概率论与数理统计

第四十二讲

双正态总体参数的假设检验

第42讲双正态总体参数的假设检验

一、问题的提出

当研究对象的外界条件发生变化时，需研究外界条件的变化是否对其产生了影响！

练钢过程中不同操作方法对产品得率的影响

不同的光谱测试仪对金属含量测定的影响

不同制导方式对导弹落点精度的影响

第42讲双正态总体参数的假设检验

设变化前的指标 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

变化后的指标 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

影响的体现：

1）均值的变化 $\mu_1 - \mu_2$

例如炼钢问题、金属含量测定问题

2）方差的变化 σ_1^2 / σ_2^2

例如导弹制导问题

二、关于均值差的检验

在平炉上进行一项试验以确定改变操作方法是否会增加钢的得率。炼钢时除操作方法外其它条件尽可能相同，两种试验交替进行，各炼10 炉，得结果如下

标准方法： $\bar{x} = 76.23$　　$s_1^2 = 3.325$

建议方法： $\bar{y} = 79.43$　　$s_2^2 = 2.225$

设两样本相互独立，分别来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma^2)$, 其中 μ_1, μ_2, σ^2 均未知。

问建议的新方法能否提高得率? $(\alpha = 0.05)$

第42讲双正态总体参数的假设检验

$$H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \qquad H_1: \mu_1 < \mu_2$$

注意：μ_1, μ_2, σ^2 的无偏估计分别为：$\bar{X}, \bar{Y}, S_w^{\ 2}$

比较 $\mu_1 - \mu_2$ ⟺ 比较 $\bar{X} - \bar{Y}$ ⟺ 比较 $\dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$

当 $\mu_1 = \mu_2$ 时

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

（所要统计量）

第42讲双正态总体参数的假设检验

如何确定拒绝域？ t 取何值时对 H_0 有利？

答： t 偏大于0 时有利，拒绝域的形式为：$t \le C$

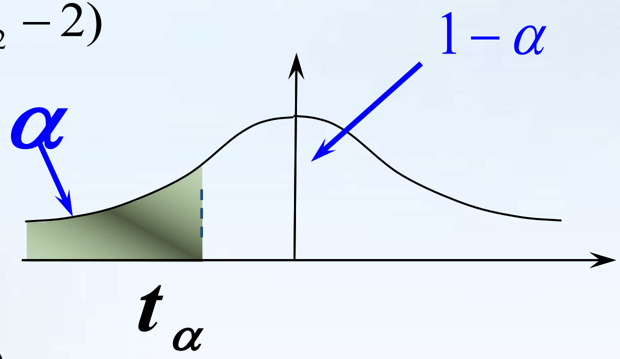
分析： $$P\left(\left\{\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \le C \,\middle|\, \mu_1 \ge \mu_2\right\}\right)$$

$$= P\left(\left\{\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \le C - \frac{(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \,\middle|\, \mu_1 \ge \mu_2\right\}\right)$$

$$\le P\left(\left\{\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \le C \,\middle|\, \mu_1 \ge \mu_2\right\}\right) = \alpha$$

第42讲双正态总体参数的假设检验

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \sim t(n_1+n_2-2)$$



故 $C = t_\alpha(n_1+n_2-2)$

拒绝域为 $\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \le t_\alpha(n_1+n_2-2)$

I类风险 $\le \alpha$

第42讲双正态总体参数的假设检验

查表 $t_{0.05}(18)=-1.7341$，计算得 $t=-4.295$，故拒绝 H_0

思考：1）$\mathrm{H}_0:\mu_1=\mu_2 \quad \mathrm{H}_1:\mu_1\neq\mu_2$ 的拒绝域？

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\le t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2) \quad \text{或} \quad \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\ge t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)$$

2）$\mathrm{H}_0:\mu_1\le\mu_2 \quad \mathrm{H}_1:\mu_1>\mu_2$ 的拒绝域？

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\ge t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)$$

第42讲双正态总体参数的假设检验

3）$H_0: \mu_1-\mu_2 \ge \delta \quad H_1: \mu_1-\mu_2 < \delta$ 的拒绝域?

