إذن: $(\forall (a,b) \in IN^{*2})\ a \wedge b = 1 \Rightarrow (a+b) \wedge ab = 1$

• لنبين أن: $(\forall (x,y) \in IN^{*2})\ x \wedge y = (x+y) \wedge (x \vee y)$

نضع: $d = x \wedge y$

ومنه: $(\exists (a,b) \in IN^{*2}) / x = ad$ و $y=bd$ و $a \wedge b = 1$

لدينا: $x \vee y = abd$ (لأن $(x \wedge y).(x \vee y) = xy$)

إذن: $(a+b) \wedge ab = 1 \Longleftrightarrow (da+db) \wedge (dab) = d$

$\Longleftrightarrow (x+y) \wedge (x \vee y) = d = x \wedge y$

التمرين 51

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين أوليين فيما بينهما.

1) بين أن: أ- $(a+b) \wedge a = 1$

ب- $(a+b) \wedge b = 1$ ج- $(a+b) \wedge ab = 1$

2) نضع: $d = (a+b) \wedge (a^2 + b^2 - ab)$

بين أن $d=1$ أو $d=3$

3) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا.

نضع: $\alpha = (a+b) \wedge (a^2 + b^2 - nab)$

أ- بين أن α يقسم العدد $(n+2)ab$ ب- استنتج أن α يقسم $n+2$.

الحل

ليكن a و b من IN بحيث $a \wedge b = 1$

أ- لنبين أن: $(a+b) \wedge a = 1$

نضع: $d = (a+b) \wedge a$

لدينا: $\begin{cases} d|a+b \\ d|a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|(a+b)-a \\ d|a \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} d|b \\ d|a \end{cases}$

$\Rightarrow d|a \wedge b$

$\Rightarrow d|1$

$\Rightarrow d = 1$ إذن: $(a+b) \wedge a = 1$

ب- لنبين أن: $(a+b) \wedge b = 1$

نستعمل طريقة السؤال أ نفسها.

ج- لنبين أن: $(a+b) \wedge ab = 1$

نضع: $\delta = (a+b) \wedge ab$

لدينا:
$$\begin{cases}\delta|a+b\\ \delta|ab\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\delta|ab+b^2\\ \delta|a^2+ab\\ \delta|ab\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\delta|b^2\\ \delta|a^2\end{cases}$$
$$\Rightarrow \delta|\Delta((a,b))^2$$
$$\Rightarrow \delta|1$$
$$\Rightarrow \delta=1$$
إذن: $(a+b)\wedge ab=1$

ملحوظة: $a\wedge b$ يرمز له أيضا بالرمز $\Delta(a;b)$

2) لنبين أن: $d=1$ أو $d=3$

لدينا:
$$\begin{cases}d|a^2+b^2-ab\\ d|a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d|a^2+b^2-ab & (1)\\ d|a^2+b^2+2ab & (2)\\ d|a+b\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}d|3ab & ((2)-(1))\\ d|3(a+b)\end{cases}$$
$$\Rightarrow d|\Delta(3(a+b);3ab)$$
$$\Rightarrow d|3\Delta(a+b;ab)$$
$$\Rightarrow d|3$$
(لأن $(a+b)\wedge ab=1$ حسب 1) ج-) ومنه: $d=3$ أو $d=1$

3) أ- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا.

لنبين أن α يقسم العدد $(n+2)ab$

لدينا:
$$\begin{cases}\alpha|a^2+b^2-nab\\ \alpha|a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha|a^2+b^2-nab\\ \alpha|a^2+b^2+2ab\end{cases}$$
$$\Rightarrow \alpha|2ab+nab$$
$$\Rightarrow \alpha|(n+2)ab$$
إذن: $\alpha|(n+2)ab$

ب- لنستنتج أن α يقسم $n+2$

لنبين أن: $\alpha\wedge ab=1$، من أجل ذلك نضع: $\alpha\wedge ab=d$

لدينا:
$$\begin{cases}d|\alpha\\ d|ab\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d|a+b\\ d|ab\end{cases}$$
$$\Rightarrow d|(a+b)\wedge ab$$
$$\Rightarrow d|1$$
$$\Rightarrow d=1$$

إذن: $\alpha\wedge ab=1$ وبما أن: $\alpha|(n+2)ab$ فإنه حسب مبرهنة كوص $GAUSS$، نستنتج أن: $\alpha|n+2$

التمرين 52

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا.

نضع : $a=5n+3$ و $b=2n-1$

حدد $a \vee b$ المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b.

الحل

لنحدد $a \vee b$ المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b.

نضع : $d = a \wedge b$

لنحدد قيمة d:

لدينا: $\begin{cases} d \mid 5n+3 \\ d \mid 2n-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid 10n+6 \\ d \mid 10n-5 \end{cases}$

$\Rightarrow d \mid 11$

$\Rightarrow d = 1$ أو $d = 11$

• لنحدد قيم n التي من أجلها يكون $d=11$.

لدينا: $d = 11 \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0[11] \\ b \equiv 0[11] \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 5n+3 \equiv 0[11] \\ 2n-1 \equiv 0[11] \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 5n \equiv 8[11] \\ 2n \equiv 1[11] \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 45n \equiv 72[11] \\ 34n \equiv 17[11] \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} n \equiv 6[11] \\ n \equiv 6[11] \end{cases}$

$\Rightarrow n \equiv 6[11]$

ومنه إذا كان: $d=11$ فإن: $n \equiv 6[11]$

عكسيا، إذا كان $n \equiv 6[11]$ فإن: $2n-1 \equiv 0[11]$ و $5n+3 \equiv 0[11]$

يعني أن: $11 \mid 2n-1$ و $11 \mid 5n+3$ ومنه : $11 \mid d$

وبما أن: $d=1$ أو $d=11$ فإن: $d = 11 \Longleftrightarrow n \equiv 6[11]$

وبما أن: $(a \vee b)(a \wedge b) = ab$ فإنه لدينا حالتان:

حالة (1): $d=1$ أي: $n \not\equiv 6[11]$

في هذه الحالة: $a \vee b = ab = (2n-1)(5n+3)$

حالة (2): $d=11$ أي: $n \equiv 6[11]$

في هذه الحالة: $a \vee b = \dfrac{(2n-1)(5n+3)}{11}$

التمرين 53

ليكن n عنصراً من IN،

1) بين أن: $4n^3+18n^2+20n+6=2(n+1)(n+3)(2n+1)$

2) عمل: $6n^2+24n+18$

3) أ- حدد، حسب قيم n، أكبر قاسم مشترك للعددين: $4n^3+18n^2+20n+6$ و $6n^2+24n+18$

ب- استنتج، حسب قيم n، أصغر مضاعف مشترك للعددين: $4n^3+18n^2+20n+6$ و $6n^2+24n+18$

الحل

1) لنبين أن: $(\forall n \in IN) ; 4n^3 + 18n^2 + 20n + 6 = 2(n+1)(n+3)(2n+1)$

ليكن n عنصرا من IN، لدينا:

$$\begin{aligned} 2(n+1)(n+3)(2n+1) &= (2n+2)(2n^2+7n+3) \\ &= 4n^3 + 14n^2 + 4n^2 + 6n + 14n + 6 \\ &= 4n^3 + 18n^2 + 20n + 6 \end{aligned}$$

إذن: $(\forall n \in IN) ; 4n^3 + 18n^2 + 20n + 6 = 2(n+1)(n+3)(2n+1)$

2) لنعمل $6n^2+24n+18$ حيث: $n \in IN$

ليكن n عنصرا من IN، لدينا:

$$\begin{aligned} 6n^2 + 24n + 18 &= 6(n^2 + 4n + 3) \\ &= 6((n+2)^2 - 1) \\ &= 6(n+3)(n+1) \end{aligned}$$

إذن: $(\forall n \in IN) ; 6n^2 + 24n + 18 = 6(n+3)(n+1)$

3) أ- لنحدد حسب قيم n، $(4n^3 + 18n^2 + 20n + 6) \wedge (6n^2 + 24n + 18)$

ليكن n عنصرا من IN، لدينا:

$$\begin{aligned} (4n^3 + 18n^2 + 20n + 6) \wedge (6n^2 + 24n + 18) &= (2(n+1)(n+3)(2n+1)) \wedge (3(n+3)(n+1)) \\ &= 2(n+1)(n+3)[(2n+1) \wedge 3] \end{aligned}$$

لنحدد $d_n = (2n+1) \wedge 3$ حسب قيم n. ، لدينا 3 عدد أولي ومنه: $d_n=3$ أو $d_n=1$.

لنحدد قيم n التي من أجلها يكون: $d_n=3$

لدينا:

$$\begin{aligned} d_n = 3 &\Rightarrow 3 | 2n+1 \\ &\Rightarrow 2n+1 \equiv 0[3] \\ &\Rightarrow 2n \equiv 2[3] \\ &\Rightarrow 3 | 2(n-1) \end{aligned}$$

وبما أن: $3 \wedge 2 = 1$ و $3 | 2(n-1)$ فإنه وحسب مبرهنة كوص لدينا: $3 | n-1$ أي: $n \equiv 1[3]$.

إذن: $d_n = 3 \Rightarrow n \equiv 1[3]$

عكسيا، لدينا:

$$\begin{aligned} n \equiv 1[3] &\Rightarrow 2n+1 = 0[3] \\ &\Rightarrow 3 | 2n+1 \\ &\Rightarrow (2n+1) \wedge 3 = 3 \\ &\Rightarrow d_n = 3 \end{aligned}$$

ومنه: $d_n = 3 \iff n \equiv 1[3]$

إذن لدينا الحالتان التاليتان:

حالة (1): $n \equiv 1[3]$ لدينا: $d_n=3$ ومنه:

$$(4n^3 + 18n^2 + 20n + 6) \wedge (6n^2 + 24n + 18) = 2(n+1)(n+3)d_n = 6(n+1)(n+3)$$

حالة (2): لدينا: $n \not\equiv 1[3]$

لدينا $d_n=1$ ومنه: $(4n^3 + 18n^2 + 20n + 6) \wedge (6n^2 + 24n + 18) = 2(n+1)(n+3)$

ب- لنستنتج حسب قيم n، $(4n^3 - 18n^2 + 20n + 6) \vee (6n^2 + 24n + 18)$

لدينا: $(\forall (a;b) \in (IN^*)^2); (a \vee b).(a \wedge b) = ab$

لدينا من خلال السؤال أ)، حالتان لتحديد المضاعف المشترك الأصغر للعددين:

$4n^3+18n^2+20n+6$ و $6n^2+24n+18$

حالة (1): $n \equiv 1[3]$، لدينا:

$$(4n^3 + 18n^2 + 20n + 6) \wedge (6n^2 + 24n + 18) = 6n^2 + 24n + 18$$

ومنه: $(4n^3 - 18n^2 + 20n + 6) \vee (6n^2 + 24n + 18) = 6n^2 + 24n + 18$

حالة (2): $n \not\equiv 1[3]$، لدينا:

$$(4n^3 + 18n^2 + 20n + 6) \wedge (6n^2 + 24n + 18) = 2(n+1)(n+3)$$

ومنه:

$$(4n^3 + 18n^2 + 20n + 6) \vee (6n^2 + 24n + 18) = \frac{2(n+1)(n+3)(2n+1) \times 6(n+3)(n+1)}{2(n+1)(n+3)}$$

$$= 6(n+1)(n+3)(2n+1)$$

التمرين 54

ليكن n عدداً صحيحاً طبيعياً.

نضع: $a=11n+7$ و $b=13n+8$

1) حدد تبعا لقيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

2) حدد n بحيث: $a \vee b = 2772$.

الحل

1) لنحدد تبعا لقيم n، العدد $a \wedge b$:

- نضع: $d = a \wedge b$، لدينا:

$$\begin{cases} d/a \\ d/b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|11n+7 \\ d|13n+8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d|143n+91 \\ d|143n+88 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow d|3$$

$d=1$ أو $d=3$

ومنه:

- لنحدد قيم n التي من أجلها يكون $d=3$

لدينا: $d=3 \Rightarrow \begin{cases} 11n+7 \equiv 0[3] \\ 13n+8 \equiv 0[3] \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 11n \equiv 2[3] \\ 13n \equiv 1[3] \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} n \equiv 1[3] \\ n \equiv 1[3] \end{cases}$

$\Rightarrow n \equiv 1[3]$

عكسيا: إذا كان $n \equiv 1[3]$ فإن: $11n+7 \equiv 0[3]$ و $13n+8 \equiv 0[3]$

أي: $a \equiv 0[3]$ و $b \equiv 0[3]$ ومنه: $3|a$ و $3|b$ إذن: $3|d$

وبما أن $d=1$ أو $d=3$ فإن: $d=3$

إذن: $(n \equiv 1[3] \Longleftrightarrow d=3)$ و $(n \not\equiv 1[3] \Longleftrightarrow d=1)$

2) لنحدد n بحيث: $a \vee b = 2772$

لدينا: $3|2772$ ومنه: $3|a$ و $3|b$ وبما أن: $a \wedge b = 1$ أو $a \wedge b = 3$ فإنه في هذه الحالة لدينا: $d=3$

إذن: $\exists(a';b') \in IN^2 \,/\, a=3a'$ و $b=3b'$ و $a' \wedge b' = 1$

ولدينا: $(a \vee b).(a \wedge b) = ab$ ومنه: $a \vee b = 3a'b'$

أي: $a'b'=924$ مع $a' \wedge b' = 1$

نستعمل الجدول التالي لتحديد قيم a' و b' و a و b و n.

a'	1	3	4	7	11	12	21	33	28	44	77	84	132	231	308	924
b'	924	308	231	132	84	77	44	28	33	21	12	11	7	4	3	1
$a=11n+7$	3	9	12	21	33	36	63	99	84	132	231	252	396	693	924	2772
$b=13n+8$	2772	924	693	396	252	231	132	84	99	63	36	33	21	12	9	3
n	×	×	×	×	×	×	×	×	7	×	×	×	×	×	×	×

إذن: $n=7$.

التمرين 55

يكن a و b من IN بحيث: $a<b$.

حدد a و b في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $a \vee b = 60$ و $a \wedge b = 5$

2) $a^2+b^2=325$ و $a \vee b = 30$

3) $ab=1440$ و $a \vee b = 240$

4) $(a \vee b) - 3(a \wedge b) = 21$

5) $(a \vee b) - 9(a \wedge b) = 13$

الحل

1) لنحدد a وb بحيث: $a \vee b = 60$ و $a \wedge b = 5$

نضع: $m = a \vee b$ و $d = a \wedge b$

لدينا: $a' \wedge b' = 1$ و $b = b'd$ و $(\exists(a';b') \in IN^2)/a = a'd$

ولدينا: $md = ab \Leftrightarrow md = a'b'd^2$

$\Leftrightarrow m = a'b'd$

$\Leftrightarrow 60 = 5a'b'$

$\Leftrightarrow a'b' = 12$

باستعمال الجدول التالي نجد جميع قيم a وb:

a'	1	12	3	4
b'	12	1	4	3
a	5	60	15	20
b	60	5	20	15

وبما أن: $a<b$ فإن الزوجين $(5;60)$ و$(15;20)$ هما الحلان لهذه النظمة.

