LYCEE HASSAN II Salé Al Jadida A.S : 2019/2020	EXAMENS NATIONAUX **Arithmétiques 2008-2019**	2ème BAC SC MATHS BIOf PROF : YOUNES BABA

EXAMEN NATIONAL 2019 SESSION NORMAL (3 points)

On admet que $\mathbf{2969}$ (l'année amazighe actuelle) est un **nombre premier** .

Soient $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{m}$ deux entiers naturels vérifiant : $\boldsymbol{n^8 + m^8 \equiv 0[2969]}$

1) - On suppose dans cette question que $\mathbf{2969}$ ne divise pas $\boldsymbol{n}$

0,5pt a) En utilisant le théorème de BEZOUT , montrer que : $(\exists \boldsymbol{u} \in \mathbb{Z})$; $\boldsymbol{u \times n \equiv 1[2969]}$

0,5pt b) En déduire que : $\boldsymbol{(u \times m)^8 \equiv -1[2969]}$ **et que** $\boldsymbol{(u \times m)^{2968} \equiv 1[2969]}$

(On remarque que : $\mathbf{2969 = 8 \times 371}$)

0,5pt c) Montrer que $\mathbf{2969}$ ne divise pas $\boldsymbol{u \times m}$

0,5pt d) En déduire qu'on a aussi $\boldsymbol{(u \times m)^{2968} \equiv 1[2969]}$

0,5pt 2) a) En utilisant les résultats précédents , montrer que $\mathbf{2969}$ divise $\boldsymbol{n}$

0,5pt b) Montrer que : $\boldsymbol{n^8 + m^8 \equiv 0[2969] \Leftrightarrow n \equiv 0[2969]}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{m \equiv 0[2969]}$

EXAMEN NATIONAL 2018 SESSION NORMAL (3 points)

Soit $\boldsymbol{p}$ un **nombre premier** tel que : $\boldsymbol{p = 3 + 4k}$ avec $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^*$.

0,5pt 1) Montrer que pour tout entier relatif $\boldsymbol{x}$, si $\boldsymbol{x^2 \equiv 1[p]}$ alors $\boldsymbol{x^{p-5} \equiv 1[p]}$

2) Soit $\boldsymbol{x}$ un entier relatif vérifiant $\boldsymbol{x^{p-5} \equiv 1[p]}$.

0,5pt a) Montrer que : $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{p}$ sont premier entre eux .

0,5pt b) Montrer que : $\boldsymbol{x^{p-1} \equiv 1[p]}$

0,5pt c) Vérifier que : $\boldsymbol{2 + (k-1)(p-1) = k(p-5)}$.

0,5pt d) En déduire que : $\boldsymbol{x^2 \equiv 1[p]}$

0,5pt 3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $\boldsymbol{x^{62} \equiv 1[67]}$

EXAMEN NATIONAL 2017 SESSION NORMAL (3 points)

On admet que $\mathbf{2017}$ est un **nombre premier** et que : $\mathbf{2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7}$

Et soit $\boldsymbol{p}$ un nombre premier supérieur ou égal à $\mathbf{5}$.

1) - Soit $\boldsymbol{(x; y)}$ un couple de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant : $\boldsymbol{px + y^{p-1} = 2017}$

0,25pt a) Vérifier que : $\boldsymbol{p < 2017}$.

0,5pt **b)** Montrer que : $\boldsymbol{p}$ ne divise pas $\boldsymbol{y}$.

0,75pt **c)** Montrer que : $\boldsymbol{y^{p-1} \equiv 1[p]}$ **puis** en déduire que $\boldsymbol{p}$ divise $\mathbf{2016}$.

0,5pt **d)** Montrer que : $\boldsymbol{p = 7}$.

1 pt **2)-** Déterminer , suivant les valeurs de p , les couples $(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant :

$$\boldsymbol{px + y^{p-1} = 2017}.$$

EXAMEN NATIONAL 2016 SESSION Normal (3 points)

__Partie *I*__ : Soit $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$ un élément de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que le nombre premier $\mathbf{173}$ divise $\boldsymbol{a^3 + b^3}$.

