# 信息论与编码 作业 1

刘森元 21307289

中山大学计算机学院

## 1 讲义 § 1.3 习题 1

给出两个事件不相容的定义；

给出两个事件独立的定义；

讨论事件不相容与事件独立的关系。

### 1.1 两个事件不相容的定义

1. 两个事件 A 和 B 是不相容的，若他们不能同时发生，即他们交集为空 $A \cap B = \emptyset$;
2. 对于两个事件 A 和 B，他们同时发生的概率为零 $P(A \bigcap B) = 0$。

### 1.2 两个事件独立的定义

1. 若两个事件 A 和 B 是独立的，A 发生的概率不受 B 的影响，反之亦然，有:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

2. 如果事件 A 和 B 的条件概率满足以下条件

$$P(A|B) = P(A)$$

或着

$$P(B|A) = P(B)$$

那么这两个事件称作相互独立，A 和 B 称为独立事件。

### 1.3 事件不相容与事件独立的关系

事件不相容与独立是两种不同的关系。

一般情况下，不相容事件不能同时发生，独立事件可以同时发生但发生互不影响。

## 2 讲义 § 1.3 习题 2

举例说明三个事件两两独立并不蕴含三个事件独立。

我们可以考虑有一个有两面图案，质地均匀的硬币。

通过抛硬币来定义以下三个事件:

- A：第一次和第二次抛硬币的结果相同

- B：第二次和第三次抛硬币的结果相同
- C：第一次和第三次抛硬币的结果相同

## 2.1 验证三个事件两两独立

假设 T 代表正面，F 代表背面，可列出所有结果

| 第一次 | 第二次 | 第三次 |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | T | F |
| T | F | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | T | F |
| F | F | T |
| F | F | F |

可计算出每个事件的概率

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{4}{8} = 0.5$$

可计算出两两独立的情况，以 A 和 B 为例：

- $P(A \cap B) = \frac{2}{8} = 0.25$
- $P(A) \cdot P(B) = 0.5 \times 0.5 = 0.25$

因此 A 和 B 是独立的，同理可印证 A、B、C 三个事件两两独立。

## 2.2 验证三个事件是否独立

若三个事件独立，则有：

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

我们易计算得：

- $P(A \cap B \cap C) = \frac{2}{8} = 0.25$
- $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0.5 \times 0.5 \times 0.5 = 0.125$

显然不满足条件，故可以说明 A、B、C 三个事件并不独立。

## 2.3 结论

尽管事件 A、B、C 两两独立，但这三个事件并不完全独立。

可以说明两两独立不蕴含三个事件的独立性。

# 3 讲义 § 1.3 习题 3

举例说明增加条件，概率并无确定的变化方向。即举例说明 $P(A|B_1) = P(A), P(A|B_2) < P(A)$。

我们考虑一个装有 10 个球的盒子，其中球的颜色如下：

- 5 个红球
- 3 个绿球
- 2 个蓝球

可定义以下事件：

- A：从盒子中抽出的是红球
- $B_1$：从盒子中抽出的是红球或绿球
- $B_2$：从盒子中抽出的是蓝球

易计算条件概率有：

- $P(A) = \frac{5}{10} = 0.5$
- $P(A|B_1) = \frac{5}{5+3} = 0.625$
- $P(A|B_2) = 0$

这个例子可以说明，在增加条件后，条件概率的变化方向不是确定的。

## 4 图片 习题 1

> 在0到200的整数中，求 A=｛能被3整除的数｝，B=｛能被5整除的数｝，和 C=｛能被7整除的数｝并集的大小。

利用容斥原理，有：

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

其中，易计算出：

$$\begin{aligned} |A| &= 66 \\ |B| &= 41 \\ |C| &= 28 \\ |A \cap B| &= 13 \\ |A \cap C| &= 9 \\ |B \cap C| &= 5 \\ |A \cap B \cap C| &= 2 \end{aligned}$$

将结果带入可求得：

$$|A \cup B \cup C| = 110$$

在 0 到 200 的整数中，集合 $A \cup B \cup C$ 的并集大小是 110。

## 5 图片 习题 2

设 $P(A(B\cup C))=0.3, P(\bar{A})=0.6, P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=0.1$，求 $P(B\cup C)$。

利用全概率公式有:

$$P(B\cup C)=P(A\cap(B\cup C))+P(\bar{A}\cap(B\cup C))$$

已知 $P(A\cap(B\cup C))=0.3$，只需要计算 $P(\bar{A}\cap(B\cup C))$。

根据条件 $P(\bar{A})=0.6$ 和 $P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C})=0.1$，可以通过

$$P(\bar{A})=P(\bar{A}\cap(B\cup C))+P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C})$$

来求出:

$$0.6=P(\bar{A}\cap(B\cup C))+0.1$$
$$P(\bar{A}\cap(B\cup C))=0.6-0.1=0.5$$

故可以得出:

$$P(B\cup C)=0.3+0.5=0.8$$

## 6 讲义 例题 1.3

老师准备从五个学生 A、B、C、D、E 中选三个代表班级参加随机过程课程竞赛。

(1) A 被选中的概率是多少?
(2) 老师公布了其中一个参赛同学: E。此时 A 被选中的概率是多少?
(3) 在老师未公布之前，A向助教打听自己有无入选。助教按照纪律要求不能告知 A 是否入选，但告知 E 入选了。此时，A 入选的概率是多少?

1. $P(A)=\dfrac{\binom{5}{3}}{\binom{4}{2}}=\dfrac{6}{10}=0.6$
2. $P(A|E\text{被选中})=\dfrac{\binom{3}{1}}{\binom{4}{2}}=\dfrac{3}{6}=0.5$
3. 助教告诉 A 这个消息并不会改变 A 入选的概率，因此 A 入选的概率仍然是:

   $P(A|E\text{入选的消息})=\dfrac{\binom{3}{1}}{\binom{4}{2}}=\dfrac{3}{6}=0.5$