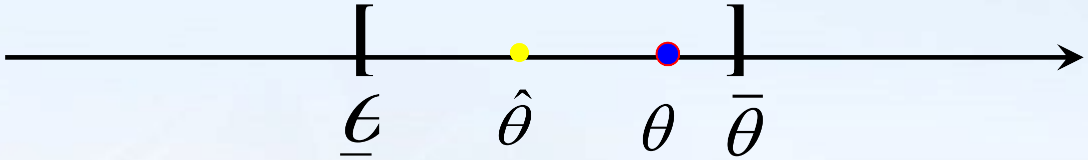
概率论与数理统计

第三十八讲

单侧置信区间

回顾



$$P\{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}\} = 1 - \alpha, \quad \theta \in \Theta$$

称随机区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$为$\theta$的置信度为$1-\alpha$的置信区间.

单侧置信区间的定义

定义1 设总体 $X \sim F(x;\theta)$，θ 是待估计参数，若对给定的 α ($0< \alpha <1$)，存在一个统计量：

$$\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n) \ (\text{或 } \overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n))$$

使得 $P\{\underline{\theta} < \theta\} = 1-\alpha$ (或 $P\{\theta < \overline{\theta}\} = 1-\alpha$)

则称随机区间 $(\underline{\theta}, +\infty)$ (或 $(-\infty, \overline{\theta})$)

为 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的**单侧置信区间**.

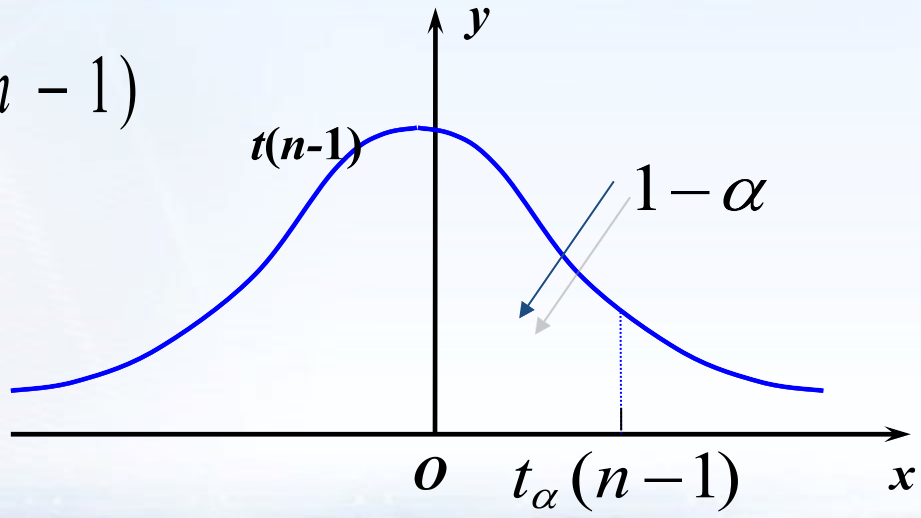
$\underline{\theta}$ --**单侧置信下限**　　$\overline{\theta}$ --**单侧置信上限**

第38讲 单侧置信区间

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，σ^2 未知，求 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限.

μ 的MLE是 $\bar{X}$， 选取枢轴变量

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$



第38讲 单侧置信区间

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，σ^2 未知，求 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限.

μ 的MLE是 $\bar{X}$，选取枢轴变量

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

即有 $P\{\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{1-\alpha}(n-1)\} = 1-\alpha$

由此得到 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限为

$$\bar{X} - t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$$

双侧置信区间与单侧置信区间的联系

双侧置信区间	单侧置信区间
$\left(\bar{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$	$\left(\bar{X}-t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ +\infty\right)$ $\left(-\infty,\ \bar{X}+t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$
$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)},\ +\infty\right)$ $\left(-\infty,\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}\right)$

