概率论与数理统计

第二十四讲

方差的定义与计算

第24讲 方差的定义与计算

例 甲、乙两射手击中环数分别为X、Y, 其分布律为

X	7	8	9	10
p_X	0.17	0.28	0.45	0.10

Y	7	8	9	10
p_Y	0.32	0.28	0.22	0.18

问怎样评估两人的射击水平？

分析 甲、乙两射手击中环数的数学期望分别为

$$E(X)=\sum_{x=7}^{10} x\cdot p_x = 8.48,\quad E(Y)=\sum_{y=7}^{10} y\cdot p_y = 8.26$$

所以, 从平均水平来说甲的射击水平略高.

- **问题** 哪位射手的稳定性好？
- **问题** 怎样用数字特征描述稳定性？

第24讲 方差的定义与计算

例 甲、乙两种品牌的手表其走时误差(秒)分别为X、Y，其分布律分别为

X	-1	0	1
p_X	0.1	0.8	0.1

Y	-2	-1	0	1	2
P_Y	0.2	0.1	0.4	0.1	0.2

问怎样评估两种手表的质量？

分析 易知

$$E(X)=0,\ E(Y)=0.$$

- **问题** 能认为两种手表质量一样吗？

  否！ 甲品牌手表的质量较好

- **问题** 怎样用数字特征描述离散性？

第24讲 方差的定义与计算

设 X 为随机变量，数学期望为 $E(X)$

考虑偏差 $\boxed{X-E(X)}$ 正负偏差会抵消

考虑绝对偏差 $\boxed{|X-E(X)|}$ 数学处理不方便

考虑平方偏差 $\boxed{(X-E(X))^2}$ 随机变量非数字特征

考虑平均平方偏差

$\boxed{E[(X-E(X))^2]}$ 称为方差

第24讲 方差的定义与计算

定义 设随机变量X的数学期望存在，若

$$D(X) \triangleq D[(X-E(X))^2]$$

存在，则称$E[(X-E(X))^2]$为 X的**方差**，记为$D(X)$.

称$\sqrt{D(X)}$ 为 X的**标准差**或**均方差**.

方差的计算

1. 设 $g(x)=(x-E(X))^2$，则

$$D(X)=D(g(X))=D[(X-E(X))^2].$$

2. 对于离散型随机变量

$$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-E(X))^2\cdot p_k$$

3. 对于连续型随机变量

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))^2\cdot f(x)\mathrm{d}x$$

4. 重要计算公式

$$\boxed{D(X)=E(X^2)-(E(X))^2}$$

第24讲 方差的定义与计算

例 甲、乙两射手击中环数分别为X、Y，其分布律为

X	7	8	9	10
p_X	0.17	0.28	0.45	0.10

Y	7	8	9	10
p_Y	0.32	0.28	0.22	0.18

计算$D(X), D(Y)$.

解 前例已算得 $E(X)=8.48$, $E(Y)=8.26$，所以

$$D(X)=\sum_{x=7}^{10}(x-8.48)^2\cdot p_x=0.7896$$

$$D(Y)=\sum_{y=7}^{10}(y-8.26)^2\cdot p_y=1.1924$$

可见甲的平均水平比较高，且稳定性更好.

例 设X服从参数为$\lambda(\lambda>0)$的泊松分布，即$X\sim P(\lambda)$，计算$D(X)$.

解 利用公式$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2$ 计算.

由前面例计算得$E(X)=\lambda$. 又

$$E(X^2)=E[X(X-1)+X]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}+E(X)$$

$$=\lambda^2\cdot e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda$$

$$=\lambda^2\cdot e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda$$

$$\therefore\quad D(X)=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

例 设 $X \sim U(a,b)$，求 $D(X)$.

- **分析-猜想** $D(X)$应具有的结构？

X服从区间 (a,b) 上的均匀分布

方差的实际意义：随机变量与平均值的平均平方偏离程度(均方偏离大小)

故猜想 $D(X)$ 应与 $(b-a)^2$成正比.

例 设 $X \sim U(a,b)$，求 $D(X)$.

解 由前面例计算得 $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$.

X的密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$\therefore\ E(X^2)=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$

$$=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

例 设 X 服从参数为 $\lambda\ (\lambda>0)$ 的指数分布,求 $D(X)$.

解 由前面例计算得 $E(X)=\lambda$. X 的密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

$$\therefore\ D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)\,dx-\lambda^2$$

$$=\int_0^{\infty}x^2\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx-\lambda^2$$

$$=\lambda^2\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2 e^{-\frac{x}{\lambda}}d\left(\frac{x}{\lambda}\right)-\lambda^2$$

$$=\lambda^2\int_0^{\infty}t^2e^{-t}dt-\lambda^2$$

$$=2\lambda^2-\lambda^2=\lambda^2$$

第24讲 方差的定义与计算

例 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求 $D(X)$.

