Vorlesungsskript

Mathematik für Informatiker I:

Grundlagen, Lineare Algebra

Analysis – Differentialrechnung

gehalten an der HTWK Leipzig

http://www.htwk-leipzig.de

Prof. Martin Grüttmüller

martin.gruettmueller@htwk-leipzig.de
http://www.htwk-leipzig.de

Letzte Aktualisierung vom 9. Oktober 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel **4**

2 Literatur **5**
2.1 Nachschlagewerke 5
2.2 Lehrbücher 5
2.3 Arbeits- und Übungsbücher 5

3 Grundlagen **6**
3.1 Aussagenlogik 6
3.2 Mengenlehre 7
3.3 Relationen 7
3.4 Zahlenbereiche 8
3.5 Griechische Buchstaben 9

4 Funktionen, Operationen **10**
4.1 Grundbegriffe 10
4.2 Spezielle Funktionen 11
4.3 Funktionen einer reellen unabhängigen Veränderlichen 12
4.4 Eigenschaften von Funktionen 12
4.5 Elementare Funktionen 12

5 Gleichungen und Ungleichungen **14**
5.1 Kleiner-, Größer, Gleich-Relation 14
5.2 Wichtige Ungleichungen und Gleichungen 14

6 Mathematisches Argumentieren, mathematisches Beweisen **15**
6.1 Direkter Beweis 15
6.2 Indirekter Beweis 15
6.3 Schubfachprinzip 15
6.4 Vollständige Induktion 15

7 Zahlenfolgen und -reihen **16**
7.1 Grenzwert einer Zahlenfolge 16
7.2 Konvergenzkriterien 17
7.3 Arithmetische und Geometrische Folgen 18
7.4 Landau'sche Symbole 18
7.5 Zahlenreihen 19
7.5.1 Begriff der unendlichen Reihe 19
7.5.2 Konvergenzkriterien 19
7.6 Potenzreihen 20

8 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen **22**
8.1 Grenzwert von Funktionen 22
8.2 Stetigkeit 23

9 Algebraische Strukturen, Gruppen, Ringe, Körper **25**
9.1 Operationen 25
9.2 Halbgruppen 25
9.3 Gruppen 25
9.4 Ringe, Körper 26

10 Einführung in Matrizen **28**
10.1 Beispiele und Definitionen 28
10.2 Spezielle Matrizen 28
10.3 Relationen und Operationen mit Matrizen 30

11 Vektorräume **33**
11.1 Definition Vektorraum . . . 33
11.2 Beispiele für Vektorräume . . . 33
11.3 Untervektorräume . . . 35

12 Lineare Gleichungssysteme **36**
12.1 Formen von linearen Gleichungssystemen . . . 36
12.2 Inverse Matrix . . . 36
12.3 Determinanten . . . 36
12.3.1 Definition der Determinante . . . 37
12.3.2 Eigenschaften von Determinanten . . . 37
12.3.3 Rang einer Matrix . . . 38
12.4 Lineare Gleichungssysteme . . . 38
12.4.1 Allgemeine Lösung . . . 39
12.4.2 Gauß-Algorithmus . . . 39
12.4.3 Cramersche Regel . . . 40

13 Dimension und Basis eines Vektorraumes **41**

14 Lineare Abbildungen **43**
14.1 Definition und Eigenschaften . . . 43
14.2 Beschreibung linearer Abbildungen . . . 43
14.3 Kern und Bild einer linearen Abbildung . . . 43

15 Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen **44**
15.1 Ableitung . . . 44
15.1.1 Definition der Ableitung einer Funktion . . . 44
15.1.2 Differenzierbarkeit von Funktionen . . . 45
15.1.3 Ableitungsregeln . . . 45
15.2 Sätze über differenzierbare Funktionen . . . 46
15.3 Untersuchung von Funktionen . . . 46
15.3.1 Monotonie . . . 46
15.3.2 Relative und absolute Extremwerte . . . 46
15.3.3 Wendepunkte . . . 47
15.3.4 Kurvendiskussion . . . 47
15.4 Die Taylorsche Formel . . . 48

Index **49**

1 Ziel

,,Informatiker sollen Mathematik anwenden können." Dazu müssen sie wichtige Begriffe und fundamentale Lösungsmethoden kennen. Es geht darum, algorithmische, technische und oft auch ökonomische Probleme in der Sprache der Mathematik zu formulieren, das so gewonnene mathematische Problem zu lösen und die erhaltenen Resultate im Lichte des ursprünglichen Problems zu interpretieren. Nach Absolvierung der Mathematik I und Mathematik II Vorlesungen sollten Sie in der Lage sein, sich selbstständig Wissen aus relevanten Büchern und Fachzeitschriften anzueignen und dabei nicht vor umfangreichen mathematischen Erläuterungen zurückschrecken.

Dieses Skript dient der Begleitung der Vorlesung und enthält nur Definitionen und mathematische Sätze. Beispiele und die Zusammenhänge zwischen Mathematik und Informatik werden nur in der Vorlesung und den begleitenden Seminaren behandelt.

Zusätzlich werden regelmäßig Belegaufgaben zum Selbststudium herausgegeben.
Mathematik kann man nicht konsumieren, sondern nur produzieren.
Die Aufgaben finden Sie im OPAL-Kurs zu dieser Lehrveranstaltung.

Die Lösungen zu den Aufgaben sind elektronisch abzugeben und werden automatisiert bewertet. Die Bewertung ermöglicht Ihnen zum einen die Kontrolle des erreichten Lernfortschritts und zum anderen ist der Erwerb von mindestens 35 Prozent der erreichbaren Punkte Voraussetzung für die Zulassung zur Prüfungsklausur. Die Deadline für den Punkterwerb ist für die reguläre Prüfung der Sonntag der letzten Vorlesungswoche um 23:59 Uhr, für Wiederholungsprüfungen der Tag vor der Prüfung um 23:59 Uhr. Es ist empfehlenswert für den Lernfortschritt, dass Sie nicht alleine arbeiten, sondern sich mit Ihren Kommilitonen zusammensetzen und lernen/üben.

In einer 120 Minuten Mathematik-Prüfungsklausur am Computer müssen Sie ihr erworbenes Wissen unter Beweis stellen. Die Klausurarbeiten werden entsprechend der Prüfungsordnung mit einer Note bewertet. Für die Note 4,0 in Mathematik müssen Sie mindestens 35 Prozent der in der Klausur erreichbaren Punkte erwerben.
Zulässige Hilfsmittel sind ein Nachschlagewerk Ihrer Wahl und eine selbstgeschriebene, maximal zehnseitige Formelsammlung. Selbstgeschrieben bedeutet handschriftlich per Stift auf Papier, oder handschriftlich auf Tablet, hochgeladen+genehmigt und ausgedruckt. Die Seiten der Formelsammlung müssen durchnummeriert und mit Vorname und Nachname versehen sein. Taschenrechner sind erlaubt. Ausdrücklich verboten sind alle Mittel, mit denen man kommunizieren könnte; damit entfallen also zum Beispiel Handys, selbst wenn sie einen eingebauten Taschenrechner aufweisen und auch eigene Computer/Notebooks/etc., die ja ebenfalls über Kommunikationsschnittstellen verfügen könnten.
Im Januar/Februar wird eine elektronische Probeprüfung angeboten. Die Teilnahme ist freiwillig, aber sehr empfohlen.

2 Literatur

2.1 Nachschlagewerke

1. Bartsch, H.-J.; Mathematische Formeln, Fachbuchverlag Leipzig
2. Bronstein, I.N., K.A. Semendjajew, u.a.; Taschenbuch der Mathematik; Verlag Harry Deutsch
3. Merzinger, G., Mühlbach, G., u.a.; Formeln und Hilfen zur Höheren Mathematik; binomi-Verlag

2.2 Lehrbücher

1. Weitz, E.; Konkrete Mathematik (nicht nur) für Informatiker, Springer Spektrum [ebook]
2. Karpfinger, C.; Höhere Mathematik in Rezepten, Springer Spektrum [ebook]
3. Teschl, G., Teschl, S.; Mathematik für Informatiker, Band 1 und 2, Springer Vieweg [ebook]
4. Goebbels, S., Jochen Rethmann, J.; Mathematik für Informatiker, Springer Vieweg [ebook]

2.3 Arbeits- und Übungsbücher

1. Karpfinger, C.; Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten, Springer Spektrum [ebook]

Hinweis: Die Bücher und Formelsammlung sind in der Hochschulbibliothek vorhanden. Außerdem können diese Bücher [ebook] elektronisch über das WebOPAC der Bibliothek aufgerufen werden (man muss nur im Netz der HTWK sein).

3 Grundlagen

MOTIVATION: In diesem Kapitel werden wesentliche Grundlagen der Mathematik wie Aussagen, Mengen und die Zahlenbereiche besprochen. Dabei sollte das meiste davon aus dem Schulunterricht bekannt sein und wird an dieser Stelle nur wiederholt. Anwendungen stehen in diesem Kapitel noch nicht im Vordergrund. Es geht mehr darum, sich in der *Sprache* der Mathematik zu üben, um das Studium der folgenden Kapitel mit Erfolg zu absolvieren.

3.1 Aussagenlogik

DEFINITION 1 *Eine* Aussage *ist ein sinnvoller Satz, der entweder wahr (w) oder falsch (f) ist.*

BEISPIELE für Aussagen sind:

- $2 + 2 = 4$
- Leipzig liegt an der Elbe.
- Im Weltall gibt es außerirdische Lebewesen.

Keine Aussagen sind z.B.:

- Heute ist schönes Wetter.
- Seid leise!
- Alles, was ich heute sage, ist falsch.

DEFINITION 2 *Die logische Verknüpfung von Einzelaussagen zu zusammengesetzten Aussagen bezeichnet man als* Aussagenverbindung*(*Aussagenmuster*).*

$\Rightarrow$ Operationen mit Aussagen, Wahrheitstafel

DEFINITION 3 *Als* Negation $\overline{p}$*,* Konjunktion *(und)* $p \wedge q$*,* Disjunktion *(oder)* $p \vee q$*,* Implikation $p \to q$ *bzw.* Äquivalenz $p \leftrightarrow q$ *der Aussagen* p *und* q *bezeichnet man Aussagen mit der folgenden* Wahrheitstafel*:*

p	q	$\overline{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

$\Rightarrow$ *Quantoren* (abkürzende Bezeichnungen):

- All-Quantor $\forall$ (Bsp.: $\forall a$ gilt $a + a = 2a$)
- Existenz-Quantor $\exists$ (Bsp.: $\forall a \neq 0 \quad \exists b$ mit $ab = 1$)

DEFINITION 4 Aussageformen *sind Aussagen mit Variablen.*

BEISPIEL: Die Aussageform $3x + 4 = 7$ ist wahre Aussage für $x = 1$ und falsche Aussage $\forall x$ mit $x \neq 1$.

$\Rightarrow$ *Logik* - Lehre(Kunst) des vernünftigen (Schluss-)Folgerns
BEISPIEL Alle Menschen sind sterblich. Aristoteles ist ein Mensch. Also ist Aristoteles sterblich.
Schlussregeln:

- Modus Ponens: p und $p \to q$ also q
- Modus Tollens: $p \to q$ und $\overline{q}$ also $\overline{p}$
- Hypothetischer Syllogismus: $p \to q$ und $q \to r$ also $p \to r$

3.2 Mengenlehre

Definition 5 *Unter einer* Menge *verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten, wohl unterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die zu einer Menge zusammengefaßten Objekte heißen* Elemente *der Menge.*

Achtung ! Jedes Element kann in einer Menge nur einmal vorkommen!

$\Rightarrow$ $x \in M$ (Elemente - kleine Buchstaben, Mengen - große Buchstaben)
Definition von Mengen:

- Aufzählung: $M = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
- Eigenschaft: $M = \{x : x$ ist natürliche, ungerade Zahl und $x < 10\}$

$\Rightarrow$ *Venn-Diagramme*

Mengenrelationen und -operationen:

Definition 6 *Zwei Mengen A und B heißen gleich, und man schreibt $A = B$, wenn beide Mengen genau dieselben Elemente besitzen. Sonst gilt $A \neq B$.*

Definition 7 *Gilt für jedes Element $x \in A$ auch $x \in B$, so heißt A Teilmenge von B, geschrieben: $A \subseteq B$.*

Definition 8 *Die* Durchschnittsmenge $A \cap B$*, die* Vereinigungsmenge $A \cup B$ *und die* Differenzmenge $A - B$ *(oft $A \backslash B$) für zwei Mengen A und B sowie das* Komplement $\overline{A}$ *bzgl. einer Grundmenge G werden folgendermaßen definiert:*
$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$,
$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$,
$A - B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$,
$\overline{A} = \{x : (x \in G) \wedge (x \notin A)\}$.

Beispiel: $A = \{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$ und $B = \{4, 5, 6, 7\}$. Dann ist $A \cap B = \{4, 7\}$, $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ und $A - B = \{2, 3, 8, 9\}$. Mit $G = \{0, 1, \ldots, 9\}$ ist $\overline{A} = \{0, 1, 5, 6\}$.

Definition 9 *Eine Menge ohne Elemente heißt* leere Menge. Bezeichnung*:* $\emptyset$

$\Rightarrow$ *Kreuzprodukt (Mengen) $M \times N$*: $M \times N = \{(x, y) : (x \in M) \wedge (y \in N)\}$
$\Rightarrow$ *Kreuzprodukt* $\underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{n\text{-mal}} = M^n$

Beispiel: $M = \{2, 4\}$ und $N = \{2, 5\}$. Dann ist $M \times N = \{(2, 2), (2, 5), (4, 2), (4, 5)\}$, $N \times M = \{(2, 2), (2, 4), (5, 2), (5, 4)\}$ und $M^2 = M \times M = \{(2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4)\}$.

