• إذا كان: $\Delta \neq 0$ فإن $a'=0$ و$b'=0$ يعني $y=0$.

• إذا كان: $\Delta = 0$ فإن $a=b=0$، حسب السؤال 2) ب) ومنه فإن $x=0$، إذن: $x=0$ أو $y=0$.

وبالتالي فإن: $(\forall (a;y) \in E^2); xy = 0 \Rightarrow x = 0$ أو $y=0$ يعني أن $(E;+;\times)$ حلقة كاملة.

3) أ- لنبين أن f تطبيق تقابلي.

• لدينا: $(\forall y \in E); (\exists (x;y) \in \mathbb{Z}^2) / y = x + y\sqrt{3}$

أي: $(\forall y \in E); (\exists (x;y) \in \mathbb{Z}^2) / y = f((x,y))$

ومنه f تطبيق شمولي.

• ليكن $(x;y)$ و$(a;b)$ عنصرين من $\mathbb{Z}^2$ بحيث: $f((x;y)) = f((a;b))$

لدينا:
$$f((x;y)) = f((a;b)) \Longleftrightarrow x + y\sqrt{3} = a + b\sqrt{3}$$
$$\Longleftrightarrow (x-a) + (y-b)\sqrt{3} = 0$$

وبما أن: $x - a \in \mathbb{Z}$ و $y - b \in \mathbb{Z}$، وحسب السؤال 1) أ) فإن:

$x-a=0$ و$y-b=0$ أي: $x=a$ و$y=b$ ومنه: $(x;y)=(a;b)$

إذن f تطبيق تبايني؛

وبالتالي فإن f تطبيق تقابلي.

ب- تحديد القانون الداخلي T في $\mathbb{Z}^2$.

يكون f تشاكلا من $(\mathbb{Z}^2;T)$ نحو $(E;\times)$ إذا وفقط إذا كان:
$$(\forall (x;y),(a;b) \in \mathbb{Z}^2); f((x;y)T(a;b)) = f((x;y)) \times f((a;b))$$

ليكن $(x;y)$ و$(a;b)$ عنصرين من $\mathbb{Z}^2$، لدينا:
$$f((x;y)) = x + y\sqrt{3} \text{ و } f((a;b)) = a + b\sqrt{3}$$

ومنه فإن: $f((x;y)) \times f((a;b)) = (ax + 3by) + (ay + bx)\sqrt{3}$

وحسب تعريف f، لدينا: $f((ax + 3by; ay + bx)) = (ax + 3by) + (ay + bx)\sqrt{3}$

ومنه فإن: $f((x;y)T(a;b)) = f((ax + 3by; ay + bx))$

وبما أن f تطبيق تقابلي فإن: $(x;y)T(a;b)=(xa+3yb;xb+ya)$

وبالتالي لكي يكون f تشاكلا من $(\mathbb{Z}^2;T)$ نحو $(E;\times)$ يجب أن نعرّف قانون التركيب الداخلي T في $\mathbb{Z}^2$ بما يلي:
$$(\forall (x;y),(a;b) \in \mathbb{Z}^2); (x;y)T(a;b) = (xa + 3yb; xb + ya)$$

4) أ- • القانون $\perp$ تبادلي في E.

• ليكن x وy وz عناصر من E، بحيث: $x = a + b\sqrt{3}$ و $y = a' + b'\sqrt{3}$ و $z = a'' + b''\sqrt{3}$

لدينا:
$$(x \perp y) \perp z = (aa' + bb'\sqrt{3}) \perp (a'' + b''\sqrt{3})$$
$$= aa'a'' + bb'b''\sqrt{3}$$

و
$$x \perp (y \perp z) = (a + b\sqrt{3}) \perp (a'a'' + b'b''\sqrt{3}) = aa'a'' + bb'b''\sqrt{3}$$

ومنه فإن: $(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$ إذن القانون $\perp$ تجميعي في E.

ب- تحديد العنصر المحايد:

لنحدد a وb من $\mathbb{Z}$ بحيث:

$$(\forall (x;y) \in IZ^2), (x + y\sqrt{3}) \perp (a + b\sqrt{3}) = x + y\sqrt{3}$$

ليكن x وy عنصرين من $\mathbb{Z}$، لدينا:

$$(x + y\sqrt{3}) \perp (a + b\sqrt{3}) = x + y\sqrt{3} \iff ax + by\sqrt{3} = x + y\sqrt{3}$$

$$\iff x(a-1) + y(b-1)\sqrt{3} = 0$$

$$\iff x(a-1) = 0 \text{ و } y(b-1) = 0$$

ومنه: $(\forall (x;y) \in \mathbb{Z}^2); \begin{cases} x(a-1) = 0 \\ y(b-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1$ و $b=1$

إذن: $1 + \sqrt{3}$ هو العنصر المحايد في $(E; \perp)$.

ج- تحديد العناصر القابلة للمماثلة في $(E; \perp)$.

ليكن: $x + y\sqrt{3}$ و$a + b\sqrt{3}$ عنصرين من E، لدينا:

$$(x + y\sqrt{3}) \perp (a + b\sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3} \iff xa + yb\sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}$$

$$\iff (xa - 1) + (yb - 1)\sqrt{3} = 0$$

$$\iff \begin{cases} xa = 1 \\ yb = 1 \end{cases}$$

وبما أن x وy وa وb عناصر من $\mathbb{Z}$ فإن:

$$ax=1 \iff (a=1 \text{ و } x=1) \text{ أو } (a=-1 \text{ و } x=-1)$$

$$by=1 \iff (b=1 \text{ و } y=1) \text{ أو } (b=-1 \text{ و } y=-1)$$

وبالتالي فإن العناصر القابلة للمماثلة في $(E; \perp)$ هي: $(1;1)$ و$(1;-1)$ و$(-1,1)$ و$(-1;-1)$.

التمرين 52

لتكن A مصفوفة مربعة من الرتبة 2 بحيث: $A^2=I$.

1) بين أن: $(\forall n \in IN^*) : (A + I)^n = 2^{n-1}(A + I)$

2) لتكن المصفوفة: $B = \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

أ- احسب $(B-I)^2$

ب- استنتج B^n حيث: $n \in IN^*$.

الحل

1) لنبين أن: $(\forall n \in IN^*) : (A+I)^n = 2^{n-1}(A+I)$ باستعمال البرهان بالترجع.

من أجل $n=1$، لدينا: $(A+I)^1 = A+I$ و $2^0(A+I) = A+I$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=1$.

ليكن n عنصرا من IN^*.

نفترض أن: $(A+I)^n = 2^{n-1}(A+I)$، ولنبين أن: $(A+I)^{n+1} = 2^n(A+I)$

لدينا: $(\mathcal{M}_2(IR); +; \times)$ حلقة واحدية.

ومنه:
$$\begin{aligned}(A+I)^{n+1} &= (A+I)^n(A+I) = 2^{n-1}(A+I)(A+I) \\ &= 2^{n-1}(A^2 + A\times I + I\times A + I^2) \\ &= 2^{n-1}(I + A + A + I) = 2^n(A+I)\end{aligned}$$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

وبالتالي: $(\forall n \in IN^*) : (A+I)^n = 2^{n-1}(A+I)$

2) أ- لنحسب $(B-I)^2$:

لدينا:
$$B - I = \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

ومنه:
$$(B-I)^2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

ب- لنستنتج B^n حيث: $n \in IN^*$

نضع: $B-I=A$. لدينا: $(B-I)^2 = A^2 = I$

إذن حسب السؤال 1، لدينا: $B^n = (A+I)^n = 2^{n-1}(A+I) = 2^{n-1}B$ ومنه: $(\forall n \in IN^*)\ ;\ B^n = 2^{n-1}B$

التمرين 53

لتكن المجموعة A المعرفة بما يلي: $A = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} / a,b \in IR \right\}$

1) بين أن A زمرة جزئية للزمرة $(\mathcal{M}_2(IR); +)$.

2) بين أن: $(\forall M, M' \in A); M \times M' \in A$.

3) ليكن التطبيق f بحيث:
$$\begin{aligned} f : A &\to \mathbb{C} \\ M(a,b) &\mapsto a + b + ib \end{aligned}$$

أ- بين أن f تشاكل تقابلي من $(A^*;\times)$ إلى $(\mathbb{C}^*;\times)$ حيث: $A^* = A - \{0\}$.

ب- ما بنية $(A,+,\times)$؟

الحل

1) لنبين أن A زمرة جزئية للزمرة $(\mathcal{M}_2(IR); +)$.

- لدينا: $A \neq \phi$ لأن: $I_2 \in A$ من أجل $a=1$ و$b=0$.
- ليكن M وN عنصرين من A، لدينا:

$$M \in A \Leftrightarrow \exists(a;b) \in IR^2 / M = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix}$$

$$N \in A \Leftrightarrow \exists(a';b') \in IR^2 / N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ -2b' & a'+2b' \end{pmatrix}$$

لدينا: $-N = \begin{pmatrix} -a' & -b' \\ 2b' & -a'-2b' \end{pmatrix}$ هي مماثلة N في $(\mathcal{M}_2(IR); +)$.

ومنه: $$M+(-N) = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a' & -b' \\ 2b' & -a'-2b' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a-a' & b-b' \\ -2(b-b') & (a-a')+2(b-b') \end{pmatrix}$$

لدينا: $a-a' \in IR$ و $b-b' \in IR$ إذن: $M+(-N) \in A$

وبالتالي: $(\forall(M;N) \in A^2); M+(-N) \in A$

يعني أن A زمرة جزئية للزمرة $(\mathcal{M}_2(IR); +)$.

2) لنبين أن: $(\forall(M,M') \in A^2); M \times M' \in A$.

ليكن M وM' عنصرين من A بحيث:

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix}$ و $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ -2b' & a'+2b' \end{pmatrix}$ مع: $(a;b;a';b') \in IR^4$

لدينا:

$$M \times N = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & b' \\ -2b' & a'+2b' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} aa'-2bb' & ab'+a'b+2bb' \\ -2a'b-2ab'-4bb' & -2bb'+aa'+2ab'+2a'b+4bb' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} aa'-2bb' & ab'+a'b+2bb' \\ -2(ab'+a'b+2bb') & (aa'-2bb')+2(ab'+a'b+2bb') \end{pmatrix}$$

نضع: $a''=aa'-2bb'$ و $b''=ab'+a'b+2bb'$

لدينا: $a'' \in IR$ و $b'' \in IR$ و $M \times N = \begin{pmatrix} a'' & b \\ -2b'' & a''+2b'' \end{pmatrix}$

ومنه: $M \times N \in A$

إذن: $(\forall(M;N) \in A^2); M \times N \in A$

يعني أن الجزء A مستقر من $(\mathscr{M}_2(IR);\times)$.

3) أ– • لنبين أن f تشاكل من $(A^*;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$.

ليكن M وN عنصرين من A^* بحيث:

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} \text{ و } N=\begin{pmatrix} a' & b' \\ -2b' & a'+2b' \end{pmatrix} \text{ مع: } (a;b;a';b')\in IR^4$$

لدينا حسب السؤال السابق: $M\times N=M(aa'-2bb';ab'+a'b+2bb')$

ومنه: $f(M\times N)=(aa'-2bb')+(ab'+a'b+2bb')+i(ab'+a'b+2bb')$

$$=(aa'+ab'+a'b)+i(ab'+a'b+2bb')$$

ولدينا: $f(M)\times f(N)=(a+b+ib)(a'+b'+ib')$

$$=aa'+ab'+iab'+a'b+bb'+ibb'+ia'b+ibb'-bb'$$

$$=(aa'+ab'+a'b)+i(ab'+a'b+2bb')$$

إذن: $(\forall (M;N)\in A^{*2});\ f(M\times N)=f(M)\times f(N)$

وبالتالي f تشاكل من $(A^*;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$.

• لنبين أن f تطبيق تقابلي من $(A^*;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$.

ليكن z عنصرا من $\mathbb{C}^*$، هل يوجد M وحيد من A^* بحيث: $f(M)=z$؟

لدينا: $z\in\mathbb{C}^*\Leftrightarrow (\exists!(a;b)\in IR^2)/z=a+ib$ و $(a;b)\neq(0;0)$

$\Leftrightarrow (\exists!(a;b)\in IR^2)/z=(a-b)+b+ib$ و $(a;b)\neq(0;0)$

$\Leftrightarrow (\exists! M\in A^*)/M=M(a-b;b)$ و $f(M)=z$

إذن f تطبيق تقابلي من $(A^*;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$.

وبالتالي f تشاكل تقابلي من $(A^*;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$.

ب– استنتاج بنية $(A;+;\times)$:

– لدينا $(A^*;+)$ زمرة تبادلية (حسب السؤال 1).

– لدينا $(\mathbb{C}^*;\times)$ زمرة تبادلية ومتشاكلة تقابليا مع $(A^*;\times)$.

إذن: $(A^*;\times)$ زمرة تبادلية.

لدينا القانونان + و× مستقران في A و$(\mathscr{M}_2(IR);+;\times)$ حلقة واحدية.

إذن × توزيعي بالنسبة لـ+ في A.

خلاصة: $(A;+;\times)$ جسم تبادلي.

لتكن المجموعة F المعرفة بما يلي: $F = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix} / x, y \in IR \right\}$.

1) بين أن $(F;+)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathscr{M}_2(IR); +)$.

2) بين أن $(F;+;\times)$ حلقة تبادلية وواحدية.

3) ما عناصر المجموعة F التي تقبل مقلوبا في $(F;\times)$؟

الحل

1) لنبين أن $(F;+)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathscr{M}_2(IR); +)$.

• لدينا $F \neq \phi$ لأن $I_2 \in F$ من أجل $x=1$ و $y=0$.

• ليكن M و N عنصرين من F، لدينا:

$$M \in F \Leftrightarrow (\exists (x;y) \in IR^2); M = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix}$$

$$N \in F \Leftrightarrow (\exists (x';y') \in IR^2); N = \begin{pmatrix} x'+y' & y' \\ 0 & x'+y' \end{pmatrix}$$

لدينا: $-N = \begin{pmatrix} -x'-y' & -y' \\ 0 & -x'-y' \end{pmatrix}$ هي مماثلة N في $(\mathscr{M}_2(IR); +)$.

ومنه:

$$M + (-N) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x'-y' & y' \\ 0 & -x'-y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x-x')+(y-y') & y-y' \\ 0 & (x-x')+(y-y') \end{pmatrix}$$

لدينا: $x - x' \in IR$ و $y - y' \in IR$ إذن: $M + (-N) \in F$

وبالتالي: $(\forall (M;N) \in F^2); M + (-N) \in F$

يعني أن $(F;+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(\mathscr{M}_2(IR); +)$.

2) لنبين أن $(F;+;\times)$ حلقة تبادلية وواحدية.

لدينا حسب السؤال 1 $(F;+)$ زمرة تبادلية.

ولتبيان أن $(F;+;\times)$ حلقة، يكفي أن نبين أن: القانون $\times$ قانون تركيب داخلي في F.

