第六章

线性反馈系统稳定性

目录

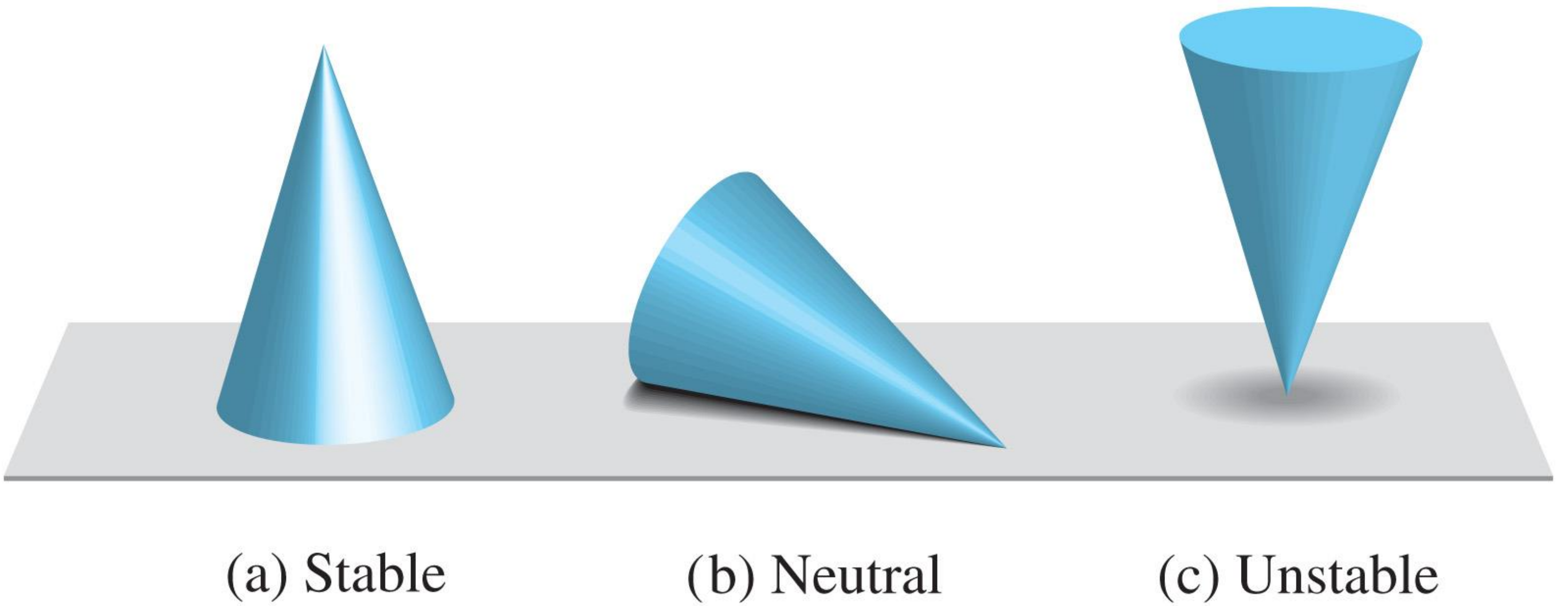
6.1 稳定性的概念

- 稳定是对自动控制系统最重要、最基本的要求
- 稳定性stability是控制工程、控制理论最重要的问题
- 分析、设计控制系统时，首先要考虑稳定性
- 不稳定系统，受到外部或内部扰动时，系统偏离原来的平衡工作点，并随时间推移而发散，即使扰动消失后，也不可能恢复原来的平衡状态
- 李雅普诺夫A. M. Ляпунов（Lyapunov）是常微分方程运动稳定性理论的创始人，1892年他的博士论文《运动稳定性的一般问题》奠定了常微分方程稳定性的理论基础

- 李雅普诺夫（1857-1918），俄国著名的数学家、力学家
- 19世纪以前，俄国的数学是相当落后的，直到切比雪夫创立了圣彼得堡数学学派以后，才使得俄罗斯数学摆脱了落后境地而开始走向世界前列。
- 李雅普诺夫与师兄马尔科夫是切比雪夫的两个最著名最有才华的学生，他们都是彼得堡数学学派的重要成员。
- 1892年，他的博士论文《论运动稳定性的一般问题》在莫斯科大学通过。李雅普诺夫在常微分方程定性理论和天体力学方面的工作使他赢得了国际声誉。
- 李雅普诺夫稳定性李雅普诺夫定理、李雅普诺夫函数、李雅普诺夫变换、李雅普诺夫曲面、李雅普诺夫球面、李雅普诺夫维数、李雅普诺夫稳定性等。

李雅普诺夫
(1857-1918)

- 稳定stable、不稳定unstable、临界稳定critical stable
- 绝对稳定性absolute stability
- 相对稳定性relative stability