$\Rightarrow$ *Mächtigkeit* einer Menge $|A|$ = Anzahl der Elemente bei einer endlichen Menge
Beispiel: $|\{4, 7, 9\}| = 3$

3.3 Relationen

Definition 10 *Eine binäre* Relation *R auf $A \times B$ ist eine Teilmenge von $A \times B$.*

$\Rightarrow$ Schreibweisen, z.B.: $xRy, a \leq b, m = n, w > z, p|q$

$\Rightarrow$ $x \not R y, a \not\leq b$

Definition 11 *Eine* Äquivalenzrelation *auf $A \times A$ ist eine Relation mit folgenden Eigenschaften:*

1. *xRx für jedes $x \in A$*
2. *$xRy \to yRx$ für alle $x, y \in A$*
3. *$xRy, yRz \to xRz$ für alle $x, y, z \in A$.*

Satz 12 *Jede Äquivalenzrelation auf $A \times A$ definiert auf A eine Klasseneinteilung (*Äquivalenzklassen*).*

3.4 Zahlenbereiche

⇒ *natürliche Zahlen*: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{N}_{\geq 5} = \{5, 6, \ldots\} = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 5\}$

⇒ Peano-Axiome (Axiomensystem eindeutige Festlegung der natürlichen Zahlen)

1. 0 ist eine natürliche Zahl.
2. Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl als Nachfolger.
3. 0 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4. Verschiedene natürliche Zahlen haben verschiedene Nachfolger.
5. Ist eine Aussage wahr für die Zahl 0 und ist sie stets, falls sie für eine natürliche Zahl n wahr ist, dann auch für den Nachfolger von n wahr, dann ist sie für alle natürlichen Zahlen wahr. (Axiom der vollständigen Induktion)

⇒ Summen- und Produktzeichen

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad \text{bzw.} \quad \prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Beispiele:

$$\sum_{i=1}^{8} i = 1+2+3+4+5+6+7+8 = \quad 36$$

$$\sum_{i=2}^{5} 2i + i^2 = (2 \cdot 2 + 2^2) + (2 \cdot 3 + 3^2) + (2 \cdot 4 + 4^2) + (2 \cdot 5 + 5^2) = 8 + 15 + 24 + 35 = \quad 82$$

$$a_1 = 2, a_2 = -1, a_3 = 0; \quad b_1 = 4, b_2 = 3, b_3 = 1; \quad \sum_{i=1}^{3} a_i - 3b_i = (2-3\cdot4)+(-1-3\cdot3)+(0-3\cdot1) = -10-10-3 = \; -23$$

$$\prod_{i=1}^{5} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = \quad 120$$

Aufgabe: Für das Rechnen mit dem Summen- und Produktzeichen gelten Rechengesetze. Suchen Sie in der Literatur/Internet nach solchen Gesetzen und finden Sie je ein Beispiel.

⇒ *Fakultät* für $k \in \mathbb{N}$:

$$k! := \prod_{i=1}^{k} i \qquad \text{mit} \qquad 0! = 1$$

⇒ *Binomialkoeffizient* für $a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$:

$$\binom{a}{k} := \begin{cases} 1, \text{ falls } k = 0 \\ \dfrac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot \ldots (a-(k-1))}{k!}, \text{ sonst} \end{cases}$$

Beweisprinzip der *Vollständigen Induktion*

1. Induktionsanfang: $A(n_0)$ ist wahr
2. Induktionsannahme: $A(n)$ ist wahr für beliebige, aber feste Zahl $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$
3. Induktionsbehauptung: Zu zeigen ist, dass auch $A(n+1)$ wahr ist.
4. Induktionsschluss: Weisen nach, dass $A(n) \to A(n+1)$ wahr ist.

$\Rightarrow$ *ganze Zahlen*: $\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{x : -x \in \mathbb{N}^+\}$

$\Rightarrow$ *rationale Zahlen*: $\mathbb{Q} = \{x : \exists a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, x = \frac{a}{b}\}$

Achtung ! Äquivalenzrelation

$\Rightarrow$ Dezimalbrüche, endliche, unendlich-periodische
Aber: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ *reelle Zahlen*: $\mathbb{R} = \{\text{alle Dezimalbrüche}\} = \mathbb{Q} \cup \{\text{nichtperiodische Dezimalbrüche}\}$
Intervalle reeller Zahlen, z.B. $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \wedge x < b\}$

$\Rightarrow$ *komplexe Zahlen*: $\mathbb{C} = \{a + b \cdot i : a, b \in \mathbb{R}\}$ mit $(i^2 = -1)$
Eulersche Formel: $e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$

$\Rightarrow$ Rechengesetze in $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ bzw. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$:

- Kommutativgesetz: $a + b = b + a$, $ab = ba$
- Assoziativgesetz: $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$, $(ab)c = a(bc) = abc$
- Distributivgesetz: $a(b + c) = ab + ac$

3.5 Griechische Buchstaben

Alpha	α		Beta	β	
Gamma	γ	Γ	Delta	δ	Δ
Epsilon	ϵ		Theta	ϑ	θ
Lambda	λ		Mu	μ	
Nu	ν		Xi	ξ	
Pi	π	Π	Rho	ρ	
Sigma	σ	Σ	Phi	φ	Φ
Chi	χ		Psi	ψ	
Omega	ω	Ω			

Lernziele

Sie sollten

- Aussagen und deren Verknüpfungen als Basis für logisches Argumentieren kennen;
- Mengen, insbesondere reelle Intervalle, anhand der Eigenschaften ihrer Elemente definieren und mit Mengenoperationen sicher umgehen können;
- den Aufbau der Zahlenbereiche $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und die Erweiterung $\mathbb{C}$ kennen und sicher in den grundlegenden Rechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division – insbesondere auch von Brüchen und komplexen Zahlen – sowie der Anwendung von Rechengesetzen bei äquivalenten Umformungen sein;
- mit Summen- und Produktzeichen sicher umgehen können und sich deren Rechengesetze selbständig erarbeitet haben;
- griechische Buchstaben sicher wiedererkennen und diese in mathematischen/physikalischen Zusammenhängen verwenden können.

4 Funktionen, Operationen

MOTIVATION: In der Praxis vorkommende Funktionen beschreiben oft den Zusammenhang zwischen zwei veränderlichen Größen. Um diese Zusammenhänge zu untersuchen, bietet es sich an ihre mathematischen Eigenschaften zu studieren. In diesem Kapitel werden wir daher noch einmal den Funktionsbegriff wiederholen, allgemeine und konkrete Eigenschaften von Funktionen betrachten und die aus der Schule bekannten elementaren Funktionen reaktivieren.

4.1 Grundbegriffe

DEFINITION 13 *Sei $R \subseteq A \times B$ eine Relation. R heißt*

1. links-eindeutig *genau dann, wenn* $\forall y \in B \; \exists! x$ *mit* $(x, y) \in R$*, d.h.* $\forall y \in B \; \exists x$ *mit* $((x, y) \in R \wedge \forall z((z, y) \in R \rightarrow z = x))$.
2. rechts-eindeutig *genau dann, wenn* $\forall x \in A \; \exists! y$ *mit* $(x, y) \in R$.

DEFINITION 14 *Eine Menge $f \subseteq A \times B$ heißt* Funktion *oder* Abbildung *von A nach B genau dann, wenn f eine rechts-eindeutige Relation ist, d.h f ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in A$ genau ein Element $y \in B$ zuordnet. Dabei wird die Menge $D_f = A$* Definitionsbereich *und die Menge $W_f := \{b : (\exists a)((a, b) \in f)\}$* Wertebereich *genannt.*

BEZEICHNUNG $y = f(x)$ genau dann, wenn $(x, y) \in f$
BEZEICHNUNG $f : A \rightarrow B$ (f bildet ab von A nach B)
BEISPIELE:

1. $D = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 7), (5, 5), (7, 3)\}$, $W = \{2, 3, 5, 7\}$
2. $D = [-2, 4]$, $f = \{(x, x^3 - 3x^2 - x + 3) : x \in D\}$, $W = [-15, 15]$

$\Rightarrow$
BEISPIEL: $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-15	0	3	0	-3	0	15

$\Rightarrow$ Graph einer Funktion

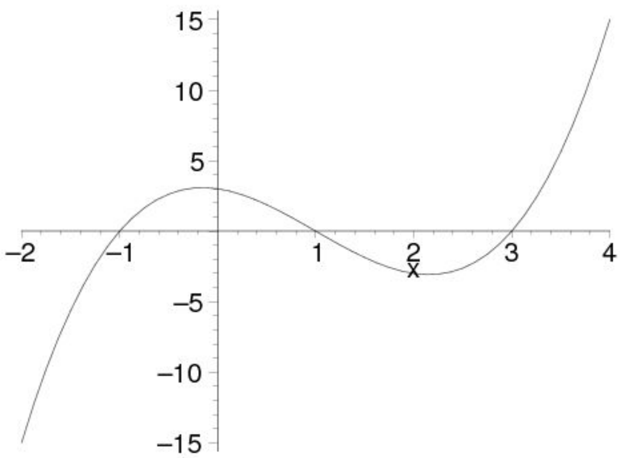

Abbildung 1: Graph der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ im Intervall $[-2, 4]$

Definition 15 *Eine n-stellige* Operation*(Verknüpfung) auf X ist eine Funktion f mit Definitionsbereich $D_f \subseteq \underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{n}$ und Wertebereich $W_f \subseteq X$.*

Bemerkung 16 *Eine 0-stellige Operation ist die Auswahl eines besonderen(ausgezeichneten) Elementes aus X.*

Definition 17 *Sei f eine Funktion von X nach Y. f heißt*

1. surjektiv *genau dann, wenn $W_f = Y$,*
2. injektiv *genau dann, wenn $f \subseteq X \times W_f$ links-eindeutig ist, und*
3. bijektiv *genau dann, wenn f surjektiv und injektiv ist.*

Definition 18 *Seien X und Y zwei Mengen. X und Y heißen* gleichmächtig *($X \sim Y$), wenn es eine bijektive Abbildung von X auf Y gibt. Eine Menge X heißt* endlich*, wenn $X = \emptyset$ oder wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, mit $X \sim \{1, 2, \ldots, n\}$. X heißt* abzählbar unendlich*, wenn $X \sim \mathbb{N}$ und* überabzählbar *sonst.*

Satz 19 *Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.*

Bezeichnung $|X|$ *Kardinalität* bzw. *Mächtigkeit* von X

Satz 20 *Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind abzählbar, die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind überabzählbar.*

Satz 21 *Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind abzählbar, die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind überabzählbar.*

Definition 22 *Seien S, R Relationen. Dann ist*

$$S \circ R = \{(x, z) : \exists y((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S)\}$$

eine neue Relation, die Verkettung.

Definition 23 *Sei $R \subseteq A \times B$ eine Relation. Dann ist*

$$R^{-1} = \{y \in B \times A : \exists a, b((a, b) \in R \wedge y = (b, a))\} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$$

die zu R inverse Relation.

Satz 24 *Seien S, R Relationen. Dann gilt*

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$$

Definition 25 *Ist $R \subseteq A \times B$ eine Relation und $A' \subset A$, dann heißt die Relation $R' = R \cap (A' \times B)$ die* Einschränkung *von R auf A'.*

4.2 Spezielle Funktionen

Definition 26 *Eine Permutation der Menge X ist eine bijektive Abbildung von X auf sich selbst.*

$\Rightarrow$ Schreibweisen, Identität, Hintereinanderausführung

Definition 27 *Die* charakteristische Funktion *(Indikatorfunktion) einer Teilmenge $A \subseteq X$ bildet ab von X nach $\{0, 1\}$, und ist für $x \in X$ genau dann 1, wenn x Element von A ist, und ansonsten 0:*

$$\mathbf{1}_A : X \to \{0, 1\}, \qquad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bijektion zwischen der Potenzmenge $2^X(\mathcal{P}(X))$ und der Menge aller Funktionen von X in die Menge $\{0, 1\}$.

4.3 Funktionen einer reellen unabhängigen Veränderlichen

DEFINITION 28 *Sei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Eine* reellwertige Funktion f *einer reellen Veränderlichen ist eine solche Teilmenge von $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, bei der zu jedem $x \in D$ genau ein $y \in \mathbb{R}$ in Relation steht $((x,y) \in f)$. Die Menge D heißt* Definitionsbereich *und die Menge W aller Zahlenwerte $f(x)$, die sich ergibt, wenn x den Definitionsbereich durchläuft, heißt* Wertebereich *der Funktion f.*

BEZEICHNUNG: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ *inverse Funktion* f^{-1} (*Umkehrfunktion*): $f^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in f\}$
BEISPIEL: $p = p(x) = 10 - 0,5x \Rightarrow p^{-1} = x(p) = 20 - 2p$

$\Rightarrow$ Abschnittsweise definierte Funktionen
BEISPIEL:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{falls } 0 \le x \le 5 \\ x + 10 & \text{falls } 5 < x \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Verkettete Funktion: $z = g(y), y = f(x) : z = g(f(x))$
BEISPIEL: $z(x) = e^{x^2+1}$, dann $z = e^y$ und $y = x^2 + 1$

4.4 Eigenschaften von Funktionen

$\Rightarrow$ beschränkte Funktion:
$\exists K \in \mathbb{R} \forall x \in D : \quad |f(x)| \le K$ BEISPIEL: $f(x) = \sin x \le 2 = K$

$\Rightarrow$ gerade, ungerade Funktion
gerade: $\forall x \in D : f(x) = f(-x)$ BEISPIEL: $f(x) = x^2$, $f(x) = x^4$
ungerade: $\forall x \in D : f(x) = -f(-x)$ BEISPIEL: $f(x) = x$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^5$

$\Rightarrow$ periodische Funktion
$\exists p \in \mathbb{R} \forall x \in D : f(x) = f(x + p)$ BEISPIEL: $f(x) = \sin x = \sin(x + 2\pi)$

$\Rightarrow$ monotone Funktion
monoton wachsend: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ BEISPIEL: $f(x) = x$
monoton fallend: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ BEISPIEL: $f(x) = -x$

$\Rightarrow$ konvexe, konkave Funktion
konvex: $\forall \lambda \in [0,1], \forall x_1, x_2 \in D : \ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ BEISPIEL: $f(x) = x^2$
konkav: $\forall \lambda \in [0,1], \forall x_1, x_2 \in D : \ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ BEISPIEL: $f(x) = -x^2$

4.5 Elementare Funktionen

- Potenzfunktion $f(x) = ax^n$
- Polynome, rationale Funktionen $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$
- Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion $f(x) = a^x, \quad f(x) = \log_a(x)$; Spezialfall: $e^x, \quad \log_e(x) = \ln x$
- trigonometrische Funktionen $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$

$\Rightarrow$ Grad $grad(p)$ und Nullstellen (mehrfache) eines *Polynoms*

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Satz 29 (*Fundamentalsatz der Algebra*) *Die* Polynomgleichung

$$p_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

besitzt genau n Lösungen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ im Bereich der komplexen Zahlen unter Beachtung ihrer Vielfachheiten. Das Polynom $p_n(x)$ lässt sich wie folgt darstellen:

$$p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Satz 30

1. *Identitätssatz für Polynome: Stimmen die Werte zweier Polynome $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ und $q(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n$ an $n+1$ verschiedenen Stellen überein, so sind die Polynome identisch, d.h. es ist $a_k = b_k$ für $k = 0, 1, \ldots, n$ und somit $p(x) = q(x)$ für alle x.*
2. *Divisionssatz für Polynome: Ist $s(x)$ ein nichttriviales Polynom, so lässt sich jedes Polynom $p(x)$ in der Form $p = qs+r$ mit grad$(r) <$ grad(s) und eindeutig bestimmten Polynomen q und r darstellen.*

