

第五章

反馈控制系统的性能

(Performance)

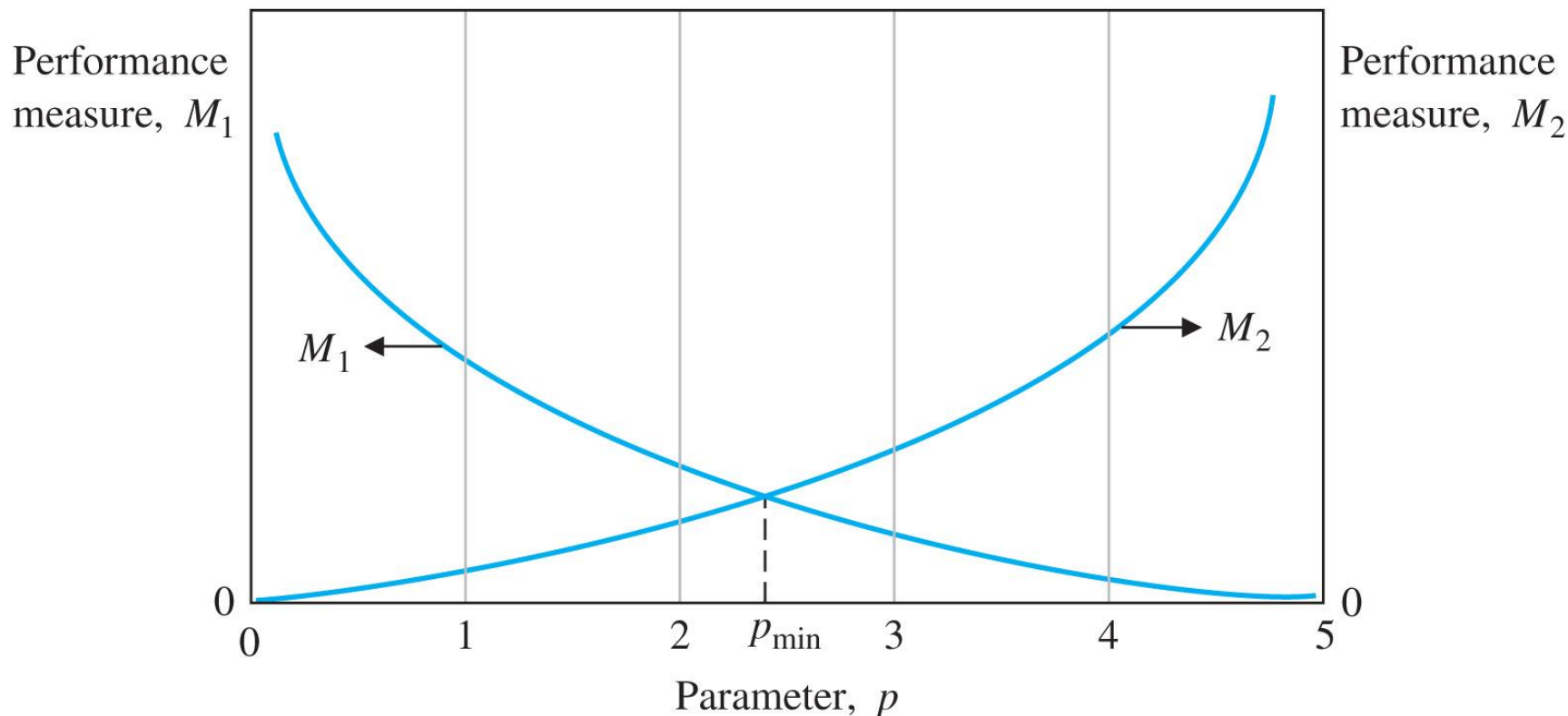
目录

- 5.1 引论
- 5.2 测试输入信号
- 5.3 二阶系统的性能/一阶系统的性能
- 5.4 零点和第三个极点对二阶系统响应的影响
- 5.5 s 平面上根的位置与瞬态响应
- 5.6 反馈控制系统稳态误差
- 5.7 性能指标
- 5.8 线性系统的简化
- 5.9 设计实例
- 5.10 应用控制设计软件分析系统的性能
- 5.11 系列设计案例：磁盘驱动器读取系统
- 5.12 总结

5.1 引论

- 为了分析、设计控制系统，必须定义并测量控制系统的性能。根据对闭环控制系统的期望性能，调节系统参数，得到期望的响应。
- 由于系统有惯性，包含有储能元件，因此系统是动态的，在设定值信号、扰动信号作用下，具有瞬态响应过程，要从瞬态响应、稳态响应两个方面确定控制系统的性能。
- 控制系统设计指标包括对某个指定输入信号的几种时域响应指标，以及期望的稳态精度。
- 给出设计指标的目的在于为获得期望的性能，因此设计指标并不是刚性的，常常需要在若干个设计指标之间折衷考虑。

➤ 设计过程中常常要对多个指标进行有效的折衷和调节



两个性能指标与参数 p 的关系

- 控制系统的性能指标可以总结为：稳、准、快
- 稳：稳定性，闭环系统必须是稳定的，并且具有足够的稳定裕量（相对稳定性）。一般来说，稳定性越强越好。
- 准：准确性，瞬态响应的跟踪精度要高（动态跟踪误差要小），稳态响应的跟踪精度要高（稳态跟踪误差要小）。一般来说，跟踪精度越高越好、跟踪误差越小越好。
- 快：快速性，瞬态响应速度。一般来说，与开环响应速度相比，有些系统要求加快闭环响应速度，有些系统要求减慢闭环响应速度。在不影响稳定性和准确性的前提下，闭环响应速度通常要尽可能快一些。

5.2 测试输入信号

- 控制系统本质上是时域系统，因此评价控制系统的性能时，其时域性能指标非常重要。
- 首先要判断系统是否稳定。（后续章节）
- 如果系统是稳定的，就可以由系统对特定输入信号的响应获得若干个性能指标，来衡量系统的性能。
- 系统实际运行时的输入信号未知，通常选择标准的测试输入信号，来分析系统的性能、比较不同的设计方案。

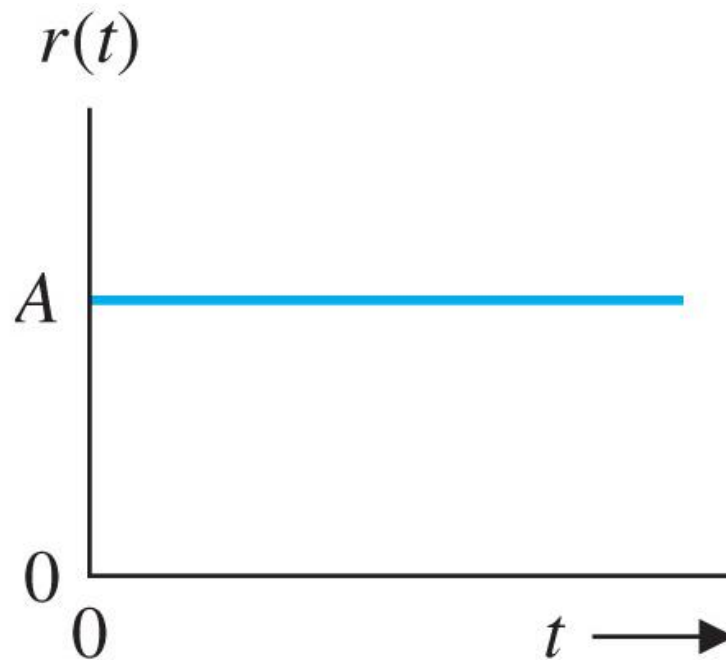
➤ 标准测试信号—阶跃输入step input

$$r(t) = \begin{cases} A, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad R(s) = \frac{A}{s}$$

$A = 1$ 时，称为单位阶跃输入unit step input

➤ 系统在阶跃输入作用下的输出响应，称为系统的阶跃响应。单位阶跃输入作用下的输出响应称为单位阶跃响应。

➤ 阶跃信号容易产生，使用得也就最多。

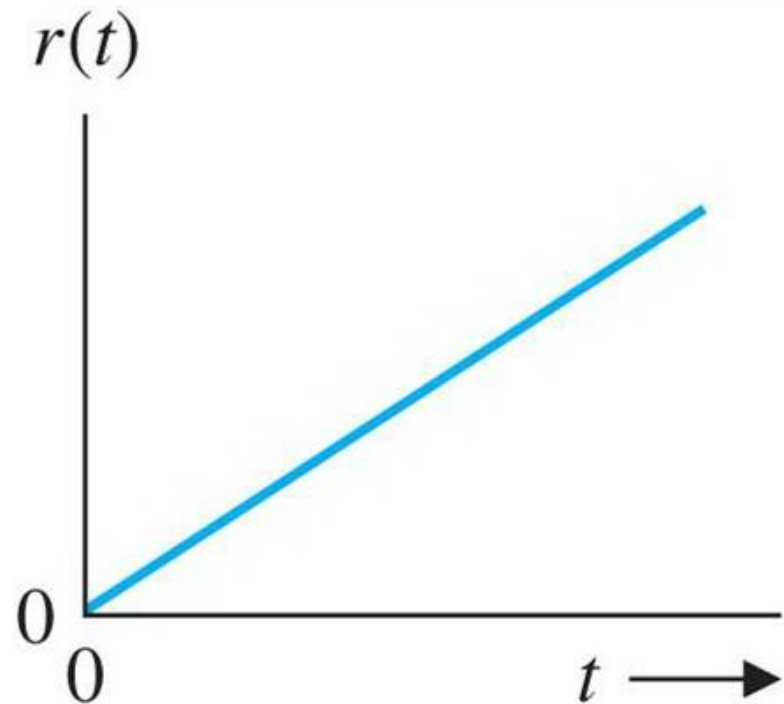


➤ 标准测试信号—斜坡输入ramp input

$$r(t) = \begin{cases} At, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad R(s) = \frac{A}{s^2}$$

$A = 1$ 时，单位斜坡输入unit ramp input

➤ 系统在斜坡输入作用下的输出响应，称为系统的斜坡响应。单位斜坡输入作用下的输出响应称为单位斜坡响应。



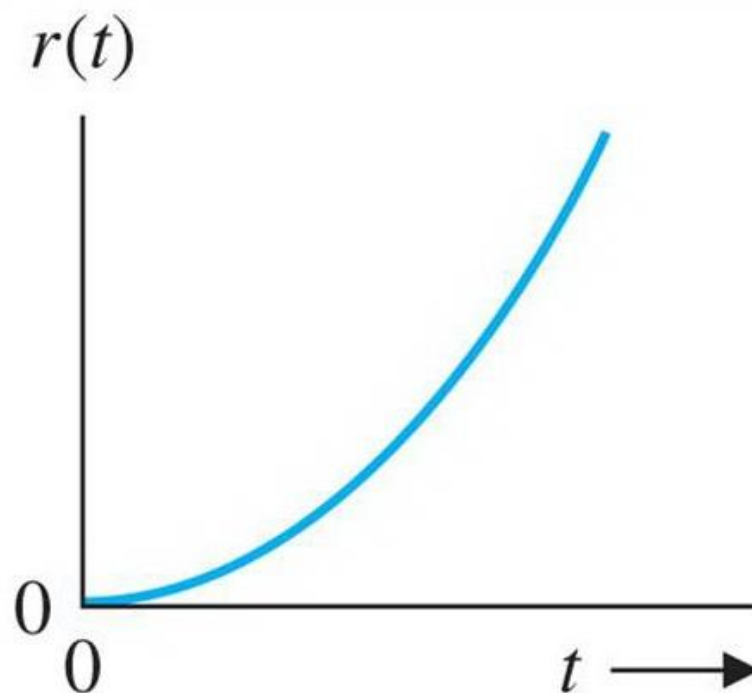
- 阶跃输入的积分是斜坡输入；斜坡输入的微分是阶跃输入。
单位阶跃输入的积分是单位斜坡输入；单位斜坡输入的微分是单位阶跃输入。
- 对于线性系统，阶跃响应的积分是斜坡响应，斜坡响应的微分是阶跃响应；单位阶跃响应的积分是单位斜坡响应，单位斜坡响应的微分是单位阶跃响应。
- 过程控制、运动控制中都经常使用阶跃输入，运动控制中还经常使用斜坡输入。
- 运动控制中，阶跃输入常常称为位置输入，斜坡输入常常称为等速度输入。

➤ 标准测试信号—**抛物线输入parabolic input**

$$r(t) = \begin{cases} At^2, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad R(s) = \frac{2A}{s^3}$$

$A = 1/2$ 时，单位抛物线输入unit parabolic input

➤ 系统在抛物线输入作用下的输出响应，称为系统的抛物线响应。单位抛物线输入作用下的输出响应称为单位抛物线响应



- 斜坡输入的积分是抛物线输入；抛物线输入的微分是斜坡输入。单位斜坡输入的积分是单位抛物线输入；单位抛物线输入的微分是单位斜坡输入
- 对于线性系统，斜坡响应的积分是抛物线响应，抛物线响应的微分是斜坡响应；单位斜坡响应的积分是单位抛物线响应，单位抛物线响应的微分是单位斜坡响应
- 运动控制中使用抛物线输入，常常称为等加速度输入

➤ 标准测试信号 — 一般形式

$$r(t) = \begin{cases} t^n, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad R(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

➤ 例： 开环系统： $G(s) = \frac{9}{s+10}$ ， 稳态增益0.9， 时间常数0.1秒
求单位阶跃响应、瞬态响应、稳态响应、稳态跟踪误差。

开环系统： $G(s) = \frac{9}{s+10}$ ， 稳态增益0.9， 时间常数0.1秒

单位阶跃响应为： $Y(s) = \frac{9}{s(s+10)}$

瞬态响应为： $y(t) = 0.9(1 - e^{-10t})$

稳态响应为： $y(\infty) = 0.9$

稳态跟踪误差为： $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(1-G(s)) \frac{1}{s} = 0.1$

➤ 矩形函数:

$$f_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & -\frac{\varepsilon}{2} \leq t \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \varepsilon > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

➤ 单位冲激 **unit impulse**

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 矩形函数 $f_{\varepsilon}(t) \rightarrow$ 单位冲激函数 $\delta(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{0^{-}}^{0^{+}} \delta(t) dt = 1$$

单位冲激函数的拉氏变换: $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$

对函数 $f(t)$, 有:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) f(t) dt = \int_{a^{-}}^{a^{+}} \delta(t-a) f(t) dt = f(a)$$



➤ 图示系统，在任意输入 $r(t)$ 作用下，输出为：

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}Y(s) = \mathcal{L}^{-1}G(s)R(s) = \int_{-\infty}^t g(t-\tau)r(\tau) d\tau$$

$$\text{其中： } g(t) = \mathcal{L}^{-1}G(s), \quad G(s) = \mathcal{L}g(t)$$

➤ 如果系统输入为单位冲激信号，系统输出为：

$$y(t) = \int_{-\infty}^t g(t-\tau)\delta(\tau) d\tau = g(t)$$

➤ 系统的单位冲激响应即为 $g(t)$ ，系统单位冲激响应的拉氏变换即为系统的传递函数

5.3 二阶系统的性能

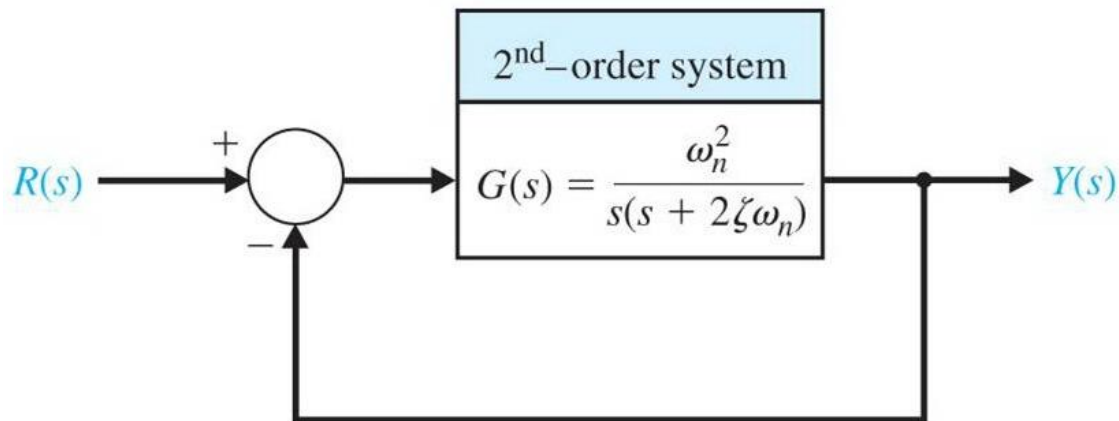
➤ 二阶系统的标准形式

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 u(t)$$

➤ 闭环系统传递函数:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

➤ 单回路二阶闭环控制系统:



➤ 单位负反馈系统，闭环稳态增益为1

➤ 闭环特征方程： $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

➤ 闭环系统特征根（闭环极点）：

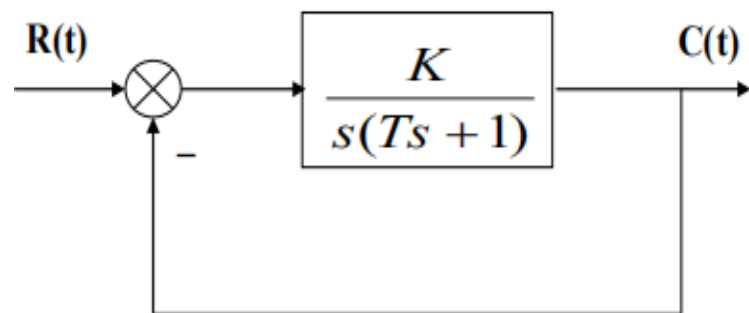
$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

➤ 二阶系统的动态特性主要受：

ζ ——系统阻尼比（阻尼系数）

ω_n ——无阻尼自然振荡频率

两个参数的影响。



二阶系统结构图

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Ts^2 + s + K}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}}, \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{TK}}$$

➤ $0 < \zeta < 1$, **欠阻尼系统**, 闭环极点为左半S平面的一对共轭复极点, 瞬态响应是振荡的

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)} \end{aligned}$$

阻尼自然振荡频率: $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$

闭环系统有一对稳定的共轭复极点:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$$

欠阻尼二阶闭环系统单位阶跃响应:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \end{aligned}$$

做拉氏反变换, 可得单位阶跃响应的时域表达:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}Y(s) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_d t - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t \\ &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \\ &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \cos^{-1} \zeta \right), \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

令： $\beta = \sqrt{1-\zeta^2}$, $\theta = \cos^{-1}\zeta$ 。则有：

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \beta t + \theta), t \geq 0 \quad (5.9)$$

闭环系统对阶跃输入的跟踪误差：

$$\begin{aligned} e(t) &= r(t) - y(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \\ &= \frac{1}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \beta t + \theta), \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

跟踪误差信号为有阻尼的正弦振荡。

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

即二阶闭环系统对单位阶跃输入的稳态跟踪误差为零

➤ $\zeta = 0$, **无阻尼系统**, 闭环极点为虚轴上一对共轭虚极点, 单位阶跃响应为等幅振荡:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s + j\omega_n)(s - j\omega_n)}$$
$$y(t) = 1 - \cos \omega_n t, \quad t \geq 0$$

$\zeta = 0$ 时, 振荡频率为 ω_n , 称为无阻尼自然振荡频率
闭环极点为 $s_{1,2} = \pm j\omega_n$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}, \text{ 并且有 } \omega_d < \omega_n$$

阻尼比 ζ 增大, 有阻尼自然振荡频率 ω_d 将减小

➤ $\zeta = 1$ ，**临界阻尼系统**，闭环极点为负实轴上一对相同的实极点，瞬态响应不振荡

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2}$$

闭环系统在负实轴上有一对稳定的重极点：

$$s_{1,2} = -\omega_n$$

单位阶跃响应：

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t), \quad t \geq 0$$

➤ $\zeta > 1$, **过阻尼系统**, 闭环极点为负实轴上两个不相同的实极点, 瞬态响应不振荡

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{\omega_n^2}{\left(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\left(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)} \end{aligned}$$

负实轴上两个稳定的闭环极点:

$$s_1 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = -\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n$$

$$s_2 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = -\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n$$

闭环系统单位阶跃响应:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\omega_n^2}{s(s-s_1)(s-s_2)} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \frac{1}{s-s_1} - \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \frac{1}{s-s_2} \end{aligned}$$

时域响应:

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 + \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{s_1 t} - \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{s_2 t} \\ &= 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(-\frac{e^{s_1 t}}{s_1} + \frac{e^{s_2 t}}{s_2} \right) \end{aligned}$$

闭环系统单位阶跃响应中包含两个衰减的指数项

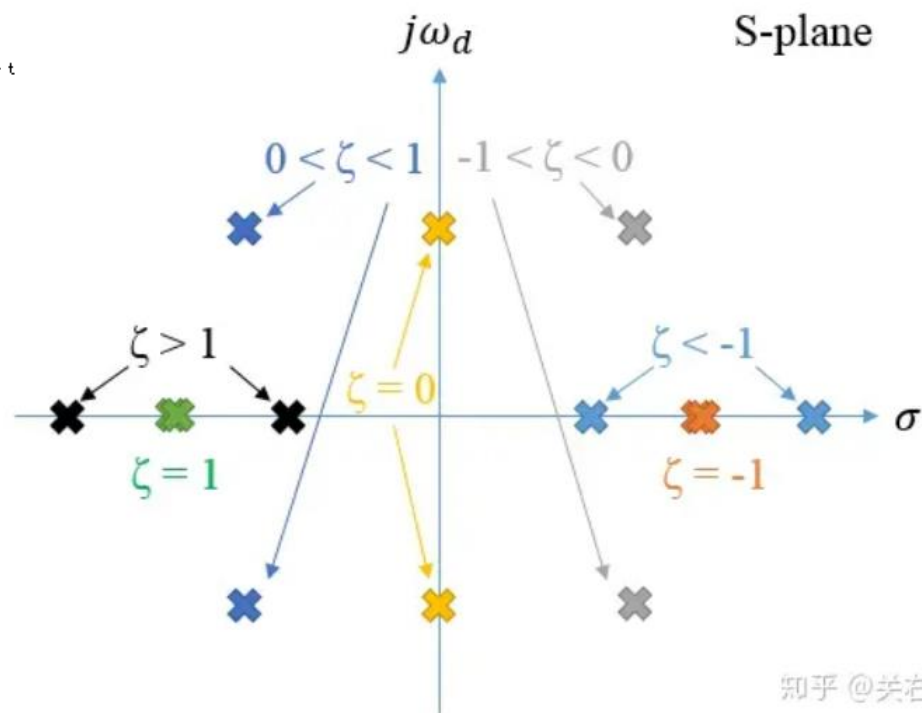
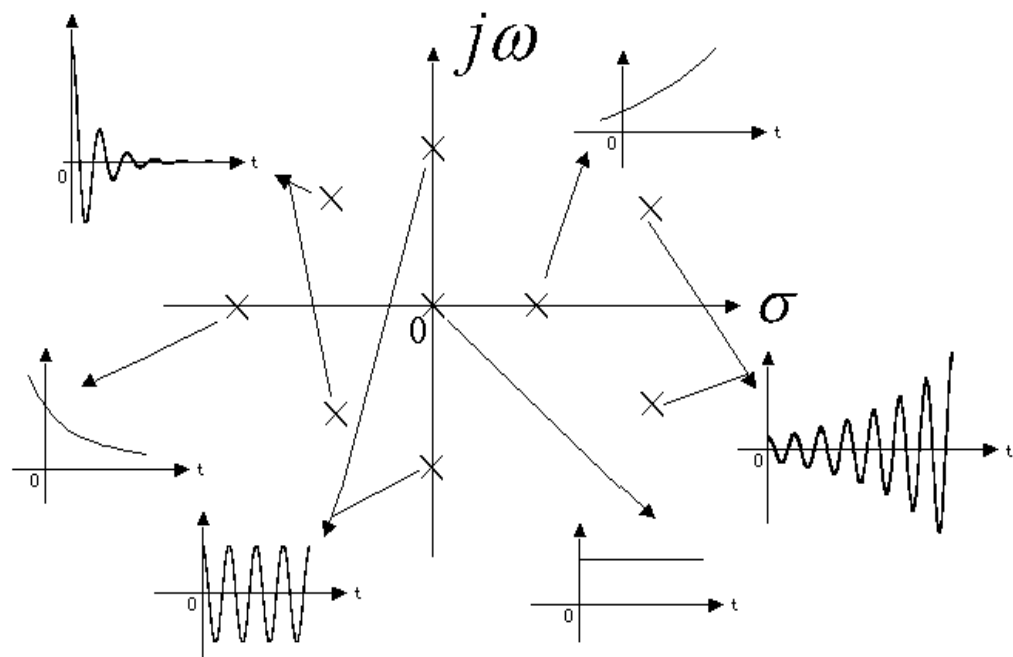
$$\because s_1 = -(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n, \quad s_2 = -(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$$

$\therefore |s_1| > |s_2|$, 极点 s_1 比 s_2 离原点更远, s_1 对应指数项比 s_2 对应指数项衰减更快。

$\zeta \gg 1$ 时, s_1 离原点比 s_2 远得多, s_1 对应的指数项衰减非常快。

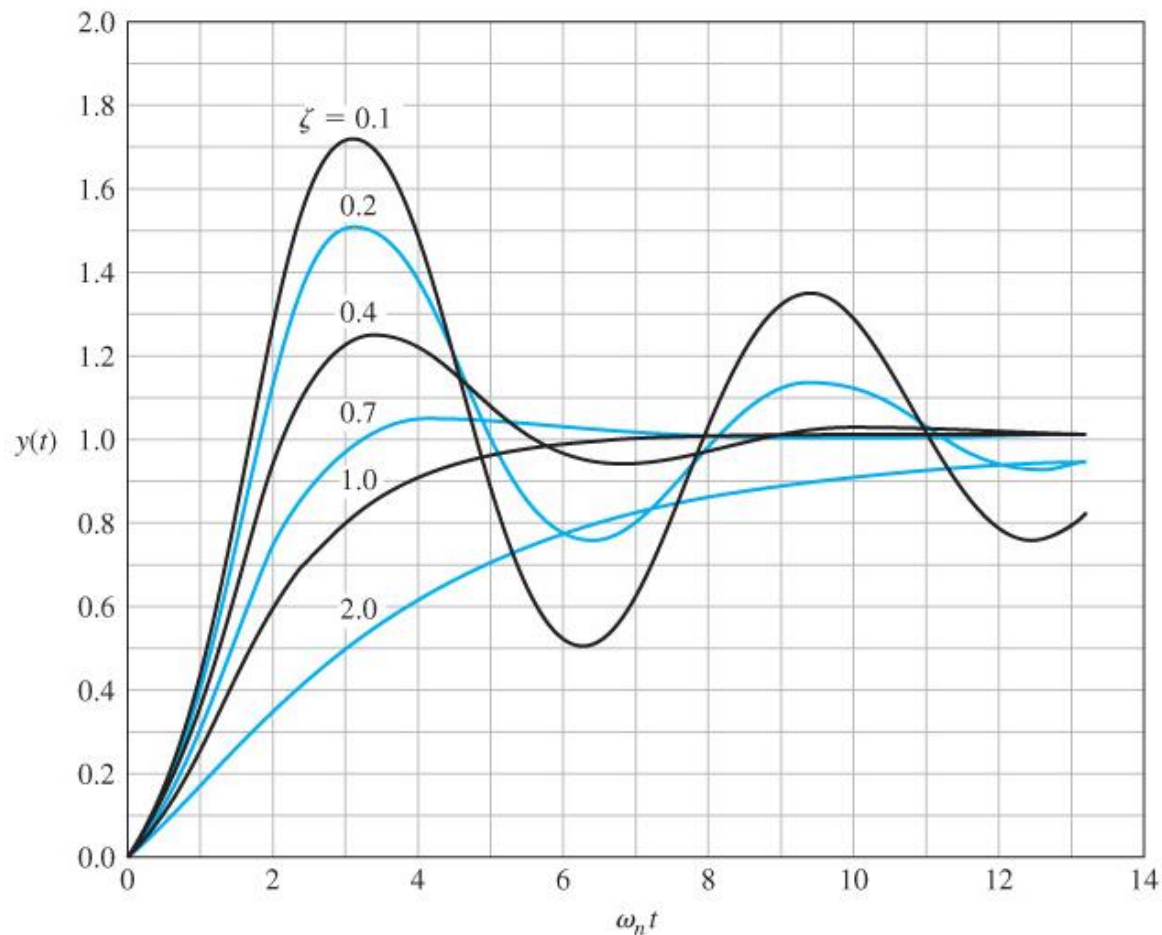
此时, 原二阶系统可以近似为一阶系统:

$$y(t) \approx 1 - e^{s_2 t} = 1 - e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}$$



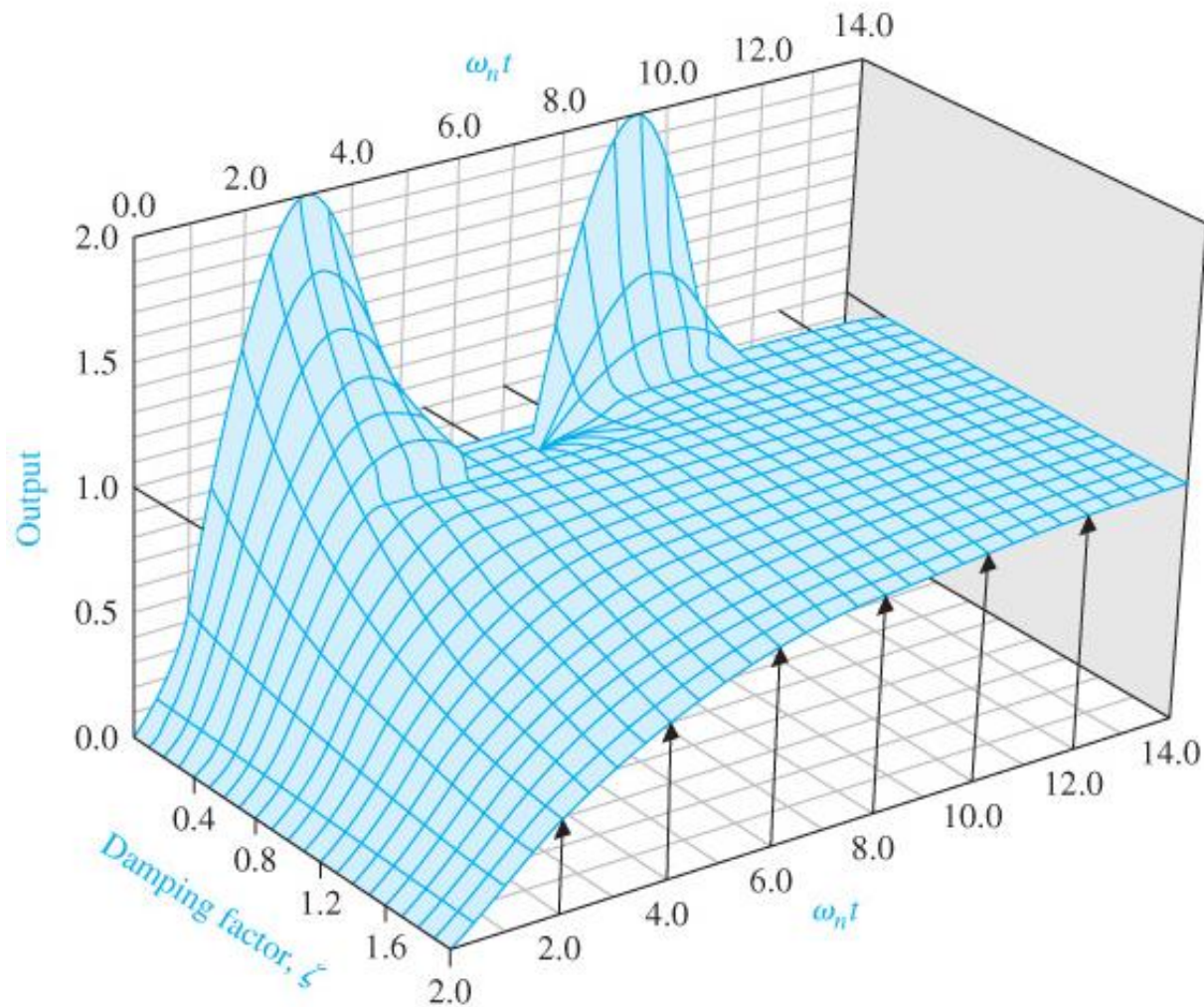
知乎 @关右

➤ 不同阻尼比的二阶系统单位阶跃响应



阻尼比越低，闭环极点越接近虚轴，瞬态响应振荡越剧烈

➤ 二阶系统瞬态阶跃响应与 ζ 、 $\omega_n t$ 的关系



- 过阻尼系统 ($\zeta > 1$) 缓慢响应输入信号，没有振荡。
- 在无振荡响应中，临界阻尼系统 ($\zeta = 1$) 响应速度最快。
- $0.5 < \zeta < 0.8$ 的欠阻尼系统，比临界阻尼系统、过阻尼系统更快的达到稳态值。

