概率论与数理统计

第三十四讲

估计量的评判标准 (I)

回顾

设总体 $X \sim U(a，b)$，a，b 是未知参数，X_1，X_2，…，X_n是来自X的一个样本.

用矩估计法，得到 a，b的矩估计量为：

$$\hat{a} = \bar{X} - \sqrt{3}\tilde{S}, \quad \hat{b} = \bar{X} + \sqrt{3}\tilde{S}$$

用极大似然估计法，得到 a，b 的MLE为：

$$\hat{a} = \min_{1 \le i \le n}\{X_i\} = X_{(1)}, \quad \hat{b} = \max_{1 \le i \le n}\{X_i\} = X_{(n)}$$

对同一个参数，不同方法得到的估计量可能不同.

- **问题** 1) 应该选用哪一个估计量?

  2) 用什么标准来评价一个估计量的好坏?

- **常用标准**

  1) 无偏性

  2) 有效性

  3) 相合性

1) 无偏性

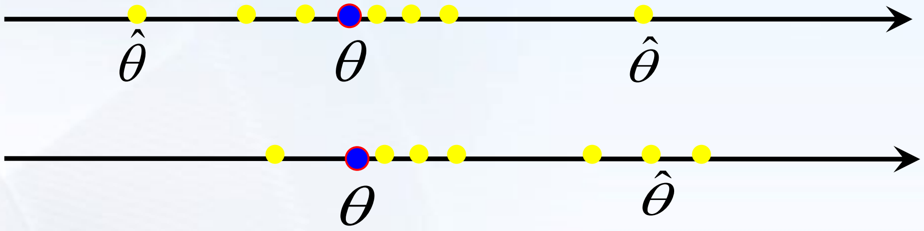
设总体 $X \sim F(x;\theta)$ $(\theta \in \Theta)$ ，X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 X 的一个样本.

$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 θ 的估计量.

- **问题** 直观上看，一个“好”的估计量应满足什么条件?

估计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是随机变量

估计值 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 会有“波动性”



- **问题** 直观上看，哪一个估计量好些?

定义1 设X_1，X_2，…，X_n是来自总体$X \sim F(x;\theta)$ $(\theta \in \Theta)$ 的一个样本.

$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 θ 的估计量，且期望 $E(\hat{\theta})$ 存在.

若对任意的 $\theta \in \Theta$ ，都有

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的**无偏估计量**.

例 设总体 X 的 k 阶矩 $\mu_k = E(X^k)$存在，

X_1，X_2，…，X_n 是来自X的一个样本.

试证明，无论总体 X 服从什么分布，样本 k阶矩

$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ 都是 μ_k 的无偏估计量.

特别

样本均值 $\bar{X}$ 总是总体期望 $\mu = E(X)$ 的无偏估计量.

例 设 X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 X 的样本，且总体的方差 $D(X)$ 存在. 证明

1) 样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 是总体方差 $D(X)$ 的无偏估计量.

2) $\tilde{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 不是总体方差 $D(X)$ 的无偏估计量.

证明 由公式：

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2}$$

得到

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)=E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\overline{X}^2)$$

$$=nE(X^2)-n\left\{D(\overline{X})+[E(\overline{X})]^2\right\}$$

$$=nE(X^2)-n[E(X)]^2-D(X)=(n-1)D(X)$$

故有：

$$E(S^2)=E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)=D(X)$$

所以样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

是总体方差 $D(X)$ 的无偏估计量.

因为

$$\tilde{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

$$= \frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{n-1}{n}S^2$$

所以

$$E(\tilde{S}^2) = \frac{n-1}{n}E(S^2) = \frac{n-1}{n}D(X) \neq D(X)$$

即 $\tilde{S}^2$不是总体方差 $D(X)$ 的无偏估计量.

$\tilde{S}^2$ 不是总体方差 $D(X)$ 的无偏估计量. 但有

$$\lim_{n\to+\infty} E(\tilde{S}^2) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} D(X) = D(X)$$

即 $\tilde{S}^2$ 是总体方差 $D(X)$ 的**渐近无偏估计量**.

定义2 若 $E(\hat{\theta}) \neq \theta$ ，但有

$$\lim_{n\to+\infty} E(\hat{\theta}) = \theta$$

则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的**渐近无偏估计量**.

例 设 X_1，X_2，…，X_n 是来自正态总体 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，则估计量

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad S^2 \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

分别是 μ，σ^2 的无偏估计量.

例 设总体 $X \sim EXP(\theta)$，密度函数为：

$$f(x:\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},\quad (\theta>0)$$

X_1，X_2，…，X_n是总体 X 的样本，证明：

$\bar{X}$ 与 $nX_{(1)}$ 均为θ的无偏估计量.

例 设 X_1，X_2，…，X_n 是正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，试确定常数 k，使得

$$k\sum_{i=1}^{n}|X_i-\bar{X}|$$

是 σ 的无偏估计.

解 因为

$$E\left[k\sum_{i=1}^{n}|X_i-\bar{X}|\right]=k\sum_{i=1}^{n}E(|X_i-\bar{X}|)$$

而 $X_i - \bar{X} = \frac{1}{n}[-X_1 - X_2 - \cdots + (n-1)X_i - \cdots - X_n]$

服从正态分布.

$$E(X_i - \bar{X}) = 0$$

$$D(X_i - \bar{X}) = \frac{1}{n^2}[D(X_1) + \cdots + (n-1)^2 D(X_i) + \cdots + D(X_n)]$$

$$= \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

所以有 $X_i - \bar{X} \sim N(0, \frac{n-1}{n}\sigma^2)$

从而有

$$Z_i = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \sim N(0,\ 1)$$

由此得到

$$E\,|\,Z_i\,| = \int_{-\infty}^{+\infty} |\,x\,| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}\frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t} \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

综合上述结果，有

$$E\left[k\sum_{i=1}^{n}|X_i-\bar{X}|\right]=k\sum_{i=1}^{n}E(|X_i-\bar{X}|)$$

$$=k\sigma\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sum_{i=1}^{n}E\left(\sqrt{\frac{n}{n-1}}\frac{|X_i-\bar{X}|}{\sigma}\right)$$

$$=k\sigma\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sum_{i=1}^{n}E(|Z_i|)=k\sigma\sqrt{\frac{n-1}{n}}n\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$=k\sigma\sqrt{\frac{2n(n-1)}{\pi}}=\sigma\quad\Rightarrow k=\sqrt{\frac{\pi}{2n(n-1)}}$$

关于无偏性的一些说明

1) 无偏性是对估计量的一个最常见的要求，通常也是“好”估计的标准之一.

2) 若$E(\hat{\theta}) = a\theta + b$，$a$，$b$是常数，则 $\dfrac{\hat{\theta} - b}{a}$ 为 θ 的无偏估计量.

3) 无偏性的统计意义是指在大量重复试验下，由估计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$得到的估计值的平均恰好是$\theta$.

------没有系统误差.