概率论与数理统计

第二讲

随机事件

- 对随机现象的研究始于观测，各种观测手段统称为试验。

1. 随机试验

- 随机试验(random experiment)：对随机现象的观测

例 随机试验的例子

E_1：观察一个单位时段里对某网站的点击数

E_2：人的血型有4种：O、A、B、AB，观察一个人的血型情况

例 随机试验的例子

E_3：彩票号码由6位数字组成，观察开奖时的中奖号码

E_4：研究某地一段时间的气温情况，连续观察7天的日最低气温与最高气温

2. 样本和样本空间

- 试验的每一个结果称为一个样本(sample)，记为s
- 所有可能出现的结果的集合称为样本空间(sample space)，记为S

例 写出上例中随机试验对应的样本空间。

答 E_1： $S_1=\{n\mid n=0,1,\ldots\}$ 数

E_2： $S_2=\{\mathrm{O},\ \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{AB}\}$ 属性

E_3： $S_3=\{(i_1,\ldots,i_6)\mid i_j=0,\ldots,9,\ j=1,\ldots,6\}$ 数组

E_4： $S_4=\{[(t_1,T_1),\ldots,(t_1,T_7)]\mid t_i<T_i,i=1,\ldots,7\}$

一系列结果

问题 如何理解一次随机试验？

- **例**（连续掷骰子）考虑如下随机试验：连续掷两个骰子，观察其点数之和，若出现首次7点或8点，则试验结束。写出此随机试验的样本空间。

答

$$S=\{(i_1,...,i_n)\mid i_n=7\text{或}8,\ i_1,...,i_{n-1}\neq 7\text{或}8,\ n=1,2,...\}$$

