概率论与数理统计

第四十一讲

单正态总体参数的假设检验

第41讲单正态总体参数的假设检验

单正态总体的假设检验问题

均值检验：

1）方差已知：单边和双边

2）方差未知：单边和双边

方差检验：

1）均值已知：单边和双边

2）均值未知：单边和双边

第41讲单正态总体参数的假设检验

- **回顾** 方差已知时均值的检验，统计量为

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,\ 1)$$

U检验

1） $H_0: \mu = \mu_0$， $H_1: \mu \neq \mu_0$，拒绝域为 $\left|\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq u_{1-\alpha/2}$

2） $H_0: \mu \leq \mu_0$， $H_1: \mu > \mu_0$，拒绝域为 $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq u_{1-\alpha}$

3） $H_0: \mu \geq \mu_0$， $H_1: \mu < \mu_0$，拒绝域为 $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq u_{\alpha}$

- **问题** 若方差未知，上述检验该作何修改？

问题 若方差未知，上述检验该作何修改？

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \longrightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \longrightarrow \frac{\bar{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

正态分布分位数 $\longrightarrow$ t 分布分位数

第41讲单正态总体参数的假设检验

归纳 方差未知时的均值的检验方法

采取的统计量为 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

1）$H_0: \mu = \mu_0$，$H_1: \mu \neq \mu_0$ ，拒绝域为 $\left|\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| \geq t_{1-\alpha/2}(n-1)$

2）$H_0: \mu \leq \mu_0$，$H_1: \mu > \mu_0$ ，拒绝域为 $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \geq t_{1-\alpha}(n-1)$

3）$H_0: \mu \geq \mu_0$，$H_1: \mu < \mu_0$ ，拒绝域为 $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha}(n-1)$

上述检验称为 T 检验

问题 正态分布中方差的检验

背景：对某些研究指标，关心其波动程度

例 根据要求，某零件内径方差不得超过0.50。已知内径服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，现从中随机抽检25件，测得样本方差 $S^2=0.58$，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，问产品方差是否明显增大？(单位: mm)

分析

$S^2=0.58>0.5$

方差增大？随机误差引起？

第41讲单正态总体参数的假设检验

假设 $H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2 = 0.50$； $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 = 0.50$

- **分析** $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ S^2 在 σ^2 附近波动

$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ 越小对 H_0越有利

拒绝H_0所对应的事件的基本形式为：

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge C$$

- **问题** 如何确定c？ $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ 的分布未知？

第41讲单正态总体参数的假设检验

回顾：均值单边检验中临界值的取法

正态总体均值单边检验 $H_0: \mu \le \mu_0$，$H_1: \mu > \mu_0$

$\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$ 分布未知，用 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ 来考虑

类似地，考虑 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 的分布：$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

拒绝域 $\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge C\}$ $=\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\dfrac{\sigma^2}{\sigma_0^2} \ge C\}$

$=\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \ge C\dfrac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\}$

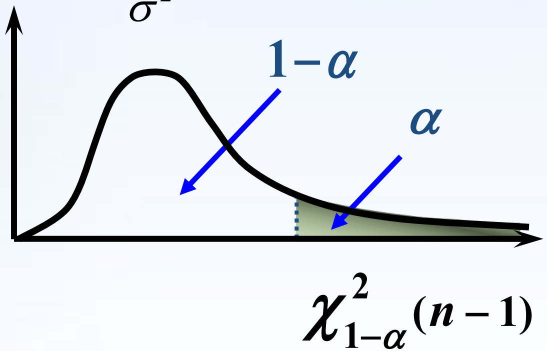
第41讲单正态总体参数的假设检验

则当 H_0成立时，其I类风险为

$$P\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge C \Big| \sigma \le \sigma_0\} = P\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \ge C\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \Big| \sigma \le \sigma_0\}$$

$$\le P\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \ge C\} = \alpha$$

故可令 $C = \chi_{1-\alpha}^{\ 2}(n-1)$



拒绝域为 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge \chi_{1-\alpha}^{\ 2}(n-1)$，此时I类风险：$\le \alpha$

计算检验统计量

拒绝域为 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{1-\alpha}{}^2(n-1)$

由数据计算得：$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{24\times 0.58}{0.5} = 27.84$

查表得 $\chi_{1-\alpha}{}^2(n-1) = \chi_{0.95}{}^2(24) = 36.415$，接受 H_0.

