ملخص التعداد

رئيسي مجموعة:

تعريف:

رئيسي مجموعة منتهية E هو عدد عناصر المجموعة E ويرمز له بالرمز: $CardE$

حالة خاصة: $Card\varnothing = 0$

خاصية:

A و B مجموعتان منتهيتان

$Card\left(A \cup B\right) = CardA + CardB - Card\left(A \cap B\right)$

متمم مجموعة:

تعريف:

ليكن A جزءا من مجموعة منتهية E

متمم A بالنسبة للمجموعة E هي المجموعة التي يرمز لها بالرمز: $\overline{A}$

حيث $\overline{A} = \{x \in E \,/\, x \notin A\}$

ملاحظات:

- $A \cap \overline{A} = \varnothing$
- $A \cup \overline{A} = E$
- $card\overline{A} = cardE - cardA$

المبدأ الأساسي للتعداد:

نعتبر تجربة تتطلب نتائجها p اختيارا $\left(p \in \mathbb{N}^*\right)$

إذا كان الاختيار الأول يتم ب n_1 كيفية مختلفة

و كان الاختيار الثاني يتم ب n_2 كيفية مختلفة

....

و كان الاختيار p يتم ب n_p كيفية مختلفة

فإن عدد النتائج المكنة هو الجداء: $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_p$

الترتيبات بتكرار - الترتيبات بدون بتكرار:

الترتيبات بتكرار:

ليكن n و p عنصرين من $\mathbb{N}^*$ $\left(p \leq n\right)$

عدد الترتيبات بتكرار ل p عنصر من بين n عنصر هو: n^p

الترتيبات بدون بتكرار:

ليكن n و p عنصرين من $\mathbb{N}^*$ $(p \leq n)$

عدد الترتيبات بدون تكرار ل p عنصر من بين n عنصر هو :

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}_{p \text{ من العوامل}}$$

حالة خاصة:

كل ترتيبة بدون تكرار ل n عنصر من بين n عنصر تسمى كذلك تبديلة ل n عنصر

و عددها : $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$

التأليفات:

لتكن E مجموعة منتهية عدد عناصرها n

كل جزء A من E عدد عناصره p $(p \leq n)$

يسمى تأليفة ل p عنصر من بين n عنصر

و عدد هذه التأليفات هو : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$

الأعداد: $n!$ و A_n^p و C_n^p

<table>
<tr><td colspan="4">$n \in \mathbb{N}^*$ $\quad n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$
$0! = 1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$</td><td colspan="2">$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$</td></tr>
<tr><td>$C_n^{n-1} = n$</td><td>$C_n^0 = 1$</td><td>$C_n^1 = n$</td><td>$C_n^n = 1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$</td><td colspan="2">$C_n^p = C_n^{n-p}$</td></tr>
</table>

بعض أنواع السحب:

نسحب p عنصر من بين n عنصر $(p \leq n)$

نلخص النتائج في الجدول التالي :

نوع السحب	عدد السحبات الممكنة هو	الترتيب
آني	C_n^p	غير مهم
بالتتابع و بإحلال	n^p	مهم
بالتتابع و بدون إحلال	A_n^p	مهم

ملخص الاحتمالات

مصطلحات

المصطلح الاحتمالي	معناه
تجربة عشوائية	كل تجربة تقبل أكثر من نتيجة
Ω كون الإمكانيات	هي مجموعة الإمكانيات الممكنة لتجربة عشوائية
حدث A	A جزءا من كون الإمكانيات Ω
حدث ابتدائي	كل حدث يتضمن عنصرا وحيدا
تحقق الحدث $A\cap B$	إذا تحقق الحدثان A و B في آن واحد
تحقق الحدث $A\cup B$	إذا تحقق A أو B أو هما معا
الحدث المضاد للحدث A	هو الحدث $\overline{A}$ $\left(A\cap\overline{A}=\varnothing \text{ و } A\cup\overline{A}=\Omega\right)$
A و B حدثان غير منسجمين	$A\cap B=\varnothing$