Beispiel: $p(-1) = q(-1) = -1, p(0) = q(0) = -2, p(2) = q(2) = 2 \Rightarrow p(x) = q(x) = x^2 - 2$
Beispiel: $p(x) = x^4 + x - 5$, $s(x) = x^2 + 2 \Rightarrow p(x) = (x^2 - 2)s(x) + (x - 1)$

$\Rightarrow$ Polynomdivision

$\Rightarrow$ Horner-Schema

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (((\ldots((x + a_{n-1})x + \ldots + a_3)x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

schematische numerische Berechnung mit Abkürzung $b_n = a_n = 1$ und $b_k = b_{k+1} \cdot x + a_k$ für $k = n-1, \ldots, 1, 0$:

	$a_n = 1$	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	$\ldots$	a_2	a_1	a_0
x		$1 \cdot x$	$b_{n-1} \cdot x$	$b_{n-2} \cdot x$	$\ldots$	$b_3 \cdot x$	$b_2 \cdot x$	$b_1 \cdot x$
b_k	$b_n = 1$	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\ldots$	b_2	b_1	b_0

Tabelle 1: Horner-Schema

Lernziele

Sie sollten

- wissen, was eine Funktion ist und wie man diese beschreiben kann;
- den Definitionsbereich und den Wertebereich einer Funktion angeben können;
- das Konzept einer inversen Funktion beschreiben und inverse Funktionen berechnen können;
- eine Idee haben, wie man nach einer gesuchten Variablen – durch äquivalentes Umformen unter Einbeziehung von inversen Funktionen – umstellt;
- Eigenschaften von Funktionen, wie Beschränktheit, Symmetrie, Monotonie und Krümmung beschreiben können;
- die aus der Schulmathematik bekannten elementaren Funktionen sicher beherrschen, alle mit diesen Funktionen zusammenhängenden Rechengesetze selbständig wiederholt haben und wissen, in welchen Nachschlagewerken sie diese schnell finden;
- den Fundamentalsatz der Algebra kennen und Polynome in Linearfaktoren zerlegen können.

5 Gleichungen und Ungleichungen

5.1 Kleiner-, Größer, Gleich-Relation

Definition 31 *Zwischen reellen Zahlen $a, b \in R$ sind die $=$, $<$ bzw. $>$ Relation definiert:*

1. *$a = b$ genau dann, wenn $0 = b - a$*
2. *$a < b$ genau dann, wenn $0 < b - a$, d.h. $b - a \neq 0$ und $b - a$ hat natürliche Zahl vor dem Komma in der Dezimaldarstellung*
3. *$a > b$ genau dann, wenn $0 < a - b$, d.h. $a - b \neq 0$ und $a - b$ hat natürliche Zahl vor dem Komma in der Dezimaldarstellung*

Eigenschaften
Für alle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

(O1) entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$

(O2) Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$

(O3) Aus $a < b$ folgt für alle $c \in \mathbb{R}$: $a + c < b + c$

(O4) Aus $a < b$ folgt für alle $c \in \mathbb{R}_{>0}$: $a \cdot c < b \cdot c$

$\Rightarrow$ Rechnen mit Ungleichungen

Satz 32

1. *Wenn $a \leq b$ und $c \leq d$, dann $a + c \leq b + d$.*
2. *Wenn $a \leq b$ und $c < 0$, dann $a \cdot c \geq b \cdot c$.*
3. *Wenn $0 < a \leq b$ und $0 < c \leq d$, dann $a \cdot c \leq b \cdot d$.*
4. *Wenn $0 < a \leq b$, dann $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.*
5. *Wenn $0 < a \leq b$ und $c \leq d$, dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}$*
$$0 < a^n \leq b^n \quad \textit{und} \quad 0 < \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$$
6. *Wenn $0 < a, b$ und $0 < \epsilon$, dann gilt $\frac{a}{b+\epsilon} \leq \frac{a}{b}$*
7. *Wenn $0 < a, b$ und $0 < \epsilon < b$, dann gilt $\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b-\epsilon}$*
8. *$\neg(a \leq b)$ genau dann, wenn $a > b$*
   $\neg(a < b)$ genau dann, wenn $a \geq b$

5.2 Wichtige Ungleichungen und Gleichungen

Satz 33 *Ungleichung vom Arithmetischen- und Geometrischen-Mittel*

$$\forall n \in \mathbb{N}_{>0} \ \textit{und} \ \forall a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \ldots, a_1 \geq 0 :$$

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

Satz 34 *Binomische Formel*

$$\forall n \in \mathbb{N}_{>0} \ \textit{und} \ \forall a, b \in \mathbb{R} : \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

6 Mathematisches Argumentieren, mathematisches Beweisen

Mathematischer Satz hat stets die Struktur, dass aus der Gültigkeit von Voraussetzungen $A_1, \ldots A_k$ die Gültigkeit einer Behauptung B geschlußfolgert wird.

6.1 Direkter Beweis

Zeigen, $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \to B$ ist eine Tautologie.

6.2 Indirekter Beweis

Zeigen, $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B) \to B$ ist eine Tautologie.

6.3 Schubfachprinzip

Falls n Objekte auf m Mengen verteilt werden und es gilt $n > m$, dann gibt es mindestens eine Menge, der mehr als ein Objekt zugeordnet wird.

6.4 Vollständige Induktion

siehe frühere Vorlesung

7 Zahlenfolgen und -reihen

MOTIVATION: Zahlenfolgen sind einer der zentralen Begriffe in der Analysis und die weiteren Kapitel bauen darauf auf. In diesem Kapitel werden wir daher allgemein Zahlenfolgen und ihre Eigenschaften untersuchen.

7.1 Grenzwert einer Zahlenfolge

DEFINITION 35 *Eine reelle* Zahlenfolge *bzw. komplexe Zahlenfolge ist eine Abbildung von* $\mathbb{N}$ *in* $\mathbb{R}$ *bzw. in* $\mathbb{C}$ *mit* $n \to a_n$. *Die* a_n *heißen* Folgenglieder.
BEZEICHNUNG: $\{a_n\}$

BEISPIEL: $a_1 = 500, a_2 = 525, a_3 = 551,25, \ldots$ oder $a_n = 10.000 \cdot 1,05^{n-1} \cdot 0,05$
BEISPIEL: $a_0 = 2 + \mathrm{i}, a_1 = 4 - \mathrm{i}, a_2 = 8 + \mathrm{i}, \ldots$ oder $a_n = 2^{n-1} + (-1)^n\mathrm{i}$

DEFINITION 36

1. *Zwei Folgen heißen gleich* ($\{a_n\} = \{b_n\}$), *wenn* $\forall n\ a_n = b_n$ *gilt.*
   BEISPIEL: $a_n = (-1)^n$, $b_n = \cos(\pi n) \Rightarrow a_n = b_n$
2. *Eine reelle Zahlenfolge* $\{a_n\}$ *heißt*
   2.1. monoton wachsend *(*fallend*), wenn* $\forall n$ *gilt* $a_n \leq a_{n+1}$ $(a_n \geq a_{n+1})$,
   BEISPIEL: *monoton wachsend* $a_n = n$, *monoton fallend* $a_n = \frac{1}{n}$,
   2.2. beschränkt, *wenn* $\exists K\ \forall k$ *gilt* $|a_k| \leq K$.
   BEISPIEL: $|a_k| = |\frac{1}{k}| \leq 2$
3. *Eine Zahl a heißt* Grenzwert *(*Limes*) der Folge* $\{a_n\}$, *wenn* $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n \geq N(\varepsilon)$ *gilt*
   $$|a_n - a| < \varepsilon.$$
   BEZEICHNUNG: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *oder* $a_n \to a$ *für* $n \to \infty$
   BEISPIEL: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
4. *Wenn* $\{a_n\}$ *einen Grenzwert hat, so heißt die Folge* konvergent, *andernfalls* divergent.
   BEISPIEL: $a_n = \frac{1}{n}$ *ist konvergent,* $b_n = n$ *ist divergent*
5. *Ist der Grenzwert* 0, *so heißt die Folge eine* Nullfolge.
6. *Gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, *so heißt die Folge* bestimmt divergent *gegen* $+\infty$ *bzw.* $-\infty$.
   BEISPIEL: $a_n = n$ *ist bestimmt divergent gegen* $+\infty$

BEISPIEL: Die Folge $\{a_n\}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ $(\forall n \geq 1)$ ist eine monoton fallende, beschränkte Nullfolge.

SATZ 37 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *bedeutet: Zu jeder noch so kleinen* ε*-Umgebung* U_ε *von a gibt es eine Zahl N so, dass ab dem Index N alle Glieder* a_n *(mit* $n \geq N$*) der Folge in* U_ε *liegen.*

SATZ 38 *Der Grenzwert einer Folge ist, falls er existiert, eindeutig bestimmt.*

DEFINITION 39 *Eine komplexe Zahlenfolge* z_n *ist konvergent, wenn* $Re(z_n)$ *und* $Im(z_n)$ *konvergent sind. Es gilt:*
$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} Re(z_n) + \mathrm{i} \cdot \lim_{n\to\infty} Im(z_n)$$

$\Rightarrow$ Einige wichtige Folgen und deren Grenzwerte:

- $\forall c \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = 0$

- $\forall c \in \mathbb{R}_+, \ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{falls } -1 < q < 1 \\ 1 & \text{falls } q = 1 \\ \text{existiert nicht} & \text{falls } q \leq -1 \\ \infty & \text{falls } 1 < q \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e = 2,718...$
- $\forall c \in \mathbb{R}, \ \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{c}{n})^n = e^c$

Satz 40 *Seien $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ konvergente Zahlenfolgen mit den Grenzwerten a und b und sei α eine reelle Zahl. Dann gilt:*

- $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha a_n) = \alpha a,$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b,$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$
- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|,$
- *aus $b_n \neq 0$ und $b \neq 0$ folgt* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$

Beispiele:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 3 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 3 \cdot 0 = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (3 - \frac{2}{n} + \sqrt[n]{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} 3 - 2 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 3 - 0 + 1 = 4$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (3\sqrt[n]{5})(2 - \frac{1}{n}) = 3 \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{5}) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (2 - \frac{1}{n}) = 3 \cdot 2 = 6$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{4-\frac{5}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2+\frac{3}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 4-\frac{5}{n}} = \frac{2}{4}$

$\Rightarrow$ Rechnen mit Unendlich

- $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty \cdot \infty = \infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 + n^6 = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 + \lim\limits_{n\to\infty} n^6 = \infty + \infty = \infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n^5 - n^3 = \lim\limits_{n\to\infty} n^3(n^2 - 1) = \lim\limits_{n\to\infty} n^3 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} n^2 - 1 = \infty \cdot \infty = \infty$ Nicht: $\infty - \infty = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n}{4n^2-5n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(2+\frac{3}{n})}{n^2(4-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{4-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2+\frac{3}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 4-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{4}$ Nicht: $\frac{\infty}{\infty} = 1$

7.2 Konvergenzkriterien

Satz 41 1. **Notwendiges Konvergenzkriterium**

Jede konvergente Zahlenfolge $\{a_n\}$ ist beschränkt.

2. **Hinreichendes Konvergenzkriterium**

Jede beschränkte, monotone Folge $\{a_n\}$ ist konvergent.

3. **Vergleichskriterium**
Strebt $\{a_n\} \to a$ und $\{b_n\} \to a$ und gilt (fast immer) $a_n \le c_n \le b_n$, so konvergiert auch $\{c_n\}$ gegen a.

Beispiel:

- $0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4n^2} \le \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+3n+1} \le \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+3n+1} = 0$
- $0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{n} \le \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} \le \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$

7.3 Arithmetische und Geometrische Folgen

Definition 42 *Eine Zahlenfolge wird* arithmetisch *genannt, wenn die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant ist.*

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Beispiel: $a_0 = 3, d = 2$: $\quad a_0 = 3, a_1 = 5, a_2 = 7, a_3 = 9, \ldots$

Definition 43 *Eine Zahlenfolge wird* geometrisch *genannt, wenn der Quotient aufeinanderfolgender Glieder konstant ist.*

$$a_{n+1} = q \cdot a_n$$

Beispiel: $a_0 = 3, q = 2$: $\quad a_0 = 3, a_1 = 6, a_2 = 12, a_3 = 24, \ldots$

7.4 Landau'sche Symbole

Vergleich von Algorithmen
Kriterien:

- Speicherplatzbedarf
- Laufzeit

Als Maß für die Größe des Problems kann eine natürliche Zahl verwendet werden; z. B.

- Anzahl n der zu sortierenden Objekte
- Anzahl n der Speicherplätze

Für die benötigte Zeit oder den erforderlichen Speicherplatz eines Algorithmus ergibt sich eine Zahlenfolge. Für diese Anwendung verwendet man divergente Folgen, die nach oben unbeschränkt sind. Verhalten des Algorithmus wird beschrieben, wenn die Größe des Problems anwächst.
Landau-Symbole: Aussagen über das Wachstum von Folgen.

Definition 44 *Landau'sches Symbol:*
Wir sagen, $f(n)$ ist $O(g(n))$, schreibe $f(n) = O(g(n))$, falls $M = const.$ existiert mit

$$\frac{f(n)}{g(n)} \le M \quad \Big(\iff f(n) \le M \cdot g(n)\Big).$$

$\Rightarrow$ Äquivalente Formulierung mit Folgen: a_n ist $O(b_n)$

Definition 45 *Wir sagen, $f(n)$ ist $o(g(n))$, schreibe $f(n) = o(g(n))$, falls*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

Definition 46 *Wir sagen, $f(n)$ ist $\Omega(g(n))$, schreibe $f(n) = \Omega(g(n))$, falls $m = const.$ existiert mit*

$$m \le \frac{f(n)}{g(n)} \quad \Big(\iff m \cdot g(n) \le f(n)\Big).$$

Definition 47 *Wir sagen, $f(n)$ ist $\Theta(g(n))$, schreibe $f(n) = \Theta(g(n))$, falls $M = const., m = const.$ existieren mit*

$$m \le \frac{f(n)}{g(n)} \le M \quad \Big(\iff m \cdot g(n) \le f(n) \le M \cdot g(n)\Big).$$

7.5 Zahlenreihen

7.5.1 Begriff der unendlichen Reihe

DEFINITION 48 *1. Sei $\{a_n\}$ eine Zahlenfolge, so heißt $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ die n-te Partialsumme.*

2. Die Folge $\{s_n\}$ der n-ten Partialsummen heißt unendliche Reihe.

3. Konvergiert $\{s_n\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, so nennt man die unendliche Reihe konvergent und s heißt der Wert der Reihe oder die Reihensumme. Man schreibt $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$. Eine nicht konvergierende Reihe heißt divergent.

