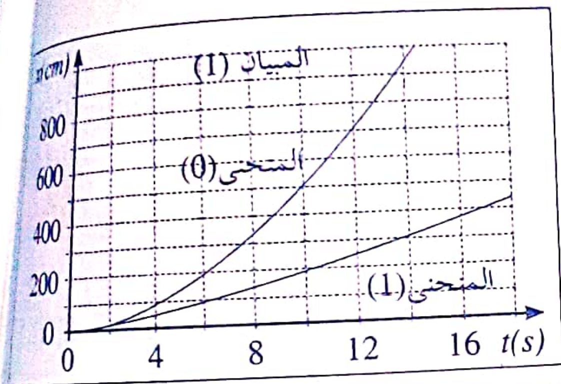
نموذج 1 دراسة سقوط قطرة ما.

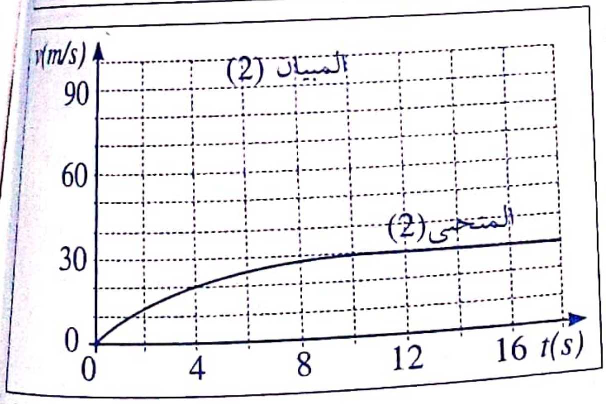
معطيات:

- حجم كرة شعاعها R: $V=\frac{4}{3}\pi.R^3$
- الكتلة الحجمية للماء: $\mu=1,0\times10^3 kg.m^{-3}$
- الكتلة الحجمية للهواء: $\rho = 1,3kg.m^{-3}$
- شدة مجال الثقالة: $g=9,8m.s^{-2}$
- معامل اللزوجة للهواء: $\eta = 1,81\times10^{-5}kg.s^{-1}.m^{-1}$
- معامل الاحتكاك المائع لكرة شعاعها R تتحرك في الهواء: $f=6\pi.\eta.R$

• بالنسبة لقطرة الماء المدروسة:

- شعاع قطرة الماء التي نعتبرها كروية الشكل: $R=0,50mm$.
- حجم قطرة الماء: $V=5,2\times10^{-10}m^3$.
- كتلة قطرة الماء: $m=5,2\times10^{-7}kg$.
- معامل الاحتكاك المائع: $f=1,7\times10^{-7}kg.s^{-1}$.





1- السقوط الحر لقطرة الماء

نعتبر قطرة الماء في سقوط رأسي في الفراغ بدون سرعة بدئية، عند $t=0$، انطلاقا من نقطة O التي نختارها أصلا لمحور رأسي Ox موجه نحو الأسفل.

1.1- أثبت المعادلة التفاضلية لحركة قطرة الماء واستنتج المعادلتين الزمنيتين $v(t)$ و $x(t)$.

1.2- يمثل المنحنى (0) (المبيان 1) المعادلة الزمنية للحركة $x(t)$.

خط المنحنى $v(t)$ الذي يمثل تغيرات السرعة v لقطرة الماء بدلالة الزمن t على المبيان 2 .

لإنجاز دراسة واقعية لسقوط قطرة الماء في الهواء، يجب أخذ بعين الاعتبار قوة دافعة أرخميدس وقوى الاحتكاك.

2- قوة دافعة أرخميدس:

تذكير: كل جسم مغمور في مائع، يخضع إلى قوة دافعة أرخميدس رأسية موجهة من الأسفل نحو الأعلى وشدتها تساوي شدة وزن المائع المزاح.

2.1- ما قيمة حجم الهواء المزاح بواسطة قطرة الماء.

2.2- حدّد الكتلة ثم شدة وزن الهواء المزاح.

... هذه الشدة مع شدة وزن قطرة الماء. استنتج.

- قوة الاحتكاك

... قوة الاحتكاك مع السرعة v ولها نفس الاتجاه ومنحى معاكس: $\vec{F}=-f.\vec{v}$

- احسب شدة قوة الاحتكاك عندما تأخذ سرعة قطرة الماء القيمة $v=10m.s^{-1}$.

- قارن شدة القوة $\vec{F}$ مع شدة وزن قطرة الماء. استنتج.

- المعادلة التفاضلية لحركة قطرة الماء.

4.1- اجرد القوى المطبقة على قطرة الماء، ومثلها على تبيانة بالنسبة للسرعة $v=10m.s^{-1}$ باستعمال السلم: $0,5cm$ يمثل $10^{-6}N$.

4.2- بين أن المعادلة التفاضلية للحركة هي: $\frac{dv}{dt}=-\frac{f}{m}.v+g$

4.3- اعط المدلول الفيزيائي لكل من المقادير الواردة في هذه المعادلة.

5- حل المعادلة التفاضلية

يمثل المنحنى (2) (المبيان 2) الحل $v(t)$ للمعادلة التفاضلية السابقة ويمثل المنحنى (1) (المبيان 1) المعادلة الزمنية للحركة $x(t)$ التي نحصل عليها بحساب التكامل للدالة $v(t)$.

5.1- ما المسافة التي تقطعها قطرة الماء حيث تصبح قوة الاحتكاك تؤثر بكيفية ملحوظة.

5.2- كيف تصبح طبيعة الحركة بعد مضي 10 ثوان.

5.3- ما قيمة التسارع a_0 لقطرة الماء عند اللحظة $t=0$.

6- السرعة الحدية لقطرة الماء.

6.1- باستغلال المنحنيات، عيّن السرعة الحدية v_ℓ لقطرة الماء.

6.2- باستغلال المعادلة التفاضلية للحركة، احسب السرعة الحدية v_ℓ لقطرة الماء وقارنها مع القيمة السابقة.

7- تأثير أبعاد قطرة الماء.

نفترض أن شعاع قطرة الماء يساوي ضعف القطرة السابقة $R'=2R$. ما تأثير هذا التغيير على السرعة الحدية. استنتج.

* الجسم المرجعي: الجسم المرجعي الأرضي الذي نعتبره غاليليا.

* القوى المطبقة على قطرة الماء:

بما أن قطرة الماء في سقوط رأسي حر، فإنها تخضع فقط إلى وزنها $\vec{p} = m.\vec{g}$

– بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نكتب:

$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{p} = m.\overrightarrow{a_G}$ أي $m.\vec{g} = m.\overrightarrow{a_G}$ ومنه $\overrightarrow{a_G} = \vec{g}$

– بإسقاط هذه العلاقة على المحور (Ox) نجد: $a_z=g$

أي $\frac{dv}{dt} = g$ وهي المعادلة التفاضلية للحركة.

• **استنتاج المعادلتين الزمنيتين $v(t)$ و $x(t)$:**

– حسب المعادلة التفاضلية، $v(t)$ هي دالة تكاملية للثابتة g.

إذن $v(t)=g.t+C_1$ حيث C_1 ثابتة التكامل لها أبعاد السرعة.

وحسب الشروط البدئية: عند $t=0$ لدينا $v=v_0=0$ ومنه $C_1=0$ وبالتالي: $v(t)=g.t$

• حسب تعريف السرعة اللحظية نكتب: $v(t) = \frac{dx}{dt}$

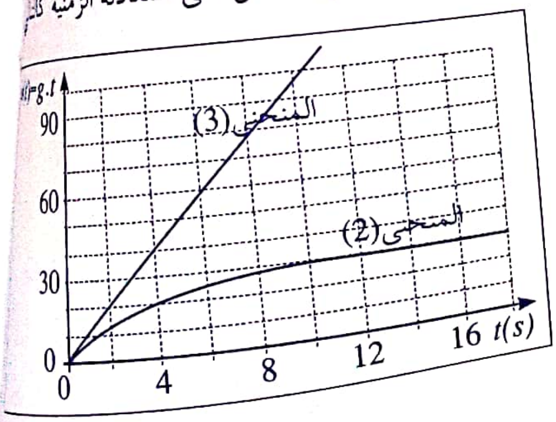
إذن $x(t)$ هي دالة تكاملية لدالة السرعة: $v=g.t$ ومنه $x(t) = \frac{1}{2}g.t^2 + C_2$ حيث C_2 ثابتة التكامل

وحسب الشروط البدئية: عند $t=0$ لدينا $x=x_0=0$ ومنه $C_2=0$ وبالتالي نحصل على المعادلة الزمنية كالتالي: $x = \frac{1}{2}g.t^2$

1.2– تمثيل المنحنى $v(t)$ على المبيان (2):

لدينا $v(t)=g.t$ أي $v(t)=9,8t$

وبالتالي نحصل على المنحنى (3).



2– قوة دافعة أرخميدس:

2.1– حجم الهواء المزاح:

يساوي حجم الهواء المزاح حجم قطرة الماء: $V=5,2.10^{-10}m^3$

2.2– كتلة الهواء المزاح وشدة وزنه:

• كتلة الهواء المزاح هي:

$m_{(هواء)} = \rho.V$ أي $m_{هواء} = 6,76.10^{-10}kg$

• وشدة وزنه: $P_{(هواء)} = m_{(هواء)}.g$ ؛

• مقارنة شدة وزن الهواء المزاح وشدة وزن قطرة الماء.

– شدة وزن الهواء المزاح: $P_{(هواء)} = m_{(هواء)}.g$.

