概率论与数理统计

第十三讲

二维随机变量（Ⅰ）

1. 二维随机变量

有些随机事件用一个随机变量无法描述，需要两个或多个，如：

- ✓ 导弹的落点(X, Y) ⟶ (横坐标, 纵坐标)
- ✓ 人的血压 (X, Y) ⟶ (收缩压, 舒张压)
- ✓ 一段时期某支股票行情 (X, Y) ⟶ (平均市值, 波动值)
- ✓ ……

问题 为什么不分别研究X, Y, 而要整体地研究(X, Y)?

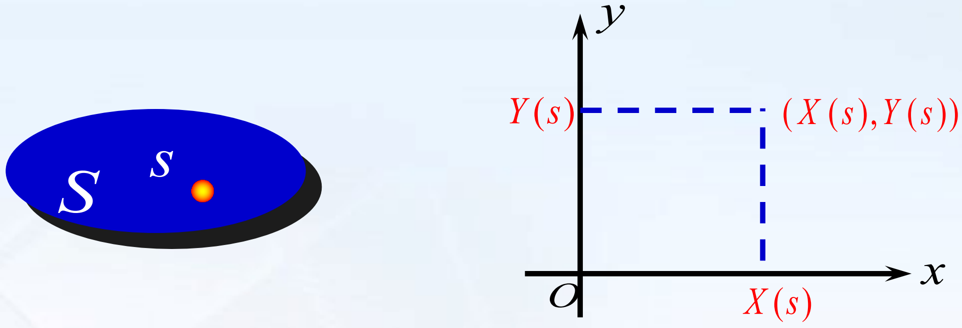
分别研究不能体现 X 与 Y 之间的关系.

如(X, Y)表示收缩压与舒张压, Y必须满足$Y \le X$,
而且实际上两者悬殊不可能太大, 即 X, Y 不能
分别自由取值.

- 今后知道, X 与 Y 不是**独立**的.
- **定义** 称定义在S上的两个随机变量二元组

$(X,Y)=(X(s),Y(s))$ 为**二维随机变量**或**随机向量**.

- **注** 等价的说法：二维随机变量是S到R^2的(可测)映射.



- 常见的一种情况, 样本空间$S\subset R^2$, 即$s=(x, y)$,

如 S 表示测血压结果或测导弹落点结果. 自然可定义

X, Y为$s=(x, y)$的坐标, 即$X(x, y)=x$, $Y(x, y)=y$.

- 也可以是与样本相联系的某两个数量.

例（掷双骰子问题, 续）掷两颗骰子,

则样本空间

$$S=\{(i,j)\mid i,j=1,2,\cdots,6\}$$

定义 $X(i,j)=i+j,\ Y(i,j)=|i-j|$

则 (X,Y) 为S上的二维随机变量.

- 还可以是表示某种属性的示性函数.

例（大气污染, 续）在此例中, 我们知道当PM2.5值超过100.5$(\mu g/m^3)$或SO_2超过0.225ppm为污染. 对每个$s=(x,y)$, 可定义

$$X(s)=\begin{cases}1, & x>100.5\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$Y(s)=\begin{cases}1, & y>0.225\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

2. 分布函数

如何从整体上研究(X, Y)的分布？ 即研究形如

$$\{s \mid (X(s),Y(s)) \in (a,b]\times(c,d]\} \overset{\Delta}{=} \{(X,Y) \in (a,b]\times(c,d]\}$$

$$= \{a < X \le b, c < Y \le d\}$$

的事件的概率.

为此, 须与一维情形类似, 研究二维的分布函数.

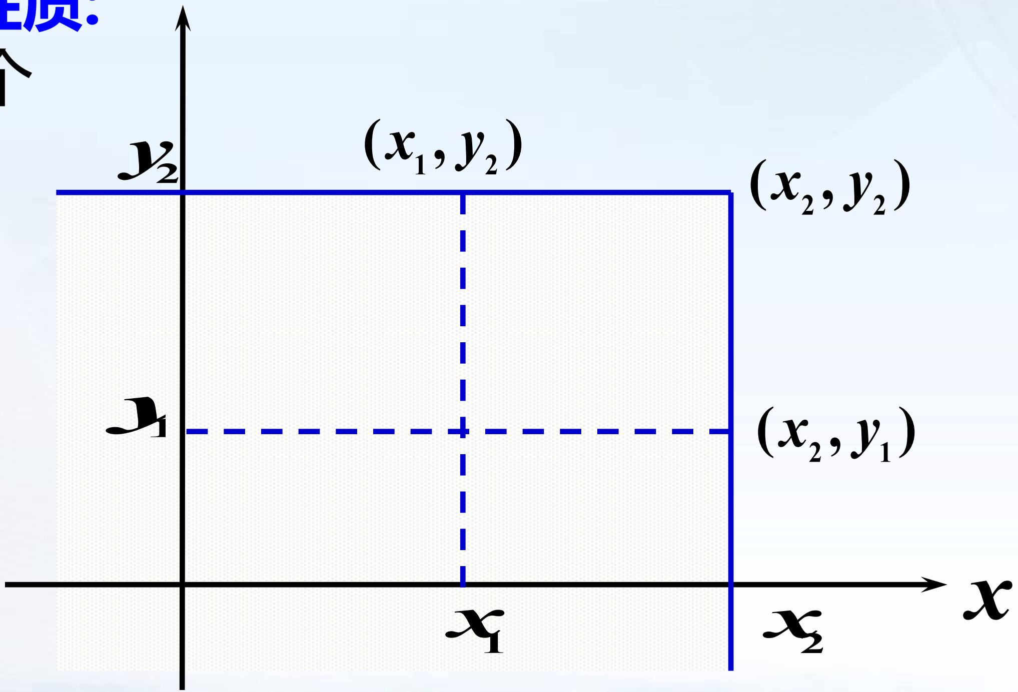
定义 设(X, Y)为一个二维随机变量, 对任意$(x, y) \in R^2$,

定义$F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\}$, 称为是$(X,Y)$的分布函数,

或X与Y的**联合分布函数**(joint distribution function).

