概率论与数理统计

第十九讲

二维随机变量函数的分布（Ⅱ）

- 有些随机变量函数不是可微函数，不能用前面做变换的方法. 如$\max\{X, Y\}$, $\min\{X, Y\}$等.

1. 极大值、极小值的分布

设 X, Y 独立，分别有分布函数 $F_X(x), F_Y(y)$.

a. 求$\max\{X, Y\}$的分布函数 $F_M(z)$.

$$F_M(z) = P\{\max(X,Y) \le z\} = P\{X \le z, Y \le z\}$$
$$= P\{X \le z\}P\{Y \le z\} = F_X(z)F_Y(z).$$

b. 求$\min\{X, Y\}$的分布函数 $F_m(z)$.

$$F_M(z)=P\{\min(X,Y)\le z\}=1-P\{\min(X,Y)>z\}$$
$$=1-P\{X>z,Y>z\}=1-P\{X>z\}P\{Y>z\}$$
$$=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z)).$$

c. 上述结论容易推广到 n 个随机变量.

即设 X_i 的分布函数分别为$F_i(x_i)$, $i=1,\ldots,n$ ，且相互独立。则$\max\{X_1,\ldots,X_n\}$, $\min\{X_1,\ldots,X_n\}$的分布函数:

$$F_M(z)=\prod_{i=1}^{n}F_i(z), \qquad F_m(z)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-F_i(z)).$$

d. 特别若所有X_i同分布$F(x)$，则

$$F_M(z)=(F(z))^n,\ F_m(z)=1-(1-F(z))^n.$$

e. 若X, Y有密度函数$f_X(x), f_Y(y)$，则

$\max\{X, Y\}, \min\{X, Y\}$的密度函数$f_M(z), f_m(z)$:

$$f_M(z)=F_X(z)f_Y(z)+F_Y(z)f_X(z),$$

$$f_m(z)=(1-F_X(z))f_Y(z)+(1-F_Y(z))f_X(z).$$

f. 特别若X_i独立同分布，且有密度函数$f(x)$, i=1,…,n, 则$\max\{X_1, ..., X_n\}$, $\min\{X_1, ..., X_n\}$的密度函数为:

$$f_M(z) = n[F(z)]^{n-1} f(z),$$

$$f_m(z) = (1 - F(z))^{n-1} f(z).$$

例（均匀分布）设$X_i \sim U(0,\theta), i = 1,...,n$且相互独立.

求$\hat{\theta}_n = \max\{X_1,...,X_n\}$的密度函数.

以后的数理统计中，称$\hat{\theta}_n$是θ的极大似然估计.

解: X_i的密度函数、分布函数分别为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0\le x\le\theta\\ 0, & \text{其它}\end{cases},\quad F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{\theta}, & 0\le x\le\theta\\ 1, & x>\theta\end{cases}.$$

故 $\hat{\theta}_n$ 的密度函数为

$$f_n(x)=n[F(x)]^{n-1}f(x)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0\le x\le\theta\\ 0, & \text{其它}\end{cases}.$$

例（铁链寿命）一条铁链由n个相同的环构成.

若每个环的寿命$X_i \sim EXP(\theta)$. 求铁链的寿命Y的分布.

分析 显然$Y=\min\{X_1,\dots,X_n\}$. 设其密度函数为$f_m(z)$,

则
$$f_m(z)=n(1-F_X(z))^{n-1}f_X(z)$$
$$=\begin{cases}\frac{n}{\theta}e^{-\frac{nz}{\theta}}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

可知$Y \sim EXP(\frac{\theta}{n})$. 以后我们知道$\theta$表示平均寿命.

由此可得什么结论？

2. 离散型和的分布

对于离散型随机变量 X, Y，考虑和$Z=X+Y$.

设 X, Y 独立，其分布律分别为

$$P\{X=i\}=p_i,\quad P\{Y=j\}=q_j,\quad i,j=1,2,\dots$$

则 $$P\{Z=k\}=\sum_{i=1}^{k-1}P\{Y=k-i\mid X=i\}P\{X=i\}$$

$$=\sum_{i=1}^{k-1}P\{X=i\}P\{Y=k-i\},\quad k=2,3,\dots$$

比较连续型卷积公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x.$

例（泊松分布可加性）设X_1, X_2分别服从$P(\lambda_1), P(\lambda_2)$，且相互独立. 求 $Z=X_1+X_2$ 的分布律.

解:

$$P\{Z=k\}=\sum_{i=0}^{k}P\{X_1=i\}\cdot P\{X_2=k-i\}$$

$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^{\,i}}{i!}\cdot\frac{\lambda_2^{\,k-i}}{(k-i)!}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda_1^{\,i}\cdot\lambda_2^{\,k-i}$$

$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}$$

注 λ 的含义是“平均粒子数”，因此可加是自然的.