– شدة وزن قطرة الماء $P=m.g$

أي: $\frac{P}{P_{هواء}} = \frac{m}{m_{هواء}}$ أي: $\frac{P}{P_{هواء}} = \frac{5,2 \times 10^{-7}}{6,76.10^{-10}}$ أي أن: $\frac{P}{P_{هواء}} \simeq 769$

وبالتالي يمكن إهمال شدة وزن الهواء المزاح، أي شدة دافعة أرخميدس، أمام شدة وزن قطرة الماء.

3- قوة الاحتكاك:

3-1- حساب شدة قوة الاحتكاك

لدينا $\vec{F} = -f.\vec{v}$ وشدتها $F=f.v$ مع : $f = 2\pi R\eta$ (حسب المعطيات)

بالنسبة للسرعة $v=10m.s^{-1}$ نجد $F=1,7.10^{-6}N$

3-2- مقارنة الشدة F وشدة وزن قطرة الماء:

شدة وزن قطرة الماء: $P = m.g \simeq 5,1.10^{-6}N$

$\frac{F}{P} = 3...$ وبالتالي لا يمكن إهمال قوة الاحتكاك أمام وزن قطرة الماء إذا قورنت بشدة دافعة أرخميدس.

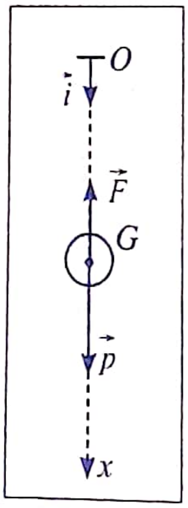
4- المعادلة التفاضلية لحركة قطرة الماء

4-1- جرد القوى وتمثيلها:

بإهمال دافعة أرخميدس أمام باقي القوى، تخضع قطرة الماء خلال حركتها إلى:

- وزنها: $\vec{P} = m.\vec{g}$

- قوة الاحتكاك: $\vec{F} = -f.\vec{v}$



- تمثيل القوى:

لدينا $P=5,1.10^{-6}N$ و $F=1,7.10^{-6}N$.

باستعمال السلم: $0,5cm$ يمثل $10^{-6}N$ نحصل على التمثيل جانبه.

4-2- إثبات المعادلة التفاضلية للحركة:

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على قطرة الماء بالنسبة للجسم المرجعي الأرضي الذي نعتبره غاليليا نكتب: $\vec{P} + \vec{F} = m.\vec{a}_G$ أي: $m.\vec{g} - f.\vec{v} = m.\vec{a}_G$.

بإسقاط هذه العلاقة على المحور (Ox) نجد:

$m.g-f.v=m.a_G$ أي $m.g - f.v = m.\frac{dv}{dt}$

$\frac{dv}{dt} = -\frac{f}{m}.v + g$ وهي المعادلة المطلوب إثباتها.

4.3- المدلول الفيزيائي لكل مقدار:

m: كتلة قطرة الماء وf: معامل الاحتكاك المائع
v: السـرعة و $\frac{dv}{dt}$: مشتقة السرعة أو التسارع و
مجال الثقالة أو تسارع الثقالة.

5- حل المعادلة التفاضلية:

5.1- المسافة التي تقطعها قطرة الماء:

* حسب تعبير شدة قوة الاحتكاك $F=f.v$، تتزايد قوة الاحتكاك مع تزايد سرعة قطرة الماء.

* من خلال المبيان (2)، نلاحظ أن السـرعة تأخذ أكبر قيمة انطلاقا من اللحظة $t=10s$ حيث تأخذ

قوة الاحتكاك هي الأخرى قيمتها الأقصى.

* وحسـب المنحنى (1) للمبيان (1)، نسـتنتج أن المسافة التي تقطعها قطرة الماء عند اللحظة $t=10s$ هي

$x=200cm=2m$.

5.2- طبيعة حركة قطرة الماء:

بعد مضي 10 ثوان يبين المنحنى (2) (المبيان (2)) أن سرعة قطرة الماء تستقر عند قيمة ثابتة $v_\ell=30m.s^{-1}$

، حيث تصبح حركتها مستقيمية منتظمة.

5.3- قيمة التسارع a_0 عند $t=0$:

تمثل قيمة التسارع a_0 عند اللحظة $t=0$ المعامل الموجه للمنحنى (2) عند $t=0$ أي المعامل الموجه للمنحنى

(3) المحصل في السؤال 1.2/1- ذي المعادلة $v=g.t$. وبالتالي تكون $a_0=g=9,8m.s^{-2}$

6- السرعة الحدية لقطرة الماء

6.1- تعيين السرعة الحدية:

حسب المنحنى (2) نجد: $v_\ell = 30m.s^{-1}$

6.2- حساب السرعة الحدية باستعمال المعادلة التفاضلية:

لدينا: $\frac{dv}{dt} = -\frac{f}{m}.v + g$

عندما تأخذ سرعة قطرة الماء قيمتها الحدية v_ℓ، تصبح حركتها مستقيمية منتظمة أي $v=cte$ ومنه $\frac{dv}{dt} = 0$

ومن المعادلة التفاضلية نستنتج أن: $v_\ell = \frac{m.g}{f}$ أي: $v_\ell = \frac{5,2\times10^{-7}\times9,8}{1,7\times10^{-7}}$ ؛ $v_\ell \approx 30m.s^{-1}$

7- تأثير أبعاد قطرة الماء على قيمة السرعة الحدية:

لدينا شدة قوة الاحتكاك $f = 6\pi\eta.R$ عند مضاعفة شعاع قطرة الماء $R'=2R$ تصبح شدة قوة الاحتكاك

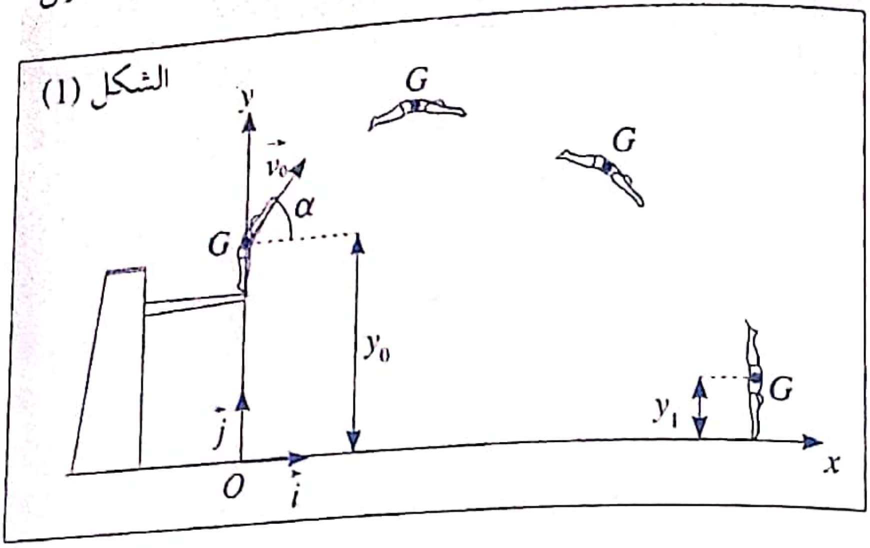
$f'=2f$ وبالتالي تصبح السرعة الحدية $v'_\ell = \frac{m.g}{f'} = \frac{m.g}{2.f} = \frac{v_\ell}{2}$.

إذن عندما يتزايد شعاع قطرة الماء تتناقص قيمة السرعة الحدية.

13 و27 يوليوز 2003، ... برشلونة الإسبانية. ومن بين الرياضات
هذه البطولة هناك رياضة الغطس.

في هذا التمرين في مرحلة أولى دراسة حركة مركز القصور G لغطاس، كتلته $m=70kg$، خلال
القفز، وفي مرحلة ثانية دراسة حركة مركز قصوره خلال عملية
داخل ماء المسبح.

ندرس حركة مركز القصور G للسباح
خلال مرحلتين في المستوى الرأسي
المنسوب للمعلم المتعامد الممنظم
$(O,\vec{i},\vec{j})$ كما يوضح الشكل 1.



يوجد الأصل O للمعلم على مستوى سطح الماء للمسبح، ونمعلم مركز القصور G في هذا المعلم

... $g=9,8m.s^{-2}$، ونعتبر المرجع الأرضي مرجعا غاليليا.

الجزء 1: دراسة حركة القفز للغطاس.

نهمل في هذا الجزء تأثير الهواء على الغطاس خلال عملية القفز، ونعتبر أن الحركة الخاصة لدوران الغطاس
حول مركز قصوره لا تؤثر على حركة G.

$y_0=4,0m$ أرتوب مركز القصور G للغطاس مباشرة قبل عملية القفز و$v_0=4,0m.s^{-1}$ سرعته
وα الزاوية التي تكونها $\vec{v_0}$ مع الخط الأفقي: $\alpha = 78,5°$.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، أوجد المعادلتين الزمنيتين $x=f(t)$ و$y=g(t)$ لحركة مركز القصور G
واستنتج معادلة المسار. نختار لحظة الانطلاق أصلا للتواريخ $(t_0=0)$.

يمر مركز القصور G للغطاس من نقطة S توجد على أكبر ارتفاع من سطح ماء المسبح عند لحظة

...

اللحظة t_S واحسب المسافة H التي تفصل S عن سطح الماء.

يلمس الغطاس سطح ماء المسبح عند لحظة تاريخها t_1، حيث يوجد مركز قصورها G على مسافة

$y_1=1,0m$ من سطح الماء.

