\mathbb{R}^2$ بقانون التركيب الداخلي T المعرف بما يلي :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2:(x,y)\mathrm{T}(a,b)=(xa-yb,xb+ya+2yb)$$

و نعتبر المجموعة : $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x+y\neq 0\}$.

1)- بين أن G جزء مستقر من $(\mathbb{R}^2,\mathrm{T})$ و أن (G,T) زمرة تبادلية .

2)- نعتبر المجموعة : $\mathrm{E}=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix} x+y & y \\ 0 & x+y\end{pmatrix} / (x,y)\in G\right\}$.

و ليكن f التطبيق المعرف من G نحو E بما يلي : $\forall(x,y)\in G;\mathrm{f}((x,y))=M(x,y)$.

أ- بين أن E جزء مستقر من $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

ب- بين أن f تشاكل تقابلي من (G,T) نحو $(\mathrm{E},\times)$ ، ثم إستنتج بنية $(\mathrm{E},\times)$.

ج- حدد مقلوب المصفوفة $M(x,y)$ لكل (x,y) من G .

3)- حل في E المعادلة : $X^2=\mathrm{I}_2$ ، حيث I_2 هي المصفوفة الوحدة في $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

- **التمرين رقم 02:**

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1)- نعتبر التحويل R الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث : $z'=iz+(1+i)$.

أ- بين أن R دوران محددا لحق مركزه و قياسا لزاويته .

ب- أعط الكتابة العقدية للدوران العكسي R^{-1} للدوران R .

2)- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ ، المعادلة :

$$(\mathrm{E}):-iz^3-3(1+i)z^2-6z-10+2i=0 \ .$$

أ- بين أن عددا عقديا z يكون حلا ل (E) إذا و فقط إذا كان z' جذرا مكعبا للعدد 8 .

ب- إستنتج مجموعة حلول المعادلة (E) ، لتكن A و B و C صورها في المستوى العقدي (P) .

ج- بين أن مجموعة النقط $M(z)$ من (P) بحيث : $|iz+(1+i)|=2$ هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ، ثم أنشىء في المستوى العقدي (P) المثلث ABC و الدائرة المحيطة به .

- **التمرين رقم 03:**

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ، المعادلة : $(\mathrm{E}): 28x-15y=-6$.

1)- أ- تحقق من أن الزوج $(3,6)$ حل للمعادلة (E) .

ب- حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E) .

2)- حل في $\mathbb{Z}$ النظمة : $(S):\begin{cases} z\equiv 8[28] \\ z\equiv 2[15] \end{cases}$.

3)- **تطبيق:**

يبعث منار برج إشارة ضوئية صفراء اللون على رأس كل 15 دقيقة و أخرى حمراء اللون على رأس كل 28 دقيقة ، لوحظ إنبعاث إشارة صفراء اللون عند اللحظة ذات التاريخ : $0h2\min$ و إنبعاث الإشارة الحمراء عند اللحظة ذات التاريخ : $0h8\min$.

- حدد تاريخ اللحظة التي ستتطابق فيها إنبعاث الإشارتين الضوئيتين لأول مرة .

- **التمرين رقم 04:**

- **الجزء الأول:**

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\mathrm{g}(x)=xe^{-x}$.

1)- أدرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

2)- إستنتج أن : $(\forall x\in\mathbb{R});\mathrm{g}(x)\leq\frac{1}{e}$.

- **الجزء الثاني:**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $\mathrm{f}(x)=\frac{e^x}{e^x-x}$.

و ليكن (C_{f}) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)- أ- بين أن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.

ب- أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{f}(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{f}(x)$ ، ثم أول هندسيا النتيجتين .

ج- بين أن f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و أن : $(\forall x\in\mathbb{R});\mathrm{f}'(x)=\frac{(1-x)e^x}{(e^x-x)^2}$.

د- إستنتج منحى تغيرات f ، ثم ضع جدول تغيراتها .

ه- أنشىء المنحنى (C_{f}) (للمنحنى (C_{f}) نقطتي إنعطاف تحديدهما غير مطلوب) .

2)- أ- حدد $\mathrm{f}\left(\left[0;1\right]\right)$ و $\mathrm{f}\left(\left[1;+\infty\right[\right)$.

ب- إستنتج أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+}\right);1\leq \mathrm{f}\left(x\right)\leq \dfrac{e}{e-1}$ و أن : $\mathrm{f}\left(\left[1;\dfrac{e}{e-1}\right]\right)\subset\left[1;\dfrac{e}{e-1}\right]$.

ج- بين أن المعادلة : $\mathrm{f}\left(x\right)=x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left[1;\dfrac{e}{e-1}\right]$.

3)- أ- تحقق من أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);\mathrm{f}'\left(x\right)=\dfrac{-1}{e}\left[\mathrm{f}\left(x\right)\right]^{2}\mathrm{g}\left(x-1\right)$.

ب- بين أن : $\left(\forall x\in\left[1;+\infty\right[\right);\left|\mathrm{f}'\left(x\right)\right|\leq\dfrac{1}{\left(e-1\right)^{2}}$.

ج- إستنتج أن : $\forall\left(x,y\right)\in\left(\left[1;+\infty\right[\right)^{2};\left|\mathrm{f}\left(x\right)-\mathrm{f}\left(y\right)\right|\leq\dfrac{1}{\left(e-1\right)^{2}}\left|x-y\right|$.

- **الجزء الثالث:**

لتكن $\left(u_{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي : $u_{0}=1$ و $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);u_{n+1}=\mathrm{f}\left(u_{n}\right)$.

1)- بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);1\leq u_{n}\leq\dfrac{e}{e-1}$.

2)- أ- بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);\left|u_{n+1}-\alpha\right|\leq\dfrac{1}{\left(e-1\right)^{2}}\left|u_{n}-\alpha\right|$.

ب- إستنتج أن المتتالية $\left(u_{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n}=\alpha$.

- **الجزء الرابع:**

لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\mathrm{F}\left(x\right)=\int_{0}^{x^{2}}\mathrm{f}\left(t\right)dt$.

1)- أ- بين أن : $\left(\forall x\in\left[1;+\infty\right[\right);\int_{1}^{x^{2}}\mathrm{f}\left(t\right)dt\geq\left(x^{2}-1\right)$.

ب- إستنتج كل نهاية من النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{F}\left(x\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{F}\left(x\right)}{x}$.

2)- أ- بين أن F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);\mathrm{F}'\left(x\right)=2x.\mathrm{f}\left(x^{2}\right)$.

ب- إستنتج منحى تغيرات F ، ثم ضع جدول تغيراتها .

إنتهى الموضوع .