0,25pt 1) Montrer que : $\boldsymbol{a^{171} \equiv -b^{171}[173]}$ (***remarquer que*** $\mathbf{171 = 3 \times 57}$)

0,25pt 2) Montrer que : $\mathbf{173}$ divise $\boldsymbol{a}$ si et seulement si $\mathbf{173}$ divise $\boldsymbol{b}$.

0,25pt 3) Supposons que : $\mathbf{173}$ divise $\boldsymbol{a}$. Montrer que $\mathbf{173}$ divise $\boldsymbol{a + b}$.

4) Supposons que : $\mathbf{173}$ ne divise pas $\boldsymbol{a}$.

0,5pt a) En appliquant le théorème de Fermat montrer que : $\boldsymbol{a^{172} \equiv b^{172}\ [173]}$

0,5pt b) Montrer que : $\boldsymbol{a^{171}(a + b) \equiv 0[173]}$

0,5pt c) En déduire que : $\mathbf{173}$ divise $\boldsymbol{a + b}$.

__Partie *II*__ : On considére dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation $(\boldsymbol{E})$: $\boldsymbol{x^3 + y^3 = 173(xy + 1)}$.

Soit $(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ un élément de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ solution de l'équation $(\boldsymbol{E})$, on pose :

$\boldsymbol{x + y = 173k}$ où $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^*$.

0,25pt 1) Vérifier que : $\boldsymbol{k(x - y)^2 + (k - 1)xy = 1}$.

0,5pt 2) Montrer que : $\boldsymbol{k = 1}$, puis résoudre l'équation $(\boldsymbol{E})$.

EXAMEN NATIONAL 2015 SESSION NORMAL (3 points)

Soit $\boldsymbol{x}$ un **entier relatif** tel que : $\boldsymbol{x^{1439} \equiv 1436\ [2015]}$.

0,25pt 1) Sachant que : $\mathbf{1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1}$, montrer que $\mathbf{1436}$ et $\mathbf{2015}$ sont premiers entre eux .

2) Soit $\boldsymbol{d}$ un diviseur commun de $\boldsymbol{x}$ et $\mathbf{2015}$.

0,5pt a) Montrer que : $\boldsymbol{d}$ divise $\mathbf{1436}$.

0,5pt b) En déduire que $\boldsymbol{x}$ et $\mathbf{2015}$ sont premiers entre eux .

0,75pt 3) a) En appliquant le théorème de Fermat montrer que : $\boldsymbol{x^{1440} \equiv 1\ [5]}$;

	$x^{1440} \equiv 1\ [13]$ et $x^{1440} \equiv 1\ [31]$ (Remarque que $2015 = 5 \times 13 \times 31$)
0,5pt	*b*) Montrer que : $x^{1440} \equiv 1\ [65]$ puis en déduire que : $x^{1440} \equiv 1\ [2015]$.
0,5pt	4) Montrer que : $x \equiv 1051\ [2015]$.

EXAMEN NATIONAL 2015 SESSION DE Rattrapage (2 points)

0,5pt	1) Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que si a et 13 sont premiers entre eux alors : $a^{2016} \equiv 1\ [13]$.
	2) On considére dans $\mathbb{Z}$ l'équation : (E) : $x^{2015} \equiv 2\ [13]$ et soit x une solution de (E) .
0,5pt	a) Montrer que x et 13 sont premiers entre eux .
0,5pt	b) Montrer que : $x \equiv 7[13]$.
0,5pt	3) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{7 + 13k \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$.