2) لنحدد a وb بحيث: $a^2+b^2=325$ و $a \vee b = 30$

نضع: $m = a \vee b$ و $d = a \wedge b$

لدينا: $a' \wedge b' = 1$ و $b = b'd$ و $(\exists(a';b') \in IN^2)/a = a'd$

ولدينا: $md = ab \Leftrightarrow md = a'b'd^2$

$\Leftrightarrow m = a'b'd$

$\Leftrightarrow 30 = a'b'd$

ومنه: $(*)\begin{cases} a^2 + b^2 = 325 \\ a \vee b = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^2(a'^2 + b'^2) = 325 \\ d^2a'^2.b'^2 = 900 \end{cases}$

$\Rightarrow d^2 | 325 \wedge 900$

$\Rightarrow d^2 | 25$

$\Rightarrow d = 1$ أو $d=5$

الحالة (1): $d=5$:

النظمة $(*)$ تصبح: $\begin{cases} a'^2 + b'^2 = 13 \\ a'b' = 6 \end{cases}$

يعني أن: $\begin{cases} a' = 2 \\ b' = 3 \end{cases}$ إذن: $\begin{cases} a = 10 \\ b = 15 \end{cases}$

الحالة (2): $d=1$:

في هذه الحالة لدينا: $a'=a$ و$b'=b$ و$m=ab$ أي: $ab=30$

نستعمل الجدول التالي للحصول على جميع قيم a وb والتي تحقق:

$a \wedge b = 1$ و $ab=30$ و $a^2+b^2=325$

a	1	2	6	5	15	30
b	30	15	5	6	2	1
a^2+b^2	901	229	61	61	229	901

من خلال الجدول السابق، نستنتج أن النظمة ليس لها حل في هذه الحالة.

وبالتالي $(10;15)$ هو الزوج الوحيد التي يحقق النظمة المقترحة.

3) لنحدد a و b من IN بحيث: $ab=1440$ و $a \vee b = 240$

نضع: $m = a \vee b$ و $d = a \wedge b$

لدينا: $a' \wedge b' = 1$ و $b=b'd$ و $(\exists(a';b') \in IN^2)/a = a'd$

ولدينا: $md = ab \iff 240d = 1440$

$\iff d = 6$

ومن جهة أخرى، لدينا: $m=a'b'd$ يعني أن: $a'b'=40$

نستعمل الجدول التالي للحصول على جميع قيم a و b:

a'	1	5
b'	40	8
a	6	30
b	240	48

إذن $(6;240)$ و $(30;48)$ هما الزوجان اللذان يحققان النظمة المقترحة.

4) لنحدد a و b من IN بحيث: $(a \vee b) - 3(a \wedge b) = 21$

نضع: $m = a \vee b$ و $d = a \wedge b$

لدينا: $a' \wedge b' = 1$ و $b=b'd$ و $(\exists(a';b') \in IN^2)/a = a'd$

لدينا: $md=ab$ ومنه: $m=a'b'd$

لدينا: $m - 3d = 21 \iff d(a'b' - 3) = 21$ $(*)$

يعني أن d قاسم للعدد 21 ومنه: $d \in \{1;3;7;21\}$

- حالة (1): $d=1$

$(*)$ تصبح: $a'b'=24$

بما أن $a' \wedge b' = 1$ فإن: $\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 24 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a' = 3 \\ b' = 8 \end{cases}$ ، ومنه: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 24 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a = 3 \\ b = 8 \end{cases}$

- حالة (2): $d=3$

$(*)$ تصبح: $a'b'=10$

بما أن $a' \wedge b' = 1$ فإن: $\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 10 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a' = 2 \\ b' = 5 \end{cases}$ ، ومنه: $\begin{cases} a = 3 \\ b = 30 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a = 6 \\ b = 15 \end{cases}$

– حالة (3): $d=7$:

(•) تصبح: $a'b'=6$

بما أن $a' \wedge b' = 1$ فإن: $\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 6 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a' = 2 \\ b' = 3 \end{cases}$ ، ومنه: $\begin{cases} a = 7 \\ b = 42 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a = 14 \\ b = 21 \end{cases}$

– حالة (4): $d=21$:

(•) تصبح: $a'b'=3$

بما أن $a' \wedge b' = 1$ فإن: $a'=1$ و$b'=3$ ، ومنه: $a=21$ و$b=63$

إذن مجموعة الأزواج التي تحقق النظمة المقترحة هي:

$\{(1;24);(3;8);(3;30);(6;15);(7;42);(14;21);(21;63)\}$

5) لنحدد a وb من IN بحيث: $(a \wedge b) - 9(a \wedge b) = 13$

نضع: $d = a \wedge b$ و$m = a \vee b$

لدينا: $a' \wedge b' = 1$ و$b=db'$ و$a = da'$ / $\left(\exists(a';b') \in IN^2\right)$ $d = a \wedge b \iff$

ولدينا: $md = ab \iff m = a'b'd$

$m - 9d = 13 \iff m = 9d + 13$

ومنه: $\iff a'b'd = 9d + 13$

$\iff d(a'b' - 9) = 13$

$\iff \begin{cases} d = 13 \\ a'b' - 9 = 1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} d = 1 \\ a'b' - 9 = 13 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} d = 13 \\ a'b' = 10 \end{cases}$ أو $\begin{cases} d = 1 \\ a'b' = 22 \end{cases}$

حالة (1): $d=1$:

a'	1	2	11	22
b'	22	11	2	1
a	1	2	11	22
b	22	11	2	1

حالة (2): $d=13$:

a'	1	2	5	10
b'	10	5	2	1
a	13	26	65	130
b	130	65	26	13

إذن الأزواج $(a;b)$ حلول النظمة المقترحة هي: $(13;130);(26;65);(1;22);(2;11)$

التمرين 56

1) حدد مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية غير المنعدمة a وb بحيث: $ab=216$ و$PGCD(a;b)=6$

2) حدد مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية غير المنعدمة a وb بحيث: $\begin{cases} a + b = 144 \\ PGCD(a;b) = 12 \end{cases}$

3) حدد جميع الأزواج $(a;b)$ من عددين صحيحين طبيعيين بحيث: $\begin{cases} a \leq b \\ PGCD(a;b) = 22 \\ PPCM(a;b) = 264 \end{cases}$

الحل

في جميع أجوبة هذا التمرين، نضع :

$PGCD(a;b)=d$ و $PPCM(a;b)=m$ و $a=da'$ و $b=db'$

لدينا: $a' \wedge b' = 1$ و $md=ab$ أي: $m=a'b'd$

1) لنحدد مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية غير المنعدمة a و b بحيث: $ab=216$ و $PGCD(a;b)=6$

لدينا: $ab=216$ يعني أن: $36a'b'=216$ و $a' \wedge b' = 1$

إذن: $a'b'=6$ و $a' \wedge b' = 1$

ومنه: $\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 6 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a' = 2 \\ b' = 3 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a' = 3 \\ b' = 2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a' = 6 \\ b' = 1 \end{cases}$ ولدينا : $\begin{cases} a = da' \\ b = db' \end{cases}$ و $d=6$

إذن المجموعة المطلوبة هي: $\{(6;36);(12;18);(18;12);(36;6)\}$

2) لنحدد مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية غير المنعدمة a و b بحيث: $\begin{cases} a + b = 144 \\ PGCD(a;b) = 12 \end{cases}$

لدينا: $a+b=144$ يعني أن: $12(a'+b')=144$ و $a' \wedge b' = 1$

أي: $a'+b'=12$ و $a' \wedge b' = 1$

ومنه: $\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 11 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a' = 5 \\ b' = 7 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a' = 7 \\ b' = 5 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a' = 11 \\ b' = 1 \end{cases}$ ولدينا : $\begin{cases} a = da' \\ b = db' \end{cases}$ و $d=12$

إذن المجموعة المطلوبة هي: $\{(12;132);(60;84);(84;60);(132;12)\}$

3) لنحدد مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية غير المنعدمة a و b بحيث:

$a \leq b$ و $PGCD(a;b)=22$ و $PPCM(a;b)=264$

لدينا: $m=a'b'd$ ومنه: $264=22a'b'$

إذن: $a'b'=12$

وكون: $a' \wedge b' = 1$ و $a' \leq b'$ (لأن $a \leq b$) فإن القيم الممكنة للعددين a' و b' هي:

$\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 12 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a' = 3 \\ b' = 4 \end{cases}$ ولدينا: $a=da'$ و $b=db'$ و $d=22$

إذن المجموعة المطلوبة هي: $\{(22;264);(66;88)\}$

التمرين 57

1) ليكن a و b عنصرين من IN^* بحيث: $PGCD(a;b)=1$

أ- بين أن: $PGCD(a;a+b)=1$ وأن: $PGCD(b;a+b)=1$

ب- استنتج أن: $PGCD(ab;a+b)=1$

2) في هذا السؤال a و b عنصران من IN^* بحيث: $PGCD(a;b)=d$ ، نضع: $a=da'$ و $b=db'$

أ- اكتب $PPCM(a;b)$ و $a+b$ بدلالة a' و b' و d.

ب- باستعمال السؤال 1)، بين أن: $PGCD(a;b)=PGCD(PPCM(a;b);a+b)$

1) أ- لنبين أن: $PGCD(a;a+b)=1$ و $PGCD(b;a+b)=1$

نضع : $d_1=PGCD(a;a+b)$

لدينا : $\begin{cases} d_1 | a \\ d_1 | a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 | a \\ d_1 | (a+b)-a \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} d_1 | a \\ d_1 | b \end{cases}$$

$$\Rightarrow d_1 | a \wedge b$$

$$\Rightarrow d_1 | 1$$

$$\Rightarrow d_1 = 1$$

إذن: $PGCD(a;a+b)=1$

وبالطريقة نفسها نبين أن: $PGCD(b;a+b)=1$

ب- لنستنتج أن: $PGCD(ab;a+b)=1$

لدينا: $PGCD(a;a+b)=1$ و $PGCD(b;a+b)=1$

ومنه وحسب مبرهنة بوزو ($BEZOUT$)، لدينا:

$(\exists(u;v) \in \mathbb{Z}^2); au+(a+b)v=1$ ، و: $(\exists(u';v') \in \mathbb{Z}^2); bu'+(a+b)v'=1$

إذن: $(au+(a+b)v)(bu'+(a+b)v')=1$ ، أي: $(ab)(uu')+(a+b)(auv'+bu'v+(a+b)vv')=1$

بوضع: $u''=uu'$ و $v''=acv'+bu'v+(a+b)vv'$

لدينا: $(ab)u''+(a+b)v''=1$ مع $(u'';v'') \in IZ^2$

إذن حسب مبرهنة بوزو ($BEZOUT$)، لدينا: $PGCD(ab;a+b)=1$

2) لدينا: $PGCD(a;b)=d$ و $a=da'$ و $b=db'$ مع $PGCD(a';b')=1$

أ- لنكتب $PPCM(a;b)$ و $a+b$ بدلالة a' و b' و d.

لدينا: $PPCM(a;b)\times PGCD(a;b)=ab$

ومنه: $PPCM(a;b)\times d=a'b'd^2$

إذن: $PPCM(a;b)=a'b'd$ (لأن: $d \geq 1$)

ولدينا من جهة أخرى: $a+b=d(a'+b')$

ب- لنبين أن: $PGCD(PPCM(a;b);a+b)=PGCD(a;b)$

لدينا: $PGCD(PPCM(a;b);a+b) = PGCD(a'b'd;d(a'+b'))$

$$= d \times PGCD(a'b';a'+b')$$

$$= d$$

(حسب السؤال 1) أ) وب)

$$= PGCD(a;b)$$

إذن: $PGCD(PPCM(a;b);a+b)=PGCD(a;b)$

التمرين 58

نعتبر المتتاليتين العدديتين (x_n) و(y_n) المعرفتين بما يلي: $\begin{cases} x_0 = 3 \ ; \ y_0 = 1 \\ (\forall n \in IN) ; x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}$

1) أ- بين أن: $(\forall n \in IN) ; x_n = 2^{n+1} + 1$

ب- هل x_n وx_{n+1} أوليات فيما بينهما لكل n من IN؟

2) أ- بين أن: $(\forall n \in IN) ; 2x_n - y_n = 5$ ، ثم استنتج تعبير y_n بدلالة n.

ب- حدد، تبعا لقيم العدد الصحيح الطبيعي p، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^p على 5.

3) لكل عنصر n من IN نضع: $d_n = x_n \wedge y_n$

أ- بين أن: $d_n=1$ أو $d_n=5$

ب- حدد المجموعة: $S = \{n \in IN \ / \ d_n = 5\}$

الحل

1) أ- لنبين أن: $(\forall n \in IN) ; x_n = 2^{n+1} + 1$

باستعمال الاستدلال بالترجع:

من أجل $n=0$ لدينا: $x_0=3$ و$2^{0+1}+1=3$

إذن: $x_0=2^{0+1}+1$ أي المتساوية صحيحة من أجل $n=0$ ليكن n عنصرا من IN نفترض أن: $x_n=2^{n+1}+1$

لنبين أن: $x_{n+1}=2^{n+2}+1$

لدينا:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n - 1 \\ &= 2(2^{n+1} + 1) - 1 \\ &= 2 \times 2^{n+1} + 2 - 1 = 2^{n+2} + 1 \end{aligned}$$

إذن: $(\forall n \in IN) ; x_n = 2^{n+1} + 1$

• ملاحظة: لكل n من IN نضع: $u_n=x_n-1$

لكل n من IN لدينا:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= x_{n+1} - 1 \\ &= 2x_n - 1 - 1 = 2(x_n - 1) \end{aligned}$$

يعني أن $u_{n+1}=2u_n$ لكل n من IN.

ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول $u_0=2$.

إذن: $u_n=2^{n+1}$ لكل n من IN.

ب- ليكن n من IN، لنحدد $x_{n+1} \wedge x_n$

لدينا: $x_{n+1}=2x_n-1$ يعني أن: $2x_n-x_{n+1}=1$

إذن حسب مبرهنة $BEZOUT$ لدينا: $x_{n+1} \wedge x_n = 1$

وبالتالي x_n وx_{n+1} أولياء فيما بينهما لكل n من IN.

2) أ– • لنبين أن: $(\forall n \in IN) ; 2x_n - y_n = 5$

من أجل $n=0$ لدينا: $2x_0 - y_0 = 2\times3 - 1 = 5$

ومنه فإن المتساوية صحيحة من أجل $n=0$.

ليكن n عنصرا من IN، نفترض أن: $2x_n - y_n = 5$

لنبين أن: $2x_{n+1} - y_{n+1} = 5$

لدينا: $2x_{n+1} - y_{n+1} = 2(2x_n - 1) - (2y_n + 3)$

$$= 4x_n - 2y_n - 5$$
$$= 2(2x_n - y_n) - 5$$
$$= 10 - 5 = 5$$

إذن: $(\forall n \in IN) ; 2x_n - y_n = 5$

• الاستنتاج:

ليكن n عنصرا من IN، لدينا: $2x_n - y_n = 5$ ومنه $y_n = 2x_n - 5$.

