概率论与数理统计

第三十五讲

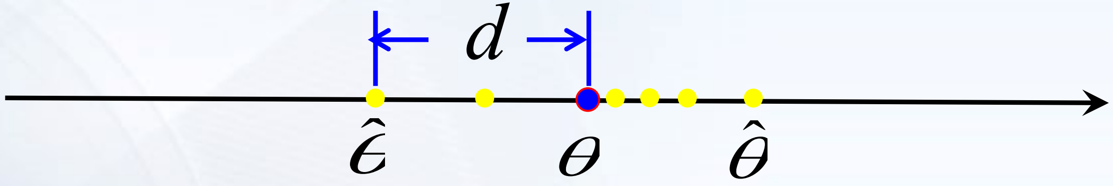
估计量的评判标准(III)

无偏估计

若对任意的 $\theta \in \Theta$ ， 都有

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量.



样本观测值 $x_1, x_2, \mathrm{L}\ , x_n$

$\longrightarrow$ 估计值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \mathrm{L}\ , x_n)$

设 X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 $X \sim F(x;\theta)$ 的一个样本.

$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 θ 的估计量.

直观上看，一个“好”的估计量，其误差

$$|\hat{\theta}-\theta|$$

应该小.

绝对值运算不方便

随机变量

设 X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 $X \sim F(x;\theta)$ 的一个样本.

$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 θ 的估计量.

直观上看，一个“好”的估计量，其误差

$$\boxed{E(\hat{\theta} - \theta)^2}$$

应该小.

均方误差

$$E(\hat{\theta}-\theta)^2 = E\left\{[\hat{\theta}-E(\hat{\theta})]+[E(\hat{\theta})-\theta]\right\}^2$$

$$= E[\hat{\theta}-E(\hat{\theta})]^2$$

$$+2[E(\hat{\theta})-\theta]E[\hat{\theta}-E(\hat{\theta})]+[E(\hat{\theta})-\theta]^2$$

$$= E[\hat{\theta}-E(\hat{\theta})]^2+[E(\hat{\theta})-\theta]^2$$

若 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量，则有：

$$E(\hat{\theta}-\theta)^2 = E[\hat{\theta}-E(\hat{\theta})]^2 = D(\hat{\theta})$$

2) 有效性

定义2 设

$$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

$$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

都是 θ 的无偏估计量，若有

$$D(\hat{\theta}_1)\le D(\hat{\theta}_2)$$

则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ **有效**.

例 设总体$X \sim EXP(\theta)$，密度函数为：

$$f(x:\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},\quad (\theta>0)$$

X_1，X_2，…，X_n是总体X的样本，已知

$\bar{X}$与$nX_{(1)}$均为θ的无偏估计量，问这两个估计量中哪个更有效?

解 因为指数分布$EXP(\theta)$的数字特征是

$$E(X)=\theta,\quad D(X)=\theta^2$$

所以有

$$E(\bar{X})=\theta,\quad D(\bar{X})=\frac{\theta^2}{n}$$

因为 $X_{(1)}$ 服从参数为 θ/n 的指数分布，所以有

$$E(X_{(1)})=\frac{\theta}{n},\quad D(X_{(1)})=(\frac{\theta}{n})^2$$

$D(nX_{(1)})=\theta^2 \Rightarrow \bar{X}$ 较 $nX_{(1)}$ 有效

产生 $X \sim EXP(\theta)$ $(\theta=4)$的样本，样本容量为 n=40.

8.9486	**1.7001**	**2.8195**	**0.9987**	**1.3417**	**0.4049**	**0.4620**	**4.3845**
1.4339	**6.4818**	**13.9547**	**1.1825**	**2.7724**	**2.9365**	**0.4005**	**1.9781**
1.9272	**0.6059**	**0.8652**	**2.2016**	**6.7948**	**5.7096**	**0.4818**	**14.2070**
2.8542	**7.1369**	**0.0862**	**1.3548**	**2.7688**	**3.0108**	**11.2791**	**1.5311**
12.6395	**10.5553**	**2.6030**	**9.3433**	**0.8028**	**0.8058**	**1.3005**	**7.5921**

θ $(\theta = 4)$ 的两个无偏估计值是：

$$\bar{x} = 4.0164 \qquad nx_{(1)} = 3.4480$$

重复产生 样本容量为40的$X \sim EXP(\theta)$ $(\theta=4)$的样本20次，则可得到θ的无偏估计值 $\bar{x}$ 20个，无偏估计值 $nx_{(1)}$也是20个

3.9087, 3.7937, 4.1877, 4.4015, 3.1399, 3.7808, 3.0470, 3.6807, 4.6275, 4.5048

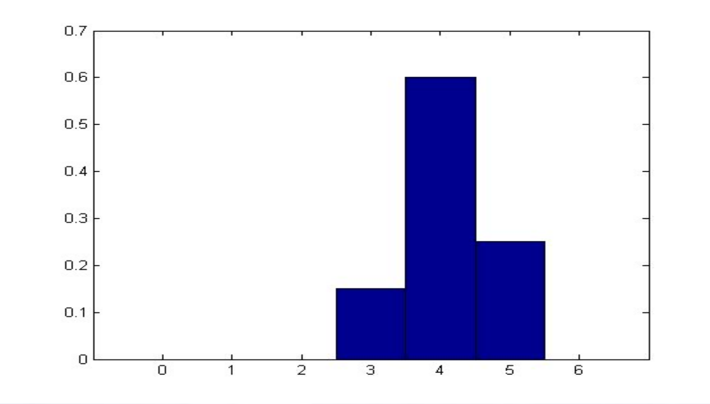
4.6566, 4.7191, 3.8288, 4.4179, 4.9774, 3.7875, 3.6706, 3.8232, 4.1565, 3.2278