解 因为 $E(X)=\mu$，故

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\boxed{(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}dx$$

令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma}=t$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt =$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left[-te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right]$$

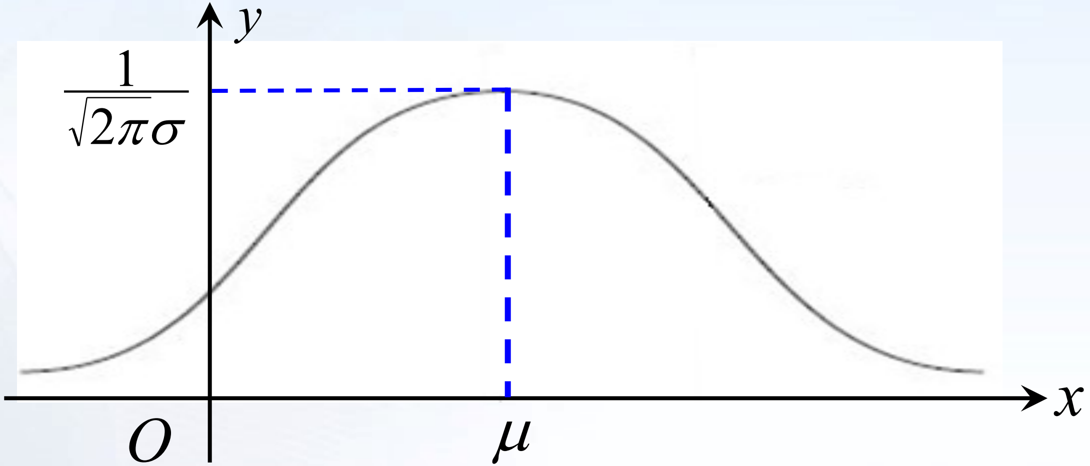
$$=\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\sigma^2.$$

例 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求 $D(X)$.

结果分析

$$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$$



定理 (方差的性质)

(1) 若 $X \overset{a.e}{=} c$ (常数),则 $D(X)=0$.

(2) 若 c 为常数, 则 $D(cX)=c^2 \cdot D(X)$.

证(2)

$$
\begin{aligned}
D(cX) &= E[(cX-E(cX))^2] \\
&= E[(cX-cE(X))^2] \\
&= E[c^2(X-E(X))^2] \\
&= c^2E(X-E(X))^2 \\
&= c^2D(X)
\end{aligned}
$$

第24讲 方差的定义与计算

定理 (方差的性质)

(1) 若 $X \overset{a.e}{=} c$ (常数),则 $D(X)=0.$

(2) 若 c 为常数, 则 $D(cX)=c^2 \cdot D(X).$

(3) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)\overset{?}{+}2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

分析 按方差的定义, 有

$$
\begin{aligned}
D(X+Y) &= E[((X+Y)-E(X+Y))^2] \\
&= E[((X-E(X))+(Y-E(Y)))^2] \\
&= E(X-E(X))^2+E(Y-E(Y))^2 \\
&\qquad +2E[(X-E(X))(Y-E(Y))] \\
&= D(X)+D(Y)+2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]
\end{aligned}
$$

定理 (方差的性质)

(1) 若 $X \overset{a.e}{=} c$ (常数),则 $D(X)=0.$

(2) 若 c 为常数, 则 $D(cX)=c^2\cdot D(X).$

(3) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

特别当X,Y独立时,有

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$

证 当 X,Y 独立时 $X-E(X),Y-E(Y)$ 也独立

$$\begin{aligned}\therefore\ & E[(X-E(X))(Y-E(Y))]\\ &=E[X-E(X)]\cdot E[Y-E(Y)]\\ &=0.\end{aligned}$$

第24讲 方差的定义与计算

定理 (方差的性质)

(1) 若 $X \overset{a.e}{=} c$ (常数),则 $D(X)=0.$

(2) 若 c 为常数, 则 $D(cX)=c^2 \cdot D(X).$

(3) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

特别当 X,Y 独立时,有

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$

若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立, 则有

$$D(X_1+X_2+\cdots+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)$$

第24讲 方差的定义与计算

例 设 $X \sim B(n,p)$，计算 $E(X)$，$D(X)$.

解 因为二项分布来自 n 重贝努利试验, 故有

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

其中 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布,且

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{第 } i \text{ 次试验 } A \text{ 不发生} \\ 1, & \text{第 } i \text{ 次试验 } A \text{ 发生} \end{cases}$$

$$P\{X_i = 1\} = p, P\{X_i = 0\} = 1 - p \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\therefore \ E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

$$= nE(X_1) = np$$

$$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n)$$

$$= nD(X_1) = np(1-p)$$