➤ 二阶系统单位脉冲响应:

$$R(s)=1, \quad Y(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}$$

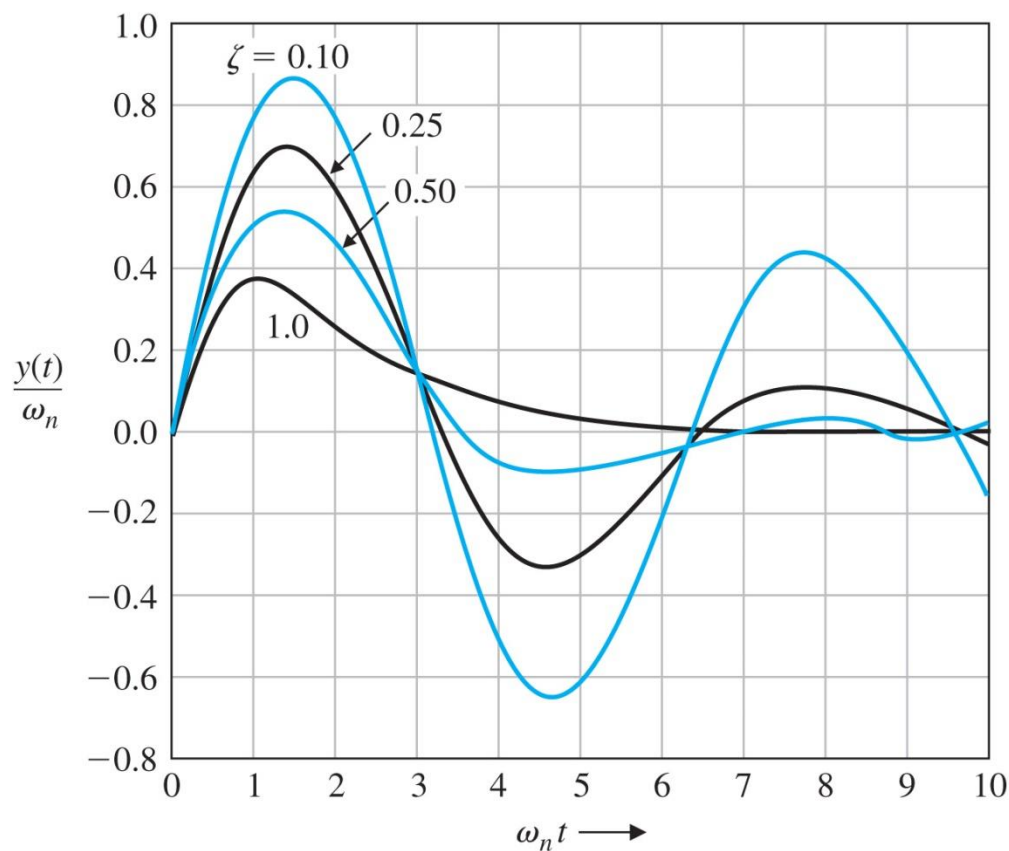
➤ 单位脉冲响应是单位阶跃响应的导数

欠阻尼 $0 \leq \zeta < 1$, $y(t) = \frac{\omega_n}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \beta t)$

临界阻尼 $\zeta = 1$, $y(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$

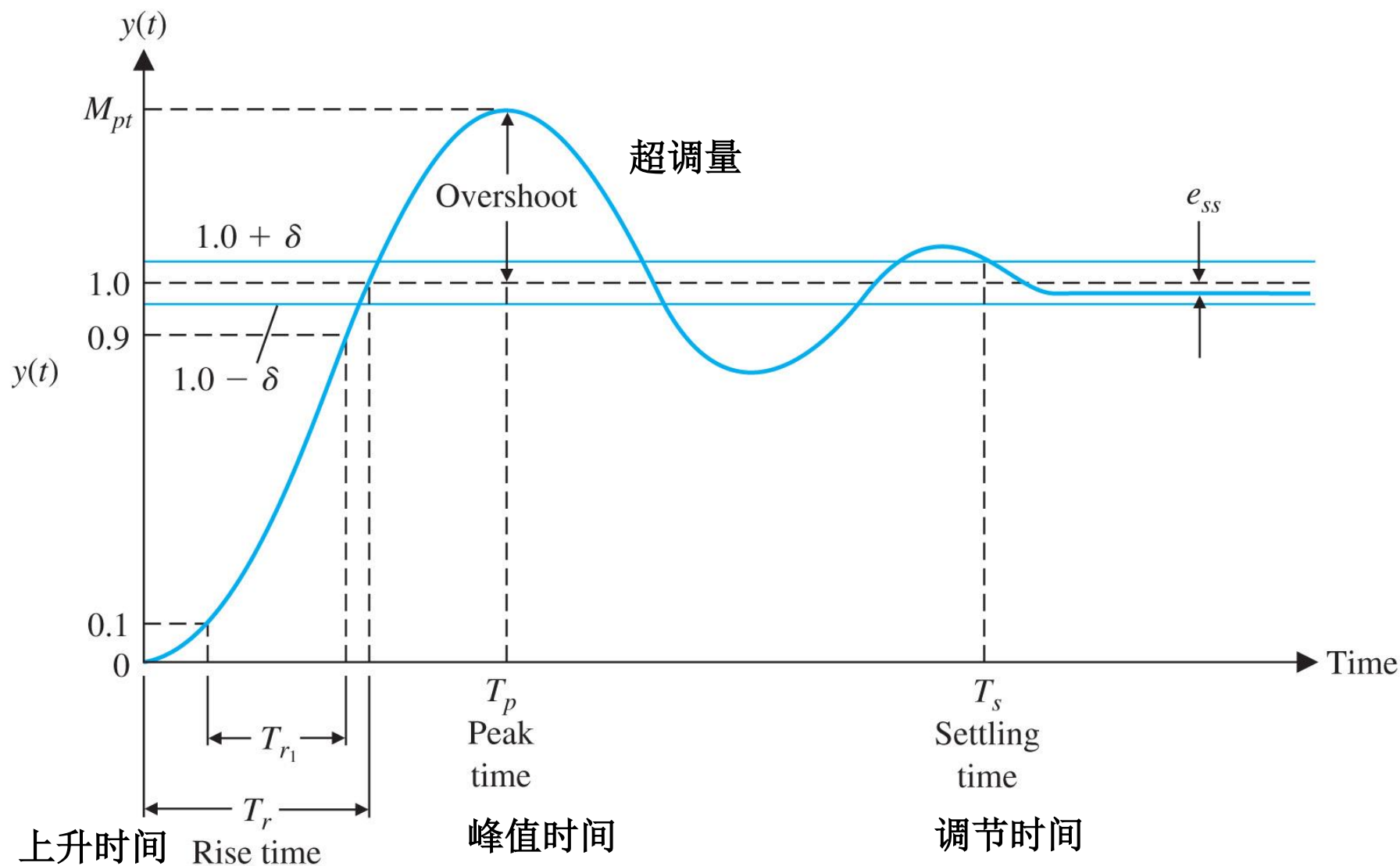
过阻尼 $\zeta > 1$, $y(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}} e^{-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}$
 $- \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}} e^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}$

➤ 不同阻尼比的二阶系统的单位冲激响应



- 过阻尼系统、临界阻尼系统的冲激响应总是正值，无往复振荡。
- 欠阻尼系统的冲激响应围绕初始工作点往复振荡。

➤ 通常用系统单位阶跃响应定义标准性能指标



- 用上升时间、峰值时间衡量系统响应速度。
- **0%到100%上升时间rise time T_r** ：输出响应从0%上升到稳态值（设定期望值）100%所需要的时间。
 - 适用于欠阻尼系统，不适用于过阻尼系统。
- **10%到 90%上升时间rise time T_{r_1}** ：输出响应从稳态值（设定期望值）10%上升到 90%所需要的时间。
- **峰值时间peak time T_p**
 - 欠阻尼系统：输出响应达到超调的第一个峰值所需要的时间。
 - 过阻尼系统：没有峰值时间的定义。

- 用**超调量**、**调节时间**衡量实际响应与单位阶跃输入的逼近程度，即**系统复现期望输出信号的能力**。
- **超调量overshoot**：系统瞬态响应中超过设定值的量。超过设定值的最大峰值称为最大超调量，对于单位阶跃响应即为超过1的最大峰值。
- **百分比超调量percent overshoot**：相对超调量

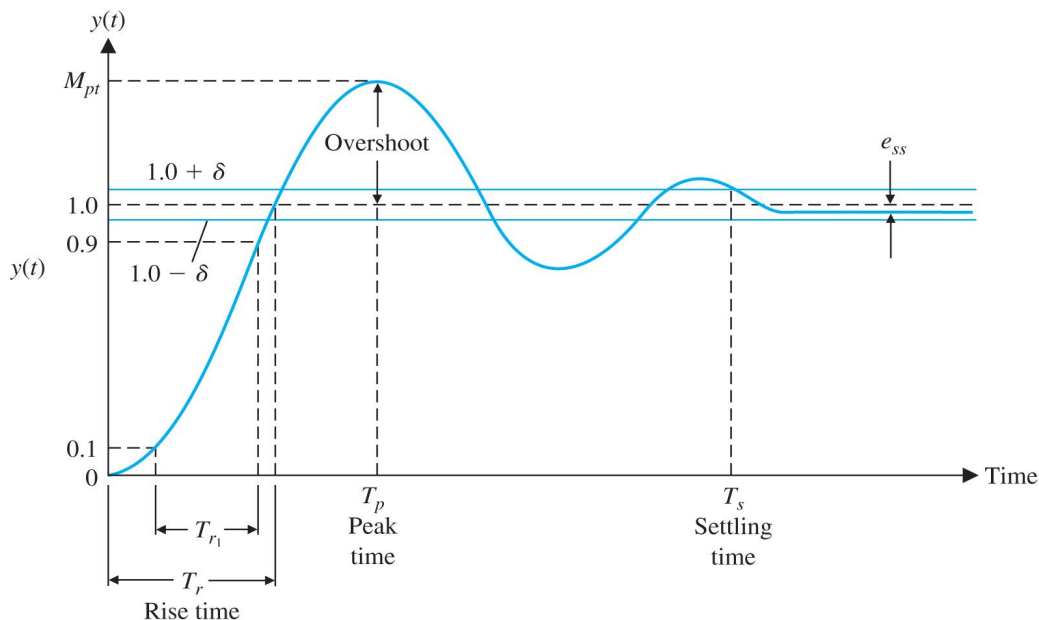
$$P.O. = \frac{M_{Pt} - fv}{fv} \times 100\%$$

M_{pt} ：响应的最大峰值， fv ：时间响应的终值

- 欠阻尼系统才有超调，过阻尼系统没有超调
- 超调量表达了系统的相对稳定性

- **调节时间settling time** T_s : 输出响应到达并且永远维持在稳态值的某个百分比允许误差 $\pm\delta$ 范围内所需要的时间。
- 调节时间也称过渡过程时间
 - ◆ 2%允许误差的调节时间
 - ◆ 5%允许误差的调节时间
- **衰减比**: 系统阶跃响应中超过设定值的第一次峰值与超过设定值的第二次峰值（正值）之比。
- **振荡次数**: 阶跃响应调节时间内（即全部过渡过程中），输出围绕设定值往复振荡的周期数。

► 欠阻尼 ($0 < \zeta < 1$) 二阶系统, 调节时间



单位阶跃响应:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \beta t + \theta)$$

单位阶跃响应曲线的包络线: $1 \pm \frac{1}{\beta} e^{-\zeta \omega_n t}$

近似求出2%允许误差的调整时间:

$$e^{-\zeta \omega_n T_s} < 0.02, \text{ 即 } \zeta \omega_n T_s \approx 4 \quad (\text{假设 } \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 1)$$


$$\text{则: } T_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n} = 4\tau$$


$$5\% \text{ 允许误差的调整时间: } T_s \approx \frac{3}{\zeta \omega_n} = 3\tau$$

➤ 欠阻尼二阶系统，0%—100%上升时间

单位阶跃响应0%—100%的上升时间为：

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \beta t + \theta) = 1, \quad \theta = \cos^{-1} \zeta$$


$$\frac{1}{\beta} e^{-\zeta \omega_n T_r} \sin(\omega_n \beta T_r + \theta) = 0$$


$$\omega_n \beta T_r + \theta = \pi$$

$$T_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \beta} = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{\pi - \cos^{-1} \zeta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

增大 ω_n ，或减小 ζ ，可以减小上升时间 T_r

还可以求出 $y(t)$ 每一次穿越设定值的时刻：

$$\omega_n \beta T_i + \theta = i\pi, \quad i = 1, 2, 3 \dots$$

系统的瞬态响应性能主要体现在以下两个方面：

- 1、响应的快速性，由上升时间和峰值时间表征。
- 2、实际响应对预期响应的逼近程度，由超调量和调节时间表征。

实际上，这两个方面的指标往往是彼此冲突的，必须进行折中处理。

求解欠阻尼系统峰值 M_{pt} 和峰值时间 T_p 与阻尼比 ζ 之间的函数关系：

方法1：对式（5.9）单位阶跃响应求微分令其为零

欠阻尼二阶系统，峰值时间

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \beta t + \theta) \rightarrow \frac{dy}{dt} = 0$$

方法2：利用拉普拉斯变换的微分特性：

$$L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sY(s) = s \cdot \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\text{对 } \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \text{ 进行拉普拉斯逆变换，可以得到：} \frac{dy(t)}{dt} = \frac{\omega_n}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \beta t) = 0$$

$$\text{因此 } \omega_n \beta T_p = \pi, \text{ 二阶系统阶跃响应的峰值时间为：} T_p = \frac{\pi}{\omega_n \beta} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

➤ 欠阻尼二阶系统，峰值与超调量

将上式代入式（5.9）中，可以得到响应峰值为：

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \beta t + \theta)$$

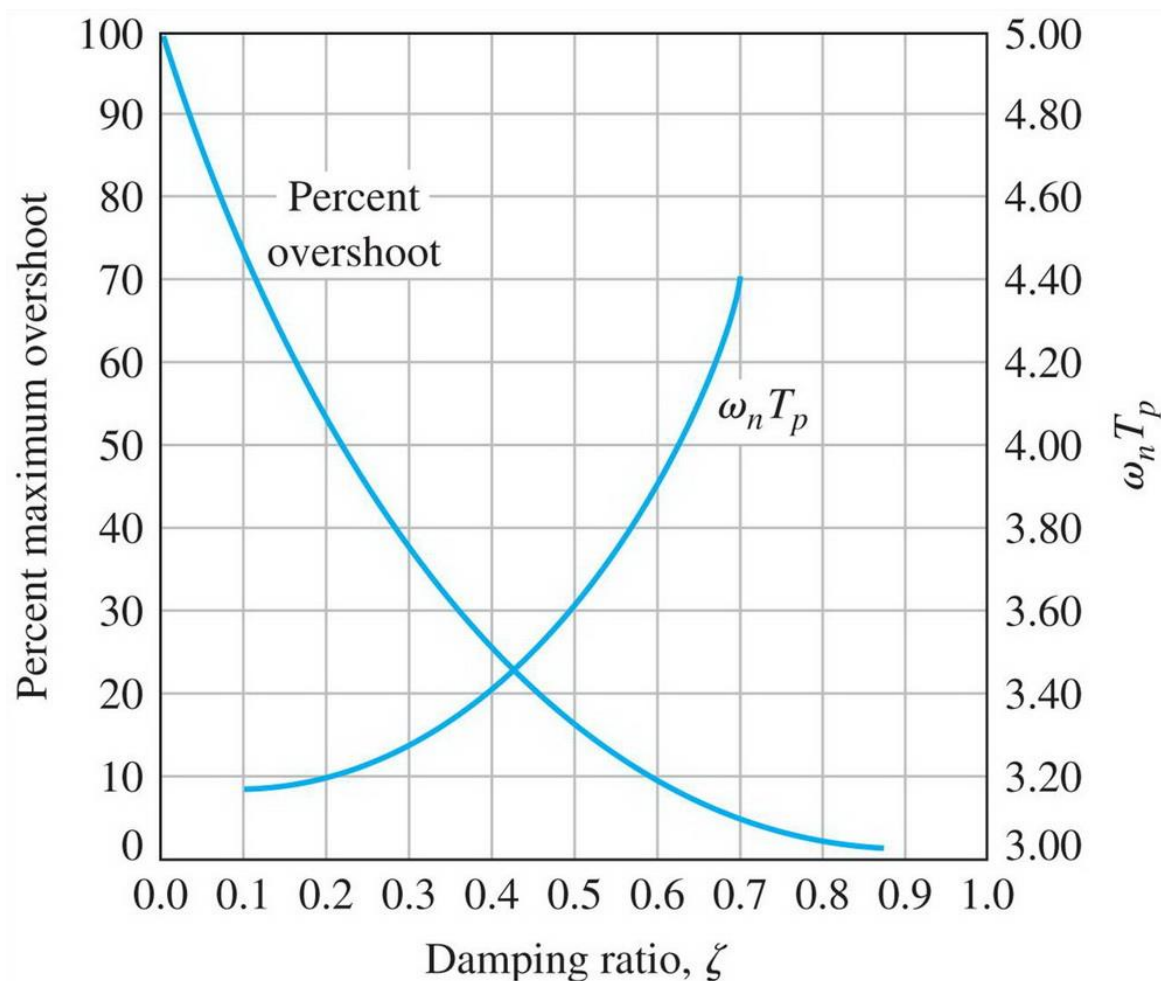
$$\rightarrow M_{pt} = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta \omega_n \frac{\pi}{\omega_n \beta}} \sin(\pi + \theta) = 1 + \frac{1}{\beta} e^{-\frac{\zeta \pi}{\beta}} \sin \theta$$

$$\text{由于 } \theta = \arccos \zeta, \cos \theta = \zeta, \sin \theta = \sqrt{1 - \zeta^2} = \beta$$

$$\text{因此: } M_{pt} = 1 + \frac{1}{\beta} e^{-\frac{\zeta \pi}{\beta}} \sin \theta = 1 + e^{-\frac{\zeta \pi}{\beta}} = 1 + e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}} \quad (5.15)$$

$$\text{超调量 } P.O. \text{ 为: } P.O. = 100 e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}} \% \quad (5.16)$$

二阶系统超调量和标准化峰值时间 $\omega_n T_p$ 与阻尼比的关系

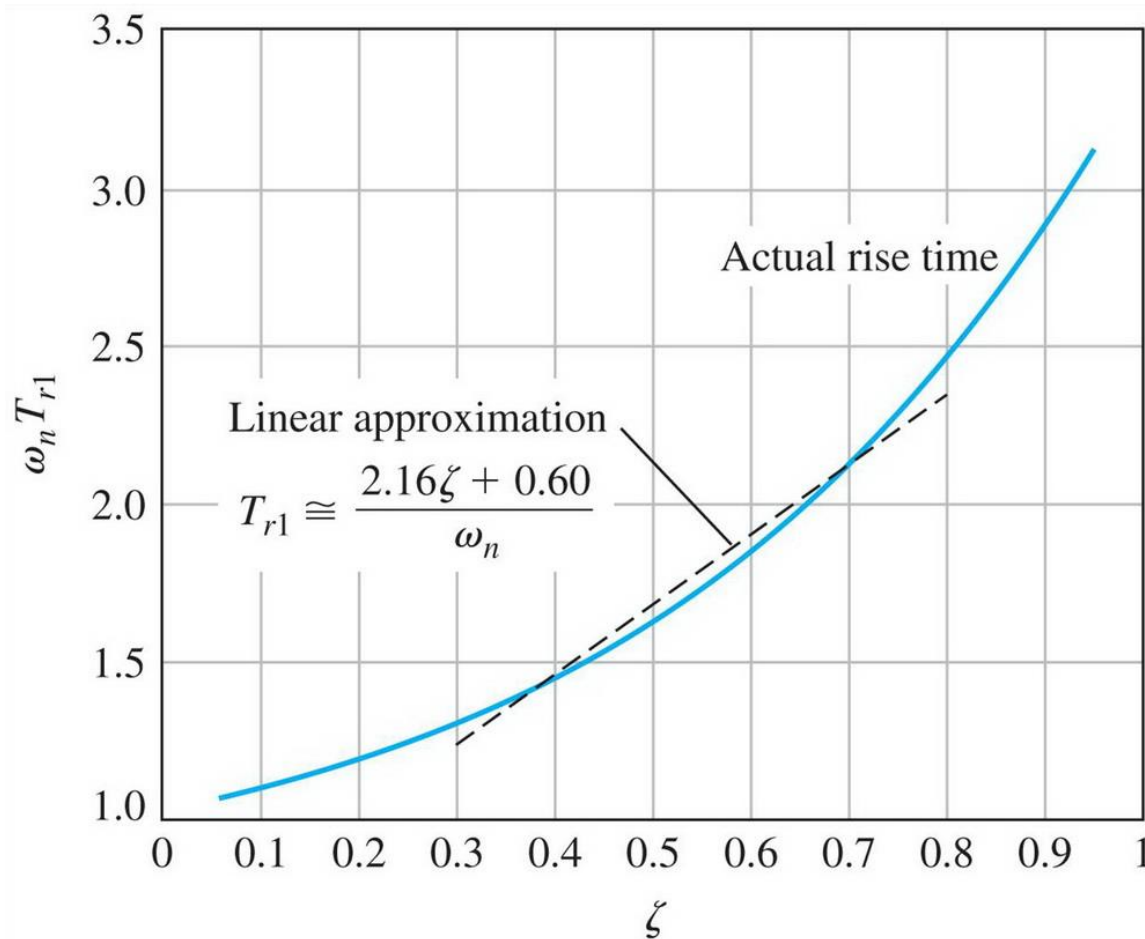


➤ 超调量与阻尼比:

阻尼比	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3
超调量	0.2	1.5	4.6	9.5	16.3	25.4	37.2

- 阻尼比越大，超调量越小，说明系统响应对预期响应的逼近程度越好；但峰值时间随之增加，说明系统响应的快速性有所减弱。响应的快速性和较小的超调量存在冲突，需要折衷
- 阻尼比在0.4~0.8之间可以获得比较好的瞬态响应
 - 阻尼比过小会造成瞬态响应严重过调
 - 阻尼比过大会使瞬态响应速度缓慢

➤ 欠阻尼二阶系统，10%—90%上升时间（衡量阶跃响应的快速性）



T_{r1} 的线性近似:

$$T_{r1} = \frac{2.16\zeta + 0.60}{\omega_n}$$

$$0.3 \leq \zeta \leq 0.8$$

0.05 $\leq \zeta \leq$ 0.95时， ζ 与归一化上升时间 $\omega_n T_{r1}$ 的关系

➤ 欠阻尼二阶系统，衰减比

阶跃响应的第一次峰值： $M_{pt} = 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

阶跃响应的第三次峰值时间： $T_3 = \frac{3\pi}{\omega_d}$

第三次峰值响应：

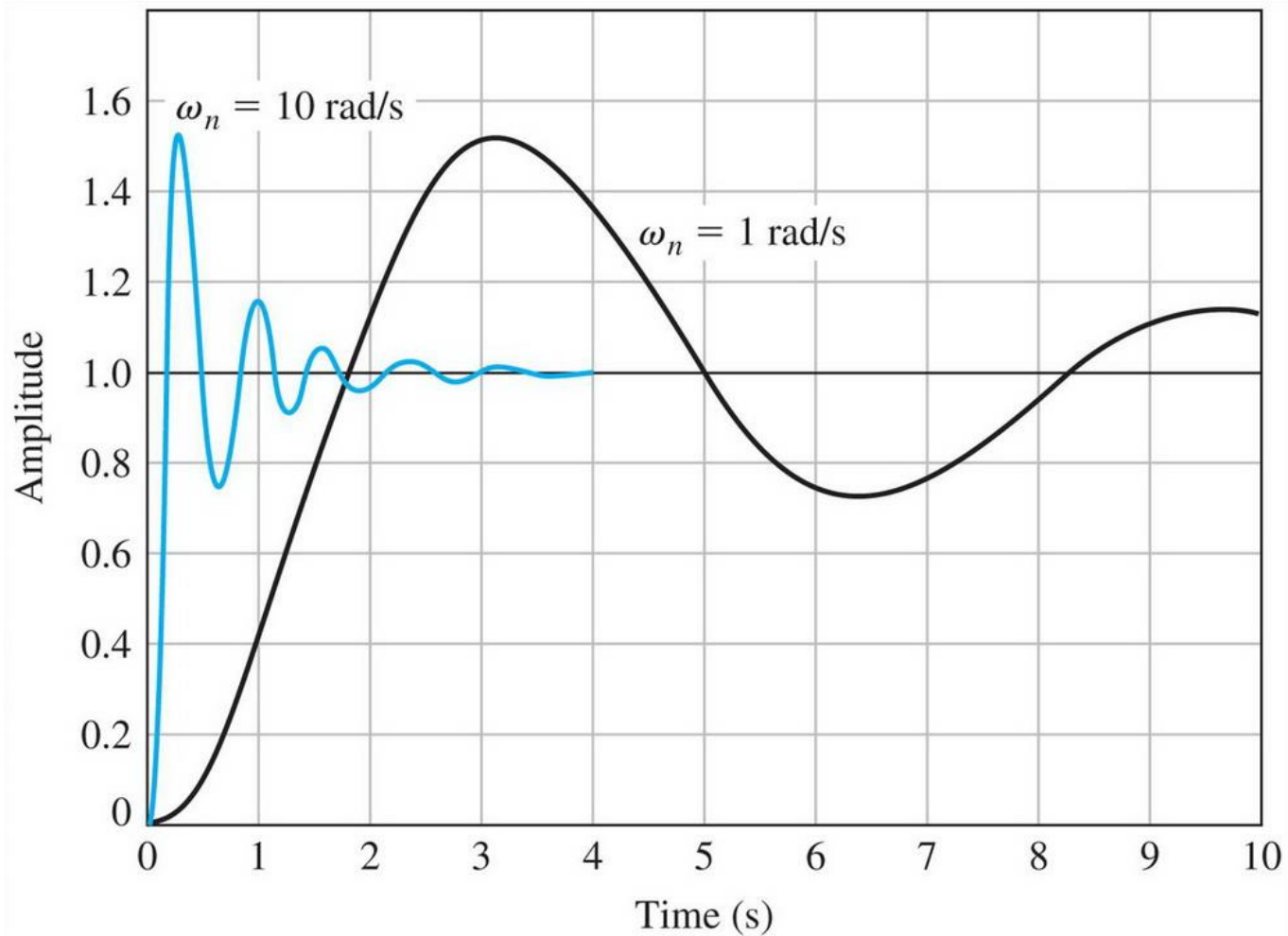
$$M_3 = 1 - e^{-\zeta\omega_n T_3} \cos \omega_d T_3 - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n T_3} \sin \omega_d T_3 = 1 + e^{-\frac{3\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

衰减比： $\eta = (M_{Pt} - fv) / (M_3 - fv) = e^{\frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