وبما أن: $x_n = 2^{n+1} + 1$ فإن: $y_n = 2(2^{n+1} + 1) - 5$

أي: $y_n = 2^{n+2} - 3$

إذن: $(\forall n \in IN) ; y_n = 2^{n+2} - 3$

ب– لنحدد بواقي القسمة الإقليدية لـ2^p على 5.

لدينا: $2^0 \equiv 1[5]$ و$2^1 \equiv 2[5]$ و$2^2 \equiv 4[5]$ و$2^3 \equiv 3[5]$ و$2^4 \equiv 1[5]$

ومنه: $2^{4k} \equiv 1[5]$ لكل k من IN.

وبالتالي لدينا: لكل p من IN الحالات التالية:

إذا كان $p \equiv 0[4]$ فإن: $2^p = 1[5]$ أي الباقي $r=1$.

إذا كان $p \equiv 1[4]$ فإن: $2^p = 2[5]$ أي الباقي $r=2$.

إذا كان $p \equiv 2[4]$ فإن $2^p \equiv 4[5]$ أي $r=4$

إذا كان $p \equiv 3[4]$ فإن: $2^p = 3[5]$ أي الباقي $r=3$.

3) أ– لنبين أن: $d_n = 1$ أو $d_n = 5$

ليكن n من IN، لدينا: $d_n = x_n \wedge y_n$

ومنه: $d_n | x_n$ و$d_n | y_n$ إذن: $d_n | 2x_n - y_n$

وبما أن: $2x_n - y_n = 5$ فإن: $d_n | 5$

ولدينا 5 عدد أولي و$d_n \in IN^*$ إذن $d_n = 1$ أو $d_n = 5$

ب– تحديد المجموعة S.

ليكن n عنصرا من IN.

$n \in S \Longleftrightarrow x_n \wedge y_n = 5$

لدينا: $y_n=2^{n+2}-3$ و $x_n=2^{n+1}+1$

وبما أن $2^{n+2}-3 \equiv 0[5]$ و $2^{n+1}+1 \equiv 0[5]$

فإنه لدينا:

ولدينا: $2^{n+1}+1 \equiv 0[5] \Longleftrightarrow 2^{n+1} \equiv 4[5]$

$\Longleftrightarrow n+1 \equiv 2[4]$

$\Longleftrightarrow n \equiv 1[4]$

$2^{n+2}-3 \equiv 0[5] \Longleftrightarrow 2^{n+2} \equiv 3[5]$

و $\Longleftrightarrow n+2 \equiv 3[4]$

$\Longleftrightarrow n = 1[4]$

ومنه إذا كان: $d_n=5$ فإن: $n \equiv 1[4]$

عكسيا: إذا كان: $n \equiv 1[4]$ فإن: $x_n \equiv 0[5]$ و $y_n \equiv 0[5]$

يعني أن $5|x_n$ و $5|y_n$ ومنه: $5|d_n$

وبما أن $d_n=1$ أو $d_n=5$ فإن: $n \equiv 1[4] \Longleftrightarrow d_n = 5$

وبالتالي: $S=\{4k+1 / k \in IN\}$

التمرين 59

ليكن a و b عنصرين من المجموعة IN^* بحيث: $a \neq b$

1) أثبت: $(\exists p \in IN);((\exists n \in IN^*) / a = np$ و $b=(n-1)p) \Longleftrightarrow a \wedge b = a-b$

2) حدد العددين الصحيحن الطبيعيين a و b بحيث: $\begin{cases} a \wedge b = a-b \\ a \vee b = 30 \end{cases}$

3) نعتبر الأعداد A و B و C بحيث:

$C=40a(2+3b)$ و $B=15a(5+8b)$ و $A=24a(3+5b)$

بين أن القاسم المشترك الأكبر لعددين من الأعداد A و B و C يساوي فرقهما، ثم احسب: $A \wedge B \wedge C$

الحل

1) ليكن a و b عنصرين من IN^* بحيث: $a \neq b$

نفترض أن: $((\exists p \in IN);(\exists n \in IN^*) / a = np$ و $b=(n-1)p)$

لنبين أن: $a \wedge b = a-b$

لدينا:

$a \wedge b = (pn) \wedge (p(n-1))$

$= p \times (n \wedge (n-1))$

$= p \times 1$

$= p$

ولدينا : $a-b = pn-(n-1)p$
$= p$

إذن : $a \wedge b = a-b$

عكسيا نفترض أن : $a \wedge b = a-b$

لدينا : $a \wedge b = a-b$ ومنه : $(\exists k; k' \in IN^*) / a = k(a-b)$ و $b = k'(a-b)$

يعني أن : $a-b=(a-b)(k-k')$ إذن : $k-k'=1$ (لأن $a \neq b$) أي : $k=k'+1$

ومنه بوضع : $n=k$ و $p=a-b$ نجد :

$((\exists p \in IN^*);(\exists n \in IN) / a = np$ و $b=(n-1)p)$

2) لنحدد العددين الصحيحين الطبيعيين a و b اللذين يحققان : $\begin{cases} a \wedge b = a-b \\ a \vee b = 30 \end{cases}$

لدينا حسب السؤال السابق :

$((\exists p \in IN^*);(\exists n \in IN) / a = np$ و $b=(n-1)p)$ ، بحيث : $p=a-b$

ونعلم أن : $a \vee b = n(n-1)p$

إذن : $n(n-1)p=30$

لدينا : $D_{30} = \{1;2;3;5;6;10;15;30\}$

p	1	2	3	5	6	10	15	30
n	6			3			2	
$n-1$	5			2			1	
a	6			15			30	
b	5			10			15	

إذن الأزواج $(a;b)$ المبحوث عنها هي : $(6;5);(10;15);(30;15)$

3) • حسب 1) لدينا إذا كانت : $a=pn$ و $b=p(n-1)$ فإن : $a \wedge b = p$ حيث : $n \in IN^*$ و $p \in IN^*$

لدينا : $A=24a(3+5b)=3a(24+40b)$

و $B=15a(5+8b)=3a(25+40b)$

إذن : $A \wedge B = B-A$ ومنه : $A \wedge B = 3a$

لدينا : $A=24a(3+5b)=8a(9+15b)$

و $C=40a(2+5b)=8a(10+15b)$

إذن : $A \wedge C = C-A$ ومنه : $A \wedge C = 8a$

لدينا : $B=15a(5+8b)=5a(15+24b)$ و $C=5a(16+24b)$

إذن : $B \wedge C = C-B$ ومنه : $B \wedge C = 5a$

• لدينا: $A \wedge B \wedge C = (A \wedge B) \wedge (A \wedge C) \wedge (B \wedge C)$
$$= (3a) \wedge (8a) \wedge (5a)$$
$$= a.(3 \wedge 8 \wedge 5) = a$$

التمرين 60

لكل عنصر n من IN^* نضع : $b_n = \prod_{k=1}^{n}(n+k)$ و $a_n = 1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-1) = \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$

1) أ- بين أن : $(\forall n \in IN^*) ; a_n \times n! \times 2^n = (2n)!$

ب- استنتج أن : $(\forall n \in IN^*) ; b_n | 2^n$

2) ليكن p عنصرا من IN.

بين أن : $2^p | b_n \Rightarrow p \leq n$

الحل

1) أ- ليكن n عنصراً من IN^*.

لنبين أن : $a_n \times n! \times 2^n = (2n)!$

لدينا:
$$a_n = 1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-1)$$
$$= \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times ... \times (2n-1) \times 2n}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times ... \times (2n)}$$
$$= \frac{(2n)!}{2^n(1 \times 2 \times 3 \times ... \times n)}$$
$$= \frac{(2n)!}{n! \times 2^n}$$

ومنه : $a_n \times n! \times 2^n = (2n)!$

ب- الاستنتاج: ليكن n عنصرا من IN^*.

لدينا:
$$b_n = \prod_{k=1}^{n}(n+k)$$
$$= (n+1)(n+2)(n+3)...(n+n)$$

إذن:
$$(2n)! = (2n)(2n-1)...(n+1)n(n-1)(n-2)...2 \times 1$$
$$= ((n+1)(n+2)...(n+n)) \times (1 \times 2 \times ... \times (n-1).n)$$
$$= b_n \times n!$$

ومنه : $a_n \times 2^n \times n! = b_n \times n!$

إذن: $b_n = a_n \times 2^n$ يعني أن : $2^n | b_n$

2) ليكن p عنصرا من IN، بحيث : $2^p | b_n$

لنبين أن: $p \leq n$

لدينا: $(\forall k \in IN);(2k+1)\wedge 2=1$

بالفعل لدينا 2 عدد أولي و$(2k+1)$ عدد فردي لكل k من IN.

ومنه 2 لا يقسم $2k+1$ إذن: $2\wedge(2k+1)=1$

وبالتالي: $(\forall k \in IN);2^{p}\wedge(2k+1)=1$

ومنه: $\begin{cases}2^{p}\wedge 1=1\\2^{p}\wedge 3=1\\2^{p}\wedge 5=1\\\cdot \quad \cdot\\\cdot \quad \cdot\\2^{p}\wedge(2n-1)=1\end{cases}$

وبالتالي: $2^{p}\wedge\left(\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\right)=1$ يعني أن: $2^{p}\wedge a_n=1$

إذن: $2^{p}|2^{n}\times a_n$ و$2^{p}\wedge a_n=1$

ومنه، حسب مبرهنة $GAUSS$، $2^{p}|2^{n}$

وبالتالي: $2^{p}\leq 2^{n}$ أي إن: $2^{p-n}\leq 1$

إذن: $p-n\leq 0$ يعني أن: $p\leq n$

التمرين 61

ليكن a وb عنصرين من المجموعة IN^{*}.

نضع: $d=a\wedge b$ و$m=a\vee b$

حدد العددين a وb بحيث: $\begin{cases}m-3d=108\\10<d<15\end{cases}$

الحل

لدينا: $d=a\wedge b \Leftrightarrow (\exists k;k'\in IN^{*})\,/\,a=kd$ و $b=k'd$ و $k\wedge k'=1$

ولدينا: $md=ab$ إذن: $md=kk'd^{2}$ أي: $m=kk'd$

لدينا: $k\wedge k'=1$ و$\begin{cases}m-3d=108\\10<d<15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d(kk'-3)=108\\10<d<15\end{cases}$

$D_{108}=\{1;2;3;4;6;9;12;18;27;36;54;108\}$

مجموعة القواسم الموجبة لـ108.

لدينا d قاسم للعدد 108 محصور بين 10 و15 إذن: $d=12$.

ومنه: $k\wedge k'=1$ و $\begin{cases}m-3d=108\\10<d<15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}kk'-3=9\\d=12\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} kk' = 12 \\ d = 12 \end{cases} \text{ و } k \wedge k' = 1$$

k	1	3	4	12
k'	12	4	3	1
a	12	36	48	144
b	144	48	36	12

إذن الأزواج $(a;b)$ التي تحقق النظمة هي: $(144;12)$ و$(48;36)$ و$(36;48)$ و$(12;144)$.

التمرين 62

1) ليكن a وb عنصرين من المجموعة IN^*.

أ- بين أن: $ab = 3(a \vee b) \Longleftrightarrow a \wedge b = 3$

ب- بين أن: $a \wedge b = 1 \Longleftrightarrow (2a+b) \wedge (5a+2b) = 1$

2) حل في المجموعة $IN^* \times IN^*$ النظمة التالية: $(E): \begin{cases} (2x+y)(5x+2y) = 1620 \\ xy = 3(x \vee y) \end{cases}$

الحل

1) أ- ليكن a وb عنصرين من IN^*.

لنبين أن: $ab = 3(a \vee d) \Longleftrightarrow a \wedge b = 3$

• نذكر أن: $(a \wedge b)(a \vee b) = |ab|$

إذا كان: $a \wedge b = 3$ فإن: $(a \wedge b)(a \vee b) = 3(a \vee b)$ ، ومنه: $3(a \vee b) = ab$

إذا كان: $3(a \vee b) = ab$ فإن: $3(a \vee b)(a \wedge b) = ab(a \wedge b)$

ومنه: $ab(a \wedge b) = 3ab$ أي: $a \wedge b = 3$

ب- لنبين أن: $a \wedge b = 1 \Longleftrightarrow (2a+b) \wedge (5a+2b) = 1$

نفترض أن: $a \wedge b = 1$ نضع: $d = (2a+b) \wedge (5a+2b)$ و $d \in IN^*$

لدينا: $\begin{cases} d \mid 4a+2b \\ d \mid 5a+2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid 2a+b \\ d \mid 5a+2b \end{cases}$

$\Rightarrow d \mid a$

ولدينا: $\begin{cases} d \mid 2a \\ d \mid 2a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid a \\ d \mid 2a+b \end{cases}$

$\Rightarrow d \mid b$

ومنه: $d \mid a$ و$d \mid b$ إذن: $d \mid a \wedge b$

يعني أن $d \mid 1$ وبالتالي $d=1$ لأن: $d \in IN^*$

نفترض أن: $(2a+b) \wedge (5a+2b) = 1$

لدينا حسب مبرهنة $BEZOUT$:

$$(\exists u; v \in \mathbb{Z}) / (2a + b)u \wedge (5a + 2b)v = 1$$

يعني أن: $(\exists u; v \in \mathbb{Z}) / (2u + 5v)a \wedge (u + 2v)b = 1$

ومنه فإن: $(\exists \alpha; \beta \in \mathbb{Z}) / \alpha a + \beta b = 1$ ، إذن: $a \wedge b = 1$

2) لنحل في $IN^* \times IN^*$ النظمة (E).

ليكن x وy عنصرين من IN^*.

لدينا: $xy = 3(x \vee y) \Leftrightarrow x \wedge y = 3$

ومنه: $(\exists a; b \in \mathbb{Z}^*) / x = 3a$ و $y = 3b$ و $a \wedge b = 1$

إذن: $(2x + y)(5a + 2y) = 1620 \Leftrightarrow 9(2a + b)(5a + 2b) = 1620$

$$\Leftrightarrow (2a + b)(5a + 2b) = 180$$

وبالتالي النظمة (E) تصبح: $\begin{cases} (2a + b)(5a + 2b) = 180 \\ a \wedge b = 1 \quad x = 3a \quad y = 3b \end{cases}$

وحسب نتيجة السؤال 1) ب) يكون لدينا: $\begin{cases} (2a + b)(5a + 2b) = 180 \\ (2a + b) \wedge (5a + 2b) = 1 \end{cases}$

علما أن: $180=2^2.3^2.5$ و$2a+b<5a+2b$

لدينا النظمات التالية:

$(1): \begin{cases} 2a + b = 1 \\ 5a + 2b = 180 \end{cases}$ $\quad (2): \begin{cases} 2a + b = 4 \\ 5a + 2b = 45 \end{cases}$ $\quad (3): \begin{cases} 2a + b = 5 \\ 5a + 2b = 36 \end{cases}$

$(4): \begin{cases} 2a + b = 9 \\ 5a + 2b = 20 \end{cases}$

النظمات (1) و(2) و(3) لا تقبل حلولاً في $IN^* \times IN^*$.