EXAMEN NATIONAL 2014 SESSION NORMAL (3points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; On pose : $a_n = \underbrace{33 \ldots 3}_{n fois}1$ (n fois le chiffre 3)

0,5pt	1) Vérifier que : a_1 et a_2 sont premiers .
0,5pt	2) Montrer que Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $3a_n + 7 = 10^{n+1}$.
0,75pt	3) Montrer que Pour tout $k \in \mathbb{N}$: $10^{30k+2} \equiv 7[31]$.
0,75pt	4) Montrer que Pour tout $k \in \mathbb{N}$: $3a_{30k+1} \equiv 0[31]$, puis en déduire que : 31 divise a_{30k+1} .
0,5pt	5) Montrer que Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: si $n \equiv 1[30]$ alors l'équation : $a_n x + 31y = 1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

EXAMEN NATIONAL 2014 SESSION DE Rattrapage (1point)

Soit n un entier naturel non nul ; on pose :

$$b_n = 2 \times 10^n + 1 \quad \text{et} \quad c_n = 2 \times 10^n - 1 .$$

0,5pt	1) Montrer que : $b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$. puis en déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux
0,5pt	2) Trouver un couple $(x_n ; y_n)$ de $\mathbb{Z}^2$ vérifiant l'égalité : $b_n x_n + c_n y_n = 1$.

EXAMEN NATIONAL 2013 SESSION NORMAL (3points)

On cherche les entiers naturels n supérieur strictement de 1 vérifiant la relation :

$$(R) : \ 3^n - 2^n \equiv 0\ [n] \ .$$

1) Supposons que n vérifie la relation (R), et soit p le plus petit diviseur positif premier de n .

0,75pt a) Montrer que : $3^n - 2^n \equiv 0\ [p]$, puis en déduire que $p \geq 5$.

0,5pt b) Montrer que : $3^{p-1} \equiv 1[p]$ et que $2^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

0,5pt c) Montrer qu'il existe un couple $(a; b)$ de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $an - b(p-1) = 1$

d) Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de a par $(p-1)$.

0,5pt Montrer qu'il existe un entier naturel non nul k tel que : $rn = 1 + k(p-1)$.

0,75pt 2) En déduire qu'il n'existe aucun entier supérieur strictement de 1 vérifiant la relation (R).

EXAMEN NATIONAL 2012 SESSION NORMAL (3points)

On considére dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(\mathrm{E}) : \ 143x - 195y = 52$.

0,5pt 1) a) Déterminer le $PGCD$ de 195 et 143 , puis en déduire que l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

0,75pt b) Sachant que $(-1; -1)$ est une solution particuliére de (E) , résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) en précisant les étapes de la résolution .

2) Soit n un entier naturel non nul et premier avec 5 .

0,5pt Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$: $n^{4k} \equiv 1[5]$.

3) Soit x et y deux entiers naturels non nuls tel que : $x \equiv y[4]$.

0,5pt a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a : $n^x \equiv n^y[5]$.

0,5pt b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a : $n^x \equiv n^y[10]$.

4) Soit x et y deux entiers naturels tel que le couple $(x; y)$ est une solution de l'équation (E) .

0,25pt Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ les deux nombres n^x et n^y ont le même chiffre d'unités dans la base décimale .

	EXAMEN NATIONAL 2012 SESSION DE Rattrapage (3points)
0,25pt 0,75pt 0,5pt 0,25pt 1pt 0,25pt	1) a) Vérifier que 503 est un nombre premier. b) Montrer que : $7^{502} \equiv 1[503]$; en déduire que : $7^{2008} \equiv 1[503]$. 2) On considére dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 49x - 6y = 1$. Sachant que le couple $(1; 8)$ est une solution particulier de (E) ; résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) en précisant les étapes de la résolution . 3) On pose : $N = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^{2007}$. a) Vérifier que le couple $(7^{2006}; N)$ est une solution de l'équation (E) . b) Montrer que : $N \equiv 0[4]$ et $N \equiv 0[503]$. c) En déduire que le nombre N est divisible par 2012 .
	EXAMEN NATIONAL 2011 SESSION NORMAL (2,5points)
  0,25pt 0,75pt 0,5pt 0,5pt 0,5pt	Soit N l'entier naturel dont l'écriture dans la base décimale est : $N = \underbrace{111\ldots11}_{2010\ fois\ 1}$ 1) Montrer que le nombre N est divisible par 11 . 2) a) Vérifier que le nombre 2011 est premier et que : $10^{2010} - 1 = 9N$. b) Montrer que le nombre 2011 divise le nombre $9N$. c) En déduire que le nombre 2011 divise le nombre N . 3) Montrer que le nombre N est divisible par 22121 .
	EXAMEN NATIONAL 2011 SESSION DE Rattrapage (2,5 points)
 0,25pt 0,5pt 0,75pt 0,5pt 0,5pt	Soit x un entier naturel vérifiant : $10^x \equiv 2[19]$. 1) a) Vérifier que : $10^{x+1} \equiv 1[19]$. b) Montrer que : $10^{18} \equiv 1[19]$. 2) Soit d le PGCD de 18 et $(x + 1)$. a) Montrer que : $10^d \equiv 1[19]$. b) Montrer que : $d = 18$. c) En déduire que : $x \equiv 17[18]$

