# 概率论与数理统计

## 第二十一讲

## 数学期望的定义与计算

刻画随机变量的概率特性 $\begin{cases} \text{分布律} \\ \text{密度函数} \\ \text{分布函数} \end{cases}$

- **特点**　全面、详细、完整
- **不足**　复杂、重点不突出

- **问题**　怎样粗线条地描述随机变量的特性?
- **要求**　简单明了、特征鲜明、直观实用

**例** 甲、乙两射手进行打靶训练，每人各打了100发子弹，成绩如下

甲成绩

| 环数 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 中靶数 | 17 | 28 | 45 | 10 |

乙成绩

| 环数 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 中靶数 | 32 | 28 | 22 | 18 |

问怎样评估两人的射击水平？

**分析** 分别计算两人的总环数

甲：$7\times17+8\times28+9\times45+10\times10=848$（环）

乙：$7\times32+8\times28+9\times22+10\times18=826$（环）

**例** 甲、乙两射手进行打靶训练，每人各打了100发子弹，成绩如下

甲成绩

| 环数 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 中靶数 | 17 | 28 | 45 | 10 |

乙成绩

| 环数 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 中靶数 | 32 | 28 | 22 | 18 |

问怎样评估两人的射击水平？

**分析** 分别计算两人的平均环数

甲：$\frac{7\times17}{100}+\frac{8\times28}{100}+\frac{9\times45}{100}+\frac{10\times10}{100}=8.48$（环）

乙：$\frac{7\times32}{100}+\frac{8\times28}{100}+\frac{9\times22}{100}+\frac{10\times18}{100}=8.26$（环）

用“频率近似概率”的思想，得到甲、乙两射手击中环数的分布律如下

甲分布律

| 环数 $x_k$ | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 概率 $p_k$ | 0.17 | 0.28 | 0.45 | 0.10 |

乙分布律

| 环数 $y_k$ | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 概率 $p'_k$ | 0.32 | 0.28 | 0.22 | 0.18 |

则计算出两人的平均环数分别为

$$\sum_{k=1}^{n} x_k p_k = 7\times0.17+8\times0.28+9\times0.45+10\times0.10=8.48\text{（环）}$$

$$\sum_{k=1}^{n} y_k p'_k = 7\times0.32+8\times0.28+9\times0.22+10\times0.18=8.26\text{（环）}$$

# 平均值的概念广泛存在

**例如** 某课程考试的平均成绩

电子产品的平均无故障时间

某地区的日平均气温和日平均降水量

某地区水稻的平均亩产量

某地区的家庭平均年收入

某国家或地区人的平均寿命

……

**定义** 设离散型随机变量 $X$ 的分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\cdots$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|\cdot p_k<+\infty$,记

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\cdot p_k.$$

则称 $E(X)$ 为随机变量 $X$ 的**数学期望.**

**说明**

1. 数学期望也称为**期望、均值**（加权平均）

2. $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|\cdot p_k<+\infty$ 保证了 $\sum_{k=1}^{\infty}x_k\cdot p_k$ 与求和次序无关

3.若级数 $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|\cdot p_k=+\infty$, 则称 $E(X)$ 不存在

**例** 从学校去火车站要经过3个交叉路口，设在每个路口遇到红绿的事件是独立的,其概率均为0.5.记$X$表示途中遇到的红灯数,求数学期望$E(X)$.

**解** 显然$X\sim B(3,0.5)$，其分布律为

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 |

所以

$$E(X)=\sum_{k=0}^{3} x_k\cdot p_k=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$$

即从学校乘车去火车站平均要遇到 1.5 次红灯.