النظمة (4) تقبل حلا وحيدا في $IN^* \times IN^*$ هو $(a;b)=(2,5)$

وبما أن: $X=3a$ و$Y=3b$ فإن للنظمة (E) حل وحيد هو: $(x;y)=(6;15)$.

التمرين 63

1) ليكن x و y عنصرين من IN^*

بين أن: $x \wedge y = 1 \Rightarrow (3x + 5y) \wedge (x + 2y) = 1$

2) حل في المجموعة $(IN^*)^2$ النظمة التالية:

$$\begin{cases} (3a + 5b)(a + 2b) = 1276 \\ ab = 2(avb) \end{cases}$$

الحل

1) نفترض أن $x \wedge y = 1$ ولنبين أن: $(3x + 5y) \wedge (x + 2y) = 1$

نضع: $d = (3x + 5y) \wedge (x + 2y)$ مع $d \in IN^*$

لدينا : $\begin{cases} d/2(3x + 5y) - 5(x + 2y) \\ d/3(x + 2y) - (3x + 5y) \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} d/3x + 5y \\ d/x + 2y \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} d/x \\ d/y \end{cases}$

ومنه $d/x \wedge y$ أي $d/1$، إذن $d=1$

وبالتالي $x \wedge y = 1 \Rightarrow (3x + 5y) \wedge (x + 2y) = 1$

2) لنحل في $(IN^*)^2$ النظمة المقترحة :

ليكن (a,b) عنصرا من $(IN^*)^2$ نضع $d = a \wedge b$ و $m = a \vee b$

لدينا: $d = 2 \Leftrightarrow$ و $md = 2m \Leftrightarrow ab = 2(a \vee b)$

إذن $a' \wedge b' = 1$ و $b=2b'$ و $(\exists a', b' \in IN^*)/a = 2a'$

ولدينا : $(3a+5b)(a+2b)=1276$ ومنه : $(3a'+5b')(a'+2b')=319$

وحسب السؤال السابق لدينا $(3a' + 5b') \wedge (a' + 2b') = 1$ ، لأن $a' \wedge b' = 1$

ولدينا $3a'+5b'>a'+2b'$ ومنه تصبح النظمة: $\begin{cases} (3a' + 5b')(a' + 2b') = 319 \\ (3a' + 5b') \wedge (a' + 2b') = 1 \\ 3a' + 5b' > a' + 2b' \end{cases}$

ولدينا $319 = 11 \times 29$ التفكيك إلى جداء من عوامل أولية ومنه لدينا النظمتان التاليتان :

$(1):\begin{cases} 3a' + 5b' = 319 \\ a' + 2b' = 1 \end{cases}$ $\quad (2):\begin{cases} 3a' + 5b' = 29 \\ a' + 2b' = 11 \end{cases}$

النظمة (1) تعطي $a'=633$ و $b'=-316$ وهذا الحل مرفوض (لأن: $b' \in IN$)

النظمة (2) تعطي $a'=3$ و $b'=4$ ومنه $a=6$ و $b=8$

ونتحقق من أن الزوج $(6,8)$ حل للنظمة المتقرحة ؛

وبالتالي مجموعة حلول النظمة هي: $S = \{(6, 8)\}$

التمرين 64

ليكن a و b عنصرين من المجموعة IN^*

1) بين أن: $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow ab \wedge (a + b) = 1$

2) حل في المجموعة IN^2 النظمة التالية : $\begin{cases} a + b = 96 \\ a \vee b = 180 \end{cases}$

1) لنبين أن $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow ab \wedge (a+b) = 1$

إذا كان $ab \wedge (a+b) = 1$ فإنه لدينا، حسب مبرهنة $BEZOUT$

$$(\exists u, v \in \mathbb{Z}) / abu + (a+b)v = 1$$

أي $(\exists u, v \in \mathbb{Z}) / (bu+v)a + bv = 1$

ومنه: $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{Z}) / \alpha a + \beta b = 1$ ، مع $\alpha = bu + v$ و $\beta = v$

إذن $a \wedge b = 1$ ، حسب مبرهنة $BEZOUT$

نفترض أن $a \wedge b = 1$ ، لنبين أن: $ab \wedge (a+b) = 1$

نضع $d = ab \wedge (a+b)$ ، $(d \in IN^*)$

لدينا: $\begin{cases} d / a+b \\ d / ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d / (a+b)a - ab \\ d / (a+b)b - ab \end{cases}$

$$\Rightarrow d/a^2 \text{ و } d/b^2$$

$$\Rightarrow d/a^2 \wedge b^2$$

وبما أن: $a \wedge b = 1$ فإن: $a^2 \wedge b^2 = 1$

إذن: $d/1$ و $d \in IN^*$ ومنه: $d=1$

وبالتالي فإن: $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow ab \wedge (a+b) = 1$

2) لنحل في IN^2 النظمة $\begin{cases} a+b = 96 \\ a \vee b = 180 \end{cases}$

ليكن a و b عنصرين من IN^2 نضع: $d = a \wedge b$; $d \in IN^*$

لدينا: $b = db'$ و $(\exists a', b' \in IN^*) / \begin{cases} a = da' \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases}$

ومنه فإن: $a \vee b = 180 \Leftrightarrow d(a' \vee b') = 180$

$$\Leftrightarrow da'b' = 180$$

و $a + b = 96 \Leftrightarrow d(a' + b') = 96$

ولدينا: $(a+b) \wedge (a \vee b) = d(a'b' \wedge (a'+b'))$

$$= d$$

لأن: $a' \wedge b' = 1 \Leftrightarrow a'b' \wedge (a'+b') = 1$

ومنه: $d = 180 \wedge 96$

ولدينا: $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ و $96 = 2^5 \times 3$ إذن: $d=12$

وبالتالي: $a'b' = 15$ و $a'+b' = 8$

ومنه تصبح النظمة المقترحة : $\begin{cases} a' + b' = 8 \\ a'b' = 15 \end{cases}$ مع $b = 2b'$ و $a=2a'$ و $a' \wedge b' = 1$

و $b=12b'$ $\{12 = a'$ و $\{a' \wedge b' = 1$

وبعد حل النظمة $\begin{cases} a' + b' = 8 \\ a'b' = 15 \end{cases}$ $(X^2 - 8X + 15 = 0)$

نجد : $(a', b') \in \{(3,5), (5,3)\}$ ومنه $(a, b) \in \{(36,60), (60,36)\}$

التمرين 65

1) ليكن n عنصرا من IN و $n \geq 2$

حدد قيمة القاسم المشترك الأكبر للعددين $(n-1)(n+2)$ و $n(n+1)$

2) لكل n عنصرا من IN و $n \geq 2$ نضع :

$$a = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{و} \quad b = \frac{(n-1)(n+2)}{2} \quad \text{و} \quad c = \frac{(n-2)(n+3)}{2}$$

أ) بين أن a وb تنتمي إلى IN ثم حدد $a \wedge b$

ب) تحقق من أن $c=b-2$

ج) حدد، حسب باقي القسمة الاقليدية للعدد n على 4، قيمة القاسم المشترك الأكبر للعددين b وc.

الحل

1) ليكن n من IN و $n \geq 2$ ، نضع $d = (n-1)(n+2) \wedge n(n+1)$

لنحدد قيمة d.

لدينا $(n-1)(n+2)=n(n+1)-2$

ومنه: $-(n-1)(n+2)+n(n+1)=2$

بما أن $d|n(n+1)$ و $d|(n-1)(n+2)$ فإن $d|2$ (1)

لدينا $n(n+1)$ عدد زوجي، وبما أن $(n-1)(n+2)=n(n+1)-2$

فإن $(n-1)(n+2)$ عدد زوجي كذلك وبالتالي فإن $2|d$ (2)

من (1) و(2) نستنتج أن $d=2$ (لأن $d \in IN^*$)

أي $n(n+1) \wedge (n-1)(n+2) = 2$

2) أ-

• a وb ينتميان إلى IN^*

لدينا $2|n(n+1)$ و $2|(n-1)(n+2)$ ومنه $\frac{n(n+1)}{2}$ و $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ ينتميان إلى IN^*

• تحديد $a \wedge b$:

لدينا : $n(n+1) \wedge (n-1)(n+2) = 2$

ومنه : $\frac{n(n+1)}{2} \wedge \frac{(n-1)(n+2)}{2} = 1$ أي $a \wedge b = 1$

ب) لنتحقق من : $c=b-2$

لدينا : $c = \frac{n^2+n-6}{2}$ و $b = \frac{n^2+n-2}{2}$

ومنه : $c = \frac{n^2+n-2-4}{2} = \frac{n^2+n-2}{2} - 2 = b - 2$

ج) نضع $\delta = b \wedge c$ ، لنحدد قيمة δ تبعا لقيم n

لدينا δ / b و δ / c ومنه $\delta / b - c$ وبما أن $b-c=2$ فإن $\delta / 2$

إذن $\delta = 1$ أو $\delta = 2$ (لأن $\delta \in IN^*$ و2 عدد أولي).

ولدينا $2/b \Leftrightarrow 2/b-2$

$\Leftrightarrow 2/c$

ومنه نستنتج أن:

- إذا كان $2|b$ فإن $\delta = 2$ (b عدد زوجي)
- إذا كان 2 لا يقسم b فإن $\delta = 1$ (b عدد فردي)

ليكن n عنصرا من IN و $n \geq 2$

- إذا كان $n \equiv 0[4]$ أي $n=4q$ مع $q \in IN^*$

فإن:

$$b = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$$

$$= \frac{(4q-1)(4q+2)}{2} = (4q-1)(2q+1)$$

ومنه فإن b عدد فردي وبالتالي فإن: $\delta = 1$

إذا كان $n \equiv 1[4]$ أي $n=4q+1$ مع $q \in IN^*$

فإن: $b = \frac{4q(4q+3)}{2} = 2q(4q+3)$

ومنه b عدد زوجي وبالتالي $\delta = 2$

- **إذا كان $n \equiv 2[4]$ أي $n=2+4q$ مع $q \in IN$**

فإن $b = \frac{(4q+1)(4q+4)}{2} = 2(q+1)(4q+1)$

ومنه b عدد زوجي وبالتالي $\delta = 2$

إذا كان $n \equiv 3[4]$ أي $n=3+4q$ مع $q \in IN$

فإن: $b = \frac{(4q+2)(4q+5)}{2} = (2q+1)(4q+5)$

ومنه b عدد فردي وبالتالي $\delta = 1$

خلاصة :

- إذا كان $n \equiv 0[4]$ أو $n \equiv 3[4]$ فإن $b \wedge c = 1$
- إذا كان $n \equiv 1[4]$ أو $n \equiv 2[4]$ فإن $b \wedge c = 2$

التمرين 66

1) حدد $168 \wedge 20$

2) هل المعادلات التالية تقبل حلولا في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$(1) \quad : \quad 168x+20y=6$$

$$(2) \quad : \quad 168x+20y=4$$

$$(3) \quad : \quad 42x+5y=2$$

3) أ- حدد زوج (m,p) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $42m+5p=1$

ب- استنتج حلا (u_0,v_0) للمعادلة : $42x+5y=2$ ؛ $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$

ج- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $42x+5y=2$

د- استنتج حلول المعادلة : $(42x+5y-3)(42x+5y-3)=-5$; $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$

الحل

1) تحديد $168 \wedge 20$

لدينا: $168 = 2^3 \times 3 \times 7$ و $20 = 2^2 \times 5$

ومنه: $168 \wedge 20 = 2^2 = 4$

2) • من أجل المعادلة : $(1) \ : \ 168x+20y=6$

لدينا $168 \wedge 20 = 4$ ومنه المعادلة (1) تقبل حلولا في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ إذا وفقط إذا كان $4/6$ وهذا غير صحيح

وبالتالي فإن المعادلة (1) لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

• من أجل المعادلة : $(2) \ : \ 168x+20y=4$

لدينا $168 \wedge 20 = 4$ و $4/4$ إذن المعادلة (2) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

• من أجل المعادلة (3) : $42x+5y=2$

بما أن $42 \wedge 5 = 1$ ، فإنه حسب مبرهنة $BEZOUT$:

أي

$$(\exists (x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2) \ / \ 42x_0 + 5y_0 = 1$$

$$(\exists (x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2) \ / \ 42(2x_0) + 5(2y_0) = 2$$

ومنه المعادلة (3) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$

3) أ- تحديد زوج (m,p) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $42m+5p=1$

لدينا : $\begin{cases} 42 = 5 \times 8 + 2 \\ 5 = 2 \times 2 + 1 \end{cases}$

ومنه : $1 = 5 - 2 \times 2$
$= 5 - 2 \times (42 - 5 \times 8)$
$= 42(-2) + 5 \times 17$

يعني أن الزوج $(-2,17)$ يحقق $42m+5p=1$ إذن : $(m,p)= (-2,17)$

ب) الاستنتاج:

لدينا $1 = 17 \times 5 + (2-)42$ ومنه: $2 = 34 \times 5 + (4-)42$

إذن الزوج $(-4,34)$ حل للمعادلة $42x+5y=2$

أي إن: $(u_0,v_0) =(-4,34)$

ج) لنحل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $42x+5y=2$

ليكن (x,y) عنصرا من $\mathbb{Z}^2$، لدينا : $42x + 5y = 2 \iff 42x + 5y = 42(-4) + 5 \times 34$
$\iff 42(x + 4) = 5(34 - y)$

إذن : $5|42(x + 4)$ و $5 \wedge 42 = 1$ ومنه، حسب مبرهنة $GAUSS$: $5|x + 4$

يعني أن: $(\exists k \in \mathbb{Z})|x = -4 + 5k$ ومنه: $y = 34 - 42k$; $k \in \mathbb{Z}$

عكسيا:

نتحقق من أن الزوج $(-4 + 5k, 34 - 42k)$; $k \in \mathbb{Z}$ يحقق المعادلة $42x+5y=2$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة $42x+5y=2$ هي: $S = \{(-4 + 5k, 34 - 42k)/k \in \mathbb{Z}\}$

د) الاستنتاج:

ليكن (x,y) عنصرا من $\mathbb{Z}^2$، بحيث: $(E)\ :\ (42x+5y-3)(42x+5y+3)=-5$

لدينا : $42x+5y-3<42x+5y+3$

ومنه فإن (E) تكافئ : $\begin{cases} 42x + 5y - 3 = -5 \\ 42x + 5y + 3 = 1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} 42x + 5y - 3 = -1 \\ 42x + 5y + 3 = 5 \end{cases}$

يعني $\begin{cases} 42x + 5y = -2 \\ 42x + 5y = -2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} 42x + 5y = 2 \\ 42x + 5y = 2 \end{cases}$

يعني : $42(-x)+5(-y)=2$ أو $42x+5y=2$

أي $\begin{cases} x = 4 - 5k \\ y = -34 + 42k \end{cases} /k \in ZI$ أو $\begin{cases} x = -4 + 5k \\ y = 34 - 42k \end{cases} /k \in ZI$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S = \{(-4 + 5k, 34 - 42k)/k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(4 - 5k, -34 + 42k)/k \in \mathbb{Z}\}$

التمرين 67

1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $5x-2y=1$

2) حل في $\mathbb{Z}$ $\begin{cases} x \equiv 1[15] \\ x \equiv 4[6] \end{cases}$

