概率论与数理统计

第二十讲

常见的二维分布

1. 二维正态分布

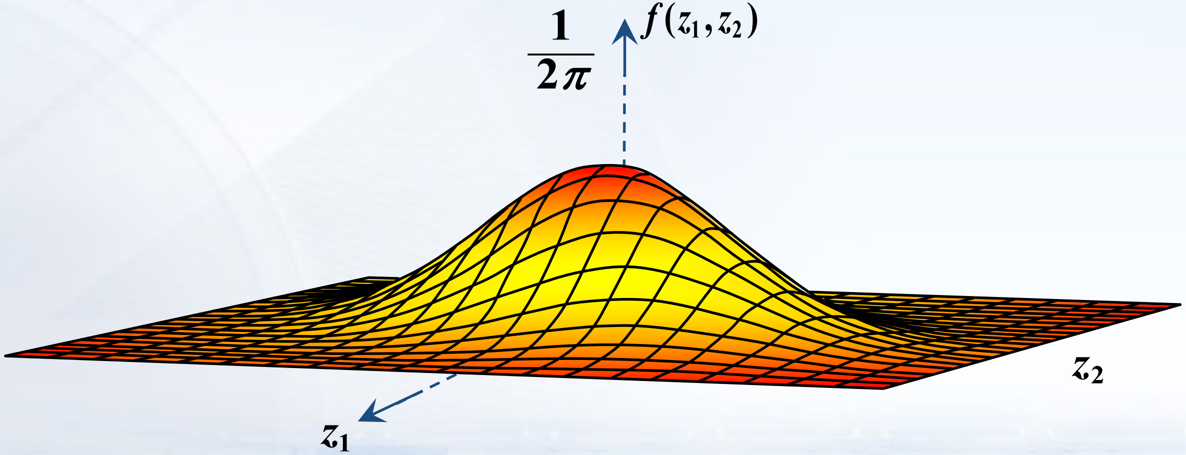
设 Z_1, Z_2 为独立同分布$N(0,1)$的随机变量, 则 Z_1, Z_2 的联合密度函数为

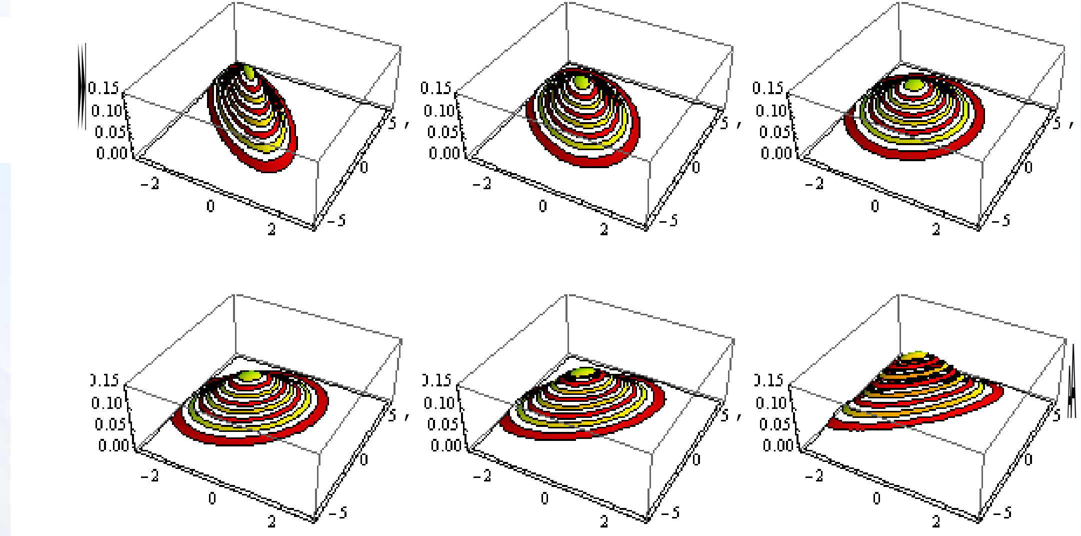
$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z_1^2 + z_2^2}{2}}$$

将 $f(z_1, z_2)$ 指数用二次型表示：

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi} \exp \frac{-\left\{(z_1, z_2)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right\}}{2}$$

将图形作仿射变换（平移、线性变换），得到的一类图形所表示的密度函数，就称为是二维正态分布的密度函数





为了更好地用有意义的参数描述这个分布，我们给出以下正式定义.

定义 设 Z_1, Z_2 为独立同分布 $N(0,1)$的随机变量.