## 数学期望的物理意义

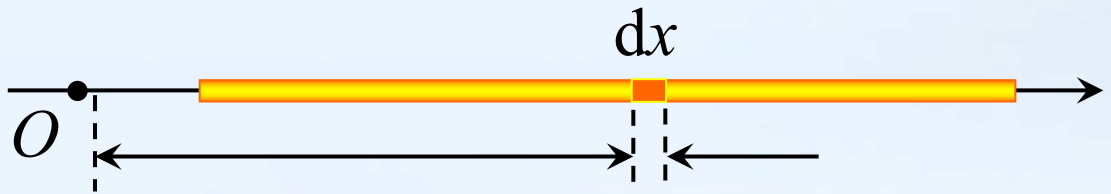
散布在直线上的 $n$ 个质点, 坐标为 $x_k$, 质量为 $p_k$


则该系统对原点 $O$ 的力矩为 $\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k$

该系统的质心坐标为 $\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k \Big/ \sum_{k=1}^{n} p_k$

当总质量 $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ 时, 质心坐标为 $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k$

考虑 $x$ 轴上一根线密度为 $f(x)$ 的细棒




用微元法求得长为 $\mathrm{d}x$ 的细棒对原点 $O$ 的力矩为

$$x\cdot f(x)\mathrm{d}x$$

则细棒的质心坐标为

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x}$$

当总质量 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$ 时,质心坐标为$\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\mathrm{d}x$.

**定义** 设连续型随机变量 $X$ 的密度函数为 $f(x)$，若 $\int_{-\infty}^{\infty}|x|\cdot f(x)\mathrm{d}x<+\infty$，记

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)\mathrm{d}x$$

则称 $E(X)$ 为随机变量 $X$ 的**数学期望.**

**例** 设 $X\sim U(a,b)$，求 $X$ 的数学期望.

**解** $X$ 服从区间 $(a,b)$ 上的均匀分布，概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$\therefore\ E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}$$

**例** 设 $X \sim P(\lambda)\ (\lambda > 0)$,求 $E(X)$.

**解** 
$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$
$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$
$$= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda}$$
$$= \lambda$$

**例** 设 $X \sim B(n,p)$ 求 $E(X)$.

**解** 二项分布的分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k=0,1,2,\cdots,n,\ p+q=1)$$

由公式 $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$ 有

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot P\{X=k\} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k p^k q^{n-k} \\ &= np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} \\ &= np(p+q)^{n-1} \\ &= np \end{aligned}$$

**例** 设 $X$ 服从参数为 $\lambda\,(\lambda>0)$ 的指数分布,求 $E(X)$.

**解** $X$的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}}, & x>0,\\ 0\ , & x\le 0.\end{cases}$$

$$\therefore\ E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{\infty}\frac{x}{\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}}\mathrm{d}x=\lambda\cdot\int_{0}^{\infty}\frac{x}{\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$=\lambda\cdot\int_{0}^{\infty}t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

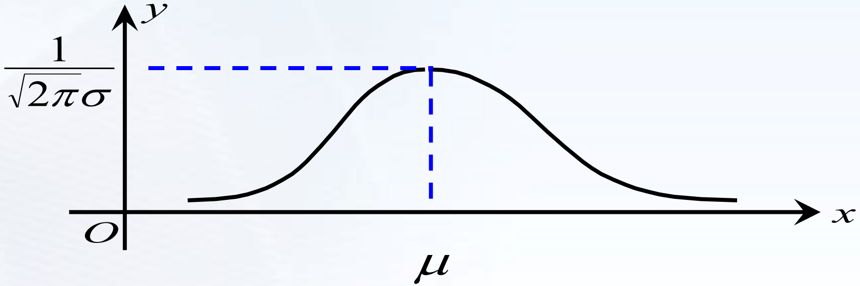
$$=\lambda$$

**例** 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求 $E(X)$.

**思考** 从直观上分析 $E(X) = ?$

**分析** $X$ 的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$




$\therefore \quad E(X) = \mu$

**例** 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求 $E(X)$.

**解** $$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu+\mu) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}(x-\mu)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}t+\mu\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x$$

$$=0+\mu \cdot 1$$

$$=\mu$$

**例** 设 $X$ 服从柯西分布,求 $E(X)$.

**解** 柯西分布的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2},\quad -\infty<x<\infty$$

$$\therefore\ E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\boxed{x\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}}\mathrm{d}x=0$$

**被积函数为奇函数**

- **思考** 这个结论对吗?

**例** 设 $X$ 服从柯西分布,求 $E(X)$.

**解** 柯西分布的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2},\quad -\infty<x<\infty$$

事实上,因为

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x^2$$

$$=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_0^{\infty}=+\infty$$

所以 $E(X)$ 不存在!