

Seminar 1 – Aufgaben

Aufgabe 1.1 (Wahrheitstabellen)

1) Seien p und q Einzelaussagen. Erstelle Wahrheitwerttabellen für die folgenden zusammengesetzten Aussagen.

a) $\neg p \rightarrow q$

b) $(p \vee \neg q) \leftrightarrow p$

c) $(\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg q \leftrightarrow p)$

2) Beweise, dass für die Aussagen p, q, r und s stets $[(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ gilt.

Aufgabe 1.2 (Quantoren)

Prüfe die Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt.

1) $\forall q \in \mathbb{Q} : \sqrt{q} \in \mathbb{Q}$

4) $\forall p \in \mathbb{N} : \forall q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

2) $\exists q \in \mathbb{Q} : \sqrt{q} \in \mathbb{Q}$

5) $\forall n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} : n - m \in \mathbb{N}$

3) $\forall q \in \mathbb{Q} : \sqrt{q} \in \mathbb{C}$

6) $\forall n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : n - m \notin \mathbb{N}$

Aufgabe 1.3 (Benjamins Geburtstag)

Bei mir im Haus wohnen Franzl und Alex, zwei kluge Köpfe. Als sie mich fragten, wann ich Geburtstag habe, gab ich ihnen zehn Daten zur Auswahl:

2. September

3. Oktober

1. November

1. Dezember

4. September

6. Oktober

2. November

3. Dezember

5. September

4. November

Anschließend verriet ich Franzl den Monat und Alex den Tag meines Geburtstags. Daraufhin unterhielten sich beide:

Franzl: Ich weiß nicht, wann Benjamin Geburtstag hat, aber ich weiß, dass Du, Alex, es auch nicht weißt.

Alex: Anfangs wusste ich auch nicht, wann Benjamin Geburtstag hat. Aber jetzt weiß ich es.

Franzl: Jetzt weiß ich es auch.

Wann habe ich Geburtstag?¹

Für bis zum kommenden Seminar eingereichte richtige, begründete Lösungen gibt es einen kleinen Gewinn.

¹Die Originalversion dieser Aufgabe wurde am 8. April 2015 14-jährigen Schüler:innen zur Singapore and Asian Schools Math Olympiad (SASMO) gestellt.

Aufgabe 1.4 (Mengenoperationen)

1) Gegeben seien die drei Mengen

$$A = \{2, 4, 19, 23, 29\},$$

$$B = \{14, 19, 29\},$$

$$C = \{4, 7, 14\}$$

Bestimme die folgenden Mengen.

a) $B \cap C$

c) $A \cap B \cap C$

e) $(A \setminus B) \setminus C$

b) $(A \cup B) \setminus C$

d) $(B \cup C) \setminus (B \cap C)$

f) $[(A \setminus B) \setminus C] \times C$

2) Für die Schnellen: Wie viele Zahlen der Menge $M = \{540, 541, \dots, 7181, 7182\} \subset \mathbb{N}$ sind durch

a) 6 teilbar?

b) 6 oder 8 teilbar?

c) 6 oder 8 oder 14 teilbar?

Aufgabe 1.5 (Venn-Diagramme)

1) Stelle die folgenden Mengen graphisch mittels Venn-Diagrammen dar.

a) $(A \cap \bar{B}) \cap (\bar{A} \cap B)$ für $\Omega = A \cup B$

c) $(A \cap B) \cup C$

b) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$

d) $(A \cup B) \cap C$

2) Beschreibe die in den folgenden Venn-Diagrammen dargestellten Mengen mithilfe von Formeln.