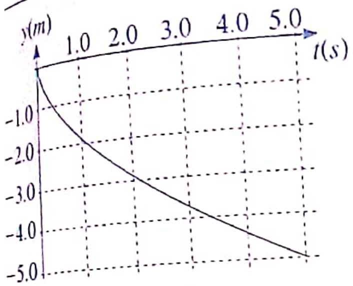
أوجد تعبير السرعة v_1 لمركز القصور G عند اللحظة t_1 بدلالة v_0 و g و y_0 و y_1.

المرحلة 2: دراسة حركة الغطاس خلال عملية الغطس

نعتبر في هذا الجزء أن مسار حركة مركز القصور G للغطاس رأسي.

ارتفاع الماء الذي تتم فيه عملية الغطس داخل المسبح هو $5m$.

يعطي المنحنى الممثل في الشكل 2 نمذجة لتغيرات الأرتوب y لمركز القصور G للغطاس بدلالة الزمن t باعتبار أن الغطاس ينـزل إلى أن تلمس يداه قعر المسبح دون تغيير منحى الحركة كما تنص على ذلك هذه الرياضة.



الشكل (2)

نرمز بـ V لحجم الغطاس وبـ ρ للكتلة الحجمية لماء المسبح. يخضع الغطاس خلال عملية الغطس إلى قوة الاحتكاك المائع منحاها معاكس لمنحى متجهة السرعة وشدتها منمذجة بـ: $f=K.v^2$، K ثابتة.

1– مثل، بدون سلم، القوى المطبقة على الغطاس خلال عملية الغطس.

2– نرمز بـ v_y لإحداثي متجهة سرعة مركز القصور G للغطاس على المحور الرأسي (Oy) الموجه نحو الأعلى بحيث: $v_G = |v_y|$.

بين أن المعادلة التفاضلية التي يحققها الإحداثي v_y تكتب: $\frac{dv_y}{dt} - \frac{K}{m}.v_y^2 + g\left(1 - \frac{\rho.V}{m}\right) = 0$

3– يتحقق النظام الدائم خلال عملية الغطس انطلاقا من اللحظة ذات التاريخ $t_p=3s$.

أوجد قيمة السرعة الحدية v_p لمركز القصور G للغطاس.

4– استنتج، باستعمال المعادلة التفاضلية، الثابتة K علما أن: $V=6,50.10^{-2}m^3$ و $\rho = 1,00 \times 10^3 kg.m^{-3}$.

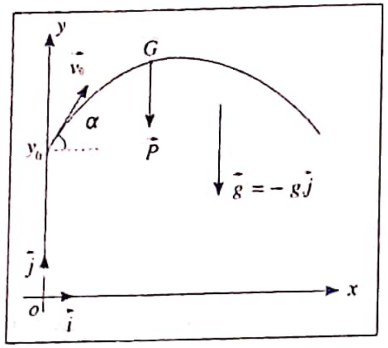
حل التمرين

1- المعادلتان الزمنيتان ومعادلة المسار:

- المجموعة المدروسة: الغطاس

- القوى المطبقة على الغطاس:

- بإهمال تأثير الهواء، يخضع الغطاس فقط إلى تأثير وزنه $\vec{P} = -m.g.\vec{j}$.



- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن بالنسبة للجسم المرجعي الأرضي الذي نعتبره غاليليا، نكتب: $\vec{P} = m.\vec{a_G}$

أي أن: $-m.g.\vec{j} = m.\vec{a_G}$، ومنه: $\vec{a_G} = -g.\vec{j}$

إذن إحداثيتا متجهة التسارع في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ هما:

$$\vec{a_G}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g = cte \end{cases}$$

- الشروط البدئية:

لدينا عند $t=0$: $x=x_0=0$ و $y=y_0=4{,}0m$

ولدينا كذلك $v_{0x} = v_0.\cos\alpha$ و $v_{0y} = v_0.\sin\alpha$

- $a_G = \frac{dv_G}{dt}$، إذن إحداثيات السرعة v_G هي دوال تكاملية للتسارع a_G:

• $a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$، ومنه: $v_x = cte = v_{0x} = v_0.\cos\alpha$

• $a_y = \frac{dv_y}{dt} = -g$، ومنه: $v_y = -g.t + v_{0y}$، أي إن: $v_y = -g.t + v_0.\sin\alpha$

- إحداثيات متجهة الموضع $\overrightarrow{OG}$ هي دوال تكاملية لإحداثيات متجهة السرعة.

• $v_x = \frac{dx}{dt} = v_0.\cos\alpha$ ومنه: $x = (v_0.\cos\alpha).t$، أي إن: $x = (v_0.\cos\alpha).t$ (1)

• $v_y = \frac{dy}{dt} = -g.t + v_0.\sin\alpha$، ومنه: $y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0.\sin\alpha)t + y_0$ (2)

- معادلة المسار:

نقصي الزمن t بين المعادلتين الزمنيتين (1) و(2)، فنحصل على معادلة المسار كالتالي:

$$y = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2.\cos^2\alpha}.x^2 + x.\tan\alpha + y_0$$

2- تعيين اللحظة t_S والمسافة H.

• بما أن النقطة S توجد على أكبر ارتفاع من سطح الماء فإنها تمثل قمة المسار حيث تكون متجهة

3- تعبير السرعة v_1:

الطاقة الميكانيكية للسباح عند لحظة t: $E_m = E_C + E_{Pp}$

مع: $E_C = \frac{1}{2}m.v_G^2$ و $E_{Pp} = m.g.y + cte$

باعتبار مستوى سطح ماء المسبح ذي الأرتوب $y=0$ مرجعا لطاقة الوضع الثقالية $0 = E_{Pp}$ نجد 0

ومنه: $E_{Pp} = m.g.y$

إذن: $E_m = \frac{1}{2}m.v_G^2 + m.g.y$

- عند موضع الانطلاق ذي الأرتوب y_0 نكتب: $E_{m_0} = \frac{1}{2}m.v_0^2 + m.g.y_0$

- عند موضع الانطلاق ذي الأرتوب y_1 نكتب: $E_{m_1} = \frac{1}{2}m.v_1^2 + m.g.y_1$

وبما أن الاحتكاكات مهملة خلال مرحلة القفز فإن: $E_{m_0} = E_{m_1}$ تكافئ:

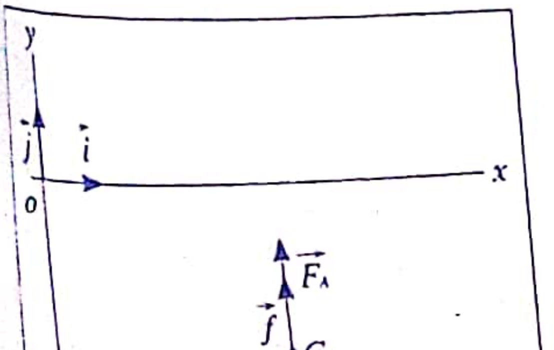
$$\frac{1}{2}m.v_0^2 + m.g.y_0 = \frac{1}{2}m.v_1^2 + m.g.y_1$$

ومنه: $v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2g.(y_0 - y_1)}$

- حساب قيمة v_1: $v_1 = \sqrt{4^2 + 2 \times 9,8.(4,0 - 1,0)}$، أي إن: $v_1 = 8,6 m.s^{-1}$

المرحلة 2: دراسة حركة الغطاس خلال عملية الغطس

1- تمثيل القوى المطبقة على الغطاس



يخضع الغطاس خلال هذه المرحلة إلى:

- وزنه: $\vec{P} = -m.g.\vec{j}$
- دافعة أرخميدس: $\vec{F_A} = \rho.V.g.\vec{j}$
- قوة الاحتكاك المائع: $\vec{f} = K.v_G^2.\vec{j}$

...ل لنيوتن في المرجع الأرضي الذي اعتبرناه غاليليا نكتب:

...انون الثاني

$$m.\vec{a}_G = \sum \vec{F}_{ex} = \vec{P} ...$$

$$m.\frac{d\vec{v}_G}{dt} = -m.g.\vec{j} + \rho.V.g.\vec{j} + K.v_y^2 ...$$

...ه العلاقة على المحور $(O;\vec{j})$ نكتب:

$$m\frac{dv_y}{dt} = -m.g + \rho.V.g + K.v_y^2$$

$$\Longleftrightarrow \frac{dv_y}{dt} = -g + \rho.\frac{V}{m}.g + \frac{K}{m}.v_y^2 \Longleftrightarrow \frac{dv_y}{dt} - \frac{K}{m}.v_y^2 + g - \frac{\rho.V}{m} ...$$

$$\mathbf{\frac{dv_y}{dt} - \frac{K}{m}.v_y^2 + g\left(1 - \frac{\rho.V}{m}\right) = 0}$$

...ه قيمة السرعة الحدية v_p.

...مركز القصور G للغطاس خلال مرحلة الغطس على مرحلتين:

...ظام البدئي بين 0 و3s،

...ظام الدائم انطلاقا من

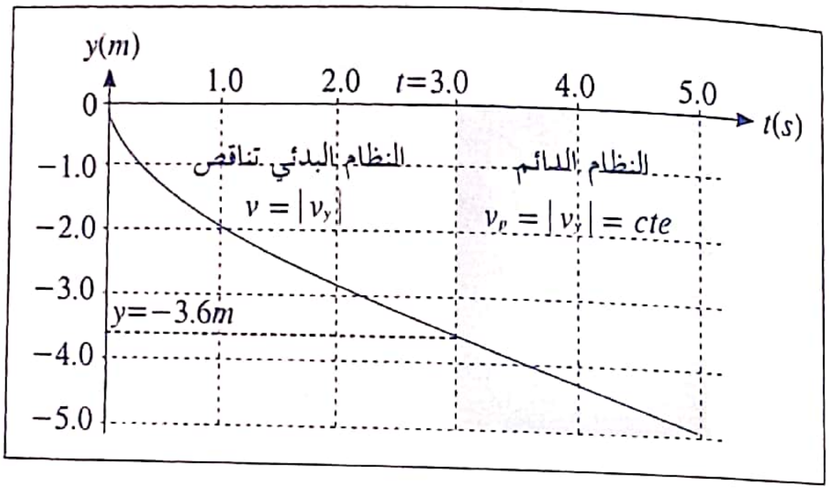
...الموافقة للأرتوب $t=3s$

... (انظر المنحنى)

...رحلة الثانية بتغير الأرتوب

...من t وفق دالة تآلفية

$y=v_y.t+C$ لأن المنحنى



...ن قطعة مستقيمية.

