概率论与数理统计

第二十五讲

方差的性质与切比雪夫不等式

回顾

定义 设随机变量 X的数学期望存在，若

$$D(X)\triangleq E[(X-E(X))^2]$$

存在，则称 $E[(X-E(X))^2]$ 为 X 的**方差**，记为 $D(X)$.
称 $\sqrt{D(X)}$ 为 X 的**标准差**或**均方差**.

方差的计算

1. 设 $g(x)=(x-E(X))^2$，则

$$D(X)=D(g(X))=E[(X-E(X))^2].$$

2. 对于离散型随机变量

$$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-E(X))^2\cdot p_k$$

3. 对于连续型随机变量

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))^2\cdot f(x)\mathrm{d}x$$

4. 重要计算公式

$$\boxed{D(X)=E(X^2)-(E(X))^2}$$

定理 (方差的性质)

(1)若 $X \overset{a.e}{=} c$(常数)，则 $D(X)=0.$

(2)若 c为常数，则 $D(cX)=c^2 \cdot D(X).$

证(2) $D(cX)=E[(cX-E(cX))^2]$

$$
\begin{aligned}
&=E[(cX-cE(X))^2] \\
&=E[c^2(X-E(X))^2] \\
&=c^2E(X-E(X))^2 \\
&=c^2D(X)
\end{aligned}
$$

定理 (方差的性质)

(1)若 $X \overset{a.e}{=} c$(常数)，则 $D(X)=0.$

(2)若 c为常数，则 $D(cX)=c^2 \cdot D(X).$

(3)$D(X+Y)=D(X)+D(Y) \overset{?}{\cancel{+2E}}[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

分析　按方差的定义,有

$$
\begin{aligned}
D(X+Y) &= E[((X+Y)-E(X+Y))^2] \\
&= E[((X-E(X))+(Y-E(Y)))^2] \\
&= E(X-E(X))^2+E(Y-E(Y))^2 \\
&\qquad +2E[(X-E(X))(Y-E(Y))] \\
&= D(X)+D(Y)+2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]
\end{aligned}
$$

定理 (方差的性质)

(1)若 $X \overset{a.e}{=} c$(常数)，则 $D(X)=0$.

(2)若 c为常数，则 $D(cX)=c^2 \cdot D(X)$.

(3)$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

特别当X,Y独立时,有

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$

证　当X,Y独立时 $X-E(X),Y-E(Y)$ 也独立

$\therefore\ E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

$$=E[X-E(X)]\cdot E[Y-E(Y)]$$

$$=0.$$

定理 (方差的性质)

(1)若 $X \overset{a.e}{=} c$(常数)，则 $D(X)=0$.

(2)若 c为常数，则 $D(cX)=c^2 \cdot D(X)$.

(3)$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

特别当X,Y独立时,有

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$

若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$独立,则有

$$D(X_1+X_2+\cdots+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)$$

例 设 $X \sim B(n,p)$，计算 $E(X)$，$D(X)$.

解 因为二项分布来自 n 重贝努利试验，故有

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

其中 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，且

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{第 } i \text{ 次试验事件 } A \text{ 不发生} \\ 1, & \text{第 } i \text{ 次试验事件 } A \text{ 发生} \end{cases} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$P\{X_i = 1\} = p, P\{X_i = 0\} = 1 - p \quad (p = P(A))$$

从而

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = nE(X_1) = np$$

$$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n) = nD(X_1) = np(1-p)$$

定理 函数$\varphi(x)=E[(X-x)^2]$当$x=E(X)$时取最小, 即

$$D(X)\le E[(X-x)^2].$$

证 因为 $\varphi(x)=x^2-2xE(X)+E(X^2)$，故令

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}=2x-2E(X)=0$$

求得二次函数$\varphi(x)$的唯一最小值点为$x=E(X)$. 即有

$$D(X)=\underline{E[(X-E(X))^2]}\le\underline{E[(X-x)^2]}\quad(\forall x\in\mathrm{R}^1).$$

均方误差

定理（切比雪夫Chebyshev不等式）

设 $E(X)\triangleq\mu, D(X)\triangleq\sigma^2$ 都存在,则 $\forall\varepsilon>0$ 有

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

证 只证连续型情形. 设随机变量 X 的密度为 $f(x)$.

则 $\forall\varepsilon>0$ 有 $P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}=\int\limits_{|x-\mu|\geq\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x$

$$\leq\int\limits_{|x-\mu|\geq\varepsilon}\frac{(x-\mu)^2}{\varepsilon^2}f(x)\mathrm{d}x$$

$$\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}D(X)=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

定理（切比雪夫Chebyshev不等式)

设 $E(X)\triangleq\mu, D(X)\triangleq\sigma^2$ 都存在,则 $\forall\varepsilon>0$ 有

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

结果分析 将切比雪夫不等式变形为

$$P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

分别取 $\varepsilon=3\sigma,4\sigma$ 则有

$$P\{|X-\mu|<3\sigma\}\geq1-\frac{1}{9}\approx88.9\%$$

$$P\{|X-\mu|<4\sigma\}\geq1-\frac{1}{16}\approx93.75\%$$

一般的3σ法则 如果方差 $D(X)\triangleq\sigma^2$ 存在,则随机变量 X的值有近90%的可能性落在区间 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 内.

本讲结束　谢谢大家