概率论与数理统计

第五讲
条件概率与独立性

1、条件概率定义

例（抽入场券，续）在抽入场券的问题中，若某人第k个抽，但在此之前已知前k-1个均未抽到入场券，问此时他抽到的概率是否有变化？

分析 设A：“第k个人抽到入场券”

B：“前k-1个人均未抽到入场券”

已经算过 $P(A)=\dfrac{N}{M}$

但此时A发生的概率显然为 $\dfrac{N}{M-k+1}$，即发生了变化

如何解释？

1、条件概率定义

直观分析：此时的概率应与$P(B)$,$P(AB)$均有关，计算之：

$$P(B)=\frac{\binom{M-k+1}{N}}{\binom{M}{N}} \qquad P(AB)=\frac{\binom{M-k}{N-1}}{\binom{M}{N}}$$

而

$$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\binom{M-k}{N-1}}{\binom{M-k+1}{N}}=\frac{N}{M-k+1}$$

！巧合吗？

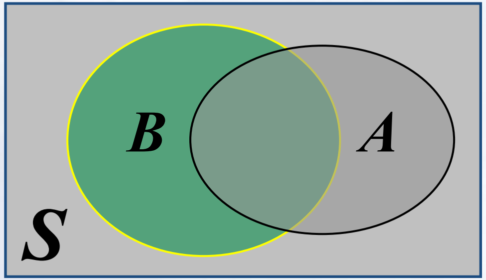
此时A发生的概率已不是原来意义的概率，记为$P(A|B)$.

定义 设A，B为事件，$P(B)>0$，定义

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

称为是B发生条件下A发生的概率（conditional probability of the event A given the event B has occurred）

意义



条件概率空间：

原样本空间的缩减 $S \to B$

条件概率：

原概率的限制 $P(\cdot) \to P(\cdot|B)$

$P(\cdot \mid B)$ 是否是个概率？ $(P(B)>0)$ 即验证：

1° $P(\cdot \mid B) \geq 0$ 显然

2° $P(S \mid B)=1$ 注意到 $SB=B$，用定义即可

3° 若 $A_1, A_2, \ldots$ 互斥，则 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid B)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \mid B).$

注意到 $A_1B, A_2B, \ldots$ 也互斥

故

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid B)=P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i B)/P(B)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i B)/P(B)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \mid B).$$

2、乘法公式

将条件概率公式变形，得到乘法公式：

$$P(AB)=P(A\mid B)P(B)$$

（此式中$P(B)>0$的限制可去掉）

意义 用以计算积事件的概率（通常可避免计算组合数）。

例 （摸球问题，续）在无放回的情况下，求从r只红球b只蓝球的袋中摸出两只红球的概率。

$$P(R_1R_2)=P(R_1)P(R_2\mid R_1)=\frac{r}{r+b}\cdot\frac{r-1}{r+b-1}$$

推广 若 $A_1, A_2, ..., A_n$ 为事件，且 $P(A_1A_2...A_{n-1})>0,$

（用数学归纳法自证）

则 $$P(A_1A_2...A_n)$$
$$=P(A_n|A_1...A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1...A_{n-2})...P(A_2|A_1)P(A_1)$$

例（摸球问题，续二）将摸两个球改为以无放回方式摸 $n(n\le r+b)$ 个球，求前 $k(k\le r)$个位置是红球、后 $n-k$ $(n-k\le b)$ 个位置是蓝球的概率。

$$P(R_1...R_kB_{k+1}...B_n)=P(R_1)P(R_2|R_1)...P(R_k|R_1...R_{k-1})$$
$$P(B_{k+1}|R_1...R_k)...P(B_n|R_1...B_{n-1})$$

$$=\frac{r}{r+b}\frac{r-1}{r+b-1}\cdots\frac{r-k+1}{r+b-k+1}\frac{b}{r+b-k}\cdots\frac{b-n+k+1}{r+b-n+1}$$

第5讲 条件概率与独立性

注：在一些实际问题中，所给出的“概率”有时应理解为条件概率。

例（网球比赛）某网球运动员参加一次赛事，淘汰赛制，须赢5轮方可夺冠，已知他第i轮获胜的概率为 $0.6-\frac{i}{10}$，求他夺冠的概率。

注意：设A_i为“第i轮胜”，第 i 轮获胜概率是指$P(A_i|A_1\ldots A_{i-1})$, i=2,3,4,5.

