概率论与数理统计

第十四讲

二维随机变量（Ⅱ）

4. 联合(概率)密度函数

二维随机变量可用**分布函数**刻画.

对于离散型随机变量, 有 $F(x,y)=\sum\limits_{x_i\le x}\sum\limits_{y_j\le y}p_{ij}$,

故利用**联合分布律**可更方便地刻画(X, Y).

- **问题** 若 (X, Y)不是离散型随机变量, 如何?

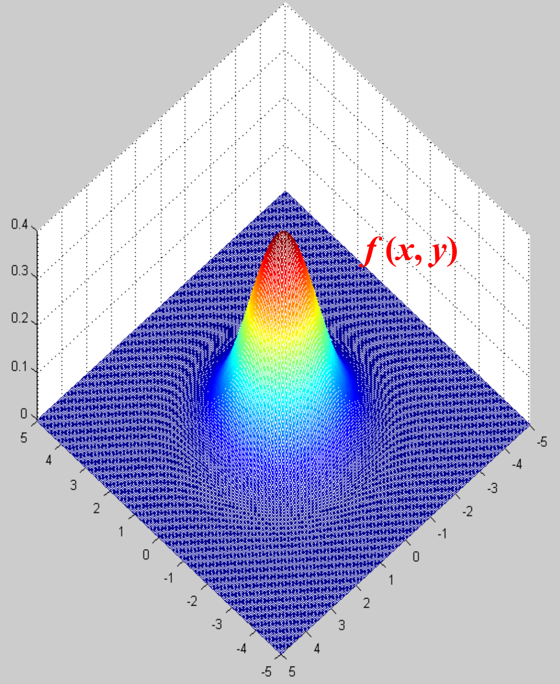
仿照一维, 我们有：

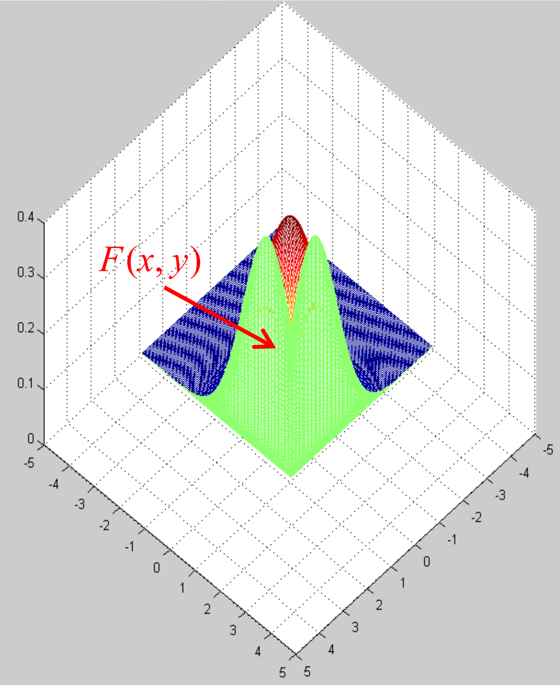
- **定义** 设二维随机变量(X, Y)的分布函数$F(x,y)$ 满足, 存在一个$f(x,y)\geq 0$, 使$\forall (x,y)\in R^2$,有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

则称 (X, Y)为连续型二维随机变量, $f(u,v)$ 称为是 X, Y 的**联合(概率)密度函数**.

联合密度函数的几何意义





显然, 有

1) $f(x,y)\geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = F(+\infty,+\infty)=1$

3) 在 $f(x,y)$ 的连续点处，有 $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$

4) 对于任何R^2上的区域G, 有

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

提示

关于4), 主要注意到, 当G为矩形$(a,b]\times(c,d]$时成立即可.

注 对于连续型随机变量, 孤立点或曲线的概率均为0.

例 设随机变量 (X, Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-\lambda x})(1-e^{-\lambda y}), & x>0, y>0\\ 0, & \text{其余}\end{cases}$$

求 (X, Y) 的密度函数.

分析： 显然, $F(x, y)$是连续的, 且除了直线 $x=0$ 和 $y=0$, $F(x, y)$在R^2的每点都可导，故有

$$f(x,y)\overset{a.e.}{=}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, & x>0, y>0\\ 0, & \text{其余}\end{cases}$$

利用密度函数, 容易计算一些随机事件的概率, 计算时要特别注意积分限.

例　设随机变量 (X, Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} cx^2y, & x^2\le y\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

a) 确定常数c;

b) 计算 $P\{X>Y\}$.