الحل

1) لنحل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $5x-2y=1$ (1)

نلاحظ أن الزوج $(1,2)$ حل خاص للمعادلة (1)

ليكن (x,y) عنصرا من $\mathbb{Z}^2$ لدينا: $5x - 2y = 1 \Leftrightarrow 5x - 2y = 5 \times 1 - 2 \times 2$

$$\Leftrightarrow 5(x-1) = 2(y-2)$$

ومنه فإن $2|5(x-1)$ ولدينا $2 \wedge 5 = 1$ إذن حسب مبرهنة $GAUSS$: $2|x-1$

أي $k \in \mathbb{Z} ; x = 2k+1$ ونستنتج أن $k \in \mathbb{Z} ; y = 5k+2$

ونتحقق من أن الزوج $(2k+1,5k+2)$ حل للمعادلة (1) وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (1) هي:

$$S = \{(2k+1, 5k+2)/k \in \mathbb{Z}\}$$

2) لنحل في $\mathbb{Z}$: $\begin{cases} x \equiv 1[15] \\ x \equiv 4[6] \end{cases}$

ليكن x عنصرا من $\mathbb{Z}$ لدينا:

$$\begin{cases} x \equiv 1[15] \\ x \equiv 4[6] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\exists k \in \mathbb{Z})|x = 1 + 15k \\ (\exists k' \in \mathbb{Z})|x = 4 + 6k' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\exists k \in \mathbb{Z})|x = 1 + 15k \\ (\exists k' \in \mathbb{Z})|1 + 15k = 4 + 6k' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 15k \\ 5k - 2k' = 1 \end{cases} |k, k \in \mathbb{Z}$$

وباستعمال نتيجة السؤال $1°$. من أجل المعادلة $5k-2k'=1$

يكون لدينا $k=1+2p$ و $k'=2+5p$ حيث $p \in \mathbb{Z}$

ومنه $x=16+30p$ ، حيث $p \in \mathbb{Z}$

عكسيا: إذا كان $x=16+30p$ مع $p \in \mathbb{Z}$:

لدينا $30p \equiv 0[15]$ و $30p \equiv 0[6]$ و $16 \equiv 1[15]$ و $16 \equiv 4[6]$ ومنه فإن $x \equiv 1[15]$ و $x \equiv 4[6]$

وبالتالي مجموعة حلول النظمة المقترحة هي: $S = \{16 + 30p/p \in \mathbb{Z}\}$

التمرين 68

1) حل المعادلة (1) : $7u+4v=1$ ، $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$

2) ليكن (u_0,v_0) حلا للمعادلة (1) ونضع $x_0=7u_0+20v_0$

بين أن x_0 يحقق النظمة التالية : $(S)\begin{cases}x\equiv 5[7]\\ x\equiv 1[4]\end{cases}$ حيث $x\in\mathbb{Z}$

3) حل في $\mathbb{Z}$ النظمة : $\begin{cases}x\equiv 0[7]\\ x\equiv 0[4]\end{cases}$

4) استنتج حلول النظمة (S).

الحل

1) لنحل في $\mathbb{Z}^2$، المعادلة : (1) : $7u+4v=1$

نلاحظ أن الزوج $(3;-5)$ حل للمعادلة (1)

لدينا : $\begin{cases}7u+4v=1\\ 7\times 3+4\times(-5)=1\end{cases}\Rightarrow 7(u-3)+4(v+5)=0$

$\Rightarrow 7(u-3)=4(-v-5)\,(*)$

لدينا : $7|4(-v-5)$ و $7\wedge 4=1$ إذن حسب مبرهنة $GAUSS$، لدينا :

$7|-v-5$ يعني أن : $(\exists k\in\mathbb{Z})|-v-5=7k$

إذن : $v=-5-7k\,/\,k\in\mathbb{Z}$

ومن جهة أخرى، لدينا : $7(u-3)=4(-v-5)$ و $-v-5=7k$

إذن $u=3+4k\,/k\in\mathbb{Z}$

عكسيا، لدينا : $7u+4v=7(3+4k)+(-5-7k)=1$

إذن : $\{(3+4k;-5-7k)\,/\,k\in\mathbb{Z}\}$ هي مجموعة حلول المعادلة (1).

2- لنبين أن x_0 يحقق النظمة التالية : (S): $\begin{cases}x\equiv 5[7]\\ x\equiv 1[4]\end{cases}$

لدينا $(u_0;v_0)$ حل للمعادلة (1) إذن : $7u_0+4v_0=1$

ومنه : $x_0-5=7u_0+20v_0-5(7u_0+4v_0)$

$=-28u_0=7(-4u_0)$

إذن : $7|x_0-5$ وبالتالي : $x_0\equiv 5[7]$

ولدينا : $x_0-1=7u_0+20v_0-7u_0-4v_0=16v_0=4(4v_0)$

إذن $4|x_0-1$ وبالتالي : $x_0\equiv 1[4]$ ،

إذن x_0 يحقق النظمة : $\begin{cases} x \equiv 5[7] \\ x \equiv 1[4] \end{cases}$

3- لنحل في $\mathbb{Z}$ النظمة : $(S_1): \begin{cases} x \equiv 0[7] \\ x \equiv 0[4] \end{cases}$

لتكن (S') مجموعة حلول النظمة (S_1) في $\mathbb{Z}$:

لدينا:
$$x \in (S') \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 0[7] \\ x \equiv 0[4] \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 7|x \\ 4|x \end{cases}$$

وبما أن $4 \wedge 7 = 1$ فإن:
$$x \in (S') \Rightarrow 28|x$$
$$\Rightarrow x \equiv 0[28]$$

عكسيا، ليكن x من $\mathbb{Z}$ بحيث $x \equiv 0[28]$.

لدينا: $28|x$ وبما أن $4|28$ و $7|28$

فإن: $4|x$ و $7|x$ يعني أن: $x \equiv 0[4]$ و $x \equiv 0[7]$

إذن: $x \in (S') \iff x \equiv 0[28]$

ومنه $\{28k \,/k \in \mathbb{Z}\}$ هي مجموعة حلول النظمة المقترحة.

4- لنستنتج حلول النظمة (S).

ليكن x من $\mathbb{Z}$، لدينا :
$$\begin{cases} x \equiv 5[7] \\ x \equiv 1[4] \end{cases} \iff \begin{cases} x + 23 \equiv 0[7] \\ x + 23 \equiv 0[4] \end{cases}$$
$$\iff x + 23 \equiv 0[28] \quad \text{(حسب السؤال 3)}$$
$$\iff x \equiv 5[28]$$

إذن $\{5 + 28k \,/ \,k \in \mathbb{Z}\}$ هي مجموعة حلول النظمة (S).

التمرين 69

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة التالية : $(E): 324x-245y=7$

1) بين أنه إذا كان (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 7.

2) حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

3) ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E)، نضع $d = x \wedge y$

أ- حدد القيم الممكنة للعدد d.

ب- حدد الأزواج (x,y) حلول للمعادلة (E) بحيث يكون: $x \wedge y = 1$

الحل

1) ليكن (x,y) عنصرا من $\mathbb{Z}^2$ بحيث: $324x-245y=7$

لنبين أن x مضاعف للعدد 7.

لدينا: $324x - 245y = 7 \iff 324x = 7(1+35y)$

إذن 7 يقسم $324x$

وبما أن 7 لايقسم 324 و7 عدد أولي فإن $7 \wedge 324 = 1$

ومنه فإن: $7|324x$ و$7 \wedge 324 = 1$، إذن حسب مبرهنة $GAUSS$ لدينا $7 \times$ يعني أن x مضاعف للعدد 7.

2) لنحل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

• تحديد حل خاص للمعادلة (E) .

لدينا:
$$324 = 245 \times 1 + 79$$
$$245 = 79 \times 3 + 8$$
$$79 = 8 \times 9 + 7$$

إذن:
$$\begin{aligned} 7 &= 79 - 8 \times 9 \\ &= 79 - 9 \times (245 - 79 \times 3) \\ &= 28 \times (324 - 245 \times 1) - 9 \times 245 \\ &= 28 \times 324 - 37 \times 245 \end{aligned}$$

ومنه الزوج $(28,37)$ حل خاص للمعادلة (E):

ليكن (x,y) عنصرا من $\mathbb{Z}^2$ لدينا :

$$\begin{aligned} 324x - 245y = 7 &\iff 324x - 245y = 324 \times 28 - 245 \times 37 \\ &\iff 324(x-28) = 245(y-37) \end{aligned}$$

إذن 245 يقسم $324(x-28)$

وبما أن $324 \wedge 245 = 1$ فإنه حسب مبرهنة $GAUSS$:

245 يقسم $x-28$ ، ومنه $x = 245k + 28 / (k \in \mathbb{Z})$

وبالتالي $y=324k+37$

عكسيا: نتحقق من أن الزوج $(28+245k,37+324k)$ حل للمعادلة (E)

إذن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S = \{(28 + 245k\,; 37 + 324k) / k \in \mathbb{Z}\}$

3) أ- تحديد قيم d

ليكن (x,y) عنصرا من $\mathbb{Z}$ بحيث $324x-245y=7$

لدينا d يقسم x وy، ومنه d يقسم $324x-245y$ إذن d يقسم 7

وبما أن 7 عددٌ أولي وd من IN^* فإن $d=1$ أو$d=7$

ب) تحديد الأزواج (x,y) من S بحيث $x \wedge y = 1$

ليكن (x,y) عنصرا من S، لدينا 7 يقسم x حسب السؤال 1.

إذا كان $x \wedge y = 1$ فإن 7 لايقسم y

إذا كان 7 لايقسم y فإن $x \wedge y \neq 7$ أي $x \wedge y = 1$

إذن: $x \wedge y = 1$ إذا وفقط إذا كان 7 لا يقسم y

لكن: $y=37+324k$ حيث $k \in Z$

لدينا $y=7(46k+5)+2k+2$

ومنه:

$$y \equiv 0[7] \iff 2(k+1) \equiv 0[7]$$
$$\iff k+1 \equiv 0[7] \ (2 \wedge 7 = 1 \text{ لأن})$$
$$\iff k \equiv -1[7]$$

إذن:

$$x \wedge y = 1 \iff y \not\equiv 0[7]$$
$$\iff k \not\equiv -1[7]$$

وبالتالي الأزواج المطلوبة هي على الشكل: $(28+245k,37+324k)$ مع $k \in \mathbb{Z}$ و $k \not\equiv -1[7]$

التمرين ٦٥

1) ليكن a وb عنصرين من $\mathbb{Z}^*$

نضع $A=2a+3b$ و $B=9a+5b$

أ) بين أن $17|A \iff 17|B$

ب) بين أنه إذا كان $a \wedge b = 1$ فإن $A \wedge B = 1$ أو $A \wedge B = 17$

2) حل في المجموعة $(\mathbb{Z}^*)^2$ النظمة التالية: $(E)\{(2x+3y)(9x+5y) = 1156$

الحل

1) أ) لنبين أن: $17|A \iff 17|B$

الطريقة (1)

لدينا:

$$17|A \iff 2a+3b \equiv 0[17]$$
$$\iff 3b \equiv -2a[17]$$
$$\iff 3b \equiv 15a[17]$$
$$\iff b \equiv 5a[17] \quad (3 \wedge 17 = 1)$$

ولدينا:

$$17|B \iff 9a+5b \equiv 0[17]$$
$$\iff 5b \equiv -9a[17]$$
$$\iff 5b \equiv 25a[17]$$
$$\iff b \equiv 5a[17](5 \wedge 17 = 1)$$

ومنه فإنه لدينا: $17|B \Longleftrightarrow 17|b-5a \Longleftrightarrow 17|A$

وبالتالي فإن: $17|B \Longleftrightarrow 17|A$

الطريقة (2)

لدينا: $B+4A=9a+5b+8a+12b=17a+17b=17(a+b)$

يعني أن: $17|B+4A$

• إذا كان $17|A$ فإن $17|4A$

ومنه فإنه لدينا

$$\begin{cases} 17|4A \\ 17|B+4A \end{cases} \Rightarrow 17|B$$

إذن $17|A \Rightarrow 17|B$

• إذا كان $17|B$ فإنه لدينا:

$$\begin{cases} 17|B \\ 17|B+4A \end{cases} \Rightarrow 17|4A$$

ومنه فإن $17|4A$ و $4 \wedge 17 = 1$، وحسب مبرهنة $GAUSS$،

لدينا $17|A$

إذن $17|B \Rightarrow 17|A$

وبالتالي فإن $17|B \Longleftrightarrow 17|A$

ب- نفترض أن $a \wedge b = 1$

لنبين أن $A \wedge B = 1$ أو $A \wedge B = 17$

نضع $d = A \wedge B$ حيث $d \in IN^*$

لدينا:

$$\begin{cases} d|A \\ d|B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|2a+3b \\ d|9a+5b \end{cases}$$

$$\begin{cases} d|10a+15b \\ d|27a+15b \end{cases} \text{ و } \Rightarrow \begin{cases} d|18a+27b \\ d|18a+10b \end{cases}$$

$$d|17a \text{ و } \Rightarrow d|17b$$

ومنه فإن $d|17a \wedge 17b$

ولدينا $17a \wedge 17b = 17(a \wedge b) = 17$ لأن $a \wedge b = 1$

إذن $d|17$ ولدينا 17 عدد أولي و $d \in IN^*$

ومنه فإن $d=1$ أو $d=17$

وبالتالي فإن $a \wedge b = 1 \Rightarrow (A \wedge B = 1$ أو $A \wedge B = 17)$

2) لنحل في $(\mathbb{Z}^*)^2$ النظمة (E)

ليكن (x,y) عنصرا من $(\mathbb{Z}^*)^2$ ويحقق النظمة (E)

لدينا: $a \wedge b = 1$ و $y=2b$ و $x = 2a$ / $(\exists a, b \in \mathbb{Z}^*)$ $\Longleftrightarrow$ $x \wedge y = 2$

ولدينا: $(2x + 3y)(9x + 5y) = 1156 \Longleftrightarrow (2a + 3b)(9a + 5b) = 289$

إذن النظمة (E) تصبح: $\{(2a + 3b)(9a + 5b) = 17^2$

$\{a \wedge b = 1$ و $x=2a$ و $y=2b$

وحسب السؤال 1 ب) يكون لدينا

$\begin{cases}(2a + 3b)(9a + 5b) = 17^2 \\ (2a + 3b) \wedge (9a + 5b) = 1\end{cases}$ أو $\begin{cases}(2a + 3b)(9a + 5b) = 17^2 \\ (2a + 3b) \wedge (9a + 5b) = 17\end{cases}$

$\{x = 2a$ و $y=2b$ $\qquad$ $\{x = 2a$ و $y=2b$

وتبعا للسؤال 1 أ) يكون لدينا :

$\begin{cases}2a + 3b = 17 \\ 9a + 5b = 17\end{cases}$ أو $\begin{cases}2a + 3b = -17 \\ 9a + 5b = -17\end{cases}$

$\{x = 2a$ و $y=2b$ $\qquad$ $\{x = 2a$ و $y=2b$

وبعد حل النظمتين (لاحظ أنه يكفي حل واحدة واستنتاج الحلول الأخرى)

نجد $(a,b)=(-2,7)$; $(a,b)=(2,-7)$

وبالتالي فإن مجموعة حلول النظمة (E) هي: $S = \{(4, -14), (-4, 14)\}$

التمرين ٦١

نعتبر في المجموعة IR المعادلة: $(E) : x^3+x^2+1=0$

1) ليكن p وq عنصرين من $\mathbb{Z}^*$

بين أن: $p \wedge q = 1 \Longleftrightarrow p \wedge q^3 = 1$

2) ليكن x حلا للمعادلة (E).

