概率论与数理统计

第二十三讲

数学期望的性质及应用

思考 数学期望的数学特点是什么？

对于连续型随机变量

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_X(x)\mathrm{d}x$$

对于离散型随机变量

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

数学特点

数学期望是关于积分变量与密度乘积的积分运算(离散情形是求和),是一种**线性运算**.

第23讲 数学期望的性质及应用

定理 (数学期望的性质)

(1) 若 $a \le X \le b\ (a.e)$ 则 $a \le E(X) \le b.(a,b$为常数$)$.

(2) 若 c为常数, 则$E(cX)=c \cdot E(X)$.

(3) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

(4) 若X,Y相互独立,则$E(X \cdot Y)=E(X) \cdot E(Y)$.

对连续型情形证明

定理 (数学期望的性质)

(4) 若X,Y相互独立,则$E(X\cdot Y)=E(X)\cdot E(Y)$.

证 设$(X,Y)\sim f(x,y)$, $X\sim f_X(x)$, $Y\sim f_Y(y)$

若 X,Y相互独立, 则

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

所以

$$\begin{aligned}E(X\cdot Y)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xy\cdot f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xy\cdot f_X(x)\cdot f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x\cdot\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y\\&=E(X)\cdot E(Y).\end{aligned}$$

第23讲 数学期望的性质及应用

定理 (数学期望的性质)

(1) 若 $a \le X \le b\,(a.e)$ 则 $a \le E(X) \le b$.(a,b为常数).

(2) 若 c为常数, 则$E(cX) = c \cdot E(X)$.

(3) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

(4) 若X,Y相互独立,则$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$.

推论

(5) 若$X = c\,(a.e)$ 则 $E(X) = c$. (c 为常数).

(6) 若$c_1, c_2, \cdots, c_n$ 均为常数, 则 $E\left(\sum_{k=1}^{n} c_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k E(X_k)$.

(7) 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 则

$$E(X_1 X_2 \cdots X_n) = E(X_1) E(X_2) \cdots E(X_n).$$

例 一电梯载有12位乘客自一楼至十一楼，如到达某楼层没有乘客下电梯，则该层不停. 以X表示电梯停的次数. 求$E(X)$.(假设每个乘客在任一层下电梯是等可能的，且各乘客是否下电梯是相互独立的)

解 引入随机变量

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{电梯在第 } i+1 \text{ 层停}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}\quad (i=1,2,\cdots,10)$$

$\because X_i=0 \Longleftrightarrow$ 12位乘客在第 $i+1$ 层都不下电梯

$\therefore P\{X_i=0\}=(9/10)^{12}$，$P\{X_i=1\}=1-(9/10)^{12}$

易知 $X=X_1+X_2+\cdots+X_{10}$，故

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_{12})$$

$$=10E(X_1)=10\times[1-(9/10)^{12}]=7.18(\text{次})$$

例 旅游团的 N个游客出酒店时都将自己房间的钥匙交给了导游. 回到酒店后, 每人从导游处任取一把钥匙去开自己房间的门.试问平均有多少人能开打房门.

解 令 $X_i=\begin{cases}1, & 第\ i\ 人能打开房门\\ 0, & 第\ i\ 人不能打开房门\end{cases}\quad (i=1,2,\cdots,N)$

则能打开房门的人数为 $X=X_1+X_2+\cdots+X_N$

且 $P\{X_i=1\}=\dfrac{1}{N}, P\{X_i=0\}=1-\dfrac{1}{N}, i=1,2,\cdots,N$

故能开打房门的平均人数为

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_N)$$

$$=N\cdot E(X_1)=N\cdot\frac{1}{N}=1\ (人)$$

例 设 N 件产品中有 M 件次品, 在该批产品中任意取 n 件, 记 X 表示取出的次品个数, 求 $E(X)$.

- **注** 这是无放回取样，且产品件数不一定很大.