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \le t_\alpha(n_1+n_2-2)$$

4）若 $\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$,如何检验？

当 $\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$ 但已知时，

$$U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \sim N(0,1) \; (\mu_1-\mu_2=\delta)$$

当 $\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$ 且均未知时如何办？

第42讲双正态总体参数的假设检验

配对检验：为了比较两种方法、仪器等，常在相同的条件下作对比试验，得到一批成对观察值，由此做出推断。

例 有两台光谱仪用来测量材料中某种金属的含量，为鉴定它们的测量结果有无显著差异，制备了9件试块，分别用这两台仪器对每一试块测量一次，得到9 对观测值如下：

x	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.0
y	0.10	0.21	0.52	0.32	0.78	0.59	0.68	0.77	0.89
z=x-y	0.10	0.09	-0.12	0.18	-0.18	0.11	0.12	0.13	0.11

问：能否认为两台仪器的测量结果有显著差异？$(\alpha = 0.01)$

第42讲双正态总体参数的假设检验

$$H_0: \mu_1=\mu_2 \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \quad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ 且未知

$$Z = X - Y \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \sim N(\mu, \sigma^2)$$

原问题 $\Longleftrightarrow$ 单正态总体方差未知时对均值的检验

$$H_0: \mu=0 \quad H_1: \mu \neq 0$$

第42讲双正态总体参数的假设检验

原问题： $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

新问题： $H_0: \mu = 0 \qquad H_1: \mu \neq 0$

z	0.10	0.09	-0.12	0.18	-0.18	0.11	0.12	0.13	0.11

由单总体情况的结果，方差未知时对均值进行双边检验的拒绝域为：

$$|t| = \left| \frac{\bar{z}}{s_z / \sqrt{n}} \right| \geq t_{1-\alpha/2}(n-1)$$

计算得：$\bar{z} = 0.06,\quad s_z = 0.1227,\quad n = 9,\quad |t| = 1.467,\quad t_{0.995}(8) = 3.3554$

未落在拒绝域，故接受 H_0

三、两总体下方差的假设检验

一台机床大修前曾加工了$n_1=10$件零件,加工尺寸的样本方差$S_1^2=2500$，大修后加工了$n_2=12$件零件,加工尺寸的样本方差$S_2^2=400$.试问：机床大修后其加工精度是否有显著提高？$(\alpha=0.01)$

- 假设大修前、后的加工样本分别来自总体

  $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$

  需要检验：$H_0: \sigma_1^2 \le \sigma_2^2$，$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

第42讲双正态总体参数的假设检验

数学问题：正态总体中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^{\ 2},\sigma_2^{\ 2}$ 均未知时检验

$$H_0:\sigma_1^2\le\sigma_2^2,\quad H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$$

- 样本方差 S_1^2、S_2^2 分别是 σ_1^2、σ_2^2 的无偏估计

  当 H_0 真时，S_1^2/S_2^2 应偏小于 1

又 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 时 $\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$,对给定的显著水平α

其拒绝域为 $\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\ge F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$

计算得: $S_1^2/S_2^2=6.25$,查表得 $F_{0.99}(9,11)=4.63$,故拒绝 H_0

第42讲双正态总体参数的假设检验

思考

1）正态总体中均 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^{\ 2},\sigma_2^{\ 2}$ 未知时，

$H_0:\sigma_1^2\geq\sigma_2^2$，$H_1:\sigma_1^2<\sigma_2^2$ 的拒绝域？

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\leq F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)$$

2）正态总体中均 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^{\ 2},\sigma_2^{\ 2}$ 未知时，

$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$，$H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ 的拒绝域？

$\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\leq F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$ 或 $\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\geq F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$