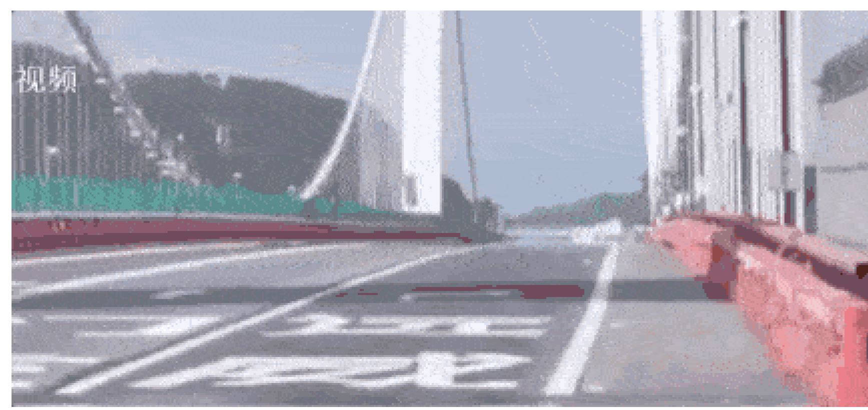
Tacoma Narrows Bridge塔科马市纽约湾海峡悬索桥，位于美国华盛顿州普吉特海湾地区的塔科马市，全长**1.6**公里。

第一座桥**1938**年开始建造，**1940**年**7**月**1**日通车，**1940**年**11**月**7**日倒塌，现在使用的是**1950**年重建的桥梁。

当时共有两个设计方案，第一个方案由克拉克·埃德里奇提出，桥面设计厚度**7.6**米；另一个方案由金门大桥设计师之一里昂·莫伊塞弗提出，为了降低造价，桥面设计厚度**2.4**米，成本从**1100**万美元降至**800**万美元。从经济角度考虑，采用了莫伊塞弗方案。

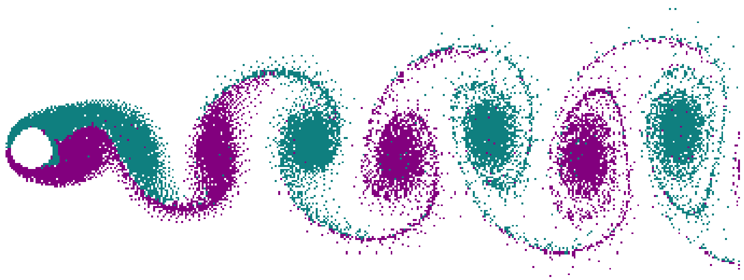
通车仅几个星期，桥面便开始出现上下摆动。有关人士安装了摄影机，以便观测摆动。大风时，桥面摆动幅度甚至可达**1.5**米。许多人慕名驾车而来，感受振荡的刺激。后来桥面的波动幅度不断增加，工程技术人员试图加建钢缆、液压缓冲装置降低波动，但不成功。

在持续数月的摆动下，桥梁最终于**1940**年**11**月**7**日倒塌，当天早上，桥面的上下摆动突然停止，出现左右的扭力摆动。有两人被困在桥上，后來逃离现场。桥面在几分钟内陆续崩塌。倒塌过程被人们拍摄记录。


视频

华盛顿州政府并未获得保险公司的赔偿，因为本该付给保险公司的保险费全部被保险经纪侵吞。

调查显示，原设计为了追求美观、省钱，桥面厚度不足，使用物料过轻，造成发生共振的破坏频率与自然风接近，从而受到强风吹袭引起共振而不停摆动。



新桥的厚度增至**10**米，并在路面上加入气孔，使空气可在路面上穿越。新桥于**1950**年**10**月**14**日启用，两车道改为四车道，是目前全美第五长的悬索桥。

1998年在原桥东面加建一座新桥，是塔科馬海峡第三条悬索桥。

- 线性定常系统输入***r(t)*=0**，在任何初始条件下，当$t\to\infty$时，系统输出及各阶导数都为0，即：

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \dot{y}(t) = \cdots = \lim_{t\to\infty} y^{(n-1)}(t) = 0$$

则称该系统是渐近稳定的。

- 线性定常系统渐近稳定的充分必要条件：系统全部极点都位于左半*S*平面，即系统特征方程的根都具有负实部。
- 若特征方程至少有一个根具有正实部，$t\to\infty$时，系统输出及各阶导数都趋于无穷大，系统不稳定。
- 特征方程至少有一个根具有零实部，其余都具有负实部，当$t\to\infty$时，系统输出趋于常数或等幅振荡（一对虚极点），系统临界稳定。

➢ ***n***阶系统有一对共轭复极点，一个***k***重实极点，其余为单实极点，系统零输入响应为：

$$y(t)=(b_1\cos\beta t+b_2\sin\beta t)e^{-\alpha t}+\left(\sum_{i=0}^{k-1}c_i t^i\right)e^{-pt}+\sum_{i=3}^{n-k}A_i e^{-p_i t}$$

$$\dot{y}(t)=(d_1\cos\beta t+d_2\sin\beta t)e^{-\alpha t}+\left(\sum_{i=0}^{k-1}e_i t^i\right)e^{-pt}+\sum_{i=3}^{n-k}-p_i A_i e^{-p_i t}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(t)=(f_1\cos\beta t+f_2\sin\beta t)e^{-\alpha t}+\left(\sum_{i=0}^{k-1}g_i t^i\right)e^{-pt}+\sum_{i=3}^{n-k}(-p_i)^{n-1}A_i e^{-p_i t}$$