...يمثل v_y المعامل الموجه لهذه القطعة: $v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}$

... $v_y = \frac{-5,0-(-3,6)}{5,0-3,0}$، أي إن: $v_y = -0,70 m.s^{-1}$.

...سرعة الحدية: $\mathbf{v_p = |v_y| = 0,70 m.s^{-1}}$

...تاج الثابتة K:

...الدائم لدينا: $v_y = cte$ ومنه: $\frac{dv_y}{dt} = 0$

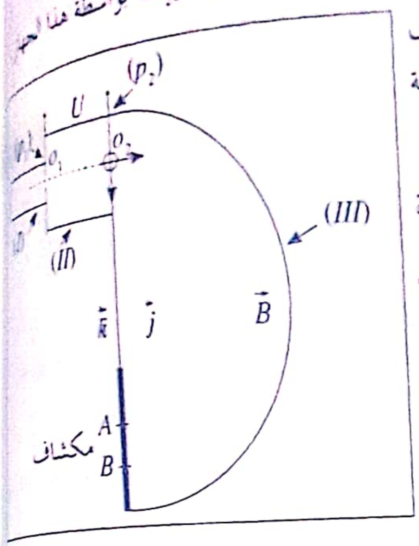
...لة التفاضلية السابقة نكتب:

... $-\frac{K}{m}.v_y^2 + g\left(1 - \frac{\rho ...}{m}\right)$ مع: $v_p = |v_y|$ نجد: $\mathbf{K = \frac{g}{v_p^2}(m - \rho.V)}$

$K = \frac{9,8}{(0,70)^2}(70,0 - 1,00 \times 10^3 \times 6,50 \times 10^{...}$ أي: $\mathbf{K = 150 kg.m^{-1}}$

يمثل الشكل جانبه جهاز راسم الطيف للكتلة يتكون من ثلاث حجرات: حجرة التأين (I)، حجرة التسريع (II)، وحجرة الانحراف (III).

نريد فرز النظيرين $^{205}Tl^{+}$ و $^{203}Tl^{+}$ لذرة الثاليوم Tl، كتلتاهما بالتتابع m_1 وm_2، بواسطة هذا الجهاز.



- تتحول ذرات الثاليوم Tl في حجرة التأين (I) إلى أيونات Tl^{+}، ثم تغادر الحجرة من الثقب O_1 بسرعة نعتبرها منعدمة بالنسبة للمرجع الأرضي.
- تُسرَّع هذه الأيونات في الفراغ داخل حجرة التسريع (II) تحت توتر U ثابت مطبق بين الصفيحتين (P_1) و(P_2) بحيث: $U=V_1-V_2>0$.
- تصل الأيونات $^{205}Tl^{+}$ و $^{203}Tl^{+}$ إلى الثقب O_2 على التوالي بالسرعتين $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ الأفقيتين لتنحرفا داخل حجرة الانحراف (III) حيث تخضعان إلى تأثير مجال مغنطيسي منتظم متجهته عمودية على $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$، ثم تسقطان على مكشاف عند النقطتين A وB.

نهمل وزن الدقائق أمام القوى الأخرى المؤثرة عليها، كما نهمل المجال المغنطيسي الأرضي.

معطيات:

- الشحنة الكهربائية الابتدائية: $e=1,60.10^{-19}C$.
- الكتلة المولية للأيون $^{205}Tl^{+}$: $M_1=0,205kg.mol^{-1}$
- الكتلة المولية للأيون $^{203}Tl^{+}$: $M_2=0,203kg.mol^{-1}$
- ثابتة أفوكادرو: $N_A=6,02.10^{23}mol^{-1}$
- $U=6000V$ و $B=0,15T$

1- أوجد تعبير السرعتين $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ للأيونين $^{205}Tl^{+}$ و $^{203}Tl^{+}$ عند مرورهما من الثقب O_2.

2- حدّد، معللا جوابك، منحى متجهة المجال المغنطيسي $\vec{B}$ لكي تسقط الأيونات على المكشاف عند النقطتين A وB.

3- بيّن أن حركة أيون Tl^{+} داخل حجرة الانحراف (III) دائرية منتظمة محدداً تعبير الشعاع R للمسار.

4- عبّر، بدلالة M_1 وM_2 وU وB وe وN_A، عن المسافة $d=AB$ التي تفصل بين نقطتي سقوط النظيرين $^{205}Tl^{+}$ و $^{203}Tl^{+}$ على المكشاف محددا الأيونات التي تصل إلى A والأخرى التي تصل إلى B. احسب d.

... القياسات الكهرضوئية، المطبقة عند البقعتين A وB، من قياس النسبة K لعدد الأيونات التي ... عند النقطة A على عدد الأيونات التي تسقط عند النقطة B.

... القياسات التجريبية القيمة $K=0,42$.

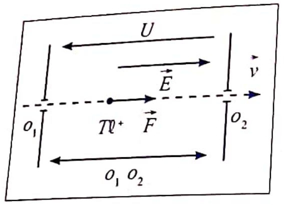
... التركيب النظيري، بالنسبة المائوية، لعنصر الثاليوم Tl في عينة طبيعية من الثاليوم.

حل التمرين

... سرعة أيوني الثاليوم عند مرورهما من الثقب O_2.

... المجموعة المدروسة: الأيون Tl^+ كتلته m وشحنته $q=e$.

... المعلم $(O_2;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ المرتبط ... يخضع الأيون Tl^+، في المعلم ... والذي نعتبره غاليليا، فقط إلى القوة الكهرساكنة ... $\vec{F}=q\vec{E}$ لأن شدة وزنه مهملة أمام شدة $\vec{F}$.



... مبرهنة الطاقة الحركية على Tl^+ بين O_1 وO_2 نكتب:

$E_{C_2}-E_{C_1}=W(\vec{F})$ (1)

لأن الأيون ينطلق من O_1 بدون سرعة و $E_{C_1}=0$

$$W_{O_1\to O_2}(\vec{F})=\vec{F}.\overrightarrow{O_1O_2}$$
$$=F.O_1O_2$$
$$=e.E.O_1O_2$$
$$=e.U$$

(لأن: $E=\frac{U}{O_1O_2}$)

... العلاقة (1) تصبح: $\frac{1}{2}m.v^2=e.U$، ومنه: $v=\sqrt{\frac{2e.U}{m}}$

... للأيون $^{205}Tl^+$ نكتب: $v_1=\sqrt{\frac{2e.U}{m_1}}$

... للأيون $^{203}Tl^+$ نكتب: $v_2=\sqrt{\frac{2e.U}{m_2}}$

... $\vec{B}$:

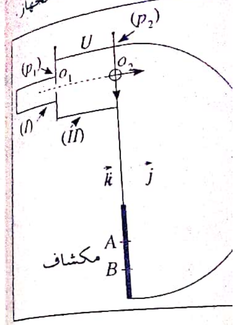
... الأيون Tl^+ المجال المغنطيسي $\vec{B}$ بسرعة $\vec{v}$ متعامد مع $\vec{B}$، فيخضع لقوة لورنتز $\vec{F}=e\vec{v}\wedge\vec{B}$ ... الأوجه $(e\vec{v};\vec{B};\vec{F})$ في كل لحظة مباشراً.

... مسار يوجد في المستوى الرأسي المنسوب للمعلم $(O_2;\vec{i};\vec{j})$ فإن المتجهتين $\vec{F}$ و$q\vec{v}$ توجدان ... هذا المستوى.

... اتجاه $\vec{B}$ عموديا على هذا المستوى، ومنحاها هو منحى المتجهة الواحدية $\vec{k}$ أي نحو الأمام ...

... حجرات: حجرة التأين (I)، وحجرة ...

... m_1 وm_2، بواسطة هذا الجهاز ...



... المغنطيسي الأرضي.

... من الثقب O_2.

... ط الأيونات على المكشاف

... ة محدداً تعبير الشعاع R

... بين نقطتي سقوط النظيرين ... تي تصل إلى B. احسب d.

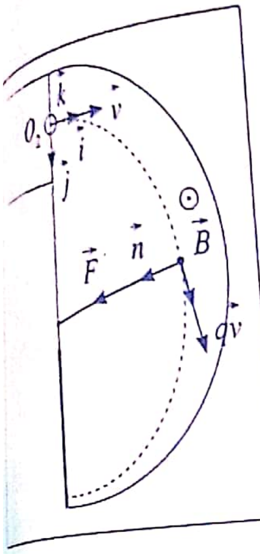
3- البرهنة على أن حركة الأيون دائرية منتظمة:

- يخضع الأيون Tl^+ داخل المجال المغنطيسي $\vec{B}$، بالنسبة للمعلم $(O_2;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ المرتبط بالأرض، نعتبره غاليليا، إلى قوة لورنتز: $\vec{F} = e\vec{v} \wedge \vec{B}$

- حسب هذا التعبير تكون $\vec{F}$ متعامدة مع متجهة السرعة $\vec{v}$، أي إن متجهة القوة $\vec{F}$ منظمية في أساس فريني $(\vec{\tau};\vec{n})$ (انظر شكل السؤال 2)

- وحسب القانون الثاني لنيوتن $\vec{F} = m.\vec{a}$ تكون متجهة التسارع $\vec{a}$ هي الأخرى منظمية.

