概率论与数理统计

第二十二讲

随机变量函数的数学期望

实际背景问题

例 设风速$V\sim U(0,a)$,飞机机翼受到的压力为 $W=kV^2$

其中 k 是正常数,问机翼受到的平均压力为多大？

例 在机械加工中,工件的直径$d\sim N(\mu,\sigma^2)$, 问工件的平均截面积是多大？

例 在一个电路中, 流过电阻R 的电流 i 是一个密度为 $f(i)$ 的随机变量, 问电阻R 消耗的平均功率是多大?

第22讲 随机变量函数的数学期望

一般的问题

已知随机变量 $X \sim f(x), y=g(x)$ 为连续函数,
问如何求数学期望 $E(g(X))$?

分析 一般的思路 1. $X \sim f(x),\ y=g(x)$

$$\Downarrow$$

$$Y \sim f_Y(y)$$

2.$E[g(X)]=E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\mathrm{d}y$

问题 1.求 Y 的密度比较难

2.整个计算过程比较复杂

回顾与分析

若 $g(x)$ 单调且连续可导, 则其反函数 $x=h(y)$ 存在且连续可导, 且有 $f_Y(y)=h'(y)f(h(y))$, 从而

$$E[g(X)]=E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\mathrm{d}y$$

$$=\underline{\int_{-\infty}^{\infty} y h'(y) f(h(y))\mathrm{d}y}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\mathrm{d}x$$

令 $h(y)=x$

有意思的结果：$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x$

$$\boxed{E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\mathrm{d}x}$$

这个结果对普通函数也成立.

第22讲 随机变量函数的数学期望

定理 设 $g(x)$ 为普通函数,则

(1) 设 X 为离散型随机变量,其分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k,\ k=1,2,\cdots$$

若 $\sum_{k=1}^{\infty}|g(x_k)|\cdot p_k<+\infty$, 则

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)\cdot p_k$$

(2) 设 X 为连续型随机变量,其密度为 $f(x)$,

若 $\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|\cdot f(x)\mathrm{d}x<+\infty$, 则

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

例 设风速$V\sim U(0,a)$,飞机机翼受到的压力为 $W=kV^2$

其中 k 是正常数,问机翼受到的平均压力为多大？

解 V的密度函数为

$$f(v)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}, & 0<v<a,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

故机翼受到的平均压力为

$$E(W)=E(kv^2)$$

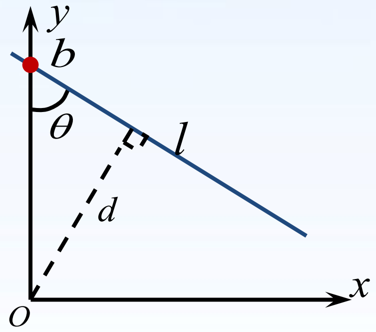
$$=\int_{-\infty}^{\infty}kv^2 f(v)\mathrm{d}v=\frac{k}{a}\int_0^a v^2\mathrm{d}v=\frac{1}{3}ka^2$$

例 过平面上点 $(0,b)$ 任作一条直线 l, 求由坐标原点 O 到直线 l 的平均距离.

解 设 l 与 y 轴的夹角为 θ, 则 $\theta \sim U(0,\pi)$.

于是

$$d = |b|\sin\theta$$



所以

$$E(d) = E(|b|\cdot\sin\theta) = |b|\int_0^{\pi}\sin\theta\cdot\frac{1}{\pi}\mathrm{d}\theta = \frac{|b|}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2|b|}{\pi}.$$

第22讲 随机变量函数的数学期望

推广的定理 设 $z=g(x,y)$ 为二元函数, 则

(1) 设 X,Y 的联合分布律为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots$$

若 $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|g(x_i,y_j)|p_{ij}<+\infty$, 则

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$$

(2) 设 X,Y 的联合密度为 $f(x,y)$,

若 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|g(x,y)|\cdot f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<+\infty$, 则

$$E(Z)=E(g(X,Y))=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)\cdot f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

注：公式可推广到一般的高维随机变量

第22讲 随机变量函数的数学期望

例 设 (X,Y) 服从$\boxed{\text{单位圆域 } G: x^2+y^2\le 1}$上的均匀分布，计算数学期望 $E(XY)$.

解 令 $g(x,y)=xy$，由推广的定理有

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\boxed{G:x^2+y^2\le 1}}xy\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

作极坐标变换,令 $\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{cases}$ $(0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\rho\le 1)$

变换的雅可比式 $J=\rho$. 所以

$$E(XY)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\rho^2\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho\cdot\underline{\int_0^{2\pi}\sin 2\varphi\mathrm{d}\varphi}=0$$

例 设 (X,Y) 服从单位圆域 $G: x^2+y^2 \le 1$ 上的均匀分布，计算数学期望 $E(XY)$.

分析 从直观上看 $E(XY)=0$ 的合理性

思考 $E(X+Y)=?$　　$E(X+Y)=0$

$E(X^2+Y^2)=0$ ？ X

第22讲 随机变量函数的数学期望

例 设 (X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}15xy^2, & 0\le y\le x\le 1,\\ 0\ , & \text{其他}\end{cases}$$

计算数学期望 $E(X), E(Y), E(XY)$.

一般思路 $f(x,y) \Rightarrow f_X(x) \Rightarrow E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x$

新的思路 $g(x,y)=x$

$$E(X)=E(g(X,Y))$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

第22讲 随机变量函数的数学期望

例 设 (X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}15xy^2, & 0\le y\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

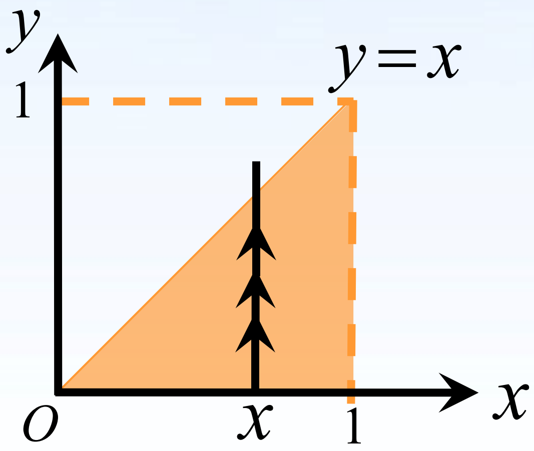
计算数学期望 $E(X), E(Y), E(XY)$.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_{\boxed{0\le y\le x\le 1}} x\cdot 15xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 15x^2y^2\mathrm{d}y$$

$$=\frac{15}{3}\int_0^1 x^5\mathrm{d}x=\frac{5}{6}$$



例 设 (X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}15xy^2, 0\le y\le x\le 1,\\ 0\ , \quad \text{其他}\end{cases}$$

计算数学期望 $E(X), E(Y), E(XY)$.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{5}{6}$

同理, 可计算得

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{5}{8}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{15}{28}$$

本讲结束，谢谢大家