其他两种情况的拒绝域？

其他两种情况的拒绝域？

假设 $H_0:\sigma^2 \geq \sigma_0{}^2$ ； $H_1:\sigma^2 < \sigma_0{}^2$

检验统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ 拒绝域 $\chi^2 \leq \chi_\alpha{}^2(n\text{-}1)$

I类风险： $\leq \alpha$

假设 $H_0:\sigma^2 = \sigma_0{}^2$ ； $H_1:\sigma^2 \neq \sigma_0{}^2$

检验统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ 拒绝域 $\chi^2 \leq \chi_{\alpha/2}{}^2(n\text{-}1)$

I类风险： $=\alpha$ 或 $\chi^2 \geq \chi_{1-\alpha/2}{}^2(n\text{-}1)$

第41讲单正态总体参数的假设检验

- **问题** 若均值已知，上述检验是否仍可用？

显然，若均值已知，上述推导仍然成立，故可用

- **分析** 是否会带来损失？ 损失II类风险！

若均值已知，则 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$

$H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2$;$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$, 拒绝域 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \ge \chi_{1-\alpha}^2(n)$

第41讲单正态总体参数的假设检验

均值已知时对方差的检验

统计量：$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$ ，对应的 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$

1）$\mathrm{H}_0:\sigma^2 \le \sigma_0{}^2$;$\mathrm{H}_1:\sigma^2 > \sigma_0{}^2$ ，拒绝域 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \ge \chi_{1-\alpha}{}^2(n)$

2）$\mathrm{H}_0:\sigma^2 \ge \sigma_0{}^2$;$\mathrm{H}_1:\sigma^2 < \sigma_0{}^2$ ，拒绝域 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \le \chi_{\alpha}{}^2(n)$

3）$\mathrm{H}_0:\sigma^2 = \sigma_0{}^2$; $\mathrm{H}_1:\sigma^2 \ne \sigma_0{}^2$ ，

拒绝域 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \le \chi_{\alpha/2}{}^2(n)$ 或 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \ge \chi_{1-\alpha/2}{}^2(n)$

第41讲单正态总体参数的假设检验

总结：正态总体均值和方差参数的假设检验

表1 正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中参数 μ 的假设检验方法

假设	统计量	拒绝域
$H_0:\mu\le\mu_0$, $H_1:\mu>\mu_0$ $H_0:\mu\ge\mu_0$, $H_1:\mu<\mu_0$ $H_0:\mu=\mu_0$, $H_1:\mu\ne\mu_0$ （方差已知）	$U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$U\ge u_{1-\alpha}$ $U\le u_\alpha$ $\lvert U\rvert\ge u_{1-\alpha/2}$
$H_0:\mu\le\mu_0$, $H_1:\mu>\mu_0$ $H_0:\mu\ge\mu_0$, $H_1:\mu<\mu_0$ $H_0:\mu=\mu_0$, $H_1:\mu\ne\mu_0$ (方差未知)	$T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$T\ge t_{1-\alpha}(n-1)$ $T\le t_\alpha(n-1)$ $\lvert T\rvert\ge t_{1-\alpha/2}(n-1)$

第41讲单正态总体参数的假设检验

表2 正态总体$N(\mu,\sigma^2)$中参数σ^2的假设检验

假设	统计量	拒绝域
$H_0:\sigma^2\le\sigma_0^2$;$H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$ $H_0:\sigma^2\ge\sigma_0^2$;$H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$ $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$; $H_1:\sigma^2\ne\sigma_0^2$ （均值已知）	$\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2\ge\chi_{1-\alpha}^2(n)$ $\chi^2\le\chi_{\alpha}^2(n)$ $\chi^2\ge\chi_{1-\alpha/2}^2(n)$ 或 $\chi^2\le\chi_{\alpha/2}^2(n)$
$H_0:\sigma^2\le\sigma_0^2$;$H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$ $H_0:\sigma^2\ge\sigma_0^2$;$H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$ $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$; $H_1:\sigma^2\ne\sigma_0^2$ (均值未知)	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2\ge\chi_{1-\alpha}^2(n\text{-}1)$ $\chi^2\le\chi_{\alpha}^2(n\text{-}1)$ $\chi^2\ge\chi_{1-\alpha/2}^2(n\text{-}1)$ 或 $\chi^2\le\chi_{\alpha/2}^2(n\text{-}1)$

谢 谢！