BEISPIEL Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ konvergiert, die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \ln 2$ konvergiert ebenfalls, aber die (harmonische) Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert.

$\Rightarrow$ Reihe ist keine Summe im üblichen Sinn. Der Reihenwert ist abhängig von der Reihenfolge der Reihenglieder.

BEISPIEL Partialsumme einer arithmetischen Folge ist $s_n = (n+1)a_0 + \dfrac{n(n+1)}{2}d$, die Reihe divergiert gegen $\pm\infty$

Partialsumme einer geometrischen Folge ist $s_n = a_0 \cdot \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$, die Reihe (*geometrische Reihe*) konvergiert gegen $a_0 \cdot \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$ und divergiert gegen $\pm\infty$ für $|q| \geq 1$.

SATZ 49 *1. Wenn $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (notwendiges Konvergenzkriterium).*

SATZ 50 *1. Konvergente Reihen dürfen gliedweise addiert werden. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k + \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$*

2. Eine konvergente Reihe darf mit einem Faktor multipliziert werden. $\alpha \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (\alpha \cdot a_k)$

7.5.2 Konvergenzkriterien

SATZ 51 *1. (Leibnizsche Regel) Ist $\{a_k\}$ eine monoton fallende Nullfolge, so ist die alternierende Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergent.*

2. (Majorantenkriterium) Ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ eine konvergente Reihe mit nichtnegativen Gliedern und gilt (fast immer) $|a_k| \leq b_k$, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

3. (Minorantenkriterium) Ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ eine divergente Reihe mit nichtnegativen Gliedern und gilt (fast immer) $a_k \geq b_k$, so divergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

4. Wurzelkriterium $\forall k \geq k_o : \sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \Rightarrow$ Konvergenz oder $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \Rightarrow$ Konvergenz
$\forall k \geq k_o : \sqrt[k]{|a_k|} \geq 1 \Rightarrow$ Divergenz oder $\liminf\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1 \Rightarrow$ Divergenz

5. Quotientenkriterium $\forall k \geq k_o : |\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq q < 1 \Rightarrow$ Konvergenz oder $\limsup\limits_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| < 1 \Rightarrow$ Konvergenz
$\forall k \geq k_o : |\frac{a_{k+1}}{a_k}| \geq 1 \Rightarrow$ Divergenz oder $\liminf\limits_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| > 1 \Rightarrow$ Divergenz

Achtung ! $\forall k \geq k_o : |\frac{a_{k+1}}{a_k}| < 1 \not\Rightarrow$ Konvergenz oder $\limsup\limits_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = 1 \not\Rightarrow$ Konvergenz (analog für das Wurzelkriterium).

7.6 Potenzreihen

Definition 52 *Es seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und die Folge $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ gegeben. Der Ausdruck $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ heißt Potenzreihe in $x-x_0$ mit den Koeffizienten a_k. x ist eine reelle Variable und x_0 ist das Entwicklungszentrum der Reihe.*

$\Rightarrow$ Es wird verabredet, dass $(x-x_0)^0 = 1$ ist, auch für $x = x_0$.

$\Rightarrow$ Die n-ten Partialsummen einer Potenzreihe sind Polynome n-ten Grades.

$\Rightarrow$ Für festes x ist die Potenzreihe eine Zahlenreihe. Konvergiert sie für dieses x heißt die Reihe in x punktweise konvergent.

$\Rightarrow$ Eine Potenzreihe konvergiert, wenn für jedes x die Folge der Partialsummen konvergiert.

Satz 53 *Es gibt eine Zahl $r \geq 0$ so, dass die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ für alle x mit $|x-x_0| < r$ konvergiert und für alle x mit $|x-x_0| > r$ divergiert. Die Zahl r heißt Konvergenzradius der Potenzreihe und kann nach der Formel*

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \textit{bzw.} \qquad r = \frac{1}{\limsup |\frac{a_{n+1}}{a_n}|}$$

berechnet werden. Für alle x mit $|x-x_0| \leq r_1 < r$ ist die Reihe konvergent. Stimmt x mit einem der Randpunkte des Konvergenzintervalls überein, kann man ohne weitere Untersuchungen keine Aussage über das Konvergenzverhalten machen.

Lernziele

Sie sollten

- wissen, was eine Zahlenfolge ist und sie auf Eigenschaften wie Gleichheit, Beschränktheit, Monotonie, überprüfen können sowie mit typischen Beispielen zu jeder der Eigenschaften vertraut sein
- wissen, was der Grenzwert einer Folge ist und die Eigenschaft der Konvergenz bzw. Divergenz/bestimmten Divergenz einer Folge sowohl mathematisch präzise formulieren als auch jeweils mit einer Skizze schematisch beschreiben können
- wissen, was eine Nullfolge ist
- die Grenzwerte von einigen wichtigen grundlegenden Folgen kennen
- die Rechenregeln für konvergente Folgen sicher beherrschen (d.h. für Linearkombinationen, Produkte, Quotienten, Absolutbeträge konvergenter Folgen die entsprechenden Grenzwerte ermitteln können)
- sich darüber bewusst sein, dass für bestimmt divergente Folgen nur wenige Rechenregeln existieren, es also unbestimmte Ausdrücke gibt, deren Grenzverhalten jeweils vom konkreten Fallbeispiel abhängt
- ein notwendiges Konvergenzkriterium und ein hinreichendes Konvergenzkriterium für Zahlenfolgen kennen und damit argumentieren können
- das Vergleichskriterium kennen und anwenden können, um eine Aussage bezüglich der Konvergenz einer Folge zu treffen
- mit rekursiven Folgen, speziell mit arithmetischen und geometrischen Folgen vertraut sein, d.h., einerseits erkennen können, wann eine solche vorliegt, und andererseits die Folgenglieder aus der jeweiligen Vorschrift ermitteln können
- Aussagen über die Konvergenz bzw. (eventuell bestimmten) Divergenz von arithmetischen und geometrischen Folgen treffen können
- mit den Begriffen Partialsumme und unendliche Reihe sicher umgehen können sowie wissen, wann man eine Reihe konvergent nennt
- typische unendliche Reihen (z.B. die geometrische Reihe oder die harmonische Reihe) und ihr Konvergenzverhalten kennen
- ein notwendiges Konvergenzkriterium für Reihen kennen sowie mit den Rechenregeln für konvergente Reihen vertraut sein
- das Leibniz-Kriterium als hinreichendes Konvergenzkriterium für alternierende unendliche Reihen korrekt formulieren und auf konkrete Beispiele anwenden können
- das Majorantenkriterium als das wichtigste hinreichende Konvergenzkriterium für Reihen kennengelernt haben und dieses unter anderem auch in Gestalt seiner Spezialfälle (Quotienten- und Wurzelkriterium) auf konkrete Beispiele sicher anwenden können
- das Minorantenkriterium als das wichtigste hinreichende Divergenzkriterium für Reihen kennengelernt haben und dieses unter anderem auch in Gestalt seiner Spezialfälle (Quotienten- und Wurzelkriterium) auf konkrete Beispiele sicher anwenden können
- den Begriff der Potenzreihe kennen sowie den zugehörigen Konvergenzradius einer Potenzreihe ermitteln und die daraus richtigen Schlussfolgerungen für das Konvergenzverhalten im konkreten Fall ziehen können

8 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

Motivation: Wie verhält sich eine Funktion bei einer kleinen Änderung der beteiligten Variablen? Diese Frage wird untersucht und dazu werden die Begriffe Grenzwert einer Funktion und Stetigkeit einer Funktion eingeführt. Die beiden letzten Begriffe bilden die Grundlage für das nächste Kapitel, die Differentialrechnung.

8.1 Grenzwert von Funktionen

Definition 54 *Es sei x_0 ein Punkt des Definitionsbereiches $D \subseteq \mathbb{R}$ der Funktion f. Diese hat an der Stelle x_0 den Grenzwert g (rechtsseitigen Grenzwert bzw. linksseitigen Grenzwert)*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \qquad (\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\downarrow x_0} f(x) = g \text{ bzw. } \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\uparrow x_0} f(x) = g),$$

falls für jede Folge $x_n \to x_0$ ($x_n > x_0$ bzw. $x_n < x_0$) strebt die Folge $f(x_n) \to g$.
Auch die Fälle $x_0 \to \pm\infty$ (Grenzwert im Unendlichen) und $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ (Uneigentlicher Grenzwert) sind möglich.

Beispiele:

$$\lim_{x\to 2} x^2+1 = 5,\ \lim_{x\to 0} x^2+1 = 1,\ \lim_{x\to 0} x\ln x = 0,\ \lim_{x\to x_0} x = x_0$$

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0+0} e^x = \lim_{x\to 0-0} e^x = \lim_{x\to 0} e^x = 1, \quad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty, \quad \lim_{x\to -\infty} e^x = 0$$

$\Rightarrow$ Rechenregeln und elementare Methoden zur Grenzwertberechnung

Satz 55 *Seien $f(x)$ und $g(x)$ Funktionen für die die Grenzwerten $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ existieren. Dann gilt:*

- $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha f(x) = \alpha \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, *falls* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$
- *ist $g(x)$ eine stetige Funktion (Definition unten, alle elementaren Funktionen sind stetig), dann gilt:* $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim\limits_{x\to x_0} f(x))$,
- *ist $g(x)$ eine stetige Funktion, dann gilt insbesondere (mit $f(x) = x$):* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(\lim\limits_{x\to x_0} x) = g(x_0)$.

Beispiele:

- $\lim\limits_{x\to 2} 4x^2 = 4 \lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4 \cdot 4 = 16$
- $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 + \frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to 2} x^2 + \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x} = 4 + \frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 2} x^2(1 + \frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to 2} x^2 \cdot \lim\limits_{x\to 2} (1 + \frac{1}{x}) = 4(1 + \frac{1}{2}) = 6$
- $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3+1}{x} = \frac{\lim_{x\to 2} x^3+1}{\lim_{x\to 2} x} = \frac{9}{2}$

$\Rightarrow$ Unbestimmte Ausdrücke

8.2 Stetigkeit

Definition 56 *1. Die Funktion $f(x), x \in D \subseteq \mathbb{R}$ heißt im Punkt $x_0 \in D$* stetig, *wenn*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

gilt. Andernfalls heißt die Funktion unstetig *in x_0.*

2. f heißt stetig in einer Menge $I \subseteq D$, wenn f in jedem Punkt von I stetig ist. Falls $I = D$, sagt man f ist stetig.

⇒ Anschauliche Deutung der Stetigkeit

⇒ Klassifikation von *Unstetigkeitsstellen*

- Sprungstelle $\lim_{x \uparrow x_0} f(x) \neq \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$

  Beispiel: $f(x) = \begin{cases} x & x < 2 \\ x^2 & 2 \leq x \end{cases}$

- Polstelle $|\lim_{x \uparrow x_0} f(x)| = |\lim_{x \downarrow x_0} f(x)| = \infty$

  Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x}$ oder $f(x) = \frac{1}{x^2}$

- Lücke $\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = a$, aber $f(x_0)$ ist nicht definiert oder $f(x_0) \neq a$

  Beispiel: $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

Satz 57 *1. Summe, Differenz, Produkt und Quotient (Nenner $\neq 0$) von stetigen Funktionen sind stetig. (Speziell sind Polynome und rationale Funktionen stetig)*

2. Die Verkettung stetiger Funktionen ist stetig.

3. Jede elementare Funktion ist auf jedem Intervall ihres Definitionsbereiches stetig.

Beispiel: $f(x) = \begin{cases} x & |x| > 1 \\ x^2 & |x| \leq 1 \end{cases}$ ist unstetig bei $x_0 = -1$, aber stetig bei $x_0 = 1$

Satz 58 *[Eigenschaften stetiger Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen]*

1. **Bolzano** *[1781-1848] Ist f auf dem Intervall $I = [a, b]$ stetig und $f(a) \cdot f(b) < 0$, dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit der Eigenschaft $f(c) = 0$.*
2. **Zwischenwertsatz** *Ist f auf dem Intervall $I = [a, b]$ stetig und $f(a) < y_0 < f(b)$, dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit der Eigenschaft $f(x_0) = y_0$.*
3. **Weierstraß** *[1815-1897] Jede auf $[a, b]$ stetige Funktion hat dort ein Minimum und ein Maximum, d.h. es existieren stets Werte $x_0,\ x_1 \in [a, b]$ so, dass $\forall x \in [a, b]$ die Ungleichung $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ gilt.*

Lernziele

Sie sollten

- die Definition des (auch einseitigen und ggf. uneigentlichen) Grenzwertes einer Funktion mit Hilfe von Folgen sicher formulieren können und somit die Rechenregeln für konvergente Folgen übertragen und sicher anwenden können
- die Definition der Stetigkeit einer Funktion kennen
- die wichtigsten Klassen stetiger Funktionen kennen und wissen, wie man aus ihnen weitere stetige Funktionen gewinnen kann
- die Arten einer Unstetigkeitsstelle (Sprungstelle, Polstelle, Definitionslücke) bestimmen bzw. erkennen können
- stückweise (abschnittsweise) definierte Funktionen auf Stetigkeit überprüfen können
- Sie sollten die drei wichtigsten Aussagen über stetige Funktionen kennen:
  - Nullstellensatz von Bolzano
  - Zwischenwertsatz (als Folgerung des Nullstellensatzes)
  - Satz vom Minimum/Maximum (Satz von Weierstraß)

9 Algebraische Strukturen, Gruppen, Ringe, Körper

9.1 Operationen

Eine zweistellige Operation $\circ$ auf einer Menge X	
ist *assoziativ*,	wenn $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ für alle $x, y, z \in X$.
ist *kommutativ*,	wenn $x \circ y = y \circ x$ für alle $x, y \in X$.
ist *distributiv* über der Oper. $*$,	wenn $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$ für alle $x, y, z \in X$.
hat ein *neutrales Element*/, *Einselement* e	wenn $x \circ e = e \circ x = x$ für alle $x \in X$.
hat ein *Nullelement* h,	wenn $x \circ h = h \circ x = h$ für alle $x \in X$.