	EXAMEN NATIONAL 2010 SESSION NORMAL (3points)
0,75pt	1) Déterminer les entiers relatifs m vérifiant : $m^2+1\equiv 0[5]$.
	2) Soit p un **nombre premier** tel que : $p=3+4k$ avec k un entier naturel .
	Et soit n un entier naturel tel que : $n^2+1\equiv 0[p]$
0,5pt	a) Vérifier que : $(n^2)^{2k+1}\equiv -1[p]$
0,75pt	b) Montrer que n et p sont premiers entre eux .
0,5pt	c) En déduire que $(n^2)^{2k+1}\equiv 1[p]$.
0,5pt	d) Déduire qu'il n'existe aucun entier naturel n vérifiant : $n^2+1\equiv 0[p]$.
	EXAMEN NATIONAL 2009 SESSION NORMAL (3points)
	Pour tout entier naturel non nul n on pose : $a_n=2^n+3^n+6^n-1$
0,25pt	1) a) Vérifier que : a_n est pair pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
0,5pt	b) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles : $a_n\equiv 0[3]$.
	2) Soit p un nombre premier tel que $p>3$.
0,75pt	a) Montrer que : $2^{p-1}\equiv 1[p]$; $3^{p-1}\equiv 1[p]$ et $6^{p-1}\equiv 1[p]$.
0,75pt	b) Montrer que : p divise a_{p-2} .
0,75pt	3) Montrer que pour tout nombre entier naturel premier q , il existe un entier naturel non nul n tel que : $a_n\wedge q=q$.
	EXAMEN NATIONAL 2008 SESSION NORMAL (3points)
	I- On considére dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E):35u-96v=1$.
0,25pt	1) Vérifier que le couple $(11;4)$ est une solution particuliére de (E) .
0,5pt	2) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E) .
	II- On considére dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(F):x^{35}\equiv 2\,[97]$
	1) Soit x une solution de l'équation (F) .
0,5pt	a) Montrer que 97 est premier ; et que x et 97 sont premier entre eux .
0,5pt	b) Montrer que : $x^{96}\equiv 1\,[97]$.

0,5pt c) Montrer que : $x \equiv 2^{11}\ [97]$.

2) Montrer que si l'entier x vérifie $x \equiv 2^{11}\ [97]$ alors :

0,25pt x est une solutions de l'équation (F) .

0,5pt 3) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (F) est l'ensemble des entier qui s'écrivent sous la forme $11 + 97k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

إهداء

إلى صاحبة القلب الكبير المليء بالعطف والحنان ، التي لاتبخل علينا من جودها ، والتي تملئ حياتنا بوجودها ، فلن نوفّ قدرها حتى ولو أتينا بأرقى العبارات ، ولن نستطيع أن نوفي كل ما عانته من أجلنا . فلها الفضل بعد الله عز وجل . في كل نجاح نصيبه . فنسأل الله أن يحفظ أمهاتنا جميعا.

إلى سواعد الأمة و أجيال المستقبل تلميذات و تلاميذ شعبة العلوم الرياضية و بالخصوص تلاميذ ثانوية الحسن الثاني التأهيلية نهدي هذا العمل المتواضع .