PR : ABOULFADIL YASSINE	Le dénombrement et calcul de probabilités	2 BAC PC/SVT

I- Le dénombrement :

1-Définition :

Le dénombrement est la détermination du nombre d'éléments d'un ensemble.

2- Un ensemble :

2-1- Définition :

un **ensemble** désigne *intuitivement* une collection d'objets (les éléments de l'ensemble) .

2-2- Les types d'ensembles :

	Ensemble fini	Ensemble infini	Ensemble vide
Définition	un **ensemble fini** est un **ensemble** qui possède un nombre **fini** d'éléments, c'est-à-dire qu'il est possible de compter ses éléments.	un **ensemble infini** est un **ensemble** qui n'est pas fini, c'est-à-dire qu'il n'y a aucun moyen de « compter » les éléments de cet **ensemble.**	l'**ensemble vide** est l'ensemble ne contenant aucun élément.
Exemple	L'ensemble des jours de la semaine. $\{Lu, Ma, Me, Je, Ve, Sa, Di\}$	L'**ensemble des nombres** entiers naturels $\mathbb{N}$.	L'ensemble de solutions de l'équation $x^2+1=0$ dans R. $S=\emptyset$

3- Cardinal d'un ensemble :

Définition :

*Le cardinal d'un ensemble fini E est le nombre des éléments de cet ensemble et on le note : Card(E).

*Cas particulier : $Card(\emptyset) = 0$

Propriété :

A et B sont deux ensembles finis .

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$$

4- Accompli d'un ensemble:

Définition :

Soit A une partie d'un ensemble fini E .

L'accompli de A par rapport à l'ensemble E est l'ensemble noté $\bar{A}$ *avec* : $\bar{A} = \{x \in E | x \notin A\}$

Remarques:

* $A \cap \bar{A} = \emptyset$
* $A \cup \bar{A} = E$
* Card ($\bar{A}$)=Card (E)-Card (A)

5- Le principe fondamental du dénombrement:

Si une opération globale peut se décomposer en p opérations élémentaires successives $(p \in N^*)$, ces dernières pouvant s'effectuer respectivement de n_1 ; n_2 ;...; n_p manières différentes, alors l'opération globale peut se faire de : $n_1 \times n_2 \times n_3 \times ... \times n_p$ manières différentes.

6- Arrangement avec répétition – sans répétition :

Arrangement avec répétition:

Soit n et p deux éléments de N* .

Le nombre d'arrangement avec répétition, de p éléments parmi n , est : n^p .

Arrangement sans répétition :

Soit n et p deux éléments de N* ($p \leq n$) .

Le nombre d'arrangement sans répétition, de p éléments parmi n , est :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \dots \times (n-p+1)$$

Cas particulier :

Tout arrangement sans répétition de n éléments parmi n éléments s'appelle une permutation de n éléments et il est égal à : $A_n^n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \dots \dots \times 2 \times 1$

7- Les combinaisons :

Soit E un ensemble fini contenant n éléments .
Toute partie A de E contenant p éléments ($p \leq n$), s'appelle une combinaison de p éléments parmi n éléments, et le nombre de ses combinaisons est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$$

8- Les nombres n! et A_n^p et C_n^p :

$(n \in \mathbb{N}^*)$;	$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 2\times 1$ $0! = 1$		
$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$		$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	
$C_n^n = 1$	$C_n^1 = n$	$C_n^0 = 1$	$C_n^{n-1} = n$ $C_n^p = C_n^{n-p}$
$C_n^p = C_n^{n-p}$		$C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$	

9- Nombre de possibilité d'arrangement de n éléments :

Si on a, n_1 éléments de type A , et n_2 éléments de type B , et n_3 éléments de type C , parmi n éléments, avec $n_1 + n_2 + n_3 = n$, alors le nombre de possibilité d'arranger ses éléments est :

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}$$

10- Quelques types de tirage :

On tire p éléments parmi n éléments et on résume les résultats dans le tableau suivant :

Type de tirage	Nombre de tirages possibles	Importance de l'ordre de tirage
Simultané	C_n^p	N'est pas important
Successif et avec remise	n^p	Important
Successif et sans remise	A_n^p	Important

II- Calcul de probabilités :

1- Vocabulaires :

- **aléatoire** = Lié au hasard **;** imprévisible ; arbitraire.
- On dit qu'une **expérience** est **aléatoire** si on peut déterminer parfaitement, par avance toutes les issues possibles mais on ne peut pas prévoir par avance, laquelle de ces issues sera réalisée.
- **L'univers Ω** est l'ensemble de tous les résultats possibles.
  Posons **Ω = {ω1, ω2, …, ωn}.**
  (C'est-à- dire ***card*Ω= *n*)**
- On appelle **événement** toute partie ***A*** de **Ω**.
- Un événement réduit à une seule issue **{ωi}** est **un événement élémentaire.**
- **Ω** est appelé l'événement **certain.**
- $\varnothing$ est appelée l'événement **impossible.**
- Si ***A*** et ***B*** désignent deux événements de **Ω**, l'événement ***A*∪*B*** est réalisé si l'un au moins des événements ***A*** et ***B*** est réalisé.