ليكن M و N عنصرين F بحيث:

$M = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix}$ و $N = \begin{pmatrix} x'+y' & y' \\ 0 & x'+y' \end{pmatrix}$ مع: $(x;y;x';y') \in IR^4$

لدينا :

$$M\times N=\begin{pmatrix}x+y & y\\ 0 & x+y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x'+y' & y'\\ 0 & x'+y'\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}xx'+xy'+yx'+yy' & xy'+yy'+x'y+yy'\\ 0 & xx'+xy'+yx'+yy'\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}(xx'-yy')+(xy'+yx'+2yy') & xy'+x'y+2yy'\\ 0 & (xx'-yy')+(xy'+yx'+2yy')\end{pmatrix}$$

نضع : $X=xx'-yy'$ و $Y=xy'+yx'+2yy'$

لدينا : $M\times N=\begin{pmatrix}X+Y & Y\\ 0 & X+Y\end{pmatrix}$ مع $X\in IR$ و $Y\in IR$

إذن : $(\forall (M;N)\in F^2);\ M\times N\in F$

ومنه $\times$ قانون تركيب داخلي في F وبما أن : $F\subset \mathcal{M}_2(IR)$ و $(\mathcal{M}_2(IR);+;\times)$ حلقة فإن $\times$ تجميعي وتوزيعي بالنسبة للقانون $+$ في F.

وبالتالي $(F;+;\times)$ حلقة.

• لدينا I_2 هو العنصر المحايد للقانون $\times$ في $\mathcal{M}_2(IR)$ و $I_2\in F$، إذن I_2 هو العنصر المحايد للقانون $\times$ في F

ومنه : $(F;+;\times)$ حلقة واحدية.

• القانون $\times$ تبادلي في F (تحقق من ذلك).

إذن $(F;+;\times)$ حلقة تبادلية وواحدية.

3) لنحدد عناصر المجموعة F التي تقبل نقلوبا في $(F;\times)$.

ليكن M عنصرا من F بحيث : $M=\begin{pmatrix}x+y & y\\ 0 & x+y\end{pmatrix}$ مع $(x;y)\in IR^2$.

M تقبل مقلوبا في $\mathcal{M}_2(IR)$ تكافئ $\det M\neq 0$.

لدينا :
$$\det M=0 \iff (x+y)^2=0$$
$$\iff y=-x$$

M تقبل مقلوبا في $\mathcal{M}_2(IR)$ إذا وفقط إذا كان $x+y\neq 0$

ومقلوبها هو : $M^{-1}=\dfrac{1}{(x+y)^2}\begin{pmatrix}x+y & -y\\ 0 & x+y\end{pmatrix}$

نضع $x'=x+2y$ و $y'=-y$، لدينا : $M^{-1}=\dfrac{1}{(x+y)^2}\begin{pmatrix}x'+y' & y'\\ 0 & x'+y'\end{pmatrix}$

إذن : $M^{-1}\in F$.

وبالتالي كل عنصر $M(x;y)$ من F بحيث $y\neq -x$ يقبل مماثلا في $(F;\times)$.

التمرين 55

ليكن A وB عنصرين من $\mathscr{M}_2(IR)$ بحيث: $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

نعتبر المجموعة التالية: $E=(aA+bB/(a;b)\in IR^2)$.

1) بين أن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية وواحدية وغير كاملة.

2) ليكن $M=aA+bB$ عنصرا من E. حيث: $a;b\in IR$.

أ- حدد شرطا كافيا ولازما بحيث المصفوفة M تقبل مقلوبا في $(E;+;\times)$ ثم حدد M^{-1} في حالة وجودها.

ب- ليكن n عنصرا من IN^*، بين أن: $M^n=2^{n-1}(a^nA+b^nB)$.

الحل

1) لنبين أن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية وغير كاملة.

- لنبين أن $(E;+)$ زمرة تبادلية.

نبين أن $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathscr{M}_2(IR);+)$.

• لدينا $E\neq\phi$ لأن: $A\in E$ من أجل $a=1$ و$b=0$.

• ليكن M وN عنصرين من E، بحيث: $M=aA+bB$ و$N=a'A+b'B$ مع $(a;b;a';b')\in IR^4$

لدينا: $-N=-a'A-b'B$ هو مماثل N في $(\mathscr{M}_2(IR);+)$ ومنه:

$$M+(-N)=(aA+bB)+(-a'A-b'B)=(a-a')A+(b-b')B$$

وبما أن $a-a'\in IR$ و$b-b'\in IR$ إذن: $M+(-N)\in E$

إذن: $(\forall(M;N)\in E^2);M\times N\in E$

وبالتالي $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathscr{M}_2(IR);+)$.

إذن $(E;+)$ زمرة تبادلية.

- لنبين أن القانون $\times$ قانون تركيب داخلي في E.

ليكن M وN عنصرين من E بحيث: $M=aA+bB$ و$N=a'A+b'B$ مع $(a;b;a';b')\in IR^4$

لدينا:

$$M\times N=(aA+bB)\times(a'A+b'B)$$
$$=aa'A^2+ab'A\times B+ba'B\times A+bb'B^2$$

لدينا: $A^2=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}=2A$

و: $A\times B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\theta$

و: $B\times A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\theta$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2B$$ و

إذن: $M\times N=2aa'A+2bb'B$

وبما أن: $2aa' \in IR$ و $2bb' \in IR$ فإن: $M \times N \in E$

ومنه: $(\forall (M;N) \in E^2); M \times N \in E$

إذن × قانون تركيب داخلي في E.

لدينا: $(\mathcal{M}_2(IR); +; \times)$ حلقة واحدية و $E \subset \mathcal{M}_2(IR)$ و+ و× قانونا تركيب داخليين في E،

إذن ×تجميعي في E و× توزيعي بالنسبة ل+ في E.

وبالتالي $(E;+;\times)$ حلقة.

وكون I_2 هو العنصر المحايد للضرب في $\mathcal{M}_2(IR)$ و $I_2 \in E$، من أجل $a = \frac{1}{2}$ و $b = \frac{1}{2}$

فإن $(E;+;\times)$ حلقة واحدية.

- القانون × تبادلي في E (تحقق من ذلك).

- لنبين أن الحلقة $(E;+;\times)$ غير كاملة.

$(E;+;\times)$ حلقة غير كاملة تعني أنها تقبل قواسم للصفر.

لدينا حسب ما سبق: $A\times B=\theta_2$ و $B\times A=\theta_2$ و $A \neq \theta_2$ و $B \neq \theta_2$

إذن A و B هما قاسمان للصفر في الحلقة $(E;+;\times)$ ومنه $(E;+;\times)$ حلقة غير كاملة.

2) أ- لنحدد شرطا كافيا ولازما بحيث المصفوفة M تقبل مقلوبا في $(E;+;\times)$.

لتكن $M=aA+bB$ عنصرا من E حيث: $(a;b) \in IR^2$.

لدينا: $M = aA + bB = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$

لدينا: M تقبل مقلوبا في $\mathcal{M}_2(IR)$ إذا وفقط إذا كان $\det M \neq 0$

ومنه:
$$\det M = 0 \iff (a+b)^2 - (a-b)^2 = 0$$
$$\iff 4ab = 0$$
$$\iff a = 0 \text{ أو } b = 0$$

إذن: $\det M \neq 0 \iff a \neq 0$ و $b \neq 0$

وبالتالي M تقبل مقلوبا في $\mathcal{M}_2(IR)$ إذا وفقط إذا كان $a \neq 0$ و $b \neq 0$ ومقلوبها هو المصفوفة M^{-1} بحيث

$$M^{-1} = \frac{1}{4ab}\begin{pmatrix} a+b & b-a \\ b-a & a+b \end{pmatrix}$$

لدينا: $M^{-1} \in E$ وبالتالي كل مصفوفة M من E بحيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$ تقبل مقلوبا في E هي:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{4ab} & \frac{b-a}{4ab} \\ \frac{b-a}{4ab} & \frac{a+b}{4ab} \end{pmatrix}$$

ب- لنبين أن: $(\forall n \in IN^*); M^n = 2^{n-1}(a^nA + b^nB)$

ليكن M عنصرا من E بحيث: $M=aA+bB$ مع $(a;b) \in IR^2$ وn من IN^*.

لدينا (حسب الصيغة الحدانية)

$$M^n = (aA + bB)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (aA)^k \times (bB)^{n-k}$$

$$= C_n^0(aA)^0(bB)^n + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k(aA)^k(bB)^{n-k} + C_n^n(aA)^n(bB)^0$$

لدينا: $A\times B=\theta_2$ و$A\times B=\theta_2$ ومنه: $(\forall k \in IN^*); (aA)^k(bB)^{n-k} = \theta_2$

إذن: $M^n = C_n^0(aA)^0(bB)^n + C_n^n(aA)^n(bB)^0 = b^nB^n + a^nA^n$

لنبين باستعمال البرهان بالترجع أن: $(\forall n \in IN^*); A^n = 2^{n-1}A$

من أجل $n=1$، لدينا: $A^1=2^0A$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=1$.

ليكن n عنصرا من IN^*، نفترض أن: $A^n=2^{n-1}A$ ولنبين أن: $A^{n+1}=2^nA$

لدينا: $A^{n+1}=A\times A^n=2^{n-1}.A^2=2^{n-1}(2A)=2^nA$، إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

وبالتالي: $(\forall n \in IN^*); A^n = 2^{n-1}A$

وبنفس الطريقة نبين أن: $(\forall n \in IN^*); B^n = 2^{n-1}.B$

إذن: $M^n=b^n.B^n+a^nA^n=b^n.2^{n-1}B+a^n.2^{n-1}.A=2^{n-1}.(a^nA+b^nB)$

وبالتالي: $(\forall n \in IN^*); M^n = 2^{n-1}(a^nA + b^nB)$.

التمرين 56

نعتبر المجموعة F المعرفة بما يلي: $F = \left\{\begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} / x, y \in \mathbb{Q}\right\}$.

1) بين أن $(F;+)$ زمرة تبادلية.

2) بين أن $(F;+;\times)$ حلقة تبادلية وواحدية.

3) أ- بين أن: $(\forall x;y \in \mathbb{Q}); x^2 = 2y^2 \Leftrightarrow x = y = 0$

ب- بين أن: $(F;+;\times)$ جسم تبادلي.

ج- حل في F المعادلة: $X \in F ; X^2 - 4X + 3I_2 = \theta_2$

(I_2 المصفوفة الوحدة، θ_2 المصفوفة المنعدمة).

الحل

لنبين أن $(F;+)$ زمرة تبادلية.

لدينا: $F \subset \mathcal{M}_2(IR)$ و$(\mathcal{M}_2(IR); +)$ زمرة تبادلية، ومنه يكفي أن نبين أن $(F;+)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathcal{M}_2(IR); +)$.

- لدينا: $F \neq \phi$ لأن: $I_2 \in F$ من أجل $x=0$ و$y=0$.

- ليكن M وN عنصرين من F، لدينا:

$$M \in F \iff (\exists (x;y) \in \mathbb{Q}^2)/M = \begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$N \in F \iff (\exists (x';y') \in \mathbb{Q}^2)/N = \begin{pmatrix} x' & 2y' \\ y' & x' \end{pmatrix}$$

لدينا : $-N = \begin{pmatrix} -x' & -2y' \\ -y' & -x' \end{pmatrix}$ هو مماثل N في $(\mathcal{M}_2(IR);+)$ ومنه :

$$M + (-N) = \begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x' & -2y' \\ -y' & -x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x' & 2(y - y') \\ y - y' & x - x' \end{pmatrix}$$

لدينا: $x - x' \in \mathbb{Q}$ و $y - y' \in \mathbb{Q}$ ومنه : $M + (-N) \in F$

إذن: $(\forall (M;N) \in F^2); M + (-N) \in F$ ؛ يعني $(F;+)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathcal{M}_2(IR);+)$.

وبالتالي $(F;+)$ زمرة تبادلية.

2) لنبين أن $(F;+;\times)$ حلقة تبادلية وواحدية.

- لدينا $(F;+)$ زمرة تبادلية.
- لنبين أن القانون × قانون تركيب داخلي في F.

ليكن M وN عنصرين من F بحيث:

$$M = \begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \text{ و } N = \begin{pmatrix} x' & 2y' \\ y' & x' \end{pmatrix} \text{ مع } (x;y;x';y') \in \mathbb{Q}^4$$

لدينا:

$$M \times N = \begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' & 2y' \\ y' & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' + 2yy' & 2xy' + 2x'y \\ xy' + x'y & 2yy' + xx' \end{pmatrix}$$

نضع : $X = xx' + 2yy'$ و $Y = xy' + x'y$

لدينا: $X \in \mathbb{Q}$ و $Y \in \mathbb{Q}$ و $M \times N = \begin{pmatrix} X & 2Y \\ Y & X \end{pmatrix}$ ؛ ومنه : $M \times N \in F$

إذن: $(\forall (M;N) \in F^2); M \times N \in F$، يعني أن القانون × قانون تركيب داخلي في F.

وبما أن $(\mathcal{M}_2(IR);+;\times)$ حلقة والقانونين + و× قانونَي تركيب داخليين في F فإن × تجميعي في F و× توزيعي بالنسبة لـ+ في F.

إذن $(F;+;\times)$ حلقة.

ولدينا I_2 هو العنصر المحايد للضرب في $\mathcal{M}_2(IR)$ و $I_2 \in F$.

إذن I_2 هو العنصر المحايد للقانون × في F.

وبالتالي $(F;+;\times)$ حلقة واحدية.

• لنبين أن القانون × تبادلي في F.

ليكن M وN عنصرين من F بحيث: $M=\begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$ و $N=\begin{pmatrix} x' & 2y' \\ y' & x' \end{pmatrix}$ مع $(x;y;x';y')\in\mathbb{Q}^4$

لدينا حسب ما سبق: $M\times N=\begin{pmatrix} xx'+2yy' & 2(xy'+x'y) \\ xy'+x'y & xx'+2yy' \end{pmatrix}$

ولدينا:

$$N\times M=\begin{pmatrix} x' & 2y' \\ y' & x' \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x'x+2y'y & 2x'y+2y'x \\ y'x+x'y & 2y'y+x'x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xx'+2yy' & 2(xy'+x'y) \\ xy'+x'y & xx'+2yy' \end{pmatrix}$$

$$=M\times N$$

إذن: $(\forall(M;N)\in F^2);M\times N=N\times M$، يعني أن القانون × تبادليٌ في F.

وبالتالي $(F;+;\times)$ حلقة تبادلية وواحدية.

3) أ- لنبين أن: $(\forall(x;y)\in\mathbb{Q}^2);x^2=2y^2\iff x=y=0$

$(\Leftarrow)$ إذا كان $x=y=0$ فإن: $x^2=2y^2$ عبارة صحيحة.

$(\Rightarrow)$ ليكن x وy من $\mathbb{Q}$، بحيث: $x^2=2y^2$،

نفترض أن $y\neq0$:

لدينا: $x^2=2y^2\Rightarrow\frac{x^2}{y^2}=2$

$$\Rightarrow\left|\frac{x}{y}\right|=\sqrt{2}$$

لدينا: $x\in\mathbb{Q}$ و$y\in\mathbb{Q}^*$ ومنه: $\left|\frac{x}{y}\right|\in\mathbb{Q}$

إذن: $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ وهذا تناقض وبالتالي $y=0$ ومنه: $x=0$.