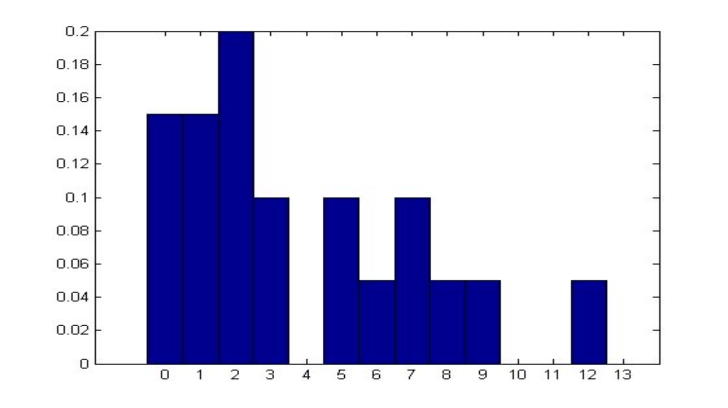
$$\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}\bar{x}^{(i)}=4.0169$$

2.5703, 0.1472, 5.0964, 6.9163, 9.0218, 1.0104, 1.6287, 1.6161, 11.9018, 2.5159

0.0814, 0.7393, 4.7748, 5.7961, 1.9422, 7.0430, 7.6257, 0.4802, 1.7463, 0.6162

$$\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}nx_{(1)}^{(i)}=3.6635$$





$\bar{x}$ 的直方图

$nx_{(1)}$ 的直方图

例 设 X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 X 的样本，且总体的方差 $D(X)$ 存在.

1) 设常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 满足：$\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$，

证明：$\hat{\mu}_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ 是 μ 的无偏估计量;

2) 证明 $\hat{\mu} = \bar{X}$ 较 $\hat{\mu}_1$ 有效.

算术平均比加权平均有效

3) 相合性

定义3 设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 θ 的估计量，

若对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to+\infty} P\{|\hat{\theta}-\theta|\geq\varepsilon\}=0$$

则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的**相合估计量**.

随着样本容量 n 的增加，估计量与未知参数真值的绝对误差较大的可能性越来越小

产生 $X \sim EXP(\theta)\ (\theta = 4)$的样本，样本容量分别为

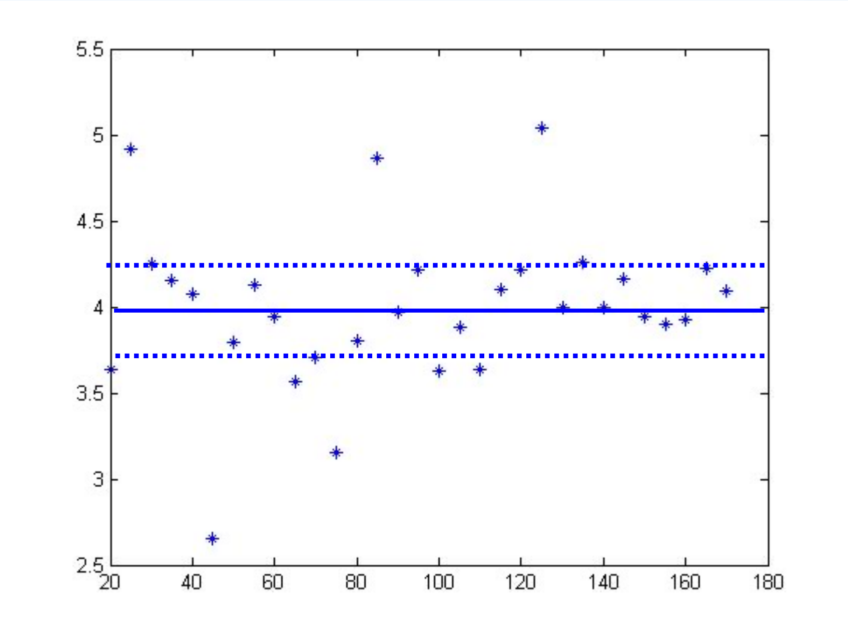
n=40，45，50，55，…，190.

可计算得到 θ 在不同样本容量下的无偏估计值

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

3.6373	4.9192	4.2534	4.1501	4.0769	2.6506	3.7957	4.1315	3.9426
3.5650	3.7101	3.1572	3.8059	4.8649	3.9652	4.2126	3.6263	3.8813
3.6348	4.1001	4.2145	5.0413	3.9987	4.2544	3.9972	4.1618	3.9442
3.8982	3.9283	4.2238	4.0956					

θ 在不同样本容量下的无偏估计值 $\bar{x}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$



相合性的相关结论

1) 样本 k 阶矩是总体 k 阶矩的相合估计量；

----大数定律证明

2) 若 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} D(\hat{\theta})=0$，

则 $\hat{\theta}$ 是 θ 的相合估计量；

----切比雪夫不等式证明

3) 矩估计量一般是相合估计量.

例 证明：无论总体 X 服从什么分布，若其均值和方差

$$\mu = E(X),\quad \sigma^2 = D(X)$$

均存在，则样本均值 $\bar{X}$ 和样本方差 S^2 分别是总体均值 μ 和总体方差 σ^2 的相合估计.