概率论与数理统计

第三十二讲

矩估计

统计推断的基本问题

- 参数估计
  - 点估计
  - 区间估计
- 假设检验
- 线性回归
- 方差分析

什么是参数估计

参数通常是刻画总体某些概率特征的数量.

例如正态分布 $N(\mu，\sigma^2)$ 中的参数 μ 就是该分布的均值，参数 σ^2 是该分布的方差.

当该参数未知时，从总体中抽取一个样本，用某种方法对该未知参数进行估计，这就是参数估计.

例如，假设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，若参数 μ 与 σ^2 未知.

先从该总体中抽样得到样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$，然后构造样本函数，求出未知参数 μ 与 σ^2 的估计值或取值范围，这就是参数估计.

点估计　**区间估计**

假设总体 $X \sim F(x;\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_m)$，其中分布函数$F$的表达式已知，但参数 $\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_m$ 未知.

若记 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_m)$，则总体分布可记为：

$$X \sim F(x;\theta)$$

参数θ的取值范围称为**参数空间**，记为Θ.

例如 $X \sim B(1, p)$，p为未知参数，则参数空间为：

$$\Theta = \{ p \mid 0 < p < 1 \}.$$

又如 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，μ，σ^2为未知参数，则参数空间为：

$$\Theta = \{ (\mu, \sigma^2) \mid -\infty < \mu < \infty, \ \sigma^2 > 0 \}$$

点估计的思想

X_1，X_2，…，X_n是来自总体 $X\sim F(x;\theta_1,\ldots,\theta_m)$ 的一个样本，$\theta_1,\ldots,\theta_m$是未知参数.

构造 m 个统计量：

随机变量
$$\begin{cases}\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)\\ \hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)\\ \vdots\\ \hat{\theta}_m(X_1,X_2,\cdots,X_n)\end{cases}$$

当把样本观测值 x_1，x_2，… ，x_n 代入上统计量，就得到 m 个数值：

$$\textbf{数值}\begin{cases}\hat{\theta}_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \hat{\theta}_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \qquad\vdots\\ \hat{\theta}_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{cases}$$

称 $\hat{\theta}_k(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 θ_k 的估计量（$k=1,2,\ldots,m$）；

称 $\hat{\theta}_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 θ_k 的估计值（$k=1,2,\ldots,m$）.

问题 1) 如何构造统计量?

2) 如何评价统计量?

常用的点估计方法

矩估计法

极大似然估计法

最小二乘估计法

贝叶斯方法

矩估计的思想

假设总体 $X \sim F(x;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)$，参数 $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m$ 未知. 且总体的 m 阶矩存在：

$$\mu_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)=E(X^k)\quad (k=1,2,\cdots,m)$$

设 X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 X 的一个样本，则由辛钦大数定律，有：

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k \xrightarrow{P} \mu_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m),\quad n\to\infty.$$

因此当 n 较大时有:

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \approx \mu_k(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m). \ (k = 1, 2, \cdots, m)$$

令

$$\begin{cases} \mu_1(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) = A_1 \\ \mu_2(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) = A_2 \\ \qquad \vdots \\ \mu_m(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) = A_m \end{cases}$$

用样本矩k阶矩
作为
总体矩k阶矩
的估计量

其解 $\hat{\theta}_k(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 称为 θ_k 的**矩估计量**

$(k = 1, 2, \ldots, m)$.

例 设X_1，X_2，… ，X_n是来自总体 $X \sim P(\lambda)$ ($\lambda > 0$) 的一个样本，求未知参数 λ 的矩估计量.

解 因为总体 $X \sim P(\lambda)$，所以有

$$E(X) = \lambda$$

由矩估计原理，用样本一阶矩，即样本均值 $\bar{X}$ 代替总体均值 $E(X)$，得到

$$\bar{X} = \lambda \Rightarrow \hat{\lambda} = \bar{X}$$

命题 不论总体 X 服从什么分布，若其期望 μ 和方差 σ^2 的存在，则 μ 和 σ^2 的矩估计量分别为：

$$\hat{\mu}=\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\triangleq\tilde{S}^2$$

例 设 X_1，X_2，… ，X_n 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，求未知参数 μ，σ^2 的矩估计量.

解 因为正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的期望是 μ，方差是 σ^2

所以由上命题得到 μ，σ^2 的矩估计量分别为：

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \triangleq \tilde{S}^2$$

例 设X_1，X_2，…，X_n是来自总体 $X \sim B(m, p)$ 的一个样本，求未知参数 p 的矩估计量.

解 因为总体 $X \sim B(m, p)$的一阶矩：

$$E(X) = mp$$

令

$$mp = \overline{X}$$

求得 p 的矩估计量： $\hat{p} = \frac{1}{m}\overline{X}$

问题 若 m，p 都未知，如何求 m，p 的矩估计?

例 设X_1，X_2，…，X_n是来自总体$X \sim U(a, b)$的一个样本，求未知参数a，b的矩估计量.

$$\hat{a} = \bar{X} - \sqrt{3}\tilde{S},\ \hat{b} = \bar{X} + \sqrt{3}\tilde{S}$$

注 随机产生 $U(0,\ 1)$的随机数40个：

0.4387,	0.3816,	0.7655,	0.7952,	0.1869,	0.4898,	0.4456,	0.6463,	0.7094,	0.7547,
0.2760,	0.6797,	0.6551,	0.1626,	0.1190,	0.4984,	0.9597,	0.3404,	,0.5853,	0.2238,
0.7513,	0.2551,	0.5060,	0.6991,	0.8909,	0.9593,	0.5472,	0.1386,	0.1493,	0.2575
0.8407,	0.2543,	0.8143,	0.2435,	0.9293,	0.3500,	0.1966,	0.2511,	0.6160,	0.4733

算得：$\bar{x} = 0.5059275,\ \tilde{s} = 0.2573$

计算得到 a，b 的矩估计值：

$$\hat{a} = \bar{x} - \sqrt{3}\tilde{s} = 0.0602,\ \hat{b} = \bar{x} + \sqrt{3}\tilde{s} = 0.9516$$

矩估计法小结

1) 原理直观；

2) 只用到总体矩，方法简单，若总体矩不存在，则无法使用矩估计法；

3) 矩估计基于大数定律，所以通常在大样本情况下，才有较好的效果.

例 设 X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 X 的一个样本，总体 X 服从参数为 θ 的Cauchy分布，其密度函数为：

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-\theta)^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

则 θ 的矩估计不存在.