解: a) 由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=c\int_0^1 y\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}x^2\mathrm{d}x$$

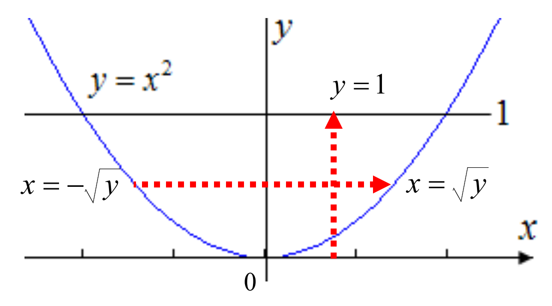
$$=c\int_0^1\frac{2}{3}y^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}y=\frac{4}{21}c$$

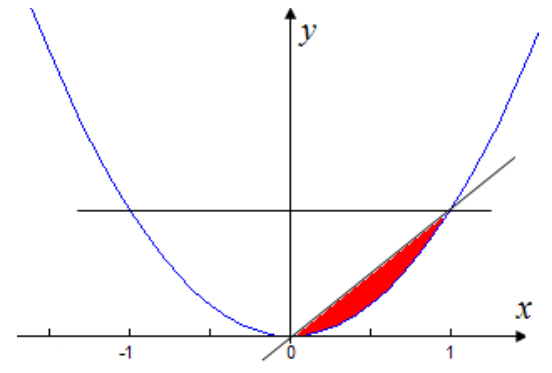
即 $c=\dfrac{21}{4}$

b) $P\{X>Y\}=\iint\limits_{x>y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{21}{4}\int_0^1 y\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}x^2\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{20}$$





注 对于连续型随机变量，如果$(X,\ Y)$取值在某区间G中，即意味着$f(x, y)$在$\bar{G}$上为0.

例 设$(X,\ Y)$在$[0,2]\times[0,2]$中取值，且分布函数在此区域的值如下：

$$F(x, y) = \frac{1}{16}xy(x+y), \quad 0 \le x \le 2, \ 0 \le y \le 2$$

a) 完整写出$F(x, y)$的定义;

b) 求其密度函数;

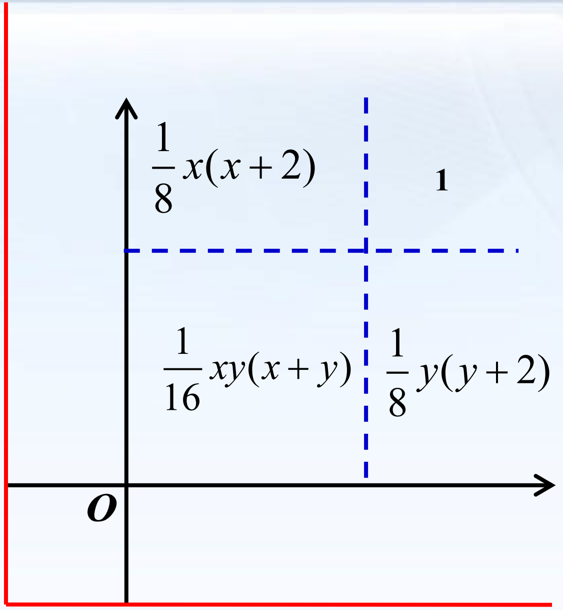
c) 求$P\{X+Y \le 1\}$.

d) 对于$0 \le x \le 2, \ 0 \le y \le 2$, 分别求$P\{X \le x\}$, $P\{Y \le y\}$.

第14讲　二维随机变量（Ⅱ）

解：a) 由分布函数性质, 得到

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & x<0 \text{ 或 } y<0\\ \frac{1}{8}x(x+2) & 0\le x\le 2,\ y>2\\ \frac{1}{8}y(y+2) & 0\le y\le 2,\ x>2\\ \frac{1}{16}xy(x+y) & 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2\\ 1 & x>2 \text{ 且 } y>2\end{cases}$$



b) $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{1}{8}(x+y), & 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

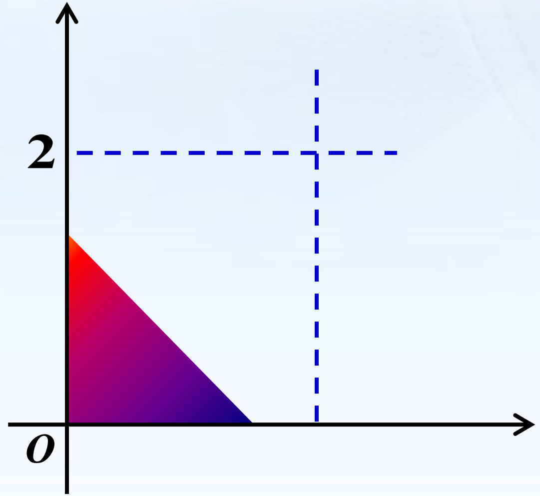
c) $P\{X+Y\le 1\} = \iint\limits_{x+y\le 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$= \iint\limits_{x+y\le 1} \frac{1}{8}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{24}$

d) 对于 $0\le x\le 2,$

$P\{X\le x\} = \lim\limits_{y\to+\infty} P\{X\le x, Y\le y\}$

$= F(x,+\infty) = F(x,2) = \frac{1}{8}x(x+2)$



同理, 对于 $0\le y\le 2,\ P\{Y\le y\} = \frac{1}{8}y(y+2).$

注 今后我们称 $P\{X\le x\},\ P\{Y\le y\}$ 分别为X, Y的边缘分布.

5. 多维随机变量

统计中常用到, 整体考虑随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$, 称$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$为n维随机变量.

同样可定义联合分布函数:

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

二维的随机变量的性质均可推广如此.

特别, 如果$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$连续型的, 其密度函数记为

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.