- L'événement $A \cap B$ est réalisé si les événements A et B sont tous les deux réalisés.
- L'événement contraire d'un événement A , est $\overline{A}$ constitué des éléments de Ω n'appartenant pas à A.

Exemple :

Lancer un dé à 6 faces et noter le chiffre apparent sur la face supérieure, est une expérience aléatoire :

- Il y a 6 issues possibles.
- L'univers de cette expérience est $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.

- A :« Le résultat est impair » est un événement qu'on peut exprimer en langage symbolique de la forme suivante $A = \{1;3;5\}$.
- B :« Le résultat est un multiple de **5** » , est on peut écrire $B = \{5\}$. Donc B est un événement élémentaire, mais « **5** » est une issue possible et B est un ensemble qui contint cette seule issue.

2- Probabilité d'un événement :

Définition : Pour certaines expériences aléatoires, sous certaines conditions, on peut déterminer en pourcentage ou par un quotient « **la chance** » qu'un événement a pour ce réaliser. Ce **nombre** s'appelle la **probabilité** de l'événement.

- La probabilité d'un événement A d'un univers fini Ω est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.
- Par exemple :Si $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \omega_3 ; ... ; \omega_n\}$ et $A = \{\omega_2 ; \omega_5 ; \omega_8\}$ alors : $p(A) = p(\{\omega_2\}) + p(\{\omega_5\}) + p(\{\omega_8\})$
- $p(\Omega) = 1$; $p(\varnothing) = 0$ et Pour tout événement A on a : $0 \leq p(A) \leq 1$

Propriétés

- Pour tous événements A et B on a : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- Pour tous événements **disjoints** ou **incompatibles** A, B on a : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
- Pour tous événements deux a deux **disjoints** ou **incompatibles** $A_1, A_2 \dots A_n$ on a :

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n).$$

- Pour tout événement A, $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

3-Equiprobabilité :

Définition : Dans une expérience aléatoire, si tous les événements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisée, on dit qu'on est dans une situation d'équiprobabilité.

Donc : si $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \omega_3 ; ... ; \omega_n\}$

Alors $p(\omega_i) = \frac{1}{Card(\Omega)}$; c'est-à-dire pour tous événement A on a : $p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$.

Remarque : Dans le cas de l'équiprobabilité la détermination d'une probabilité se ramène en générale à des problèmes de **dénombrement**.

Exemple : On lance un dé **équilibré** (non truqué) dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

. On s'intéresse à la probabilité de l'évènement : A « le numéro de la face supérieure est multiple de 2 » on a : ***A* = {2 ;4 ; 6}** donc $p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

4- Probabilité conditionnelle :

Définition : Soit B un événement de l'ensemble Ω, tel que $P(B) \neq 0$.

On définit sur Ω une nouvelle probabilité, notée P_B, en posant, pour tout événement A, $P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

On note $P_B(A) = P(A/B)$ qui se lit « **probabilité de *A* que *B* est réalisé** ».

Propriété : Soient A et B deux événements de l'ensemble Ω, tel que $P(B) \neq 0$.

Alors : $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$.

Définition : On dit que deux événements A et B sont indépendants **lorsque.** $P(A\cap B) = P(B) \times P(A)$.

***Remarque* :** Ne pas confondre **indépendant** et **incompatible**

5- Probabilités totales :

Arbre de probabilité : C'est un arbre sur lequel on place des probabilités conditionnelles d'événements, cette présentation permet de rendre plus simple le calcul de probabilité .

***Remarque* :** Arbre probabiliste≠Arbre à dénombrer

Exemple :

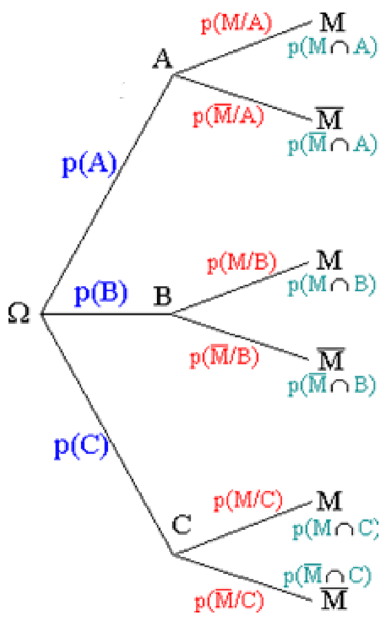
Soit p une probabilité sur un univers Ω et A, B et C trois évènements incompatibles et leur réunion est Ω .