إذن: $(\forall(x;y)\in\mathbb{Q}^2);x^2=2y^2\iff x=y=0$.

ب- لنبين أن $(F;+;\times)$ جسم تبادلي.

لدينا $(F;+;\times)$ حلقة تبادلية وواحدية ومنه يكفي أن نبين أن كل عنصر يخالف θ_2، يقبل مقلوبا في F.

ليكن M عنصرا من $F-\{\theta_2\}$ بحيث: $M=\begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$، $(x;y)\in\mathbb{Q}^2$ و$(x;y)\neq(0;0)$

لدينا: $detM=x^2-2y^2$

ومنه: $\det M=0\iff x^2-2y^2=0$

$$\iff x=y=0$$

$$\iff M=\theta_2$$

إذن: $M\neq\theta_2\iff(\forall M\in F);\det M\neq0$

وبالتالي كل عنصر M من $F-\{\theta_2\}$ يقبل مقلوبا في $\mathscr{M}_2(IR)$.

لنبين أن $M^{-1} \in F$:

لدينا : $M^{-1} = \frac{1}{x^2 - 2y^2}\begin{pmatrix} x & -2y \\ -y & x \end{pmatrix}$

نضع : $X=x$ و $Y=-y$ مع $X \in \mathbb{Q}$ و $Y \in \mathbb{Q}$

و $M^{-1} = \frac{1}{X^2 - 2Y^2}\begin{pmatrix} X & 2Y \\ Y & X \end{pmatrix}$ إذن: $(\forall M \in F - \{\theta_2\}); M^{-1} \in F$

وبالتالي $(F;+;\times)$ جسم تبادلي.

ج- لنحل في F المعادلة : $X^2 - 4X + 3I_2 = \;$ $(X \in F);$

ليكن X من F، لدينا $(F;+;\times)$ جسم إذن فهو حلقة كاملة.

ومنه : $X^2 - 4X + 3I_2 = \theta_2 \iff (X - I_2)(X - 3I_2) = \theta_2$

$\iff X - I_2 = \theta_2$ أو $X - 3I_2 = \theta_2$

$\iff X = I_2$ أو $X = 3I_2$

لدينا : $I_2 \in F$ و $3I_2 \in F$ إذن : $S_F = \{3I_2; I_2\}$.

التمرين 57

لتكن $E = \{M(x;y) = xI_2 + yA / (x;y) \in IR^2\}$ مع : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) بين أن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية وواحدية، هل هي كاملة؟

2) نعتبر المجموعة $F = \{M(x;y) \in E / |x^2 - y^2| = 1\}$

بين أن $(F;\times)$ زمرة تبادلية.

3) نعتبر المجموعة $K_p = \{M(x;y) \in E / x + y$ يقسم $p\}$ مع $p \in IN^*$

بين أن $(K_p;+;\times)$ حلقة تبادلية.

الحل

1) لنبين أن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية وواحدية.

- لنبين أن $(E;+)$ زمرة تبادلية.

لدينا : $E \subset \mathcal{M}_2(IR)$ و $(\mathcal{M}_2(IR);+)$ زمرة تبادلية ومنه يكفي أن نبين أن $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathcal{M}_2(IR);+)$.

- لدينا : $E \neq \phi$ لأن : $I_2 \in E$ من أجل $x=1$ و $y=0$.
- ليكن M و N عنصرين من E بحيث : $M=xI_2+yA$ و $N=x'I_2+y'A$ مع $(x;x';y;y') \in IR^4$

لدينا : $-N=-x'I_2-y'A$ هو مماثل N في $(\mathcal{M}_2(IR);+)$ ومنه :

$$M+(-N)=(xI_2+yA)+(-x'I_2-y'A)=(x-x')I_2+(y-y')A$$

بما أن $x-x' \in IR$ و $y-y' \in IR$ فإن: $M+(-N) \in E$

إذن: $(\forall (M;N) \in E^2); M+(-N) \in E$

وبالتالي $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathscr{M}_2(IR);+)$.

إذن $(E;+)$ زمرة تبادلية.

- لنبين أن القانون × قانون تركيب داخلي في E.

ليكن M و N عنصرين من E بحيث:

$M=xI_2+yA$ و $N=x'I_2+y'A$ مع $(x;y;x';y') \in IR^4$

لدينا: $M\times N=(xI_2+yA)\times(x'I_2+y'A)=xx'I_2+xy'A+yx'A+yy'A^2$

وبما أن: $A^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$ ، فإن: $M\times N=(xx'+yy')I_2+(xy'+yx')A$

بما أن $xx'+yy' \in IR$ و $xy'+yx' \in IR$ فإن: $M\times N \in E$

ومنه: $(\forall (M;N) \in E^2); M\times N \in E$

إذن: × قانون تركيب داخلي في E.

لدينا: $(\mathscr{M}_2(IR);+;\times)$ حلقة واحدية و $E \subset \mathscr{M}_2(IR)$ و+ و× قانونا تركيب داخليين في E، إذن × تجميعي في E و× توزيعي بالنسبة لـ+ في E.

وبالتالي $(E;+;\times)$ حلقة.

وكون I_2 هو العنصر المحايد للضرب في $(\mathscr{M}_2(IR);\times)$ و $I_2 \in E$ إذن $(E;+;\times)$ حلقة واحدية.

- القانون × تبادلي في E (تحقق من ذلك).

- لنبين هل الحلقة $(E;+;\times)$ كاملة؟

لدينا: $A+I_2 \in E$ من أجل $x=y=1$ ولدينا: $A+I_2=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

و $A-I_2 \in E$ من أجل $x=1$ و $y=-1$ ولدينا: $A-I_2=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

ومنه: $(A+I_2)\times(A-I_2)=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\theta_2$

بما أن: $A+I_2 \neq \theta_2$ و $A-I_2 \neq \theta_2$ و $(A+I_2)\times(A-I_2)=\theta_2$ فإن $A+I_2$ و $A-I_2$ هما قاسمان للصفر وبالتالي $(E;+;\times)$ حلقة غير كاملة.

2) لنبين أن: $(F;\times)$ زمرة تبادلية.

- لدينا: $F \neq \phi$ لأن: $I_2 \in F$ (لأن $I_2=M(1;0)$ و $\left|1^2-0^2\right|=1$)

- لنبين أن F جزء مستقر من $(E;\times)$.

• لدينا: $F \subset E$ (حسب تعريف المجموعة F)

• ليكن $M(x;y)$ و $M'(x';y')$ عنصرين من F.

لدينا: $M(x;y)\times M'(x';y')=(xx'+yy')I_2+(xy'+x'y)A$

ولدينا:

$$\begin{aligned}\left|(xx'+yy')^2-(xy'+x'y)^2\right| &= \left|x^2x'^2+y^2y'^2-x^2y'^2-x'^2y^2\right|\\ &= \left|x^2\left(x'^2-y'^2\right)-y^2\left(x'^2-y'^2\right)\right|\\ &= \left|\left(x^2-y^2\right)\left(x'^2-y'^2\right)\right|\\ &= \left|x^2-y^2\right|\times\left|x'^2-y'^2\right|\\ &= 1\end{aligned}$$

ومنه: $M(x;y)\times M'(x';y')\in F$

إذن: $\left(\forall (M;M')\in F^2\right); M\times M'\in F$

يعني أن F جزء مستقر في $(E;\times)$ وبما أن $\times$ تجميعي وتبادلي في E فإن $\times$ تجميعي وتبادلي في F.

ولدينا: $I_2\in F$، إذن I_2 هو العنصر المحايد في $(F;\times)$.

- لنحدد العناصر التي لها مقلوبٌ في $(F;\times)$.

ليكن $M(x;y)$ عنصرا من F، لدينا: $M(x;y)=\begin{pmatrix} x & y\\ y & x\end{pmatrix}$ مع $\left|x^2-y^2\right|=1$

لدينا: $\det\left(M(x;y)\right)=\begin{vmatrix} x & y\\ y & x\end{vmatrix}=x^2-y^2$ ومنه: $det(M(x;y))=1$

أو $det(M(x;y))=-1$ (لأن $\left|x^2-y^2\right|=1$) إذن: $\det\left(M(x;y)\right)\neq 0$

يعني أن $M(x;y)$ يقبل مقلوبا في $\mathcal{M}_2(IR)$ ولدينا:

$$\left(M(x;y)\right)^{-1}=\frac{1}{x^2-y^2}\begin{pmatrix} x & -y\\ -y & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{x}{x^2-y^2} & -\frac{y}{x^2-y^2}\\ -\frac{y}{x^2-y^2} & \frac{x}{x^2-y^2}\end{pmatrix}$$

و $\left|\frac{x^2}{\left(x^2-y^2\right)^2}-\frac{y^2}{\left(x^2-y^2\right)^2}\right|=\left|\frac{1}{x^2-y^2}\right|=1$

إذن: $\left(M(x;y)\right)^{-1}=M\left(\frac{x}{x^2-y^2};-\frac{y}{x^2-y^2}\right)$

وبالتالي كل عنصر من F له مقلوب في $(F;\times)$.

خلاصة: $(F;\times)$ زمرة تبادلية.

3) لنبين أن $(K_p;+;\times)$ حلقة تبادلية.

لدينا: $K_p \subset E$ و$(E;+;\times)$ حلقة تبادلية.

- لنبين أن $(K_p;+)$ زمرة تبادلية.

يكفي أن نبين أن $(K_p;+)$ زمرة جزئية للزمرة $(E;+)$.

• لدينا: $K_p \neq \phi$ لأن: $M(p;0) \in K_p$ (p يقسم p).

• ليكن $M(x;y)$ و$M'(x';y')$ عنصرين من K_p بحيث:

$M(x;y)=xI_2+yA$ و$M'(x';y')=x'I_2+y'A$ مع $p|x+y$ و $p|x'+y'$

لدينا: $-M'(x';y')=-x'I_2-y'A$ هو مماثل $M(x;y)$ في $(E;+)$.

ومنه: $M(x;y)+(-M'(x';y'))=(x-x')I_2+(y-y')A$

لدينا: $\begin{cases} p|x+y \\ p|x'+y' \end{cases} \Rightarrow p|(x+y)-(x'-y')$

$\Rightarrow p|(x-x')+(y-y')$

ومنه: $M(x;y)+(-M'(x';y')) \in K_p$

إذن: $(\forall (M;M') \in (K_p)^2); M+(-M') \in K_p$

وبالتالي $(K_p;+)$ زمرة جزئية للزمرة $(E;+)$ يعني أن $(K_p;+)$ زمرة تبادلية.

- لنبين أن K_p جزء مستقر من $(E;\times)$.

ليكن $M(x;y)$ و$M'(x';y')$ عنصرين من K_p لدينا:

$M(x;y)\times M'(x';y')=(xx'+yy')I_2+(xy'+x'y)A$

لدينا:

$\begin{cases} p|x+y \\ p|x'+y' \end{cases} \Rightarrow p|(x+y)(x'-y')$

$\Rightarrow p|xx'+xy'+yx'+yy'$

$\Rightarrow p|(xx'+yy')+(xy'+x'y)$

ومنه:

$M(x;y)\times M'(x';y') \in K_p$

إذن: $(\forall (M;M') \in (K_p)^2); M\times M' \in K_p$

إذن: $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية و$(K_p;+)$ زمرة تبادلية و$\times$ قانون تركيب داخلي في K_p إذن $\times$ تجميعي وتبادلي في K_p و$\times$ توزيعي بالنسبة لـ$+$ في K_p وبالتالي $(K_p;+;\times)$ حلقة تبادلية.

التمرين 58

نعتبر المجموعة : $E=\left\{M(x;y)=\begin{pmatrix}x+y & 3y\\ -y & x-y\end{pmatrix} / (x;y)\in IR^2\right\}$

1) بين أن $(E;+;\times)$ جسم تبادلي.

2) نعتبر التطبيق f من E نحو $\mathbb{C}$ المعرف بما يلي :

$$(\forall M(x;y)\in E); f(M(x;y)) = x+iy\sqrt{2}$$

أ- بين أن f تشاكل تقابلي من $(E;\times)$ نحو $(\mathbb{C};\times)$.

ب- ليكن $K=M\left(1;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ من E.

بين أنه توجد متتاليتان عدديتان (α_n) و(β_n) بحيث : $(\forall n\in IN^*); K^n=M(\alpha_n;\beta_n)$.

الحل

1) لنبين أن $(E;+;\times)$ جسم تبادلي.

• $(E;+)$ زمرة تبادلية.

ليكن $M(x;y)$ عنصرا من E، لدينا :

$$M(x;y)=\begin{pmatrix}x+y & 3y\\ -y & x-y\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y & 3y\\ -y & -y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

نضع : $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

إذن : $M(x;y)=xI+yJ$

- لدينا $E\subset \mathcal{M}_2(IR)$ و $(\mathcal{M}_2(IR);+)$ زمرة تبادلية، ومنه يكفي أن نبين أن $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة تبادلية $(\mathcal{M}_2(IR);+)$.

لدينا : $E\neq\phi$ لأن : $I\in E$

ليكن $M(x;y)$ و$M(a;b)$ عنصرين من E.

لدينا : $M(x;y)=xI+yJ$ و $M(a;b)=aI+bJ$

و $-M(a;b)=-aI-bJ$ هي مماثلة $M(a;b)$ في $(\mathcal{M}_2(IR);+)$.

ومنه فإن : $M(x;y)+(-M(a;b)=xI+yJ+(-aI-bJ)$

$=(x-a)I+(y-b)J$

ولدينا : $x-a\in IR$ و $y-b\in IR$

إذن : $M(x;y)+(-M(a;b))\in E$

ومنه فإن $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(\mathcal{M}_2(IR);+)$.

وبالتالي فإن $(E;+)$ زمرة تبادلية.

• ليكن $M(x;y)$ و $M(a;b)$ عنصرين من E.

لدينا: $M(x;y)\times M(a;b)=(xI+yJ)\times(aI+bJ)=xaI+xbJ+yaJ+ybJ^2=xaI+(xb+ya)J+ybJ^2$

وبما أن:
$$J^2=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=-2I$$

فإن: $M(x;y)\times M(a;b)=(xa-2yb)I+(xb+ya)J=M(xa-2yb;xb+ya)$

إذن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(IR);\times)$.

• لدينا E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(IR);\times)$ والقانون $\times$ تجميعي وتوزيعي بالنسبة للقانون $+$ في $\mathcal{M}_2(IR)$، ومنه فإن القانون $\times$ تجميعي وتوزيعي بالنسبة للقانون $+$ في E.

• I هو العنصر المحايد في $(\mathcal{M}_2(IR);\times)$ و $I\in E$، إذن I هو العنصر المحايد في $(E;\times)$.

• نتحقق من $M(a;b)\times M(x;y)=M(ax-2by;bx+ay)$

أي: $M(a;b)\times M(x;y)=M(x;y)\times M(a;b)$

إذن القانون $\times$ تبادلي في E.

