Lycée Khatteb Pr :Dir	**Examen Simili** **IIème Semestre**	**2 SMA** **Maths**	**Durée : 4h** **Avril 2020**

Renseignements d'ordre général

-L'utilisation de la calculatrice est formellement interdite

-Le candidat peut traiter les questions et les sous-questions selon l'ordre qui lui convient

-La première page donne les renseignements sur le sujet d'examen et les pages qui suivent comportent l'énoncé de l'épreuve.

-Eviter d'utiliser le stylo rouge lors de la rédaction

-Le sujet d'examen comporte cinq exercices indépendants :

Exercices	Domaines d'évaluation	Notes
Exercice1	Arithmétique	3 points
Exercice2	Structures	3,5 points
Exercice3	Complexes	3,5 points
Exercice4	L'ANALYSE	5,5 points
Exrcice5	L'ANALYSE	4,5 points

Lycée Khatteb Pr :Dir	Examen Simili IIème Semestre	2 SMA Maths	Durée : 4h Avril 2020

Exercice1 (3 pts.)

I- On considère dans $\mathbb{Z}$ *, l'équation* $(E)\ :\ 2x^4 + x - 1 \equiv 0\ [10]$

1)Soit . (E) *l'équation une solution de* x

a-Montrer que : $x \wedge 10 = 1$ 0,5

b- En déduire que : $x \equiv -1\ [10]$ 0,75

2)Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E) *.* 0,5

II- On considère dans $\mathbb{R}$ *, l'équation* $(F)\ :\ 2x^4 + x - 1 = 0$

1)Montrer que l'équation (F) *admet dans* $[0,+\infty[$ *une solution unique* α *,*

Et que $\alpha \in]0,1[$ *.* 0,5

2) Montrer que : $\alpha \notin \mathbb{Q}$ 0,75

Exercice2 (3,5 pts.)

On considère dans $M_2(\mathbb{R})$*, l'ensemble :*

$$E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & 4b \\ -b & a-b \end{pmatrix}\ /\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

On pose : $M(1,0) = I$ *et* $M(0,1) = J$

1)-a-Montrer que $(E,+,\ .)$ *est un espace vectoriel réel .* 0,25

b-Montrer que la famille $B = (I,J)$ *est une base de* $(E,+,\ .)$ 0,5 *c-Montrer que $J^2 = -3I$ et que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$* **0,5**

d-Déterminer dans la base $B = (I,J)$ les coordonnées de la matrice :

$$S_n = I + J + \cdots + J^n \quad , avec \ n \in \mathbb{N}$$ **0,5**

2) Soit l'application : $\begin{cases} f : \mathbb{C} \to E \\ a + ib\sqrt{3} \mapsto M(a,b) \end{cases}$

a-Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{C},\times)$ vers $(E,\times)$. **0,5**

b- En déduire la structure de $(E,+,\times)$ **0,25**

c-Déterminer l'inverse de $M(a,b)$ dans $(E^*,\times)$ **0,5**

d- On pose : $A = \frac{1}{2}(I + J)$

Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ telles que : $A^n = I$ **0,5**

Exercice3 (3,5pts.)

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$(E) : \ \frac{1}{m} z^2 + (1 - 3i)z - 4m = 0 \quad avec \ m \in \mathbb{C}^*$$

1)-a-Déterminer les deux racines carrées du nombre $a = 8 - 6i$ **0,25**

b-Déterminer en fonction de m les deux solutions z_1 et z_1 de (E). **0,5**

$$\left(z_1 \ est \ la \ solution \ de \ (E) \ telle \ que \ Re\left(\frac{z_1}{m}\right) < 0\right)$$

c-On pose : $arg(m) \equiv \theta \ [2\pi]$

Calculer en fonction de θ , $arg(z_1)$ et $arg(z_2)$ **0,5**

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$,

On considère les points : $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M(m)$ et $D(z_D = 1+3i)$

a-Montrer que le triangle $O\,M_1\,M_2$ est rectangle en O . **0,25**

b-Déterminer l'ensemble des points $M(m)$ tels que les points O , M et D soient alignés . **0,5**

c- Déterminer l'ensemble des points $M(m)$ tels que le triangle ODM soit rectangle en O . **0,5**

3) M'_1 est l'image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

M'_2 est l'image de M_2 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{2}$

a-Montrer que les points M_1 , M_2 , M'_1 et M'_2 sont cocycliques . **0,5**

b-Déterminer en fonction de m , l'affixe du point Ω le centre du cercle passant par les points M_1 , M_2 , M'_1 et M'_2 . **0,5**

Exercice4 (5,5 pts.)

Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall\, x \in \mathbb{R}),\quad f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n} \quad avec\ \ n \in \mathbb{N}^*$$

On désigne par (C_n) le graphe de f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Lycée Khatteb Pr :Dir	***Examen Simili*** ***IIème Semestre***	***2 SMA*** ***Maths***	***Durée : 4h*** ***Avril 2020***

1)-Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f_n(x)}{x} = -\infty$ *, puis en déduire la nature de la branche infinie de* (C_n) *au voisinage de* $-\infty$ *0,75*

2)a- Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) - x = 0$ *.*

Que peut –on en déduire ? *0,75*

b-Etudier la position relative de (C_n) *et de la droite* $(\Delta) : y = x$ *0,25*

3)-a- Montrer que : $(\forall\, x \in \mathbb{R})\ ,\ f'_n(x) = \frac{n-e^{-x}}{n}$ *0,25*

b-Dresser le tableau de variation de f_n *0,5*

4) Construire la courbe (C_3) *dans le repère* $(O,\vec{i},\vec{j})$*.* *0,25*

(*On donne :* $Ln3 \cong 1,1$; $f_3(-1,5) \cong 0$; $f_3(-0,6) \cong 0$)

5)a- Montrer que si $n \geq 3$ *, l'équation* $(E) : f_n(x) = 0$ *, admet exactement deux solutions* a_n *et* b_n *tels que :* $a_n \leq -Ln\, n$ *et* $\frac{-e}{n} \leq b_n < 0$ *0,75*

b-Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ *0,5*

c-Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} -n\, b_n = 1$ *0,25*

6) *Soit g la fonction définie sur* $[0,+\infty[$ *par :*

$$g(0) = -1 \ \text{et} \ (\forall\, x \in]0,+\infty[)\ \ g(x) = -1 - x\, Ln\, x$$

a-Montrer que g *est continue à droite en* 0 *0,25*

b-Montrer que : $(\forall\ n \geq 3),\ g\left(\frac{-1}{a_n}\right) = \frac{Ln\, n}{a_n}$ *et déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{Ln\, n}{a_n}$*.* *0,25*

Lycée Khatteb Pr :Dir	***Examen Simili*** ***IIème Semestre***	***2 SMA*** ***Maths***	***Durée : 4h*** ***Avril 2020***

Exercice5 (4,5 pts.)

Soit F la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ ***par :***

$$\left(\forall x \in \left]\frac{1}{2},+\infty\right[\right) \quad , \quad F(x) = \int_x^{2x} \frac{Ln(t)}{2t-1}\,dt$$

1) Montrer que F est dérivable sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ ***et que :***

$$\left(\forall x \in \left]\frac{1}{2},+\infty\right[\right) \quad F'(x) = \frac{(4x-2)Ln2 - Ln\,x}{(2x-1)(4x-1)}$$

0,75

2)-a- Montrer que : $\left(\forall x \in \left]\frac{1}{2},+\infty\right[\right)\ (4x-2)Ln2 - Ln\,x > 0$

0,25

b- En déduire la monotonie de F sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ ***0,25***

3)-a-En utilisant le théorème des accroissements finis , montrer que :

$$\left(\forall x \in]1,+\infty[\right)\ \left(\exists c \in]x,2x[\right)\ F(x) = \frac{x\,Ln\,c}{2c-1}$$ ***0,5***

b- En déduire que : $\left(\forall x \in]1,+\infty[\right),\ \frac{x\,Ln\,x}{4x-1} < F(x) < \frac{x\,Ln\,(2x)}{2x-1}$ ***0,5***

c-Calculer et interpréter : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ ***et*** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$ ***0,25***

4)-a-Montrer que : $\left(\forall x \in]0,+\infty[\right)\ Ln\,x \leq x-1$ ***0,25***

b- Montrer que : $\left(\forall x \in \left]\frac{1}{2},1\right[\right) \quad , \quad \int_1^x \frac{Ln(t)}{2t-1}\,dt \geq \int_1^x \frac{t-1}{2t-1}\,dt$ ***0,25***

c-En déduire : $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} \int_1^x \frac{Ln(t)}{2t-1}\,dt$

0,5

d- Montrer que : $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} F(x) = -\infty$ ***0,25***

Fin Du Sujet