Soit un événement M , donc nous obtenons l'arbre probabiliste suivant :

Remarque : Un **arbre de probabilités** comporte des **nœuds** et des **branches**. On applique les règles suivantes :

- la somme des probabilités marquées sur des branches issues d'un est égale à **1**.
- la probabilité d'un événement qui correspond à un chemin est le produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.
- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des branches aboutissant à cet événement.
- **Donc :**

$$p(M) = p(M\cap A) + p(M\cap B) + p(M\cap C)$$
$$= p_A(M) \times p(A) + p_B(M) \times p(B) + p_C(M) \times p(C)$$



6- Formule des probabilités totales :

Théorème : Soit $A_1, A_2, \ldots, A_k$, des événements de probabilité non nulle, réalisant une partition de l'univers Ω. Alors, pour tout événement B de ce même univers, on a :

$$p(B) = p(B\cap A_1) + p(B\cap A_2) + \ldots\ldots + p(B\cap A_k)$$
$$= p_{A_1}(B) \times p(A_1) + p_{A_2}(B) \times p(A_2) + \ldots\ldots + p_{A_k}(B) \times p(A_k)$$

Exercice : On considère trois urnes respectivement notées **U_1**, **U_2** et **U_3**. L'urne **U_1** contient **une** boule rouge et **cinq** boules jaunes, l'urne **U_2** contient **trois** boules rouges et **une** boule jaune, l'urne **U_3** contient **une** boule rouge et **deux** boules jaunes.

On choisit une urne au hasard et on tire une boule de cette urne.

Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?

7- Loi de probabilité d'une variable aléatoire:

Soit X une variable aléatoire sur Ω univers d'événements d'une expérience aléatoire Pour déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X, on suit les deux étapes suivantes :

- Détermination de $X(\Omega) = \{x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n\}$ l'ensemble des valeurs que peut prendre X.
- Calcul des probabilités $p(X = x_i)$ pour tout i de l'ensemble $\{1;2;3;\ldots;n\}$.

Exemple :

On lance **trois fois** de suite une pièce de monnaie équilibrée. On gagne **2** points pour chaque résultat « **Pile** » et on perd 1 point pour chaque résultat « **Face** ».

L'univers des cas possibles est **Ω = {PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF}** .

Soit X la variable aléatoire qui à chaque issue associe le **gain** du joueur.

L'ensemble des valeurs prises par X est $\{-3, 0, 3, 6\}$

(X = -3) = {FFF} et lui associer sa probabilité $p(X = -3) = \frac{Card(X = -3)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{8}$

(X = 0) = {FPF, FFP, PFF} et lui associer sa probabilité $p(X = 0) = \frac{Card(X = 0)}{Card(\Omega)} = \frac{3}{8}$

(X = 3) = {PPF, PFP, FPP} et lui associer sa probabilité $p(X = 3) = \frac{Card(X = 3)}{Card(\Omega)} = \frac{3}{8}$

(X = 6) = {PPP} et lui associer sa probabilité $p(X = 6) = \frac{Card(X = 6)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{8}$

Le tableau ci-contre concerne la loi de probabilité de la variable aléatoire X :

$X = x_i$	-3	0	3	6
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

- **Remarque :** Soit X une variable aléatoire sur Ω univers d'événements d'une expérience aléatoire avec $X(\Omega) = \{x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n\}$ et des probabilités $p(X = x_i)$ pour tout i de l'ensemble $\{1;2;3;\ldots;n\}$.

$$\sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = 1$$

8- L'espérance mathématique – la variance – l'écart type d'une variable aléatoire:

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est représentée dans le tableau à côté :

x_i	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
$p(X=x_i)$	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

Définition :

L'espérance mathématique de X	$E(X)=x_1\times p_1+x_2\times p_2+x_3\times p_3+\dots+x_n\times p_n=\sum_{i=1}^{n}x_i\times p_i$
La variance de X	$v(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\times p_i-\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\times p_i\right]^2$
L'écart type de X	$\sigma(X)=\sqrt{v(X)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\times p_i-\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\times p_i\right]^2}$

9-La loi binomiale:

Soit p la probabilité d'un événement A dans une expérience aléatoire.

On répète cette épreuve n fois de suite.

La variable aléatoire X qui lie chaque résultat au nombre de fois que cet événement se réalise s'appelle une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p.

Et on a : $\forall\ k\in\{0;1;2;3;\dots;\ n\}$; $p(X=k)=C_n^k\times p^k\times(1-p)^{n-k}$

$$Et\ E(X)=n\times p$$

$$Et\ \ V(X)=n\times p\times(1-p)$$