概率论与数理统计

第四十讲

假设检验的基本思想(II)

第40讲 假设检验的基本思想(II)

- **问题** 如何做出决策？

前提 $P\{\underbrace{\text{拒}H_0}_{\text{事件}} \mid H_0\text{真}\} \le \underbrace{\alpha}_{\text{很小的数}}$

根据 小概率事件在一次实验中几乎不可能发生（女士品茶问题）

做出决策 等价于 找到拒绝 H_0 对应的事件

第40讲 假设检验的基本思想(II)

- **关键**

构造一个H_0为真时小概率事件，观察该事件在采样中是否发生，若发生则拒绝 H_0

H_0为真时的小概率事件发生对应 拒绝 H_0

步骤1 假设 H_0为真，构造一个统计量

例：女士品茶问题中对应“说对的杯数”

第40讲 假设检验的基本思想(II)

步骤2 根据此统计量来确定一个事件（等价于给出 H_0 的否定域）

- **要求** H_0为真时，该事件是小概率事件

例： 女士品茶中，取 $\alpha = 0.05$ ，则事件为$\{$说对的杯数大于等于4$\}$

步骤3 进行实验，利用采样数据，判断小概率事件是否发生，若发生则拒绝 H_0

第40讲 假设检验的基本思想(II)

- **问题一**　如何构造统计量？
- **问题二**　如何构造事件（拒绝 H_0）？

例 某厂生产一种铆钉，直径标准定为 $\mu_0=2$厘米，现从该厂生产的铆钉中随机抽 100 个，测得直径的均值为 $\bar{x}=1.978$ cm，设铆钉的直径从 $N(\mu,\sigma^2)$，$\sigma=0.2$ cm，问该厂生产的铆钉是否合格？（$\alpha=0.05$）

$$H_0:\ \mu=\mu_0 \quad H_1:\ \mu\neq\mu_0$$

拒绝 H_0? $\Longleftrightarrow$ 什么情况发生会对 H_0 不利？

问题 什么情况发生会对 H_0 有利？ ？

分析 $\overline{X}$ 的值应在 μ 附近波动

故 $|\overline{X}-\mu_0|$ 偏小对 H_0 有利！

因此，可求一 **临界值** C

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } |\overline{X}-\mu_0| \geq C \text{ 时拒绝 } H_0 \\ \text{当 } |\overline{X}-\mu_0| < C \text{ 时接受 } H_0\end{array}\right\}\text{如何确定 } C\text{ ？}$$

第40讲 假设检验的基本思想(II)

问题　如何确定未知参数C？

分析　决定未知参数 C 的条件为：

$$P\{拒H_0|H_0真\}\le\alpha$$

$$拒绝\ H_0 \iff |\bar{X}-\mu_0|\ge C$$

$$H_0真 \iff \mu=\mu_0$$

$$P\{拒H_0|H_0真\}=P(|\bar{X}-\mu_0|\ge C|\mu=\mu_0)\ \le\alpha$$

——概率方程

如何依据上述概率方程求解未知参数C？

第40讲 假设检验的基本思想(II)

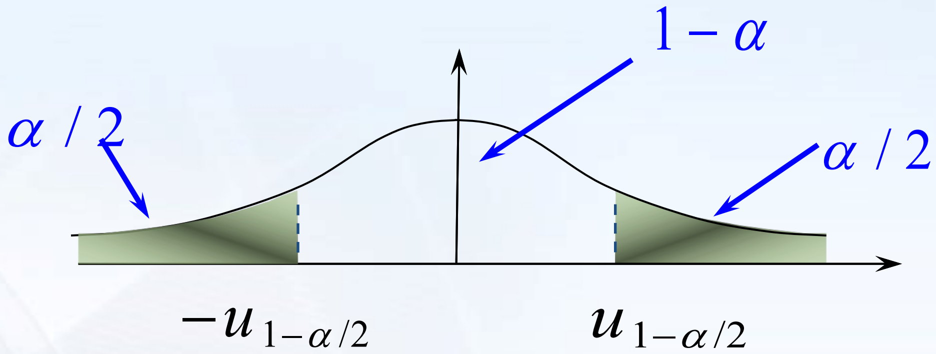
问题 如何依据上述概率方程求解C？

解 $\mu=\mu_0$ 成立时，显然 $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$$\left|\bar{X}-\mu_0\right| \geq C \Longleftrightarrow \left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq \frac{C}{\sigma/\sqrt{n}}$$

第40讲 假设检验的基本思想(II)

检验统计量 $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$



拒绝 H_0 时的事件 $\left|\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq u_{1-\alpha/2}$ —拒绝域

下一步，计算统计量，查正态分布的分位表，观察其值是否落在拒绝域内，

$\bar{x} = 1.978\text{cm},\quad \sigma = 0.02\text{cm},\quad \mu_0 = 2\text{cm},$

$n = 100,\quad u_{0.975} = 1.96,$

$$\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = 1.1 < 1.96$$ 接受原假设！

若 $\bar{x} = 1.9$，则 $\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = 5 \geq 1.96$ 拒绝原假设！

归纳 假设检验的步骤：

1.根据问题，提出原假设 H_0和备择假设 H_1；

2.构造检验统计量，其选取与原假设有关；

3.对于给定的显著水平，确定 H_0的拒绝域；

4.抽样，判断样本观察值是否落在拒绝域内！

例 从甲地发送一个讯号到乙地,由于存在线路噪声干扰，使得甲地发送一个幅值为 μ 的讯号，而乙地收到的讯号是一个服从 $N(\mu, 4)$ 分布的随机变量．在测试中，甲地将同一讯号发送了5次，乙地收到的讯号值为

$$8.1, 9.3, 9.9, 8.5, 10.1$$

接收方有某种理由猜测甲地发送的讯号值为8,问这种猜测是否正确 $(\alpha = 0.05)$

第40讲 假设检验的基本思想(II)

- **问题** 能否下结论说“接收方的猜测正确”？

  答：不能。

  从题给数据所得结论是“接受 H_0”，而此结论的II类风险有多大并不清楚.