استقرار حدث - احتمال حدث:

تعريف:

ليكن Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية

- عندما يستقر احتمال حد ث ابتدائي $\{\omega_i\}$ في قيمته p_i نقول أن احتمال الحدث $\{\omega_i\}$ هو : p_i
  ونكتب : $P\left(\{\omega_i\}\right)=p_i$
- احتمال حدث هو مجموع الاحتمالات الابتدائية التي تكون هذا الحدث
  أي إذا كان $A=\{\omega_1;\omega_2;\omega_3;...;\omega_n\}$ حدثا من Ω فإن احتمال الحدث A هو :
  $$p(A)=p(\omega_1)+p(\omega_2)+p(\omega_3)+...+p(\omega_n)$$

خاصيات:

ليكن Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية

- $p(\varnothing)=0$ و $p(\Omega)=1$
- $0\le p(A)\le 1$ لكل حدث A من Ω
- احتمال اتحاد حدثين :
  لكل حدثين A و B من Ω
  $$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$
  $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$ إذا كان A و B غير منسجمين
- احتمال الحدث المضاد:
  لكل حدث A من Ω : $p\left(\overline{A}\right)=1-p(A)$

فرضية تساوي الاحتمالات:

تعريف:

إذا كانت جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال في تجربة عشوائية كون إمكانيتها Ω

فإن احتمال كل حدث A من Ω هو : $p(A)=\dfrac{cardA}{card\Omega}$

الاحتمال الشرطي- استقلالية حدثين:

تعريف:

ليكن A و B حدثين مرتبطين بنفس التجربة العشوائية بحيث : $p(A) \neq 0$

احتمال حدث B علما أن الحدث A محقق هو العدد : $p_A(B) = p\left(B/A\right) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

نتيجة :

لكل حدثين A و B مرتبطين بنفس التجربة العشوائية بحيث : $p(A) \times p(B) \neq 0$

لدينا : $p(A \cap B) = p(A) \times p\left(B/A\right) = p(B) \times p\left(A/B\right)$

تعريف:

لكل حدثين A و B مرتبطين بنفس التجربة العشوائية

A و B حدثان مستقلان $\Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

خاصية:

ليكن Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية و Ω_1 و Ω_2 تجزيئا ل Ω

$(\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$ و $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega)$

لكل حدث A من Ω : $p(A) = p(\Omega_1) \times p\left(A/\Omega_1\right) + p(\Omega_2) \times p\left(A/\Omega_2\right)$

الاختبارات المتكررة:

ليكن A حدثا في تجربة عشوائية احتماله p

إذا أعيدت هذه التجربة n مرة فان احتمال تحقق الحدث A , k مرة بالضبط هو :

$$C_n^k (p)^k (1-p)^{n-k} \qquad (k \leq n)$$

قانون احتمال متغير عشوائي:

ليكن متغيرا عشوائيا على Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية

لتحديد قانون احتمال المتغير العشوائي X نتبع المرحلتين التاليتين :

- تحديد $X(\Omega) = \{x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n\}$: مجموعة القيم التي يأخذها المتغير X
- نحسب الاحتمال $p(X = x_i)$ لكل i من المجموعة $\{1;2;\ldots;n\}$

الأمل الرياضي- المغايرة- الانحراف الطرازي لمتغير عشوائي:

ليكن X متغيرا عشوائيا قانونه معرف بالجدول التالي :

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

تعاريف:

الأمل الرياضي للمتغير X	$E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + x_3 \times p_3 + \ldots + x_n \times p_n$
المغايرة للمتغير X	$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
الانحراف الطرازي للمتغير X	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

القانون الحداني:

ليكن p احتمال حدث A في تجربة عشوائية, نعيد هذه التجربة n مرة

المتغير العشوائي X الذي يربط كل نتيجة بعدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A يسمى توزيعا حدانيا وسيطاه n و p

ولدينا $p(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k} \qquad \forall k \in \{0;1;2;\ldots;n\}$

و $E(X) = n \times p$ و $V(X) = np(1-p)$