联合分布函数的性质:

①对于固定的一个变元，$F(x,y)$ 是另一变元的单调不减函数；

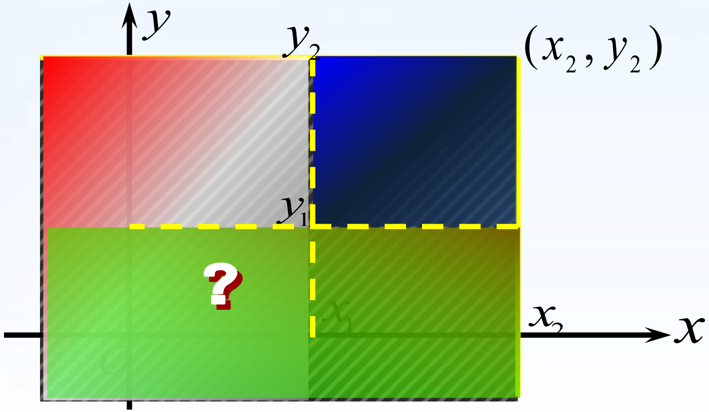


②$0 \le F(x,y) \le 1$，且 $F(+\infty,+\infty)=1, F(-\infty,-\infty)=0$

$F(-\infty,y)=0, F(x,-\infty)=0 \quad (\forall\ x,y)$

③$F(x,y)$ 对每个变元都是右连续；

④矩形 $[x_1,x_2]\times[y_1,y_2]$ 面积为



$$F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\ge 0$$

3. 联合分布律

如果 X, Y 都是离散型随机变量, 则与一维情形一样, 可以用联合分布律刻画, 即设(X,Y)取值为

$(x_i, y_j), i, j = 1, 2, \cdots$ (至多可列个) , 则令

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\},$$

定义为 X, Y 的联合分布律.

通常可以用表格表示.

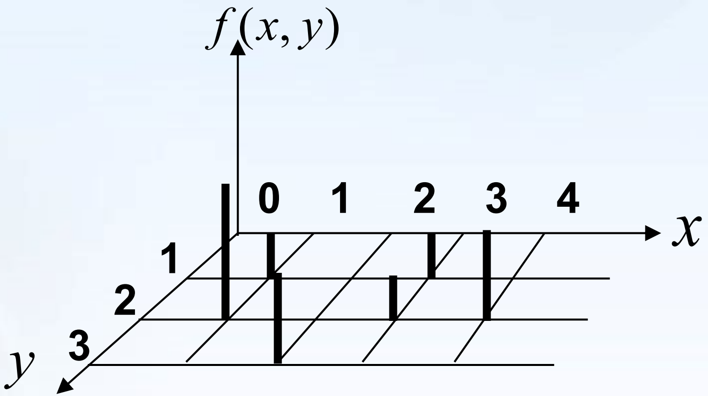
$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

显然, 联合分布律满足：

1) $p_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1, 2, \cdots);$　　2) $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1.$

例 设二维离散型随机变量(X, Y)的联合分布律如下表，求 $P(X \ge 2, Y \ge 2)$ 及 $P(Y = 1)$.

$Y \backslash X$	1	2	3	4
1	0.1	0	0.1	0
2	0.3	0	0.1	0.2
3	0	0.2	0	0



联合分布律图示

答：$P(X \ge 2, Y \ge 2) = 0.5$

$P(Y = 1) = 0.2$

第13讲　二维随机变量（Ⅰ）

例（**掷双骰子, 续**）在此例中, 写出 $X=i+j,\ Y=|i-j|$, $i,j=1,\dots,6$的联合分布律.

答：

$Y\setminus X$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$
1	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0
2	0	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	0
3	0	0	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	0	0
4	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	0

利用分布律, 容易计算事件的概率.

例（电游竞赛，续）第6讲例中，令X，Y分别为初赛, 复赛成绩, 即X在0, 1, …, 5中等可能取值, Y在X, X+1, …, X+5中等可能取值, 求

a) (X, Y)的联合分布律;

b) 求初赛成绩不超过2分，复赛成绩不超过4分的概率.

答：a)

$Y \backslash X$	0	1	2	3	4	5
0	$\frac{1}{6\times6}$	0	0	0	0	0
1	$\frac{1}{6\times6}$	$\frac{1}{6\times5}$	0	0	0	0
2	$\frac{1}{6\times6}$	$\frac{1}{6\times5}$	$\frac{1}{6\times4}$	0	0	0
3	$\frac{1}{6\times6}$	$\frac{1}{6\times5}$	$\frac{1}{6\times4}$	$\frac{1}{6\times3}$	0	0
4	$\frac{1}{6\times6}$	$\frac{1}{6\times5}$	$\frac{1}{6\times4}$	$\frac{1}{6\times3}$	$\frac{1}{6\times2}$	0
5	$\frac{1}{6\times6}$	$\frac{1}{6\times5}$	$\frac{1}{6\times4}$	$\frac{1}{6\times3}$	$\frac{1}{6\times2}$	$\frac{1}{6\times1}$

b) $\frac{5}{6\times6}+\frac{4}{6\times5}+\frac{3}{6\times4}=\frac{143}{360}$

此处：

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{Y=j\mid X=i\}\cdot P\{X=i\}$$

- **注** 联合分布律,即 $\{X=i\},\{Y=j\}$

两个事件之积的概率，故常可用乘法公式.