الصفحة
1 / 5

الامتحان التجريبي الرابع لنيل شهادة البكالوريا مدينة زايو 2018

المادة	الرياضيات	المعامل	9
الشعبة	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	مدة الإنجاز	4

بسم الله الرحمن الرحيم

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع (4) ساعات.
- يتكون الموضوع من أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالحسابيات.......................................(3.00 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية.......................................(3.00 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالبنيات الجبرية.......................................(4.00 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.......................................(10.00 ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

N.B: toute réponse non justifiée ou non détaillée sera considérée comme fausse

إعداد الأستاذين : سفيان طجيو و عبد العلي طجيو

التمرين الأول: (3 نقط)

لكل n من $\mathbb{N}^*$، نضع : $S_n = 1+11+11^2+11^3+\cdots+11^{n-1}$.

1) تحقق أن : $S_{2018} - 11\times S_{2017} = 1$، ثم إستنتج أن $S_{2018} \wedge 11 = 1$. — 0.50 ن

2) بين أن : $10\times S_n = 11^n - 1$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$. — 0.25 ن

3) نعتبر في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $(E): 11x \equiv 1 [S_{2018}]$ وليكن x حلا للمعادلة (E).

a- بين أن : $x \equiv 11^{2017} [S_{2018}]$. — 0.50 ن

b- بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S = \{11^{2017} + S_{2018}k \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$. — 0.25 ن

4) a- بين أن العدد 2017 أولي. — 0.25 ن

b- بين أنه لكل عدد أولي p أكبر قطعا من 5 لدينا : $S_p \equiv 1[p]$. — 0.50 ن

c- حدد باقي القسمة الاقليدية للعدد S_{2018} على 2017. — 0.25 ن

5) حل في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة التالية : $11^{2018}x - 5y = 2$. — 0.50 ن

التمرين الثاني : (3 نقط)

I_ نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(E): z^2 - (1+5i)z - 8 + 4i = 0$.

1) حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي : $8-6i$. — 0.50 ن

2) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E). — 0.25 ن

II_ في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي : $z_A = i$ و $z_B = 2+2i$ و $z_C = -1+3i$.

1) بين أن المثلث ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A. — 0.50 ن

2) نعتبر الدوران R الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ والتحاكي H الذي مركزه A ونسبته -2.

a- حدد الصيغة العقدية للتحويلين R و H. — 0.50 ن

b- بين أن الصيغة العقدية للتحويل $F = R\circ H$ هي : $z' - i = -2i(z-i)$. — 0.25 ن

c- لتكن C' صورة C بالتحويل F.

✓ بين أن النقط A و B و C' مستقيمية. — 0.50 ن

3) حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث تكون النقط A و B و C و M متداورة. — 0.50 ن

التمرين الثالث: (4 نقط)

نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

لكل (x,y,z) من $\mathbb{R}^3$، نعتبر المصفوفة التالية : $\mathcal{M}(x,y,z)=\begin{pmatrix}x-y&-y\\y+z&x-y\end{pmatrix}$.

في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ لتكن E مجموعة المصفوفات الآتية : $E=\{\mathcal{M}(x,y,z)/(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}$.

1) بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$. 0.50 ن

2) -a أحسب : $\mathcal{M}(0,1,0)\times\mathcal{M}(0,0,1)$. 0.25 ن

-b هل E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$؟ علل جوابك. 0.25 ن

3) لتكن F مجموعة المصفوفات من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ التي تكتب على الشكل التالي :

$$F=\left\{\begin{pmatrix}x-y&-y\\y&x-y\end{pmatrix}/(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

-a بين أن F جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$. 0.25 ن

-b بين أن : $F\subset E$. 0.25 ن

-c بين أن $(F,+,\times)$ حلقة تبادلية و واحدية. 0.75 ن

4) نعتبر التطبيق ψ المعرف من F نحو $\mathbb{C}$ حيث : $\psi\left(\begin{pmatrix}x-y&-y\\y&x-y\end{pmatrix}\right)=(x-y)+iy$.