解 X 的分布律为

$$p_k = P\{X = k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, k = 0,1,2,\cdots,n$$

称 X 服从**超几何分布**. 故

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k p_k$$

$$= \boxed{\sum_{k=0}^{n} k \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}}$$

直接求和比较难

第23讲 数学期望的性质及应用

例　设 N 件产品中有 M 件次品, 在该批产品中任意取 n 件, 记 X 表示取出的次品个数, 求 $E(X)$.

解法二 (利用随机变量的分解求解) 令

$$X_k=\begin{cases}1, & 第\,k\,件取出是次品\\ 0, & 否则\end{cases}\quad (k=1,2,\cdots,n)$$

则 $P\{X_k=1\}=\dfrac{M}{N}, P\{X_k=0\}=$

因为 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$,

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}E(X_k)=\sum_{k=1}^{n}(1\cdot \quad N \quad N \quad) \quad N$$

构造适当的概率模型求复杂公式的值是常用的数学技巧

从而求得公式 $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}=\frac{nM}{N}}$

例 掷一颗骰子直到所有点数全部出现为止, 求所需投掷次数 X 的数学期望 $E(X)$.

解 令 $X_1 =$ 出现第1点的次数 $= \mathbf{3}$

$X_2 =$ 出现第1点后, 等待第2个不同的点的次数

$X_3 =$ 出现第1, 2点后, 等待第3个不同的点的次数

类似地定义 X_4, X_5, X_6. 则

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$$

又 $P\{X_i = k\} = (1-p_i)^{k-1} p_i,\ \ p_i = 1 - \dfrac{i-1}{6},\ k = 1, 2, \cdots$

$$E(X_i) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p_i)^{k-1} p_i = \frac{1}{p_i} \qquad (i = 2, 3, 4, 5, 6)$$

$$\therefore\ \ E(X) = E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6)$$

$$= 1 + \sum_{i=2}^{6} p_i^{-1} = 1 + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} + \frac{6}{1} = 14.7\ (次)$$

第23讲 数学期望的性质及应用

例 一公司经营某种原料，根据调查了解到该原料的市场需求量 $X \sim U(300,500)$ (单位:吨), 每出售一吨原料公司可获利1千元,若积压一吨,则公司要损失0.5千元. 问公司应该组织多少货源,可以使收益最大?

解 设公司应组织货源 a 吨 $(300 \le a \le 500)$.

又设公司获利 Y 千元,则

$$Y = h(X) = \begin{cases} 1 \cdot a, & a \le X < 500, \\ 1 \cdot X - \frac{1}{2}(a - X), & 300 \le X < a. \end{cases}$$

于是公司的平均获利为

$$E(Y) = E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x) \mathrm{d}x$$

解 设公司应组织货源 a 吨 $(300\le a\le 500)$.

又设公司获利 Y 千元,则

$$Y=h(X)=\begin{cases} 1\cdot a, & a\le X<500, \\ 1\cdot X-\frac{1}{2}(a-X), & 300\le X<a. \end{cases}$$

于是公司的平均获利为

$$\begin{aligned} E(Y)&=E(h(X))=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)f_X(x)\mathrm{d}x \\ &=\int_{300}^{500}h(x)\frac{1}{200}\mathrm{d}x \\ &=\frac{1}{200}\left\{\int_{300}^{a}\left[x-\frac{1}{2}(a-x)\right]\mathrm{d}x+\int_{a}^{500}a\mathrm{d}x\right\} \\ &=\frac{1}{800}(-3a^2+2600a-90000) \end{aligned}$$

解 设公司应组织货源 a 吨 $(300 \le a \le 500)$.
又设公司获利 Y 千元,则

$$Y = h(X) = \begin{cases} 1 \cdot a, & a \le X < 500, \\ 1 \cdot X - \frac{1}{2}(a - X), & 300 \le X < a. \end{cases}$$

于是公司的平均获利为

$$E(Y) = E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{800}(-3a^2 + 2600a - 90000)$$

令 $\frac{dE(Y)}{da} = \frac{1}{800}(-6a + 2600) = 0$, 解得 $a \approx 433.3$

故公司应该组织433.3吨货源, 可使平均收益最大.

本讲结束　谢谢大家