# 概率论与数理统计

## 第四讲

## 等可能概型

## 1.古典概型问题与基本方法

- 将等可能假设用于有限个样本的情况即为古典概型
- **定义** 设 $S=\{s_1,\dots,s_n\}$, $P(\{s_i\})=\dfrac{1}{n}$, $i=1,\dots,n$,
  则称此为古典概型。
- 对于古典概型，事件$A$发生的概率即为其所含基本事件数与$n$之比。

有利场合数

$$P(A)=\frac{k}{n},$$ 其中 $k$ 为 $A$ 中基本事件数

总点数

# 第4讲　等可能概型

- 中学所学概率论知识，基本为这一概型
- **关键**是 $n$ 与 $k$ 的计算
- 主要工具：
  - 排列组合公式
  - 加法原理
  - 乘法原理
- 回顾：$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$　　$\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

**加法原理**

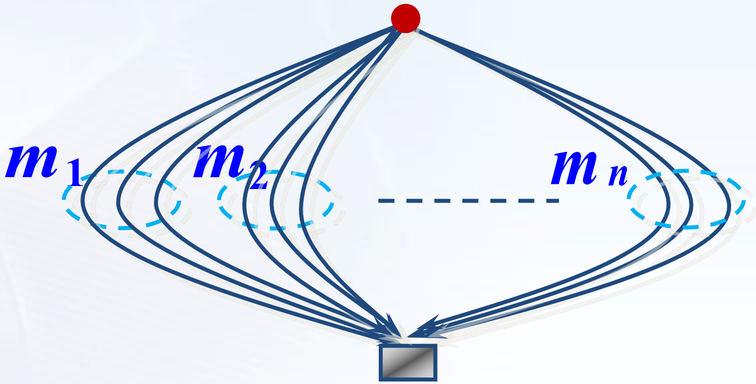
**做一件事共有 $n$ 类方法**

第一类方法有 $m_1$ 种方法

第二类方法有 $m_2$ 种方法

……

第 $n$ 类方法有 $m_n$ 种方法

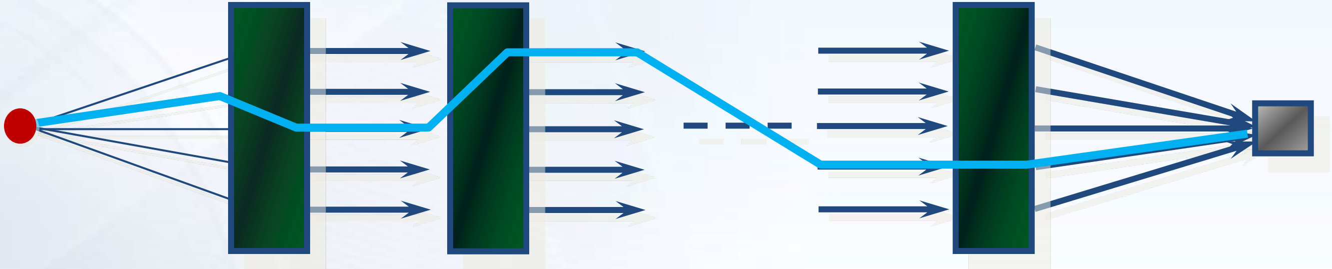



完成这件事的方法总数 $N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$

## 乘法原理

**做一件事共有 $n$ 个步骤**

$$\left\{\begin{array}{l}\text{第一步有 } m_1 \text{ 种方法}\\ \text{第二步有 } m_2 \text{ 种方法}\\ \quad\cdots\cdots\\ \text{第 } n \text{ 步有 } m_n \text{ 种方法}\end{array}\right.$$



完成这件事的方法总数 $N = m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$

# 第4讲　等可能概型

- 下面的例子只是对中学所学习知识理解的加深提高
- **例**（摸球问题）从装有 $r$ 个红球和 $b$ 个蓝球的口袋里依次摸出两个球，求两个均为红球的概率？

**考虑两种情况：**

1° 有放回抽样（sampling with replace）　答：$\dfrac{r^2}{(r+b)^2}$

2° 无放回抽样（sampling without replace）　答：$\dfrac{\binom{r}{2}}{\binom{r+b}{2}}$

**思考**（摸球问题）将取到两个红球推广为取 $n(n\le r+b)$个球，其中包含$k(k\le r)$个红球和 $n-k(n-k\le b)$ 个蓝球的情形。

**考虑两种情况：**

1° 有放回抽样（sampling with replace）　答：$\dfrac{\binom{n}{k} r^k b^{n-k}}{(r+b)^n}$

2° 无放回抽样（sampling without replace）答：$\dfrac{\binom{r}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{r+b}{n}}$