  故无法肯定接收方的猜测是“正确”的，只能认为接收方的猜测是“有理由”的.

$$|\bar{x}-\mu_0|=|9.18-8|=1.18<1.75$$

接收方也有理由猜测是9

第40讲 假设检验的基本思想(II)

需要进一步讨论的问题：

1.假设的类型

2.检验统计量的选取

与假设类型、总体分布、总体中其他参数的取值情况等有关

3.拒绝域的确定

以下只讨论正态分布的情况

例 某厂生产的固体燃料推进器燃烧率服从正态分布 $N(40,2^2)$ (cm/s)，现用新方法生产了一批推进器，从中随机抽取 $n=25$ 只，试验后算得 $\bar{x}=41.25$，设新方法的总体方差不变，问新方法燃烧率是否有显著提高？ $\alpha=0.05$

第40讲 假设检验的基本思想(II)

- **问题** 要检验如下哪个假设？

双边检验 $H_0: \mu = \mu_0 = 40, \ H_1: \mu \neq \mu_0$ ×

$H_0: \mu \geq \mu_0 = 40, \ H_1: \mu < \mu_0$ ×

单边检验 $H_0: \mu \leq \mu_0 = 40, \ H_1: \mu > \mu_0$ √

第40讲 假设检验的基本思想(II)

提出假设：$H_0: \mu \le \mu_0 = 40,\ H_1: \mu > \mu_0$

- **分析** $X \sim N(\mu, 2^2)$

  $\bar{X}$ 的值应在 μ 附近波动

  若 H_0 成立，则 $\bar{X} - \mu_0$ 偏小于0！

因此，可求一 **临界值 C**

$$\left.\begin{aligned} &\text{当 } \bar{X} - \mu_0 \ge C \text{ 时拒绝 } H_0 \\ &\text{当 } \bar{X} - \mu_0 < C \text{ 时接受 } H_0 \end{aligned}\right\} \text{如何确定} C\text{？}$$

- **问题** 若H_0成立，是否有 $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

  答 不一定，只有 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

- **问题** 如何确定拒绝域？形式：$\bar{X}-\mu_0 \geq C$

$$\left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{C}{\sigma/\sqrt{n}} \middle| \mu \leq \mu_0\right\} = \left\{\frac{\bar{X}-\mu-(\mu_0-\mu)}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{C}{\sigma/\sqrt{n}} \middle| \mu \leq \mu_0\right\}$$

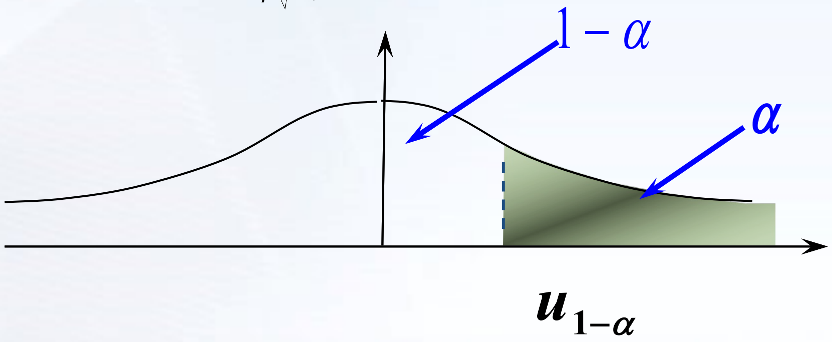
$$\subset \left\{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{C}{\sigma/\sqrt{n}} \middle| \mu \leq \mu_0\right\}$$

第40讲 假设检验的基本思想(II)

故 $P\left\{\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \dfrac{C}{\sigma/\sqrt{n}} \middle| \mu \le \mu_0\right\} \le P\left\{\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \dfrac{C}{\sigma/\sqrt{n}} \middle| \mu \le \mu_0\right\}$

$$=\alpha$$

因此拒绝域为：$\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge u_{1-\alpha}$



第40讲 假设检验的基本思想(II)

- **比较** 单边检验与双边检验

$$\begin{cases} \text{单边检验I类风险：} \le \alpha \\ \text{双边检验I类风险：} = \alpha \end{cases}$$

$\bar{x} = 41.25,\ n = 25,\ \sigma = 2,\ \mu_0 = 40,\ u_{1-\alpha} = 1.65$

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = 3.125 \ge 1.65,$$ 拒绝原假设

第40讲 假设检验的基本思想(II)

综上总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，方差已知时，$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,\ 1)$

(1) $H_0: \mu = \mu_0$，$H_1: \mu \neq \mu_0$　　U 检验

拒绝域 $\left|\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq u_{1-\alpha/2}$，　I类风险 $= \alpha$

(2) $H_0: \mu \leq \mu_0$，$H_1: \mu > \mu_0$

拒绝域 $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq u_{1-\alpha}$，　I类风险 $\leq \alpha$

(3) $H_0: \mu \geq \mu_0$，$H_1: \mu < \mu_0$

拒绝域为? $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq u_{\alpha}$　I类风险：$\leq \alpha$