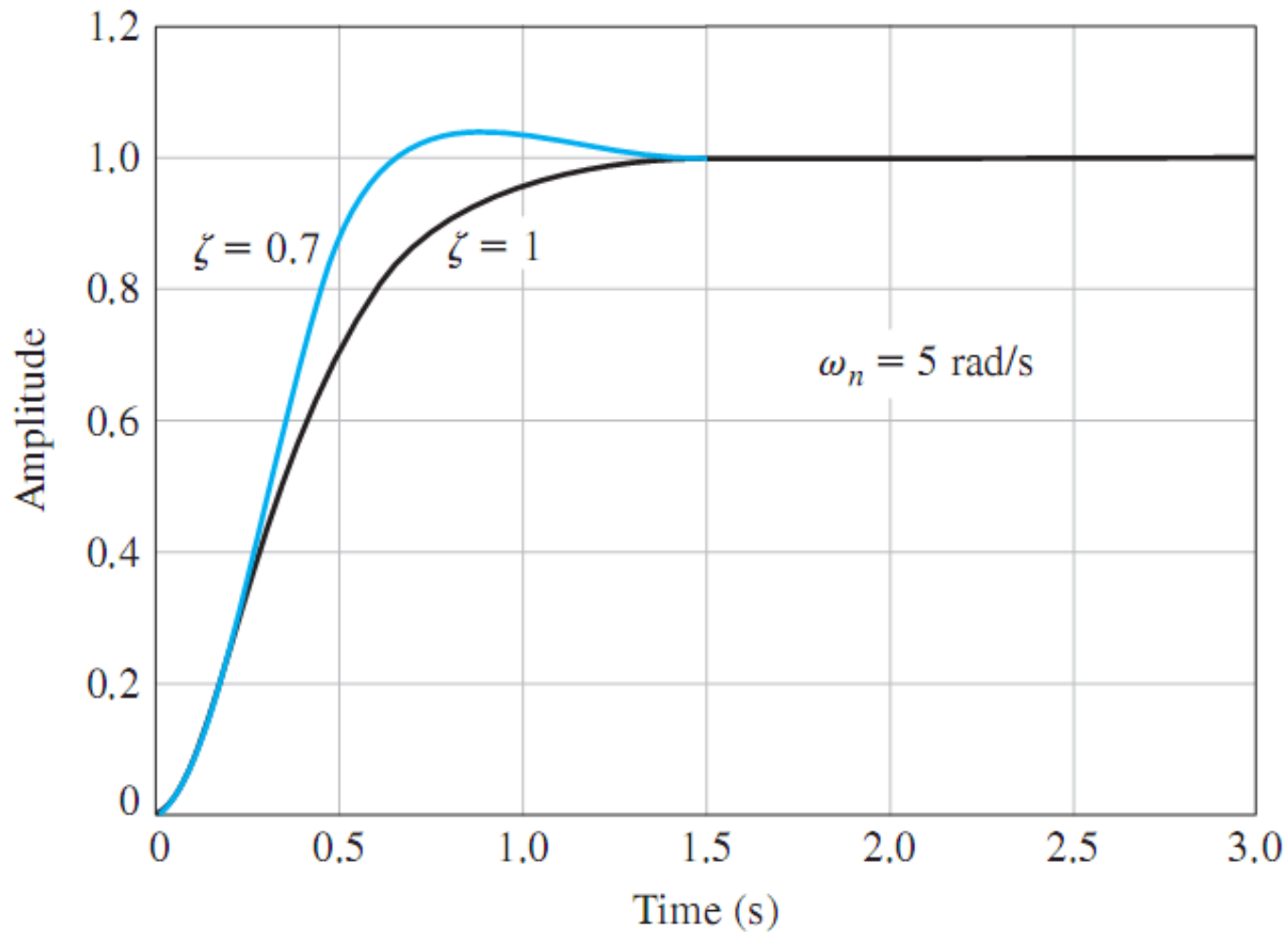
工程上认为比较理想的是所谓 4:1 衰减振荡

过程控制中有时选择 10:1 衰减振荡，最好是没有振荡

➤ 阻尼比 ζ 确定后, ω_n 越大, 响应越快



➤ ω_n 确定后, ζ 越小, 响应越快, 超调量增大



5.4 零点和第三个极点对二阶系统响应的影响

➤ 归一化三阶系统的闭环传递函数：

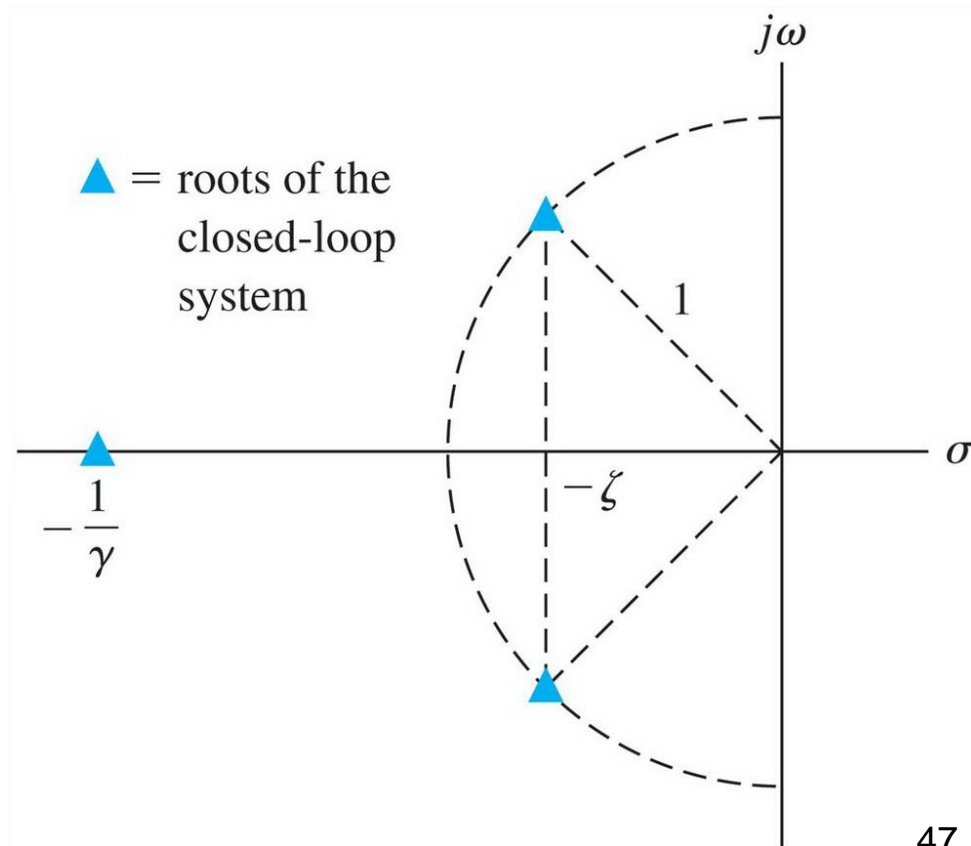
$$T(s) = \frac{1}{(s^2 + 2\zeta s + 1)(\gamma s + 1)} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1} \cdot \frac{1}{\gamma s + 1}$$

$$\omega_n = 1$$

阻尼自然振荡频率： $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$

闭环系统有一对稳定的共轭复极点：

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$$



- 第三个极点是稳定的负实极点，它使系统的响应更加平缓，响应速度减慢，超调量减小，过渡过程时间延长。
- 当 $|1/\gamma| \geq 10|\zeta\omega_n|$ 时，共轭复极点的实部小于负实极点实部的 **1/10**，共轭复极点是一对主导极点。此时，三阶系统可以近似为主导极点表示的二阶系统，三阶系统的响应可用主导极点表示的二阶系统的响应来近似，系统的性能指标（超调量，调节时间等）可用二阶系统曲线来表示。

➤ $\zeta = 0.45$ 时附加极点影响：

$$|1/\gamma| \geq 10|\zeta\omega_n|, 10|\zeta\omega_n| = 4.5, \gamma \leq 0.222$$

γ	$1/\gamma$	超调量	调节时间
2.25	0.444	0	9.63
1.5	0.666	3.9	6.3
0.9	1.111	12.3	8.81
0.4	2.50	18.6	8.67
0.05	20.0	20.5	8.37
0	无穷大	20.5	8.24

$\omega_n=1$

公式 (5.16)

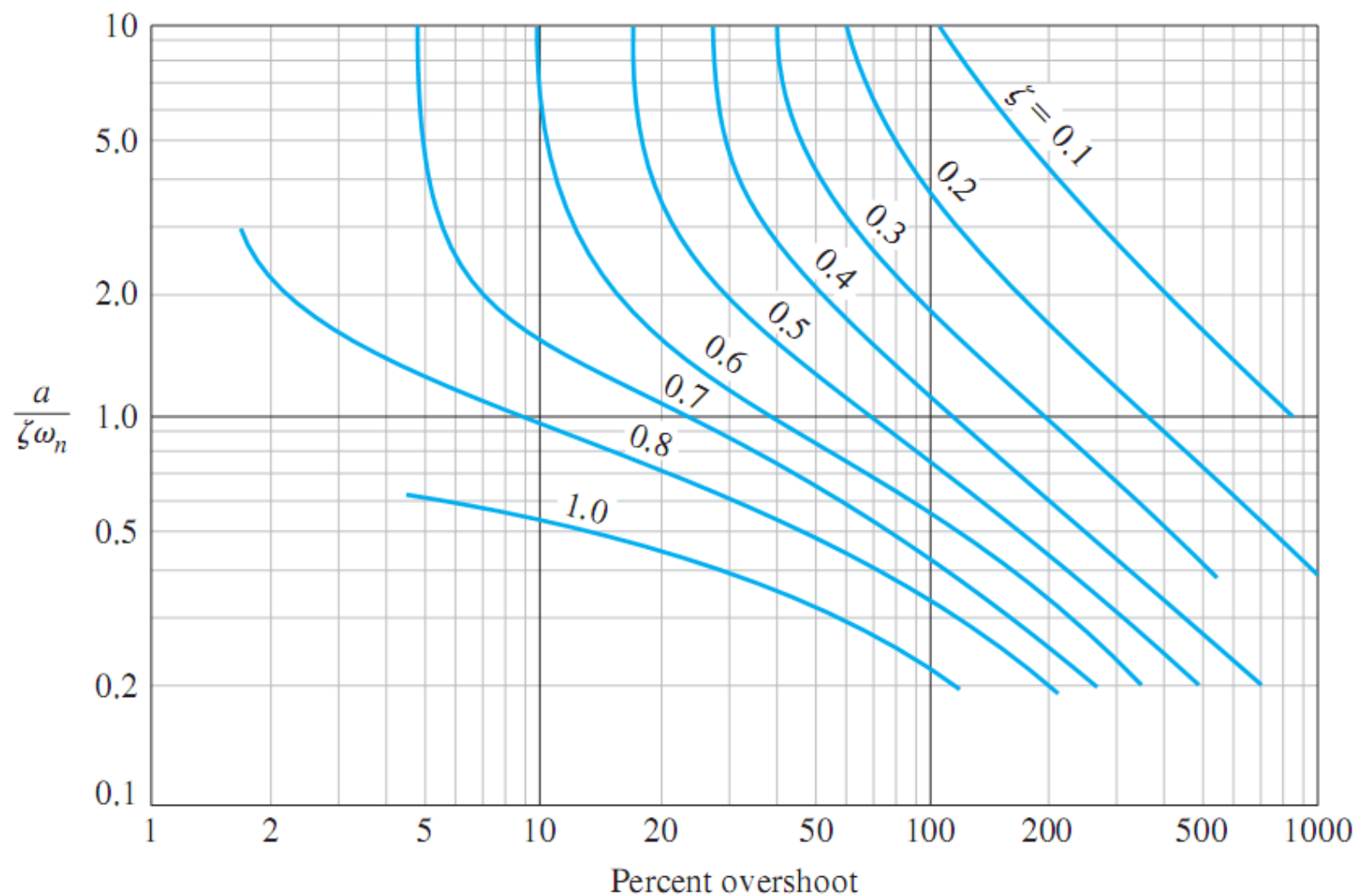
归一化调节时间 $\omega_n T_s$ ，2%允许误差准则

- 若系统具有有限大小的零点，并且位于主导复极点附近，则零点对系统瞬态响应的影响很大。
- 具有一个零点、两个极点的系统，其瞬态响应受零点位置的影响：

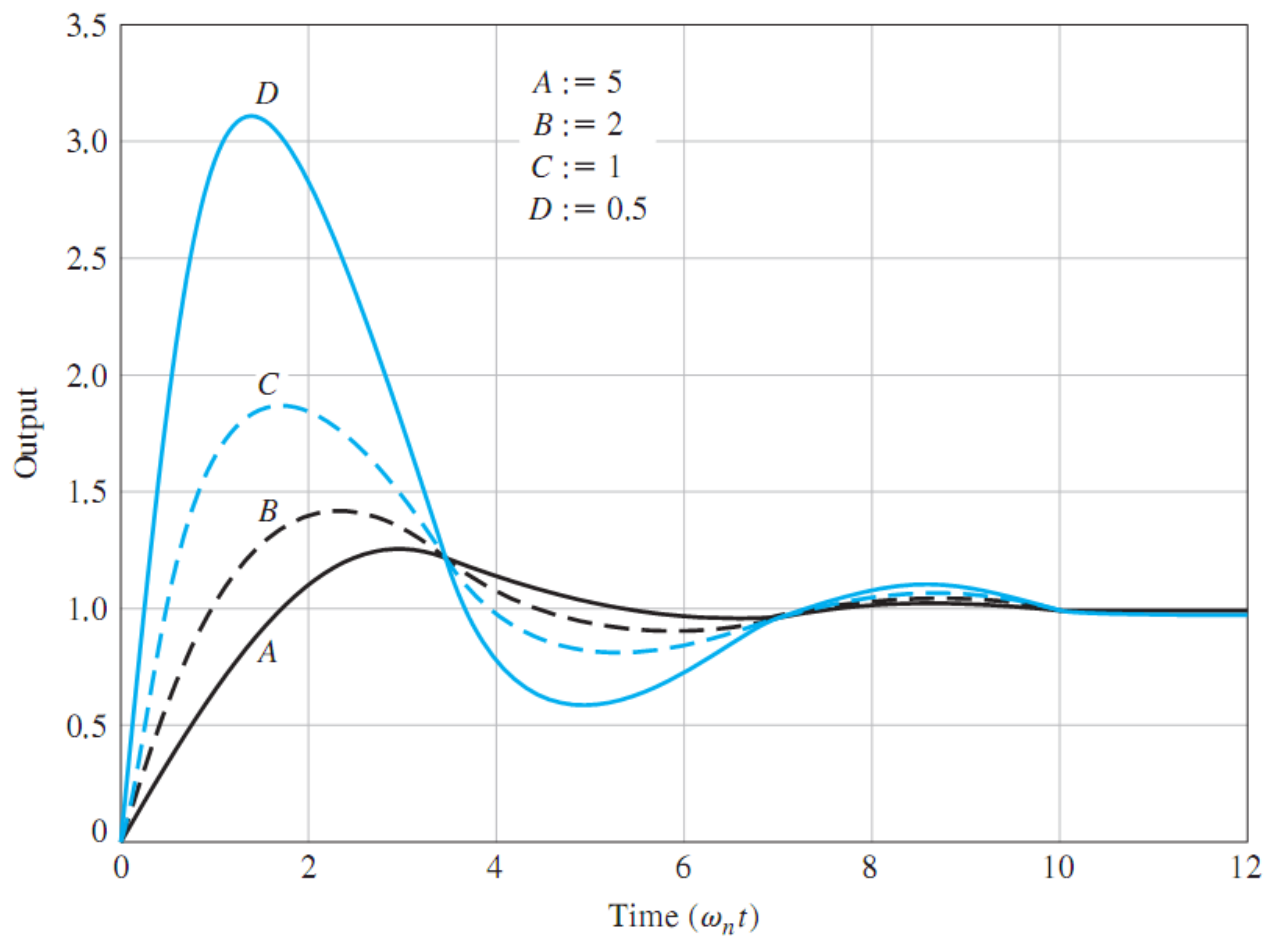
$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{\left(\omega_n^2/a\right)(s+a)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{s}{a} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \end{aligned}$$

- 系统的零点离原点越近，即 a 越小，零点对系统瞬态响应的影响越大。
- 无穷远处的零点对瞬态响应几乎没有影响。

➤ $\zeta \leq 1$ ，系统阶跃响应的超调量与 $a/\zeta\omega_n$ 的关系



➤ $\zeta = 0.45$ 时，一个零点、两个极点系统的阶跃响应，取 $a/\zeta\omega_n$ 为：**A=5, B=2, C=1, D=0.5**



➤ 当 $\zeta = 0.45$ 时瞬态响应性能指标:

$\alpha / \zeta \omega_n$	超调量	调节时间	峰值时间
5	23.1	8.0	3.0
2	39.7	7.6	2.2
1	89.9	10.1	1.8
0.5	210.0	10.3	1.5

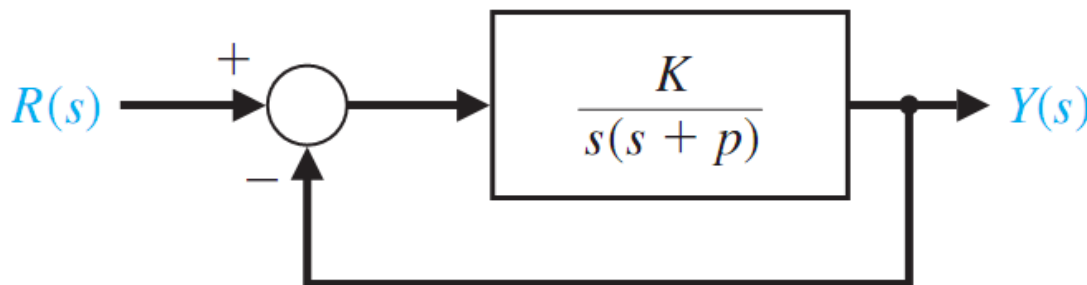
采用归一化时间 $\omega_n t$ ，调节时间采用2%允许误差准则

➤ 零点的存在使系统瞬态响应上升时间、峰值时间减小，
超调量增大

➤ **例5.1** 参数选择:

选择增益 **K** 、极点 **p** ，以满足时域性能指标:

- 对阶跃信号的瞬态响应尽可能快速
- 超调量小于**5%**
- **2%**允许误差准则的调节时间小于**4s**



➤ 闭环系统传递函数为二阶系统:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{K}{s^2 + ps + K}$$

对欠阻尼二阶系统，有：

$$P.O. = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \leq 5\% \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \leq 0.05$$

$$-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \leq \ln 0.05 \quad \Rightarrow \quad \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \geq -\frac{\ln 0.05}{\pi}$$

$$\zeta^2 \geq \frac{(-\ln 0.05 / \pi)^2}{1 + (-\ln 0.05 / \pi)^2} = 0.477$$

$\therefore \zeta \geq 0.69$ 时满足超调量的要求

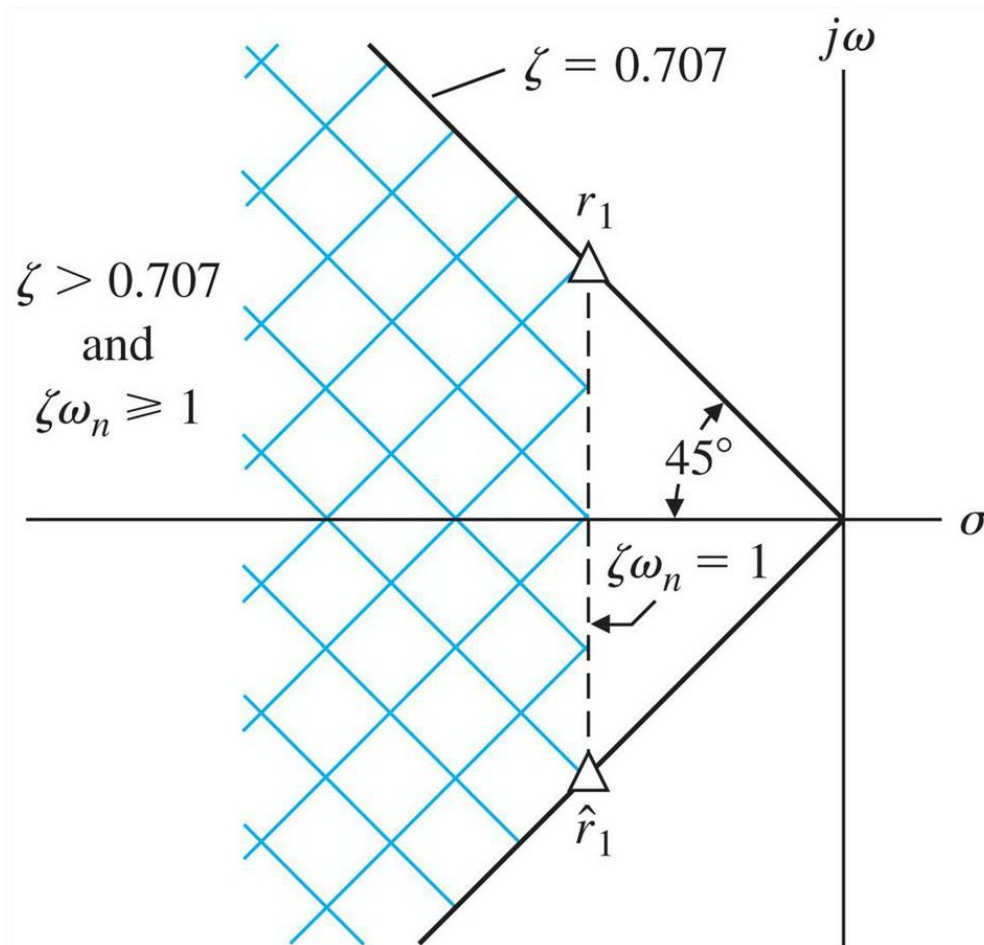
$$\text{当 } \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707 \text{ 时, } P.O. = 4.3\%$$

对调整时间的要求: $T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \leq 4\text{s}$ (2% 允许误差)

$$\therefore \zeta\omega_n \geq 1$$

共轭复极点的实部
要大于等于1

闭环系统极点要位
于 s 平面阴影部分



若取 $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$, $\omega_n = \frac{1}{\zeta} = \sqrt{2} = 1.414$

有: $T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 4\text{s}$, $P.O. = 4.3\%$

闭环极点: $r_1 = -1 + j1$, $\hat{r}_1 = -1 - j1$

闭环传递函数:

$$T(s) = \frac{K}{s^2 + ps + K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{2}{s^2 + 2s + 2}$$

$$K = \omega_n^2 = 2$$

$$p = 2\zeta\omega_n = 2$$

➤ 例5.2 闭环传递函数 $T(s)$ 的主导极点

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{\omega_n^2}{a}(s+a)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(\tau s + 1)}$$

➤ 系统零点和实极点都会影响瞬态响应

➤ 当 $a \gg \zeta\omega_n$, $1/\tau \gg \zeta\omega_n$ 时, 对阶跃响应影响不大

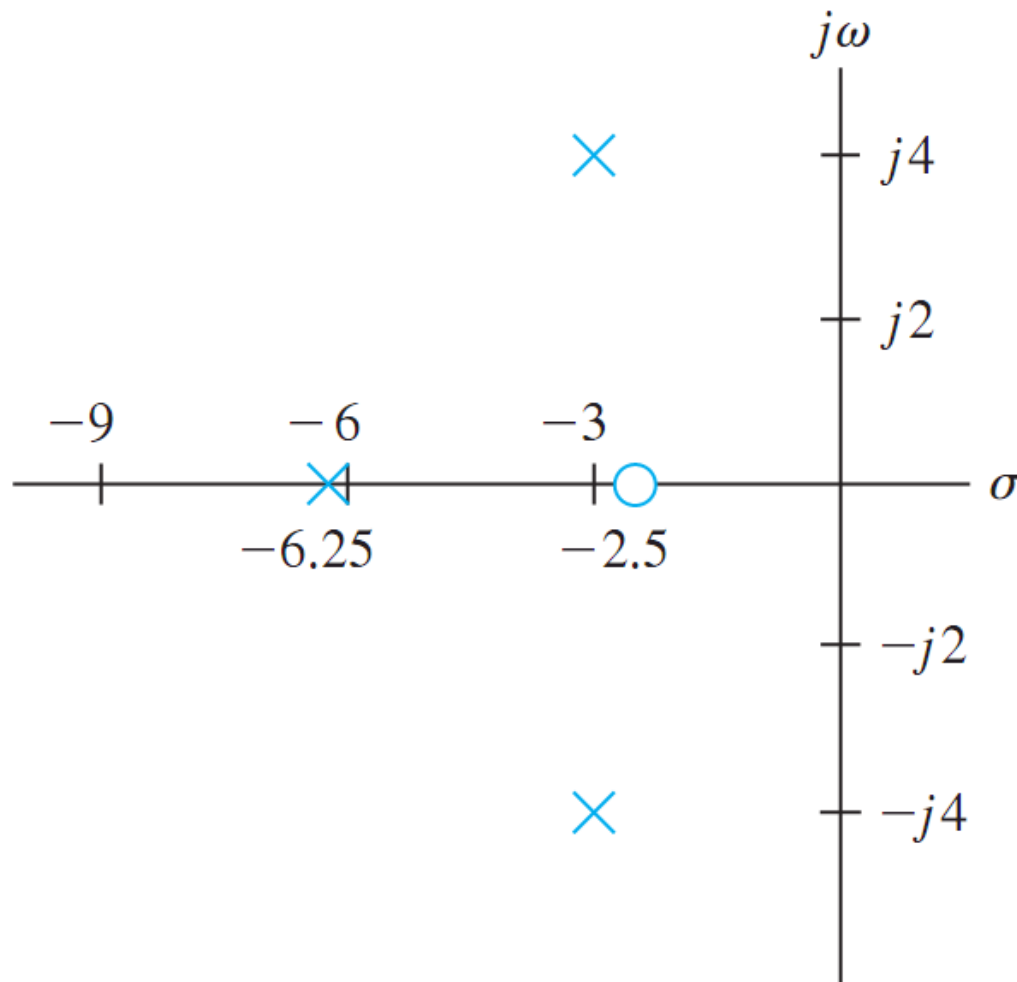
若取:
$$T(s) = \frac{62.5(s+2.5)}{(s^2 + 6s + 25)(s+6.25)}$$

直流增益等于1, 即 $T(0)=1$

对于阶跃输入的稳态误差为0

$$\omega_n = 5, \quad \zeta\omega_n = 3, \quad \zeta = 0.6, \quad \tau = \frac{1}{6.25} = 0.16, \quad a = 2.5$$

➤ **s**平面上零极点分布: $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$



➤ 若忽略实极点，有二阶近似系统：

$$T(s) \approx \frac{10(s+2.5)}{s^2 + 6s + 25}, \quad \zeta = 0.6, \quad \omega_n = 5, \quad \frac{a}{\zeta\omega_n} = 0.833$$

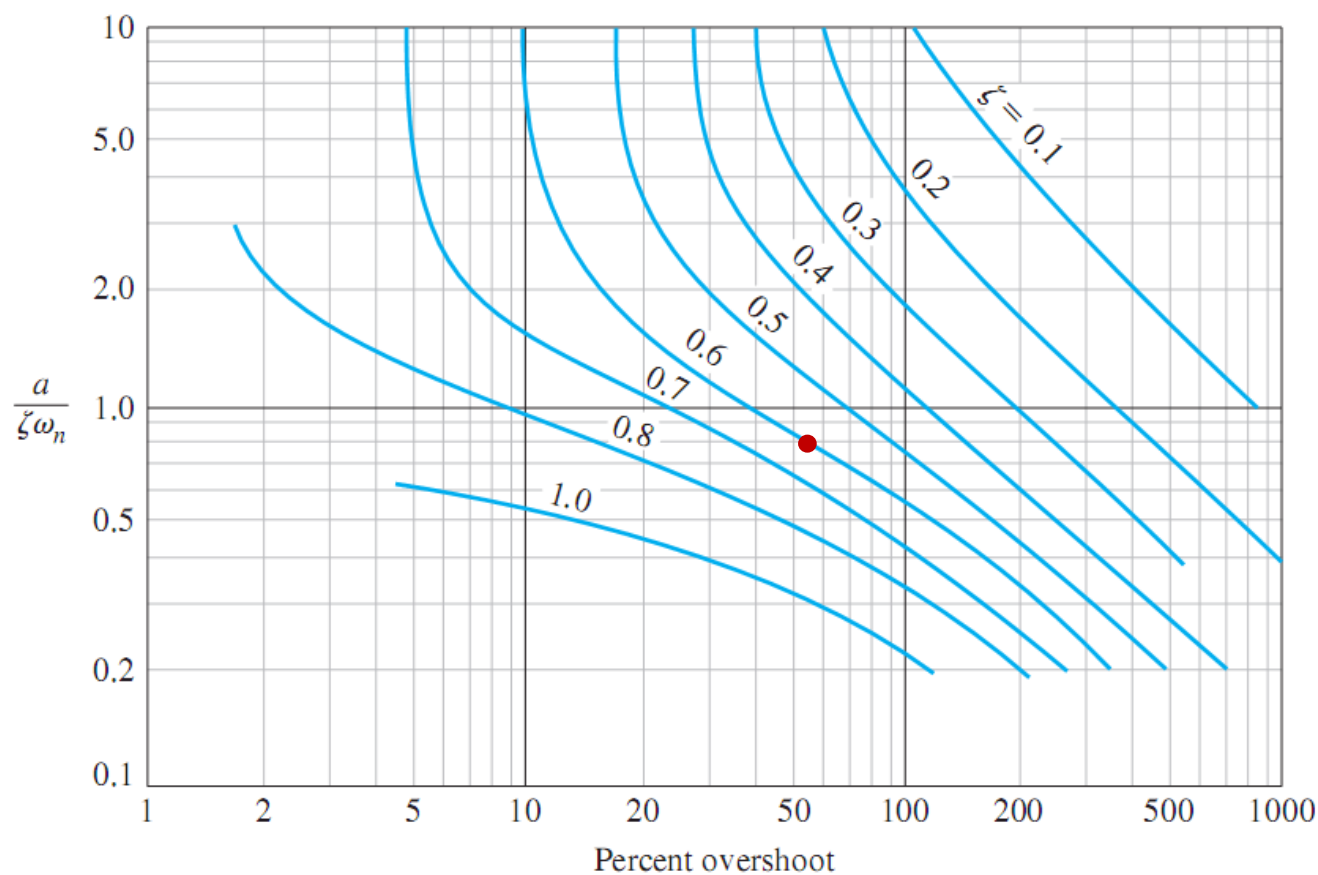


图 5.13(a)

- 由图**5.13(a)**可以得到，二阶近似系统超调量为**55%**，调节时间为：

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.6 \times 5} = 1.33\text{s}$$

- 对实际的三阶系统进行计算机仿真，得到的超调量**38%**，调节时间**1.6秒**。
- 第三个实极点对系统起到了增加阻尼的作用，一方面减少了超调量，另一方面增加了调节时间。
- 当第三个实极点与原点的距离，与共轭复极点与原点的距离大致相同时，不能忽略第三个实极点。

- 阻尼比是影响闭环系统的性能的关键参数
 - 对调节时间、百分比超调量、峰值时间、上升时间都有影响
 - 阻尼比是影响二阶系统阶跃响应超调量的唯一因素
- 实践中，需要由阶跃响应估算系统阻尼比
- 方法一：由阶跃响应百分比超调量估算阻尼比，由式（5.16）

$$P.O. = 100e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$
$$\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = -\ln \frac{P.O.}{100} \quad \Rightarrow \quad \pi^2\zeta^2 = \left(-\ln \frac{P.O.}{100}\right)^2 (1-\zeta^2)$$
$$\zeta^2 = \frac{[-\ln(P.O./100)]^2}{\pi^2 + [-\ln(P.O./100)]^2} \Rightarrow \zeta = \frac{-\ln(P.O./100)}{\sqrt{\pi^2 + [-\ln(P.O./100)]^2}}$$

➤ 方法二：由阶跃响应振荡周期数估算阻尼比

单位阶跃响应：

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \beta t + \theta)$$

其中： $\beta = \sqrt{1 - \zeta^2}$, $\theta = \cos^{-1} \zeta$

$\zeta < 1$ 时，阻尼正弦项的阻尼振荡角频率：

$$\omega_d = \omega_n \beta = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

每秒的振荡周期数(振荡频率)： $f_d = \omega_d / 2\pi$

指数衰减项的时间常数为： $\tau = 1 / \zeta \omega_n$

在每个指数衰减项的时间常数内，阻尼正弦项的振荡周期数：

$$(\text{每秒振荡周期数}) \times \tau = \frac{\omega_d}{2\pi} \frac{1}{\zeta \omega_n} = \frac{\omega_n \beta}{2\pi} \frac{1}{\zeta \omega_n} = \frac{\beta}{2\pi \zeta}$$

