PR : ABOULFADIL YASSINE	**Les fonctions logarithmiques**	2 BAC PC/SVT

I- La fonction logarithme népérien :

1- Définition :

La primitive de la fonction $x \to \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1, est appelée la fonction logarithme népérien, cette fonction est notée ln.

2- Propriétés :

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$	$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$	$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
$\ln(e) = 1$	$\ln(1) = 0$	$\ln(e^n) = n\ ;\ (n \in R)$
$\ln(a^n) = n\ln(a)\ ;\ (n \in R)$	$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$	

Equations et inéquations :

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

- $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$
- $\ln(x) > \ln(y) \Leftrightarrow x > y$
- $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$
- $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

3-Le Domaine de définition :

La fonction f est définie comme suit :	Son domaine de définition est :
$f(x) = \ln(x)$	$D_f =]0,+\infty[$
$f(x) = \ln(u(x))$	$D_f = \{x \in R \mid x \in D_u \ Et \ u(x) > 0\}$

4- Les limites:

Limites principales
$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
$\lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$
$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Déductions
$\lim_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \ln[u(x)] = +\infty$
$\lim_{x \to x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \ln[u(x)] = -\infty$
$\lim_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\ln[u(x)]}{[u(x)]^n} = 0$
$\lim_{x \to x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \to x_0} [u(x)]^n \ln[u(x)] = 0$
$\lim_{x \to x_0} u(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\ln[u(x)]}{u(x)-1} = 1$
$\lim_{x \to x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\ln[u(x)+1]}{u(x)} = 1$

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit a droite ou a gauche de x_0 ou bien au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

5- La continuité:

La fonction $x \to lnx$ est continue sur l'intervalle$]0;+\infty[$.

Si u est strictement positive et continue sur un intervalle I alors la fonction $x \to \ln\big(u(x)\big)$ est continue sur l'intervalle I .

6- La dérivabilité:

La fonction $x \to lnx$ est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$et on a :

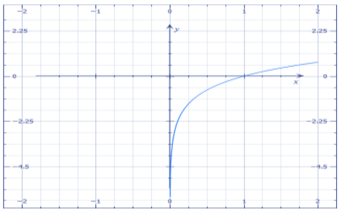
$$\forall x \in \,]0;+\infty[\,;\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Si u(x) est strictement positive et dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x \to \ln\,(u(x))$ est dérivable sur l'intervalle I et on a :

$$\forall x \in I\,;\ln'(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

7- La représentation graphique / signe de ln :

La représentation graphique :



signe de ln :

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	

II- La fonction logarithme de base a avec $a \in \mathbb{R}_+^* - \{\ 1\ \}$:

1- Définition :

La fonction logarithme de base a est la fonction notée : $\log_a$

tel que : $\forall\, x \in \,]0;+\infty[\ ;\ \log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Cas particulier: la fonction $\log_{10}$ est la fonction logarithme décimal et on la note $\log$

2- Propriétés :

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

$\log_a(1) = 0$	$\log_a(a) = 1$	$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
$\log_a(x^n) = n \times \log_a(x)$	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$	$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$

Limites et inéquations:

$a \succ 1$	$0 \prec a \prec 1$
$\log_a x \succ \log_a y \Leftrightarrow x \succ y$	$\log_a x \succ \log_a y \Leftrightarrow x \prec y$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$

La dérivée:

$$\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$