Das Element $x \in X$ hat ein *Inverses* x^{-1}, wenn $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$.

9.2 Halbgruppen

Definition 59 *Eine* Halbgruppe $(X, \circ)$ *ist eine Menge X mit einer zweistelligen, assoziativen Operation $\circ$ auf X.*
Falls $(X, \circ)$ kommutativ ist, heißt $(X, \circ)$ abelsche Halbgruppe (oder kommutative Halbgruppe). Eine Halbgruppe mit einem Einselement nennt man Monoid.

$\Rightarrow$ Beispiele, Halbgruppentafel

Satz 60 *Sei $(X, \circ)$ eine Halbgruppe. Dann gilt:*

1. *X besitzt höchstens ein Einselement und höchstens ein Nullelement,*
2. *besitzt X ein Einselement, und hat $x \in X$ ein Inverses x^{-1}, dann ist x^{-1} eindeutig bestimmt.*

Definition 61 *Sei $(X, \circ)$ eine Halbgruppe und $X' \subseteq X$. Dann heißt X' Unterhalbgruppe von X, wenn $(X', \circ')$ eine Halbgruppe ist. Dabei ist $\circ'$ die Einschränkung von $\circ$ auf $X' \times X'$.*

Satz 62 *X' ist Unterhalbgruppe von X genau dann, wenn $\{x \circ y : x, y \in X'\} \subseteq X'$.*

Definition 63 *Seien $(X_1, \circ_1)$ und $(X_2, \circ_2)$ zwei Halbgruppen. Dann heißen X_1 und X_2* isomorph*, wenn es eine bijektive Abbildung $\alpha : X_1 \to X_2$ gibt mit: $\forall x, y \in X_1 : \alpha(x \circ_1 y) = \alpha(x) \circ_2 \alpha(y)$.*

Definition 64 *Seien $(X_1, \circ_1)$ und $(X_2, \circ_2)$ zwei Halbgruppen. Dann heißt X_2* homomorphes Bild *von X_1, wenn es eine surjektive Abbildung $\alpha : X_1 \to X_2$ gibt mit: $\forall x, y \in X_1 : \alpha(x \circ_1 y) = \alpha(x) \circ_2 \alpha(y)$.*
Die Abbildung α wird dann Homomorphismus *genannt.*

9.3 Gruppen

Definition 65 *Eine* Gruppe $(X, \circ)$ *ist eine Menge X mit einer Operation $\circ$ auf X mit folgenden Eigenschaften:*
1. assoziativ,
2. es existiert ein neutrales Element e,
3. jedes Element $x \in X$ hat ein eindeutiges Inverses x^{-1}.
4. Falls $(X, \circ)$ kommutativ ist, heißt $(X, \circ)$ abelsche Gruppe (oder kommutative Gruppe).

$\Rightarrow$ Beispiel Zyklische Gruppe $\mathbb{Z}_n = (\mathbb{Z}_n, + \mod n)$

Definition 66 *Sei $x \in X$ und $R \subseteq X \times X$ eine Äquivalenzrelation. Die Menge*

$$[x]_R := \{y \in X : (x, y) \in R\}$$

heißt Äquivalenzklasse *von x.*

Definition 67 *Sei $R \subseteq X \times X$ eine Äquivalenzrelation. Die Menge*

$$X/R := \{[x]_R : x \in X\}$$

heißt Faktormenge *von X nach R und ist die Menge aller Äquivalenzklassen der Relation R.*

Kongruenz modulo n: Für alle $n \in \mathbb{N}_+$ ist

$$\equiv_n := \{a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n \text{ teilt } b - a\}$$

eine Äquivalenzrelation.

⇒ Beispiel Symmetrische Gruppe S_n

⇒ Beispiel Dieder-Gruppe D_n

Notation: Für Gruppe $(X, \circ)$, $a \in X$ und $n \in \mathbb{N}$ wird definiert:

$$a^0 = e \tag{1}$$
$$a^n = \underbrace{a \circ a \circ \ldots \circ a}_{n\text{-mal}} \tag{2}$$
$$a^{-n} = \underbrace{a^{-1} \circ a^{-1} \circ \ldots \circ a^{-1}}_{n\text{-mal}} \tag{3}$$

Die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$, für die $a^n = e$ gilt, nennt man *Ordnung* von a und bezeichnet sie mit *ord*(a).
Sei Gruppe $(X, \circ)$ eine Gruppe und $X' \subseteq X$. Die Menge

$$\langle X' \rangle = \{a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_r | \{a_1, \ldots, a_r\} \subseteq X' \cup X'^{-1} \wedge r \in \mathbb{N}\},$$

mit $X'^{-1} = \{x^{-1} | x \in X'\}$ heißt *Abschluss* von X'.
Ein Element $a \in X$ wird *erzeugendes Element* genannt, wenn $\langle \{a\} \rangle = X$ gilt.

Für endliche Gruppen ist die Hinzunahme von X'^{-1} in die Definition des Abschlusses nicht notwendig.

Satz 68 *(Cayley) Sei $X = (X, \bullet)$ eine endliche Gruppe mit n Elementen. Dann existiert eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe $(S_n, \circ)$, die zu X isomorph ist.*

9.4 Ringe, Körper

Definition 69 *Ein* Ring $(X, \circ, *)$ *ist eine Menge X mit zwei Operationen $\circ$ und $*$ auf X mit folgenden Eigenschaften:*
1. $(X, \circ)$ ist eine abelsche Gruppe.
2. $(X, *)$ ist eine Halbgruppe.
3. Es gilt das Distributivgesetz.

⇒ Beispiel: $(\mathbb{Z}_n, + \mod n, \cdot \mod n)$

Definition 70 *Ein* Körper $(X, \circ, *)$ *ist eine Menge X mit zwei Operationen $\circ$ und $*$ auf X mit folgenden Eigenschaften:*
1. $(X, \circ)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0.
2. $(X \setminus \{0\}, *)$ ist eine abelsche Gruppe.
3. Es gilt das Distributivgesetz.

⇒ oft: $\circ$ - $+$ - Addition

⇒ oft: $*$ - $\cdot$ - Multiplikation

⇒ 0 - Nullelement = neutrales Element bzgl. der Addition

⇒ 1 - Einselement = neutrales Element bzgl. der Multiplikation

⇒ Beispiele: $\mathbb{R}, \mathbb{C}$

Achtung ! Bezeichnung $\mathbb{F}_n$ für Körper mit n Elementen.

⇒ Beispiele für endliche Körper:
$\mathbb{F}_p = (\mathbb{Z}_p, + \bmod p, \cdot \bmod p)$, falls p eine Primzahl ist.
$\mathbb{F}_4 = (X = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1\}, +, \cdot)$ mit

$+$	0	1	α	α+1
0	0	1	α	α+1
1	1	0	α+1	α
α	α	α+1	0	1
α+1	α+1	α	1	0

$\cdot$	1	α	α+1
1	1	α	α+1
α	α	α+1	1
α+1	α+1	1	α

⇒ Isomorphie

Achtung ! $\mathbb{F}_n$ existiert genau für Primzahlpotenzen n und ist dann bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

10 Einführung in Matrizen

10.1 Beispiele und Definitionen

⇒ Einführendes Beispiel: Teileverflechtung
Materialeinsatz bei einer mehrstufigen Produktion (3 Endprodukte, 4 Zwischenprodukte und 3 Rohstoffe) dargestellt in Tabellenform:

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
E_1	2	1	3	0
E_2	3	2	1	1
E_3	0	3	1	2

	R_1	R_2	R_3
Z_1	3	1	5
Z_2	4	1	2
Z_3	0	1	3
Z_4	2	1	4

Problem: Wieviele Einheiten Rohstoff werden für eine Einheit der Endprodukte benötigt? Lösung auch dargestellt in Tabellenform:

	R_1	R_2	R_3
E_1	10	6	21
E_2	19	7	26
E_3	16	6	17

Wichtig sind **zum Rechnen** nur die Zahlen in der Tabelle.

$$\begin{pmatrix} 10 & 6 & 21 \\ 19 & 7 & 26 \\ 16 & 6 & 17 \end{pmatrix}$$

Definition 71 *Ein rechteckiges Schema von $m \cdot n$ Elementen a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ die in m Zeilen und n Spalten angeordnet sind, heißt* Matrix *vom Typ (m, n). Man schreibt*

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m,n} \ .$$

Dabei ist a_{ij} das Element in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte. Elemente *der Matrix können Zahlen, Funktionswerte, etc. sein.*

Mit $M_{m\times n}$ wird die Menge aller $m \times n$ Matrizen bezeichnet.

Sind alle Elemente der Matrizen reelle bzw. komplexe Zahlen, dann sind auch die Bezeichnungen $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ bzw. $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ üblich.

Allgemein bezeichnet $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ die Menge der $m \times n$ Matrizen über dem Körper $\mathbb{F}$.

10.2 Spezielle Matrizen

Quadratische Matrizen, *Diagonalmatrix*, *Dreiecksmatrix*, *Trapezmatrix*, *Einheitsmatrix*, *Nullmatrix*, *Spaltenvektor*, *Zeilenvektor*, *Skalare*

Bezeichnungen

- große lateinische Buchstaben $A, B, C, \ldots$ für Matrizen
- kleine lateinische Buchstaben $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$ oder $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \ldots$ oder $a, b, c, \ldots$ für (Spalten)Vektoren
- $\mathbf{a}'$ oder $\mathbf{a}^T$ für Zeilenvektoren

- kleine griechische Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \ldots$ für Skalare

Beispiel Umsatz für 3 Produktvarianten (2008, in Tausend US-Dollar)

Quartal j / Variante i	I	II	III	IV	Gesamtumsatz je Variante
1	100	120	130	150	500
2	120	120	100	80	420
3	80	120	100	130	430
Quartalsumsatz	300	360	330	360	1350

Umsatzmatrix:

$$U = \begin{pmatrix} 100 & 120 & 130 & 150 \\ 120 & 120 & 100 & 80 \\ 80 & 120 & 100 & 130 \end{pmatrix}$$

Quartalsumsatzvektor:

$$\mathbf{q}^T = \begin{pmatrix} 300 & 360 & 330 & 360 \end{pmatrix}$$

Variantenumsatzvektor:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 500 \\ 420 \\ 430 \end{pmatrix}$$

10.3 Relationen und Operationen mit Matrizen

Definition 72 *Zwei Matrizen sind* gleich, *$A = B$, wenn sie den gleichen Typ haben und $a_{ij} = b_{ij}$ für alle i, j gilt.*

Umsatz Jahr 2007 (in Tausend Euro)

$$U_1 = \begin{pmatrix} 160 & 190 & 208 & 240 \\ 192 & 190 & 160 & 125 \\ 125 & 195 & 160 & 205 \end{pmatrix}$$

Umsatz Jahr 2008 (in Tausend Euro)

$$U_2 = \begin{pmatrix} 120 & 145 & 132 & 160 \\ 153 & 120 & 160 & 120 \\ 180 & 140 & 150 & 180 \end{pmatrix}$$

Problem: Gesamtumsatz in den Jahren 2007 und 2008? (in Tausend Euro)

$$U = U_1 + U_2 = \begin{pmatrix} 280 & 335 & 340 & 400 \\ 345 & 310 & 320 & 245 \\ 305 & 335 & 310 & 385 \end{pmatrix}$$

Definition 73 *Für zwei Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ vom gleichen Typ ist die* Summe *$C = (c_{ij})$ definiert durch:*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ .$$

Innere Verknüpfung/Operation

$$+ : M_{m\times n} \times M_{m\times n} \to M_{m\times n}$$

algebraische Struktur $(M_{m\times n}, +)$ einer Gruppe
Umtauschkurs: 1 Euro = 1,40 US-Dollar

$$\begin{aligned} U_{\text{Dollar}} = 1,40 \cdot U_{\text{Euro}} &= 1,40 \cdot \begin{pmatrix} 280 & 335 & 340 & 400 \\ 345 & 310 & 320 & 245 \\ 305 & 335 & 310 & 385 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 392 & 469 & 476 & 560 \\ 483 & 434 & 448 & 343 \\ 427 & 469 & 434 & 539 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definition 74 *Für eine Matrix $A = (a_{ij})$ und einen Skalar λ wird die* Skalare Multiplikation *$C = (c_{ij}) = \lambda A$ definiert durch:*

$$c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}.$$

Äußere Verknüpfung/Operation

$$\cdot : \mathbb{F} \times M_{m\times n} \to M_{m\times n}$$

Struktur?

$\Rightarrow$ Linearkombination von Vektoren

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

Satz 75 *Für Skalare α und β und Matrizen A und B gleichen Typs gilt:*

1. $$1 \cdot A = A$$
2. $$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$$
3. $$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$$
4. $$(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$$

Definition 76 *Für eine Matrix $A = (a_{ij})_{m,n}$ wird die* Transponierte $C = (c_{ij})_{n,m} = A^T$ *definiert durch:*

$$c_{ij} = a_{ji}.$$

Das Transponieren *bezeichnet also das Vertauschen von Zeilen und Spalten.*

$$\text{Beispiel:} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Rechenregel: $(A^T)^T = A$

Definition 77 *Für einen Zeilenvektor $\mathbf{a}^T = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und einen Spaltenvektor*

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

wird das Skalarprodukt $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}$ *definiert durch:*

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} &= (a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = \sum_{l=1}^{n} a_l b_l. \end{aligned}$$

Kostenvergleich Druckfarbenversorgung
Gegeben: 4 Druckereien $D_1, \ldots, D_4$, 3 Druckfarbenhersteller F_1, F_2, F_3
Preistabelle P (Kilopreis in Euro)

	Gelb	Magenta	Cyan	Schwarz
F_1	2,50	3,80	3,80	2,50
F_2	2,60	3,60	3,80	2,60
F_3	2,60	3,90	3,90	2,40

Zeilen: Preisvektoren $\mathbf{p_1}^T, \mathbf{p_2}^T, \mathbf{p_3}^T$

Bedarfstabelle B (Kilo je Woche)

	D_1	D_2	D_3	D_4
Gelb	300	350	200	500
Magenta	500	520	500	850
Cyan	600	650	350	800
Schwarz	1400	1500	1200	2000

Spalten: Bedarfsvektoren $\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_4}$
Problem: Jede Druckerei soll von einem Farbhersteller beliefert werden, welches ist der jeweils günstigste Lieferant?

