



# 概率论与数理统计

## 第三十一讲 抽样分布定理

## 第31讲 抽样分布定理

样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$   总体  $X \sim F(x)$

统计量  $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$



### ● 问题

统计量  $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  服从什么分布?

本讲主要介绍在正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  下, 样本均值  $\bar{X}$ 、样本方差  $S^2$  及其函数的分布.

## 第31讲 抽样分布定理

**定理1** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的样本, 则有

1)  $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$  ;

2)  $\bar{X}$  与  $S^2$  相互独立 ;

3)  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$  .

其中  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ .

## 第31讲 抽样分布定理

**定理2** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的样本, 则有

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

## 第31讲 抽样分布定理

**定理3** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  的样本； $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  是来自总体  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  的样本，且两个样本相互独立，则有

$$\frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \sim F(n-1, m-1).$$

其中  $S_1^2, S_2^2$  分别是两个样本的样本方差.

## 第31讲 抽样分布定理

**定理4** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $N(\mu_1, \sigma^2)$  的样本； $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  是来自总体  $N(\mu_2, \sigma^2)$  的样本，且两个样本相互独立，则有

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t(n + m - 2).$$

## 第31讲 抽样分布定理

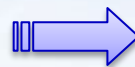
其中  $\bar{X}, \bar{Y}, S_1^2, S_2^2$  分别是两个样本的样本均值和样本方差, 且

$$S_{\omega}^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}, \quad S_{\omega} = \sqrt{S_{\omega}^2}.$$

## 第31讲 抽样分布定理

**证明** 由定理1 知

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad \bar{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma^2}{m}\right)$$

 
$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim N(0, 1)$$

另外又有

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \quad \frac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-1)$$



## 第31讲 抽样分布定理

由  $\chi^2$  分布的可加性有

$$\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n+m-2)$$

因为  $\bar{X}, \bar{Y}$  与  $S_1^2, S_2^2$  相互独立, 由  $t$  分布定义有:

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \cdot \sqrt{\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{(n+m-2)}} \sim t(n+m-2)$$

## 第31讲 抽样分布定理

由  $\chi^2$  分布的可加性有

$$\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n+m-2)$$

因为  $\bar{X}, \bar{Y}$  与  $S_1^2, S_2^2$  相互独立, 由  $t$  分布定义有:

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t(n+m-2).$$

## 第31讲 抽样分布定理

**例** 从总体  $N(20, 16)$  抽取了样本容量为25的样本，求样本均值落在 18与22之间的概率。

**解** 由定理1有  $\bar{X} \sim N(20, \frac{16}{25}) \Rightarrow \frac{\bar{X} - 20}{4/5} \sim N(0, 1)$

由此得到

$$\begin{aligned} P\{18 < \bar{X} < 22\} &= P\left\{\frac{18-20}{4/5} < \frac{\bar{X}-20}{4/5} < \frac{22-20}{4/5}\right\} \\ &= \Phi(2.5) - \Phi(-2.5) \\ &= 2\Phi(2.5) - 1 = 0.9876 \end{aligned}$$

## 第31讲 抽样分布定理

**例** 设  $X_1, X_2, \dots, X_{10}$  是来自总体  $N(0, 4)$  的样本, 试确定常数  $C$ , 使得

$$P\left\{ \sum_{i=1}^{10} X_i^2 > C \right\} = 0.05.$$

## 第31讲 抽样分布定理

**例** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$  是来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的样本, 记

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

试证：

$$\sqrt{\frac{n}{n+1}} \frac{X_{n+1} - \bar{X}_n}{S_n} \sim t(n-1).$$

## 第31讲 抽样分布定理

**证明** 因为  $X_{n+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\bar{X}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$$\Rightarrow X_{n+1} - \bar{X}_n \sim N(0, \frac{n+1}{n}\sigma^2)$$

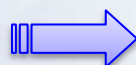
$$\Rightarrow \frac{X_{n+1} - \bar{X}_n}{\sigma\sqrt{(n+1)/n}} \sim N(0, 1)$$

$$\text{又因为 } \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

## 第31讲 抽样分布定理

且  $X_{n+1} - \bar{X}_n$  与  $S_n^2$  相互独立, 由  $t$  分布定义有:

$$\frac{\frac{X_{n+1} - \bar{X}_n}{\cancel{\sigma} \sqrt{(n+1)/n}}}{\sqrt{\frac{\cancel{(n-1)} S_n^2}{\cancel{\sigma^2}} / \cancel{(n-1)}}} \sim t(n-1)$$


$$\sqrt{\frac{n}{n+1}} \frac{X_{n+1} - \bar{X}_n}{S_n} \sim t(n-1).$$

## 第31讲 抽样分布定理

**例** 设  $X_1, X_2, X_3, X_4$  是来自总体  $N(0, 1)$  的样本, 试确定常数  $C$ , 使得

$$P\left\{ \frac{(X_1 - X_2)^2}{(X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2} > C \right\} = 0.95.$$