• ليكن $M(x;y)$ عنصرا من E، حيث: $(x;y)\neq(0;0)$

لدينا:
$$\det M(x;y)=\begin{vmatrix}x+y & 3y\\ -y & x-y\end{vmatrix}=(x+y)(x-y)+3y^2=x^2+2y^2$$

بما أن $(x;y)\neq(0;0)$ فإن: $x^2+2y^2\neq 0$ أي: $\det M(x;y)\neq 0$

ومنه فإن $M(x;y)$ تقبل مقلوبا في $\mathcal{M}_2(IR)$.

ولدينا:
$$(M(x;y))^{-1}=\frac{1}{x^2+2y^2}\begin{pmatrix}x-y & -3y\\ y & x+y\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{x^2+2y^2}\left[\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-y & -3y\\ y & y\end{pmatrix}\right]$$
$$=\frac{1}{x^2+2y^2}\left[x\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-y\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}\right]$$
$$=\frac{x}{x^2+2y^2}I+\left(\frac{-y}{x^2+2y^2}\right)J=M\left(\frac{x}{x^2+2y^2};\frac{-y}{x^2+2y^2}\right)$$

ومنه فإن: $(M(x;y))^{-1}\in E$.

إذن كل عنصر $M(x;y)$ من E، حيث $(x;y)\neq(0;0)$، يقبل مقلوبا في E.

• وبالتالي فإن $(E;+;\times)$ جسم تبادلي.

2) أ- • لنبين أن f تشاكل.

ليكن $M(x;y)$ و$M(a;b)$ عنصرين من E.

لدينا: $f(M(x;y)) = x + iy\sqrt{2}$ و $f(M(a;b)) = a + ib\sqrt{2}$

ولدينا: $(x + iy\sqrt{2})(a + ib\sqrt{2}) = (xa - 2yb) + i(xb + ya)\sqrt{2}$

ومنه: $f(M(x;y)) \times f(M(a;b)) = (xa - 2yb) + i(xb + ya)\sqrt{2}$

ولدينا: $M(x;y) \times M(a;b) = M(xa - 2yb; xb + ya)$

أي: $f(M(x;y) \times M(a;b)) = (xa - 2yb) + i(xb + ya)\sqrt{2}$

إذن: $f(M(x;y) \times M(a;b)) = f(M(x;y)) \times f(M(a;b))$

وبالتالي فإن f تشاكل من $(E;\times)$ نحو $(\mathbb{C};\times)$.

• **لنبين أن f تقابل.**

ليكن z عنصرا من $\mathbb{C}$، حيث: $z=a+ib$ مع $(a;b) \in IR^2$

لدينا: $z = x + iy\sqrt{2} \iff a + ib = x + iy\sqrt{2}$

$$\iff \begin{cases} x = a \\ y\sqrt{2} = b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = a \\ y = \dfrac{b\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

إذن: $(\forall z \in \mathbb{C}'), (\exists! (x;y) \in IR^2) : z = x + iy\sqrt{2}$

أي: $(\forall z \in \mathbb{C}), (\exists! (x;y) \in E) ; f(M(x;y)) = z$

وبالتالي فإن f تطبيق تقابلي.

• إذن f تشاكل تقابلي من $(E;\times)$ نحو $(\mathbb{C};\times)$.

ب- ليكن n عنصرا من IN.

لدينا:

$$f(K^n) = (f(K))^n$$
$$= \left(f\left(M\left(1;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\right)^n$$
$$= (1 + i)^n = \left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]^n = \left[(\sqrt{2})^n;\frac{n\pi}{4}\right]$$

وبما أن: $f\left(M\left((\sqrt{2})^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right);\frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)\right) = \left[(\sqrt{2})^n;\frac{n\pi}{4}\right]$

وf تطبيق تقابلي من E نحو $\mathbb{C}$ فإن:

$$K^n = M\left((\sqrt{2})^n.\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right);\frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$

ومنه:
$$\begin{cases}(\forall n \in IN^*)\,;\,\alpha_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \times \cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)\\ (\forall n \in IN^*)\,;\,\beta_n = \dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}{2} \times \sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)\end{cases}$$

التمرين 59

لكل عنصر $(a;b)$ من IR^2، نضع: $M(a;b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a-2b \end{pmatrix}$

نعتبر المجموعة E المعرفة كما يلي: $E = \{M(a;b) \,/\, (a;b) \in IR^2\}$

والتطبيق f المعرف كما يلي:
$$f: E^* \to \mathbb{C}^*$$
$$M(a;b) \mapsto (a-b) + ib\sqrt{2}$$

1) بين أن: $(\forall (a;b;c;d) \in IR^4)\,;\, M(a;b) \times M(c;d) = M(ac-3bd; ad+bc-2bd)$

2) أ- بين أن f تطبيق تقابلي وحدد تقابله العكسي f^{-1}

ب- بين أن f تشاكل من $(E^*;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$.

3) أ- بين أن $(E;+;\times)$ جسم تبادلي.

ب- حل في المجموعة E المعادلة: $X^2=M(-1;0)$.

ج- ليكن $M(a;b)$ عنصرا من E^*، حدد مقلوب $M(a;b)$.

الحل

1) ليكن $M(a;b)$ و$M(c;d)$ عنصرين من E.

لدينا:
$$M(a;b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a-2b \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 3b & -2b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

نضع: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

ومنه: $M(a;b)=aI+bJ$

إذن:
$$M(a;b)\times M(c;d)=(aI+bJ)\times(cI+dJ)$$
$$=acI^2+adI\times J+bcJ\times I+bdJ^2$$
$$=acI+(ad+bc)J+bdJ^2$$

لأن: $I^2=I$ و $J\times I=I\times J=J$ لأن I هو العنصر المحايد في $(\mathcal{M}_2(IR);\times)$.

ولدينا :
$$J^2=\begin{pmatrix}0&-1\\3&-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&-1\\3&-2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-3&2\\-6&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&0\\0&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\-6&4\end{pmatrix}$$
$$=-3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0&-1\\3&-2\end{pmatrix}$$
$$=-3I-2J$$

إذن : $M(a;b)\times M(c;d)=(ac-3bd)I+(ad+bc-2bd)J$
$$=M(ac-3bd;ad+bc-2bd)$$

2) أ- ليكن z عنصرا من $\mathbb{C}^*$ حيث: $z=a+ib$ و $(a;b)\in IR^2-\{(0;0)\}$

لنحدد x و y من IR، $(x;y)\neq(0;0)$ ، حيث : $f(M(x;y))=z$

لدينا: $f(M(x;y))=z \Leftrightarrow (x-y)+iy\sqrt{2}=a+ib$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x-y=a\\ y\sqrt{2}=b\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x=a+\frac{b}{\sqrt{2}} \text{ و } y=\frac{b}{\sqrt{2}}$$

ومنه فإن: $(\forall z\in\mathbb{C});(\exists!(x;y)\in IR^2-\{(0;0)\})/x-y+iy\sqrt{2}=a+ib$

أي : $(\forall z\in\mathbb{C}^*);(\exists!M\in E^*)/f(M)=z$

يعني أن f تطبيق تقابلي.

ولدينا :
$$f^{-1}:\mathbb{C}^* \to E^*$$
$$z=x+iy\mapsto M\left(x+\frac{y}{\sqrt{2}};\frac{y}{\sqrt{2}}\right)$$

ب- لنبين أن f تشاكل.

ليكن $M(a;b)$ و $M(c;d)$ عنصرين من E^*.

لدينا: $f(M(a;b))=(a-b)+ib\sqrt{2}$ و $f(M(c;d))=(c-d)+id\sqrt{2}$

ومنه :
$$f(M(a;b))\times f(M(c;d))=((a-b)+ib\sqrt{2})((c-d)+id\sqrt{2})$$
$$=(a-b)(c-d)-2bd+i(d(a-b)+b(c-d))\sqrt{2}$$
$$=ac-ad-bc+bd-2bd+i(ad-bd+bc-bd)\sqrt{2}$$
$$=(ac-ad-bc-bd)+i(ad+bc-2bd)\sqrt{2}$$

وبما أن: $M(a;b)\times M(c;d)=M(ac-3bd;ad+bc-2bd)$

فإن: $f(M(a;b)\times(c;d))=(ac-3bd-ad-bc+2bd)+i(ad+bc-2bd)\sqrt{2}$

$$=(ac-ad-bc-bd)+i(ad+bc-2bd)\sqrt{2}$$

إذن: $f(M(a;b)\times M(c;d))=f(M(a;b))\times f(M(c;d))$

وبالتالي فإن f تشاكل من $(E^*;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$

3) أ- لنبين أن $(E;+;\times)$ جسم تبادلي.

• $(E;+)$ زمرة تبادلية.

لدينا: $E\subset \mathcal{M}_2(IR)$ و$\left(\mathcal{M}_2(IR);+\right)$ زمرة تبادلية، ومنه يكفي أن نبين أن $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $\left(\mathcal{M}_2(IR);+\right)$.

- $E\neq\phi$ لأن: $I\in E$

- ليكن $M(a;b)$ و$M(c;d)$ عنصرين من E، لدينا:

$$M(a;b)+(-M(c;d))=aI+bJ+(-aI-bJ)$$
$$=(a-c)I+(b-d)J$$

ومنه فإن: $M(a;b)+(-M(c;d))\in E$

إذن $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $\left(\mathcal{M}_2(IR);+\right)$.

وبالتالي فإن $(E;+)$ زمرة تبادلية.

• لدينا $(\mathbb{C}^*;\times)$ و$(E^*;\times)$ متشاكلتان تقابليا و$(\mathbb{C}^*;\times)$ زمرة تبادلية ومنه فإن $(E^*;\times)$ زمرة تبادلية.

• لدينا E جزء مستقر من $\left(\mathcal{M}_2(IR);\times\right)$ والقانون $\times$ توزيعي بالنسبة للقانون $+$ في $\mathcal{M}_2(IR)$، ومنه فإن القانون $\times$ توزيعي بالنسبة للقانون $+$ في E.

وبالتالي فإن $(E;+;\times)$ جسم تبادلي.

ب- لنحل في E المعادلة $X^2=M(-1;0)$

ليكن $M(x;y)$ عنصرا من E، لدينا:

$$\begin{aligned}
(M(x;y))^2=M(-1;0) &\Leftrightarrow M(x^2-3y^2;2xy-2y^2)=M(-1;0)\\
&\Leftrightarrow f(M(x^2-3y^2;2xy-2y^2))=f(M(-1;0))\\
&\Leftrightarrow (x^2-y^2-2xy)+i(2xy-2y^2)\sqrt{2}=-1\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2-2xy=-1\\ \sqrt{2}\,(2xy-2y^2)=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2-2xy=-1\\ y(x-y)=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}x^2=-1\\ y=0\end{cases} \text{ أو } \begin{cases}x^2=\dfrac{1}{2}\\ x=y\end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

إذن حلا المعادلة $X^2=M(-1;0)$ في E هما:

$$M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ و } M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ج- تحديد مقلوب $M(a;b)$.

لدينا: $$(M(a;b))^{-1} = (f^{-1}(z))^{-1} = \left(f^{-1}\left((a-b)+ib\sqrt{2}\right)\right)^{-1}$$
$$= f^{-1}\left(\frac{1}{(a-b)+ib\sqrt{2}}\right)$$

وبما أن: $$\frac{1}{(a-b)+ib\sqrt{2}} = \frac{a-b}{(a-b)^2+2b^2} + i\left(\frac{-b\sqrt{2}}{(a-b)^2+2b^2}\right)$$

فإن: $$f^{-1}\left(\frac{1}{(a-b)+ib\sqrt{2}}\right) = M\left(\frac{a-2b}{(a-b)^2+2b^2}; \frac{-b}{(a-b)^2+2b^2}\right)$$

إذن: $$(M(a;b))^{-1} = M\left(\frac{a-2b}{(a-b)^2+2b^2}; \frac{-b}{(a-b)^2+2b^2}\right)$$

التمرين 60

ليكن S عنصرا من المجموعة $\mathcal{M}_3(IR)$، نعتبر المجموعتين:

$$F = \{I_3 + M / M \in E\} \text{ و } E = \{M \in \mathcal{M}_3(IR) / M \times S = \theta\}$$

حيث θ هي المصفوفة المنعدمة وI_3 هي مصفوفة الوحدة في $\mathcal{M}_3(IR)$.

1) بين أن $(E;+)$ زمرة تبادلية.

2) أ- بين أن: $(\forall A \in \mathcal{M}_3(IR)); A \in F \Leftrightarrow A \times S = S$.

ب- بين أن F جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(IR); \times)$.

3) ليكن A عنصرا من F حيث A يقبل مقلوبا A^{-1} في الحلقة $(\mathcal{M}_3(IR); +; \times)$.

بين أن A^{-1} تنتمي إلى المجموعة F.

الحل

1) لنبين أن $(E;+)$ زمرة تبادلية.

لدينا: $E \subset \mathcal{M}_3(IR)$ و$(\mathcal{M}_3(IR); +)$ زمرة تبادلية، ومنه يكفي أن نبين أن $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(\mathcal{M}_3(IR); +)$.

- $E \neq \phi$ لأن: $\theta \in E$، θ هي المصفوفة المنعدمة.
- ليكن M وN عنصرين من E.

لدينا $N-$ هي مماثلة المصفوفة N في $(\mathcal{M}_3(IR);+)$.

ولدينا: $(M+(-N))\times S=M\times S+(-N)\times S$

$=M\times S-N\times S$

وبما أن: $M\in E$ و $N\in E$ أي: $M\times S=\theta$ و $N\times S=\theta$

فإن: $M\times S-N\times S=\theta$ ومنه فإن: $(M+(-N))\times S=\theta$

إذن: $M+(-N)\in E$

وبالتالي فإن: $(\forall(M;N)\in E^2);M+(-N)\in E$

ومنه فإن $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathcal{M}_3(IR);+)$.

إذن $(E;+)$ زمرة تبادلية.

2) أ- لنبين أن: $(\forall A\in\mathcal{M}_3(IR));A\in F\Longleftrightarrow A\times S=S$

ليكن A عنصرا من $\mathcal{M}_3(IR)$.

• نفترض أن: $A\in F$، ونبين أن $A\times S=S$

لدينا: $A\in F\Longleftrightarrow(\exists M\in E)/A=I_3+M$

ومنه فإن: $A\times S=(I_3+M)\times S$

$=I_3\times S+M\times S=S+M\times S$

وبما أن: $M\in E$ فإن: $M\times S=\theta$، إذن: $A\times S=S$

• نفترض أن $A\times S=S$، ونبين أن: $A\in F$

لدينا: $A\times S=S\Longleftrightarrow A\times S-S=0$

$\Longleftrightarrow(A-I_3)\times S=0$

ومنه فإن: $A-I_3\in E$، وذلك حسب تعريف المجموعة E.

نضع: $M=A-I_3$ فيكون لدينا: $A=I_3+M$ و $M\in E$

إذن: $A\in F$

إذن: $(\forall A\in\mathcal{M}_3(IR));A\in F\Longleftrightarrow A\times S=S$

ب- لنبين أن F جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(IR);\times)$.

ليكن A و B عنصرين من F.