作变换，令 $\begin{cases} X = \sigma_1 Z_1 + \mu_1 \\ Y = \sigma_2(\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} Z_2) + \mu_2 \end{cases}$， $\sigma_1 > 0,\quad \sigma_2 > 0,\quad |\rho| < 1$

则称(X,Y) 服从参数为$(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$的二维正态分布，

记为 $(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$.

变换可写成矩阵式：

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2 \rho & \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}}}_{\boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}.$$

记 $A=\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ \sigma_2\rho & \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\end{pmatrix}$ ，于是：

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sigma_1} & 0\\ -\dfrac{\rho}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} & \dfrac{1}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}Z_1\\ Z_2\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}X-\mu_1\\ Y-\mu_2\end{pmatrix}.$$

将此式代入 Z_1, Z_2 的联合密度式，并注意到此变换中雅可比行列式为

$$|J|=\det(A^{-1})=\frac{1}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}},$$

即得 X, Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\det(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}}\exp\{-\frac{1}{2}\left(x-\mu_1, y-\mu_2\right)(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\begin{pmatrix}x-\mu_1\\ y-\mu_2\end{pmatrix}\}$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}$$

由定义知若 $\rho=0$，则 $X=\sigma_1 Z_1+\mu_1$， $Y=\sigma_2 Z_2+\mu_2$.

即 X 与 Y 独立.

从密度函数看，X 与 Y 地位是对称的，决定了它们的分布特点是一致的.

二元正态的定义的特点使得许多分布规律的计算十分简单.

a. 边缘分布

因 $X=\sigma_1 Z_1+\mu_1$, 故 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$.

又由对称性知， $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

注意两个边缘分布均与 ρ 无关.

b. 条件分布

考虑在 $X=x$ 条件下 Y 的分布. 由于 $Z_1=\dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1}$,

故 $Y|_{X=x}=\sigma_2\left[\rho\left(\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)+\sqrt{1-\rho^2}Z_2\right]+\mu_2$

因此 $Y|_{X=x}\sim N\left(\dfrac{\sigma_2\rho}{\sigma_1}(x-\mu_1)+\mu_2,\sigma_1^2(1-\rho^2)\right).$

由对称性可知

$$X|_{Y=y}\sim N\left(\frac{\sigma_1\rho}{\sigma_2}(y-\mu_2)+\mu_1,\sigma_1^2(1-\rho^2)\right).$$

2. 区域上的均匀分布

第四讲曾提到过几何概型：设 $S \subset R^2$ 为一区域，认为 S 中每个结果的出现都是等可能的，此时，对于事件 A，其概率为

$$P(A) = \frac{A\text{的面积}}{S\text{的面积}}$$

用随机变量的语言重新叙述此问题：

- **定义** 设(X, Y)为连续随机变量，取值于区域 $S \subset R^2$ 中，

其密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{|S|}, & (x,y)\in S \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

其中 $|S|$ 表示 S 的面积. 称(X, Y)为S上的均匀分布.

- **注** “等可能”即在取值空间的每一点密度函数都是相等的.

区域上的均匀分布常用来解决许多看似不像几何问题的实际问题.

例（换乘问题）某人乘甲客车到某站换乘乙客车。已知两车到达该车站的时间均为等可能地取 8:00 到8:20 之间，又客车在此站停5分钟，问该乘客能成功换乘的概率为多少？

解 :设乘客到达车站需要的时间为 X(分钟).

所要转乘的客车到达车站需要的时间为 Y(分钟).

则可知 (X, Y)服从D上的均匀分布, 其中D为正方形 $[0,20]^2$,

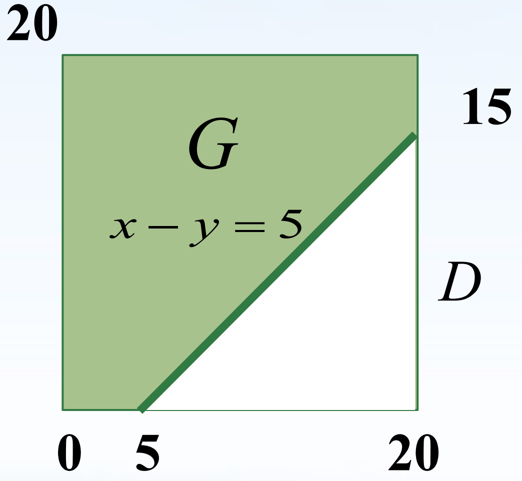
即密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{400}, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