نفترض أن: $x = \frac{p}{q}$ حيث: p وq عنصران من $\mathbb{Z}^*$ و $p \wedge q = 1$

أ- بين أن p يقسم q^3

ب- استنتج أن $p=1$ أو $p=-1$، وأن q و$-q$ حلان للمعادلة (E') مع $(E'):1 + x + x^3 = 0$

ج- بين أن: $(\forall n \in \mathbb{Z}) ; n^3 + n + 1 \equiv 1[2]$. ماذا نستنتج؟

الحل

1) لنبين أن $p \wedge q = 1 \Longleftrightarrow p \wedge q^3 = 1$

• إذا كان $p \wedge q^3 = 1$ فإنه لدينا، حسب مبرهنة $BEZOUT$

$(\exists u, v \in \mathbb{Z}) / up + vq^3 = 1$

ومنه: $(\exists\alpha,\beta \in \mathbb{Z})/\alpha p + \beta q = 1$

مع $\alpha = u$ و $\beta = vq^2$

إذن $p \wedge q = 1$ ، حسب مبرهنة $BEZOUT$

• إذا كان $p \wedge q = 1$

طريقة (1): باستعمال الخاصية: $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Rightarrow a \wedge bc = 1$

لدينا $p \wedge q^2 = 1$ ومنه فإن $p \wedge q^3 = 1$

طريقة (2) نضع $d = p \wedge q^3$; $d \in IN^*$

لدينا: $\begin{cases} d|p \\ d|q^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|p^3 \\ d|q^3 \end{cases}$

$\Rightarrow d|p^3 \wedge q^3$

وبما أن $p \wedge q = 1$ فإن $p^3 \wedge q^3 = 1$

ومنه فإن $d|1$ إذن $d=1$ لأن $d \in IN^*$

طريقة (3): نضع $d = p \wedge q^3$ $d \in IN^*$

نفترض أن $d \neq 1$، ومنه فإنه يوجد r عدد أولي موجب بحيث $r|d$

وبما أن $d|p$ و $d|q^3$ فإن $r|p$ و $r|q^3$

لدينا r عدد أولي و $r|q^3$ إذن $r|q$ ومنه فإن $r|p \wedge q$

وبما أن $p \wedge q = 1$ فإن $r|1$ أي $r=1$ وهذا مستحيل لأن العدد 1 ليس أولياً وبالتالي فإن $d=1$

طريقة (4)

لدينا $(\exists u, v \in Z)/up + vq = 1$

ومنه فإن $(up+vq)^3=1$

يعني أن $u^3p^3+v^3q^3+3uvpq(up+vq)=1$

يعني أن $p(u^3p^2+3uvq(up+vq))+v^3q^3=1$

ومنه فإن $(\exists\alpha,\beta \in Z)/\alpha p + \beta q^3 = 1$

يعني أن $p \wedge q^3 = 1$

2) أ- لنبين أن p يقسم q^3

لدينا $x = \dfrac{p}{q}$ حل للمعادلة (E) يعني أن: $\dfrac{p^3}{q^3} + \dfrac{p^2}{q^2} + 1 = 0$ ومنه فإن $p^3 + qp^2 + q^3 = 0$:(1)

إذن $q^3 = p(-p^2 - qp)$ وبالتالي فإن p يقسم q^3.

ب- الاستنتاج:

• بما أن $p|q^3$ فإن $p \wedge q^3 = |p|$

ولدينا $p \wedge q = 1$ إذن $p \wedge q^3 = 1$

ومنه فإن $|p| = 1$ يعني أن $p=1$ أو $p=-1$

• إذا كان $p=1$ فإن المتساوية (1) تكتب $1+q+q^3=0$

وهذا يعني أن q حل للمعادلة (E').

إذا كان $p=-1$ فإن المتساوية (1) تكتب $-1+q+q^3=0$

يعني أن $1+(-q)+(-q)^3=0$

ومنه فإن $-q$ حل للمعادلة (E').

وبالتالي فإن q و$-q$ حلّان للمعادلة (E').

ج- • لنبين أن: $(\forall n \in IN) \quad n^3 + n + 1 \equiv 1[2]$

ليكن n عنصرا من $\mathbb{Z}$

لدينا $n \equiv 0[2]$ أو $n \equiv 1[2]$

ولدينا: $n^3+n=n(n^2+1)$

إذا كان $n \equiv 0[2]$ فإن $n(n^2+1) \equiv 0[2]$ ومنه فإن $n^3 + n + 1 \equiv 1[2]$

إذا كان $n \equiv 1[2]$ فإن $n^2 + 1 \equiv 0[2]$ ومنه فإن $n(n^2+1) \equiv 0[2]$ إذن $n^3 + n + 1 \equiv 1[2]$

وبالتالي: $(\forall n \in \mathbb{Z}); n^3 + n + 1 \equiv 1[2]$

• الاستنتاج

لدينا $(\forall n \in \mathbb{Z}); n^3 + n + 1 \equiv 1[2]$

ومنه فإن المعادلة (E') لا تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}$، وهذا يناقض مع كون q و$-q$ من $\mathbb{Z}^*$ حلان للمعادلة (E')

وبالتالي فإن الافتراض: $x = \frac{p}{q}$ حل للمعادلة (E) مع $p \wedge q = 1$

وp وq من $\mathbb{Z}^*$ غير صحيح، وبالتالي فإن المعادلة (E) لا تقبل حلولا من هذا النوع.

التمرين 62

1) أ- ليكن x عنصرا من $\mathbb{Z}$ حدد باقي القسمة الإقليدية للعدد x^2 على 5.

ب- بين أن $(\forall m,n \in \mathbb{Z}^2); (2m^2 + n^2 \equiv 0[5] \Rightarrow m \equiv 0[5]$ و $n \equiv 0[5])$

ج- ليكن m و n عنصرين من $\mathbb{Z}$ بحيث: $m \wedge n = 1$

بين أن $5 \wedge (2m^2 + n^2) = 1$

2) نعتبر في المجموعة IR المعادلة $(E): \ 2x^3+x-5=0$

أ- بين أن المعادلة (E) تقبل حلا حقيقيا وحيدا α وأن $1 < \alpha < 2$

ب- نفترض أن $\alpha = \frac{m}{n}$ حيث: m وn عددان صحيحان طبيعيان غير منعدمين و $m \wedge n = 1$

i- تحقق من أن: $(2m^2+n^2)m=5n^3$ ثم بين أن $m=5$

ii- استنتج أن العدد α ليس جذريا.

الحل

1° أ) لنحدد باقي القسمة الإقليدية للعدد x^2 على 5.

ليكن r باقي القسمة الإقليدية للعدد x على 5.

بما أن $x \equiv r[5]$ و $r \in \{0,1,2,3,4\}$

فإن $x^2 \equiv r^2[5]$ و $r^2 \in \{0,1,4,9,16\}$

ولدينا $9 \equiv 4[5]$ و $16 \equiv 1[5]$

إذن باقي القسمة الإقليدية للعدد x^2 على 5 يكون 0 أو 1 أو 4

ب) ليكن m وn من $\mathbb{Z}$، لنبين أن $2m^2 + n^2 \equiv 0[5] \Rightarrow m \equiv 0[5]$ و $n \equiv 0[5]$

لدينا $m^2 \equiv r[5]$ حيث $r \in \{0,1,4\}$ و $8 \equiv 3[5]$

إذن $2m^2 \equiv k[5]$ حيث $k \in \{0,2,3\}$

ولدينا $n^2 \equiv k'[5]$ حيث $k' \in \{0,1,4\}$

نضع الجدول التالي لتحديد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2m^2+n^2$ على 5:

$2m^2$ \ n^2	0	1	4
0	0	1	4
2	2	3	1
3	3	4	2

نلاحظ من خلال الجدول أن $2m^2 + n^2 \equiv 0[5]$ يكون في حالة واحدة وهي: $n^2 \equiv 0[5]$ و$2m^2 \equiv 0[5]$

إذن : $n^2 \equiv 0[5]$ يكافئ $n \equiv 0[5]$ (لأن 5 أولي)

ولدينا $2m^2 \equiv 0[5]$ يكافئ $m \equiv 0[5]$ (لأن 5 أولي و $2 \wedge 5 = 1$)

وبالتالي فإن $2m^2 + n^2 \equiv 0[5] \Rightarrow n \equiv 0[5]$ و $m \equiv 0[5]$

ج) ليكن m وn من $\mathbb{Z}^*$ حيث $m \wedge n = 1$

لنبين أن: $(2m^2 + n^2) \wedge 5 = 1$:

لدينا $m \wedge n = 1$ ومنه فإن 5 لا يقسم m وn في آن واحد يعني أن $m \not\equiv 0[5]$ أو $n \not\equiv 0[5]$

وحسب السؤال ب) فإن $2m^2 + n^2 \not\equiv 0[5]$ (الاستلزام المضاد بالعكس)

إذن 5 لا يقسم $2m^2+n^2$ و5 عدد أولي ومنه فإن: $(2m^2 + n^2) \wedge 5 = 1$

2° أ) لنبين أن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا α من IR وأن $1 < \alpha < 2$:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي $f(x)=2x^3+x-5$

لدينا $f'(x)=6x^2+1$ لكل x من IR

الدالة f متصلة وتزايدية قطعا على IR، إذن f تطبيق تقابلي من IR نحو $f(IR)$

و $f(IR) = IR$

وبما أن $0 \in IR$ فإنه يوجد عنصر α وحيد من IR بحيث $f(\alpha) = 0$

ولدينا $f(1)=-2$ و $f(2)=13$ أي $f(1)<0<f(2)$

وبالتالي فإن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا α و $1 < \alpha < 2$

ب) i) ، لنتحقق من أن $(2m^2+n^2)m=5n^3$

لدينا:
$$f(\alpha) = 0 \iff 2\alpha^3 + \alpha - 5 = 0$$
$$\iff 2\left(\frac{m}{n}\right)^3 + \frac{m}{n} = 5$$
$$\iff 2m^3 + mn^2 = 5n^3$$

إذن:
$$(2m^2+n^2)m=5n^3$$

، لنبين أن $m=5$

بما أن $(2m^2+n^2)m=5n^3$ فإن m يقسم $5n^3$

ولدينا $m \wedge n = 1$ ومنه فإن $m \wedge n^3 = 1$

وحسب مبرهنة $GAUSS$، m يقسم 5.

ولدينا كذلك 5 يقسم $(2m^2+n^2)m$ وبما أن $5 \wedge (2m^2 + n^2) = 1$

فإن 5 يقسم m، حسب مبرهنة $GAUSS$ إذن $m=5$

ii) الاستنتاج:

نفترض أن α عدد جذري حيث $\alpha = \dfrac{m}{n}$ و $m \wedge n = 1$ و $m,n \in IN^*$

حسب السؤال i) لدينا $m=5$ ومنه $\alpha = \dfrac{5}{n}$ و $n \in IN^*$ وبما أن $1 < \alpha < 2$

فإن $1 < \dfrac{5}{n} < 2$ يعني أن $\dfrac{5}{2} < n < 5$

إذن $n=3$ أو $n=4$ يعني أن $\alpha = \dfrac{5}{3}$ أو $\alpha = \dfrac{5}{4}$ ولدينا $f\left(\dfrac{5}{3}\right) \neq 0$ و $f\left(\dfrac{5}{4}\right) \neq 0$

يعني أن $\dfrac{5}{3}$ و $\dfrac{5}{4}$ ليست حلولا للمعادلة (E) . إذن α ليس عددا جذريا.

التمرين 63

1) حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $(E):\ 11x-24y=1$

2) نضع $d = (10^{11} - 1) \wedge (10^{24} - 1)$

أ- بين أن $9|10^{11} -1$ و $9|10^{24} -1$

ب- ليكن (n,m) عنصرا من IN^2 وحلا للمعادلة (E) . بين أن: $(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=9$

ج- استنتج أنه يوجد زوج (M,N) من IN^2 بحيث: $(10^{11}-1)N-(10^{24}-1)M=9$

ثم حدد قيمة d.

الحل

1) لنحل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $(E): 11x-24y=1$

لدينا $24 = 2\times 11 + 2$ و $11 = 2\times 5 + 1$

ومنه فإن: $1 = 11 - 5\times 2 = 11 - 5\times(24 - 2\times 11) = 11\times 11 - 5\times 24$

إذن الزوج $(11,5)$ حل خاص للمعادلة (E).

ليكن (x,y) عنصرا من $\mathbb{Z}^2$، لدينا: $11x - 24y = 1 \iff 11x - 24y = 11\times 11 - 5\times 24$

$\iff 11(x-11) = 24(y-5)$

إذن $24|11(x-11)$، وبما أن $24 \wedge 11 = 1$ فإنه حسب مبرهنة $GAUSS$: $24|x-11$

يعني أن $(\exists k \in \mathbb{Z})/x = 11 + 24k$ ومنه فإن $y=5+11k$

عكسيا: نتحقق من أن كل زوج $(11+24k,5+11k)$ حل للمعادلة (E)

وبالتالي فإن مجموعة حلول المعادلة (E) هي: $S = \{(11+24k, 5+11k)/k\in\mathbb{Z}\}$

2) أ) لنبين أن $9|10^{24}-1$ و $9|10^{11}-1$

لدينا $10\equiv 1[9]$ ومنه فإن $10^{24}\equiv 1[9]$ و $10^{11}\equiv 1[9]$

يعني أن $10^{24}-1\equiv 0[9]$ و $10^{11}-1\equiv 0[9]$

إذن: $9|10^{24}-1$ و $9|10^{11}-1$

ب) لنبين أن: $(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=9$

حيث الزوج (n,m) حل للمعادلة (E).