3. 随机事件

- 实际问题中，通常会关心随机试验一些特定的结果，它们是S的(可测)子集，称为事件(event)，通常用大写字母A, B,…表示。

例 写出下列事件

E_1 所考察时段内，该网站点击次数超过100,000次

E_2 某人的血型至少可为两种不同血型的人输血

E_3 彩票号码的最末两个数字是0，1

E_4 连续7天气温都在15°C到25°C之间

答 $A_1=\{n\in S_1\,|\,n\ge 100,000\}$

$A_2=\{\mathrm{O},\ \mathrm{A},\ \mathrm{B}\}$

$A_3=\{s\in S_3\,|\,i_5=0, i_6=1\}$

$A_4=\{s\in S_4\,|\,15\le t_i\le T_i\le 25, i=1,\dots,7\}$

事件发生：对于E_1,若n=200,000，A_1是否发生？

对于E_2,若s=AB，A_2是否发生？

可见：事件A发生 $\Longleftrightarrow$ $s\in A$

这就建立了事件运算与集合运算的对应关系

4. 事件的运算

设以下大写英文字母均为样本空间S中的事件，则

$A \subset B$

指事件A必然导致事件B发生

$A=B$

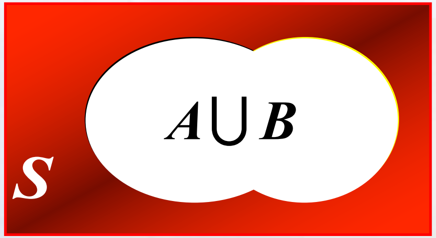
指 $A \subset B$ 且 $B \subset A$

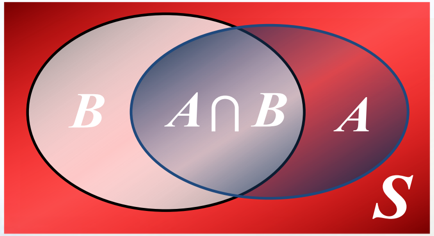
$A \cup B$

称为事件A与B的和事件，表示事件A与B至少有一个发生

$A \cap B$

称为事件A与B的积事件，表示事件A与B同时发生，也常记为AB





4. 事件的运算

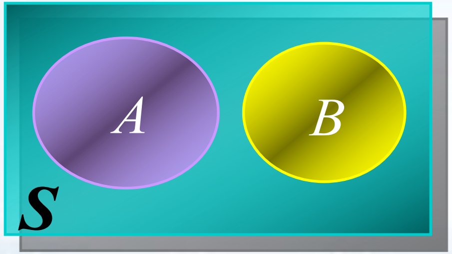
设以下大写英文字母均为样本空间S中的事件，则

$\bar{A}$ 称为A的对立事件，表示事件A不发生

特别 S 称为必然事件，$\varnothing$ 称为不可能事件，

单点集 $\{s\}$ 称为基本事件

若 $AB=\varnothing$, 则称事件A与B互斥



事件的运算定律

交换律 $A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A$

结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

德·摩根（De Morgan）律

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B},\quad \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$$

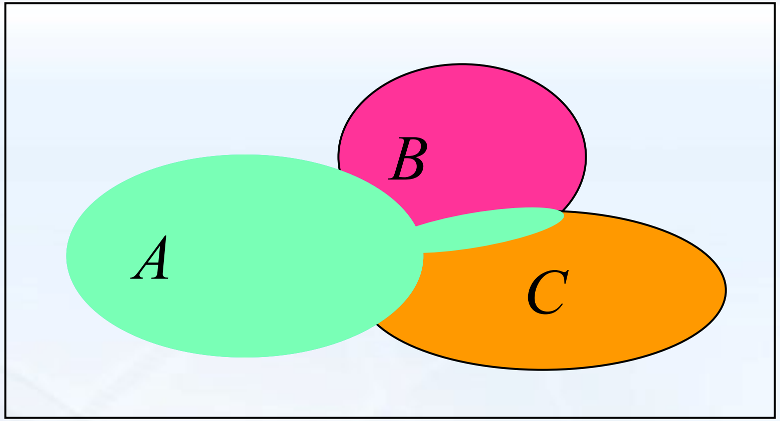
$$\overline{\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha}=\bigcap_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha},\quad \overline{\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha}=\bigcup_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha}$$

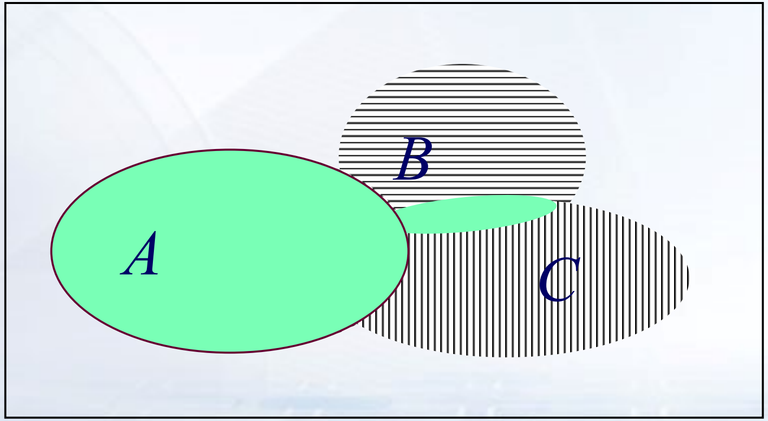
对必然事件的运算法则：

$A \cup S = S$, $A \cap S = A$

对不可能事件的运算法则：

$A \cup \varnothing = A, A \cap \varnothing = \varnothing$.





分配律图示

$$A\cup(BC) = (A\cup B)(A\cup C)$$

De Morgan律的证明

证其中一式。

若 $s\in\bigcap_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha}$，则 $\forall\alpha\in I, s\in\overline{A_\alpha}$，即 $s\notin A_\alpha$.

于是 $s\notin\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$，亦即 $s\in\overline{\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha}$.

这就证明了 $\bigcap_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha}\subset\overline{\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha}$.

同理可证相反的关系。

5. 可列（countable）

- 可列集：
  是指一个无穷集S，其元素可与自然数形成一一对应，因此可表为$S=\{s_1,s_2,\ldots\}$
- 至多可列：
  指可列或有限
- 可以证明：
  可列是“最小的”无穷，即任何一个无穷集合均含有可列子集