假定瞬态响应在 n 个时间常数内衰减，则有：

$$\text{可观测振荡周期数} = \frac{n\beta}{2\pi \zeta}$$

二阶系统的调整时间为 4τ （稳态值 $\pm 2\%$ 允许误差），

即 $n = 4$ ，在系统过渡过程中，可观测到的振荡周数为：

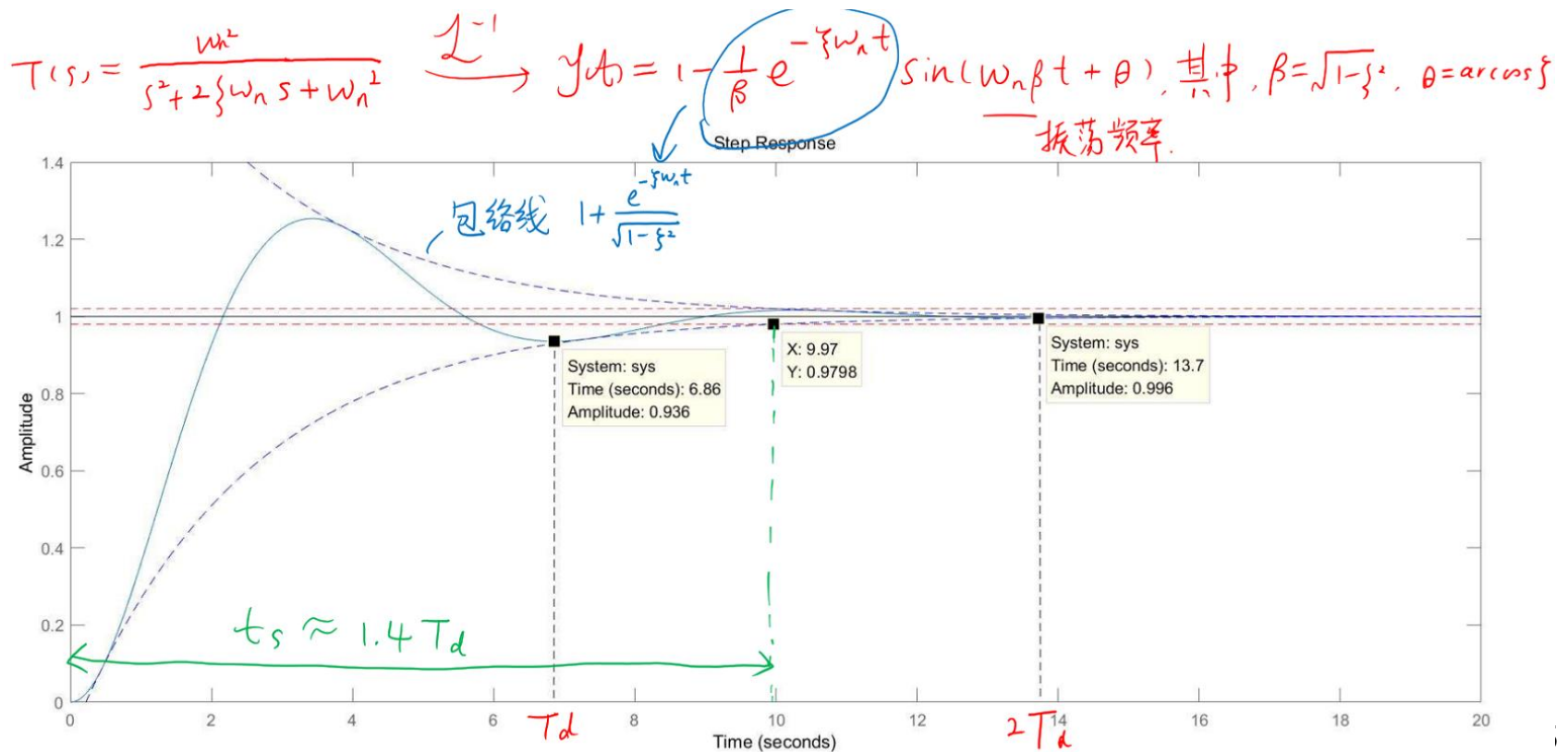
$$\text{可观测振荡周数} = \frac{4\beta}{2\pi \zeta} = \frac{4\sqrt{1-\zeta^2}}{2\pi \zeta} \approx \frac{0.55}{\zeta}, \quad 0.2 \leq \zeta \leq 0.6$$

以图5.5 (a) 给出的 $\zeta=0.4$ 时的阶跃响应曲线为例，可以看出输出 $y(t)$ 从起始点 $y(t)=0$ 开始，直到响应误差保持在终值的2%以内，总的振荡周数为1.4。因此，得到的阻尼比 ζ 的估计值为：

$$\zeta = \frac{0.55}{\text{周数}} = \frac{0.55}{1.4} = 0.39$$

因此，我们就根据系统的实际响应辨识得到了阻尼比 ζ

$$(1.4 \text{ 个周期? } T_d = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 6.855\text{s})$$



估计阻尼比 ζ 的另一种方法是先确定系统阶跃响应的超调量，再利用图5.8完成估计。例如，考察图5.5(a)中与 $\zeta=0.4$ 对应的响应曲线，可以看出超调量为25%，再由图5.8可以估计得到，与25%的超调量对应的阻尼比 ζ 确实为0.4。

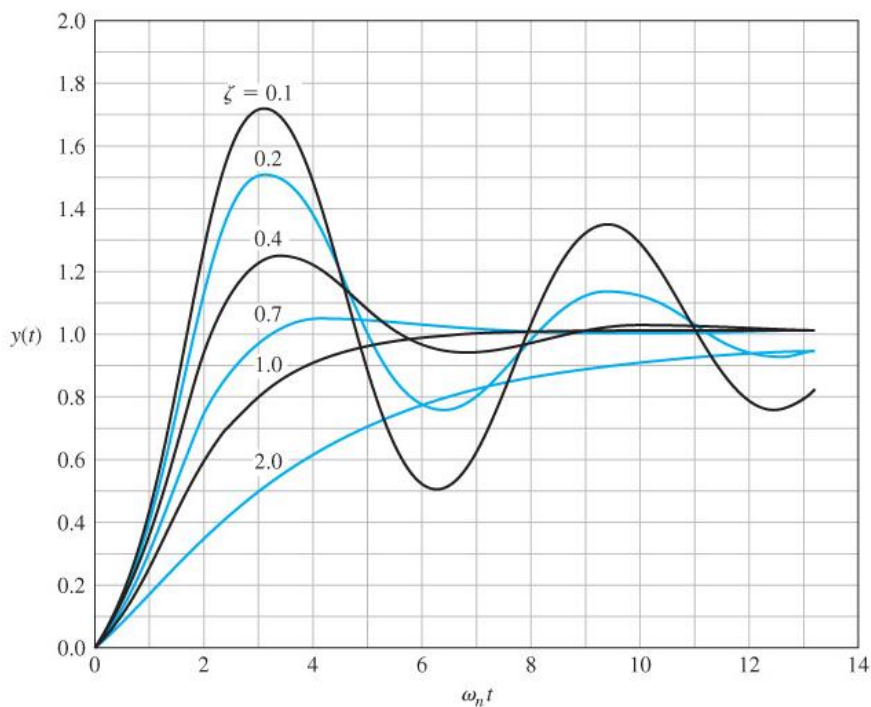


图5.5(a)

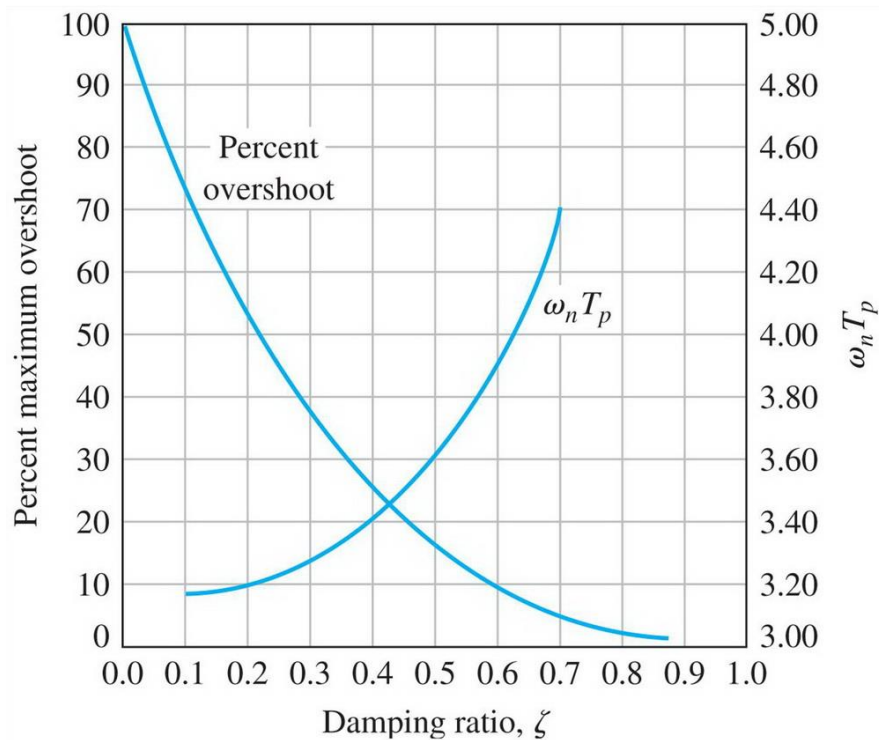


图5.8

作业

P.289 E5.10

P.296 P5.22

DDL: 2023/12/14

5.5 s平面上根的位置与瞬态响应

- 闭环反馈控制系统瞬态响应主要由传递函数的极点(特征根)、零点位置决定

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\sum P_i(s) \Delta_i(s)}{\Delta(s)}, \text{ 系统特征方程 } \Delta(s) = 0$$

单回路单位负反馈系统特征方程: $\Delta(s) = 1 + G(s) = 0$

- 闭环系统**T(s)**的极点是特征方程 $\Delta(s)$ 的根
- 直流增益为**1**的无重根系统单位阶跃响应为:

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{s + \sigma_i} + \sum_{k=1}^N \frac{B_k s + C_k}{s^2 + 2\alpha_k s + (\alpha_k^2 + \omega_k^2)}$$

其中: A_i , B_k , C_k 是常数

系统的极点为： $s = -\sigma_i$ 或 $s = -\alpha_k \pm j\omega_k$

拉氏反变换：

$$y(t) = 1 + \sum_{i=1}^M A_i e^{-\sigma_i t} + \sum_{k=1}^N D_k e^{-\alpha_k t} \sin(\omega_k t + \theta_k)$$

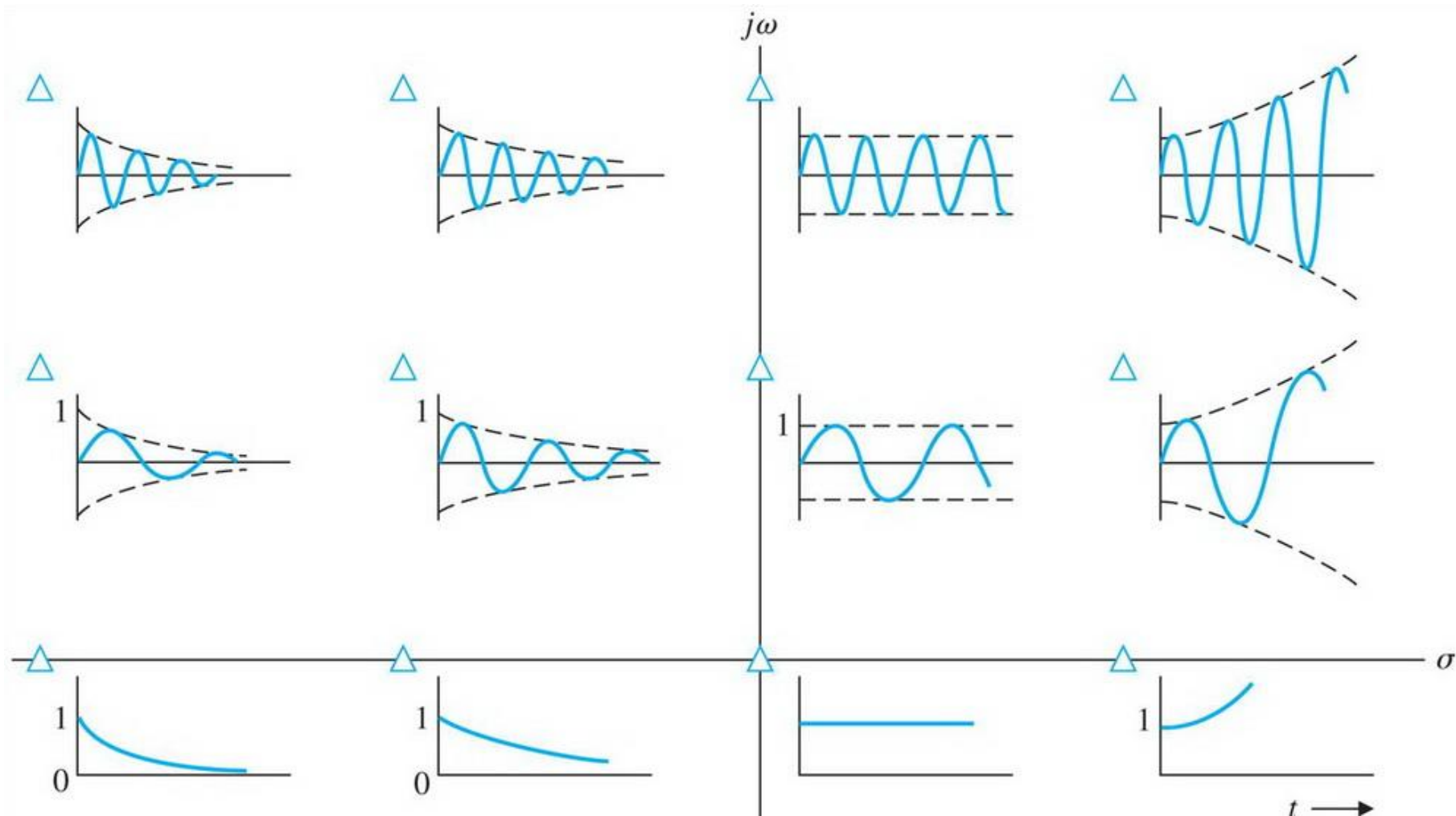
D_k 是由 B_k , C_k , α_k , ω_k 决定的常数.

- 瞬态响应包括稳态输出、指数项、阻尼正弦项
- 系统响应稳定，所有特征根必须均位于 **S** 平面左半平面，即特征根的实部满足：

$$-\sigma_i \leq 0$$

$$-\alpha_k \leq 0$$

➤ **S**平面不同位置根的冲激响应



➤ 增加、删去、移动 $T(s)$ 的极点和零点，都将影响系统的响应。

➤ $T(s)$ 的极点决定了系统特定的响应模式。

➤ $T(s)$ 的零点决定了每个响应模式函数的权重。

例如，将一个零点移向一个指定的极点，将减小此极点对系统的性能的影响。

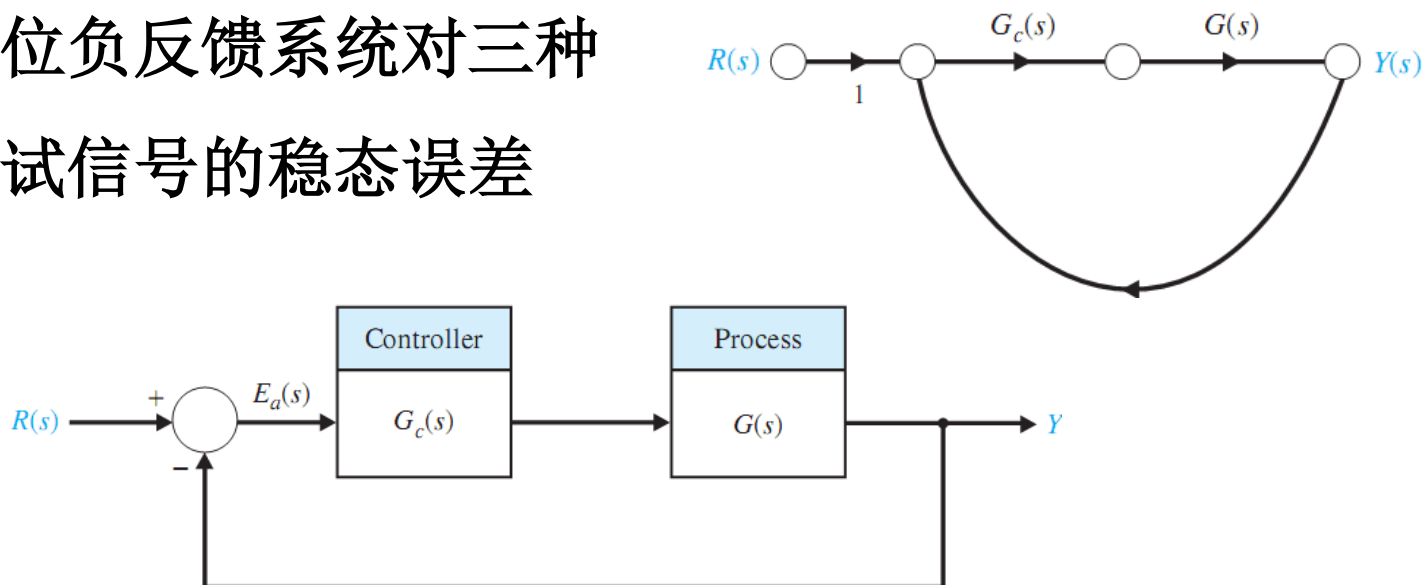
5.6 反馈控制系统稳态误差

- 反馈能够减小系统的稳态误差。不考虑干扰和噪声，跟踪误差为：

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} R(s)$$

$$\text{稳态跟踪误差: } \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} R(s)$$

- 考虑单位负反馈系统对三种标准测试信号的稳态误差



➤ 阶跃输入：位置输入信号

输入幅度为 **A** 的阶跃信号，系统的稳态误差：

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} \frac{A}{s} = \frac{A}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s)G(s)}$$

➤ 开环传递函数 $G_c(s)G(s)$ 决定稳态误差

➤ 开环传递函数的一般形式：

$$G_c(s)G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^M (s + z_i)}{s^N \prod_{k=1}^Q (s + p_k)}, \quad z_i \neq 0, \quad p_k \neq 0$$

- 当 s 趋于零时，开环传递函数的值依赖于积分的数目 N
- 积分器的个数 N 称为系统的型数，相应的系统称为 N 型系统
- 系统稳态误差取决于系统的型数
- $N > 0$ （Ⅰ型和高于Ⅰ型系统），则 $\lim_{s \rightarrow 0} G_c(s)G(s)$ 趋于无穷大，跟踪阶跃设定值的稳态误差为零
- $N = 0$ （零型系统），阶跃信号稳态跟踪误差：

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + G_c(0)G(0)} = \frac{A}{1 + \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{\prod_{k=1}^Q p_k}}$$

➤ 稳态位置误差系数 K_p :

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s) G(s) = G_c(0) G(0)$$

➤ 对阶跃输入的稳态位置跟踪误差:

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}$$

➤ 因此，零型系统具有有限的稳态位置误差系数，对阶跃设定值具有有限的稳态位置跟踪误差

$$K_p = G_c(0) G(0) = \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{\prod_{k=1}^Q p_k}, \quad e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}$$

➤ 而 $N \geq 1$ 的各型系统，其阶跃响应的稳态误差为零：

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{1 + \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{s^N \prod_{k=1}^Q p_k}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{As^N}{s^N + \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{\prod_{k=1}^Q p_k}} = 0, \quad N \geq 1$$

➤ 斜坡输入：速度输入信号

对斜率为A的斜坡输入，稳态误差：

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} \frac{A}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s + sG_c(s)G(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{sG_c(s)G(s)} \end{aligned}$$

➤ 稳态速度误差系数 K_v ：

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_c(s)G(s)$$

➤ 对斜坡输入的稳态稳态误差为：

$$e_{ss} = \frac{A}{K_v}$$

➤ 对于零型系统，稳态速度误差系数为**0**，跟踪斜坡设定值的稳态误差无穷大

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{\prod_{k=1}^Q p_k} = 0$$

$$e_{ss} = \frac{A}{K_v} = \infty$$

- I 型系统具有有限的稳态速度误差系数，跟踪斜坡设定值具有有限的稳态跟踪误差：

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{s \prod_{k=1}^Q p_k} = \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{\prod_{k=1}^Q p_k}$$
$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s \frac{K \prod_{i=1}^M (s + z_i)}{\prod_{k=1}^Q (s + p_k)}} = \frac{A}{\frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{\prod_{k=1}^Q p_k}} = \frac{A}{K_v}$$

- II型和高于II型系统的稳态速度误差系数为无穷大，对斜坡设定值的稳态跟踪误差为零：

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{s^N \prod_{k=1}^Q p_k} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{s^{N-1} \prod_{k=1}^Q p_k} = \infty, \quad N \geq 2$$

$$e_{ss} = \frac{A}{K_v} = 0$$

➤ **抛物线输入**：加速度输入信号

当输入为 $r(t) = \frac{1}{2}At^2$ 时，稳态误差为：

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} \frac{A}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s^2 + s^2 G_c(s)G(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s^2 G_c(s)G(s)} \end{aligned}$$

➤ **稳态加速度误差系数 K_a** ：

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_c(s)G(s)$$

➤ 对抛物线输入的稳态跟踪误差:

$$e_{ss} = \frac{A}{K_a}$$

➤ 零型和I型系统，稳态加速度误差系数为**0**，跟踪抛物线设定值的稳态跟踪误差无穷大

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_c(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{s^N \prod_{k=1}^Q p_k} = 0, \quad N \leq 1$$

$$e_{ss} = \frac{A}{K_a} = \infty, \quad N \leq 1$$

➤ II型系统具有有限的稳态加速度误差系数，跟踪抛物线设定值具有有限的稳态跟踪误差：

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_c(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{s^2 \prod_{k=1}^Q p_k} = \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{\prod_{k=1}^Q p_k}$$

$$e_{ss} = \frac{A}{K_a}$$

➤ III型和高于III型系统的稳态加速度误差系数为无穷大，对斜坡设定值的稳态跟踪误差为零：

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{s^N \prod_{k=1}^Q p_k} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{s^{N-2} \prod_{k=1}^Q p_k} = \infty, \quad N \geq 3$$

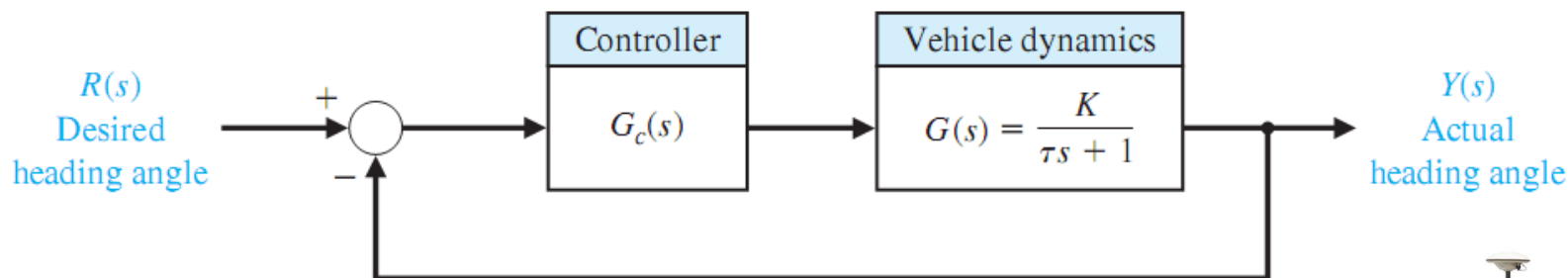
$$e_{ss} = \frac{A}{K_v} = 0, \quad N \geq 3$$

➤ 控制系统常用型数和稳态误差系数 K_p , K_v , K_a 来描述

表5.5 稳态误差小结

$G_c(s)G(s)$ 中积分器 的个数, 即型数	输入		
	阶跃 $r(t)=A, R(s)=\frac{A}{s}$	斜坡 $At, \frac{A}{s^2}$	抛物线 $\frac{1}{2}At^2, \frac{A}{s^3}$
0	$e_{ss} = \frac{A}{1+K_p}$	无穷大	无穷大
1	$e_{ss} = 0$	$\frac{A}{K_v}$	无穷大
2	$e_{ss} = 0$	0	$\frac{A}{K_a}$

➤ 例5.3：移动机器人驾驶控制



➤ 采用纯比例控制器（P控制器）

P控制器： $G_c(s) = K_1$

回路传递函数： $G_c(s)G(s) = \frac{K_1 K}{\tau s + 1}$ ， 零型系统

稳态位置误差系数： $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s)G(s) = K_1 K$

系统对幅值为A的阶跃输入具有有限的稳态位置误差：

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}$$



➤ 采用比例积分控制器（**PI**控制器）

PI控制器： $G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} = \frac{K_1s + K_2}{s}$

回路传递函数： $G_c(s)G(s) = \frac{(K_1s + K_2)K}{s(\tau s + 1)}$ ， I型系统

稳态位置误差系数： $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s)G(s) = \infty$

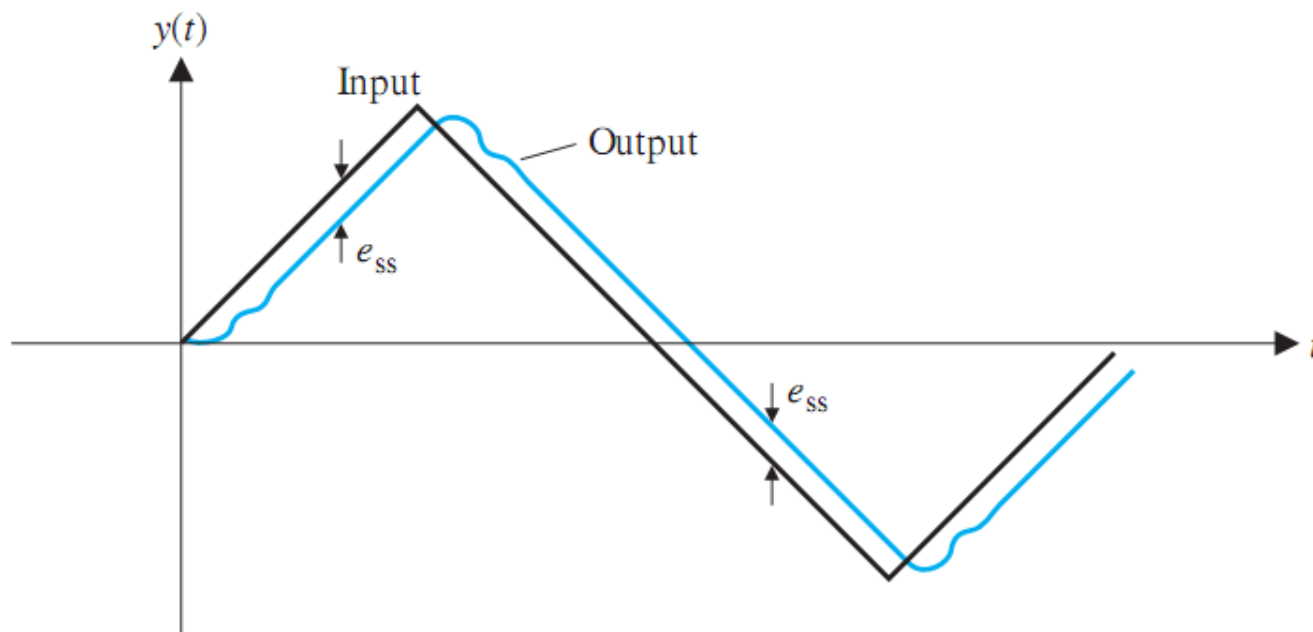
系统对幅值为A的阶跃输入的稳态位置误差为0

稳态速度误差系数： $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_c(s)G(s) = K_2K$

系统对速度为A的斜坡输入具有有限的稳态位置误差：

$$e_{ss} = \frac{A}{K_v}$$

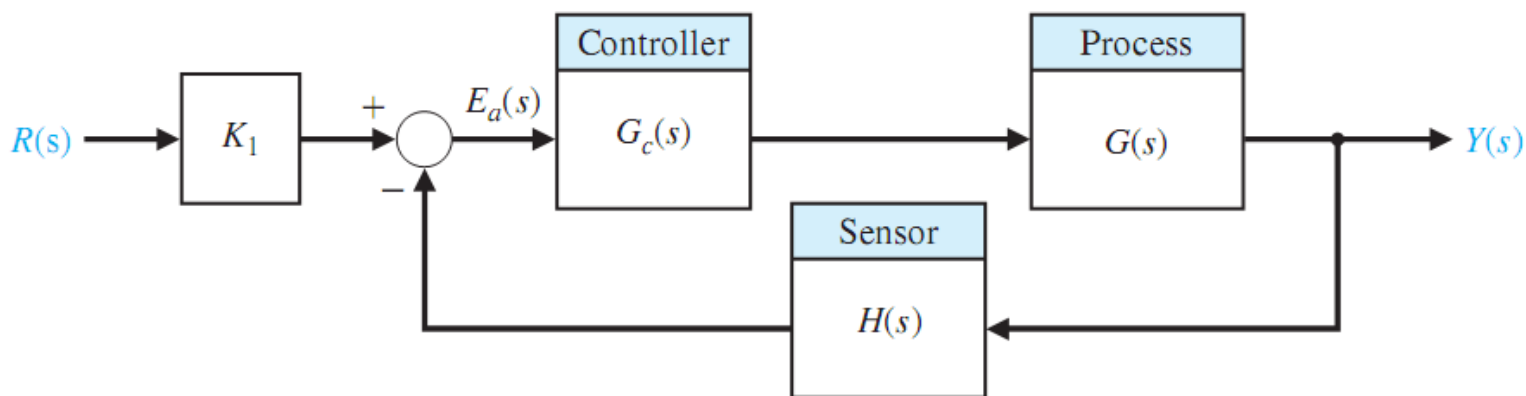
➤ 采用该**PI**控制器时，系统的三角波响应：



➤ 输出的速度达到了期望要求的速度，与输入速度相同，但仍然存在有限的稳态位置跟踪误差

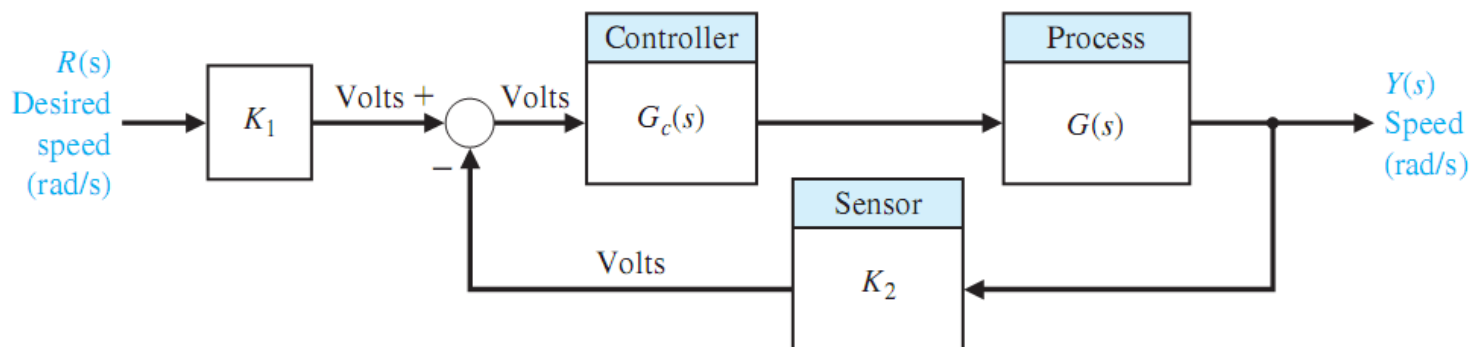
- 控制系统的误差系数 K_p , K_v , K_a 表达了系统减小乃至消除稳态误差的能力，它们是衡量系统稳态性能的指标
- 设计反馈控制系统时，要设计稳态误差系数，并确定增大稳态误差系数的方法，既要减少控制系统的稳态误差，又必须注意维持较好的瞬态性能，在稳态响应、瞬态响应之间折衷考虑
- 在本例中，增大增益 K^*K_2 ，就增大了 K_v ，减小了跟踪斜坡信号时的稳态位置误差，但增大增益 K^*K_2 ，就减小了系统阻尼比 ζ ，改变了系统瞬态响应，使瞬态响应振荡更加剧烈

- 非单位负反馈系统的稳态误差
- 非单位负反馈系统 ($H(s) \neq 1$) 的输出 $Y(s)$ ，与传感器的输出常常具有不同的物理单位，常常是不同性质的物理量