لدينا: $(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=10^{11n}-1-10^{24m}+10$

$=10^{11n}-10^{24m}+1+9$

وبما أن $11n-24m=1$ فإن $11n=24m+1$

ومنه فإن $10^{11n}=10^{24m+1}$ أي $10^{11n}-10^{24m+1}=0$

إذن $(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1=9$

ج) • الاستنتاج:

لدينا $10^{24}-1\equiv 0[10^{24}-1]$ يعني $10^{24}\equiv 1[10^{24}-1]$

ومنه فإن $10^{24m}\equiv 1[10^{24}-1]$ أي $10^{24m}-1\equiv 0[10^{24}-1]$

إذن $10^{24}-1|10^{24m}-1$

وبالمثل نحصل على: $10^{11}-1|10^{11n}-1$

ويمكن كذلك التوصل لهذه النتيجة كالتالي:

$$10^{11n}-1 = (10^{11})^n - 1$$
$$= (10^{11}-1)(1+(10^{11})+(10^{11})^2+\dots+(10^{11})^{n-1})$$
$$= (10^{11}-1)\sum_{k=0}^{n-1}10^{11k}$$

إذن $10^{11}-1|10^{11n}-1$ و $10^{24}-1|10^{24m}-1$

ومنه فإن : $(\exists(p,q)\in IN^2)/\begin{cases}10^{11n}-1=p(10^{11}-1)\\10^{24m}-1=q(10^{24}-1)\end{cases}$

ولدينا $9=(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)$

إذن $p(10^{11}-1)-10q(10^{24}-1)=9$

بأخذ $N=p$ و $M=10q$

وبالتالي فإن : $(\exists(M,N)\in IN^2)|(10^{11}-1)N-(10^{24}-1)M=9$

• تحديد قيمة d

لدينا $d=(10^{11}-1)\wedge(10^{24}-1)$

ومنه فإن $d|(10^{11}-1)$ و $d|10^{24}-1$

إذن : $d|(10^{11}-1)N-(10^{24}-1)M$ يعني $d|9$

ولدينا حسب السؤال $2°$ أ) $9|10^{11}-1$ و $9|10^{24}-1$

ومنه فإن $9|(10^{11}-1)\wedge(10^{24}-1)$ أي $9|d$

وبالتالي فإن $d=9$

التمرين 64

لكل عنصر n من IN^* نضع : $a=15n+187$ و $b=20n+357$

1) حدد تفكيك الأعداد 323 و 357 و 187 إلى جداء من عوامل أولية

2) نضع: $d=a\wedge b$

أ- بين أن d يقسم 323

ب- بين أن $17|d \iff 17|n$

وأن $19|d \iff 19|n-4$

الحل

1) تفكيك 323 و 357 و187 إلى جداء من عوامل أولية

لدينا: $323=17\times19$ و$357=3\times7\times17$ و$187=17\times11$

2) أ) لنبين أن d يقسم 323.

لدينا: $3b-4a=60n+1071-60n-748=323$

(لاحظ أن $60=20\vee15$)

بما أن $d|a$ و$d|b$ فإن $d|3b-4a$

يعني أن $d|323$

ب) ◦ لنبين أن: $17|d \iff 17|n$

نفترض أن $17|n$ ولنبين أن $17|d$

لدينا $17|17$ و$17|n$ ومنه فإن $17|15n + 17 \times 11$ و $17|20n + 17 \times 21$

يعني أن $17|a$ و$17|b$ ومنه فإن $17|a \wedge b$ أي $17|d$

نفترض أن $17|d$، ولنبين أن $17|n$

لدينا $17|d$ و$d|a$ ومنه فإن $17|a$.

وبما أن $a = 15n + 17 \times 11$ أي $a - 17 \times 11 = 15n$

فإن $17|15n$ (لأن $17|a$ و $17|17 \times 11$)

ولدينا $17 \wedge 15 = 1$، إذن، حسب مبرهنة $GAUSS$ ، $17|n$

وبالتالي فإن: $17|d \iff 17|n$

◦ لنبين أن: $19|d \iff 19|n - 4$

لدينا: $b=20n+357$

$=19n+361+n-4=19(n+19)+n-4$

ولدينا $a=15n+187$

$=19n-4n+16+9x19$

$=19(n+9)-4(n-4)$

نفترض أن: $19|d$، ولنبين أن $19|n - 4$

لدينا $19|d$ و $d|b$ ومنه فإن $19|b$

وبما أن $b = 19(n + 19) + (n - 4)$ ، أي $n-4=b-19(n+19)$

فإن $19|n - 4$

نفترض أن: $19|n - 4$ ولنبين أن $19|d$:

لدينا $19|n - 4$ و $19|19(n + 19)$ ومنه $19|19(n + 19) + n - 4$

يعني أن $19|b$ ، ولدينا $19|n - 4$ و $19|19(n + 9)$ ومنه فإن $19|19(n + 9) - 4(n - 4)$

يعني أن $19|a$ إذن $19|a \wedge b$ أي $19|d$

وبالتالي فإن $19|n - 4 \iff 19|d$

◦ طريقة (2) $19|d \iff 19|n - 4$

لدينا : $19|n - 4 \iff (\exists k \in \mathbb{Z}) / n - 4 = 19k$

$\iff (\exists k \in \mathbb{Z}) / n = 19k + 4$

ومنه فإن:
$$a = 15n + 187$$
$$= 15(19k + 4) + 187$$
$$= 15 \times 19k + 247 = 19(15k + 13)$$

إذن $19|a$

ولدينا :
$$b = 20n + 357$$
$$= 20(19k + 4) + 357$$
$$= 20 \times 19k + 437 = 19(20k + 23)$$

إذن $19|b$

وبالتالي فإن $19|a \wedge b$ يعني أن $19|d$

التمرين 65

1) ليكن x وy عنصرين من IN^* أوليين فيما بينهما.

بين أن $x+y$ و xy ليس لهما الزوجية نفسها.

2) حدد القواسم الموجبة للعدد 180 ورتبها ترتيبا تزايديا.

3) حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية a وb التي تحقق :

$\begin{cases} a + b = 180 \\ m = \delta^2 \end{cases}$ حيث $m=PPCM(a,b)$ و $\delta = PGCD\,(a;b)$

الحل

1) لنبين أن $x+y$ وxy ليست لهما الزوجية نفسها حيث x وy من IN^* و $x \wedge y = 1$

- لدينا $x \wedge y = 1$ يعني أن x وy ليسا عددين زوجيين

لدينا: $y=2q+1$ و $x = 2p + 1 \quad |\exists (p,q) \in IN^2$

ومنه: $x+y=2(p+q+1)$ و $xy=2(2pq+p+q)+1$

يعني أن $x+y$ عدد زوجي وxy عدد فردي.

- نفترض أن x عدد زوجي وy عدد فردي.

لدينا: $y=2q+1$ و $(\exists (p;q) \in IN^2)|x = 2p$

ومنه: $x+y=2(p+q)+1$ و $xy=2(2pq+p)$

يعني أن $x+y$ عدد فردي وxy عدد زوجي.

- نفترض أن x وy عددان فرديان.

ونحصل على النتيجة نفسها إذا افترضنا أن x عدد فردي وy عدد زوجي.

إذن كخلاصة نستنتج أن $x+y$ وxy ليست لهما الزوجية نفسها.

2) لنحدد القواسم الموجبة للعدد 180 مع ترتيبها ترتيبا تزايديا :

لدينا: $180 = 4 \times 9 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5^1$

ومنه عدد القواسم الموجبة للعدد 180 هو: $18 = (1+1)\times(1+2)(1+2)$ وهي كالتالي:

$1;2;3;4;5;6;9;10;12;15;18;20;30;36;45;60;90;180$

3) لنحدد الأعداد الصحيحة الطبيعية التي تحقق: $\begin{cases} a+b=180 \\ m=\delta^2 \end{cases}$

لدينا: $a' \wedge b' = 1$ و $(\exists(a',b') \in IN^2) | a=\delta a'$ و $b=\delta b'$

ولدينا: $m\delta = ab \Leftrightarrow m = a'b'\delta$

ومنه: $\begin{cases} a+b=180 \\ m=\delta^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta(a'+b')=180 \\ a'b'\delta=\delta^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta(a'+b')=180 \\ a'b'=\delta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a'b'(a'+b')=180 \\ a'b'=\delta \end{cases}$$

لدينا $a' \wedge b' = 1$ ومنه وحسب السؤال 1)، لدينا $a'+b'$ و$a'b'$ ليست لهما الزوجية نفسها.

نستعين بالجدول التالي لتحديد قيم a' وb' و δ وa وb:

$a'+b'$	1	3	4	5	9	12	
$a'b'=\delta$	180	60	45	36	20	15	
a'					4		
b'					5		
a					80		
b					100		

إذن $(80;100)$ و $(100;80)$ هما حلاً النظمة المقترحة.

التمرين 76

1) بين أن لكل (a,b) من $(\mathbb{Z}^*)^2$ $\quad a \wedge b = 1 \Rightarrow \begin{cases} a \wedge (a+b) = 1 \\ a \wedge b(a+b) = 1 \end{cases}$

2) نعتبر المعادلة: (x,y) من IN^*

$$x(43-x)=y(x+y) \qquad (1)$$

ليكن (x,y) حلاً للمعادلة (1) من $(IN^*)^2$

نضع $x=da$ و $y=db$ ، مع: $d = x \wedge y$

أ- بين أن $a(43-da)=bd(a+b)$

ب- بين أن $a|d$ نضع إذن $d=ac$

ج- بين أن: $c(a^2+ab+b^2)=43$. ثم استنتج أن $c=1$

د- أوجد حلول المعادلة (1)

الحل

1- لنبين أن: $(\forall (a;b) \in (\mathbb{Z}^*)^2);\, a \wedge b = 1 \Rightarrow a \wedge (a+b) = 1$

نضع $d = a \wedge (a+b)$

لدينا:

$$\begin{cases} d|a \\ d|a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|a \\ d|(a+b)-a \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} d|a \\ d|b \end{cases}$$
$$\Rightarrow d|a \wedge b$$
$$\Rightarrow d|1$$
$$\Rightarrow d = 1$$

إذن: $(\forall (a;b) \in (\mathbb{Z}^*)^2);\, a \wedge b = 1 \Rightarrow a \wedge (a+b) = 1$

لنبين أن: $(\forall (a;b) \in (\mathbb{Z}^*)^2);\, a \wedge b = 1 \Rightarrow a \wedge b(a+b) = 1$

نضع: $\delta = a \wedge b(a+b)$

لدينا:

$$\begin{cases} \delta|a \\ \delta|b(a+b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta|ab \\ \delta|b^2 + ab \\ \delta|a^2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \delta|a^2 \\ \delta|b^2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \delta|a^2 \wedge b^2$$
$$\Rightarrow \delta|(a \wedge b)^2$$
$$\Rightarrow \delta|1$$
$$\Rightarrow \delta = 1$$

إذن: $(\forall (a;b) \in (\mathbb{Z}^*)^2);\, a \wedge b = 1 \Rightarrow a \wedge b(a+b) = 1$

2- أ) لنبين أن: $a(43-da)=bd(a+b)$

لدينا: $x(43-x) = y(x+y) \Rightarrow da(43-da) = db(da+db)$

$$\Rightarrow a(43-da) = bd(a+b)$$

إذن:

$$a(43-da)=bd(a+b)$$

ب) لنبين أن: $a|d$

لدينا: $d = x \wedge y$ و $x=ad$ و $y=bd$ يعني أن: $a \wedge b = 1$

ومنه: $a(43-da) = d.b(a+b) \Rightarrow a|db(a+b)$

$\{a \wedge b(a+b) = 1$ (حسب السؤال 1)

ومنه: $a|d$ (حسب مبرهنة GAUSS)

إذن $a|d$ وبالتالي: $d = ac$ $(\exists c \in IN)$ |

ج) لنبين أن: $c(a^2+ab+b^2)=43$

لدينا: $d=ac$

ومنه: $a(43-da) = bd(a+b) \Rightarrow a(43-a^2c) = abc(a+b)$

$$\Rightarrow 43 = bc(a+b) + a^2c$$

$$\Rightarrow 43 = c(a^2+ab+b^2)$$ (لأن $(a \in IN^*)$)

ه) لنستنتج أن: $c=1$

لدينا 43 عدد أولي يعني أن: $c=1$ أو $c=43$

لو افترضنا أن $c=43$ فإنه سيكون لدينا: $a^2+ab+b^2=1$

وبما أن: $a \in IN^*$ و $b \in IN^*$ فإن $a^2+ab+b^2 \geq 3$ إذن الحالة $c=43$ غير ممكنة وبالتالي: $c=1$

د- لنحدد حلول المعادلة (1):

حسب ما سبق، لدينا: $a^2+ab+b^2=43$ و $a \wedge b = 1$

ومنه: $(a=6$ و $b=1)$ أو $(a=1$ و $b=6)$

ولدينا: $d=ac$ و $c=1$ إذن $d=a$ ومنه: $(x=36$ و $y=6)$ أو $(x=1$ و $y=6)$

إذن $(36;6)$ و $(1;6)$ هما حلا المعادلة (1).

التمرين ٦٦

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ و } u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \ ; \ n \in IN \end{cases}$$

1) احسب u_2 و u_3 و u_4 و u_5 و u_6

2) أ- بين أن لكل n من IN، $u_{n+1}=2u_n+1$

ب- استنتج أكبر قاسم مشترك لحدين متتابعين للمتتالية (u_n).

3) أ- بين أن: $(\forall n \in IN) \ ; \ u_n = 2^n - 1$

ب- حدد $PGCD(2^n-1;2^{n+1}-1)$ لكل n من IN.

4) أ- تحقق من أن: $(\forall (n,p) \in IN^2) \ ; \ u_{n+p} = u_n(1+u_p) + u_p$

استنتج أن: $(\forall (n;p) \in IN^2) \ ; \ PGCD(u_n;u_p) = PGCD(u_n;u_{n+p})$

ب- ليكن a و b عنصرين من IN^* و r باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b.

- بين أن: $\begin{cases} PGCD(u_b;u_r) = PGCD(u_a;u_b) \\ PGCD(u_a;u_b) = u_{PGCD(a;b)} \end{cases}$

- احسب $PGCD(u_{2004};u_{804})$

الحل

1) لنحسب u_2 وu_3 وu_4 وu_5 وu_6

لدينا: $u_2=3u_1-2u_0=3$

$u_3=3u_2-2u_1=7$

$u_4=3u_3-2u_2=15$

$u_5=3u_4-2u_3=31$

$u_6=3u_5-2u_4=63$

2) أ- لنبين أن: $(\forall n \in IN)\ ;\ u_{n+1} = 2u_n + 1$

نستعمل البرهان بالترجع.

من أجل $n=0$، لدينا: $u_1=1=2\times0+1=2u_0+1$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

ليكن n عنصرا من IN.

نفترض أن: $u_{n+1}=2u_n+1$، لنبين أن: $u_{n+2}=2u_{n+1}+1$

لدينا: $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n = 3u_{n+1} - 2\left(\frac{u_{n+1}-1}{2}\right)$

$= 3u_{n+1} - u_{n+1} + 1 = 2u_{n+1} + 1$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

وبالتالي: $(\forall n \in IN)\ ;\ u_{n+1} = 2u_n + 1$

ب- لنستنتج $u_{n+1} \wedge u_n$ حيث $n \in IN$

ليكن n من IN، لدينا: $u_{n+1}=2u_n+1$ ومنه: $u_{n+1}-2u_n=1$

إذن حسب مبرهنة بوزو ($BEZOUT$)، نستنتج أن: $u_{n+1} \wedge u_n = 1$

3) أ- لنبين أن: $(\forall n \in IN)\ ;\ u_n = 2^n - 1$

نستعمل البرهان بالترجع.