例（掷双骰子，续）在掷双骰子中，令 X, Y 分别表示一个骰子上的点数，则有

$$P\{X=i\}=P\{Y=j\}=\frac{1}{6},\quad i,j=1,\ldots,6,$$ 且 X, Y 独立.

则两骰子点数之和 Z 的分布律为

$$P\{Z=k\}=\sum_{\max\{k-6,1\}}^{\min\{k-1,6\}} P\{X=i\}P\{Y=k-i\}$$

$$=\frac{\min\{k-1,6\}-\max\{k-6,1\}+1}{36},\quad k=2,\ldots,12$$

这正好是我们所熟知的分布律.

Z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_k	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

第19讲　二维随机变量函数的分布（Ⅱ）

例 $X\sim B(n,p)$, $Y\sim B(1,p)$, 且二者独立. 求$Z=X+Y$的分布律.

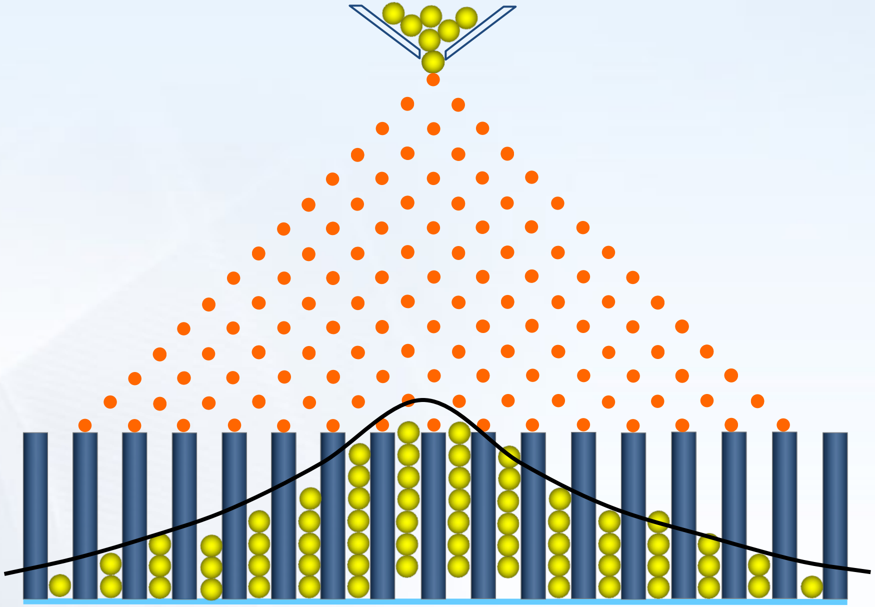
解： $P\{Z=k\}$

$$=\begin{cases} P\{X=0\}P\{Y=0\}, & k=0 \\ P\{X=k\}P\{Y=0\}+P\{X=k-1\}P\{Y=1\}, & k=1,\dots,n \\ P\{X=n\}P\{Y=1\}, & k=n+1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} (1-p)^{n+1}, & k=0 \\ \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k+1}+\binom{n}{k-1}p^k(1-p)^{n-k+1}=\binom{n+1}{k}p^k(1-p)^{n-k+1}, & k=1,\dots,n \\ p^{n+1}, & k=n+1 \end{cases}$$

- 由归纳法即可知，设 $X_i \sim B(1,p)$, 且相互独立. 则 $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$.
- 又若$X_1 \sim B(n_1,p)$, $X_2 \sim B(n_2,p)$, 且两者独立. 则 $X_1 + X_2 \sim B(n_1+n_2,p)$.

高尔顿钉板实验



高尔顿钉板实验被用来说明中心极限定理，它可以归结为如下模型. 设 X_i 独立同分布，$i=1,\ldots,n$.

$$P\{X_i=1\}=P\{X_i=-1\}=\frac{1}{2}.$$

问 $\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的分布律如何？

分析 注意到偶数个X_i相加的和只取偶数值,
奇数个X_i相加的和只取奇数值,

取值的分布律与 $B(n,\frac{1}{2})$ 的分布律类似.

事实上，可以用数学归纳法证明如下分布律表：

	取值	分布律
X_1	-1　1	$\frac{1}{2}$　$\frac{1}{2}$
X_1+X_2	-2　0　2	$\frac{1}{4}$　$\frac{1}{2}$　$\frac{1}{4}$
$X_1+X_2+X_3$	-3　-1　1　3	$\frac{1}{8}$　$\frac{3}{8}$　$\frac{3}{8}$　$\frac{1}{8}$
…	…	…
$X_1+\dots+X_n$	$-n$　$-n+2$　…　n	$\binom{n}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$　$\binom{n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$　…　$\binom{n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

杨辉三角形

分布律有什么特点？——“两头小，中间大”