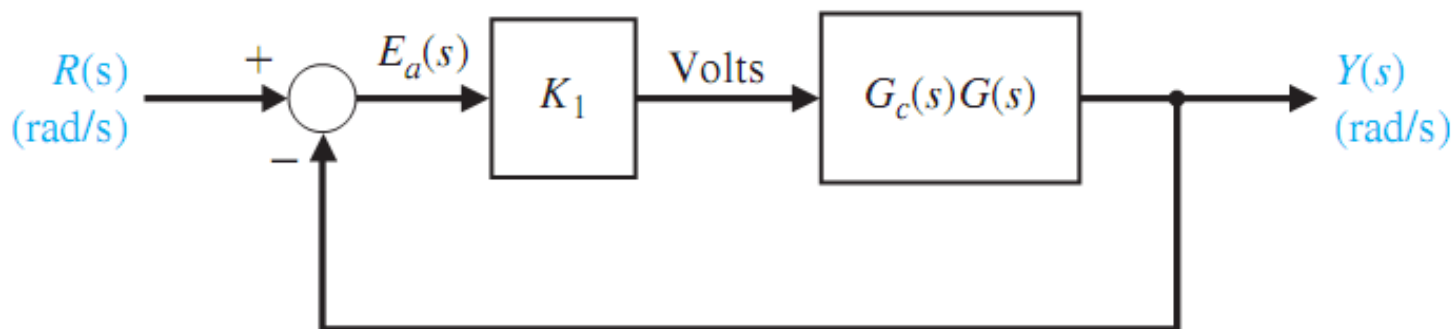


非单位反馈系统的一般形式

- 图示速度控制系统， $H(s)=K_2$ ，参数 K_1 、 K_2 实现从一组单位到另一组单位的转换，rad/s到V



- 选择 K_1 ，使 $K_1=K_2$ ，采用方框图变换，得到等价的单位负反馈系统



若： $H(s) = \frac{K_2}{\tau s + 1}$

则反馈通道直流增益为： $\lim_{s \rightarrow 0} H(s) = K_2$ K₂为量纲转换因子

若选取 $K_2 = K_1$ ，则系统闭环传递函数：

$$T(s) = \frac{K_1 G_c(s) G(s)}{1 + H(s) G_c(s) G(s)} = \frac{(\tau s + 1) K_1 G_c(s) G(s)}{\tau s + 1 + K_1 G_c(s) G(s)}$$

系统跟踪误差：

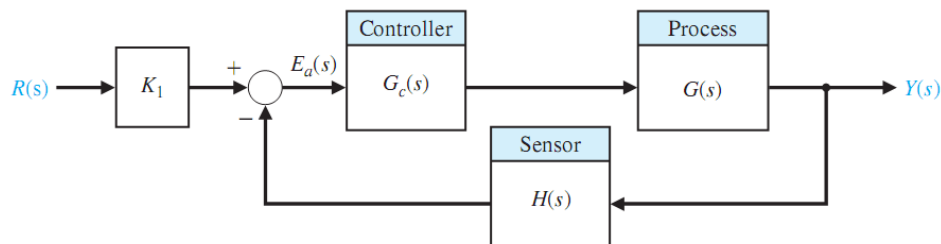
$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - Y(s) = [1 - T(s)] R(s) \\ &= \frac{1 + \tau s [1 - K_1 G_c(s) G(s)]}{\tau s + 1 + K_1 G_c(s) G(s)} R(s) \end{aligned}$$

假定： $\lim_{s \rightarrow 0} sG_c(s)G(s) = 0$ ，系统对单位阶跃信号

的稳态跟踪误差：

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1 + \tau s [1 - K_1 G_c(s)G(s)]}{\tau s + 1 + K_1 G_c(s)G(s)} \frac{1}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 + \tau s - \tau K_1 s G_c(s)G(s)}{\tau s + 1 + K_1 G_c(s)G(s)} \\ &= \frac{1}{1 + K_1 \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s)G(s)} \end{aligned}$$

➤ 例5.4：稳态误差



$$G_c(s) = 40, \quad G(s) = \frac{1}{s+5}, \quad H(s) = \frac{20}{s+10} = \frac{2}{0.1s+1}$$

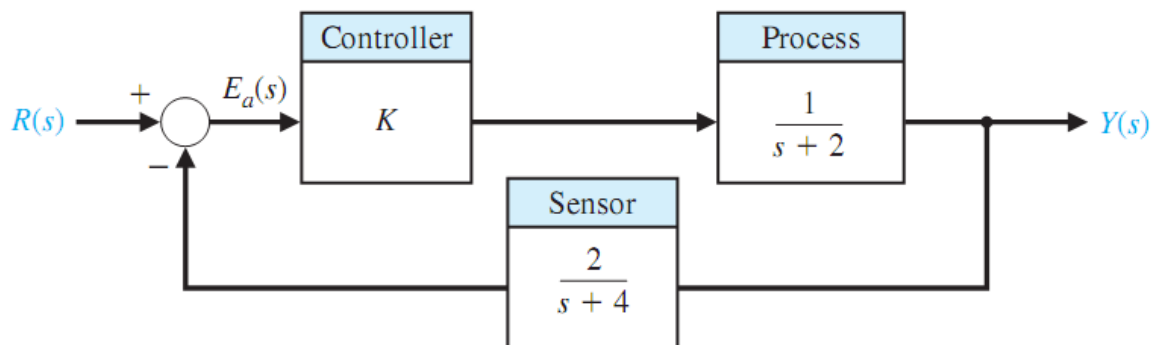
$$\lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = 0$$

选 $K_1 = K_2 = 2$ ，对单位阶跃信号的稳态位置误差：

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_1 \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s) G(s)} = \frac{1}{1 + 2(40)(1/5)} = \frac{1}{17}$$

即稳态误差为阶跃输入信号幅值的5.9%

➤ 例5.5：反馈系统



$$T(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)H(s)} = \frac{K(s+4)}{(s+2)(s+4) + 2K}$$

$$\text{实际误差: } E(s) = [1 - T(s)]R(s)$$

$$\text{对阶跃输入的稳态误差: } e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s[1 - T(s)] \frac{1}{s} = 1 - T(0)$$

$$\text{有 } T(0) = \frac{4K}{8 + 2K}, \text{ 当 } K = 4 \text{ 时, 阶跃输入的稳态误差为零}$$

➤ 非单位负反馈系统误差系数

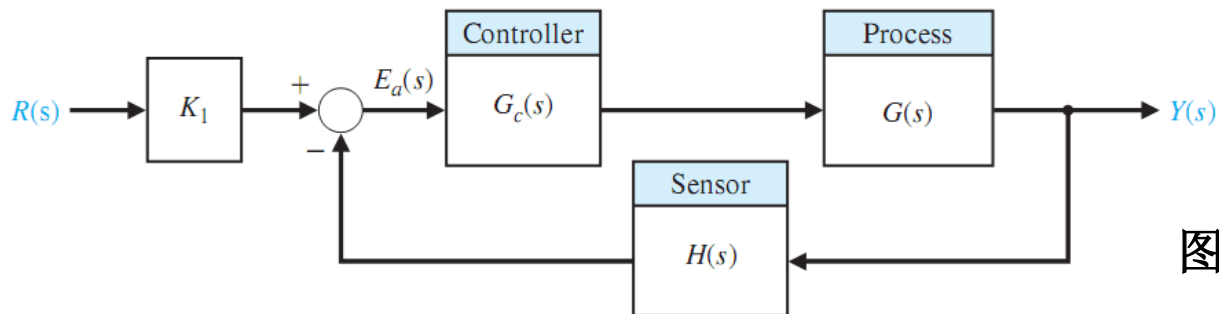


图 5.21

$K_1 = 1$ 时，非单位负反馈系统闭环传递函数：

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + H(s)G_c(s)G(s)}$$

$$\text{令： } T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Z(s)}{1 + Z(s)}$$

得到等效单位反馈系统，回路传递函数 $Z(s)$

等效单位反馈系统回路传递函数：

$$Z(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)(H(s) - 1)}$$

等效单位反馈系统稳态误差系数：

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} Z(s)$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sZ(s)$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 Z(s)$$

$H(s) = 1$, $Z(s) = G_c(s)G(s)$, 得单位反馈系统稳态误差系数

5.7 性能指标

- **设计指标：**指具体的设计规格，体现系统某一方面的性能，如超调量、调节时间、稳态误差等。
- **性能指标：**对系统的性能的定量测度。试图用一个量化的指标综合地、全面地表达系统各方面的性能。选择性能指标要着重体现重要的系统设计指标。
- **最优控制系统：**调节系统参数使性能指标达到极值（常为最小值）。性能指标通常为非负值，极小化性能指标得到最佳系统。

➤ **误差平方积分(integral of the square of the error, ISE)**

$$\text{ISE} = \int_0^T e^2(t) dt$$

- 积分上限 T 为有限时间，一般选择 T 使积分达到稳态值，如调节时间 T_s 。
- ISE能区分过度的过阻尼系统和过度的欠阻尼系统。只有折衷选取合适的阻尼值，才能得到ISE的极小值。
- ISE适合于实际应用：求平方电路容易获得，误差平方在数学上易于分析和计算。

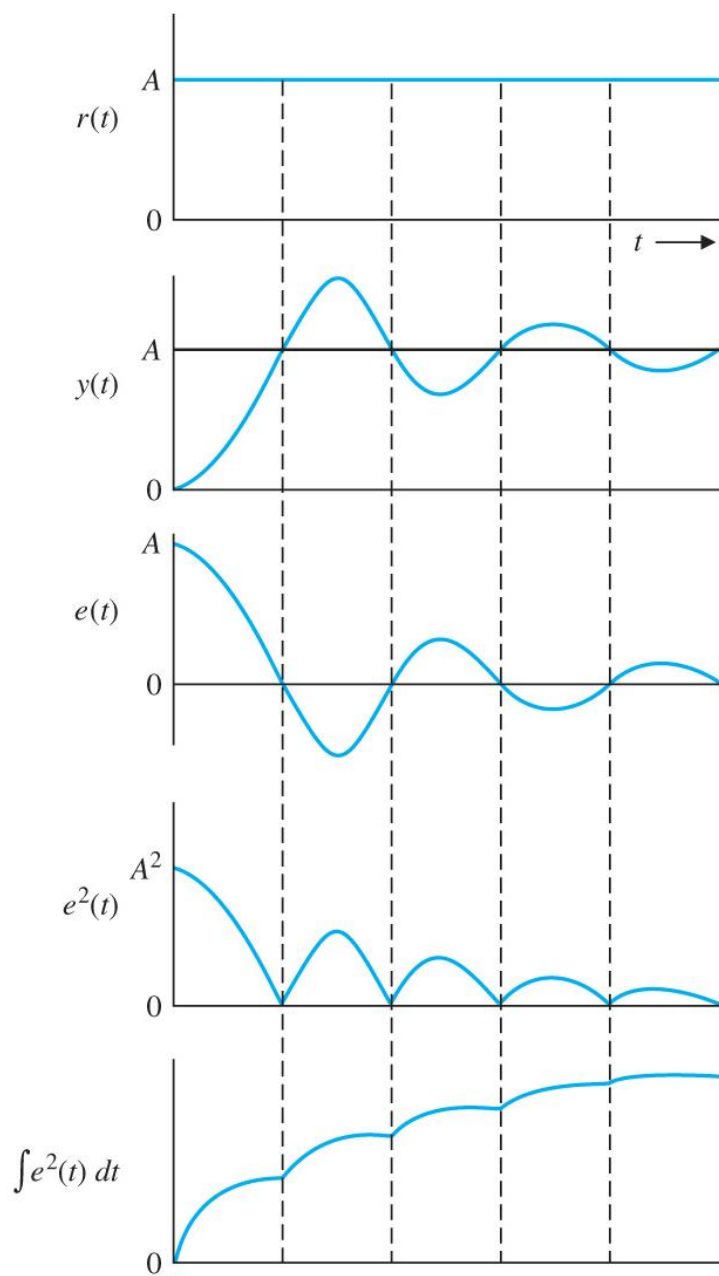


图 5.25 误差平方积分的计算

- **误差绝对值积分**(the integral of the absolute magnitude of the error, IAE)

$$\text{IAE} = \int_0^T |e(t)| dt$$

- IAE非常适用于计算机仿真研究
- **时间乘误差绝对值积分**(the integral of time multiplied by absolute error, ITAE)

$$\text{ITAE} = \int_0^T t |e(t)| dt$$

- **ITAE**强调响应后期误差的影响，而减弱响应初期较大初始误差对性能指标的影响

- **时间乘误差平方积分**(the integral of time multiplied by the squared error, ITSE)

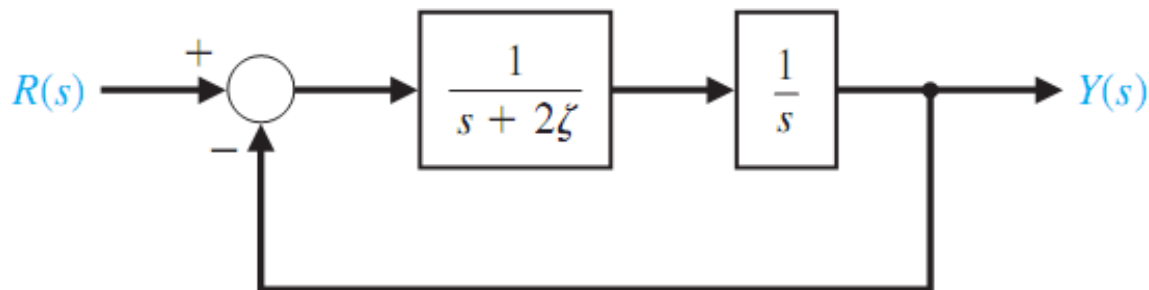
$$\text{ITSE} = \int_0^T t e^2(t) dt$$

- 在各种性能指标中，**ITAE**选择性最好：随着系统参数变化，积分的最小值很容易辨别。
- 积分形式性能指标的通式：

$$I = \int_0^T f(e(t), r(t), y(t), t) dt$$

- f 是误差、输入、输出、时间的函数。
- 极小化**IAE**、**ISE**常常具有实际意义，如极小化飞机和空间飞行器的燃料消耗。
- 性能指标有利于控制系统的设计和分析。

➤ 例5.6：性能指标



➤ 单位负反馈控制系统闭环传递函数：

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$$

➤ 设定值为单位阶跃，计算在不同阻尼比时性能指标ISE、ITAE、ITSE的值。

➤ **ITAE**指标选择性更好。阻尼比 $\zeta = 0.7$ 时，响应较快，超调量**4.6%**。

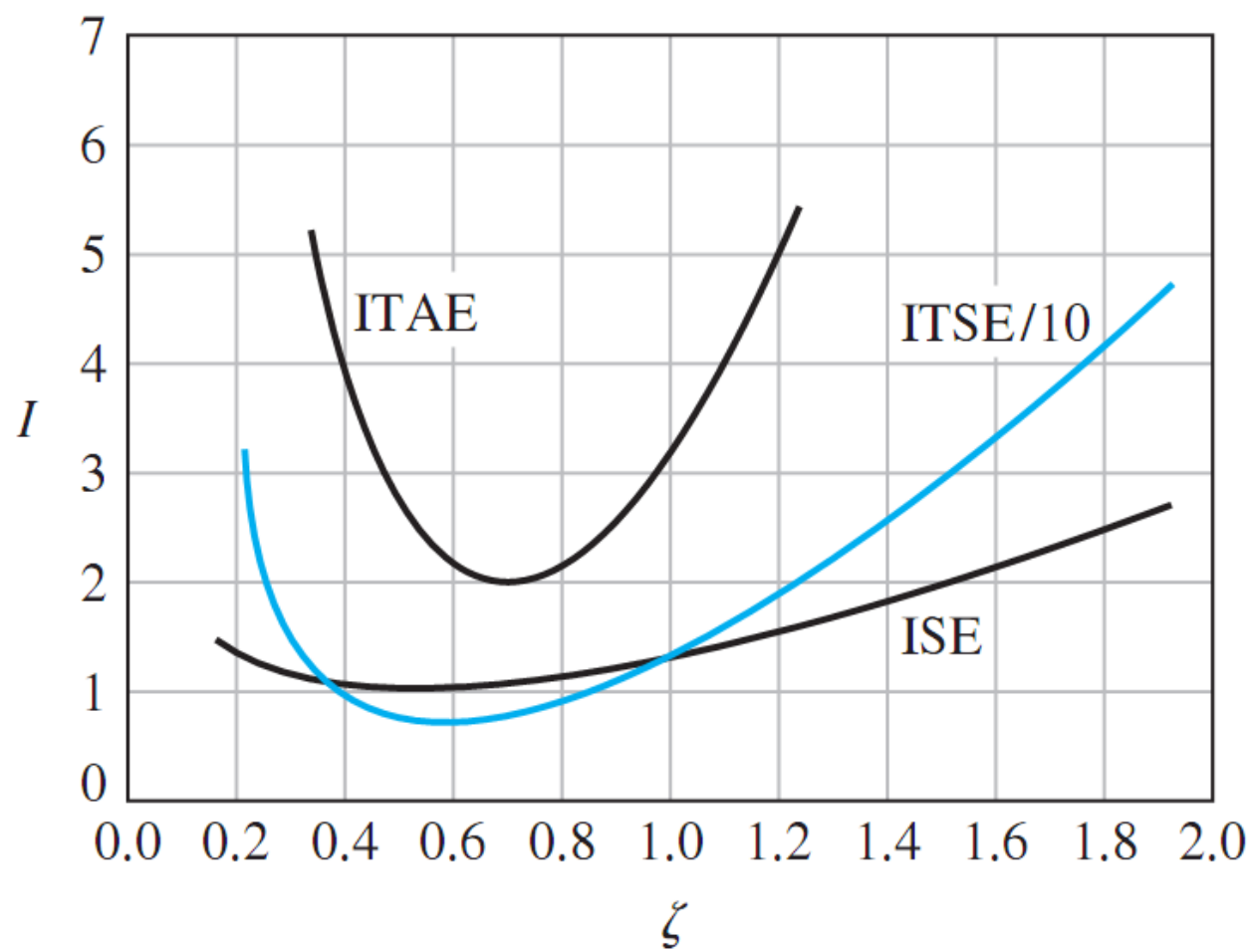


图 5.27 二阶系统的3种综合性能指标

➤ **例5.7:** 太空望远镜定向控制系统

选择增益 K_3 ，使扰动 $T_d(s)$ 的影响达到最小。此时，扰动等价于一个初始的姿态误差。

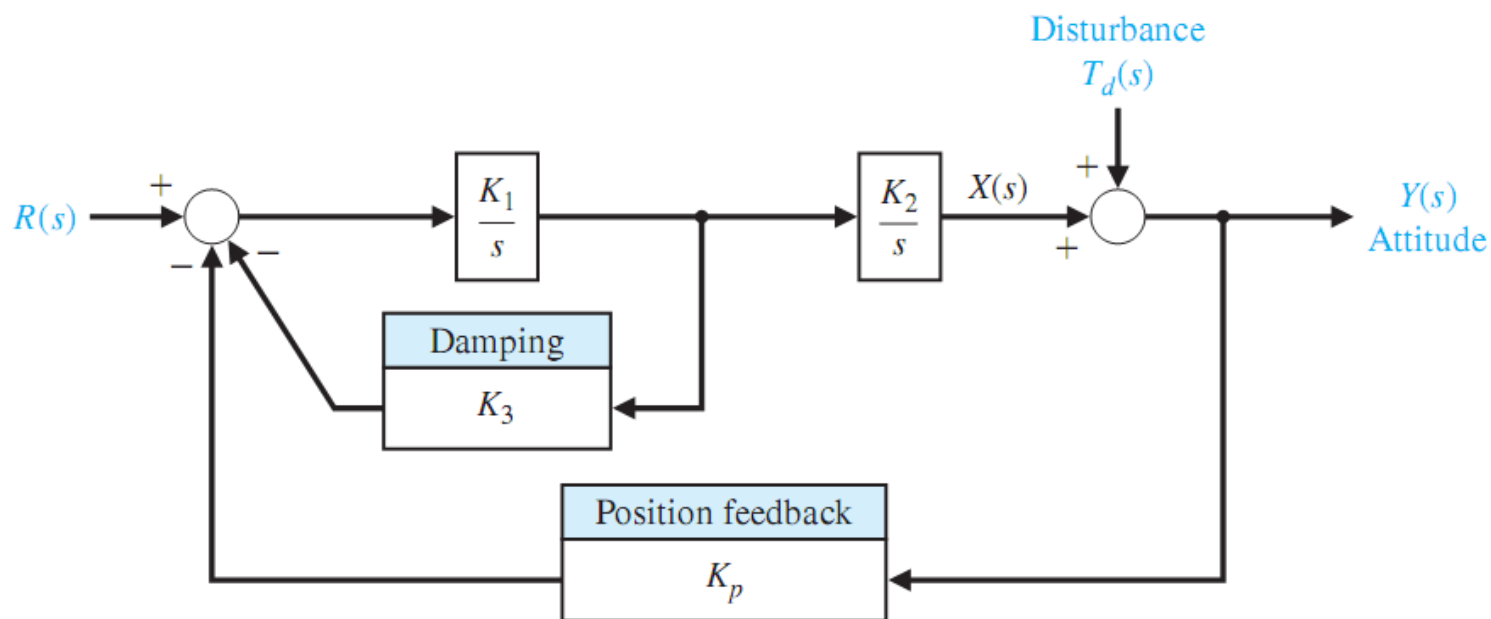
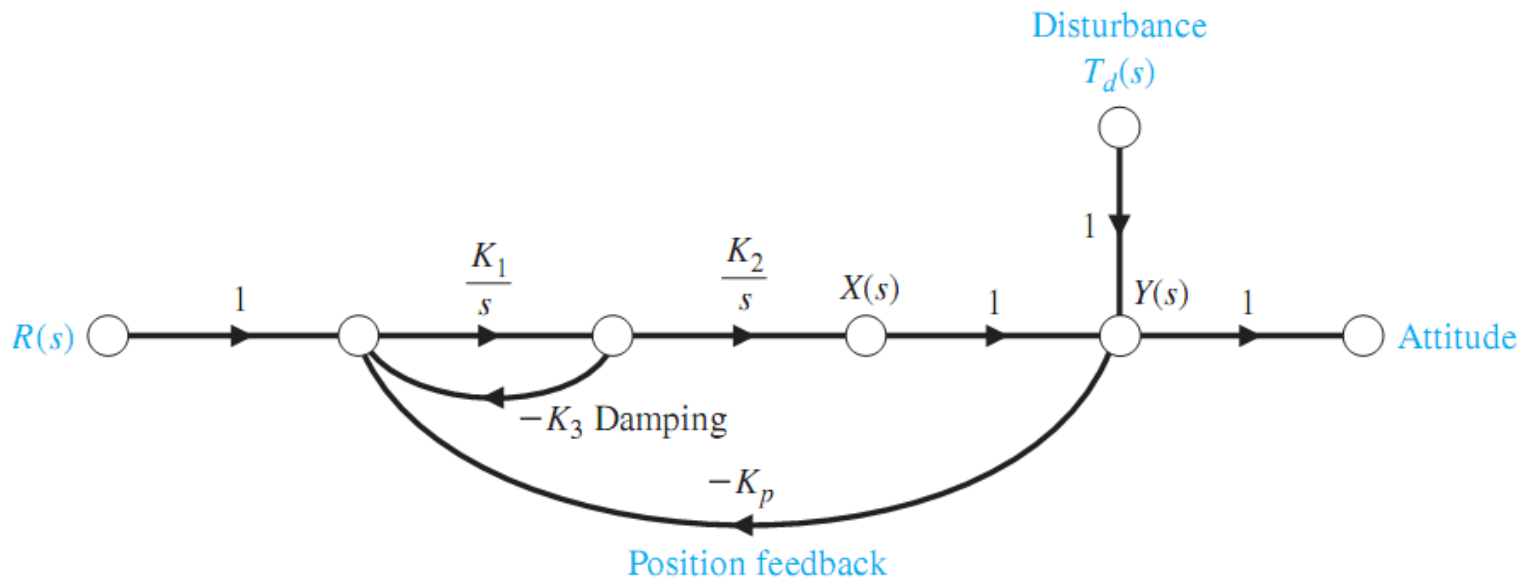


图5.28 太空望远镜定向控制系统

➤ 扰动输入到姿态输出的闭环传递函数：

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{T_d(s)} &= \frac{P_1(s)\Delta_1(s)}{\Delta(s)} = \frac{1 \times (1 + K_1 K_3 s^{-1})}{1 + K_1 K_3 s^{-1} + K_1 K_2 K_p s^{-2}} \\ &= \frac{s(s + K_1 K_3)}{s^2 + K_1 K_3 s + K_1 K_2 K_p}\end{aligned}$$



参数典型值： $K_1 = 0.5$, $K_1 K_2 K_p = 2.5$

$$\frac{Y(s)}{T_d(s)} = \frac{s(s + 0.5K_3)}{s^2 + 0.5K_3s + 2.5}$$

航天器自然振荡频率： $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{\sqrt{2.5}}{2\pi} \approx 0.25$ 周/秒

在单位阶跃扰动作用下，姿态输出：

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s(s + 0.5K_3)}{s^2 + 0.5K_3s + 2.5} T_d(s) = \frac{s(s + 0.5K_3)}{s^2 + 0.5K_3s + 2.5} \frac{1}{s} \\ &= \frac{s + 0.5K_3}{s^2 + 0.5K_3s + 2.5} \\ &= \frac{s + 0.5K_3}{(s + 0.25K_3)^2 + 2.5 - (0.25K_3)^2} \end{aligned}$$

查拉氏变换表, $\frac{s + \alpha}{(s + a)^2 + \omega^2}$ 的拉氏反变换:

$$\frac{1}{\omega} [(\alpha - a)^2 + \omega^2]^{1/2} e^{-at} \sin(\omega t + \psi), \quad \psi = \tan^{-1} \frac{\omega}{\alpha - a}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} K_3, \quad a = \frac{1}{4} K_3, \quad \omega^2 = \frac{10}{4} - \left(\frac{1}{4} K_3 \right)^2 = \frac{1}{4} \left(10 - \frac{1}{4} K_3^2 \right)$$

$$\text{若取 } \beta = \sqrt{10 - \frac{1}{4} K_3^2}, \quad \text{则有: } \omega^2 = \frac{1}{4} \beta^2, \quad \omega = \frac{1}{2} \beta$$

$$(\alpha - a)^2 + \omega^2 = \left(\frac{1}{2} K_3 - \frac{1}{4} K_3 \right)^2 + \frac{1}{4} \left(10 - \frac{1}{4} K_3^2 \right) = \frac{10}{4}$$

$$\psi = \tan^{-1} \frac{\omega}{\alpha - a} = \tan^{-1} \frac{2\beta}{K_3} = \tan^{-1} \sqrt{\frac{40}{K_3^2} - 1}$$

$$y(t) = \frac{\sqrt{10}}{\beta} e^{-0.25K_3 t} \sin\left(\frac{\beta}{2}t + \psi\right)$$

$$\begin{aligned} e(t) &= r(t) - y(t) = 0 - y(t) \\ &= -\frac{\sqrt{10}}{\beta} e^{-0.25K_3 t} \sin\left(\frac{\beta}{2}t + \psi\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_{K_3} \text{ISE} &= \min_{K_3} \int_0^{\infty} e^2(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{10}{\beta^2} e^{-0.5K_3 t} \sin^2\left(\frac{\beta}{2}t + \psi\right) dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{10}{\beta^2} e^{-0.5K_3 t} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(\beta t + 2\psi)\right) dt \\ &= \frac{1}{K_3} + 0.1K_3 \end{aligned}$$

另一种方法：

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s + 0.5K_3}{(s + 0.25K_3)^2 + 2.5 - (0.25K_3)^2} \\ &= \frac{s + 0.25K_3}{(s + 0.25K_3)^2 + \omega^2} + \frac{0.25K_3}{(s + 0.25K_3)^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-0.25K_3t} \cos \omega t + \frac{K_3}{4\omega} e^{-0.25K_3t} \sin \omega t \\ &= e^{-0.25K_3t} \left(\cos \omega t + \frac{K_3}{4\omega} \sin \omega t \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^2(t) &= [-y(t)]^2 = y^2(t) \\ &= e^{-0.5K_3t} \left[\cos^2 \omega t + \left(\frac{K_3}{4\omega} \right)^2 \sin^2 \omega t + \frac{K_3}{4\omega} \sin 2\omega t \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^2(t) &= e^{-0.5K_3t} \left[\cos^2 \omega t + \left(\frac{K_3}{4\omega} \right)^2 (1 - \cos^2 \omega t) + \frac{K_3}{4\omega} \sin 2\omega t \right] \\
&= e^{-0.5K_3t} \left[\left(\frac{K_3}{4\omega} \right)^2 + \left(1 - \left(\frac{K_3}{4\omega} \right)^2 \right) \cos^2 \omega t + \frac{K_3}{4\omega} \sin 2\omega t \right] \\
&= e^{-0.5K_3t} \left[\frac{20}{40 - K_3^2} + \frac{20 - K_3^2}{40 - K_3^2} \cos 2\omega t + \frac{K_3}{4\omega} \sin 2\omega t \right] \\
\mathcal{L} e^2(t) &= \frac{20}{40 - K_3^2} \frac{1}{s + 0.5K_3} + \frac{20 - K_3^2}{40 - K_3^2} \frac{s + 0.5K_3}{(s + 0.5K_3)^2 + 4\omega^2} \\
&\quad + \frac{K_3}{4\omega} \frac{2\omega}{(s + 0.5K_3)^2 + 4\omega^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^2(t) dt &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^2(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} s \mathcal{L} \left[\int_0^t e^2(t) dt \right] \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\mathcal{L} e^2(t)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L} e^2(t) \\
&= \frac{20}{40 - K_3^2} \frac{1}{0.5K_3} + \frac{20 - K_3^2}{40 - K_3^2} \frac{0.5K_3}{(0.5K_3)^2 + 4\omega^2} \\
&\quad + \frac{K_3}{4\omega} \frac{2\omega}{(0.5K_3)^2 + 4\omega^2} \\
&= \frac{40}{40 - K_3^2} \frac{1}{K_3} + \frac{20 - K_3^2}{40 - K_3^2} \frac{K_3}{20} + \frac{K_3}{20} \\
&= \frac{1}{K_3} + \frac{1}{10} K_3
\end{aligned}$$

- 如果ISE的极小值存在，应当是在ISE对 K_3 的一阶导数等于0的点上

$$\frac{d\text{ISE}}{dK_3} = -\frac{1}{K_3^2} + 0.1 = 0$$

$$K_3^2 = 10$$

$$K_3 = \sqrt{10} \approx 3.16$$

$$\text{ISE}_{\min} = \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{10} \sqrt{10} = \frac{2}{\sqrt{10}} \approx 0.63$$

- 当 $K_3 \approx 3.16$ 时，ISE达到极小值0.63，此时阻尼比 $\zeta = 0.50$

- 当 $K_3=4.2$ 时，IAE取极小值，阻尼比 $\zeta=0.665$
- ISE的选择性没有IAE好
- 难以用解析方法求IAE的极小值，一般通过实际测量或计算机数值仿真

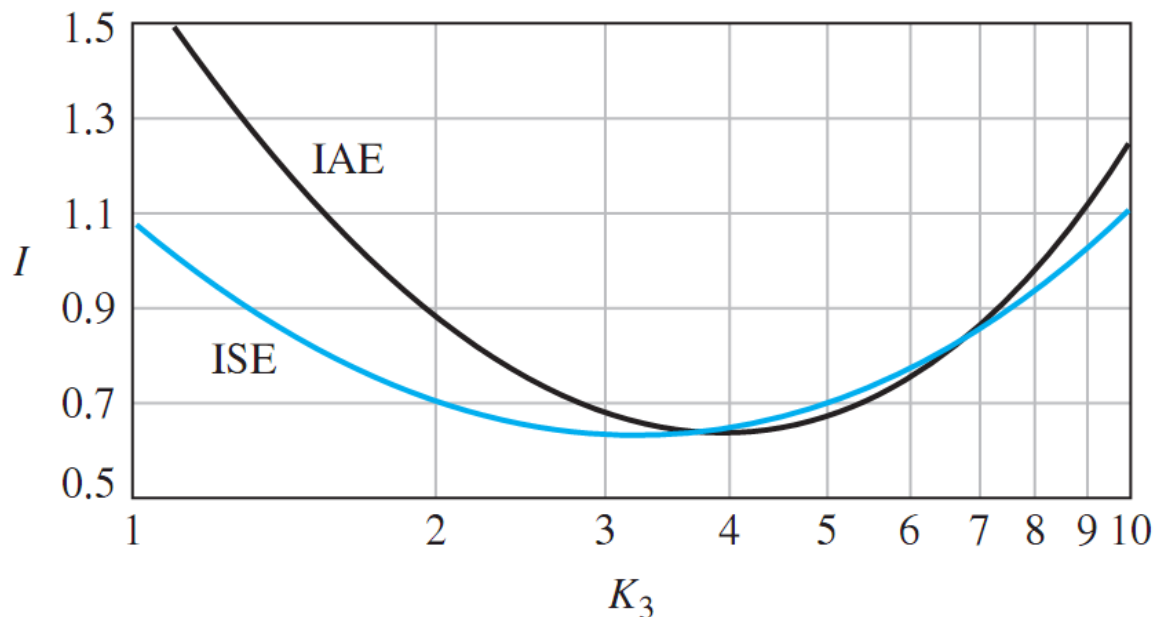


图 5.29 k_3 取不同值时，望远镜定向系统的性能指标

- 不同的性能指标，参数最优值是不同的，性能指标的最优值也不同。
- 若系统闭环传递函数为：

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}$$

- 系统有 n 个极点，没有零点，对阶跃输入的稳态误差为**0**。
- 对阶跃输入信号，使ISE、IAE或ITAE性能指标极小，则可确定 $T(s)$ 的最优参数。