答：P(夺冠) $= P(A_1A_2A_3A_4A_5)$

$$= P(A_1)P(A_2 \mid A_1)...P(A_5 \mid A_1...A_4)$$

$$= 0.5\times0.4\times0.3\times0.2\times0.1 = 5!\times10^{-5} = 0.0012$$

3、独立性

问题：是否$P(A)$与$P(A|B)$总是不同？

例（孩子性别）设一个家庭生男孩、女孩是等可能的。考察任一两个孩子家庭，分别求“老二是女孩”的概率和在“老大是男孩”的条件下“老二是女孩”的概率。

分析：设A为“老二是女孩”,B为“老大是男孩”

则

$$S = \{(bb),(bg),(gb),(gg)\}$$

$$A = \{(bg),(gg)\} \qquad B = \{(bb),(bg)\}$$

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(A \mid B) = \frac{1}{4} \Big/ \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

说明什么？

上例中条件概率与无条件概率是一样的，说明“老大是男孩”这一事件对“老二是女孩”这一事件的概率没有影响，或者说这两个事件是独立的。

一般地，若$P(A)=P(A|B)$，或等价地

定义 若$P(AB)=P(A)P(B)$，称事件A，B独立(independent).（无须$P(B)>0$）

例（嫌疑人排查）在侦破某团伙作案时，查看相关监控录像，发现两嫌疑人在所有视频中出现的概率依次为0.11与0.12，但同时出现的概率为0.1。问是否有理由认为他们是同伙？

答：有理由这样认为。

设 A为“某甲出现”，B为“某乙出现”。

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{10}{12},\qquad P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{10}{11},$$

而如果甲、乙独立，则

$$P(AB)=P(A)P(B)=0.0132 \qquad \ll 0.1$$

- **定理** 若 A 与 B 独立，则 A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 B，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 皆独立。

证其中一式：

$$
\begin{aligned}
P(A\bar{B}) &= P(A) - P(AB) \\
&= P(A) - P(A)P(B) \\
&= P(A)(1 - P(B)) \\
&= P(A)P(\bar{B})
\end{aligned}
$$

- 实际问题中常从事物的背景判断独立性。
- 物理意义“独立”的事件通常是独立的，反之不一定成立。

例：

a. 掷两颗骰子，考虑A为“一颗点数大于2”，B为“另一颗点数为偶数”

b. 掷一颗骰子，考虑A为“点数大于2”，B为“点数为偶数”

第5讲 条件概率与独立性

- **推广** 事件 A,B,C 独立。
- **定义** 事件 A,B,C 独立，指下式同时成立

$$
\begin{aligned}
P(AB) &= P(A)P(B) \\
P(BC) &= P(B)P(C) \\
P(CA) &= P(C)P(A) \\
P(ABC) &= P(A)P(B)P(C)
\end{aligned}
$$

若只有前三个式子成立，称为两两独立。两两独立并不能决定三个事件独立。

独立的概念同样可以推广到n个事件。

- **定义** 事件 $A_1,\dots,A_n$ 相互独立，指下列 2^n-n-1 个等式均成立

$$\boxed{P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)\quad i<j,\quad i,j=1,\dots,n} \qquad \binom{n}{2}\text{个}$$

$$\boxed{P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k)\quad i<j<k,\quad i,j,k=1,\dots,n} \qquad \binom{n}{3}\text{个}$$

……

$$\boxed{P(A_1\dots A_n)=P(A_1)\dots P(A_n)} \qquad \binom{n}{n}\text{个}$$