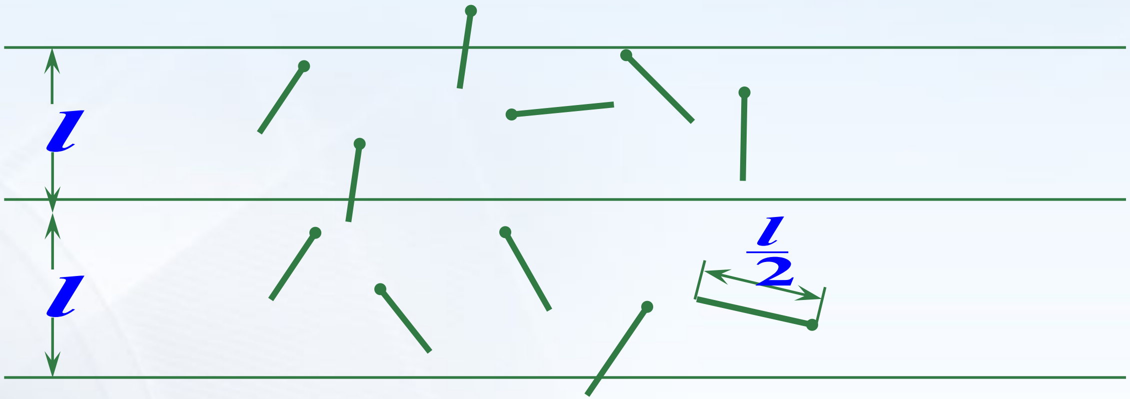
而事件 “能成功转乘” 为

$$G=\{(x,y)\mid x-y<5\}$$

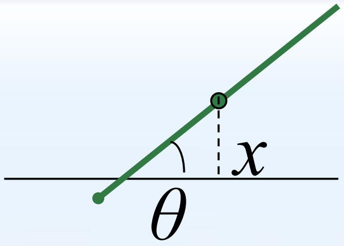
故 $P\{\text{能成功转乘}\}=\displaystyle\iint_G \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{400}=\frac{23}{32}.$



例（**蒲丰投针**）蒲丰曾用一个抛针试验近似计算π：在一组间距为 l 的平行线上，投出大量长为 $l/2$ 的针，求针与平行线相交的概率.



分析 针与平行线相交，取决于两个因素：针的中心距最近平行线的距离 x 及与平行线的夹角 θ.

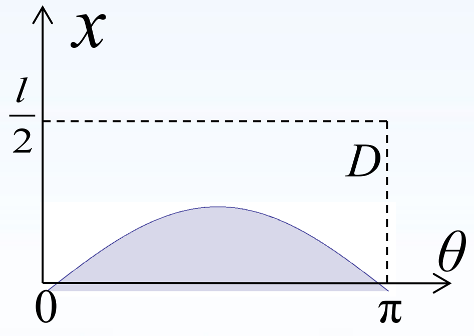


相交时有 $x \le \dfrac{l}{4}\sin\theta.$

又 x,θ 可能的取值范围： $0 \le x \le \dfrac{l}{2},$ $0 \le \theta \le \pi.$

令随机变量 (X,Θ) 为上述矩形上的均匀分布，即

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{2}{l\pi}, & (x,\theta)\in[0,\dfrac{l}{2}]\times[0,\pi]\triangleq D\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



故针与直线相交的概率为

$$\iint\limits_{x\le\frac{l}{4}\sin\theta}\frac{2}{l\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\frac{2}{l\pi}\frac{l}{4}\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\pi}.$$

均匀分布也可以推广到三维或更高维.

例（构成三角形）从三根长度为1的木棍上各随机截取一段，问能构成三角形的概率为多大？

解： 令(X, Y, Z)分别为所截取的长度，则它显然服从 $V=[0,1]^3$上的均匀分布，即有密度函数

$$f(x,y,z)=\begin{cases}1, & (x,y,z)\in \mathrm{V}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

又构成三角形当且仅当下式成立：

$$\begin{cases}x+y>z\\ y+z>x\\ z+x>y\end{cases}$$

记满足上式的点集为T.

则 $P\{$能构成三角形$\}=\iiint\limits_{T} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

为了计算T的体积，考虑平面 $x+y=z$分别与平面x=0, y=0, z=1的交线（如图）

可知截得一四面体，满足 $x+y\leq z,$

其体积为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$

另外两个约束条件可类似处理.

故共截掉体积 $3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$

所以 $P\{$能构成三角形$\}=\frac{1}{2}.$