من أجل $n=0$، لدينا $u_0=0$ و$2^0-1=0$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

ليكن n عنصرا من IN، نفترض أن: $u_n=2^n-1$ ولنبين أن: $u_{n+1}=2^{n+1}-1$

لدينا: $u_{n+1}=2u_n+1=2(2^n-1)+1=2^{n+1}-1$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

وبالتالي: $(\forall n \in IN)\ ;\ u_n = 2^n - 1$

ب- لنحدد $PGCD(2^{n+1}-1;2^n-1)$ لكل n من IN.

ليكن n من IN، لدينا: $u_n=2^n-1$ و$u_{n+1}=2^{n+1}-1$

وحسب السؤال 2) ب- لدينا: $PGCD(u_n;u_{n+1})=1$

إذن: $PGCD(2^{n+1}-1;2^n-1)=1$

4) أ- لنتحقق من أن: $(\forall (n;p) \in IN^2) \; ; \; u_{n+p} = u_n(1+u_p)+u_p$

ليكن n وp من IN، لدينا:

$$\begin{aligned} u_n(1+u_p)+u_p &= u_n+u_nu_p+u_p \\ &= 2^n-1+(2^n-1)(2^p-1)+2^p-1 \\ &= 2^n-1+2^{n+p}-2^n-2^p+1+2^p-1 \\ &= 2^{n+p}-1 \\ &= u_{n+p} \end{aligned}$$

إذن: $(\forall (n;p) \in IN^2) \; ; \; u_{n+p} = u_n(1+u_p)+u_p$

• استنتاج:

- ليكن n وp من IN بحيث $n>p$

لدينا: $0 \leq u_p < u_n$ (لأن (u_n) متتالية تزايدية وموجبة)

ومنه: u_p هو باقي القسمة الإقليدية ل u_{n+p} على u_n.

إذن: $PGCD(u_{n+p};u_n)=PGCD(u_n;u_p)$

- إذا كان $n<p$ فإننا نكتب: $u_{n+p}=u_p(1+u_n)+u_n$

ونستعمل البرهان نفسه.

- إذا كان $n=p$ فإن: $u_{n+p}=u_n(2+u_n)$

ومنه: $PGCD(u_{n+p};u_n)=u_n=PGCD(u_n;u_p)$

إذن: $(\forall (n;p) \in IN^2) \; ; \; PGCD(u_{n+p};u_n) = PGCD(u_n;u_p)$

ب- • لنبين أن: $PGCD(u_b;u_r)=PGCD(u_a;u_b)$

لدينا r هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b.

ليكن q خارج هذه القسمة، لدينا: $a=bq+r$ مع $0 \leq r < b$

بتطبيق المتساوية: $(\forall (n;p) \in IN^2); \; PGCD(u_n;u_p) = PGCD(u_n;u_{n+p})$

لدينا: $u_b \wedge u_r = u_b \wedge u_{b+r} = u_b \wedge u_{2b+r} = \dots = u_b \wedge u_{bq+r} = u_b \wedge u_a$

إذن: $PGCD(u_b;u_r)=PGCD(u_a;u_b)$

• باستعمال هذه المتساوية نحصل على: $PGCD(u_a;u_b)=PGCD(u_r;u_b)=\dots=PGCD(u_{r_n};u_0)$

حيث r_n هو آخر باقٍ غير منعدم في طريقة القسمات المتتابعة للعدد a على b يعني أن: $r_n=PGCD(a;b)$

وبما أن: $u_0=0$ فإن: $PGCD(u_{r_n};0)=u_{r_n}$

وبالتالي: $PGCD(u_a;u_b)=u_{r_n}=u_{PGCD(a;b)}$

لنحسب $PGCD(u_{2004};u_{804})$

لدينا حسب ما سبق: $u_{2004} \wedge u_{804} = u_{PGCD(2004;804)} = u_{12}$

لأن: $PGCD(2004;804)=12$ ، و$u_{12}=2^{12}-1=4095$

إذن: $u_{2004} \wedge u_{804} = 4095$.

▪ الأعداد الأولية

التمرين 68

بين أن مجموع 3 أعداد صحيحة طبيعية وفردية متتابعة هو عدد غير أولي.

الحل

لكل n من IN لدينا $2n+1$ و$2n+3$ و$2n+5$ ثلاثة أعداد فردية متتابعة.

ومنه: $N=(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)=6n+9=3(2n+3)$

وهذا يعني أن العدد N يقبل القسمة على 3 و$N>3$ إذن N غير أولي.

التمرين 69

ليكن a وb عددين صحيحيين طبيعيين بحيث $a>1$ و$b>1$

بين أن العدد: $N=a^4+4b^4$ عدد غير أولي.

الحل

ليكن a وb عنصرين من IN بحيث $a>1$ و$b>1$ و$N=a^4+4b^4$

لدينا: $N=(a^2+2b^2)^2-4a^2b^2=(a^2+2b^2-2ab)(a^2+2b^2+2ab)$

ومنه: $N=((a-b)^2+b^2)((a+b)^2+b^2)$

بما أن: $a>1$ و$b>1$ فإن: $(a-b)^2+b^2>1$ و$(a+b)^2+b^2>1$

إذن: $(a+b)^2+b^2$ (مثلا) قاسم فعلي للعدد N؛

وبالتالي العدد N غير أولي.

التمرين 80

ليكن p عددا أوليا فرديا.

حل في المجموعة IN^2، المعادلة $x^2-y^2=p$

الحل

المعادلة $x^2-y^2=p$ تكتب $(x-y)(x+y)=p$

بما أن: $x-y<x+y$ و p أولي فإن $x+y=p$ و $x-y=1$

ومنه: $x=\frac{p+1}{2}$ و $y=\frac{p-1}{2}$

وبما أن p فردي فإن $(\exists k \in IN^*)\ ;\ p=2k+1$

وبالتالي: $x=k+1$ و $y=k$

وهذا يعني أن المعادلة $x^2-y^2=p$ تقبل حلا وحيدا هو الزوج $(k+1;k)$ حيث $k=\frac{p-1}{2}$

التمرين 81

هل يوجد عدد صحيح طبيعي n بحيث يكون العدد $2^{4n+2}+1$ عددا أوليا؟

الحل

ليكن n من IN، لدينا:

$$N=2^{4n+2}+1=(2^{2n+1})^2+2.2^{2n+1}+1-2.2^{2n+1}$$

$$=(2^{2n+1}+1)^2-2.2^{2n+1}$$

$$=(2^{2n+1}+1)^2-2^{2n+2}$$

$$=(2^{2n+1}+1)^2-(2^{n+1})^2$$

$$=(2^{2n+1}+2^{n+1}+1)(2^{2n+1}+1-2^{n+1})$$

لدينا: $(\forall n \in IN^*)\ ;\ 2^{2n+1}+2^{n+1}+1>1$

ولدينا: $2^{2n+1}-2^{n+1}+1=2^{n+1}(2^n-1)+1$

ومنه: $(\forall n \in IN^*)\ ;\ 2^{2n+1}-2^{n+1}+1>1$

وبالتالي: $2^{2n+1}-2^{n+1}+1$ و $2^{2n+1}+2^{n+1}+1$ قاسمان فعليان للعدد N،

إذن N عدد غير أولي.

التمرين 82

ليكن p عددا أوليا، وليكن a من IN بحيث: $2 \le a \le p-2$

بين أن: العدد p أولي مع العدد a^2-1. أي أن: $PGCD(p;a^2-1)=1$

الحل

ليكن k عنصرا من المجموعة $\{1;2;3;...;p-1\}$، نضع : $d=PGCD(p;k)$

لدينا: $d|p$ ومنه : $d=1$ أو $d=p$

وبما أن: $d \neq p$ (لأن: $d|k$ وp لا يقسم k) فإن: $d=1$

وبما أن: $a-1 \in \{1;2;...;p-1\}$ و $a+1 \in \{1;2;...;p-1\}$

فإن: $p \wedge (a-1) = 1$ و $p \wedge (a+1) = 1$

إذن: $p \wedge (a^2-1) = 1$

وذلك حسب الخاصية: $a \wedge bc = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases}$; $(\forall (a;b;c) \in \mathbb{Z}^3)$

التمرين 83

1) ليكن a وb عددين صحيحين طبيعيين بحيث: $(a+b) \wedge ab = p^2$، وp عددا أوليا موجبا.

أ- بين أن: $p^2|a^2$ ثم $p|a$.

ب- بين أن: $p|b$.

ج- بين أن: $a \wedge b = p$ أو $a \wedge b = p^2$

2) نعتبر في IN^2 النظمة: $\begin{cases} (a+b) \wedge ab = 49 \\ a \vee b = 231 \end{cases}$

أ- بين أن: $a \wedge b = 7$

ب- حل في IN^2 النظمة (S).

الحل

1) أ- لنبين أن: $p^2|a^2$ ثم أن $p|a$:

لدينا: $p^2 = (a+b) \wedge ab$ ومنه: $p^2|a+b$ و$p^2|ab$

إذن: $p^2|a(a+b)-ab$ أي: $p^2|a^2$

وبما أن: $p|p^2$ فإن: $p|a^2$، وحيث إن: p أولي فإن: $p|a$

ب- لنبين أن: $p|b$:

لدينا: $p^2|a+b$ و$p^2|ab$، ومنه: $p^2|b(a+b)-ab$ أي: $p^2|b^2$

وبما أن: $p|p^2$ فإن: $p|b^2$، وحيث إن: p أولي فإن: $p|b$

ج- لنبين أن: $a \wedge b = p$ أو $a \wedge b = p^2$:

نضع: $d = a \wedge b$، لدينا: $d|a$ و$d|b$ ومنه: $d|a+b$ و$d|ab$

وبالتالي: $d|(a+b) \wedge ab$ أي: $d|p^2$، إذن: $d \in \{1;p;p^2\}$

وبما أن: $p|a$ و$p|b$ فإن: $p|d$، إذن: $d=p$ أو $d=p^2$

2) نعتبر النظمة : $(S)\begin{cases}(a;b)\in IN^2\\ a\vee b=23\\ (a+b)\wedge ab=49\end{cases}$

أ- لنبين أن: $a\wedge b=7$

لدينا حسب السؤال 1) ج- بما أن: $(a+b)\wedge ab=7^2$

و7 عدد أولي فإن: $a\wedge b=7$ أو $a\wedge b=7^2$

وبما أن: $a\wedge b|a\vee b$ و$7|231$ و49 لا يقسم 231، فإن: $a\wedge b=7$

ب- حل النظمة (S):

لدينا: $a\wedge b=7$؛ ومنه: $\begin{cases}a'\wedge b'=1\\ a=7a'\\ b=7b'\end{cases}$; $(\exists(a';b')\in IN^2)$

وبما أن: $231=a\vee b=7(a'\vee b')=7a'b'$ فإن: $a'b'=33$

لدينا: $\begin{cases}a'b'=33\\ a'\wedge b'=1\end{cases}$ ومنه: $(a',b')\in\{(33;1);(1;33);(3;11);(11;3)\}$

وبما أن: $a=7a'$ و$b=7b'$ فإن: مجموعة حلول النظمة S هي: $S=\{(231;7);(7;231);(21;77);(77;21)\}$

التمرين 84

I- ليكن x عنصرا من IR.

بين أن الحدودية x^4+4 تكتب كجداء حدوديتين من الدرجة الثانية.

II- ليكن n من IN و$n\geq 2$.

نضع: $A=n^2-2n+2$ و$B=n^2+2n+2$؛ وليكن: $d=A\wedge B$

1) بين أن: n^4+4 عدد غير أولي.

2) نفترض أن n عدد فردي.

أ- بين أن: d يقسم $4n$.

ب- بين أن: d عدد فردي وأن d يقسم n.

ج- استنتج أن: $d=1$.

3) نفترض أن n عدد زوجي.

أ- بين أن: 4 لا يقسم A.

ب- استنتج أن: $d=2p$ مع p عدد فردي.

ج- بين أن: p يقسم n، ثم استنتج أن: $d=2$.

الحل

I- ليكن x عنصرا من IR، لدينا: $x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

إذن الحدودية x^4+4 تكتب كجداء حدوديتين من الدرجة الثانية هما: x^2+2x+2 وx^2-2x+2.

II- ليكن n عنصرا من IN و$n\geq 2$.

1) لنبين أن: n^4+4 عدد غير أولي.

لدينا: $n^4+4=(n^2-2n+1)(n^2+2n+1)$

وبما أن: $n^2-2n+2=(n-1)^2+1$ و $n^2+2n+2=(n+1)^2+1$

و $n \geq 2$ فإن: $n^2-2n+2 \geq 2$ و $n^2+2n+2 \geq 10$

بمعنى أن $n^2-2n+2 \neq 1$ و $n^2-2n+2<n^4+1$، ومنه: n^2-2n+2 قاسم فعلي للعدد n^4+4.

وبالتالي فإن: n^4+4 عدد غير أولي.

2) أ- لنبين أن d يقسم $4n$.

لدينا: $d=A \wedge B$، ومنه فإن: $d|A$ و $d|B$، إذن: $d|B-A$ ولدينا: $B-A=4n$ يعني أن: $d|4n$

ب- لنبين أن d عدد فردي:

لدينا n عدد فردي ومنه فإن n^2 عدد فردي

وبما أن $2n+2$ و $-2n+2$ عددين زوجيين فإن $A=n^2-2n+2$ و $B=n^2+2n+2$ عددان فرديان.

ولدينا d قاسم للعددين A و B، إذن d عدد فردي.

. لنبين أن d يقسم n.

بما أن d عدد فردي فإن 2 لا يقسم d، ولدينا 2 عدد أولي ومنه فإن $d \wedge 2=1$ إذن $d \wedge 2^2=1$

إذن $d|4n$ و $d \wedge 4=1$، فحسب مبرهنة $GAUSS$: $d|n$

ج- الاستنتاج:

لدينا: $d|n$ و $d|n^2+2n+2$، ومنه فإن: $d|n(n+2)$ و $d|n^2+2n+2$.

إذن: $d|n^2+2n+2-n(n+2)$ يعني أن: $d|2$.

وبما أن 2 عدد أولي و $d \in IN^*$ فإن: $d=1$ أو $d=2$، وحسب ما سبق العدد d فردي، إذن $d=1$

3) أ- لنبين أن 4 لا يقسم A:

لدينا n عدد زوجي أي: $2|n$ ومنه فإن $2|n-2$، إذن: $4|n(n-2)$ بمعنى أن: $n(n-2) \equiv 0[4]$.

وبما أن: $A=n(n-2)+2$ و $2 \equiv 2[4]$، فإن: $A \equiv 2[4]$ ومنه فإن: 4 لا يقسم A.

ب- الاستنتاج:

لدينا n عدد زوجي ومنه فإن n^2 عدد زوجي.

ومنه A و B زوجيان وبالتالي d زوجي والعدد 4 لا يقسم A إذن $d=2p$ مع p فردي

ج) لدينا $p|d$ ومنه $p|A$ و $p|B$

إذن: $p|B-A$ أي $p|4n$

وبما أن p فردي فإن: $p \wedge 2=1$ ومنه: $p \wedge 2^2=1$ أي: $p \wedge 4=1$

إذن حسب مبرهنة $Gaus$ $p|n$

بما أن n زوجي و p فردي فإن $p=1$ وبالتالي $d=2$