➢ 如果系统特征方程的根都具有负实部，则有：

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{t\to\infty}\dot{y}(t)=\cdots=\lim_{t\to\infty}y^{(n-1)}(t)=0$$

因而系统渐近稳定。

- 线性定常系统在零初始条件下，有界输入产生的输出响应也是有界的，则称其为有界输入有界输出稳定系统（**BIBO**稳定系统）。即当：

$$y(0)=\dot{y}(0)=\cdots=y^{(n-1)}(0)=0$$

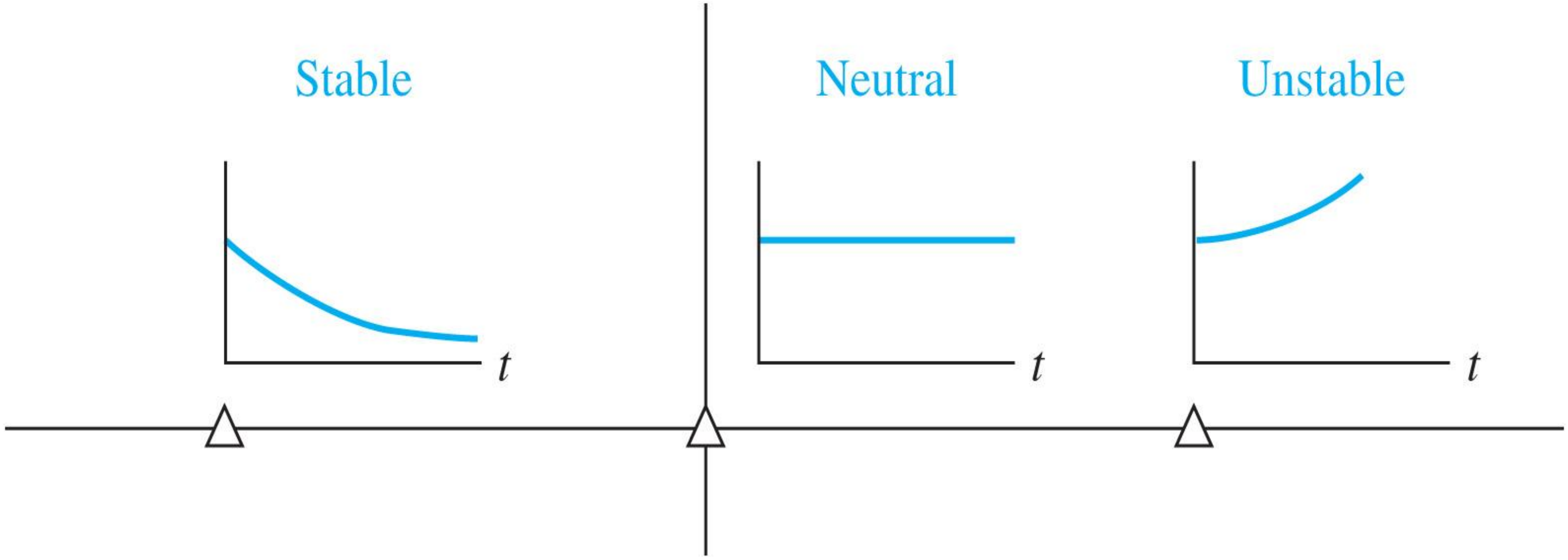
$$\text{如果}\left|r(t)\right|_{0<t<\infty}\le k_1<\infty\text{，则}\left|y(t)\right|_{0<t<\infty}\le k_2<\infty$$

- 线性定常系统**BIBO**稳定的充分必要条件是：系统传递函数全部极点都位于左半***S***平面。
- 外部稳定性：**BIBO**稳定只表明系统对输出而言是稳定的，并不能保证系统内部所有状态都是稳定的。**BIBO**稳定反应了系统外部特性。

- 渐近稳定性反应了系统内在特性，因为

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \dot{y}(t) = \cdots = \lim_{t\to\infty} y^{(n-1)}(t) = 0$$

- 而 $y(t)$，$\dot{y}(t),\cdots$，$y^{(n-1)}(t)$ 表示系统的所有状态，故渐近稳定性表明系统内部所有状态都是稳定的。
- 渐近稳定系统是**BIBO**稳定的，反之不一定成立。



- 不稳定系统的特征方程至少有一个根位于右半*S*平面，系统的输出对任何输入都是不稳定的。
- 如果特征方程有一对共轭根在虚轴上，而其他根均位于左半平面，则系统在有界的输入下，其稳态输出保持振荡；当输入为正弦波，且正弦波的频率等于虚轴上根的幅值时，其输出变成无界的。系统称为临界稳定系统。
- 例如，若闭环系统的特征方程为：

$$\left(s+10\right)\left(s^2+16\right)=0$$

系统为临界稳定，如果系统由频率为ω=4的正弦信号所激励，则其输出变成无界的。