إذن في أساس فريني لدينا: $\vec{F}\begin{cases} F_T = 0 \\ F_N = e.v.B \end{cases}$ و $\vec{a}\begin{cases} a_T = \dfrac{dv}{dt} \\ a_N = \dfrac{v^2}{\rho} \end{cases}$



من العلاقة $\vec{F} = m.\vec{a}$ نكتب: $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$

ومنه: - $a_T = \dfrac{F_T}{m} = 0$ تكافئ: $\dfrac{dv}{dt} = 0$، أي إن $v=cte$، وبالتالي فحركة الأيون Tl^+ منتظمة.

- $a_N = \dfrac{F_N}{m}$ تكافئ: $\dfrac{v^2}{\rho} = \dfrac{e.v.B}{m}$، ومنه: $\rho = \dfrac{m.v}{e.B}$.

نلاحظ أن شعاع انحناء المسار ρ ثابت، وبالتالي فحركة الأيون دائرية منتظمة شعاعها $\rho = R = \dfrac{m.v}{e.B}$

نستخلص أن حركة الأيون Tl^+ داخل المجال المغنطيسي $\vec{B}$ دائرية منتظمة شعاعها $R = \dfrac{m.v}{e.B}$.

4- تعبير المسافة $d=AB$:

- تحديد الأيونات التي تصل إلى A والأيونات التي تصل إلى B.

- لدينا حسب السؤال (3) أن شعاع مسار الأيون Tl^+: $R = \dfrac{m.v}{e.B}$ (1)

- ولدينا حسب السؤال (1) أن سرعة هذا الأيون: $v = \sqrt{\dfrac{2e.U}{m}}$ (2)

من العلاقتين (1) و(2) نستنتج أن: $R = \dfrac{1}{B}\sqrt{\dfrac{2.U.m}{e}}$

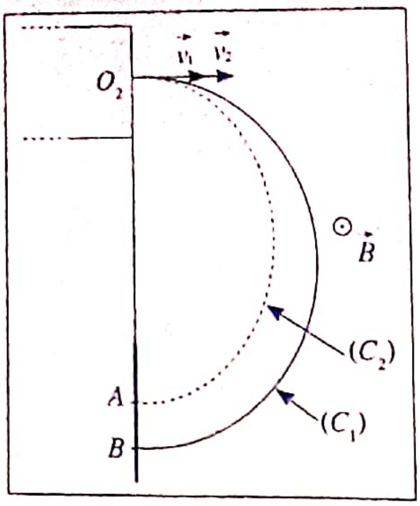
إذن:

- شعاع مسار الأيون $^{205}Tl^+$ ذي الكتلة m_1 هو: $R_1 = \dfrac{1}{B}\sqrt{\dfrac{2.U.m_1}{e}}$

- شعاع مسار الأيون $^{203}Tl^+$ ذي الكتلة m_2 هو: $R_2 = \dfrac{1}{B}\sqrt{\dfrac{2.U.m_2}{e}}$

لدينا $m_1>m_2$، وحسب تعبيري الشعاعين R_1 وR_2 للأيونين $^{205}Tl^+$ و$^{203}Tl^+$ نستنتج أن $R_1>R_2$.

وبالتالي تنتقل الأيونات $^{205}Tl^+$ وفق المسار (C_1) ذي الشعاع R_1 لتسقط على المكشاف عند النقطة B، وتنتقل الأيونات $^{203}Tl^+$ وفق المسار (C_2) ذي الشعاع R_2 لتسقط عند النقطة A.



... دائرة قطرها $D=2R$.

$d=AB=D_1-D_2$، أي إن: $d=2.(R_1-R_2)$.

$$d = 2(R_1 - R_2) = \frac{2}{B}\left(\sqrt{\frac{2.U.m_1}{e}} - \sqrt{\frac{2.U.m_2}{e}}\right)$$

$m_1 = \frac{M_1}{N_A}$; $m_2 = \frac{M_2}{N_A}$

$$d = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2U}{e.N_A}}\left(\sqrt{M_1} - \sqrt{M_2}\right)$$

$d=15,6mm$

... كيب النظيري لعنصر الثاليوم في العينة الطبيعية.

... عدد الأيونات $^{205}T\ell^+$ التي تصل إلى النقطة B، وp_1 نسبتها المائوية.

... عدد الأيونات $^{203}T\ell^+$ التي تصل إلى النقطة A، وp_2 نسبتها المائوية.

$$p_1 = \frac{N_1}{N_1 + N_2} \times 100 \text{ و } p_2 = \frac{N_2}{N_1 + N_2} \times 100$$

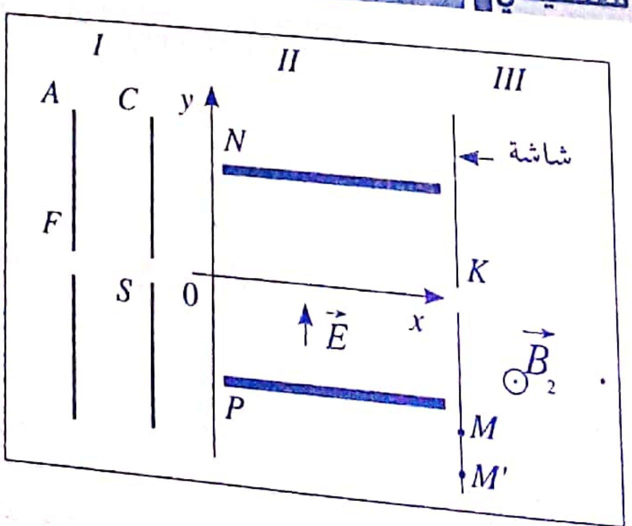
... معطيات التمرين لدينا $K = \frac{N_2}{N_1}$، ومنه: $N_2=K.N_1$

$$p_1 = \frac{N_1}{N_1 + K.N_1} \times 100 \text{ و } p_2 = \frac{K.N_1}{N_1 + K.N_1} \times 100$$

$$p_1 = \frac{100}{1+K} \text{ و } p_2 = \frac{100.K}{1 + K}.$$

... نجد: $p_1=70\%$ و $p_2=30\%$.

انحراف إيونات داخل مجال كهرباني و مجال مغنطيسي (خاص بالعلوم الرياضية)



... الجهاز الممثل في الشكل جانبه من ثلاثة

... للدقائق يمكن من الزيادة في سرعة الدقائق

... توتر U_{AC} بين صفيحتين رأسيتين A و C.

... مصفاة السرعات: يمكن من عزل

... الطيف: يوجد به مجال مغنطيسي لانحراف الدقائق.

... بدون سرعة بدئية، حزمة دقائق تحمل كل منها شحنة موجبة q.

... U والكتلة m للدقيقة، تعبير السرعة v_0 للدقيقة عند مرورها بالثقب S.

... لتصل إلى ...
2- بعد خروج الدقيقة من الثقب S، تنتقل في الاتجاه SO لتصل إلى المجال الكهرساكن $\vec{E}$ الذي تم إحداثه بتطبيق توتر ثابت U_{PN} بين صفيحتين أفقيتين P و N نعلـ...
بعضهما بمسافة d.

2.1- بين أن السرعة v_0 تساوي السرعة v_s.

2.2- باستعمال القانون الثاني لنيوتن، أوجد معادلة المسار $y=f(x)$ للدقيقة في المجال الكهرسا...
(إهمال وزن الدقيقة بالنسبة للقوة الكهرساكنة).

2.3- اعط، بدلالة v_0 تعبير السرعة v_j للدقيقة عند موضع j تخرج عنده الدقيقة من المـ...
الكهرساكن $\vec{E}$.

نعطي: $U_{PN}=10^4V$ و $U_{AC}=5.10^3V$ و $d=0,1m$ و $L=14cm$ و $q=2e$ و $e=1,6.10^{-19}C$.

3- نطبق الآن في الفضاء الموجود بين الصفيحتين الأفقيتين، إضافة إلى المجال الكهرساكن $\vec{E}$ مجـ...
مغنطيسيا منتظما $\vec{B_1}$ عموديا على $\vec{v_0}$.
عين منحى متجهة المجال $\vec{B_1}$ ثم أوجد منظمها $\|\vec{B_1}\|$ بدلالة v_0 علما أن حزمة الدقائق تصل في هذه الحا...
إلى الثقب K وفق حركة مستقيمية.

4- بعد مرور الدقيقة عبر الثقب K، تخضع لتأثير مجال مغنطيسي متجهته $\vec{B_2}$ عمودية على المستو...
$(ox;oy)$ (انظر الشكل).

4.1- بين أن حركة الدقيقة دائرية منتظمة في المجال $\vec{B_2}$.

4.2- أوجد تعبير الشعاع R لمسار الدقيقة في المجال $\vec{B_2}$، بدلالة v_0 و m و B_2 و e.

5- في الحقيقة تخرج من المنبع F أيونات الهيليوم $^{4}_{2}He^{2+}$ كتلتها $m_1=6,7.10^{-27}kg$ وأيونات الهيليوم
$^{3}_{2}He^{2+}$ كتلتها $m_2=5.10^{-27}kg$.

