概率论与数理统计

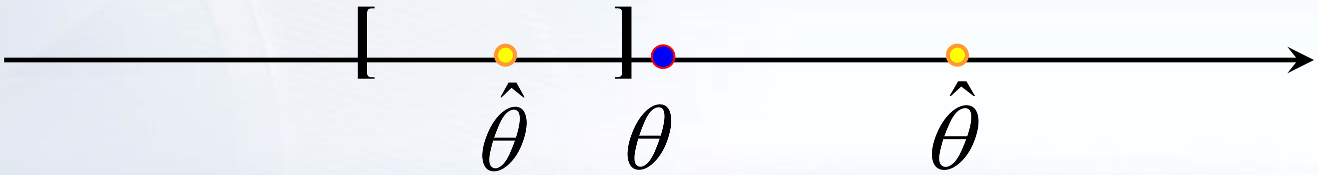
第三十六讲

区间估计(I)

设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是未知参数 θ 的估计量.

随机变量　　　　**常数**

不同样本值 x_1, x_2, …, x_n 算得的θ 的估计值不同.



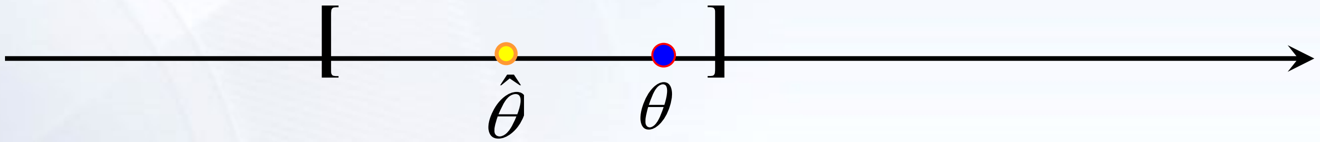
点估计方法的局限

设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是未知参数 θ 的估计量.

1) 用 $\hat{\theta}$ 估计 θ，有多高的精度?

2) 用 $\hat{\theta}$ 估计 θ ，有多高的可信度?

3) 未知参数 θ 落在什么范围内?



希望根据所给的样本确定一个**随机区间**，使其包含参数真值的**概率**达到指定的要求.

区间估计的定义

定义1 设总体 $X \sim F(x;\theta)$， θ是待估计参数，若对给定的 α ($0< \alpha <1$)，存在两个统计量：

$$\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n), \quad \overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

使得 $P\{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}\} = 1 - \alpha, \quad \theta \in \Theta$

则称随机区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$为$\theta$的置信度为$1-\alpha$的置信区间. $\underline{\theta}$, $\overline{\theta}$分别称为置信下限和置信上限，$1-\alpha$ 称为置信度或置信水平.

区间估计的几点说明

1) 置信区间的区间长度 $\bar{\theta}-\underline{\theta}$ 反映了估计的精度. $\bar{\theta}-\underline{\theta}$ 越小，估计精度越高.

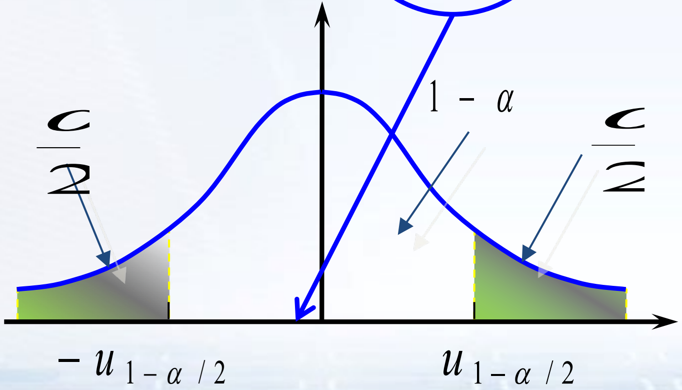
2) α 反映了估计的可信度. α 越小 ,$1-\alpha$ 越大，估计的可信度越高；但通常会导致 $\bar{\theta}-\underline{\theta}$ 增大，从而导致估计的精度降低.

3) α 给定后，置信区间的选取不唯一，通常选取 $\bar{\theta}-\underline{\theta}$ 最小的区间.

例 设 X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 $X \sim N(\mu, 1)$ 的样本，求 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

解 μ 的无偏估计为 $\bar{X}$，且

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{n}\right) \Longrightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{1/\sqrt{n}} \sim N(0,\ 1)$$



例 设 X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 $X \sim N(\mu, 1)$ 的样本，求 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

解 μ 的无偏估计为 $\bar{X}$，且

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{1}{n}) \Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{1/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

由此得到 $P\{-u_{1-\alpha/2} < \dfrac{\bar{X}-\mu}{1/\sqrt{n}} < u_{1-\alpha/2}\} = 1-\alpha$

即 $P\{\bar{X} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} < \mu < \bar{X} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}\} = 1-\alpha$

所以μ的置信度为$1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{1}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{1}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}\right)$$

若取$n=16$,$\alpha=0.05$ ，查表得到$u_{1-\alpha/2}=1.96$

则μ的置信度为 95% 的置信区间为

$$(\bar{X}-0.49,\ \bar{X}+0.49)$$

$(\bar{X}-0.49,\ \bar{X}+0.49)$ —— μ 的置信区间

$\bar{X}-0.49$ —— μ 的置信下限

$\bar{X}+0.49$ —— μ 的置信上限

$1-\alpha$ —— 置信度(置信水平)

若得到一样本值，计算得到 $\bar{x}=1.5$

则可得到一个区间：(1.01, 1.99)

它可能包含也可能不包含μ的真值

置信区间的含义

反复抽取容量为 16 的样本，每次都可以根据样本观测值$x_1, x_2, \cdots, x_n$算得样本均值 $\bar{x}$，得到一个区间

$$(\bar{x}-0.49,\ \bar{x}+0.49)$$

此区间可能包含未知参数μ的真值，也可能没包含.