لنبين أن: $A\times B\in F$

لدينا: $A\in F\Longleftrightarrow A\times S=S$ و $B\in F\Longleftrightarrow B\times S=S$

ومنه فإن: $(A\times B)\times S=A\times(B\times S)=A\times S=S$

إذن: $A\times B\in F$، حسب السؤال السابق.

ومنه فإن: $(\forall (A;B) \in F^2); A \times B \in F$

يعني أن F جزء مستقر من $(\mathscr{M}_3(IR); \times)$.

3) لنبين أن: $A^{-1} \in F$

لدينا: $A \in F$ ومنه فإن: $A\times S=S$

ولدينا: $A^{-1}\times A=I_3$

ومنه فإن: $S=I_3\times S=(A^{-1}\times A)\times S=A^{-1}\times(A\times S)=A^{-1}\times S$

إذن: $A^{-1} \in F$.

التمرين 62

ليكن A وB عنصرين من $\mathscr{M}_3(IR)$ بحيث: $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) احسب B^3.

2) أ- تحقق من أن $A=I_3+B$ حيث I_3 هي مصفوفة الوحدة في $\mathscr{M}_3(IR)$.

ب- استنتج تعبير A^n بدلالة n حيث: $n \in IN^* - \{1\}$.

3) أ- تحقق من أن: $A^3-3A^2+3A=I_3$

ب- استنتج أن A تقبل مقلوبا في $(\mathscr{M}_3(IR); +; \times)$ ينبغي تحديده.

الحل

1) لنحسب B^3.

لدينا: $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

و $B^3 = B^2 \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

إذن: $B^3=O_3$ حيث O_3 هي المصفوفة المنعدمة في $\mathscr{M}_3(IR)$.

2) أ- لنتحقق من أن: $A=I_3+B$

لدينا: $I_3 + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$

إذن: $A=I_3+B$

ب- لنستنتج تعبير A^n بدلالة n حيث: $n \in IN^* - \{1\}$.

ليكن n عنصرا من $IN_* - \{1\}$، لدينا: $A^n = (B + I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k . I_3^{n-k}$

وبما أن: $B^k = O_3$ ⇐ $(\forall k \in IN) ; k \geq 3$ (حسب السؤال 1)

فإن: $A^n = (B + I_3)^n = C_n^0 B^0 . I_3^n + C_n^1 B^1 . I_3^{n-1} + C_n^2 B^2 . I_3^{n-2}$

$$= I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n & n \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

إذن: $$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; (\forall n \in IN^* - \{1\})$$

3) أ- لنتحقق من أن: $A^3 - 3A^2 + 3A = I_3$

لدينا حسب السؤال 2)ب):

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ومنه: $$A^3 - 3A^2 + 3A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

ب- لنستنتج أن A تقبل مقلوبا في $(\mathcal{M}_3(IR); \times)$.

لدينا: $A^3 - 3A^2 + 3A = I_3$ ومنه: $A \times (A^2 - 3A + 3I_3) = I_3$ و $(A^2 - 3A + 3I_3) \times A = I_3$

إذن A تقبل مقلوبا في $(\mathcal{M}_3(IR); \times)$ ولدينا:

$$A^{-1} = A^2 - 3A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ إذن: $$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

التمرين 63

لتكن I وA وB عناصر من $\mathcal{M}_3(IR)$ بحيث:

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ و } A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \text{ و } B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

1) أ- احسب كلا من A^2 وB^2 وAB وBA، ثم تحقق من أن: $A^3=A+I$

ب- استنتج أن المصفوفة A تقبل مقلوبا A^{-1} يتم تحديده.

2) نعتبر المجموعة: $E=\left\{M(x;y;z)=\begin{pmatrix}x&z&y\\y&x+z&y+z\\z&y&x+z\end{pmatrix} / (x;y;z)\in IR^3\right\}$

أ- بين أن $(E;+)$ زمرة تبادلية.

ب- بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(IR);\times)$.

ج- بين أن $(E;+;\times)$ حلقة واحدية.

الحل

1) أ- • حساب A^2:

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$ ؛ ومنه فإن: $A^2=B$.

• حساب B^2:

لدينا: $$B^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&2\\1&1&1\end{pmatrix}$$ ؛ ومنه فإن: $B^2=A+B$

• حساب $A\times B$:

$$A\times B=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$ ؛ ومنه فإن: $A\times B=A+I$

• حساب $B\times A$:

لدينا: $$B\times A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$ ؛ ومنه فإن: $B\times A=A+I$

• لنتحقق من أن: $A^3=A+I$

لدينا: $A^2=B$ و$A^3=A^2\times A$ ومنه فإن: $A^3=B\times A$

ولدينا: $B\times A=A+I$، إذن: $A^3=A+I$

2) ب- الاستنتاج:

لدينا:
$$A^3 = A + I \iff A^3 - A = I$$
$$\iff A \times (A^2 - I) = I$$

وكذلك لدينا: $(A^2-I)\times A=I$

إذن المصفوفة تقبل مقلوبا A^{-1} في $\left(\mathcal{M}_3(IR);\times\right)$ حيث: $A^{-1}=A^2-I$

أي:
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) لدينا:
$$(\forall (x;y;z) \in IR^3);M(x;y;z) = \begin{pmatrix} x & z & y \\ y & x+z & y+z \\ z & y & x+z \end{pmatrix} = xI + yA + zB$$

ومنه:
$$E = \left\{xI + yA + zB / (x;y;z) \in IR^3\right\}$$

أ- لنبين أن $(E;+)$ زمرة تبادلية.

لدينا: $E \subset \mathcal{M}_3(IR)$ و$\left(\mathcal{M}_3(IR);+\right)$ زمرة تبادلية إذن يكفي أن نبين أن $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة $\left(\mathcal{M}_3(IR);+\right)$.

لدينا: $E \neq \phi$ لأن: $I \in E$ من أجل $x=1$ و$y=z=0$

• ليكن M وN عنصرين من E بحيث:

$M=xI+yA+zB$ و$N=x'I+y'A+z'B$ مع $(x;y;z) \in IR^3$ و$(x';y';z') \in IR^3$

لدينا: $-N=-x'I-y'A-z'B$ هو مماثل N في $\left(\mathcal{M}_3(IR);+\right)$

ومنه: $M+(-N)=(xI+yA+zB)+(-x'I-y'A-z'B)$

$=(x-x')I+(y-y')A+(z-z')B$

لدينا: $(x-x') \in IR$ و$(y-y') \in IR$ و$(z-z') \in IR$

ومنه: $(\forall (M;N) \in E^2);M + (-N) \in E$

إذن $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة $\left(\mathcal{M}_3(IR);+\right)$.

وبالتالي $(E;+)$ زمرة تبادلية.

ب- لنبين أن E جزء مستقر من $\left(\mathcal{M}_3(IR);+\right)$.

ليكن M وN عنصرين من E بحيث:

$M=xI+yA+zB$ و$N=x'I+y'A+z'B$ مع $(x;y;z) \in IR^3$ و$(x';y';z') \in IR^3$

لدينا:

$$M\times N=(xI+yA+zB)\times(x'I+y'A+z'B)$$
$$=xx'I+xy'A+xz'B+x'yA+yy'A^2+yz'AB+x'zB+y'zBA+zz'B^2$$
$$=xx'I+(xy'+x'y)A+(xz'+x'z)B+yy'B+(yz'+y'z)(A+I)+zz'(A+B)$$
$$=(xx'+yz'+y'z)I+(xy'+x'y+yz'+y'z+zz')A+(xz'+x'z+yy'+zz')B$$

لدينا: $xx'+yz'+y'z\in IR$ و $xy'+x'y+yz'+y'z+zz'\in IR$

و $xz'+x'z+yy'+zz'\in IR$

ومنه: $(\forall(M;N)\in E^2);M\times N\in E$

إذن E جزء مستقر من $(\mathscr{M}_3(IR);\times)$.

ج- لنبين أن $(E;+;\times)$ حلقة واحدية.

لدينا $(E;+)$ زمرة تبادلية وE جزء من $(\mathscr{M}_3(IR);\times)$ و$(\mathscr{M}_3(IR);+;\times)$ حلقة إذن $\times$ تجميعي وتوزيعي بالنسبة للقانون $+$ في E.

إذن: $(E;+;\times)$ حلقة.

وكون I هو العنصر المحايد للضرب في $(\mathscr{M}_3(IR);\times)$ و$I\in E$،

إذن I هو العنصر المحايد لـ$\times$ في $(E;+)$.

وبالتالي $(E;+;\times)$ حلقة واحدية.

التمرين 64

ليكن a عددا عقديا غير حقيقي معلم بحيث: $a=re^{i\alpha}$، مع: $k\in\mathbb{Z}\,;\alpha\neq k\pi$ و $|a|=r$.

لكل عنصر $(x;y)$ من IR^2 نضع: $M(x;y)=\begin{pmatrix}x & y\\ -r^2y & x+2ry\cos\alpha\end{pmatrix}$

نعتبر المجموعة E المعرفة بما يلي: $E=\{M(x;y)/(x;y)\in IR^2\}$.

1) أ- بين أن $(E;+)$ زمرة تبادلية.

ب- بين أن $(E;+;\times)$ جسم تبادلي.

2) أ- بين أن: $(\forall z\in\mathbb{C});(\exists!(x;y)\in IR^2)/z=x+ay$

نضع إذن: $M(x;y)=M(z)$.

ب- ليكن φ التطبيق المعرف من $\mathbb{C}$ نحو E بما يلي: $(\forall z\in\mathbb{C});\varphi(z)=M(z)$

i- بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{C};\times)$ نحو $(E;\times)$.

ii- احسب $(\varphi(a))^n$ حيث: $n\in IN$.

الحل

1) أ- لنبين أن $(E;+)$ زمرة تبادلية.

ليكن $M(x;y)$ عنصرين من E، لدينا:

$$M(x;y)=\begin{pmatrix} x & y \\ -r^2y & x+2ry\cos\alpha \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & y \\ -r^2y & 2ry\cos\alpha \end{pmatrix}$$
$$=x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -r^2 & 2r\cos\alpha \end{pmatrix}$$

نضع: $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -r^2 & 2r\cos\alpha \end{pmatrix}$

لدينا: $M(x;y)=xI+yJ$

لدينا: $E\subset \mathscr{M}_2(IR)$ و$(\mathscr{M}_2(IR);+)$ زمرة تبادلية، ومنه يكفي أن نبين أن $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(\mathscr{M}_2(IR);+)$.

• $E\neq\phi$ لأن: $I\in E$

• ليكن: $M(x;y)$ و$M(z;t)$ عنصرين من E.

لدينا: $M(x;y)=xI+yJ$ و $M(z;t)=zI+tJ$

ومنه فإن: $M(x;y)+(-M(z;t))=(xI+yJ)+(-zI-tJ)$

$=(x-z)I+(y-t)J$

ولدينا: $x-z\in IR$ و $y-t\in IR$

إذن: $M(x;y)+\left(-M(z;t)\right)\in E$

ومنه فإن $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(\mathscr{M}_2(IR);+)$.

وبالتالي فإن $(E;+)$ زمرة تبادلية.

ب- لنبين أن $(E;+;\times)$ جسم تبادلي.

• $(E;+)$ زمرة تبادلية.

• ليكن $M(x;y)$ و$M(z;t)$ عنصرين من E.

لدينا: $M(x;y)=xI+yJ$ و $M(z;t)=zI+tJ$

ومنه فإن: $M(x;y)\times M(z;t)=(xI+yJ)\times(zI+tJ)$

$=xzI^2+xtI\times J+yzJ\times I+ytJ^2$

$=xzI+(xt+yz)J+ytJ^2$

ولدينا :

$$J^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -r^2 & 2r\cos\alpha\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & 1\\ -r^2 & 2r\cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-r^2 & 2r\cos\alpha\\ -2r^3\cos\alpha & -r^2+4r^2\cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$=-r^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+2r\cos(\alpha)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -r^2 & 2r\cos\alpha\end{pmatrix}=-r^2I+2r\cos(\alpha)J$$

إذن : $M(x;y)\times M(z;t)=xzI+(xt+uz)J+(yt)(-r^2I+2r\cos\alpha J)$

$$=(xz-r^2yt)I+(xt+yz+2ryt\cos\alpha)J$$

وبما أن : $xz-r^2yt\in IR$ و $xt+yz+2ryt\cos\alpha\in IR$

فإن : $M(x;y)\times M(z;t)\in E$

يعني أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(IR);\times)$.

حلقة

• E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(IR);\times)$ والقانون × تجميعي وتوزيعي بالنسبة للقانون + في $\mathcal{M}_2(IR)$ ومنه فإن القانون × تجميعي وتوزيعي بالنسبة للقانون + في E.

حلقة واحدية

• I هو العنصر المحايد في $(\mathcal{M}_2(IR);\times)$ و $I\in E$، إذن I هو العنصر المحايد في $(E;\times)$.

• لدينا : $(\forall x;y;z;t\in IR);M(x;y)\times M(z;t)=M(z;t)\times M(x;y)$

يعني أن القانون × تبادلي في E.

• ليكن $M(x;y)$ عنصرا من E يخالف المصفوفة المنعدمة أي: $(x;y)\neq(0;0)$

لدينا :

$$\det M(x;y)=\begin{vmatrix}x & y\\ -r^2y & x+2ry\cos\alpha\end{vmatrix}$$

$$=x^2+2rxy\cos\alpha+r^2y^2$$

$$=(x+ry\cos\alpha)^2-r^2y^2\cos^2\alpha+r^2y^2$$

$$=(x+ry\cos\alpha)^2+r^2y^2(1-\cos^2\alpha)$$

$$=(x+ry\cos\alpha)^2+r^2y^2\sin^2\alpha$$

وبما أن : $\det M(x;y)=0\iff\begin{cases}ry\sin\alpha=0\\ x+ry\cos\alpha=0\end{cases}$

$$\iff x=y=0$$

فإن : $\det M(x;y)\neq 0$ ، لأن : $(x;y)\neq(0;0)$

ومنه المصفوفة $M(x;y)$ تقبل مقلوبا في $(\mathcal{M}_2(IR);\times)$.

$$\left(M(x;y)\right)^{-1}=\frac{1}{\det M(x;y)}\begin{pmatrix}x+2ry\cos\alpha & -y\\ r^2y & x\end{pmatrix}$$

لنتحقق من أن : $\left(M(x;y)\right)^{-1}\in E$

لدينا: $\begin{pmatrix} x+2ry\cos\alpha & -y \\ r^2y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2ry\cos\alpha & y \\ -r^2(-y) & x+2ry\cos\alpha+2r(-y)\cos\alpha \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} X & -Y \\ -r^2Y & X+2rY\cos\alpha \end{pmatrix}$$

حيث: $X = x+2ry\cos\alpha$ و $Y=-y$

ومنه: $\left(M(x;y)\right)^{-1} = \dfrac{x+2ry\cos\alpha}{\det M(x;y)}I + \left(\dfrac{-y}{\det M(x;y)}\right)J$

أي: $\left(M(x;y)\right)^{-1} \in E$

2) لنبين أن: $(\forall z \in \mathbb{C});(\exists!\,(x;y) \in IR^2) / z = x+ay$

لدينا: $a = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}+i$

ليكن z عنصرا من $\mathbb{C}$، يوجد زوج وحيد $(m;n)$ من IR^2 بحيث: $z=m+in$؛

لدينا: $z = x+ay \iff m+in = x+\left(\sqrt{3}+i\right)y$

$$\iff m+in = x+y\sqrt{3}+iy$$

$$\iff \begin{cases} x = m-n\sqrt{3} \\ y = n \end{cases}$$

إذن الزوج $(x;y)$ وحيد؛ لأن الزوج $(m;n)$ وحيد

وبالتالي: $(\forall z \in \mathbb{C});(\exists!\,(x;y) \in IR^2) / z = x+ay$

ملحوظة: إذا كان $z=m+in$ حيث: $(m;n) \in IR^2$، فإن:

$$\varphi(z) = M\left(m-n\sqrt{3};n\right) = \left(m-n\sqrt{3}\right)I+nJ$$

ب- i- لنبين أن φ تشاكل من $(\mathbb{C};\times)$ نحو $(E;\times)$.