$\Rightarrow$ Berechne Kostenmatrix $K = (k_{ij})$, Element k_{ij} enthält Kosten in Euro pro Woche für Lieferung von Farblieferant F_i and Druckerei D_j.

$$k_{ij} = \mathbf{p_i}^T \cdot \mathbf{b_j} = \sum_{l=1}^{4} p_{il} b_{lj}$$

$$\Rightarrow \; K = P \cdot B$$

Kostentabelle: K (Euro pro Woche)

	D_1	D_2	D_3	D_4
F_1	8430,00	9071,00	6730,00	12520,00
F_2	8500,00	9152,00	6770,00	12600,00
F_3	8430,00	8073,00	6715,00	12535,00

Definition 78 *Für zwei verkettete Matrizen $A = (a_{ij})_{m,n}$ und $B = (b_{ij})_{n,k}$ wird das* Produkt *$C = (c_{ij})_{m,k}$ definiert durch:*

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \cdot b_{lj}.$$

$\Rightarrow$ Falksches Schema zum praktischen Rechnen

Rechenregeln:

Satz 79 *Für α und β und $n \times k$ Matrizen B und C und eine $m \times n$ Matrix A gilt:*

$$A(\alpha B + \beta C) = \alpha AB + \beta AC.$$

Folgerung 80 *Für quadratische Matrizen A, B und C gilt:*

$$A(B + C) = AB + AC$$

und

$$(B + C)A = BA + CA.$$

Achtung ! Die Matrix-Multiplikation ist nicht kommutativ, d.h. $AB \neq BA$

Satz 81 *Für jede quadratische Matrix A und die Einheitsmatrix E gilt:*

$$E \cdot A = A$$

und

$$A \cdot E = A.$$

11 Vektorräume

11.1 Definition Vektorraum

Ein Vektorraum ist eine algebraische Struktur in der zwei algebraische Strukturen (eine additive Gruppe und ein Körper) auf **verschiedenen Trägermengen** verküpft werden.

DEFINITION 82 *Ein* $\mathbb{F}$-Vektorraum *(*$\mathbb{K}$*-Vektorraum)* $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$ *ist eine nichtleere Menge* V *mit einer inneren Verküpfung/Operation*

$$+ : V \times V \to V$$

und einer äußere Verknüpfung/Operation über dem Körper $\mathbb{F} = (\mathbb{F}, +, \cdot)$

$$\cdot : \mathbb{F} \times V \to V,$$

die die untenstehenden Vektorraumaxiome (V1) bis (V8) erfüllen. Die Elemente $\mathbf{x} \in V$ *heißen* Vektoren *und die Elemente* α *in* $\mathbb{F}$ Skalare*.*

(V1)
$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

(V2)
$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$$

(V3)
$$\forall \mathbf{u} \in V \quad \exists \mathbf{x} \in V \text{ mit } \mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

(V4)
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

(V5)
$$1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

(V6)
$$\alpha \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{u} + \alpha \cdot \mathbf{v}$$

(V7)
$$(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{u} = \alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{u}$$

(V8)
$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{u} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{u})$$

Aus den Vektorraumaxiomen (V1)-(V8) lassen sich zwei wichtige Folgerungen ziehen:

SATZ 83 *(a) Das Element* $\mathbf{x} \in V$ *mit* $\mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$ *ist eindeutig bestimmt. Es wird mit* $-\mathbf{u}$ *bezeichnet und negativer Vektor zu* $\mathbf{u}$ *genannt. Es gilt:*

$$-\mathbf{u} = (-1) \cdot \mathbf{u}$$

(b) $\forall \mathbf{u} \in V$ *gilt* $0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$

11.2 Beispiele für Vektorräume

I. Menge V festlegen

II. Körper $\mathbb{F}$ angeben

III. Addition + für Vektoren definieren

IV. Skalare Multiplikation $\cdot$ definieren

V. Vektorraumaxiome nachprüfen

Beispiel 1: Reeller Vektorraum der reellen Matrizen

I. $V = M_{m \times n}(\mathbb{R})$

II. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

III.
$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n}$$

IV.
$$\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij})_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n}$$

V. Vektorraumaxiome erfüllt nach vorherigem Kapitel

Beispiel 2: Standard-Vektorraum $\mathbb{R}^n$

I. $V = M_{n\times 1}(\mathbb{R})$
$$\mathbf{x} = \underline{x} = \vec{x} = x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

II. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

III.
$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

IV.
$$\lambda \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ \alpha \cdot x_2 \\ \vdots \\ \alpha \cdot x_n \end{pmatrix}.$$

V. Vektorraumaxiome erfüllt nach vorherigem Kapitel

Beispiel 3: Komplexer Vektorraum der komplexen Matrizen

I. $V = M_{m\times n}(\mathbb{C})$

II. $\mathbb{F} = \mathbb{C}$

III.
$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n}$$

IV.
$$\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij})_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n}$$

V. Vektorraumaxiome erfüllt nach vorherigem Kapitel

Beispiel 4: Komplexer Standard-Vektorraum $\mathbb{C}^n$

I. $V = M_{n\times 1}(\mathbb{C})$

II. $\mathbb{F} = \mathbb{C}$

III.
$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n}$$

IV.
$$\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij})_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n}$$

V. Vektorraumaxiome erfüllt nach vorherigem Kapitel

Beispiel 5: Reeller Vektorraum der komplexen Matrizen

I. $V = M_{m\times n}(\mathbb{C})$

II. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

III.
$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i=1,\ldots,m;j=1,\ldots,n}$$

IV.
$$\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij})_{i=1,\ldots,m;j=1,\ldots,n}$$

V. Vektorraumaxiome erfüllt nach vorherigem Kapitel

Beispiel 6: Nullraum

I. $V = \{\mathbf{0}\}$

II. $\mathbb{F}$ beliebig

III.
$$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

IV.
$$\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

V. Vektorraumaxiome trivalerweise erfüllt

Beispiel 7: Vektorraum aller reellen Abbildungen

I. $V = \{f : f \text{ ist Funktion } \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

II. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

III.
$$+ : (f, g) \to h \qquad h(x) := f(x) + g(x)$$

IV.
$$+ : (\alpha, f) \to g \qquad g(x) := \alpha \cdot f(x)$$

V. Vektorraumaxiome nachrechnen

11.3 Untervektorräume

DEFINITION 84 *Sei $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$ ein $\mathbb{F}$-Vektorraum. Dann heißt U mit $\emptyset \subset U \subseteq V$ ein* Unterraum *oder* Teilraum *von V, wenn $(U, +|_U, \mathbb{F}, \cdot|_U)$ bezüglich der auf V erklärten, aber auf U eingeschränkten Verknüpfungen selbst ein $\mathbb{F}$-Vektorraum ist.*

Notation: $U \leq V$

DEFINITION 85 *U ist ein* echter Unterraum *von V, wenn $U \leq V$ und $U \neq V$.*
Notation: $U < V$

SATZ 86 *Eine nichtleere Teilmenge U eines $\mathbb{F}$-Vektorraumes V ist ein Unterraum von V genau dann, wenn gilt:*

(UV1) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U : \ \mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$

(UV2) $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall \mathbf{u} \in U : \ \alpha \cdot \mathbf{u} \in U$

12 Lineare Gleichungssysteme

Motivation: Gegeben sind 3 Punkte: $(-1;7),(1;1),(2;4)$
Problem: Gibt es eine (oder mehrere) quadratische Funktion(en) $p(x)$, die durch diese 3 Punkte geht/gehen?

Mathematisches Modell: $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
gesucht sind die Unbekannten a, b, c mit $p(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 7, p(1) = 1, p(2) = 4$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 \cdot a & + & (-1) \cdot b & + & 1 \cdot c & = & 7 \\ 1 \cdot a & + & 1 \cdot b & + & 1 \cdot c & = & 1 \\ 4 \cdot a & + & 2 \cdot b & + & 1 \cdot c & = & 4 \end{array}$$

12.1 Formen von linearen Gleichungssystemen

Allgemeine, ausführliche Form:

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & = & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

Matrixform:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

12.2 Inverse Matrix

Definition 87 *Ist A eine quadratische Matrix, dann heißt die Matrix A^{-1}* inverse Matrix *oder kurz* Inverse *zu A, falls gilt:*

$$A^{-1} \cdot A = E$$

und

$$A \cdot A^{-1} = E.$$

Besitzt eine Matrix A eine Inverse, so heißt A regulär*, ansonsten* singulär*.*

Satz 88 *Falls eine Matrix eine (multiplikative) Inverse hat, so ist diese eindeutig bestimmt.*

Satz 89 *Falls die Matrizen A und B (multiplikative) Inversen besitzen, so hat auch $C = AB$ eine Inverse und es gilt*

$$C^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

.

Satz 90 *Falls die Matrizen A und B verkettet sind, so gilt*

$$(AB)^T = B^T A^T$$

.

Satz 91 *Falls A^{-1} existiert, so gilt*

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

.

12.3 Determinanten

Motivation: Determinaten werden zur Berechnung von Inversen Matrizen benutzt und sind hilfreich bei der Lösung von Gleichungssystemen.

12.3.1 Definition der Determinante

Die Determinante ist eine Funktion, die jeder quadratischen Matrix A eine eindeutig bestimmte Zahl $|A|$ zuordnet. Es gibt mehrere Möglichkeiten die Determinante zu definieren. Die folgende rekursive Definition ist mit am leichtesten zu verstehen.

DEFINITION 92 *Die* Determinante *einer quadratischen $n \times n$ Matrix $A = (a_{i,j})$ wird definiert durch*

1. *Für $n = 1$ ist $|A| = |(a_{11})| = |a_{11}| = a_{11}$.*
2. *Für $n = 2$ ist*
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$
3. *Für $n = 3$ (*Sarrus'sche Regel*) ist $|A| =$*
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{array}$$
4. *Ab $n \geq 4$ wird die Determinante rekursiv nach der Formel aus Satz 94 oder aus Satz 95 berechnet.*

DEFINITION 93 *Als* Untermatrix *A_{ij} einer quadratischen Matrix A bezeichnet man diejenige Matrix, die entsteht, wenn in A die i-te Zeile und die j-te Spalte gestrichen wird. Ist A eine Matrix vom Typ (n, n) so ist A_{ij} vom Typ $(n - 1, n - 1)$.*

SATZ 94 (ENTWICKLUNGSSATZ, BZGL. ZEILE i) *Für jede $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ gilt:*
$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|.$$

SATZ 95 (ENTWICKLUNGSSATZ, BZGL. SPALTE j) *Für jede $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ gilt:*
$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|.$$

12.3.2 Eigenschaften von Determinanten

Als Folgerungen aus der Definition ergeben sich die nachstehenden Eigenschaften, die das praktische Berechnen von Determinanten erleichtern können.

SATZ 96 *Die Determinante einer Dreiecksmatrix ($a_{ij} = 0$ falls $i > j$) ist das Produkt der Hauptdiagonalelemente.*

SATZ 97 *Enthält eine Matrix A eine Nullzeile (Nullspalte), so gilt*
$$|A| = 0.$$

SATZ 98 *Der Wert einer Determinante ändert das Vorzeichen, wenn zwei Zeilen (Spalten) ausgetauscht werden.*

SATZ 99 *Enthält eine Matrix A zwei gleiche Zeilen (Spalten), so gilt*
$$|A| = 0.$$

SATZ 100 *Die Matrix D entstehe aus der Matrix A durch Multiplikation jedes Elementes der i-ten Zeile (Spalte) mit k. Dann gilt*
$$|D| = k|A|.$$

SATZ 101 *Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn zu einer Zeile (Spalte) ein Vielfaches einer anderen Zeile (Spalte) addiert wird.*

Satz 102 *Für je zwei $n \times n$-Matrizen A und B gilt:*

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

Definition 103 *Für jede $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ wird die zu A* adjungierte Matrix *$adj(A)$ definiert durch:*

$$adj(A) = ((-1)^{i+j}|A_{ji}|) =$$

$$= \begin{pmatrix} +|A_{11}| & -|A_{21}| & \cdots & (-1)^{n+1}|A_{n1}| \\ -|A_{12}| & +|A_{22}| & \cdots & (-1)^{n+2}|A_{n2}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+n}|A_{1n}| & (-1)^{2+n}|A_{2n}| & \cdots & (-1)^{n+n}|A_{nn}| \end{pmatrix}.$$

Satz 104 *Für jede $n \times n$-Matrix A gilt:*

$$adj(A) \cdot A = A \cdot adj(A) = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot E.$$

Satz 105 *Eine $n \times n$-Matrix $A = (a_{i,j})$ besitzt genau dann eine inverse Matrix A^{-1}, wenn $|A| \neq 0$. Dann gilt:*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A).$$

Definition 106 *Eine quadratische Matrix A heißt* regulär, *wenn $|A| \neq 0$, sonst heißt sie* singulär, *d.h. wenn $|A| = 0$.*

Definition 107 *Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ heißen* linear unabhängig, *falls die Gleichung*

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

nur *die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ hat.*

Lemma 108 *Eine quadratische Matrix A ist genau dann regulär, $|A| \neq 0$, wenn die Zeilen (Spalten) linear unabhängig sind.*

12.3.3 Rang einer Matrix

Definition 109 *Der* Zeilenrang *einer Matrix A ist die größte Zahl r, so dass A r linear unabhängige Zeilen(vektoren) enthält.*

Definition 110 *Der* Spaltenrang *einer Matrix A ist die größte Zahl r, so dass A r linear unabhängige Spalten(vektoren) enthält.*

Satz 111 *Für jede Matrix A stimmen Zeilenrang und Spaltenrang überein.*

Satz 112 *Das Vertauschen von Zeilen oder Spalten ändert den Rang nicht.*

Satz 113 *Der Rang einer Matrix ändert sich nicht, wenn man das Vielfache einer Zeile(Spalte) zu einer anderen addiert.*

12.4 Lineare Gleichungssysteme

Bezeichnung
homogenes lineares Gleichungssystem, falls $\mathbf{b} = \mathbf{0}$
inhomogenes lineares Gleichungssystem, falls $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$

Bemerkung
Die Bezeichnung *linear* wird verwendet, weil jede Veränderliche x_i nur in der ersten Potenz vorkommt.

12.4.1 Allgemeine Lösung

DEFINITION 114 $L(A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b})$ *bezeichne die* Lösungsmenge *des linearen Gleichungssystems* $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

SATZ 115 *Ist* $\mathbf{x}_0$ *eine (beliebige) Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems* $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$*, so gilt*

$$L(A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}) = \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}' : \mathbf{x}' \in L(A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0})\}.$$

(Die allgemeine Lösung eines inhomogenen linearen Gleichungssystems setzt sich aus einer speziellen Lösung des inhomogenen Gleichungssystems und der allgemeinen Lösung des zugehörigen linearen homogenen Gleichungssystems zusammen.)