**例**（抽签问题）$M$个学生都想得到某音乐会的入场券，现有入场券$N(N<M)$张，准备通过抽签定入场券的归宿。问每个人抽到入场券的概率与抽签顺序是否有关？

设某人第 $k$ 个抽，**考虑两种情况：**

1° 所有的签都有签号

6　1　2　4　5　3

$k$

答：$\dfrac{N(M-1)!}{M!}=\dfrac{N}{M}$

2° 所有的签无签号

$k$

答：$\dfrac{\binom{M-1}{N-1}}{\binom{M}{N}}=\dfrac{N}{M}$

- 有时计算古典概率问题用概率的基本性质更为方便。
- **例**（配对问题）旅社管理员共管$n$间客房，房门钥匙标牌丢失，随机地将这$n$间客房的钥匙分发给$n$个旅客，问至少有一人能打开房门的概率为多少？

分析：直接计算不容易。

考虑将房门编号。

记 $A_i$ = 第 $i$ 个房门被打开，$i = 1,\ldots, n.$

$A$ = 至少有一人能打开.

则利用加法公式

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n)$$

剩下只要计算每一项概率。

显然

$$P(A_i)=\frac{1}{n},\quad P(A_iA_j)=\frac{1}{n(n-1)},\quad \dots, P(A_1\dots A_n)=\frac{1}{n!}$$

故 $P(A)=\binom{n}{1}\frac{1}{n}-\binom{n}{2}\frac{1}{n(n-1)}+\dots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n}\frac{1}{n!}$

$$=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

若 $n\to\infty, P(A)\to ?$ 答：$1-e^{-1}$

解此题的关键在于正确地**设事件**。

## 2. 多项式系数及应用

- 排列组合数 $\binom{n}{k}, k=0,1,\ldots,n$ 可以看成二项式 $(x+y)^n$ 展开时各项的系数
- 如果考虑多项式 $(x_1+\ldots+x_m)^n$ 的展开各项系数是什么样的？
- 答：$x_1^{n_1}\ldots x_m^{n_m}$ 项的系数是 $\binom{n}{n_1\ \ldots\ n_m}=\dfrac{n!}{n_1!\ldots n_m!}$

  其中 $n_1+\ldots+n_m=n$ .

  特别 $m=2$，对应的就是二项式系数

- 多项式系数对应的组合数意义：$n$个事物可取$m$个状态，取每个状态的事物数依次为$n_1, \ldots, n_m$，所有的取法数。
- 对$m$用归纳法，容易证明组合数的意义。

提示：若将状态$1, \ldots, m-1$　视为一种状态，$m$视为另一种状态，则

$$\binom{n}{n_1 \ldots n_{m-1}, n_m} = \frac{n!}{\left(\sum_{i=1}^{m-1} n_i\right)!\left(n - \sum_{i=1}^{m-1} n_i\right)!}\binom{\sum_{i=1}^{m-1} n_i}{n_1, \ldots, n_{m-1}}$$

**例** 将一副扑克（除掉大小王）52张牌均分给四个玩家，问刚好每人拿到一手同花色牌的概率是多少？

提示：事物数$n$=52，状态数$m$=4，

总点数 $\binom{53}{13,13,13,13}$　　有利场合数 $4!$

$P(A)$ =8.44*10$^{-30}$

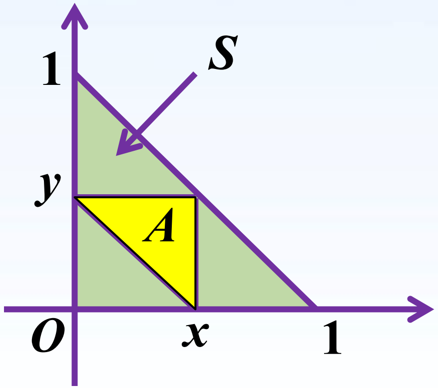
## 3. 几何概型

- 将等可能的原理进一步拓广，即是上一讲提到过的几何概型。

$$P(A)=\frac{A\text{ 的测度}}{S\text{ 的测度}}$$

- **例**（三角形概率）将一根单位长的木棒随机折成三段，求刚好能构成三角形的概率。
- 问：样本点是什么？$S$是什么？
- 提示：应满足

$$A:\begin{cases} x+y>1-(x+y) \\ x+1-(x+y)>y \\ y+1-(x+y)>x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y>\dfrac{1}{2} \\ y<\dfrac{1}{2} \\ x<\dfrac{1}{2} \end{cases}$$




$$P(A)=\frac{1}{4}$$