5.1- نحتفظ بالمجال $\vec{B_1}$ المشار إليه في السؤال 3. ما قيمة التوتر U_{PN} الذي يجب تطبيقه بين الصفيحتين الأفقيتين:

أ- لتمرير الأيون $^{4}_{2}He^{2+}$ من الثقب K.

ب- لتمرير الأيون $^{3}_{2}He^{2+}$ من الثقب K.

نعطي: $B_1=0,1T$

5.2- عند خروجها من المجال المغنطيسي $\vec{B_2}$ تصطدم الأيونات $^{4}_{2}He^{2+}$ و $^{3}_{2}He^{2+}$ على التوالي بشاشة مستشعة في نقطتين M و M'. باستعمالك للمعطيات السابقة، أحسب المسافة MM'.

حل التمرين

1- تعبير السرعة v_s:

بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية ما بين لحظة انطلاق الدقيقة من المنبع F بدون سرعة بدئية ولحظة مرورها بالثقب S بسرعة v_s نكتب:

$$\frac{1}{2}m v_s^2 - 0 = W(\vec{P}) + W(\vec{F})$$

$.W(\vec{P}) = 0$ ...

... القوة الكهرساكنة $\vec{F}$: $.W(\vec{F}) = q.U_{AC}$

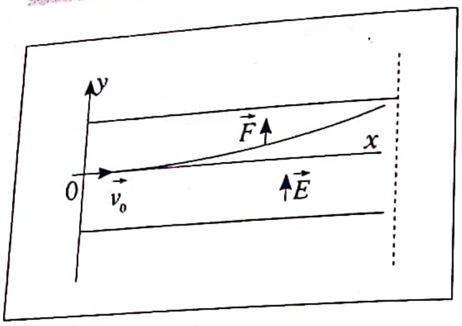
$.v_s = \sqrt{\frac{2qU_{AC}}{m}}$

... على أن $v_0=v_s$:

... S، لا تخضع الدقيقة إلا لوزنها. وبإهمال هذا الأخير يكون التسارع $\vec{a} = \vec{o}$ (القانون ...) وبالتالي فإن متجهة سرعة الدقيقة ثابتة $\vec{v} = \overrightarrow{cte}$ ومنه: $v_0=v_s$

* ملحوظة: نتوصل لنفس النتيجة بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية.

... معادلة المسار $y=f(x)$:



... القانون الثاني لنيوتن على الدقيقة في معلم مرتبط ... غاليليا نكتب: $\vec{F} = m.\vec{a}$ مع $\vec{F} = q.\vec{E}$

... $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$ ومنه: $\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \frac{2e}{m}E \end{cases}$ ... $\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{e}{m}E.t \end{cases}$

$v_0 = v_s = \sqrt{\frac{2q...}{m}}$ أي: $v_0 = v_s = \sqrt{\frac{4e\,U_{AC}}{m}}$ و $E = \frac{U_{PN}}{d}$

$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{4.eU_{AC}}{m}}\,t \\ y = \frac{e.U_{PN}}{m.d}t^2 \end{cases}$

... t بين x و y نحصل على: $y = \frac{U_{PN}}{4.d.U_{AC}}x^2$; ت.ع: $.y=5x^2$

... السرعة v_j:

ومنه: $\vec{v}\begin{cases} v_x = ... \\ v_y = ... \end{cases}$ $v = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{2e\,U_{PN}}{m.d}t\right)^2}$

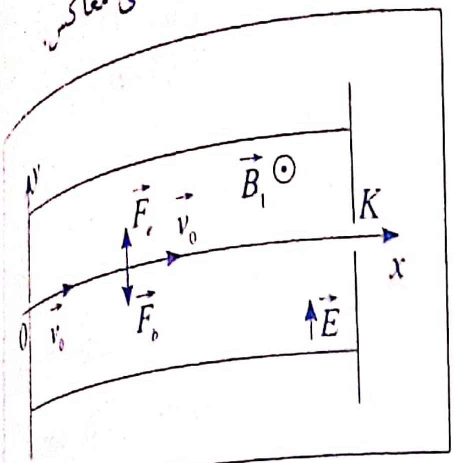
... الزمنية $x=v_0.t$، تغادر الدقيقة المجال الكهرساكن $\vec{E}$ في اللحظة $.t = \frac{L}{v_0}$

... السابق (السؤال 2.2) لدينا:

... وبتعويض ذلك في المعادلة السابقة نحصل على: $v_j = v_0\sqrt{1 + \left(\frac{U_{PN}L}{2U_{AC}d}\right)^2}$

3- منحى ومنظم متجهة المجال $\vec{B_1}$:

لتصل حزمة الدقائق إلى الثقب K وفق حركة مستقيمية، يجب أن تخضع كل دقيقة بالإضافة إلى القوة الكهرساكنة $\vec{F_e}$ إلى قوة كهرمغنطسية: $\vec{F_b} = q\vec{v_0} \wedge \vec{B_1}$ لها نفس اتجاه وشدة $\vec{F_e}$ ومنحى معاكس.

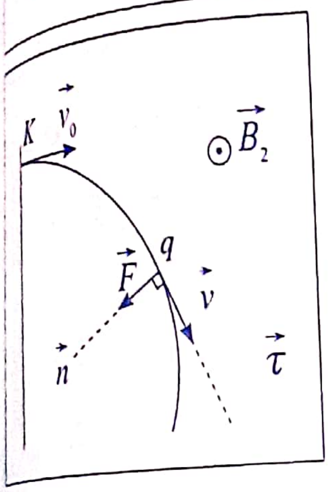


واعتمادا على منحى $\vec{F_b}$ و $q.\vec{v_0}$ نحدد منحى $\vec{B_1}$ باستعمال قاعدة اليد اليمنى وبالتالي يكون منحى $\vec{B_1}$ كما هو محدد على الشكل جانبه.

بالنسبة للمنظم لدينا: $q.E=q\ v_0.B_1$ ومنه: $B_1 = \dfrac{E}{v_0}$

أي: $B_1 = \dfrac{U_{PN}}{d.v_0}$; $B_1 = \dfrac{10^5}{v_0}$.

4/ 4.1- حركة الدقيقة في المجال $\vec{B_2}$:



تدخل الدقيقة المجال $\vec{B_2}$ عبر الثقب K بسرعة متجهتها $\vec{v_0}$ متعامدة مع $\vec{B_2}$ فتخضع لقوة لورنتز $\vec{F} = q\vec{v_0} \wedge \vec{B_2}$.

وحسب القانون الثاني لنيوتن بالنسبة للدقيقة نكتب:

$\vec{F} = m.\vec{a}$ مع $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B_2}$

بإسقاط هذه العلاقة في معلم فريني نحصل على:

$\begin{cases} F_\tau = ma_\tau \\ F_n = m.a_n \end{cases}$، حسب تعبير قوة لورنتز: $\vec{F}$ متعامدة مع $\vec{v}$ في كل لحظة أي متعامدة مع المحور $\vec{\tau}$.

وبالتالي $F_\tau = 0$ تكافئ $a_\tau = \dfrac{dv}{dt} = 0$ ومنه: $v=cte=v_0$ أي حركة الدقيقة منتظمة.

وحسب تعبير $a_n = \dfrac{v_0^2}{\rho}$ نكتب: $qv_0B_2 = m\dfrac{v_0^2}{\rho}$

ومنه $\rho = \dfrac{mv_0}{qB_2}$ أي مسار الدقيقة دائري وبالتالي تكون الحركة دائرية منتظمة.

4.2- تعبير الشعاع R:

حسب السؤال السابق لدينا: $R = \dfrac{m.v_0}{q.B_2}$ أي: $R = \dfrac{mv_0}{2eB_2}$ لأن: $q=2e$

5/ 5.1- أ- قيمة U_{PN} لتمرير الأيون $^4_2He^{2+}$:

حسب السؤال (1) يكون تعبيرسرعة الأيون $^4_2He^{2+}$ ذي الكتلة m_1 هي: $v_1 = \sqrt{\dfrac{4eU_{AC}}{m_1}}$

وحسب السؤال (3) لدينا: $B_1 = \dfrac{U_{PN}}{d.v_1}$

ومنه: $U_{PN} = B_1.d.\sqrt{\dfrac{4.e.U_{AC}}{m_1}}$ ت.ع: $U_{PN} = 6,9.10^3 V$

- قيمة U_{PN} لتمرير الأيون $^{4}_{2}He^{2+}$: $U_{PN} = B_1.d.\sqrt{\dfrac{4.e.U_{AC}}{m_2}}$

$U_{PN}=8.10^{4}V$

- حساب المسافة MM':

من شعاع المسار (السؤال 2-4) وتعبير السرعة (السؤال 1) لدينا:

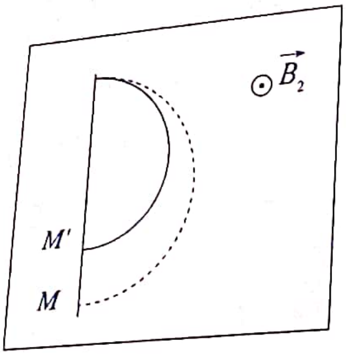
- بالنسبة للأيون $^{4}_{2}He^{+}$: $R_1 = \dfrac{1}{B_2}\sqrt{\dfrac{m_1}{e}U_{AC}}$

- بالنسبة للأيون $^{4}_{2}He^{+}$: $R_2 = \dfrac{1}{B_2}\sqrt{\dfrac{m_2}{e}U_{AC}}$

من الشكل تكون المسافة $MM'=2(R_1-R_2)$

$$MM' = \frac{2}{B_2}.\frac{U_{AC}}{e}\left(\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}\right)$$

$MM'=3,94cm$



تمرين 6 مقارنة كتلة الشمس وكتلة الأرض

تمكن معرفة حركة الأقمار الاصطناعية حول الأرض وحركة الأرض حول الشمس من مقارنة كتلة الشمس m_S بكتلة الأرض m_T.