$\Rightarrow$ Koeffizientenmatrix A

$\Rightarrow$ erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$

SATZ 116 *Ist* $rg(A) = rg(A|\mathbf{b})$*, so ist das Gleichungssystem* $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *lösbar. Ist* $rg(A) < rg(A|\mathbf{b})$*, so ist das Gleichungssystem* $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *nicht lösbar.*

SATZ 117 *Ist* A *eine* $m \times n$*-Matrix mit* $rg(A) = r$*, so besteht* $L(A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0})$ *aus allen Linearkombinationen von* $n - r$ *linear unabhängigen Lösungen* $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_{n-r}$*, d.h..*

$$L(A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}) = \{\lambda_1\mathbf{y}_1 + \lambda_2\mathbf{y}_2 + \ldots + \lambda_{n-r}\mathbf{y}_{n-r}\}.$$

12.4.2 Gauß-Algorithmus

SATZ 118 *Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems* $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *ändert sich nicht, wenn folgende Operationen ausgeführt werden:*
- Multiplikation einer Gleichung mit einem Faktor $\lambda \neq 0$,
- Addition des λ*-fachen der* i*-ten Gleichung zur* j*-ten Gleichung,* $i \neq j$.

$\Rightarrow$ Gauß-Schritte

Satz 119 *Die am Ende des Gauß-Algorithmus erhaltene* Trapezgestalt *des Gleichungssystems hat folgende Form:*

$$\begin{array}{rcl}
a'_{1,1}x_1 + a'_{1,2}x_2 + a'_{1,3}x_3 + \ldots + a'_{1,r}x_r + \ldots + a'_{1,n}x_n & = & b'_1 \\
a'_{2,2}x_2 + a'_{2,3}x_3 + \ldots + a'_{2,r}x_r + \ldots + a'_{2,n}x_n & = & b'_2 \\
a'_{3,3}x_3 + \ldots + a'_{3,r}x_r + \ldots + a'_{3,n}x_n & = & b'_3 \\
\ldots & = & \\
a'_{r,r}x_r + \ldots + a'_{r,n}x_n & = & b'_r \\
0 & = & b'_{r+1} \\
0 & = & 0 \\
\ldots & = & \\
0 & = & 0,
\end{array}$$

wobei $a_{i,i} \neq 0$ *für* $i = 1, 2, \ldots, r$. *Eventuell werden Gleichungen ausgetauscht oder Variable umbezeichnet*

Satz 120 *Ist in der am Ende des Gauß-Algorithmus erhaltene Trapezgestalt des Gleichungssystems* $b'_{r+1} \neq 0$*, so hat das Gleichungssystem keine Lösung.*

Satz 121 *Ist in der am Ende des Gauß-Algorithmus erhaltene Trapezgestalt des Gleichungssystems* $b'_{r+1} = 0$*, so ist das Gleichungssystem lösbar. Man erhält* **alle** *Lösungen, in dem man* $x_i = t_i$ *für* $i = r+1, r+2, \ldots, n$ *setzt, wobei diese* t_i *beliebige Elemente aus* $\mathbb{R}$ *sind und man die restlichen Variablen* x_i *mit* $i = 1, 2, \ldots, r$ *einfach ausrechnet.*

$\Rightarrow$ Berechnen der inversen Matrix mit dem Gauß-Algorithmus

12.4.3 Cramersche Regel

Satz 122 *Es sei* $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *ein lineares Gleichungssystem mit einer* $n \times n$*-Koeffizientenmatrix* A*, die regulär ist.* A_i*,* $i = 1, 2, \ldots, n$*, entstehe aus* A *durch Ersetzen der* i*-ten Spalte durch* $\mathbf{b}$. *Dann gilt für die eindeutig bestimme Lösung* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}.$$

Lernziele

Sie sollten

- wissen, was eine Matrix ist
- Klassen spezieller Matrizen kennen, insbesondere Quadratische Matrizen, Diagonalmatrizen, Dreiecksmatrizen, Trapezmatrizen, Vektoren
- grundlegende Operationen mit Matrizen wie Addition, Multiplikation mit einem Skalar, Skalarmultiplikation von Vektoren, Transponieren, Multiplikation beherrschen
- Eigenschaften von Matrizenoperationen kennen und beim Manipulieren von Matrizengleichungen anwenden können
- wissen, was eine Inverse Matrix ist und diese berechnen können
- wissen, was eine Determinate einer quadratischen Matrix bzw. der Rang einer (nicht-)quadratischen Matrix ist und diese berechnen können
- Gleichungssysteme in Matrizenschreibweise formulieren können und den Gaußalgorithmus zum Ermitteln der allgemeinen Lösung eines Gleichungssystems einsetzen können

13 Dimension und Basis eines Vektorraumes

Klassifikation und Beschreibung von Vektorräumen

DEFINITION 123 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{F}$. Eine Menge von n Vektoren*

$$\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\} \subseteq V$$

heißt Erzeugendensystem *von V, wenn es für jeden Vektor $\mathbf{v} \in V$ Skalare $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ gibt, so dass gilt:*

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{b}_i \, .$$

Existiert ein solches endliches Erzeugendensystem, dann heißt V endlichdimensional.

DEFINITION 124 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{F}$. Ein Erzeugendensystem*

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\} \subseteq V$$

heißt Basis *von V, wenn die Vektoren darin linear unabhängig sind. Die Anzahl n der Basisvektoren wird die* Dimension *von V genannt:*

$$\dim V = n$$

$\Rightarrow$ Dimension ist eindeutig bestimmt (Folgerung aus Austauschsatz)

$\Rightarrow$ V heißt *nulldimensional*, wenn V der Nullvektorraum ist.

$\Rightarrow$ V heißt *unendlichdimensional*, wenn es eine Folge $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots \in V$ gibt, so dass $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ linear unabhängig sind.

SATZ 125 *Ist V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{F}$ und*

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\} \subseteq V$$

eine Basis von V. Dann gibt es für jeden Vektor $\mathbf{v} \in V$ eindeutig bestimmte Skalare $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{F}$ gibt, so dass gilt:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{b}_i \, .$$

Die $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ heißen die Koordinaten *von $\mathbf{v}$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.*

DEFINITION 126 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{F}$ und*

$$\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k\} \subseteq V,$$

dann bezeichnet

$$\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k \rangle = span[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k] = \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{b}_i\}$$

den Untervektorraum, der durch die Vektoren $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ erzeugt/aufgespannt wird. Dieser Untervektorraum heißt Lineare Hülle *von $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$.*

SATZ 127 (BASISAUWAHLSATZ) *Ist*

$$\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m\} \subseteq V$$

ein Erzeugendensystem von V, dann gilt $\dim V \leq m$ und es existieren Vektoren

$$\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\} \subseteq \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m\}$$

so dass

$$\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$$

eine Basis von V ist.

Satz 128 (Austauschsatz von Steinitz) *Ist*

$$\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{k-1}, \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_{k+1}, \ldots, \mathbf{b}_n\}$$

eine Basis von V und

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{b}_i$$

mit $\alpha_k \neq 0$, dann ist auch

$$\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{k-1}, \mathbf{v}, \mathbf{b}_{k+1}, \ldots, \mathbf{c}_m\} \subseteq V$$

eine Basis von V.

Folgerung 129 *In einem endlichdimensionalen Vektorraum hat jede Basis die gleiche Anzahl an Basisvektoren.*

Satz 130 (Basisergänzungssatz) *In einem endlichdimensionalen Vektorraum kann jede Menge*

$$\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k\}$$

linear unabhängiger Vektoren zu einer Basis ergänzt werden.

14 Lineare Abbildungen

14.1 Definition und Eigenschaften

DEFINITION 131 *Seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine Abbildung*

$$L : V \to W$$

heißt lineare Abbildung *(auch Homomorphismus), wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

(LA1)

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V : \; L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$$

(LA2)

$$\forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall \mathbf{u} \in V : \; L(\alpha \cdot \mathbf{u}) = \alpha \cdot L(\mathbf{u})$$

Eigenschaften, Beispiele:

SATZ 132 *Seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume. Für jede lineare Abbildung*

$$L : V \to W$$

gilt:

$$L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

$\Rightarrow$ notwendiges Kriterium

14.2 Beschreibung linearer Abbildungen

SATZ 133 *Seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Basen*

$$\mathcal{B}_V = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\} \subseteq V$$

und

$$\mathcal{B}_W = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m\} \subseteq W.$$

Eine Abbildung $L : V \to W$ ist genau dann eine lineare Abbildung, wenn sie in der Form $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ mit einer $m \times n$ Matrix A geschrieben werden kann.

14.3 Kern und Bild einer linearen Abbildung

DEFINITION 134 *Seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume sowie $L : V \to W$ eine lineare Abbildung.* Kern *und* Bild *einer linearen Abbildung sind wie folgt erklärt:*

(1)

$$Kern(L) = \{\mathbf{v} \in V : L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

(2)

$$Bild(L) = L(V) = \{\mathbf{w} \in W : \exists \mathbf{v} \in V \text{ mit } L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}$$

SATZ 135 *Seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\mathcal{B}_V = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ eine Basis von V sowie $L : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

(1)

$$Kern(L) \leq V$$

(2)

$$Bild(L) = span[L(\mathbf{a_1}), L(\mathbf{a_2}), \ldots, L(\mathbf{a_n})] \leq W$$

(3)

$$\dim V = \dim Kern(L) + \dim Bild(L)$$

(4) L ist injektiv genau dann, wenn $Kern(L) = \{\mathbf{0}\}$

(5) L ist surjektiv genau dann, wenn $Bild(L) = W$; genau dann, wenn

$$\dim Bild(L) = \dim W$$

BEZEICHNUNG $\dim \mathrm{Kern}(L) =$ *Defekt* von L; $\dim \mathrm{Bild}(L) =$ *Rang* von L

15 Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

MOTIVATION: Eine für Informatiker relevante Fragestellung könnte lauten: Wann sind die Parameter meines Maschine-Learning-Algorithmus bestmöglich? Übersetzt in die Sprache der Mathematik heißt das, wann wird meine (Erkennungs-)Funktion maximal, oder meine (Fehler-)Funktion minimal? Um eine Methode zur Beantwortung dieser Fragestellung zu entwickeln, werden wir das Verhalten von Tangenten an einer Funktion in der Umgebung von Maximal/Minimalstellen untersuchen und daraus den Begriff der 1. Ableitung einer Funktion herleiten. Weiter werden in diesem Kapitel die Ableitungen der elementaren Funktionen untersucht und Regeln eingeführt, die das Bestimmen der 1. Ableitung von komplizierteren Funktionen ermöglichen. Als eine wichtige Anwendung der Ableitungen einer Funktion werden das Taylorpolynom und die Taylorreihe eingeführt.

15.1 Ableitung

15.1.1 Definition der Ableitung einer Funktion

DEFINITION 136 *Sei f eine reelle Funktion und $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt* differenzierbar *in x_0, falls*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

existiert. $f'(x_0)$ heißt Ableitung *von f im Punkt x_0. Existiert der Grenzwert $\forall x \in D$, so heißt f in D differenzierbar und die Funktion $f' : D \to \mathbb{R}$ heißt (erste) Ableitung von f.*

BEZEICHNUNG $\dfrac{dy}{dx}$ gesprochen „dy nach dx"; oder $\dfrac{d}{dx}f(x)$; Achtung: kein Bruch!
BEISPIEL $f(x) = x^2$ dann $f'(x) = 2x$

- Rechtsseitige (linksseitige) Ableitung
- Geometrische Deutung als Anstieg der *Tangente* $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ an $y = f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ als Grenzlage von Sekantenanstiegen
- Tangente als lineare Approximation
- In den Wirtschaftswissenschaften spricht man oft von einer *Grenzgröße* (Grenzkosten, Grenzumsatz, Grenzgewinn, ...) oder einer *marginalen Größe* (marginale Sparquote, marginale Konsumquote, ...).

$\Rightarrow$ Höhere Ableitungen: $f''(x) = (f'(x))'$, $f'''(x) = (f''(x))'$, $f^{(4)}(x) = (f'''(x))'$, ...

Physik

Einige Beispiele:

1. Geschwindigkeit ist die (erste) Ableitung des Ortes nach der Zeit
$$v(t) = s'(t)$$
bzw. weil es sich speziell um eine Ableitung nach der Zeit handelt mit der Notation
$$v(t) = \dot{s}(t).$$
2. Beschleunigung ist die erste Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit, also die zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit.
$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$$
3. Kraft ist die Ableitung des Impulses nach der Zeit.
4. Leistung ist die Ableitung der Arbeit nach der Zeit.

15.1.2 Differenzierbarkeit von Funktionen

⇒ Differenzierbarkeit auf einem Intervall

⇒ Anschauliche Deutung der Differenzierbarkeit am Graphen der Funktion

⇒ Stetigkeit ist eine notwendige (aber keine hinreichende) Voraussetzung für die Differenzierbarkeit.
Beispiel $f(x) = |x|$ ist stetig, aber nicht differenzierbar

15.1.3 Ableitungsregeln

⇒ Ableitung einiger elementarer Funktionen

- $f(x) = c \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$
- $f(x) = a^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a^x \cdot \ln a$
- $f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x$

⇒ Ableitung von Summe, Produkt und Quotient; Kettenregel

- $f(x) = \alpha g(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \alpha g'(x)$
- $f(x) = g(x) + h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) + h'(x)$
- $f(x) = g(x) \cdot h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
- $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h(x)^2}$
- $f(x) = g(h(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

15.2 Sätze über differenzierbare Funktionen

Satz 137 *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, in (a, b) differenzierbare Funktion und $a \neq b$, so gilt*

1. *Satz von Fermat (1601-1665): Nimmt die Funktion f im Punkt $x_0 \in (a, b)$ einen (relativen) Extremwert an, so ist $f'(x_0) = 0$.*
2. *Satz von Rolle (1652-1719) : Falls $f(a) = f(b)$, so $\exists x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.*
3. *Mittelwertsatz: $\exists x_0 \in (a, b) :\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$*

15.3 Untersuchung von Funktionen

15.3.1 Monotonie

Satz 138 1. *$\forall x \in I : f'(x) > (<)0 \Rightarrow f$ ist auf I streng monoton wachsend (fallend)*

2. *$\forall x \in I : f'(x) \geq (\leq)0 \Rightarrow f$ ist auf I monoton wachsend (fallend)*
3. *$\forall x \in I : f'(x) = 0 \Rightarrow f$ ist auf I konstant*

Beispiel: Sei $f(x) = x^2$ und $f'(x) = 2x$. Es gilt $f'(x) \leq 0\ \forall x \leq 0$, d.h. $f(x)$ ist monoton fallend im Intervall $(-\infty, 0]$. Weiter gilt $f'(x) \geq 0\ \forall x \geq 0$, d.h. $f(x)$ ist monoton wachsend im Intervall $[0, \infty)$.