➤ 最优ISE指标

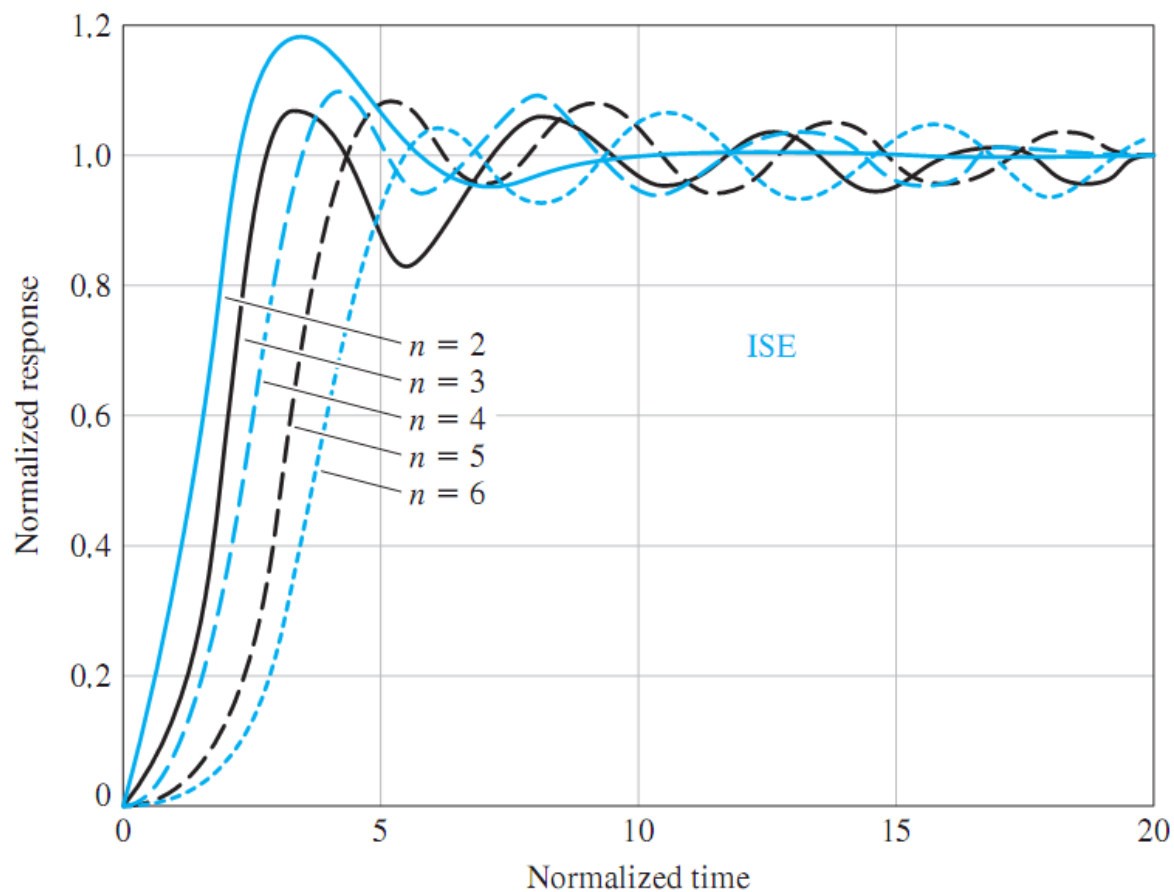


图 5.30 传递函数为典型的最优传递函数时，系统的阶跃响应曲线

➤ 最优IAE指标

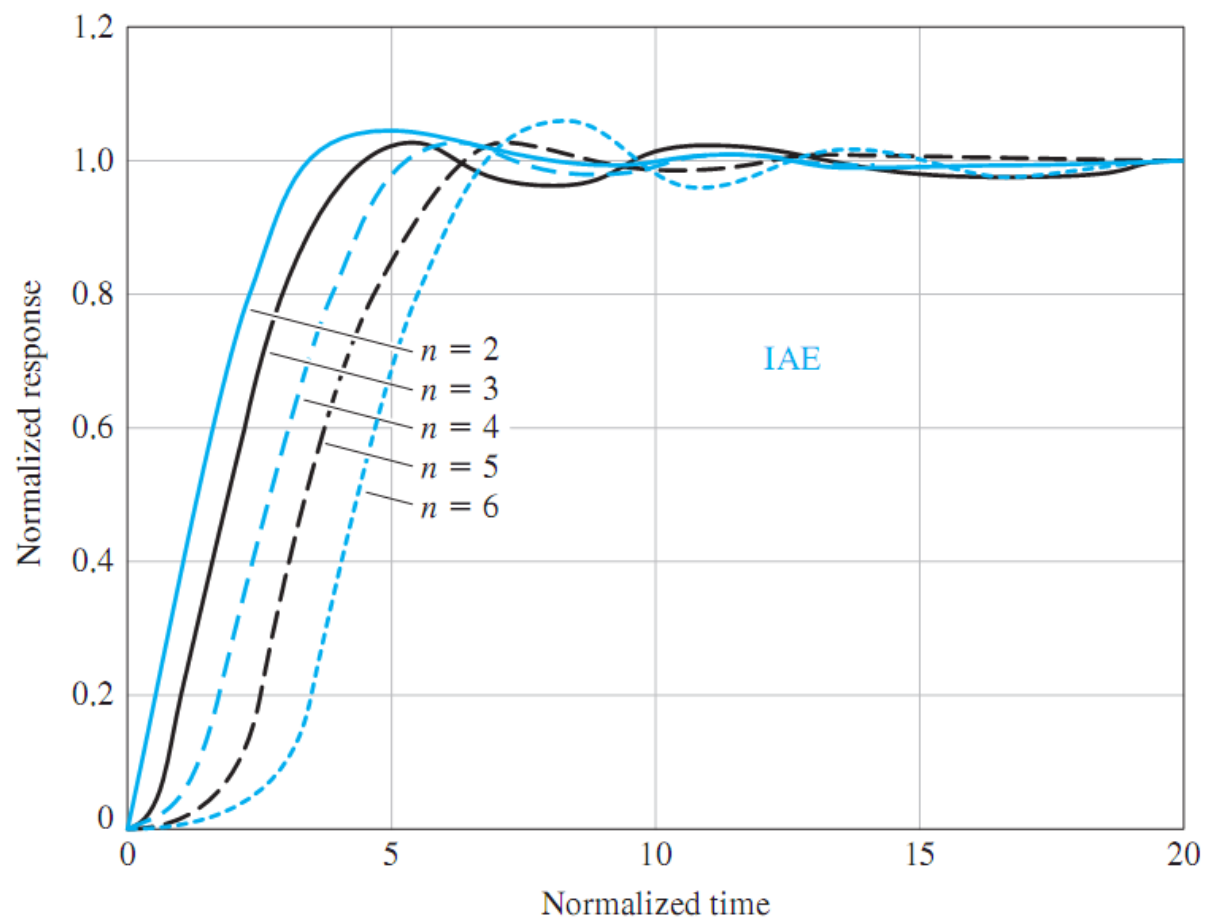


图 5.30 传递函数为典型的最优传递函数时，系统的阶跃响应曲线

➤ 最优ITAE指标

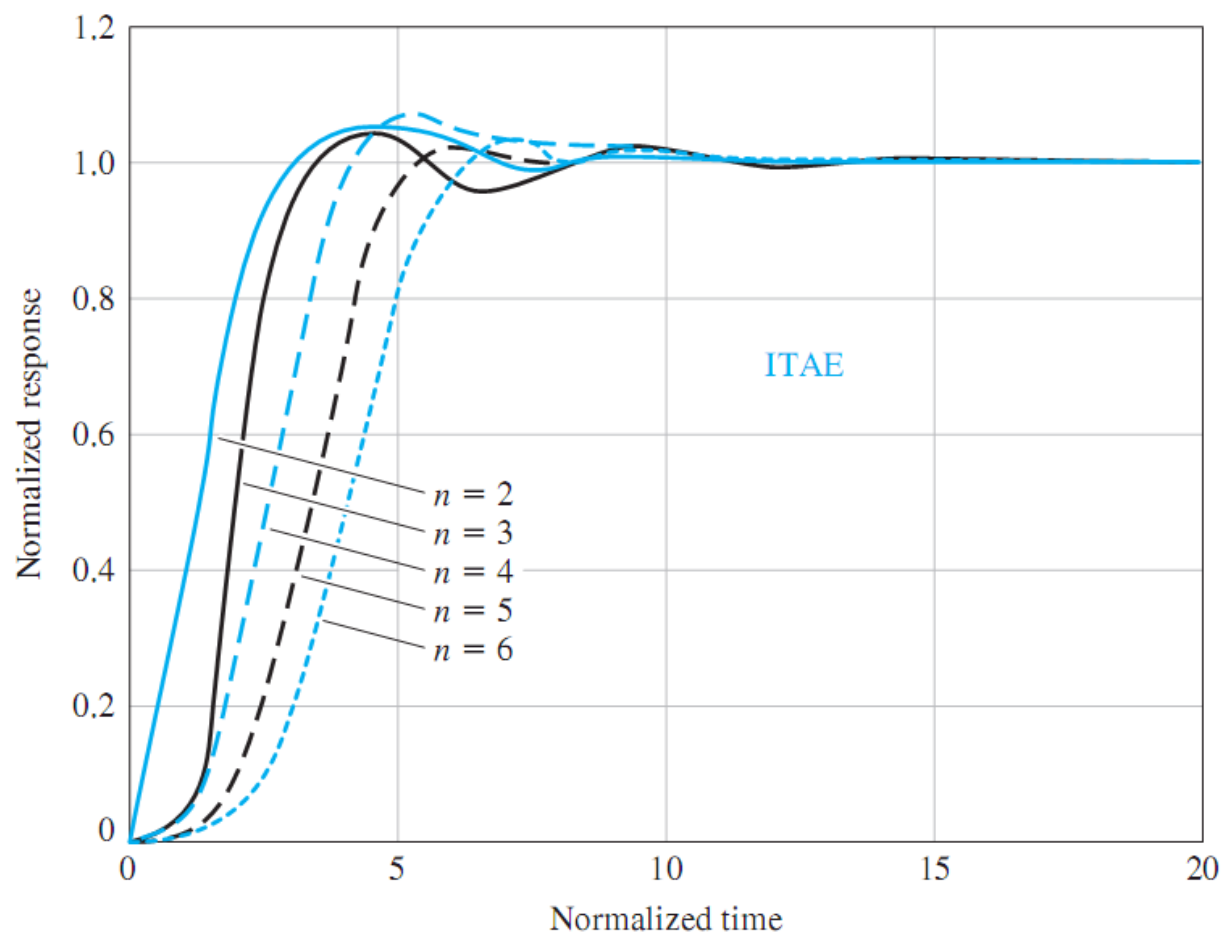


图 5.30 传递函数为典型的最优传递函数时，系统的阶跃响应曲线

➤ 阶跃输入时，使ITAE指标最优的 $T(s)$ 参数表

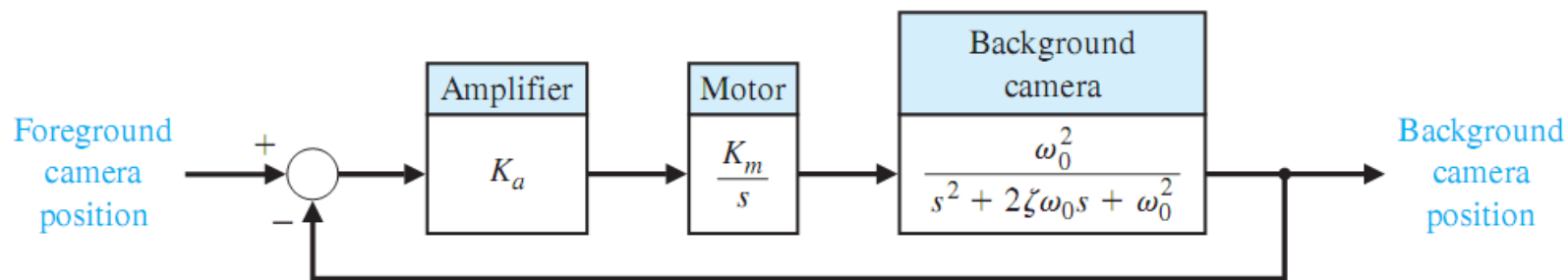
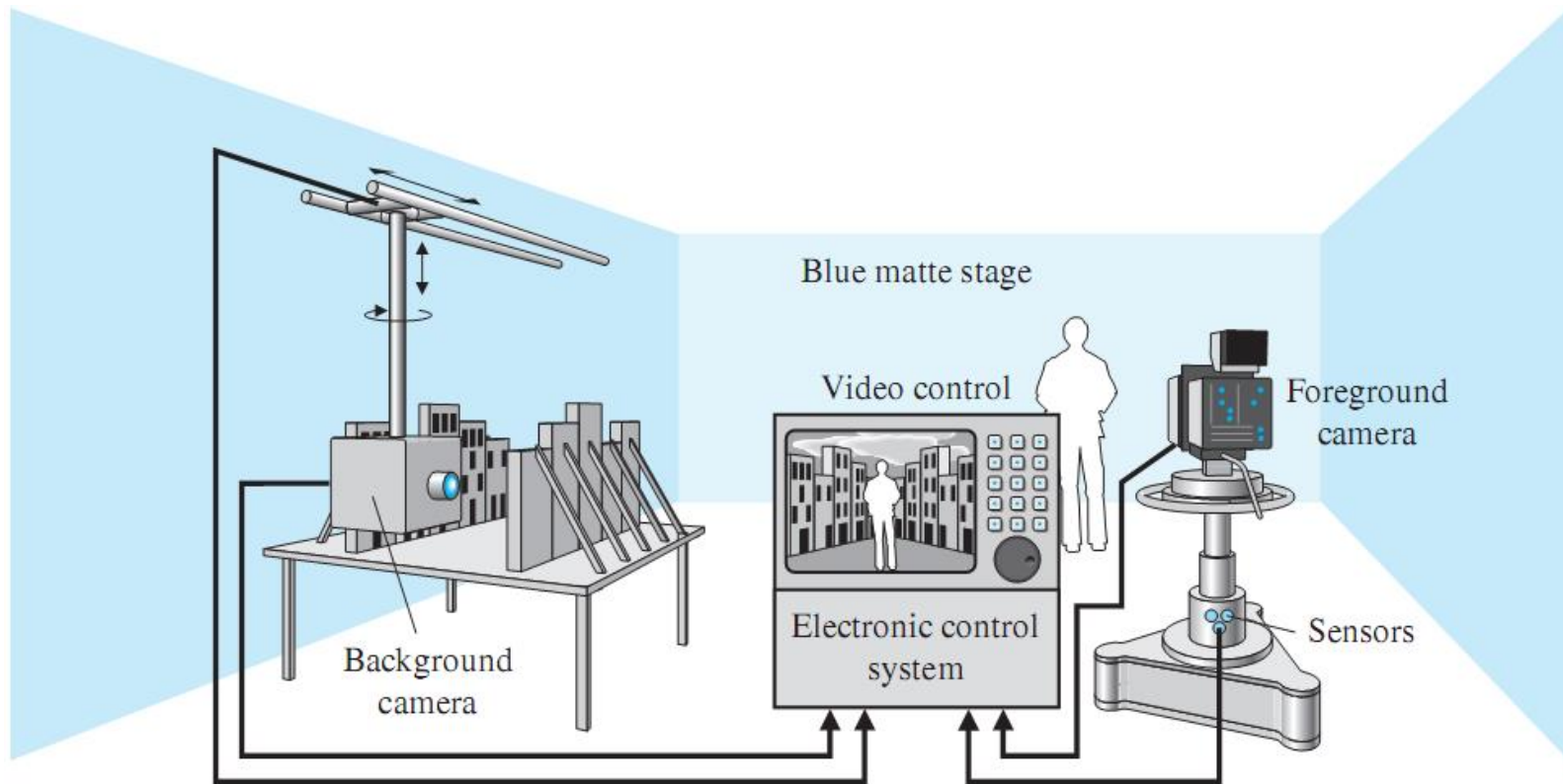
$$\begin{aligned} & s + \omega_n \\ & s^2 + 1.4\omega_n s + \omega_n^2 \\ & s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 2.15\omega_n^2 s + \omega_n^3 \\ & s^4 + 2.1\omega_n s^3 + 3.4\omega_n^2 s^2 + 2.7\omega_n^3 s + \omega_n^4 \\ & s^5 + 2.8\omega_n s^4 + 5.0\omega_n^2 s^3 + 5.5\omega_n^3 s^2 + 3.4\omega_n^4 s + \omega_n^5 \\ & s^6 + 3.25\omega_n s^5 + 6.60\omega_n^2 s^4 + 8.60\omega_n^3 s^3 + 7.45\omega_n^4 s^2 + 3.95\omega_n^5 s + \omega_n^6 \end{aligned}$$

➤ 例5.8：双摄影机控制

使用两台摄影机，

- 前景摄影机（可以是电影摄影机或视频摄像机）瞄准蓝幕舞台背景下的演员；
- 背景摄影机采用潜望镜头对准缩景装置，并在缩景尺寸上即刻再生前景摄影机的所有运动；
- 电子伺服控制装置使两台摄影机同步运动；
- 视频控制装置实时监视和记录合成的图像，使现场演员显得好像是在复杂缩景装置中表演。

技术关键是快速、精确地协调两台摄影机，使用前景摄影机上的传感器信息来控制背景摄影机的运动。



背景摄像机单轴运动控制系统

➤ 背景摄像机单轴运动系统，闭环传递函数：

$$T(s) = \frac{K_a K_m \omega_0^2}{s^3 + 2\zeta \omega_0 s^2 + \omega_0^2 s + K_a K_m \omega_0^2}$$

➤ 三阶系统标准形式的最优传递函数：

$$2\zeta \omega_0 = 1.75\omega_n, \quad \omega_0^2 = 2.15\omega_n^2, \quad K_a K_m \omega_0^2 = \omega_n^3$$

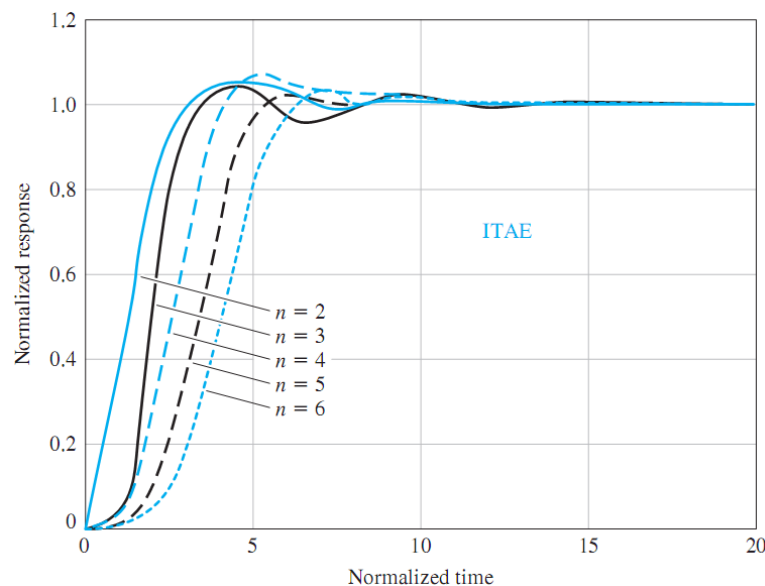
$$\frac{s + \omega_n}{s^2 + 1.4\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \boxed{s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 2.15\omega_n^2 s + \omega_n^3}$$

$$s^4 + 2.1\omega_n s^3 + 3.4\omega_n^2 s^2 + 2.7\omega_n^3 s + \omega_n^4$$

$$s^5 + 2.8\omega_n s^4 + 5.0\omega_n^2 s^3 + 5.5\omega_n^3 s^2 + 3.4\omega_n^4 s + \omega_n^5$$

$$s^6 + 3.25\omega_n s^5 + 6.60\omega_n^2 s^4 + 8.60\omega_n^3 s^3 + 7.45\omega_n^4 s^2 + 3.95\omega_n^5 s + \omega_n^6$$

- 按ITAE准则设计时，由图中估计三阶系统归一化调节时间约为8秒，则： $\omega_n T_s = 8$ 秒



- 要求调节时间小于1秒，则可选择：

$$\omega_n = 10 \text{ rad/s}, \quad T_s = 0.8 \text{ s} < 1 \text{ s}$$

$$\omega_0 = \sqrt{2.15} \omega_n = 14.67 \text{ rad/s}$$

$$\zeta = 1.75 \omega_n / 2 \omega_0 = 0.597$$

➤ 对应的放大器增益、电机增益：

$$K_a K_m = \frac{\omega_n^3}{\omega_0^2} = \frac{\omega_n^3}{2.15\omega_n^2} = \frac{\omega_n}{2.15} = 4.65$$

➤ 使**ITAE**极小的闭环传递函数：

$$T(s) = \frac{1000}{s^3 + 17.5s^2 + 215s + 1000}$$
$$= \frac{1000}{(s + 7.08)(s + 5.21 + j10.68)(s + 5.21 - j10.68)}$$

共轭复根不是主导极点，共轭复根对应的阻尼比为 $\zeta = 0.44$

➤ 计算机仿真得到阶跃响应超调量**2%**，调节时间**0.75**
秒（稳态值**2%**）

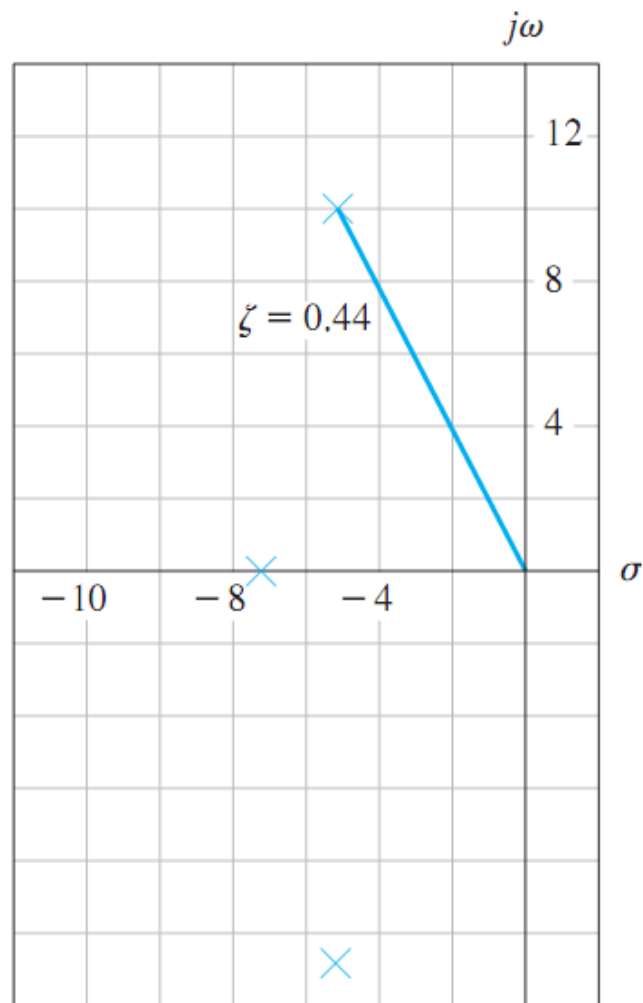


图5.32 极小ITAE系统闭环极点位置

- 当输入为斜坡信号，系统具有如下的典型闭环传递函数：

$$T(s) = \frac{b_1s + b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}$$

- 系统对斜坡输入的稳态误差为**0**
- 受控对象**G(s)**有两个或者两个以上的纯积分环节，才能使斜坡稳态误差为**0**
- 斜坡输入时，使**ITAE**指标最优的**T(s)**参数表

$$\begin{array}{c} s^2 + 3.2\omega_n s + \omega_n^2 \\ s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 3.25\omega_n^2 s + \omega_n^3 \\ s^4 + 2.41\omega_n s^3 + 4.93\omega_n^2 s^2 + 5.14\omega_n^3 s + \omega_n^4 \\ s^5 + 2.19\omega_n s^4 + 6.50\omega_n^2 s^3 + 6.30\omega_n^3 s^2 + 5.24\omega_n^4 s + \omega_n^5 \end{array}$$

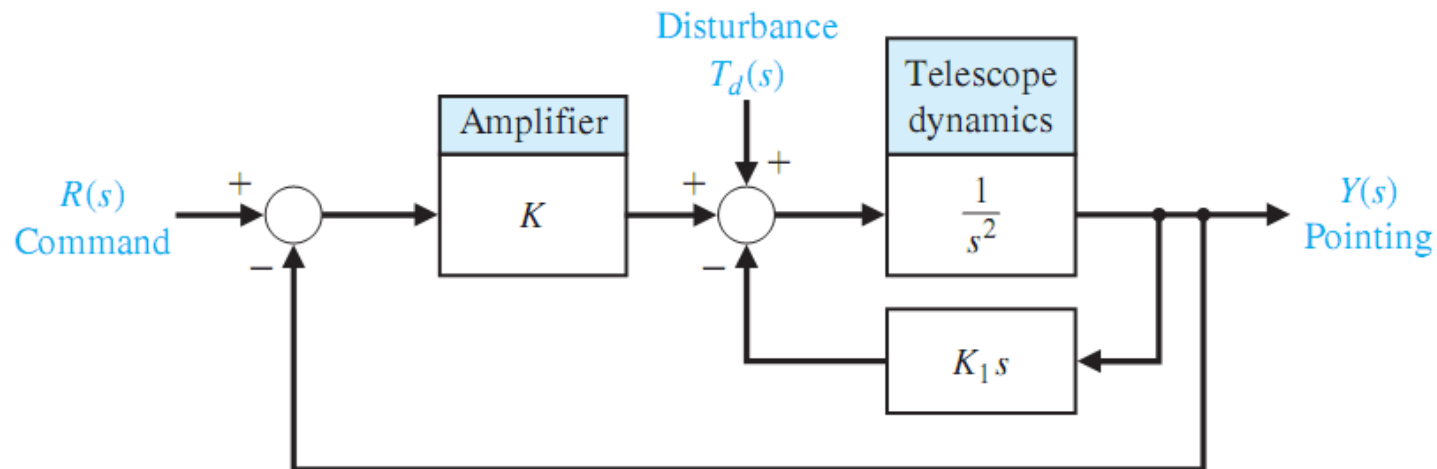
5.9 设计实例

➤ 例5.10：哈勃空间望远镜定向控制

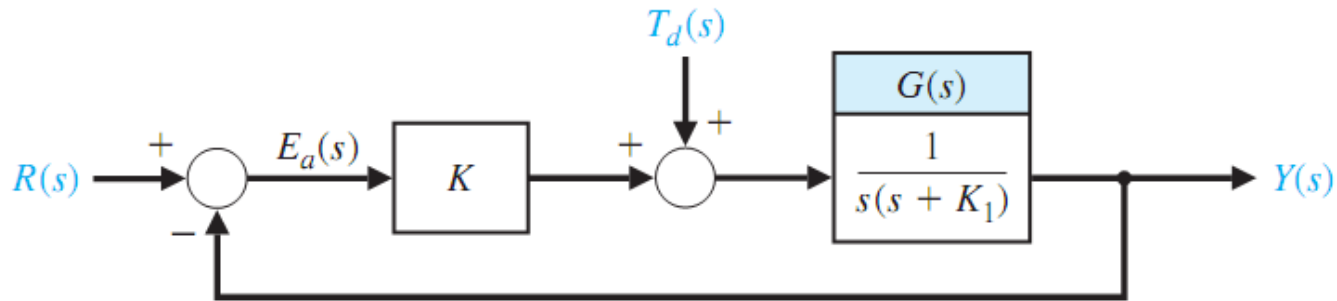
定向系统可以在**400**英里外聚焦到一枚硬币

➤ 设计目标：选择 K_I 和 K 使得：

- 阶跃响应的超调量小于或等于**10%**
- 斜坡输入作用下稳态误差达到最小
- 减小阶跃扰动的影响



➤ 对内回路的速度反馈，进行方框图化简：



➤ 两个输入作用下的系统输出：

$$Y(s) = T(s)R(s) + \frac{T(s)}{K}T_d(s)$$

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

$$\text{误差: } E(s) = R(s) - Y(s) = \frac{1}{1 + L(s)} R(s) - \frac{G(s)}{1 + L(s)} T_d(s)$$

➤ 先选择 K 和 K_1 满足对阶跃响应超调量的要求

$$\text{令 } R(s) = A/s, \quad T_d(s) = 0$$

$$Y(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} R(s) = \frac{K}{s^2 + K_1s + K} \frac{A}{s}$$

$$\zeta = 0.6 \text{ 时, 超调量 } M_{pt} = 9.5\% < 10\%$$

$$\omega_n^2 = K, \quad \omega_n = \sqrt{K}$$

$$2\zeta\omega_n = K_1 = 2 \times 0.6 \times \omega_n = 1.2\sqrt{K}$$

➤ 再检验斜坡输入的稳态误差

$$r(t) = Bt \quad (t \geq 0), \quad e_{ss} = \frac{B}{K_v} = \frac{B}{\lim_{s \rightarrow 0} sKG(s)} = \frac{B}{K/K_1}$$

$$\frac{K}{K_1} = \frac{K}{1.2\sqrt{K}} = \frac{\sqrt{K}}{1.2}, \quad e_{ss} = \frac{1.2B}{\sqrt{K}}, \quad K \uparrow \quad e_{ss} \downarrow$$

➤ 单位阶跃扰动引起的稳态误差

$$R(s) = 0, \quad E(s) = -\frac{G(s)}{1+L(s)} T_d(s) = -\frac{1}{s^2 + K_1 s + K} \frac{1}{s}$$