يعني: $\left(\forall(z;z') \in \mathbb{C}^2\right);\varphi(z\times z') = \varphi(z)\times\varphi(z')$

ليكن z و z' عنصرين من C، بحيث: $z=m+in$ و $z'=m'+in'$ مع: m و n و m' و n' أعداد حقيقية.

لدينا: • $\varphi(z) = M\left(m-n\sqrt{3};n\right) = \left(m-n\sqrt{3}\right)I+nJ$

• $\varphi(z') = M\left(m'-n'\sqrt{3};n'\right) = \left(m'-n'\sqrt{3}\right)I+n'J$

وبما أن: $zz' = (m+in)(m'+in') = mm'-nn'+i(nm'+mn')$

فإن: $\varphi(zz') = M\left(mm'-nn'-(nm'+mn')\sqrt{3};nm'+mn'\right)$

$$= \left(mm'-nn'-(nm'+mn')\sqrt{3}\right)I+(nm'+mn')J$$

ولدينا:

$$\varphi(z)\varphi(z') = \left(\left(m-n\sqrt{3}\right)I+nJ\right)\left(\left(m'-n'\sqrt{3}\right)I+n'J\right)$$

$$= \left(m-n\sqrt{3}\right)\left(m'-n'\sqrt{3}\right)I+\left(n'\left(m-n\sqrt{3}\right)+n\left(m'-n'\sqrt{3}\right)\right)J+nn'J^2$$

وبما أن: $J^2 = -4I + 2\sqrt{3}J$

$$\varphi(z)\varphi(z') = (mm' - mn'\sqrt{3} + 3nn' - 4nn')I + (n'm - nn'\sqrt{3} + nm' - nn' + 2\sqrt{3}nn')$$
$$= (mm' - nn' - (mn' + nm')\sqrt{3})I + (nm' + mn')J$$

إذن: $\varphi(zz') = \varphi(z)\varphi(z')$

وبالتالي: $(\forall(z;z') \in C^2);\varphi(z \times z') = \varphi(z) \times \varphi(z')$

يعني أن φ تشاكل من $(C;\times)$ نحو $(E;\times)$.

ii- حساب $(\varphi(a))^n$

لدينا: $\varphi(a) = M(0;1) = J$

و $J^n = (\varphi(a))^n = \varphi(a^n)$

وبما أن: $a^n = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2^n\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + i2^n\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$

فإن: $\varphi(a^n) = M\left(2^n\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) - 2^n\sqrt{3}\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right); 2^n.\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right)$

إذن: $J^n = (\varphi(a))^n = 2^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right)I + 2^n.\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)J$

$$= 2^{n+1}.\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{n\pi}{6}\right)I + 2^n.\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)J$$

التمرين 65

1) ليكن α عنصرا من المجال $]-1;1[$

نعتبر التطبيق f من IR^2 نحو IR المعرف بما يلي:

$$(\forall(x;y) \in IR^2); f((x;y)) = x^2 + 2\alpha xy + y^2$$

بين أن: $(\forall(x;y) \in IR^2);(x;y) \neq (0;0) \Leftrightarrow f((x;y)) > 0$

2) نعتبر المجموعة: $E\left\{M(x;y) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x+y \end{pmatrix} / (x;y) \in IR^2\right\}$

أ- بين أن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

ب- حدد مجموعة العناصر التي تقبل مقلوبا في الحلقة $(E;+;\times)$، ثم استنتج أن $(E;+;\times)$ جسم تبادلي.

3) ليكن a عددا عقديا غير حقيقي.

أ- بين أن: $(\forall(\alpha;\beta) \in IR^2);\alpha + \beta a = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

ب- نعتبر التطبيق φ_a من E نحو $\mathbb{C}$ المعرف بما يلي:

$$(\forall M(x;y) \in E);\varphi_a(M(x;y)) = x + ay$$

بين أن φ_a تشاكل تقابلي من $(E;+)$ نحو $(\mathbb{C};+)$.

ج- حدد قيم a التي من أجلها يكون φ_a تشاكلا من $(E;\times)$ نحو $(\mathbb{C};\times)$.

1) لدينا: $|\alpha| < 1$ أي: $-1 < \alpha < 1$ ومنه فإن: $1 - \alpha^2 > 0$.

ليكن x وy عنصرين من IR، لدينا:

$$f((x;y)) = x^2 + 2\alpha xy + y^2$$
$$= (x + \alpha y)^2 - \alpha^2 y^2 + y^2 = (x + \alpha y)^2 + y^2(1 - \alpha^2)$$

ومنه فإن: $f((x;y)) \geq 0$، أي: $f((x;y))=0$ أو $f((x;y))>0$

ولدينا: $f((x;y)) = 0 \iff (x + \alpha y)^2 + y^2(1 - \alpha^2) = 0$

$$\iff \begin{cases} (x + \alpha y)^2 = 0 \\ y^2(1 - \alpha^2) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x + \alpha y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$
$$\iff x = 0 \text{ و } y=0$$

ومنه فإن: $f((x;y)) \neq 0 \iff x \neq 0$ أو $y \neq 0$

يعني أن: $f((x;y)) > 0 \iff (x;y) \neq (0;0)$

إذن: $(\forall (x;y) \in IR^2) ; f((x;y)) > 0 \iff (x;y) \neq (0;0)$

2) أ- ليكن $M(x;y)$ عنصرا من E، لدينا:

$$M(x;y) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x + y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

نضع: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ فيكون لدينا: $M(x;y)=xI+yJ$

• لدينا: $E \subset \mathcal{M}_2(IR)$ و$(\mathcal{M}_2(IR); +)$ زمرة تبادلية، ومنه يكفي أن نبين أن $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(\mathcal{M}_2(IR); +)$.

- $E \neq \phi$ لأن: $I \in E$

- ليكن: $M(x;y)$ و$M(x';y')$ عنصرين من E.

لدينا: $M(x;y)+(-M(x';y'))=(xI+yJ)+(-x'I-y'J)$
$$=(x-x')I+(y-y')J$$
$$=M(x-x';y-y')J$$

ومنه فإن: $M(x;y) + (-M(x';y')) \in E$

إذن: $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(\mathcal{M}_2(IR); +)$.

وبالتالي فإن $(E;+)$ زمرة تبادلية.

• ليكن: $M(x;y)$ و$M(a;b)$ عنصرين من E.

لدينا: $M(x;y)\times M(a;b)=(xI+yJ)\times(aI+bJ)$
$=xaI+(xb+ya)J+ybJ^2$

وبما أن: $$J^2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}$$
$$=-I+J$$

فإن: $M(x;y)\times M(a;b)=(xa-yb)I+(xb+ya+yb)J$
$=M(xa-yb;xb+ya+yb)$

إذن: $M(x;y)\times M(a;b)\in E$

يعني أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(IR);\times)$.

• E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(IR);\times)$ والقانون × تجميعي وتوزيعي بالنسبة للقانون + في $\mathcal{M}_2(IR)$ ومنه فإن القانون × تجميعي وتوزيعي بالنسبة للقانون + في E.

• $M(x;y)\times M(a;b)=M(a;b)\times M(x;y)$، (لأن $(IR;+;\times)$ جسم تبادلي).

أي القانون × تبادلي في E.

• I هو العنصر المحايد في $(\mathcal{M}_2(IR);\times)$ و$I\in E$، ومنه فإن I هو العنصر المحايد في $(E;\times)$.

• وبالتالي فإن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

ب- ليكن $M(x;y)$ عنصرا من E، لدينا:

$$\det M(x;y)=\begin{vmatrix}x&y\\-y&x+y\end{vmatrix}=x(x+y)+y^2=x^2+xy+y^2$$

وحسب السؤال 1° وبأخذ $\alpha=\frac{1}{2}$ لدينا:

$$\det M(x;y)\neq 0 \iff (x;y)\neq(0;0)$$

أي: $$\det M(x;y)=0 \iff x=0 \text{ و } y=0$$
$$\iff M(x;y)=0$$

وبالتالي فإن كل مصفوفة من E ما عدا المصفوفة المنعدمة تقبل مقلوبا في $(\mathcal{M}_2(IR);\times)$.

• لدينا:

$$(M(x;y))^{-1}=\frac{1}{x^2+xy+y^2}\begin{pmatrix}x+y&-y\\y&x\end{pmatrix}$$
$$=\left(\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}\right)I+\left(\frac{-y}{x^2+xy+y^2}\right)J=M\left(\frac{x+y}{x^2+xy+y^2};\frac{-y}{x^2+xy+y^2}\right)$$

ومنه فإن: $(M(x;y))^{-1}\in E$

إذن كل مصفوفة من E ما عدا المصفوفة المنعدمة تقبل مقلوبا في $(E;\times)$ وبالتالي فإن $(E;+;\times)$ جسم تبادلي.

3) أ- ليكن α وβ عنصرين من IR بحيث: $\alpha + \beta a = 0$

لنبين أن: $\alpha = \beta = 0$

نضع: $a=x+iy$، حيث: $(x;y) \in IR \times IR^*$

لدينا:

$$\alpha + \beta a = 0 \iff \alpha + \beta(x+iy) = 0$$
$$\iff (\alpha + \beta x) + i(\beta y) = 0$$
$$\iff \begin{cases} \alpha + \beta x = 0 \\ \beta y = 0 \end{cases}$$
$$\iff \beta = 0 \text{ و } \alpha = 0$$

ومنه فإن: $(\forall(\alpha;\beta) \in IR^2);(\alpha + \beta a = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0)$

ب- • ليكن $M(x;y)$ و$M(x';y')$ عنصرين من E،

لدينا: $\varphi_a(M(x;y)) = x + ay$ و $\varphi_a(M(x';y')) = x' + ay'$

ومنه فإن: $\varphi_a(M(x;y)) + \varphi_a(M(x';y')) = (x+x') + a(y+y')$

ولدينا: $\varphi_a(M(x;y) + M(x';y')) = \varphi_a(M(x+x';y+y'))$

$$= (x+x') + a(y+y')$$

وبالتالي فإن: $\varphi_a(M(x;y) + M(x';y')) = \varphi_a(M(x;y)) + \varphi_a(M(x';y'))$

إذن: φ_a تشاكل من $(E;+)$ نحو $(\mathbb{C};+)$.

• ليكن $M(x;y)$ و$M(x';y')$ من E بحيث: $\varphi_a(M(x;y)) = \varphi_a(M(x';y'))$

لدينا،

$$\varphi_a(M(x;y)) = \varphi_a(M(x';y')) \Rightarrow x + ay = x' + ay'$$
$$\Rightarrow (x-x') + a(y-y') = 0$$
$$\Rightarrow x - x' = 0 \text{ و } y - y' = 0$$
$$\Rightarrow x = x' \text{ و } y = y'$$

ومنه فإن: $M(x';y')=M(x;y)$

يعني أن φ_a تطبيق تبايني.

• ليكن z عنصرا من $\mathbb{C}$.

لنحدد x وy من IR بحيث: $z=x+ay$ أي: $\varphi_a(M(x;y)) = z$

نضع: $z=u+iv$، مع $(u;v) \in IR^2$ و $a = \alpha + i\beta$ مع $(\alpha;\beta) \in IR \times IR^*$

لدينا:

$$z = x + ay \iff u + iv = x + y(\alpha + i\beta)$$
$$\iff u + iv = x + y\alpha + iy\beta$$
$$\iff \begin{cases} x + y\alpha = u \\ y\beta = v \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = u - \dfrac{\alpha}{\beta}v \\ y = \dfrac{v}{\beta} \end{cases}$$

ومنه فإن: $(\forall z \in \mathbb{C});(\exists(x;y) \in IR^2) / z = x + ay$

أي: $(\forall z \in \mathbb{C});(\exists M(x;y) \in E) / \varphi_a(M(x;y)) = z$

يعني أن φ_a شمولي؛

إذن φ_a تطبيق تقابلي.

- وبالتالي فإن φ_a تشاكل تقابلي من $(E;+)$ نحو $(\mathbb{C};+)$.

ج- ليكن $M(x;y)$ و $M(x';y')$ عنصرين من E.

لدينا: $M(x;y)\times M(x';y')=M(xx'-yy';xy'+yx'+yy')$

لدينا φ_a تشاكل من $(E;\times)$ نحو $(\mathbb{C};\times)$ إذا وفقط إذا كان:

$$\varphi_a\big(M(x;y) \times M(x';y')\big) = \varphi_a\big(M(x;y)\big) \times \varphi_a\big(M(x';y')\big)$$

يعني أن: $(xx'-yy')+a(xy'+yx'+yy')=(x+ay)(x'+ay')$

يعني أن: $(xx'-yy')+a(xy'+yx'+yy')=xx'+a(xy'+yx')+a^2yy'$

يعني أن: $-yy'+ayy'=a^2yy'$

أي: $yy'(a^2-a+1)=0$

ومنه φ_a تشاكل من $(E;\times)$ نحو $(\mathbb{C};\times)$ إذا وفقط إذا كان: $(\forall(y;y') \in IR^2);\ yy'(a^2 - a + 1) = 0$

أي: $a^2-a+1=0$

ولدينا: $a^2 - a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ أو $a = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن: φ_a تشاكل من $(E;\times)$ نحو $(\mathbb{C};\times)$ إذا وفقط إذا كان: $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ أو $a=\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

التمرين 66

نعتبر المجموعة: $A = \{M(a;b) = aI + bJ / (a;b) \in IR^2\}$

I المصفوفة الواحدية في $\mathcal{M}_3(IR)$ و $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) بين أن $(A;+;\times)$ حلقة واحدية.

2) تحقق من أن $J^2 - J - 2I = \theta$ واستنتج أن J تقبل مقلوبا في A ثم حدد J^{-1}.

3) نضع: $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ مع: $\theta \in [0, 2\pi[$

حدد شرطا لازما وكافيا لكي تقبل M مقلوبا في A وحدد M^{-1}.

الحل

1) لنبين أن $(A;+;\times)$ حلقة واحدية.