15.3.2 Relative und absolute Extremwerte

Definition 139 *Sei f auf dem Intervall (a, b) definiert. Eine Stelle $x_0 \in (a, b)$ heißt* relative (lokale) Maximalstelle (Minimalstelle) *von f, wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt, sodass $\forall x \in U$ gilt $f(x) \leq (\geq)f(x_0)$. Der zugehörige Funktionswert $f(x_0)$ heißt* relatives Maximum (Minimum) *der Funktion. Wenn U gleich dem Definitionsbereich D ist, so ist x_0 eine* absolute (globale) Extremstelle *von f (vgl. im Satz 58 den Satz von Weierstraß).*

Satz 140 *Sei f auf dem Intervall (a, b) definiert und $x_0 \in (a, b)$. Weiterhin sei f differenzierbar für $x \in U(x_0)$.*

1. *$\forall x < x_0 : f'(x) > 0$ und $\forall x > x_0 : f'(x) < 0 \Rightarrow f$ hat in x_0 eine Maximalstelle,*
2. *$\forall x < x_0 : f'(x) < 0$ und $\forall x > x_0 : f'(x) > 0 \Rightarrow f$ hat in x_0 eine Minimalstelle.*
3. *Ist x_0 eine Extremalstelle, so wechselt f' dort das Vorzeichen und es muss $f'(x_0) = 0$ (vgl. im Satz 137 den Satz von Fermat) gelten (Notwendige Bedingung für das Vorliegen eines relativen Extremums).*

$\Rightarrow$ Ein Punkt $x \in I$, für den $f'(x) = 0$ ist, heißt *stationärer Punkt*.

$\Rightarrow$ Kritische Punkte (Kandidaten für Extremstellen) für $f : I \to \mathbb{R}$ sind:

- Randpunkte von I, falls I abgeschlossen ist,
- Punkte, in denen f nicht differenzierbar ist,
- stationäre Punkte im Innern von I.

Beispiel: Wir untersuchen die Funktion $f(x) = \begin{cases} x+3 & x < -1 \\ x^2+1 & -1 \leq x \end{cases}$ im Interval $[-3, 3]$ auf Extremstellen.

- Randpunkte: $a = -3$ ist (globale) Minimalstelle mit $f(-3) = 0$, da $x + 3$ monoton wachsend; $b = 3$ ist (globale) Maximalstelle mit $f(3) = 10$, da $x^2 + 1$ monoton wachsend für $x > 0$
- $f(x)$ ist nicht differenzierbar bei $x = -1$, aber dort stetig, hat Maximalstelle bei $x = -1$ mit $f(-1) = 2$, da f monoton wachsend bis -1 und dann monoton fallend bis 0
- stationärer Punkt bei $x = 0$, dort Minimalstelle mit $f(0) = 1$

Satz 141 *(Hinreichende Bedingung für relative Extrema) Sei f in einer Umgebung $U(x_0)$ $(2k)$-mal stetig differenzierbar und es gelte $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(2k-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(2k)}(x_0) \neq 0$, dann ist x_0 eine relative Extremstelle. Aus $f^{(2k)}(x_0) > (<) 0$ folgt, dass $f(x_0)$ ein relatives Minimum (Maximum) ist.*

$\Rightarrow$ Spezialfall $k = 1$:
$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0)$ ist ein relatives Minimum
$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0)$ ist ein relatives Maximum

Beispiel: $f(x) = x^3 - 3x + 1$ und $f'(x) = 3x^2 - 3$, dann sind $x_0 = -1$ und $x_1 = 1$ stationäre Punkte mit $f'(x_0) = f'(x_1) = 0$. Wegen $f''(x) = 6x$ ist $f''(x_0) = -6 < 0$, d.h. x_0 ist Maximalstelle von $f(x)$ und weiter $f''(x_1) = 6 > 0$, d.h. x_1 ist Minimalstelle von $f(x)$.

Beispiel: $f(x) = (x-1)^6$, $f'(1) = f''(1) = f'''(1) = f^{(4)}(1) = f^{(5)}(1) = 0$ und $f^{(6)}(1) = 720 > 0$, d.h. $f(x)$ hat eine Minimalstelle bei $x = 1$.

15.3.3 Wendepunkte

$\Rightarrow$ Die zweite Ableitung beschreibt das *Krümmungsverhalten*.

Satz 142 *1. $\forall x \in I : f''(x) > 0 \Rightarrow f$ ist auf I konvex.*

2. $\forall x \in I : f''(x) < 0 \Rightarrow f$ ist auf I konkav.

$\Rightarrow$ Punkte, in denen sich das Krümmungsverhalten ändert, heißen *Wendepunkte*. Sie sind Extrempunkte von $f'(x)$.

$\Rightarrow$ Notwendige Bedingung für Vorliegen eines Wendepunktes x_0 ist $f''(x_0) = 0$.

Satz 143 *Sei f in einer Umgebung $U(x_0)$ $(2k+1)$-mal stetig differenzierbar und es gelte $f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(2k)}(x_0) = 0$ und $f^{(2k+1)}(x_0) \neq 0$, dann ist x_0 ein Wendepunkt. Aus $f^{(2k+1)}(x_0) > (<) 0$ folgt, dass in x_0 konkaves in konvexes (konvexes in konkaves) Verhalten übergeht.*

Beispiel: $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $f'(x) = 3x^2 - 3$ und $f''(x) = 6x$, dann ist $f''(0) = 0$. Wegen $f'''(x) = 6 \neq 0$ ist $x = 0$ ein Wendepunkt von $f(x)$.

Beispiel: $f(x) = (x-1)^7$, $f''(1) = f'''(1) = f^{(4)}(1) = f^{(5)}(1) = f^{(6)}(1) = 0$ und $f^{(6)}(1) = 5040 \neq 0$, d.h. $f(x)$ hat einen Wendepunkt bei $x = 1$.

15.3.4 Kurvendiskussion

No.	Kurvendiskussion der Funktion $y = f(x)$
1.	Definitionsbereich, Wertebereich, Wertetabelle, erste Skizze
2.	Symmetrie: gerade/ ungerade/ keine Aussage
3.	Nullstellen
4.	Vorzeichen von f
5.	Unstetigkeitsstellen von f
6.	Differenzierbarkeit
7.	Monotonieintervalle
8.	relative Extremwerte, absolute Extremwerte
9.	Konvex- und Konkavbögen und Wendepunkte
10.	Verhalten im Unendlichen
11.	Skizze

15.4 Die Taylorsche Formel

⇒ Frage: wann und wie ist eine Funktion als Potenzreihe darstellbar?

Satz 144 *Satz von Taylor*
Die Funktion f sei in einer Umgebung U der Stelle x_0 $(n+1)$-mal differenzierbar, und es sei $x \in U$. Dann lässt sich f auf folgende Weise nach Potenzen von $(x - x_0)$ entwickeln:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!} + R_n(x)$$

mit dem Restglied (von Lagrange)

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{für} \quad 0 < \vartheta < 1$$

.

⇒ Falls für x aus einem Intervall für den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ gilt, so konvergiert die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$ gegen $f(x)$ (f wird dort durch die Potenzreihe dargestellt).

⇒ Taylor'sche Reihe für einige elementare Funktionen

Lernziele

Sie sollten

- die Definition der (ggf. nur einseitigen) Ableitung präzise wiedergeben und gleichzeitig als Anstieg der Tangente veranschaulichen können sowie diese als lineare Approximation verstanden haben
- das Konzept der Ableitung wiederholt anwenden können, um zu höheren Ableitungen zu gelangen
- den Zusammenhang zwischen Monotonie und 1. Ableitung einer Funktion bzw. zwischen Krümmungsverhalten und 2. Ableitung einer Funktion diskutieren können
- Stetigkeit als notwendige Bedingung für Differenzierbarkeit kennen und anhand der Betragsfunktion erläutern können, warum sie nicht hinreichend ist
- die Ableitungen elementarer Funktionen (konstante Funktionen, Polynome, Exponentialfunktion, allgemeine Potenzfunktion, Logarithmus, trigonometrische Funktionen) sicher beherrschen
- wissen, dass Differentiation eine lineare Operation auf der Menge der differenzierbaren Funktionen ist, und ebenso die weiteren Ableitungsregeln (Produkt- und Quotientenregel, Kettenregel, Ableitung der Umkehrfunktion) kennen und sicher anwenden können
- mit den drei wichtigsten Aussagen über differenzierbare Funktionen
  - Notwendiges Kriterium für lokale Extrema (Satz von Fermat)
  - Satz von Rolle
  - Mittelwertsatz der Differentialrechnung

  vertraut sein und diese an konkreten Beispielen anwenden können
- in der Lage sein, eine vollständige Kurvendiskussion durchzuführen und sich dabei an notwendige wie hinreichende Bedingungen zum Vorhandensein von Monotoniebereichen, lokalen Extrema, Konvexität/Konkavität, Wendepunkten zu erinnern und diese korrekt anwenden zu können
- den Satz von Taylor kennen und ihn bei der Berechnung konkreter Taylorpoynome bzw. Taylorreihen anwenden können

Index

Äquivalenzklasse, 25
Äquivalenz, 6
Äquivalenzklassen, 8
Äquivalenzrelation, 7
$\mathbb{F}$-Vektorraum, 33
überabzählbar, 11

Abbildung, 10
Ableitung, 44
Ableitungsregeln, 45
Abschluss, 26
abzählbar, 11
assoziativ, 25
Aussage, 6
Aussageformen, 6
Aussagenmuster, 6
Aussagenverbindung, 6

Basis, 41
bijektiv, 11
Bild, 43
Binomialkoeffizient, 8

charakteristische Funktion, 11
Cramersche Regel, 40

Defekt, 43
Definitionsbereich, 10, 12
Determinante, 37
Diagonalmatrix, 28
Differenzmenge, 7
Dimension, 41
Disjunktion, 6
distributiv, 25
Dreiecksmatrix, 28
Durchschnittsmenge, 7

Einheitsmatrix, 28
Einschränkung, 11
Einselement, 25
Elemente, 7, 28
endlich, 11
endlichdimensional, 41
Erzeugendensystem, 41
erzeugendes Element, 26
Eulersche Formel, 9
Extremstelle
  absolute, 46
  globale, 46
  lokale, 46
  relative, 46

Faktormenge, 26
Folgenglieder, 16
Fundamentalsatz der Algebra, 13
Funktion, 10
  abschnittsweise definierte, 12
  beschränkte, 12
  differenzierbare, 44
  gerade, 12
  Graph, 10
  Grenzwert, 22
    linksseitiger, 22
    rechtsseitiger, 22
  konkave, 12, 47
  konvexe, 12, 47
  monotone, 12
  periodische, 12
  reellwertige, 12
  stetige, 23
  ungerade, 12
  verkettete, 12

Gauß-Algorithmus, 39
geometrische Reihe, 19
gleichmächtig, 11
Grenzgröße, 44
Gruppe, 25

Halbgruppe, 25
homogenes lineares Gleichungssystem, 38
homomorphes Bild, 25
Homomorphismus, 25

Implikation, 6
inhomogenes lineares Gleichungssystem, 38
injektiv, 11
Inverse, 36
inverse Funktion, 12
Inverses, 25
isomorph, 25

Körper, 26
Kardinalität, 11
Kern, 43
kommutativ, 25
Komplement, 7
Konjunktion, 6
Konvergenzkriterien, 17
Koordinaten, 41
Krümmungsverhalten, 47
Kreuzprodukt, 7
Kreuzprodukt (Mengen), 7
Kurvendiskussion, 47

Lösungsmenge, 39
leere Menge, 7
Limes, 16
linear unabhängig, 38
lineare Abbildung, 43
Lineare Hülle, 41
links-eindeutig, 10
Logik, 6

Mächtigkeit, 7
marginalen Größe, 44
Matrix, 28
  adjungierte, 38
  Inverse, 36
  Multiplikation mit Skalar, 30
  Transponieren, 31
Matrizen
  gleiche, 30
  Produkt von, 32
  Summe von, 30
Maximal-, Minimalstelle
  absolute, 46
  globale, 46
  lokale, 46
  relative, 46
Maximum, Minimum
  absolutes, 46
  globales, 46
  lokales, 46
  relatives, 46
Menge, 7
Monoid, 25
Mächtigkeit, 11

Negation, 6
neutrales Element, 25
nulldimensional, 41
Nullelement, 25
Nullfolge, 16
Nullmatrix, 28

Operation, 11
Ordnung, 26

Polynom, 12
Polynomgleichung, 13

Quadratische Matrizen, 28
Quantoren, 6

Rang, 43
rechts-eindeutig, 10
regulär, 36, 38
Relation, 7
Ring, 26

Sarrus'sche Regel, 37
singulär, 36, 38
Skalare, 28, 33
Skalare Multiplikation, 30
Skalarprodukt, 31
Spaltenrang, 38
Spaltenvektor, 28
stationärer Punkt, 46
stetig, 23
surjektiv, 11

Tangente, 44
Teilraum, 35
Transponieren, 31
Transponierte, 31
Trapezgestalt, 40
Trapezmatrix, 28

Umkehrfunktion, 12
unendlich, 11
unendlichdimensional, 41
unstetig, 23
Unstetigkeitsstellen, 23
Untermatrix, 37
Unterraum, 35
  echter, 35

Vektoren, 33
Vektorraum, 33
Venn-Diagramme, 7
Vereinigungsmenge, 7
Verkettung, 11

Wahrheitstafel, 6
Wendepunkte, 47
Wertebereich, 10, 12
Wertetabelle, 10

Zahlenbereiche
  ganze Zahlen, 9
  komplexe Zahlen, 9
  natürliche Zahlen, 8
  rationale Zahlen, 9
  reelle Zahlen, 9
Zahlenfolge, 16
  arithmetische, 18
  beschränkte, 16
  bestimmt divergente, 16
  divergente, 16
  geometrische, 18
  Grenzwert, 16
  konvergente, 16
  monoton fallende, 16
  monoton wachsende, 16
  Nullfolge, 16
Zeilenrang, 38
Zeilenvektor, 28