-a نضع : $F^*=F-\{\mathcal{M}(0,0,0)\}$. بين أن ψ تقابل من F^* نحو $\mathbb{C}^*$، ثم حدد ψ^{-1}. 0.50 ن

-b بين أن ψ^{-1} تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(F^*,\times)$. 0.50 ن

-c استنتج بنية $(F^*,\times)$. 0.25 ن

5) لتكن $N(x,y)=\begin{pmatrix}x-y&-y\\y&x-y\end{pmatrix}$ مصفوفة من F^* بحيث x و y من $\mathbb{R}$.

✓ حدد المصفوفة المقلوبة للمصفوفة $N(x,y)$ لكل x و y من $\mathbb{R}$. 0.50 ن

التمرين الرابع: (10 نقط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=(x+1)e^{-x}$

I_1) -a بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)(\exists c_x\in]x,2x[);\ f(2x)-f(x)=-xc_xe^{-c_x}$. 0.50 ن

-b استنتج أن : $(\forall x\in]0,+\infty[);\ f(2x)-f(x)<0$. 0.25 ن

2) بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(2x)-f(x)=0$. 0.50 ن

II_ نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $F(x)=\int_{x}^{2x}\frac{1}{1+te^{-t}}dt$

وليكن (C_F) المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ و $\|\vec{i}\|=2\ cm$.

0.50 ن | **(1 a-** تحقق أن : $(\forall x\in[0;1]);\ 1-x\le\frac{1}{1+x}\le 1-\frac{x}{2}$.

0.50 ن | **b-** استنتج أن : $(\forall t\in[0,+\infty[);\ 1-te^{-t}\le\frac{1}{1+te^{-t}}\le 1-\frac{te^{-t}}{2}$.

0.50 ن | **c-** بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{+});\ x+f(2x)-f(x)\le F(x)\le x+\frac{1}{2}\left(f(2x)-f(x)\right)$.

0.50 ن | **d-** استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ ، ثم أن المستقيم الذي معادلته $(\Delta):y=x$ مقارب للمنحنى (C_F) بجوار $+\infty$.

0.25 ن | **e-** أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_F) والمستقيم (Δ) على المجال $]0,+\infty[$.

0.50 ن | **(2** بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر ثم حدد $F'_d(0)$.

0.75 ن | **(3 a-** بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$ وأن :

$$(\forall x\in]0,+\infty[);\ F'(x)=\frac{e^{2x}+2x\left(e^{x}-1\right)}{\left(e^{2x}+2x\right)\left(1+xe^{-x}\right)}.$$

0.25 ن | **b-** اعط جدول تغيرات الدالة F.

0.50 ن | **(4** أنشئ المنحنى (C_F).

(5 لتكن S مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى (C_F) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي هي $x=0$ و $x=1$.

0.75 ن | ✓ بين أن : $0\le S\le\frac{1}{4}$.

III_ ليكن n من $\mathbb{N}^{*}$.

0.50 ن | **(1 a-** بين أن : $(\exists\alpha_n\in[0,+\infty[);\ \int_{\alpha_n}^{2\alpha_n}\frac{1}{1+te^{-t}}dt=e^{-n}$.

0.75 ن | **b-** بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\ge1}$ تناقصية، ثم استنتج أنها متقاربة.

0.50 ن | **c-** بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$.

2) لتكن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية عددية معرفة بما يلي : $u_n=\int_0^{\alpha_n}F(t)dt$.

a- بين أن : $(\exists\beta_n\in[0,\alpha_n]);\ u_n=\alpha_nF(\beta_n)$. 0.50 ن

b- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ تناقصية، ثم استنتج أنها متقاربة محدداً نهايتها. 0.50 ن

3) نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي : $v_n=n\left(F\left(u_n+\frac{2}{n}\right)-F\left(u_n+\frac{1}{n}\right)\right)$.

a- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية، بين أن : 0.50 ن

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\left(\exists\lambda_n\in\left]u_n+\frac{1}{n};u_n+\frac{2}{n}\right[\right);\ v_n=\frac{e^{2\lambda_n}+2\lambda_n\left(e^{\lambda_n}-1\right)}{\left(e^{2\lambda_n}+2\lambda_n\right)\left(1+\lambda_ne^{-\lambda_n}\right)}.$$

b- استنتج أن المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ متقاربة محدداً نهايتها. 0.50 ن

إنتهى الموضوع

bon courage et bonne chance ☺