نعتبر قمرا اصطناعيا ساكنا بالنسبة للأرض، كتلته m وشعاع مداره الدائري في المرجع المركزي الأرضي هو: $r=4,22.10^{4}km$.

- الدور المداري لحركة القمر الاصطناعي حول الأرض هو T.

- الدور المداري لحركة الأرض حول الشمس في المرجع المركزي الشمسي هو: $T_T=365,25jours$.

- شعاع المدار الدائري لحركة مركز الأرض حول الشمس هو: $r_T=1,496.10^{8}km$.

- دور دوران الأرض حول محورها القطبي هو: $T_0=24heures$.

- نرمز بـ G لثابتة التجاذب الكوني، ونعتبر أن كلا من الأرض والشمس لهما توزيع تماثلي للكتلة.

نهمل تأثير الكواكب الأخرى على كل من الأرض والقمر الاصطناعي.

1- بين أن حركة القمر الاصطناعي دائرية منتظمة في المرجع المركزي الأرضي، واستنتج تعبير الدور بدلالة G وm_T وr.

2- يعبر عن القانون الثالث لكبلير بالنسبة لحركة القمر الاصطناعي حول الأرض بالعلاقة:

$\frac{T^2}{r^3} = K$ حيث K ثابتة؛ أوجد تعبير K بدلالة G وm_T.

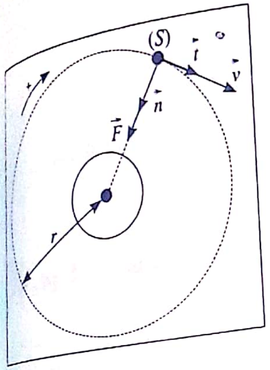
3- أوجد تعبير النسبة $\frac{m_S}{m_T}$ بدلالة r وr_T وT_T وT. احسب قيمتها.

حل التمرين

الجزء (1): مقارنة كتلة الشمس وكتلة القمر

1- البرهنة على أن حركة القمر الاصطناعي (S) دائرية منتظمة.

- المجموعة المدروسة: القمر الاصطناعي.
- يخضع (S) إلى قوة التجاذب المطبقة من طرف الأرض: $\vec{F} = G.\frac{m_T.m}{r^2}\vec{n}$
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في المرجع المركزي الأرضي نعتبره غاليليا.



نكتب: $\sum\vec{F}_{ext} = \vec{F} = m.\vec{a}$

أي إن: $G.\frac{m_T.m}{r^2}\vec{n} = m.\vec{a}$ ومنه: $\vec{a} = \frac{G.m_T}{r^2}.\vec{n}$

التسارع $\vec{a}$ للقمر الاصطناعي (S) انجذابي مركزي.

- المركبة المماسية $\vec{a}_t$ للتسارع $\vec{a}$ منعدمة، أي إن: $\frac{dv}{dt} = 0$، ومنه السرعة ثابتة $v=cte$. إذن حركة (S) منتظمة.
- المركبة المنظمية: $\frac{G.m_T}{r^2} = \frac{v^2}{r} = a_n$، ومنه: $r = \frac{G.m_T}{v^2}$

وبما أن G وm_T وv ثابتة فإن: $r=cte$ ثابت.

وبالتالي فإن حركة (S) دائرية.

خلاصة: حركة القمر الاصطناعي (S) في المرجع المركزي الأرضي دائرية منتظمة.

- استنتاج الدور T:

الدور T هو المدة التي يستغرقها (S) لإنجاز دورة كاملة.

وبما أن الحركة دائرية منتظمة نكتب: $v = \frac{2\pi r}{T}$ مع: $v = \sqrt{\frac{G.m_T}{r}}$ نجد: $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G.m_T}}$

2- تعبير K بدلالة G وm_T:

لدينا: $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G.m_T}}$، ومنه: $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.m_T}$

وحسب قانون كبلير: $\frac{T^2}{r^3} = K$ نستنتج أن: $K = \frac{4\pi^2}{G.m_T}$

3- تعبير النسبة $\frac{m_S}{m_T}$:

- لدينا بالنسبة لحركة القمر الاصطناعي في المرجع المركزي الأرضي: $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.m_T}$ (1)

مقتطف من وثيقة تقنية لكرة الغولف

...ج الأمريكي لكرة الغولف النموذج الوحيد المستعمل في ... رياضية للعبة الغولف، حيث يَستجيب للمعايير العالمية

$m=45,9$...

$D=42,7mm$.

... تجويفات $(Alvéoles)$: 384.

... تجويفات طبقات الهواء الانفلات من سطح الكرة ... سرعة هذه الأخيرة كبيرة، الشيء الذي يقلص من ... الكرة، عكس ما يحدث عندما يكون سطح الكرة أملس.

... غولف هي موضوع لعدة دراسات وبحوث معمقة يتتبعها مهندسون مختصون يسعون إلى ... ه الكرة.

... سهل قياس سرعات الحركات المستقيمية، فإنهم يعتمدون، في مرحلة أولى، دراسة ... حر لهذه الكرة في مجال الثقالة $\vec{g}$ المفترض منتظماً $(g=9,80m.s^{-2})$.

... الكرة بدون سرعة بدئية من نقطة O أصل محور رأسي (Oz) موجه نحو الأسفل.

... الاحتكاك المائع التي يطبقها الهواء على الكرة أثناء سقوطها الرأسي بالصيغة:

$\vec{F}=-$...

... K ثابت، و $\|\vec{v}\|$ قيمة متجهة السرعة $\vec{v}$ للكرة.

... المطبقة على الكرة، حيث تعبر ...

نهمل قوة دافعة أرخميدس المطبقة على الكرة، ... ولا نأخذ بعين الاعتبار مقاومة الهواء، حيث تعبير ... في نهاية التمرين.

1– في هذا السؤال، لا نأخذ بعين الاعتبار مقاومة الهواء حتى نتمكن من إنجاز دراسة مقارنة في نهاية التمرين.

1.1– أوجد المعادلة التفاضلية لحركة مركز القصور G للكرة، واستنتج المعادلة الزمنية $z(t)$ ... تأثير وزنها فقط حتى تصل سرعتها إلى القيمة $v_1=35m.s^{-1}$.

1.2– حدّد المسافة z_1 التي تقطعها الكرة عندما تصل سرعتها إلى القيمة $v_1=35m.s^{-1}$ ... لهذه القوة بحركة الحركة.

2– نعتبر في باقي التمرين وجود قوة الاحتكاك $\vec{F}$، وأن الإحداثي الوحيد غير المنعدم لهذه القوة ... $F_z=-K.v^2$ مع: $v=\dfrac{dz}{dt}$.

2.1– بيّن أن القانون الثاني لنيوتن يعطي المعادلة التفاضلية التالية: $\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{K}{m}v^2=g$ (1)

والتي تكتب على شكل: $\dfrac{dv}{dt}=g(1-\alpha^2.v^2)$ (2)

ما وحدة المقدار $\dfrac{1}{\alpha}$ في النظام العالمي للوحدات؟

2.2– يقترح الرياضيون حلا للمعادلة (2)، وكذا تعبير المعادلة الزمنية الموافقة $z(t)$ مايلي:

$$z(t)=\frac{1}{\alpha^2.g}\ln\left(\frac{e^{\alpha g t}+e^{-\alpha g t}}{2}\right) \text{ و } v(t)=\frac{1}{\alpha}\times\frac{e^{2\alpha g t}-1}{e^{2\alpha g t}+1}$$

تحقق من أن $v(t)$ هي فعلا حل للمعادلة (2)، وأن الشروط البدئية للحركة تم احترامها عند صياغة هذا الحل.

3– يمكن التحقق تجريبيا، خلال الأشـغال التطبيقية باسـتعمال التقنيات المعتمدة في دراسة السقوط الحر، من وجود سرعة حدية وقياس قيمتها v_L، حيث تأخذ الكرة حركة مستقيمية منتظمة.

3.1– بيّن، باستعمال تعبير $v(t)$، أنه:

أ– عندما $t \to +\infty$، تؤول سرعة الكرة إلى قيمة حدية v_L.

ب– عبّر عن السرعة الحدية v_L بدلالة m و g و K.

ج– تحقق من أن الحركة المستقيمية المنتظمة ذات السرعة الحدية v_L هي حل للمعادلة (2).

استنتج المفهوم الفيزيائي للمقدار $\dfrac{1}{\alpha}$.

3.2– نقيس قيمة السرعة الحدية، فنجد $v_L=35m.s^{-1}$. استنتج قيمة K.

3.3– بينت التجربة أن الكرة تأخذ سرعة حدية تقريبا عند اللحظة $t=10s$.

باستعمال تعبير $z(t)$ (السؤال 2.2/2)، احسب المسافة z_L التي يجب أن تقطعها الكرة رأسيا قبل أن تأخذ سرعتها القيمة الحدية v_L.

قارن هذه النتيجة مع المسافة التي تم حسابها في السؤال 2/1 ...