例 某单位需购置一台高精度天平，在选购天平时，将一重量为 μ (μ未知)克的物体在一台天平上独立重复称重10次，其结果为

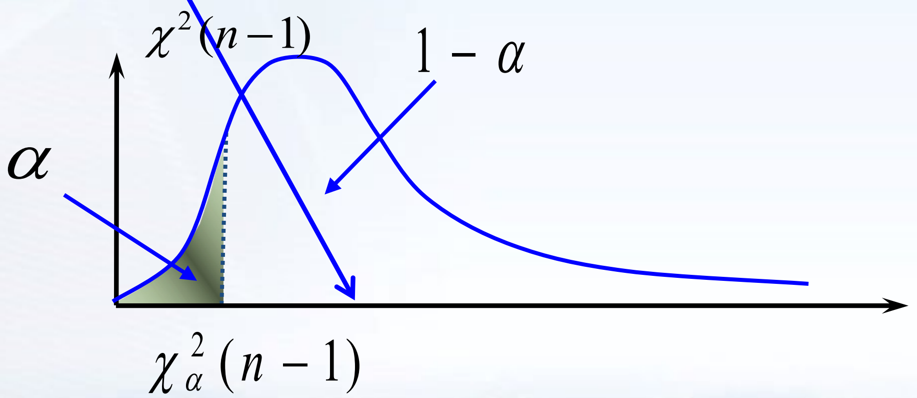
100.14 ，100.10 ，100.08 ，100.06 ，100.12

100.11 ，100.12 ，100.00 ，100.09 ，100.10

假设天平的称重结果 $X \sim N(\mu\ ,\ \sigma^2)$. 试求 σ^2 的置信度为 95% 的单侧置信上限.

解 σ^2 的MLE是 $\tilde{S}^2$,选取枢轴变量

$$\frac{n\tilde{S}^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$



第38讲 单侧置信区间

解 σ^2 的MLE是 $\tilde{S}^2$ ，选取枢轴变量

$$\frac{n\tilde{S}^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

即有 $P\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>\chi^2_{\alpha}(n-1)\}=1-\alpha$

解 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>\chi^2_{\alpha}(n-1)$

得 σ^2 的置信度为$1-\alpha$ 的单侧置信上限为 $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}$

例 某单位需购置一台高精度天平，在选购天平时，将一重量为 μ (μ未知)克的物体在一台天平上独立重复称重10次，其结果为

100.14 ，100.10 ，100.08 ，100.06 ，100.12

100.11 ，100.12 ，100.00 ，100.09 ，100.10

假设天平的称重结果 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 试求 σ^2 的置信度为 95% 的单侧置信上限.

第38讲 单侧置信区间

由题目所给样本数据算得

$$s^2 = 1.55 \times 10^{-3}, \quad (n-1)s^2 = 1.395 \times 10^{-2}$$

由 χ^2 分布表，得到

$$\chi^2_{0.05}(9) = 3.325$$

所以σ^2 的置信度为 95% 的单侧置信上限为

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_\alpha(n-1)} = \frac{1.395 \times 10^{-2}}{3.325} = 4.195 \times 10^{-3}$$

大样本下非正态总体参数的区间估计

例 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，且总体的均值 $\mu = E(X)$，方差 $\sigma^2 = D(X)$ 均存在，且未知. 求 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

解 由中心极限定理知，当n充分大时，

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{近似}{\sim} N(0, 1)$$

当σ^2未知时，有 $$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \overset{近似}{\sim} t(n-1)$$

从而得到 μ 的置信度近似为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\bar{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

例 在某次选举前的一次民意测验中，随机地挑选了400名选民进行民意测验，结果有240人支持甲候选人. 求在所有选民中，甲候选人支持率的置信度为 95% 的置信区间.

解 在所有选民中任选一名选民，令随机变量 X 为

$$X=\begin{cases}1 & \text{若该选民支持甲候选人}\\ 0 & \text{若该选民不支持甲候选人}\end{cases}$$

则有 $X\sim B(1,p)$，且 $E(X)=p$，其中 p 即为甲候选人的支持率.

由前结果知，$E(X)=p$ 的置信度近似为95%的置信区间是：

$$\left(\bar{X}-t_{0.975}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+t_{0.975}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

第38讲 单侧置信区间

由题目所给数据，得到

$$\bar{X}=\frac{240}{400}=0.6$$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i-n\bar{X}^2\right)=\frac{n}{n-1}\bar{X}(1-\bar{X})=0.2406$$

因 $t_{0.975}(399)\approx u_{0.975}$ 查正态分布表，得 $t_{0.975}(399)\approx 1.96$

综上，所求置信区间为：$(0.576,\ 0.624)$

例 从某工厂生产的一大批产品中随机抽检了100件，发现有4件 次品，求该工厂次品率 p 的置信度为 95% 的置信区间.

解 方法同上例题，得到次品率 p 的置信度近似为 95% 的置信区间为

$$\left(\bar{X}-t_{0.975}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+t_{0.975}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)=(\ 0.016\ ,\ 0.098\ )$$

第38讲 单侧置信区间

问题

某公司从该厂定购一批该元件，合同中约定产品次品率不能超过 5%，否则定货方有权拒收. 问根据抽检结果，定货方是否应当接收该批产品?

分析

由于置信上限 $9.8\% > 5\%$，故定货方有权拒收产品

若考虑置信下限 $1.6\% < 5\%$，故定货方应接收产品

模拟

取 p =5.5%，每次产生100个$B(1, p)$随机数，统计其中1的个数. 重复10次，得到结果如下：

6, 7, 2, 4, 7, 3, 5, 8, 5, 3

取 p =4%，重复上面实验，得到结果如下：

3, 8, 5, 1, 6, 0, 3, 1, 2, 4