لدينا: $A \subset \mathcal{M}_3(IR)$ و$(\mathcal{M}_3(IR);+;\times)$ حلقة واحدية إذن يكفي أن نبين أن:

- $(A;+)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathcal{M}_3(IR);+)$.
- A جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(IR);\times)$.
- $I \in A$.

- لنبين أن $(A;+)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathcal{M}_3(IR);+)$.

- لدينا $A \neq \phi$ لأن $I \in A$ من أجل $a=1$ و$b=0$.
- ليكن M وN عنصرين من A بحيث:

$M=aI+bJ$ و$N=a'I+b'J$ مع $(a;b) \in IR^2$ و$(a';b') \in IR^2$

لدينا: $-N=-a'I-b'J$ هو مماثل N في $(\mathcal{M}_3(IR);+)$ ومنه:

$M+(-N)=aI+bJ+(-a'I-b'J)=(a-a')I+(b-b')J$

لدينا: $a-a' \in IR$ و$b-b' \in IR$ إذن: $(\forall(M;N) \in A^2); M+(-N) \in A$

وبالتالي $(A;+)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathcal{M}_3(IR);+)$.

يعني أن $(A;+)$ زمرة تبادلية.

- لنبين أن A جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(IR);\times)$.

ليكن M وN عنصرين من A بحيث:

$M=aI+bJ$ و$N=a'I+b'J$ مع $(a;b) \in IR^2$ و$(a';b') \in IR^2$

لدينا: $M\times N=(aI+bJ)\times(a'I+b'J) =aa'I^2+ab'I\times J+ba'J\times I+bb'J^2 =aa'I+(ab'+ba')J+bb'J^2$

لنحسب J^2:

$$J^2 = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=2I+J$$

إذن:

$M\times N=aa'I+(ab'+ba')J+bb'(2I+J)$

أي:

$M\times N=(aa'+2bb')I+(ab'+ba'+bb')J$

لدينا: $aa'+2bb' \in IR$ و$ab'+ba'+bb' \in IR$ ومنه: $(\forall(M;N) \in A^2); M\times N \in A$

إذن A جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(IR);\times)$.

كون $(\mathcal{M}_3(IR);+;\times)$ حلقة و$(A;+)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathcal{M}_3(IR);+)$ وA جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(IR);\times)$

فإن القانون $\times$ تجميعي في A و$\times$ توزيعي بالنسبة لـ$+$ في A.

إذن $(A;+;\times)$ حلقة.

لدينا $I \in A$ و I_3 هو العنصر المحايد للضرب في $\mathcal{M}_3(IR)$ إذن I هو العنصر المحايد في $(A;\times)$.

إذن $(A;+;\times)$ حلقة واحدية.

2) • لنتحقق من أن: $J^2 - J - 2I = \theta$

لدينا: $J^2=2I+J$ حسب السؤال السابق ومنه: $J^2 - J - 2I = \theta$.

• استنتاج: لدينا: $J^2 - J - 2I = O \Leftrightarrow J^2 - J = 2I$

$$\Leftrightarrow J \times \left(\frac{1}{2}J - \frac{1}{2}I\right) = I \text{ و } \left(\frac{1}{2}J - \frac{1}{2}I\right) \times J = I$$

إذن J يقبل مقلوبا J^{-1} هو: $J^{-1} = \frac{1}{2}J - \frac{1}{2}I$ ولدينا: $J^{-1} \in A$

3) لنحدد شرطا لازما وكافيا لكي تقبل M مقلوبا في A.

لدينا: M تقبل مقلوبا في $\mathcal{M}_3(IR)$ تكافئ أن: $\det M \neq 0$

• لنحسب $detM$:

لدينا:

$$\det M = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos\theta \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} - \sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} + \sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta & \sin\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + \sin\theta(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta) + \sin\theta(\sin^2\theta - \cos\theta\sin\theta)$$

$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + 2\sin^3\theta$$

ولدينا: $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$، ومنه: $\det M = \cos^3\theta + 2\sin^3\theta - 3(1 - \cos^2\theta)\cos\theta$

$$= 4\cos^3\theta + 2\sin^3\theta - 3\cos\theta$$

نعتبر في المجال $[0;2\pi[$ المعادلة: $(E): 4\cos^3\theta + 2\sin^3\theta - 3\cos\theta = 0$

• إذا كان: $\cos\theta = 0$ (أي: $\theta = \frac{\pi}{2}$ أو $\theta = \frac{3\pi}{2}$) فإن المعادلة (E) تصبح $\sin\theta = 0$ وهذا غير ممكن.

• ليكن θ من المجال $[0;2\pi[$ و $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ و $\theta \neq \frac{3\pi}{2}$.

لدينا: $(E) \Leftrightarrow \cos^3\theta\left(4 + 2\tan^3\theta - \frac{3}{\cos^2\theta}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow 4 + 2\tan^3\theta - 3(1 + \tan^2\theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\tan^3\theta - 3\tan^2\theta + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\tan\theta - 1)^2\left(\tan\theta + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan\theta = 1 \text{ أو } \tan\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ أو } \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ أو } \theta = -Arc\tan\left(\frac{1}{2}\right) \text{ أو } \theta = -Arc\tan\left(\frac{1}{2}\right) + \pi$$

إذن: $\det M \neq 0 \Leftrightarrow [0;2\pi[- \left\{\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}; -Arc\tan\left(\frac{1}{2}\right); -Arc\tan\left(\frac{1}{2}\right)+\pi\right\}$

تحديد M^{-1}:

لتكن $M'=xI+yJ$ عنصرا من A.

لنحدد العددين x وy بحيث: $M\times M'=I$ و$M'\times M=I$

لدينا: $M=\cos\theta.I+\sin\theta.J$

ومنه: $M'\times M = M\times M' = (x\cos\theta + 2y\sin\theta)I + \left(x\sin\theta + (\cos\theta+\sin\theta)y\right)$

إذن: $M\times M' \Leftrightarrow \begin{cases} x\cos\theta + 2y\sin\theta = 1 \\ x\sin\theta + y(\cos\theta+\sin\theta) = 0 \end{cases}$

محددة هذه النظمة هي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\theta & 2\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta+\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta - 2\sin^2\theta$$

ومنه: $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2\sin\theta \\ 0 & \cos\theta+\sin\theta \end{vmatrix} = \cos\theta+\sin\theta$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 \\ \sin\theta & 0 \end{vmatrix} = -\sin\theta$$

إذن: $x = \dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta-2\sin^2\theta}$ و $y = \dfrac{-\sin\theta}{\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta-2\sin^2\theta}$

$$M^{-1} = \frac{1}{\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta-2\sin^2\theta}\left((\cos\theta+\sin\theta)I - \sin\theta J\right)$$

التمرين 67

ليكن A وB عنصرين من $\mathcal{M}_3(IR)$ حيث: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

نعتبر المجموعة E المعرفة بما يلي:

$$E = \left\{M \in \mathcal{M}_3(IR) / M = xA + yB ; (x;y) \in IR^2\right\}$$

1) بين أن $(E;+)$ زمرة تبادلية.

2) أ- بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(IR);\times)$.

ب- بين أن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

3) ليكن $M=xA+yB$ عنصرا من E.

بين أن M لا يقبل مقلوبا في $(\mathcal{M}_3(IR);\times)$.

4) بين أن $(E;+;\times)$ جسم تبادلي.

1) لنبين أن $(E;+)$ زمرة تبادلية.

لدينا: $E \subset \mathcal{M}_3(IR)$ و $(\mathcal{M}_3(IR);+)$ زمرة تبادلية، ومنه يكفي أن نبين أن $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(\mathcal{M}_3(IR);+)$.

• لدينا $E \neq \phi$، لأن: $A \in E$.

• ليكن M و N عنصرين من E، حيث: $M=xA+yB$ مع $(x;y) \in IR^2$ و $N=aA+bB$ مع $(x;y) \in IR^2$.

لدينا: $M+(-N)=(xA+yB)+(-aA-bB)=(x-a)A+(y-b)B$

وبما أن: $x-a \in IR$ و $y-b \in IR$ فإن: $M+(-N) \in A$

ومنه فإن $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(\mathcal{M}_3(IR);\times)$.

إذن $(E;+)$ زمرة تبادلية.

2) أ- لنبين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(IR);\times)$.

ليكن $M=xA+yB$ و $N=aA+bB$ عنصرين من E.

لدينا: $M\times N=(xA+yB)\times(aA+bB)=xaA^2+xbA\times B+yaB\times A+ybB^2$

• حساب A^2: لدينا:

$$A^2=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-2&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-2\\-2&2&0\\0&-2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

$$=-2\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

أي: $A^2=-2A+B$

• حساب B^2: لدينا:

$$B^2=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&1&-2\\-2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-2&0\\0&2&-2\\-2&0&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

أي: $B^2=A-2B$

• حساب $A\times B$، لدينا:
$$A\times B=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$$
$$=-\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$$
أي: $A\times B=-A-B$

• حساب $B\times A$، لدينا:
$$B\times A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}=A\times B=-A-B$$

ومنه فإن: $M\times N=xaA^2+(xb+ya)A\times B+ybB^2$
$$=xa(-2A+B)+(xb+ya)(-A-B)+yb(A-2B)$$
$$=(-2xa-xb-ya+yb)A+(xa-xb-ya-2yb)B$$
وبما أن: $-2ax-xb-ya+yb\in IR$ و $xa-xb-ya-2yb\in IR$

فإن: $M\times N\in E$

ومنه فإن E جزء مستقر من $(\mathscr{M}_3(IR);\times)$.

ب- لنبين أن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

• $(E;+)$ زمرة تبادلية.

• E جزء مستقر من $(\mathscr{M}_3(IR);\times)$ والقانون $\times$ تجميعي وتوزيعي بالنسبة للقانون + في $\mathscr{M}_3(IR)$، ومنه فإن القانون $\times$ تجميعي وتوزيعي بالنسبة للقانون + في E.

• ليكن $M=xA+yB$ و $N=aA+bB$ عنصرين من E.

لدينا:
$$M\times N=(xA+yB)(aA+bB)$$
$$=xaA^2+(xb+ya)AB+ybB^2$$
$$N\times M=(aA+bA)(xA+yB)$$
$$=axA^2+(ay+bx)AB+byB^2$$
ومنه فإن: $M\times N=N\times M$

يعني أن القانون $\times$ تبادلي في E.

• العنصر المحايد في $(E;\times)$

لنحدد a و b من IR بحيث:

$$(\forall (x;y) \in IR^2); (xA + yB) \times (aA + bB) = xA + yB$$

لدينا: $(xA+yB)\times(aA+bB)=(-2ax-xb-ya+yb)A+(xa-xb-ya-2yb)B$

ومنه فإن: $(\forall (x;y) \in IR^2); \begin{cases} -2ax - xb - ya + yb = x \\ xa - xb - ya - 2yb = y \end{cases}$

أي: $(\forall (x;y) \in IR^2); \begin{cases} (-2a - b - 1)x + (b - a)y = 0 \\ (a - b)x + (-a - 2v - 1) = 0 \end{cases}$

إذن: $\begin{cases} a = b \\ 2a + b + 1 = 0 \\ a + 2b + 1 = 0 \end{cases}$ أي: $a = b = -\frac{1}{3}$

إذن: $-\frac{1}{3}A - \frac{1}{3}B$ هو العنصر المحايد في $(E;\times)$.

• وبالتالي فإن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

3) ليكن M عنصرا من E حيث: $M=xA+yB$، مع: $(x;y) \in IR^2$

لدينا: $M = \begin{pmatrix} -x-y & y & x \\ x & -x-y & y \\ y & x & -x-y \end{pmatrix}$

ومنه فإن:

$$\det M = \begin{vmatrix} -x-y & y & x \\ x & -x-y & y \\ y & x & -x-y \end{vmatrix}$$

$$= -(x+y)\begin{vmatrix} -x-y & y \\ x & -x-y \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} y & x \\ x & -x-y \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} y & x \\ -x-y & y \end{vmatrix}$$

$$= -(x+y)((x+y)^2 - xy) - xy(-y(x+y) - x^2) + y(y^2 + x(x+y))$$

$$= -(x+y)^3 + xy(x+y) + xy(x+y) + x^3 + y^3 + xa(x+y)$$

$$= -(x+y)^3 + (x^3 + y^3 + 3xy(x+y)) = -(x+y)^3 + (x+y)^3 = 0$$

أي: $detM=0$

إذن المصفوفة M لا تقبل مقلوبا في $(\mathscr{M}_3(IR);\times)$.

4) لنبين أن $(E;+;\times)$ جسم تبادلي.

لدينا $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

يبقى أن نبين أن كل عنصر M من E يخالف المصفوفة المنعدمة يقبل مقلوبا في $(E;+;\times)$.

ليكن $M=aA+bB$ عنصرا من E بحيث: $(a;b) \neq (0;0)$

لنحدد x وy من IR بحيث: $(xA + yB) \times (aA + bB) = -\frac{1}{3}A - \frac{1}{3}B$

لدينا: $(xA+yB)\times(aA+bB)=(-2ax-xb-ya+yb)A+(xa-xb-ya-2yb)B$

ومنه فإن:
$$\begin{cases} -2ax - xb - ya + yb = -\frac{1}{3} \\ xa - xb - ya - 2yb = -\frac{1}{3} \end{cases}$$
يعني أن:
$$\begin{cases} (2a+b)x + (a-b)y = \frac{1}{3} \\ (a-b)x - (a+2b)y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$
محددة هذه النظمة:
$$\Delta = \begin{vmatrix} 2a+b & a-b \\ a-b & -(2b+a) \end{vmatrix}$$
$$= -(2a+b)(a+2b) - (a-b)^2$$
$$= -2a^2 - 2b^2 - 5ab - a^2 + 2ab - b^2$$
لدينا:
$$\Delta = -3(a^2 + 2ab + b^2) = -3(a+b)^2$$
أي: $\Delta \neq 0$، ومنه هذه النظمة تقبل حلا وحيدا في IR^2؛

وبما أن:
$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & a-b \\ -\frac{1}{3} & -(2b+a) \end{vmatrix} = -b$$
$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2a+b & \frac{1}{3} \\ a-b & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -a$$
فإن:
$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{b}{3(a+b)^2} \text{ و } y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{a}{3(a+b)^2}$$
إذن، كل عنصر $M=aA+bB$ من E يخالف O_3 المصفوفة المنعدمة $(a;b) \neq (0;0)$ و $a+b \neq 0$ يقبل مقلوبا M^{-1} في $(E;\times)$ حيث:
$$M^{-1} = \frac{b}{3(a+b)^2}.A + \frac{a}{3(a+b)^2}.B$$
وبالتالي، نستنتج مما سبق، أن $(E;+;\times)$ جسم تبادلي.

التمرين 68

ليكن I و J عنصرين من $\mathcal{M}_3(IR)$ بحيث:
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
، نضع: $A=I+J$

1) أ- تحقق من أن: $J^3 = \theta$ و $A^2=I+2J+J^2$؛

ب- بين أن: $A^3=3A^2-3A+I$، ثم استنتج أن المصفوفة A تقبل مقلوبا A^{-1} يتم تحديده.