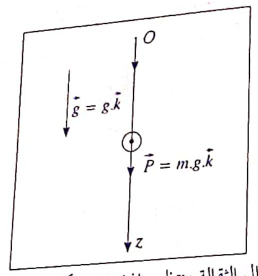
...المعادلة التفاضلية لحركة G واستنتاج المعادلة الزمنية $z(t)$:

...المدروسة: الكرة ذات الكتلة m في سقوط رأسي حر وفق المحور (Oz).

...المرجعي: الجسم المرجعي الأرضي الذي نعتبره غاليليا.

...المطبقة على الكرة: وزنها $\vec{P} = m.g.\vec{k}$.

...القانون الثاني لنيوتن: $\sum \vec{F}_{ext} = ...$، أي إن: $m.\vec{a}_G = m.g.\vec{k}$



$a_G = \frac{dv_z}{dt}$ ،$(O,\vec{k})$ ...

... $\frac{dv_z}{dt} = g$ ، وهي المعادلــة التفاضلية للحركة

...ثابتها.

...المعادلة الزمنية $z(t)$ للحركة:

...المعادلة التفاضلية، $v_z(t)$ هي دالة تكاملية للثابتة g لأن مجال الثقالة منتظم. إذن $v_z(t)$ تكتب على

... حيث C_1 ثابتة التكامل لها أبعاد سرعة.

...الشروط البدئية: عند $t=0$ لدينا: $v_z=v_{0z}=0$، ومنه $C_1=0$ ؛ وبالتالي: $v_z(t)=g.t$

...تعريف السرعة اللحظية نكتب: $v_z(t) = \frac{dz}{dt}$.

...هي دالة تكاملية لدالة السرعة: $v_z(t)=g.t$.

... $z(t) = \frac{1}{2}g.t^2 + C_2$، حيث C_2 ثابتة.

...الشروط البدئية: عند $t=0$ لدينا $z=z_0=0$، ومنه $C_2=0$.

...نحصل على المعادلة الزمنية: $z(t) = \frac{1}{2}g.t^2$.

...تحديد المسافة z:

... ومنه: $t = \frac{v(t)}{g}$

...ذلك في التعبير $z(t) = \frac{1}{2}g.t^2$ نجد: $z = \frac{v^2}{2g}$

...التي تقطعها الكرة عندما تصل سرعتها إلى القيمة $v=35m.s^{-1}$ هي: $z = \frac{(35)^2}{2 \times 9,8}$، أي إن:

...ثبات المعادلة التفاضلية للحركة:

...أرخميدس وباعتبار قوى الاحتكاك المائع، تكون الكرة في سقوط رأسي تحت تأثير قوتين:

$\vec{P} = m.g...$

. قوة الاحتكاك: $\vec{F} = -K.v^2\vec{k}$.

• بتطبيق القانون الثاني لنيوتن بالنسبة للجسم المرجعي الأرضي الذي نعتبره غاليليا نكتب:

• بإسقاط هذه العلاقة على المحور الرأسي (Oz) نكتب:

$$m.g - K.v^2 = m.\frac{dv}{dt} \quad \text{أي:} \quad \frac{dv}{dt} + \frac{K}{m}.v^2 = g$$

وهي المعادلة التفاضلية للحركة المطلوب إثباتها.

• وحدة المقدار $\frac{1}{\alpha}$:

لدينا: $\frac{dv}{dt} + \frac{K}{m}.v^2 = g$ ، ومنه: $\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{K}{m.g}.v^2\right)$

نكتب على شكل: $\frac{dv}{dt} = g(1 - \alpha^2.v^2)$ مع: $\alpha^2 = \frac{K}{m.g}$

• أبعاد المقدار $\frac{1}{\alpha}$:

يتضح من خلال هذا التعبير أن الجداء $\alpha^2.v^2$ ليس له أبعاد.

وبما أن السرعة v يعبر عنها بـ $m.s^{-1}$ فإن: α يعبر عنها بـ $m^{-1}.s$.

وبالتالي تكون وحدة المقدار $\frac{1}{\alpha}$ هي $m.s^{-1}$.

إذن المقدار $\frac{1}{\alpha}$ له أبعاد السرعة.

2.2– التحقق من حل المعادلة (2):

للتحقق من أن: $v(t) = \frac{1}{\alpha} \times \frac{e^{2\alpha g t} - 1}{e^{2\alpha g t} + 1}$ حل للمعادلة (2): $\frac{dv}{dt} = g(1 - \alpha^2.v^2)$ يكفي أن نقار[ن] طرفي هذه المعادلة:

• لنحسب أولا $\frac{dv}{dt}$:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{(e^{2\alpha g t} + 1)(e^{2\alpha g t} - 1)' - (e^{2\alpha g t} - 1)(e^{2\alpha g t} + 1)'}{(e^{2\alpha g t} + 1)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha.(e^{2\alpha g t} + 1)^2}\left[(e^{2\alpha g t} + 1)(2\alpha.g.e^{2\alpha g t}) - (e^{2\alpha g t} - 1)(2\alpha.g.e^{2\alpha g t})\right]$$

$$= \frac{2\alpha.g.e^{2\alpha g t}}{\alpha.(e^{2\alpha g t} + 1)^2}.\left[(e^{2\alpha g t} + 1) - (e^{2\alpha g t} - 1)\right]$$

تكافئ: $\frac{dv}{dt} = \frac{4.g.e^{2\alpha g t}}{(e^{2\alpha g t} + 1)^2}$

• لنحسب الطرف الثاني للمعادلة (2):

$$g(1 - \alpha^2.v^2) = g\left[1 - \alpha^2.\frac{1}{\alpha^2}.\frac{(e^{2\alpha g t} - 1)^2}{(e^{2\alpha g t} + 1)^2}\right]$$

$$= g\left[\frac{(e^{2\alpha g t} + 1)^2 - (e^{2\alpha g t} - 1)^2}{(e^{2\alpha g t} + 1)^2}\right]$$

$$= g\left[\frac{2.e^{2\alpha g t} \times 2}{(e^{2\alpha g t} + 1)^2}\right]$$

تكافئ: $g(1-\alpha^2.v^2)=\dfrac{4.g.e^{2\alpha g t}}{(e^{2\alpha g t}+1)^2}$

نلاحظ أن: $\dfrac{dv}{dt}=g(1-\alpha^2.v^2)$، الشيء الذي يبين أن $v(t)$ هي فعلا حل للمعادلة التفاضلية.

• التحقق من الشروط البدئية: $z=0$ و$v=0$ عند $t=0$.

• حسب التعبير $v(t)=\dfrac{1}{\alpha}\times\dfrac{e^{2\alpha g t}-1}{e^{2\alpha g t}+1}$ نجد عند $t=0$: $v(t)=\dfrac{1}{\alpha}\times\dfrac{(e^0-1)}{(e^0+1)}=0$.

وحسب التعبير $z(t)=\dfrac{1}{\alpha^2.g}\ln\left(\dfrac{e^{\alpha g t}+e^{-\alpha g t}}{2}\right)$ نجد عند $t=0$: $z(t)=\dfrac{1}{\alpha^2.g}\ln\left(\dfrac{e^0+e^0}{2}\right)=0$.

3/ 3.1– البرهنة:

أ. لدينا: $v(t)=\dfrac{1}{\alpha}\times\dfrac{e^{2\alpha g t}-1}{e^{2\alpha g t}+1}=\dfrac{1}{\alpha}\times\dfrac{1-e^{-2\alpha g t}}{1+e^{-2\alpha g t}}$

عندما تؤول $t\to+\infty$ يؤول $e^{-2\alpha g t}\to 0$، وبالتالي تؤول السرعة إلى قيمة حدية $v_L=\dfrac{1}{\alpha}$.

ب. تعبير v_L بدلالة m وg وK:

حسب السؤال 2.1 لدينا: $\alpha^2=\dfrac{K}{m.g}$، ومنه: $\alpha=\sqrt{\dfrac{K}{m.g}}$ ؛ وبالتالي: $v_L=\dfrac{1}{\alpha}=\sqrt{\dfrac{m.g}{K}}$.

ج. التحقق من أن $v_L=\dfrac{1}{\alpha}$ هي حل للمعادلة (2):

عندما تصبح حركة الكرة مستقيمية منتظمة سرعتها $v_L=\dfrac{1}{\alpha}$ ثابتة يكون $\dfrac{dv}{dt}=0$.

إذن المعادلة (2): $\dfrac{dv}{dt}=g(1-\alpha^2.v^2)=0$

ومنه: $v_L=\dfrac{1}{\alpha}=v$، وبالتالي فإن: $v_L=\dfrac{1}{\alpha}$ هي حل للمعادلة (2).

3.2– استنتاج قيمة الثابتة K:

لدينا: $v_L=\dfrac{1}{\alpha}=\sqrt{\dfrac{m.g}{K}}$ (السؤال 3.1.ب)

ومنه: $K=\dfrac{m.g}{v_L^2}$

تطبيق عددي: $K=\dfrac{45,9.10^{-3}\times 9,8}{(35)^2}$ أي إن: $K=3,67.10^{-4}kg.m^{-1}$.

حساب المسافة z_L التي تقطعها الكرة عند $t=10s$:

لدينا: $z(t)=\dfrac{1}{\alpha^2.g}\ln\left(\dfrac{e^{\alpha g t}+e^{-\alpha g t}}{2}\right)$

مع: $\alpha=\dfrac{1}{v_L}=\dfrac{1}{35}$ و$t=10s$ نجد: $z_L\simeq 263,8m$

نلاحظ أن المسافة التي تقطعها الكرة لتصل سرعتها إلى القيمة $35m.s^{-1}$ كبيرة بوجود الاحتكاكات إذا قورنت بالمسافة التي تقطعها الكرة باعتبارها في سقوط حر.