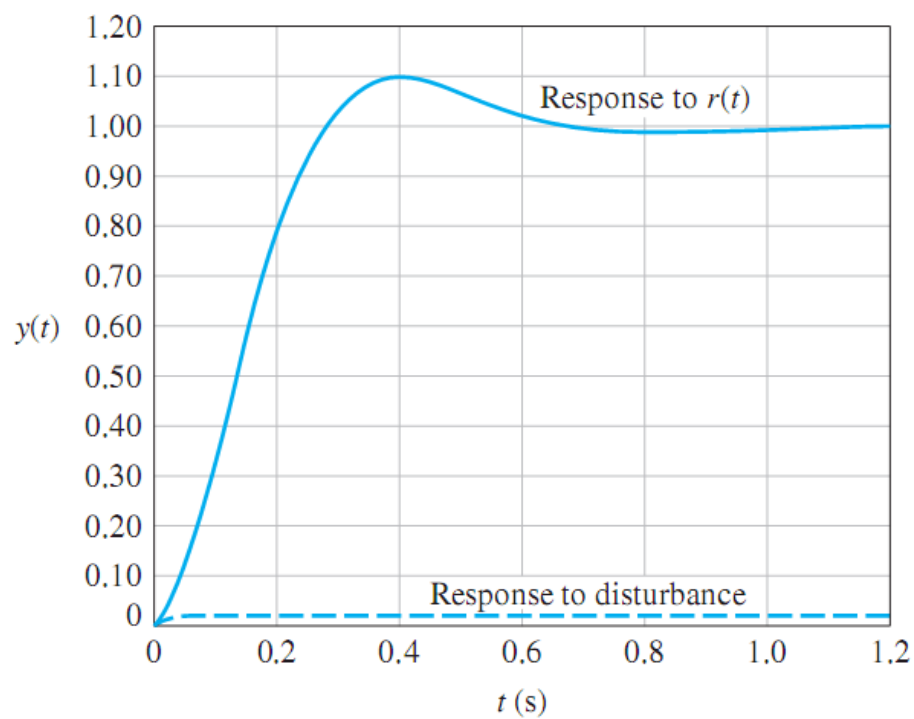
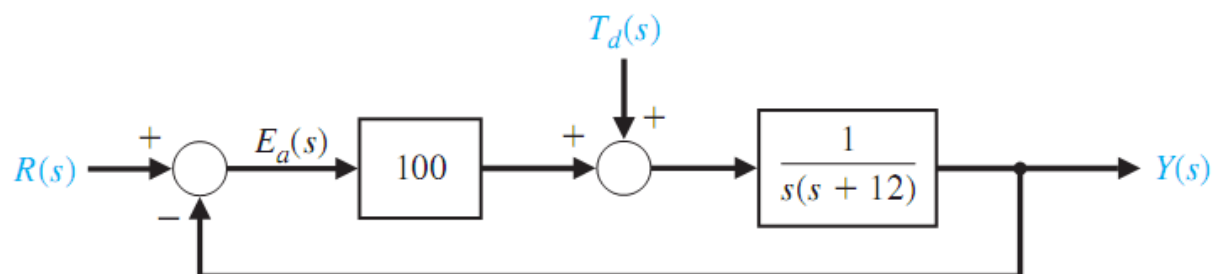
$$e_{ssd} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(-\frac{1}{s^2 + K_1 s + K} \frac{1}{s} \right) = -\frac{1}{K}, \quad K \uparrow e_{ssd} \downarrow$$

➤ 实际系统中必须限制K，使系统工作在线性区

取 $K = 100$ ，则： $K_1 = 1.2\sqrt{K} = 12$

斜坡输入的稳态误差： $e_{ss} = \frac{1.2B}{\sqrt{K}} = 0.12B$

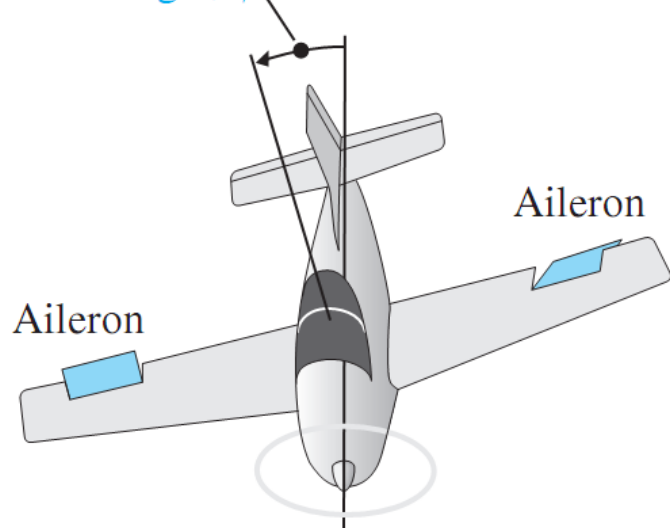
单位阶跃扰动的稳态误差： $e_{ssd} = -\frac{1}{K} = -0.01$



➤ **例5.11：飞机姿态控制**

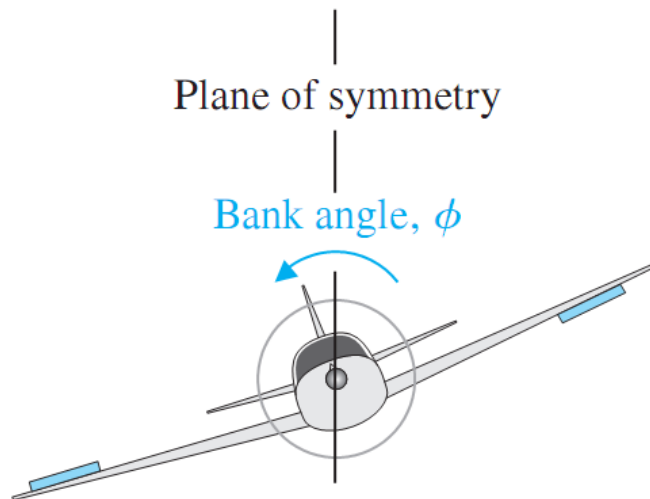
- 飞机运动的精确模型是复杂的，一组高度非线性、时变、耦合的微分方程。
- 飞机侧滚运动模型可简化为副翼偏转、飞机倾斜角 (Bank angle)之间的输入输出传递函数。

Bank angle, ϕ



Plane of symmetry

Bank angle, ϕ



- 假设飞机是刚性的，具有一个对称面，以亚音速或低超音速（马赫数 ≤ 3 ）巡航，低速稳定，机翼水平飞行姿态。
- **控制目标：**调节飞机倾斜角为0度（稳定的，机翼水平），出现不可预知的外部扰动时，能够维持机翼水平方向。
- **被控变量：**飞机倾斜角（记为 ϕ ）
- **控制设计指标：**
 - **DS1：**单位阶跃输入百分比超调量小于**20%**
 - **DS2：**响应时间快（以峰值时间计）

➤ 飞机姿态控制系统设计过程中的要素

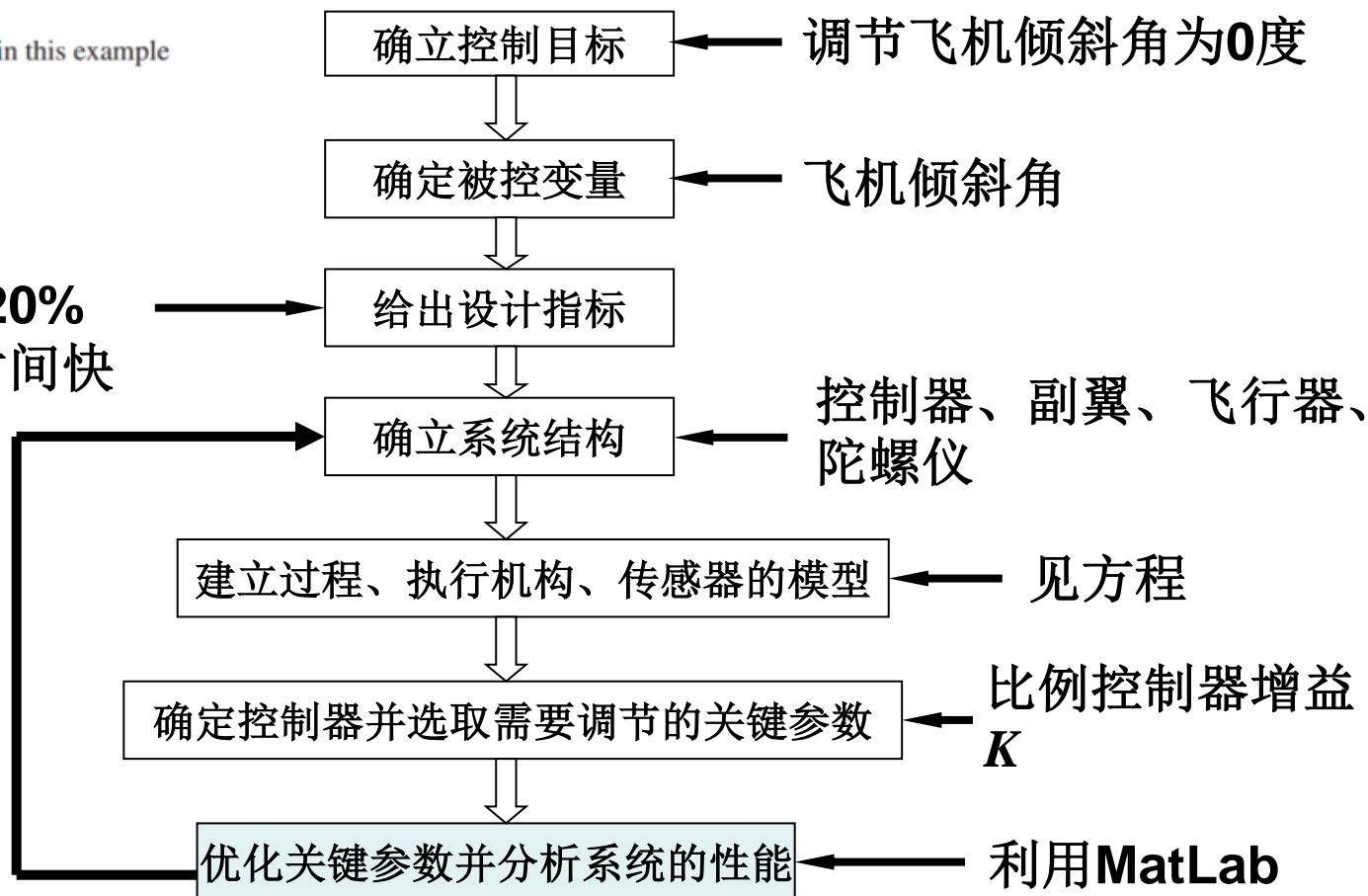


Topics emphasized in this example

设计指标:

DS1: P.O.<20%

DS2: 响应时间快



系统的性能不满足设计指标则重新
选择系统结构

系统的性能满足设计指标结束设计

- 在稳定、水平飞行时，经简化和线性化，得侧滚运动传递函数模型：

$$\frac{\phi(s)}{\delta_a(s)} = \frac{k(s - c_0)(s^2 + b_1s + b_0)}{s(s + d_0)(s + e_0)(s^2 + f_1s + f_0)}$$

倾斜角 $\phi(s)$ 为输出，副翼偏转 $\delta_a(s)$ 为输入



- 飞机侧向运动(横滚和偏航)主要有三种模式：荷兰翻滚、螺旋、衰减横摇



$s^2 + f_1s + f_0$ 给出的共轭复极点代表荷兰翻滚模态

极点 $s = -d_0$ 与螺旋模态有关

极点 $s = -e_0$ 与衰减横摇模态有关

一般有 $e_0 \gg d_0$ 。F-16 以 500 ft/s 稳定、水平飞行时，

$e_0 = 3.57$, $d_0 = 0.0128$

小攻角（例如稳定、水平飞行）时，荷兰翻滚模态通常与传递函数中 $s^2 + b_1s + b_0$ 项对消

可以忽略螺旋模态，它本质上是一种偏航运动，与侧滚运动关系不大

零点 $s = c_0$ 代表重力影响，在侧滚时造成飞机侧滑，假定飞机侧滑微弱或没有，这种影响可以忽略得到单自由度的近似模型：

$$\frac{\phi(s)}{\delta_a(s)} = \frac{k}{s(s + e_0)}$$

选取： $e_0 = 1.4$ ， $k = 11.4$

衰减横摇的时间常数 $\tau = 1/e_0 = 0.7$ 秒

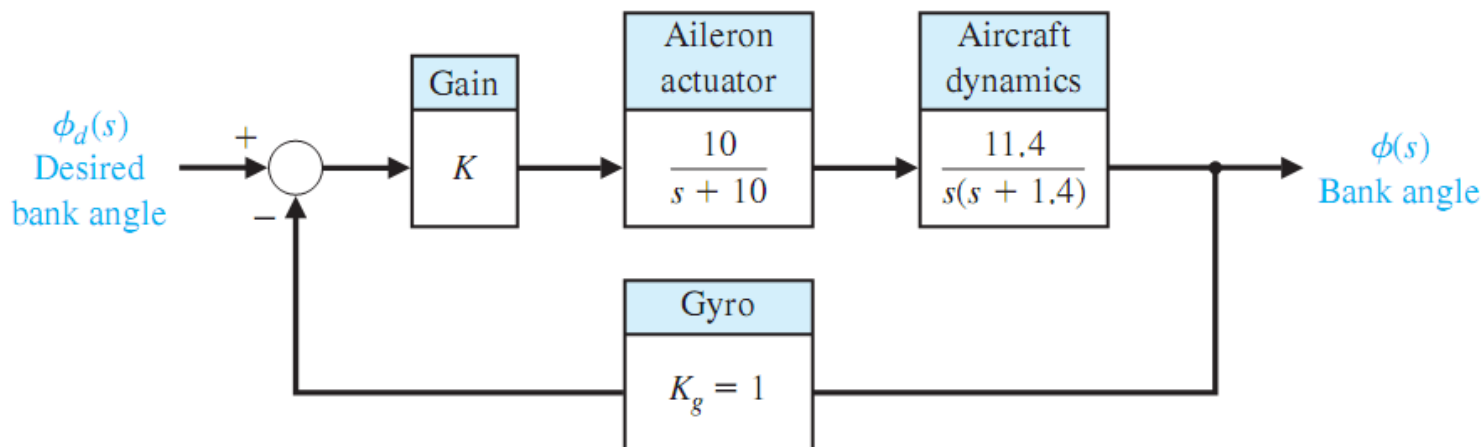
- 副翼执行器通常采用一阶模型：

$$\frac{\delta_a(s)}{e(s)} = \frac{p}{s+p}, \begin{cases} e(s) = \phi_d(s) - \phi(s) \\ p = 10, \text{ 时间常数 } \tau = 1/p = 0.1 \text{ 秒} \end{cases}$$

- 忽略陀螺动态特性，陀螺仪模型： $K_g = 1$

- 采用比例控制器： $G_c(s) = K$

- 系统结构框图：



- 选择关键调节参数：控制器增益 K
- 闭环传递函数为三阶模型，降阶为二阶模型，使近似系统的频率响应尽量接近原系统

$$\begin{aligned}
 T(s) &= \frac{\phi(s)}{\phi_d(s)} = \frac{114K}{s^3 + 11.4s^2 + 14s + 114K} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{14}{114K}s + \frac{11.4}{114K}s^2 + \frac{1}{114K}s^3} \\
 G_L(s) &= \frac{1}{1 + d_1s + d_2s^2}, \quad \frac{T(s)}{G_L(s)} = \frac{M(s)}{\Delta(s)} \\
 M(s) &= 1 + d_1s + d_2s^2 \\
 \Delta(s) &= 1 + \frac{14}{114K}s + \frac{11.4}{114K}s^2 + \frac{s^3}{114K}
 \end{aligned}$$

$$M_{2q} = \sum_{k=0}^{2q} \frac{(-1)^{k+q} M^{(k)}(0) M^{(2q-k)}(0)}{k!(2q-k)!}, \quad q = 1, 2, \dots$$

$$\Delta_{2q} = \sum_{k=0}^{2q} \frac{(-1)^{k+q} \Delta^{(k)}(0) \Delta^{(2q-k)}(0)}{k!(2q-k)!}, \quad q = 1, 2, \dots$$

$$M_{2q} = \Delta_{2q}, \quad q = 1, 2, \dots$$

$$M^{(1)}(s) = d_1 + 2d_2 s, \quad M^{(1)}(0) = d_1$$

$$M^{(2)}(s) = 2d_2, \quad M^{(2)}(0) = 2d_2$$

$$M^{(3)}(s) = M^{(4)}(s) = \dots = 0$$

$$\Delta^{(1)}(s) = \frac{14}{114K} + \frac{22.8}{114K} s + \frac{3}{114K} s^2, \quad \Delta^{(1)}(0) = \frac{14}{114K}$$

$$\Delta^{(2)}(s) = \frac{22.8}{114K} + \frac{6}{114K} s, \quad \Delta^{(2)}(0) = \frac{22.8}{114K}$$

$$\Delta^{(3)}(s) = \frac{6}{114K}, \quad \Delta^{(3)}(0) = \frac{6}{114K}$$

$$\Delta^{(4)}(s) = \Delta^{(5)}(s) = \dots = 0$$

有两个未知数 d_1 、 d_2 ，所以对 $q=1,2$ 有：

$$M_2 = -\frac{M(0)M^{(2)}(0)}{2} + \frac{M^{(1)}(0)M^{(1)}(0)}{1} - \frac{M^{(2)}(0)M(0)}{2}$$

$$= -2d_2 + d_1^2$$

$$M_4 = \frac{M(0)M^{(4)}(0)}{0!4!} - \frac{M^{(1)}(0)M^{(3)}(0)}{1!3!} - \frac{M^{(2)}(0)M^{(2)}(0)}{2!2!}$$

$$- \frac{M^{(3)}(0)M^{(1)}(0)}{3!1!} + \frac{M^{(4)}(0)M(0)}{4!0!} = d_2^2$$

同样有： $\Delta_2 = \frac{-22.8}{114K} + \frac{196}{(114K)^2}$ ， $\Delta_4 = \frac{101.96}{(114K)^2}$

$M_2 = \Delta_2$ ， $M_4 = \Delta_4$ ， 可得：

$$-2d_2 + d_1^2 = \frac{-22.8}{114K} + \frac{196}{(114K)^2}, \quad d_2^2 = \frac{101.96}{(114K)^2}$$

$d_1 = \frac{\sqrt{196 - 296.96K}}{114K}, \quad d_2 = \frac{10.097}{114K}$
--

➤ 近似传递函数为:

$$G_L(s) = \frac{11.29K}{s^2 + \sqrt{1.92 - 2.91K}s + 11.29K}$$

➤ 为保证分母多项式的系数为实数, 要求 **$K < 0.65$**

➤ 期望的二阶传递函数为:

$$G_L(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\therefore \omega_n^2 = 11.29K, \quad \zeta^2 = \frac{0.043}{K} - 0.065$$

$$P.O. = 100e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} < 20\%, \quad \text{可得} \zeta \geq 0.45$$

$$\text{取} \zeta = 0.45, \quad \text{得} K = 0.16, \quad \omega_n = \sqrt{11.29K} = 1.34$$

$$\text{峰值时间: } T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 2.62 \text{秒}$$

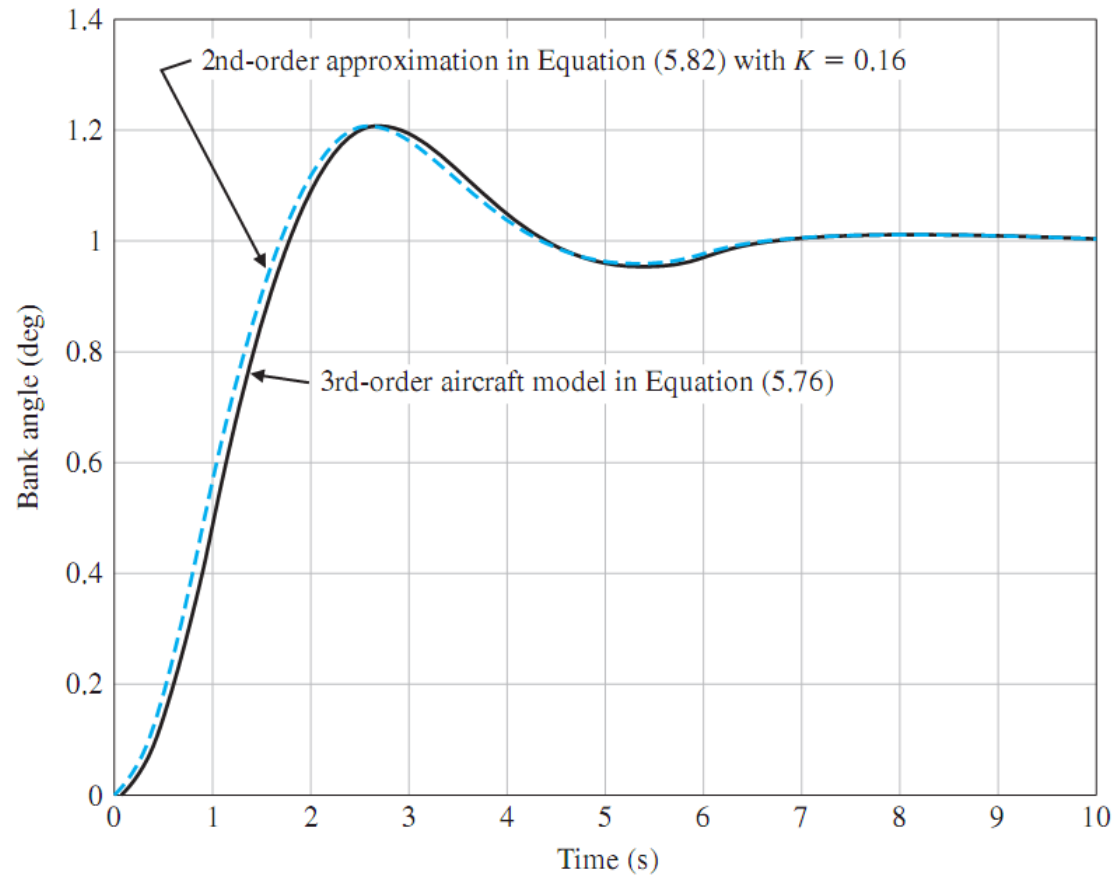
- 若选取的 $\zeta > 0.45$ ，则可进一步的减小超调量。

但增加 ζ ，就要减小 K ，而减小 K ， ω_n 也随着减小，峰值时间随着增大。

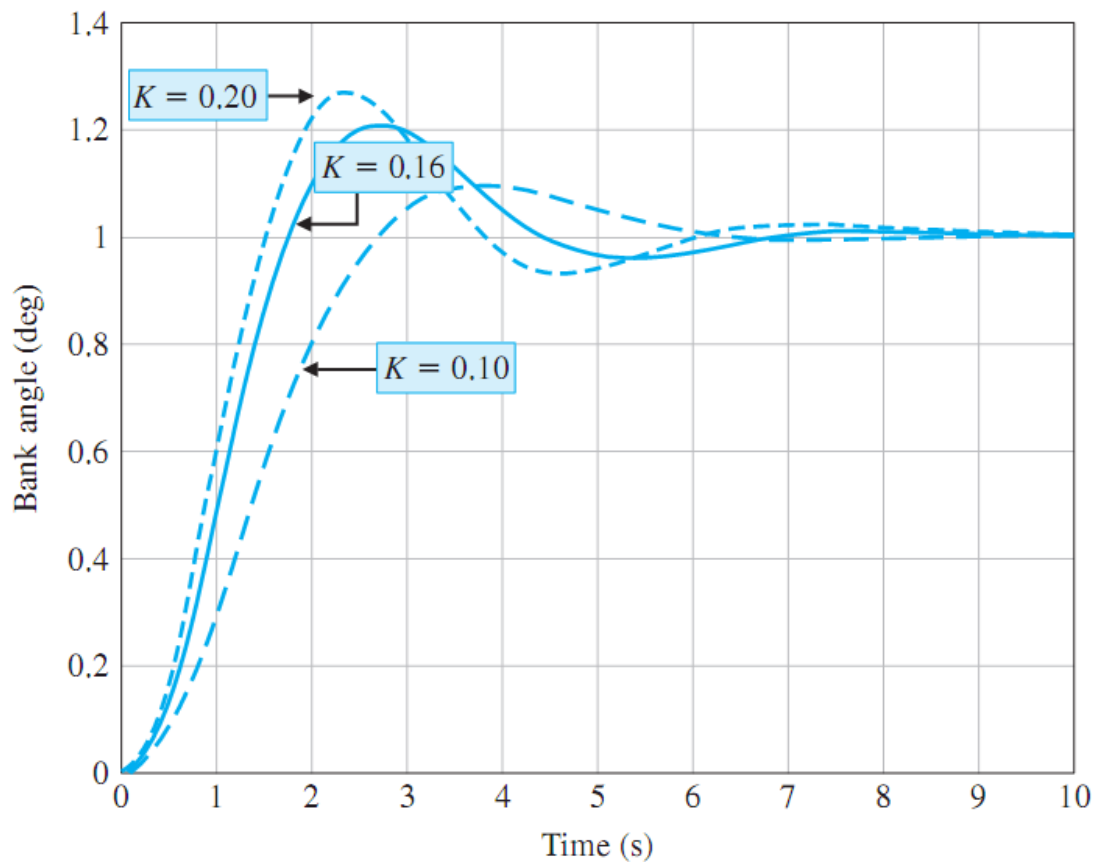
K	P.O. (%)	$T_p(s)$
0.10	9.5	3.74
0.16	20.5	2.73
0.20	26.5	2.38

- 设计要求保证超调量，同时使峰值时间最小。
- 选择 $\zeta = 0.45$ 能同时满足两个设计目标。
- 实际是三阶系统，要考虑第三个极点的影响。
- 观察阶跃响应，二阶系统能很好近似三阶系统。
- $K = 0.16$ 时二阶系统超调量20%，峰值时间2.62s。
- 实际三阶系统超调量20.5%，峰值时间2.73s。

➤ 三阶飞机模型与二阶近似模型阶跃响应比较



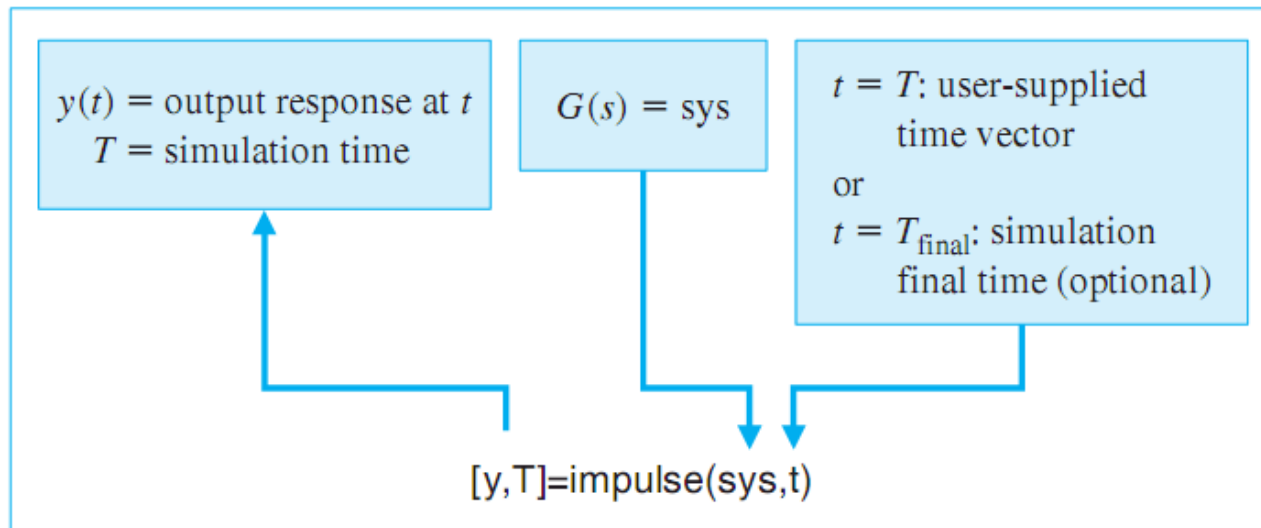
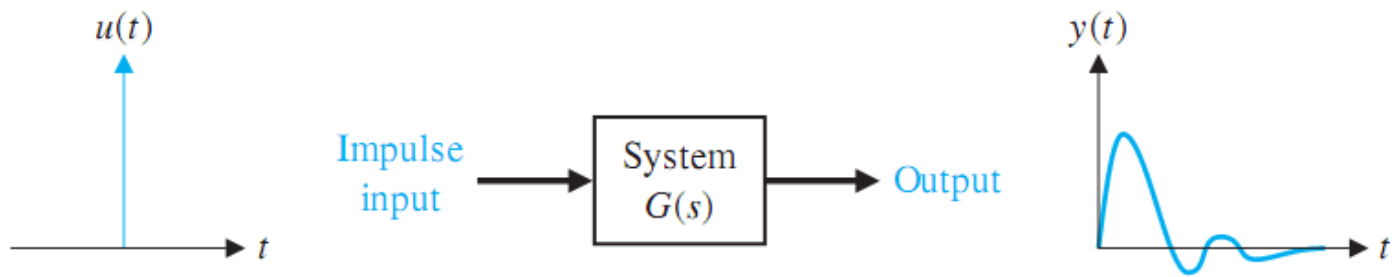
➤ $K=0.10, 0.16, 0.20$ 时，三阶系统阶跃响应，随着 K 减小，百分比超调量减小，峰值时间上升



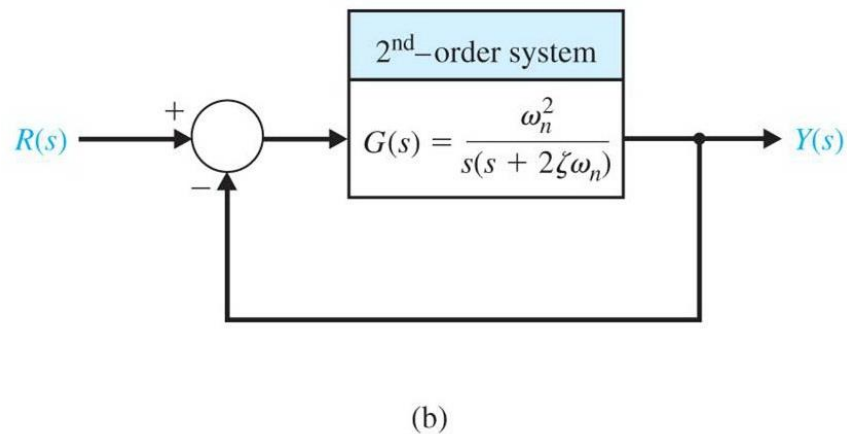
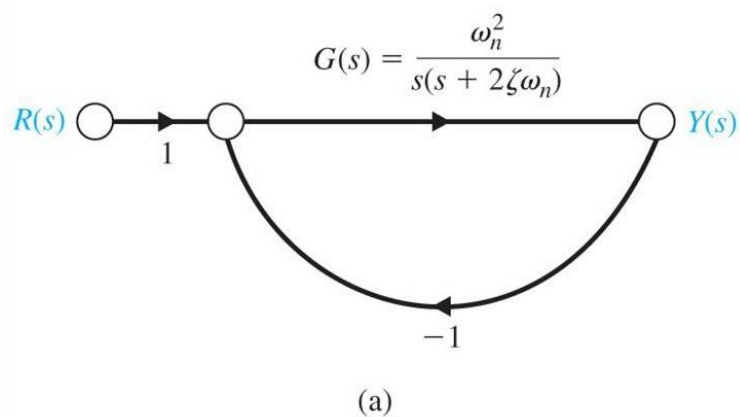
5.10 应用控制设计软件分析系统的性能

- 分析给定输入信号下控制系统的瞬态响应和稳态跟踪误差，讨论控制系统时域性能指标和线性系统的化简
- 介绍Matlab的函数：**impluse**和**lsim**
- 时域性能指标：由系统在给定输入信号下的瞬态响应给出
- 测试信号：冲激信号，系统的冲激响应是阶跃响应关于时间的导数
- 用**impluse**函数求冲激响应

➤ **impulse**函数说明:



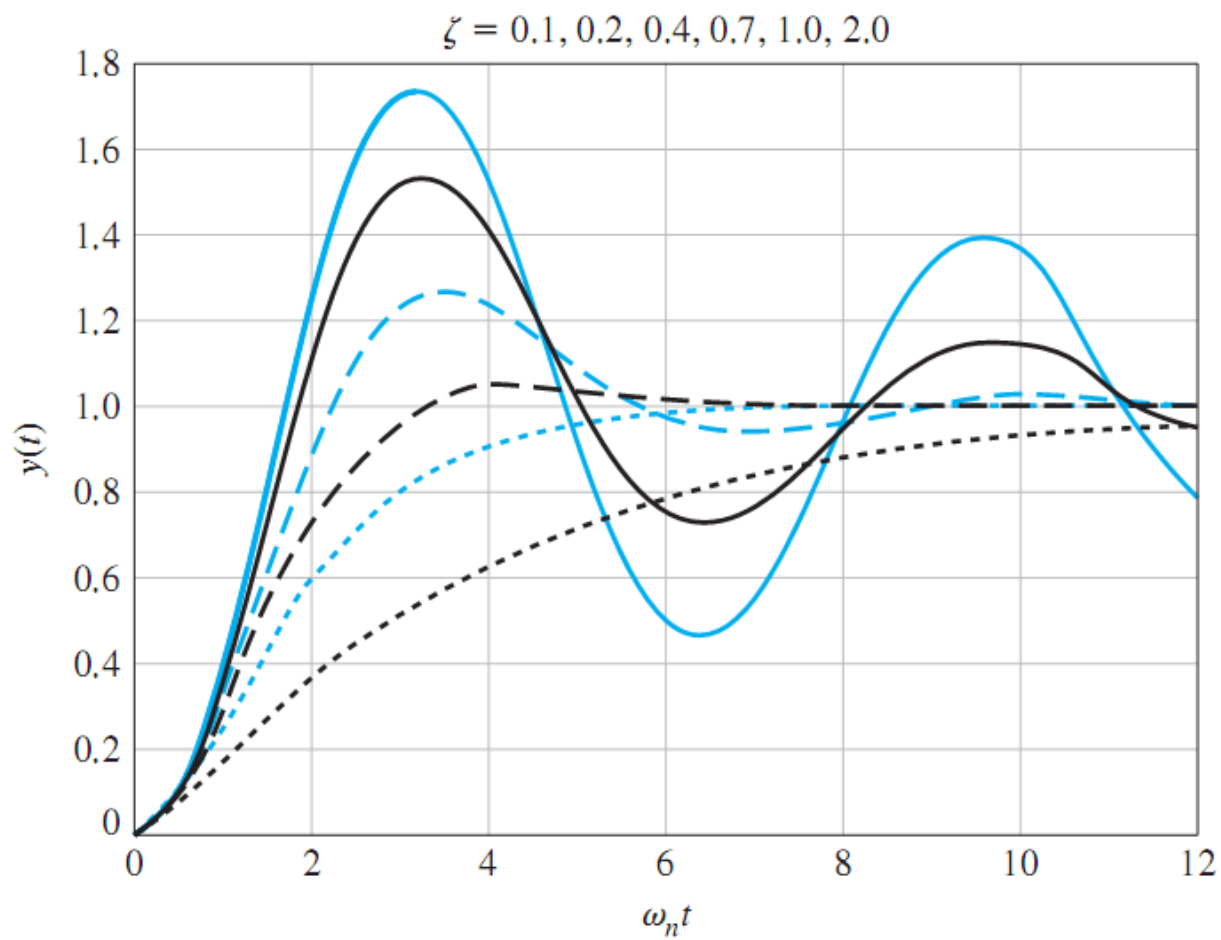
➤ 考虑单回路二阶系统:



➤ 闭环输出:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} R(s)$$

➤ 系统单位阶跃响应



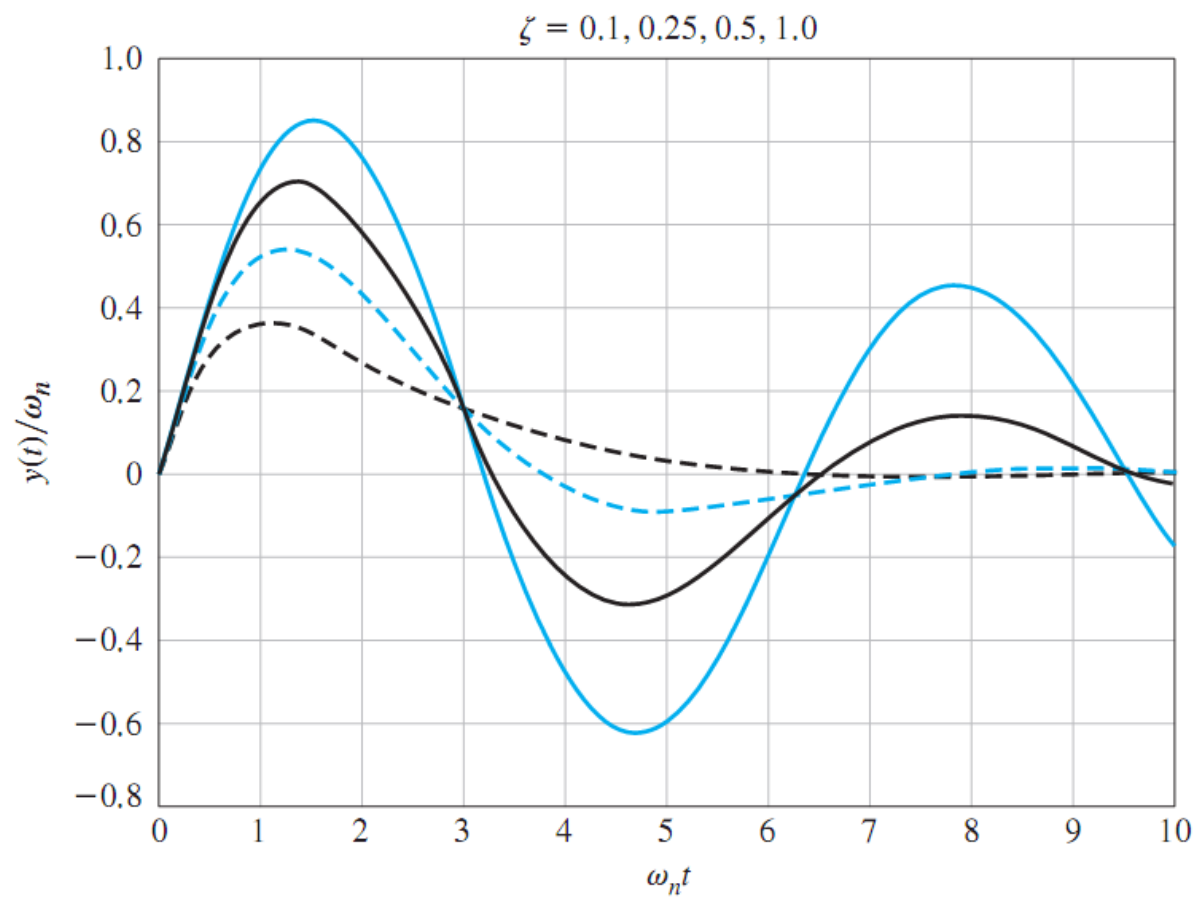
➤ Matlab脚本:

```
%Compute step response for a second-order system
%Duplicate Figure 5.5 (a)
%
t=[0:0.1:12]; num=[1];
zeta1=0.1; den1=[1 2*zeta1 1]; sys1=tf(num,den1);
zeta2=0.2; den2=[1 2*zeta2 1]; sys2=tf(num,den2);
zeta3=0.4; den3=[1 2*zeta3 1]; sys3=tf(num,den3);
zeta4=0.7; den4=[1 2*zeta4 1]; sys4=tf(num,den4);
zeta5=1.0; den5=[1 2*zeta5 1]; sys5=tf(num,den5);
zeta6=2.0; den6=[1 2*zeta6 1]; sys6=tf(num,den6);
%
[y1,T1]=step(sys1,t); [y2,T2]=step(sys2,t);
[y3,T3]=step(sys3,t); [y4,T4]=step(sys4,t);
[y5,T5]=step(sys5,t); [y6,T6]=step(sys6,t);
%
plot(T1,y1,T2,y2,T3,y3,T4,y4,T5,y5,T6,y6)
xlabel('\omega_n t'), ylabel('y(t)')
title('\zeta = 0.1, 0.2, 0.4, 0.7, 1.0, 2.0'), grid
```

Compute
step
response.

Generate plot
and labels.

➤ 系统冲激响应



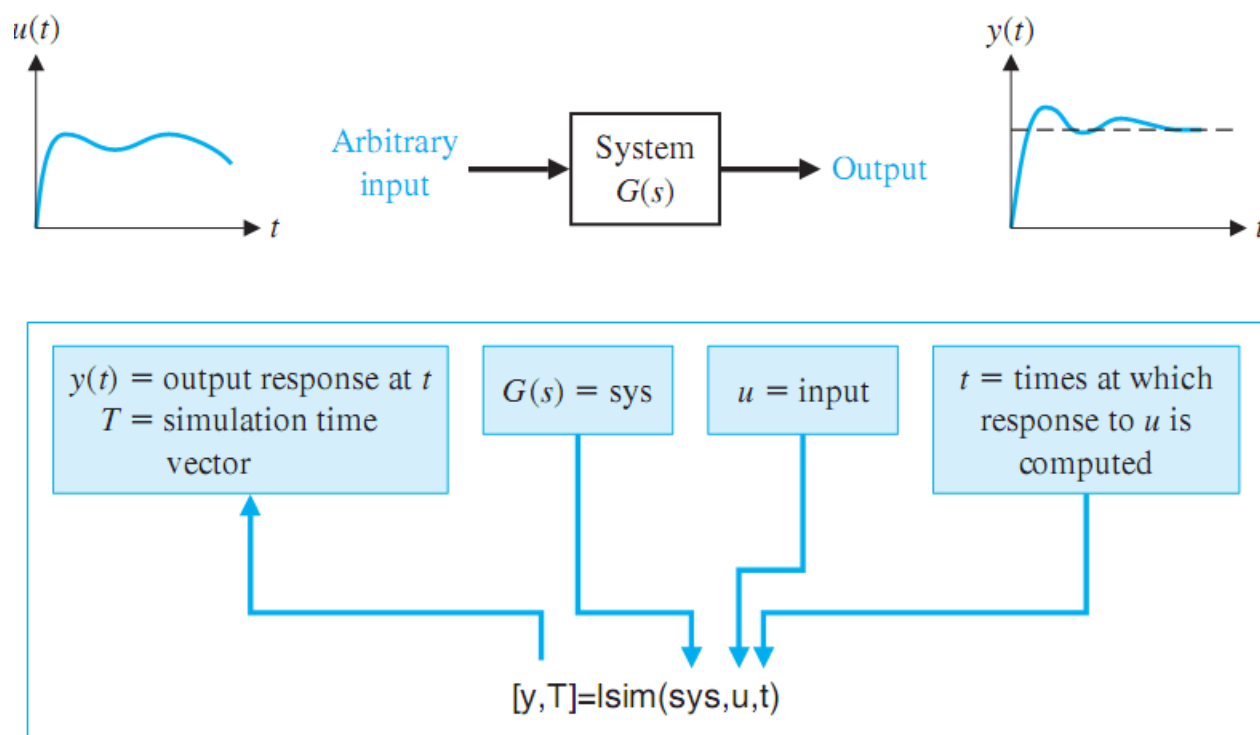
➤ Matlab脚本:

```
%Compute impulse response for a second-order system
%Duplicate Figure 5.6
%
t=[0:0.1:10]; num=[1];
zeta1=0.1; den1=[1 2*zeta1 1]; sys1=tf(num,den1);
zeta2=0.25; den2=[1 2*zeta2 1]; sys2=tf(num,den2);
zeta3=0.5; den3=[1 2*zeta3 1]; sys3=tf(num,den3);
zeta4=1.0; den4=[1 2*zeta4 1]; sys4=tf(num,den4);
%
[y1,T1]=impulse(sys1,t);
[y2,T2]=impulse(sys2,t);
[y3,T3]=impulse(sys3,t);
[y4,T4]=impulse(sys4,t);
%
plot(t,y1,t,y2,t,y3,t,y4)
xlabel('\omega _nt'), ylabel('y(t)/\omega _n')
title('\zeta = 0.1, 0.25, 0.5, 1.0'), grid
```

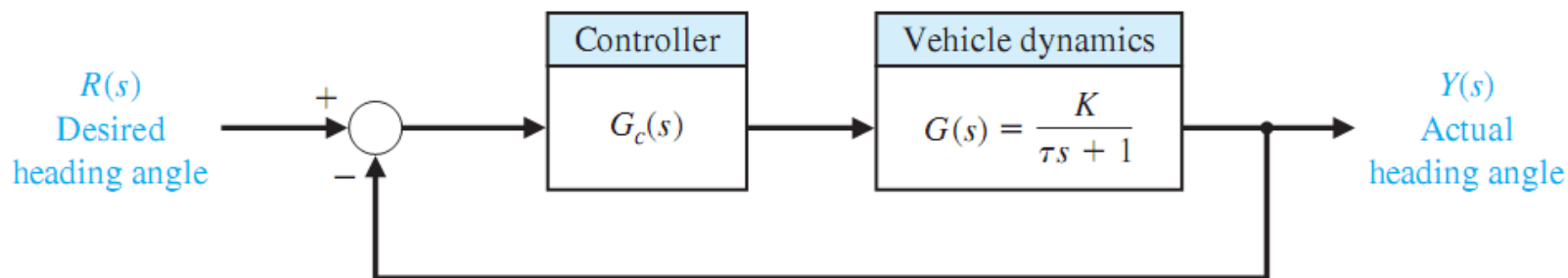
← Compute impulse response.

← Generate plot and labels.

- 多数情况下，需要对系统在任意输入下的响应进行仿真计算（利用**Isim**函数）
- **Isim**函数说明：

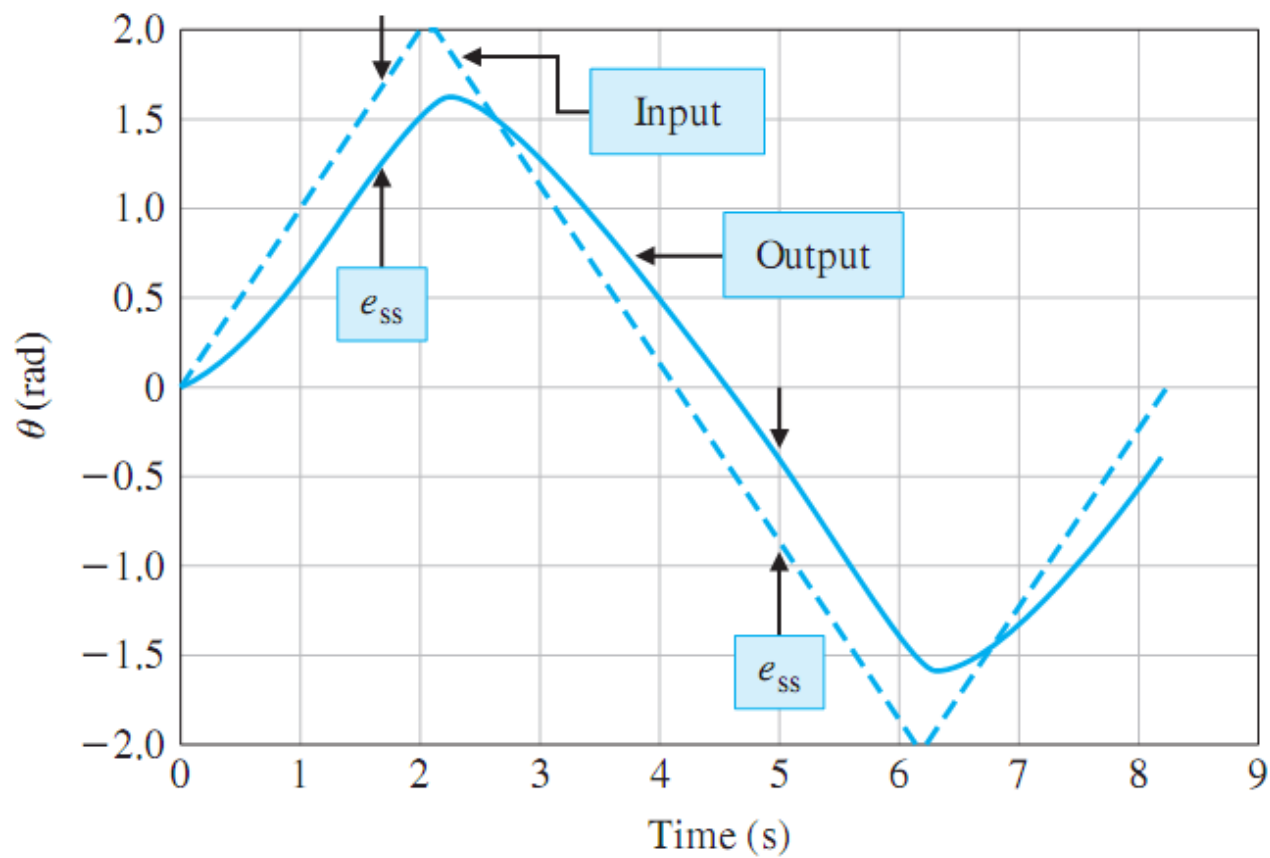


➤ 例5.12：移动机器人驾驶控制



- 假定驾驶控制器： $G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s}$
- 斜坡输入的稳态误差： $e_{ss} = \frac{A}{K_v}$ ，其中 $K_v = K_2 K$
- 控制器参数 K_2 对稳态误差有明显的影响
- 可用 **Isim** 函数对闭环系统在斜坡输入的响应仿真

➤ $K_1=K=1$, $K_2=2$, $\tau=0.1$ 时系统三角波响应



➤ Matlab脚本:

```
%Compute the response of the Mobile Robot Control
%System to a triangular wave input
%
numg=[10 20]; deng=[1 10 0]; sysg=tf(numg,deng);
[sys]=feedback(sysg, [1]);
t=[0:0.1:8.2]';
v1=[0:0.1:2]';v2=[2:-0.1:-2]';v3=[-2:0.1:0]';
u=[v1;v2;v3];
[y,T]=lsim(sys,u,t);
plot(T,y,t,u,'--'),
xlabel('Time (s)'), ylabel('\theta (rad)'), grid
```

Annotations:

- $G(s)G_c(s)$ points to the line: `sysg=tf(numg,deng);`
- Compute triangular wave input. points to the line: `v1=[0:0.1:2]';v2=[2:-0.1:-2]';v3=[-2:0.1:0]';`
- Linear simulation. points to the line: `[y,T]=lsim(sys,u,t);`

- 线性系统的化简：高阶模型可用低阶模型来近似，并保持相似的输入输出特性
- 例5.13: 一个简化的模型

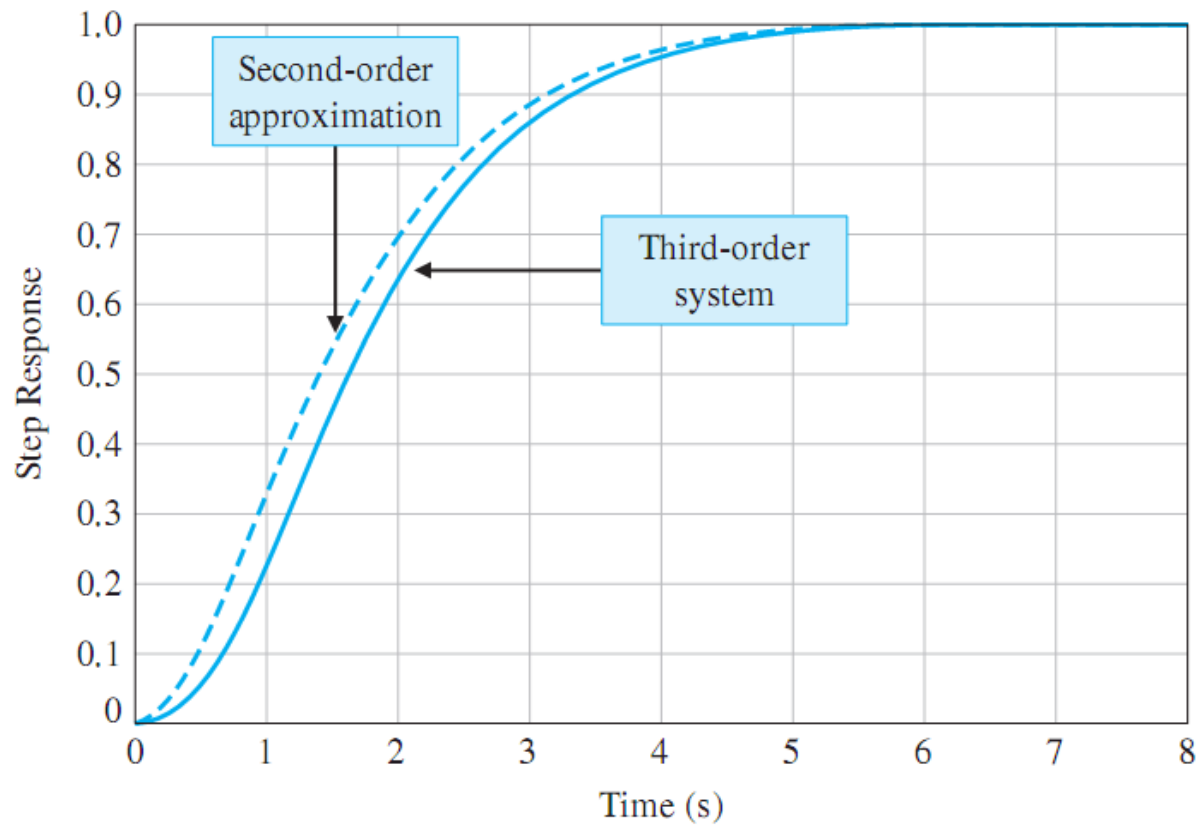
考虑三阶系统：

$$G_H(s) = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

二阶近似模型：

$$G_L(s) = \frac{1.60}{s^2 + 2.590s + 1.60}$$

➤ 三阶系统和近似的二阶系统的阶跃响应:



➤ Matlab脚本:

```
% Compare step response for second-order approximation
%
num1=[6]; den1=[1 6 11 6]; sys1=tf(num1,den1);
num2=[1.6]; den2=[1 2.594 1.6]; sys2=(tf(num2,den2);
t=[0:0.1:8];
[y1,T1]=step(sys1,t);
[y2,T2]=step(sys2,t);
plot(T1,y1,T2,y2,'--'), grid
xlabel('Time (s)'), ylabel('Step Response')
```

$$G_H(s) = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$G_L(s) = \frac{1.6}{s^2 + 2.59s + 1.6}$$

5.11 系列设计案例：磁盘驱动器读入系统

➤ **设计目标：** 系统有最快的阶跃响应，同时

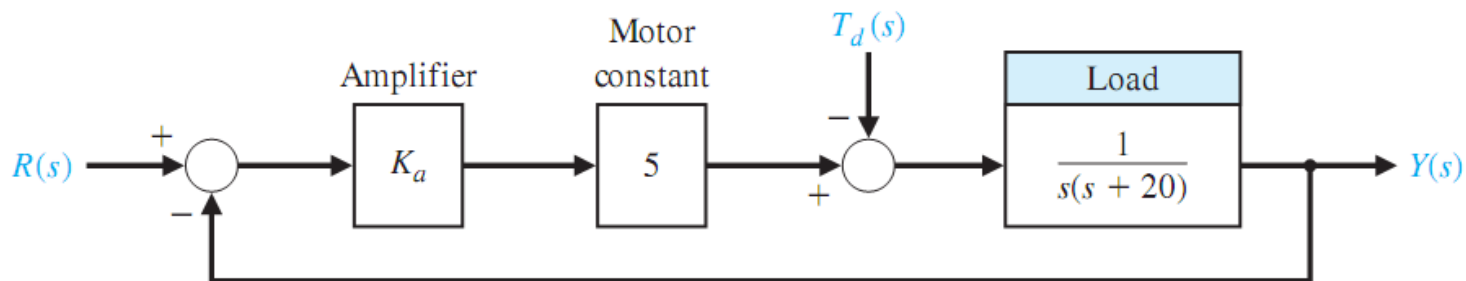
■ 限制响应的超调量和振荡特性

■ 减小扰动对读磁头输出位置的影响

➤ **瞬态响应设计指标：**

工作指标	期望值
百分比超调量	小于5%
调节时间	小于250ms
对单位阶跃扰动的最大响应值	小于0.005

➤ 忽略线圈电感，电机和读磁头臂的动力学特性是二阶模型



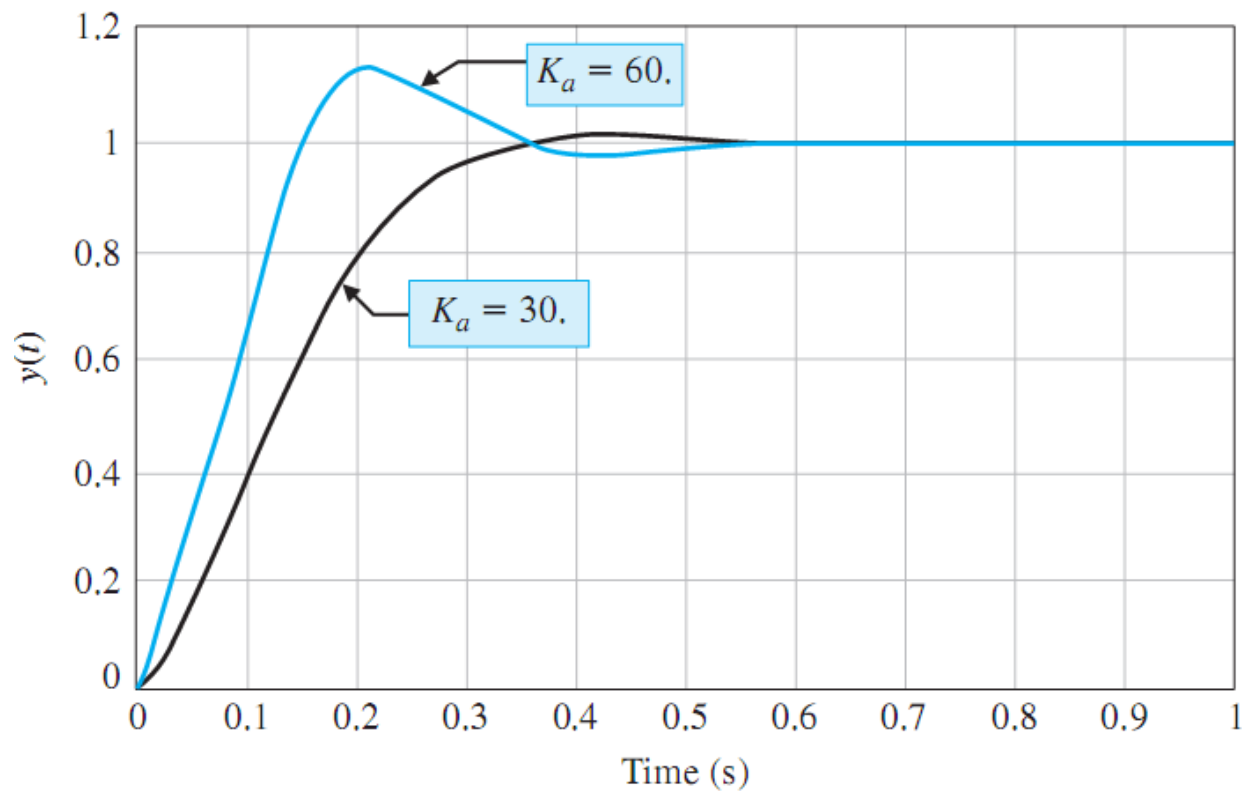
当 $T_d(s) = 0$ 时，系统输出：

$$Y(s) = \frac{5K_a}{s^2 + 20s + 5K_a} R(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} R(s)$$

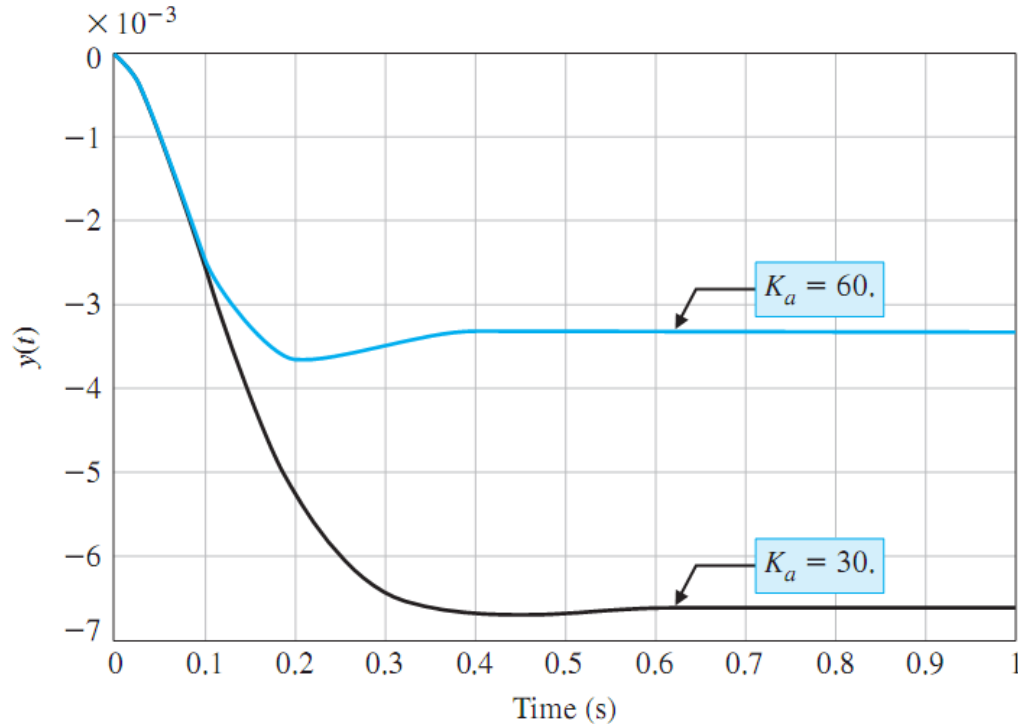
$$\text{可得： } \omega_n^2 = 5K_a, \quad 2\zeta\omega_n = 20$$

K_a	20	30	40	50	60
百分比超调量	0	1.2%	4.3%	10.8%	16.3%
调节时间（秒）	0.55	0.40	0.40	0.40	0.40
阻尼比	1	0.82	0.707	0.58	0.50
对单位阶跃扰动的最大响应值	-0.01	-0.0066	-0.0052	-0.0037	-0.0029

➤ $K_a=30$ 和 60 时，系统单位阶跃响应



- $Ka=30$ 和 60 时，系统对单位阶跃扰动的响应：
 $Ka=60$ 时，扰动的影响减少了一半
- 折衷选取 $Ka=40$ ，它并不满足所有的性能指标



5.12 总结

- 反馈控制系统的性能指标的定义
- 标准测试信号及其用途
- 对标准阶跃测试信号的几种性能指标
- 性能指标之间通常是矛盾的，需要折衷设计
- 系统传递函数的极点在 S 平面上的位置，与系统响应之间的联系
- 系统对标准测试信号的稳态误差
- 稳态误差与系统参数之间的联系

稳态误差与系统参数之间的联系

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3)}, \quad K = 1, 2, 8 \text{ 时反馈系统斜坡响应}$$

K 增大，稳态误差减小，但 $K = 8$ 时系统响应振荡