而包含未知参数μ的区间个数约占95%，不包含未知参数μ的区间个数约占5%.

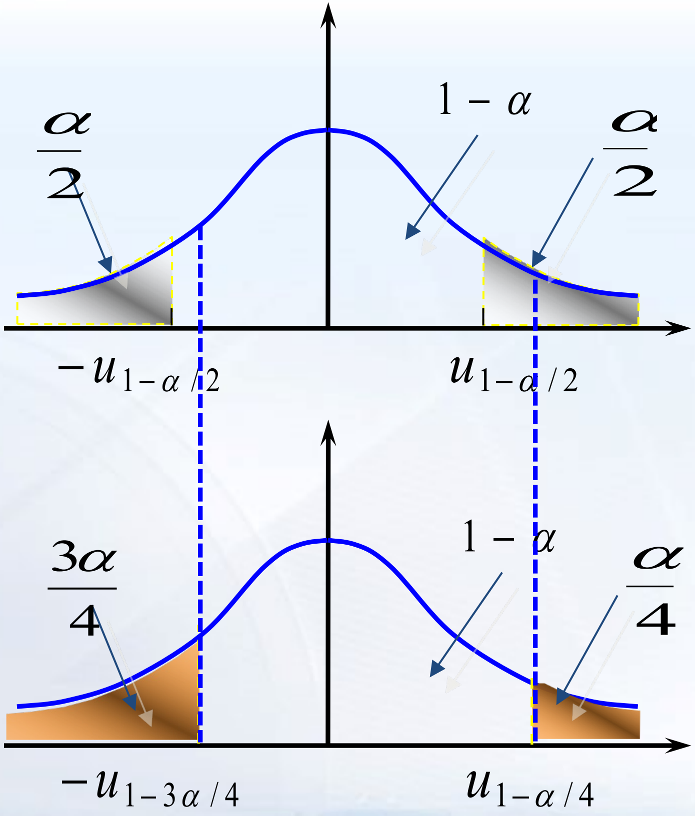
分位点的选取

- **问题** 分位点为什么选取 $u_{1-\alpha/2}$?

当置信区间为 $(\bar{X}-\frac{1}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{1}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2})$ 时，区间长度为：

$$2\frac{1}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$$

此时长度最短，即精度最高.



若取 $\alpha = 0.05$

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}} - (-u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 2\times 1.96$$
$$= 3.92$$

$$u_{1-\frac{\alpha}{4}} - (-u_{1-\frac{3\alpha}{4}}) = 2.24 + 1.78$$
$$= 4.02$$

- **选取原则** 对称原则.

求解置信区间的一般过程

1) 构造样本的一个函数：

$g(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta)$ — 称为枢轴变量

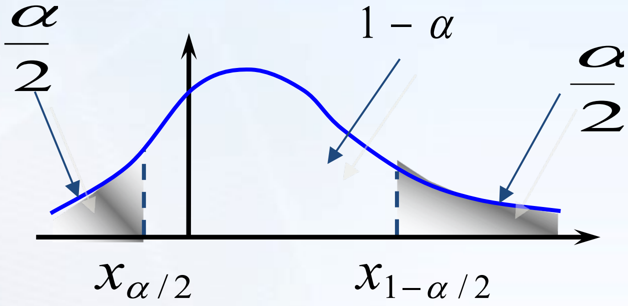
它含有待估参数θ，不含其它未知参数，其分布已知，且分布不依赖于未知参数 (常由θ的点估计出发考虑).

例如 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{1}{n})$

$$\Longrightarrow g(X_1, X_2, \cdots, X_n; \mu) = \frac{\bar{X} - \mu}{1/\sqrt{n}} \sim N(0,\ 1)$$

2) 对给定的置信度$1-\alpha$，确定 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta)$ 的分布的两个分位点：$x_{\alpha/2}$，$x_{1-\alpha/2}$，使得

$$P\{x_{\alpha/2} < g(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < x_{1-\alpha/2}\} = 1-\alpha$$



3) 解 $x_{\alpha/2} < g(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < x_{1-\alpha/2}$ 得置信区间

$$\left(\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n),\ \ \overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\right)$$

例 设 X_1，X_2，…，X_n是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，其中参数σ^2知，μ未知，求 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

思考 若已知 $\sigma^2=25$，$n=16$，且由样本观测值 x_1，x_2，…，x_n计算样本均值 $\bar{x}=1$，得到 μ 的置信区间 $(\bar{x}-2.45, \bar{x}+2.45)$ ，问该置信区间的置信度是多少?