2) نعتبر المجموعة التالية:
$$E = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(IR) / M = xI + yJ + zJ^2 ; (x;y;z) \in IR^3 \right\}$$
أ- بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(IR); \times)$؛

ب- بين أن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

الحل

1) أ– • لدينا: $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

و $J^3 = J^2 \times J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ومنه فإن: $J^3 = \theta$

• بما أن: $I \times J = J \times I = I$ فإن: $A^2 = (I+J)^2$

$= I^2 + 2IJ + J^2 = I + 2J + J^2$

ب– لدينا: $I = I \times J = J \times I$ ومنه فإن: $A^3 = (I+J)^3 = I^3 + 3I^2J + 3IJ^2 + J^3$

أي: $A^3 = I + 3J + 3J^2$

ولدينا: $3A^2 - 3A + I = 3(I + 2J + J^2) - 3(I+J) + I$

$= 3J + 3J^2 + I$

إذن: $A^3 = 3A^2 - 3A + I$

• الاستنتاج:

لدينا: $A^3 = 3A^2 - 3A + I \iff A^3 - 3A^2 + 3A = I$

$\iff A(A^2 - 3A + 3I) = I$

و $(A^2 - 3A + 3I)A = I$

ومنه فإن A تقبل مقلوبا A^{-1} حيث: $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I$، أي: $A^{-1} = I - J + J^2$

2) أ– ليكن M و N عنصرين من E، بحيث:

$(x; y; z) \in IR^3 ; M = xI + yJ + zJ^2$

$(a; b; c) \in IR^3 ; N = aI + bJ + cJ^2$

لدينا:

$M \times N = (xI + yJ + zJ^2) \times (aI + bJ + cJ^2)$

$= xaI + xbJ + xcJ^2 + yaJ + ybJ^2 + ycJ^3 + zaJ^2 + zbJ^3 + zbJ^3 + zcJ^4$

وبما أن: $J^3 = \theta$ و $J^4 = \theta$ فإن: $M \times N = xaI + (xb+ya)J + (xc+yb+za)J^2$

ولدينا: xa و $xb+ya$ و $xc+yb+za$ أعداد حقيقية ومنه: $M \times N \in E$

إذن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(IR); \times)$.

ب– • $(E;+)$ زمرة تبادلية.

لدينا $E \subset \mathcal{M}_3(IR)$ و $(\mathcal{M}_3(IR); +)$ زمرة تبادلية، ومنه يكفي أن نبين أن $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(\mathcal{M}_3(IR); +)$.

- $E \neq \phi$ لأن: $I \in E$.
- ليكن $M=xI+yJ+zJ^2$ و $N=aI+bJ+cJ^2$ عنصرين من E، لدينا:

$$M+(-N)=(xI+yJ+zJ^2)+(-aI-bJ-cJ^2)$$
$$=(x-a)I+(y-b)J+(z-c)J^2$$

ولدينا: $x-a$ و$y-b$ و$z-c$ أعداد حقيقية؛ إذن: $M+(-N) \in E$

ومنه فإن $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathscr{M}_3(IR);+)$.

إذن $(E;+)$ زمرة تبادلية.

- E جزء مستقر من $(\mathscr{M}_3(IR);+)$ والقانون $\times$ تجميعي وتوزيعي بالنسبة للقانون $+$ في $\mathscr{M}_3(IR)$، إذن القانون $\times$ تجميعي وتوزيعي بالنسبة للقانون $+$ في E.
- I هو العنصر المحايد في $(\mathscr{M}_3(IR);\times)$ و $I \in E$، إذن I هو العنصر المحايد في $(E;\times)$.
- القانون $\times$ تبادلي في E.

$$M\times N=xaI+(xb+ya)J+(xc+yb+za)J^2$$

$$N\times M=axI+(bx+ay)J+(cx+by+az)J^2$$

ومنه: $M\times N=N\times M$ لأن الضرب تبادلي في IR.

- وبالتالي فإن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

التمرين 69

ليكن I وJ عنصرين من المجموعة $\mathscr{M}_2(IR)$ بحيث: $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

نعتبر المجموعة: $E=\left\{M\in\mathscr{M}_2(IR) / M=xI+yJ\,;(x;y)\in IR^2\right\}$.

1) بيّن أن $(E;+)$ زمرة تبادلية.

2) أ- بيّن أن E جزء مستقر من $(\mathscr{M}_2(IR);\times)$.

ب- بين أن $(E;+;\times)$ حلقة واحدية تبادلية غير كاملة.

3) أ- حدد F مجموعة عناصر E التي تقبل مقلوبا في $(\mathscr{M}_2(IR);\times)$.

ب- بين أن $(E;\times)$ زمرة تبادلية.

4) نعرّف في المجموعة $G=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ قانون التركيب الداخلي T كما يلي:

$$(\forall(x;y);(a;b)\in G);(a;b)T(x;y)=(ax;ay+bx)$$

ليكن φ التطبيق من F نحو G المعرف كما يلي: $(\forall(xI+yJ)\in F);\varphi(xI+yJ)=(x;y)$

أ- بين أن φ تشاكل تقابلي من $(F;\times)$ نحو $(G;T)$.

ب- ما بنية $(G;T)$؟

ج- ليكن $(x;y)$ عنصرا من G. حدد مماثل العنصر $(x;y)$ في $(G;T)$.

5) ليكن x عددا حقيقيا يخالف 1 وn عددا صحيحا طبيعيا حيث: $n \geq 2$.

أ- احسب المجموعين: $S_1=1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}$

$S_2=1+2x+3x^2+\ldots+(n-1)x^{n-2}$

ب- نضع: $M=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$ حيث: $(x;y) \in IR^* \times IR$

i- احسب M^2 و M^3.

ii- باستعمال الاستدلال بالترجع أعط تعبير M^p حيث: $p \in IN$ و $p \geq 2$

iii- استنتج مما سبق تعبير المصفوفة A حيث: $A=I+M+M^2+\ldots+M^{n-1}$

iv- ليكن $(x;y)$ عنصرا من G. حدد $(x;y)^n$، $n \in IN$ و $n \geq 2$

حيث: $(x;y)^n=\underbrace{(x;y)T(x;y)T\ldots T(x;y)}_{n \text{ مرة}}$

الحل

1) لنبين أن $(E;+)$ زمرة تبادلية.

لدينا: $E \subset \mathscr{M}_2(IR)$ و $(\mathscr{M}_2(IR);+)$ زمرة تبادلية، ومنه يكفي أن نبين أن $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(\mathscr{M}_2(IR);+)$.

• $E \neq \phi$ لأن: $I \in E$ من أجل $x=1$ و $y=0$

• ليكن M و N عنصرين من E، لدينا:

$M \in E \Leftrightarrow \left(\exists(x;y) \in IR^2\right); M=xI+yJ$

و $N \in E \Leftrightarrow \left(\exists(z;t) \in IR^2\right); N=zI+tJ$

وبما أن $-N=-zI-tJ$ هي مماثلة N في $(\mathscr{M}_2(IR);+)$، فإن: $M+(-N)=(x-z)I+(y-t)J$

ولدينا: $x-z \in IR$ و $y-t \in IR$ ومنه فإن: $M+(-N) \in E$

إذن: $(\forall M;N \in E); M+(-N) \in E$

وبالتالي فإن $(E;+)$ زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(\mathscr{M}_2(IR);+)$.

إذن $(E;+)$ زمرة تبادلية.

2) أ- لنبين أن E جزء مستقر من $(\mathscr{M}_2(IR);\times)$.

ليكن M و N عنصرين من E حيث: $M=xI+yJ$ و $N=zI+tJ$ مع x و y و z و t أعداد حقيقية.

لدينا: $M\times N=(xI+yJ)(zI+tJ)=xzI+(xt+yz)J+ytJ^2$

وبما أن: $J^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

فإن: $M\times N=xzI+(xt+yz)J$

ولدينا: $xt+yz\in IR$ و $xz\in IR$ ومنه فإن: $M\times N\in E$

إذن: $(\forall M;N\in E);M\times N\in E$

وبالتالي فإن E جزء مستقر من $(\mathscr{M}_2(IR);\times)$.

ب- لنبين أن $(E;+;\times)$ حلقة واحدية تبادلية وغير كاملة.

• $(E;+)$ زمرة تبادلية.

• القانون × تجميعي في $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ وتوزيعي بالنسبة للقانون + في $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$، و E جزء مستقر بالنسبة للجمع والضرب في $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ ومنه فإن القانون × تجميعي في E وتوزيعي بالنسبة للقانون + في E.

• المصفوفة I هي العنصر المحايد في $(\mathscr{M}_2(IR);\times)$ و $I\in E$ ومنه فإن I هو العنصر المحايد في $(E;\times)$.

• ليكن M و N عنصرين من E حيث: $M=xI+yJ$ و $N=zI+tJ$ مع x و y و z و t أعداد حقيقية.

لدينا: $N\times M=(zI+tJ)(xI+yJ)=zxI+(zy+xt)J+ytJ^2=xzI+(xt+yz)J$

لأن: $J^2=\theta$؛ θ هي المصفوفة المنعدمة.

ولدينا: $M\times N=xzI+(xt+yz)J$ ومنه فإن: $M\times N=N\times M$

وبالتالي: $(\forall M;N\in E);M\times N=N\times M$، يعني أن القانون × تبادلي في $(E;\times)$.

• إذن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

• لدينا: $J^2=\theta$ و $J\neq\theta$ ومنه فإن J قاسم للصفر في الحلقة $(E;+;\times)$، إذن $(E;+;\times)$ حلقة غير كاملة.

3) أ- لنحدد المجموعة F

ليكن M عنصرا من E حيث: $M=xI+yJ=\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}$ مع x و y من $\mathbb{R}$.

لدينا M تقبل مقلوبا في $(\mathscr{M}_2(IR);\times)$ إذا وفقط إذا كان $\det M\neq 0$

وبما أن: $\det M=x^2$ فإن: $\det M\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0$

ومنه: $F=\{xI+yJ\,/\,x\in IR^*\text{ و }y\in IR\}$

ب- لنبين أن $(F;\times)$ زمرة تبادلية.

• ليكن M و N عنصرين من F حيث: $M=xI+yJ$ و $N=zI+tJ$، مع x و y و y و t من $\mathbb{R}$ و $x\neq 0$ و $z\neq 0$

لدينا: $M\times N=xzI+(xt+yz)J$

وبما أن $x \neq 0$ و $z \neq 0$ فإن: $xz \neq 0$ ومنه فإن: $M \times N \in F$

إذن F جزء مستقر في $(E;\times)$، وبما أن القانون $\times$ تجميعي وتبادلي في E فإن القانون $\times$ تجميعي وتبادلي في F.

- من أجل $x=1$ و $y=0$ لدينا: $I \in F$ ؛ وعلما أن I هو العنصر المحايد في $(E;\times)$،

فإن I هو العنصر المحايد في $(F;\times)$.

- ليكن M عنصرا من F حيث: $M=xI+yJ$ مع $x \in IR^*$ و $y \in IR$

لدينا: M^{-1} موجود في $\mathscr{M}_2(IR)$.

وبما أن: $$M^{-1} = \frac{1}{\det M}\begin{pmatrix} x & -y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{y}{x^2} \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} = \frac{1}{x}I - \frac{y}{x^2}J$$

فإن: $M^{-1} \in F$ (لأن: $\frac{1}{x} \neq 0$)

- وبالتالي فإن $(F;\times)$ زمرة تبادلية.

4) أ- لنبين أن φ تشاكل تقابلي من $(F;\times)$ نحو $(G;T)$.

- ليكن M و N عنصرين من F حيث: $M=xI+yJ$ و $N=zI+tJ$ مع x و z من $\mathbb{R}^*$ و y و t من $\mathbb{R}$.

لدينا: $M\times N=xzI+(xt+yz)J$ ومنه فإن: $\varphi(M \times N) = (xz; xt + yz)$

ولدينا: $\varphi(M)T\varphi(N) = (x;y)T(z;t) = (xz; xt + yz)$

إذن: $\varphi(M \times N) = \varphi(M)T\varphi(N)$

وبالتالي: $(\forall M;N \in F); \varphi(M \times N) = \varphi(M)T\varphi(N)$

يعني أن φ تشاكل من $(F;\times)$ نحو $(G;T)$.

- ليكن $(x;y)$ عنصرا من G.

نأخذ: $M=xI+yJ$، لدينا: $x \neq 0$ ومنه فإن: $M \in F$

ولدينا: $\varphi(M) = \varphi(xI + yJ) = (x;y)$

إذن: $(\forall (x;y) \in G);(\exists M \in F)/\varphi(M) = (x;y)$

يعني أن φ تطبيق شمولي.

- ليكن M و N عنصرين من F حيث: $M=xI+yJ$ و $N=zI+tJ$ مع x و z من $\mathbb{R}^*$ و y و t من $\mathbb{R}$.

نفترض أن: $\varphi(M) = \varphi(N)$

لدينا: $$\varphi(M) = \varphi(N) \iff \varphi(xI + yJ) = \varphi(zI + tJ)$$
$$\iff (x;y) = (z;t)$$
$$\iff x = z \text{ و } y = t$$

ومنه فإن: $zI+tJ=xI+yJ$ أي: $M=N$

إذن: $(\forall (M;N) \in F^2); \varphi(M) = \varphi(N) \Rightarrow M = N$

يعني أن φ تطبيق تبايني.

إذن f تطبيق شمولي وتبايني أي f تطبيق تقابلي.

• وبالتالي فإن f تشاكل تقابلي من $(F;\times)$ نحو $(G;T)$.

ب- بنية $(G;T)$

لدينا $(F;\times)$ زمرة تبادلية، و$(F;\times)$ و$(G;T)$ متشاكلتان تقابليا، ومنه فإن $(G;T)$ زمرة تبادلية.

ج- لنحدد مماثل العنصر $(x;y)$ في $(G;T)$.

لدينا: $(x;y)' = \left(\varphi(xI+yJ)\right)'$

$$= \varphi\left((xI+yJ)^{-1}\right)$$

حيث $(xI+yJ)^{-1}$ هو مقلوب المصفوفة $xI+yJ$ في $(F;\times)$.

وحسب ما سبق لدينا: $$(xI+yJ)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{y}{x^2} \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} = \frac{1}{x}I - \frac{y}{x^2}$$

ومنه فإن: $$\varphi\left((xI+yJ)^{-1}\right) = \varphi\left(\frac{1}{x}I - \frac{y}{x^2}J\right)$$

$$= \left(\frac{1}{x}; -\frac{y}{x^2}\right)$$

إذن: $$(x;y)' = \left(\frac{1}{x}; -\frac{y}{x^2}\right)$$

5) أ- • حساب S_1:

لدينا S_1 هو مجموع n حدا أول لمتتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها x مع: $x \neq 1$.

ومنه فإن: $$S_1 = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$$

• حساب S_2:

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بما يلي: $$g(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$$

لدينا الدالة g قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $\mathbb{R}-\{1\}$ وأن:

$$(\forall x \in IR); g'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n-1)x^{n-2} = S_2$$

و

$$(\forall x \in IR); g'(x) = \frac{-nx^{n-1}(1-x) + 1 - x^n}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(1-x)^2}$$