# 概率论与数理统计

## 第六讲

## 全概率公式与贝叶斯公式

## 1. 全概率公式

- 一个用于计算概率的公式
- **“先化整为零，再聚零为整”**

**例**（色盲）人的性别由一对性染色体决定：男为XY，女为XX，每个人从父母处各得到一个性染色体，色盲基因由X染色体携带，且若男性的X染色体有此基因则男性患色盲，女性则要两个X染色体均有此基因才患色盲，而两个X是否有色盲基因是独立的。设色盲基因出现概率为0.08。又设男女婴出生比为110:100。问一新生儿有色盲的概率是多少？

**分析** 设“新生儿有色盲”为事件$A$，则直接计算$P(A)$是不方便的。但若固定新生儿性别则容易算出。

男性　　　　　　　　女性

染色体

0.08

0.08

0.08

患病概率　0.08　　　　0.0064

若记$B$表示“男婴”，$\bar{B}$表示“女婴”，则有

$$P(A|B)=0.08 \qquad P(A|\bar{B})=0.0064$$

加权平均 $P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|\bar{B})P(\bar{B})$

$$=\frac{0.08\times 1.1}{1.1+1}+\frac{0.0064\times 1}{1.1+1}=0.045$$

注意到在此例中 $B\cup\bar{B}=S$ 且 $B\bar{B}=\varnothing$.

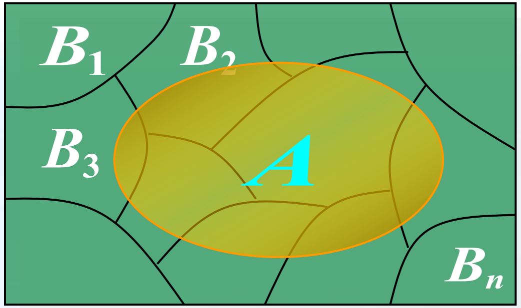
一般地有

**定义** 称 $S$ 的事件 $B_1,\ldots,B_n$ 为一个划分，指它们满足

$1^\circ\quad \bigcup_{i=1}^{n}B_i=S$

$2^\circ\quad B_iB_j=\varnothing,\quad i,j=1,\ldots,n,\quad i\neq j$

考虑任一事件$A$ 与诸 $B_i$之交。




$S$ 计算 $A$ 的概率就可以

1° **"先化整为零"** 计算 $P(A|B_i)$, $i=1,2,\ldots,n$

2° **"再聚零为整"** 计算 $P(A|B_1)P(B_1)+\ldots+P(A|B_n)P(B_n)$

注意到$P(A|B_i)P(B_i)=P(AB_i)$, 又 $A=\bigcup_{i=1}^{n}AB_i$,

且每一项是互斥的，故有

- **定理**（全概率公式）设$B_1,\ldots,B_n$是 $S$ 的一个划分，$A$为事件，则 $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$.

- 在实际问题中“划分”往往是自然的。

**例**（追捕）现追捕某犯罪嫌疑人，据分析他外逃、市内藏匿、自首的概率依次为0.3，0.5，0.2。又设在外逃及市内藏匿情况下，成功缉拿的概率依次是0.4, 0.7。问该犯罪嫌疑人最终归案的概率是多少？

问　此问题中“划分”是什么？

外逃($B_1$)、市内藏匿($B_2$)、自首($B_3$)

答　设$A$：最终归案

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)$$

$$=0.4\times0.3+0.7\times0.5+1\times0.2=0.67$$

**例**（电游竞赛）某电游竞赛分初赛与复赛，初赛采用5分制，设某人初赛分数$X$等可能地取$0,1,\ldots,5$；复赛则可以重复玩，直至出现第一个$Y$满足$Y \geq X$为止。设$Y$在$\{X, X+1,\ldots,5\}$中取值也是等可能的，问最后复赛获5分的概率是多少？

提示　令$B_i$表示“$X=i$”，$A$表示“$Y=5$”

答案　$\frac{1}{6}(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{6})=\frac{49}{120}$

**例**（输血问题）中国人血型分布如下表

| 血型 | O | A | B | AB |
|---|---|---|---|---|
| 比例 | 0.41 | 0.28 | 0.24 | 0.07 |

今随机抽取2人，问甲能给乙输血的概率为多少？

**分析** 输血涉及双方的血型，可任取一方可能血型作划分来计算。

可设 $C$ 为“甲可给乙输血”，

$A_0, A_1, A_2, A_3$分别是“甲的血型为O, A, B, AB”．

可知$P(A_0)=0.41$, $P(A_1)=0.28$, $P(A_2)=0.24$, $P(A_3)=0.07$.

又由卫生常识可知

$P(C|A_0)=1$, $P(C|A_1)=0.28+0.07=0.35$,

$P(C|A_2)=0.24+0.07=0.31$, $P(C|A_3)=0.07$.

故由全概率公式

$$P(C)=\sum_{i=0}^{3}P(C\mid A_i)P(A_i)=0.5873.$$

注：若设$A_0$, $A_1$, $A_2$, $A_3$是“乙的血型分别是 O, A, B, AB”，则$P(C|A_i)$不同，但$P(C)$不变。

## 2. 贝叶斯公式

- 全概率公式通过划分$\{B_i \mid i=1,\ldots,n\}$来计算一个事件$A$的概率
- 有时候需要弄清楚在$A$发生的条件下，每个$B_i$发生的条件概率

**例**（癌症检查）某种医学方法用于检查某种癌症，已知该癌症的发病率为0.002，该方法对于癌症患者呈阳性反应的概率为0.98，对于非癌症患者呈阳性反应的概率为0.04。若某人在此项检查中呈阳性，他实际患癌症的概率为多少？

- **分析** 设$C$为“患癌症”,此处$C,\bar{C}$ 是一个划分
  $A$为“反应呈阳性”

即要求$P(C|A)$. 按条件概率公式，要求$P(CA)$与$P(A)$.

依已知条件可写成 $P(CA)=P(A|C)\,P(C)$

**为什么不写成$P(C|A)P(A)$?** 0.98 0.002

如果求$P(A)$，利用划分$C,\bar{C}$，由全概率公式

$$P(C\mid A)=\frac{P(A\mid C)P(C)}{P(A\mid C)P(C)+P(A\mid \bar{C})P(\bar{C})}$$

$$=\frac{0.98\times 0.002}{0.98\times 0.002+0.04\times 0.998}\approx 0.0468$$

一般地，有如下定理

- **定理**（贝叶斯公式）

设$B_1,\ldots,B_n$是$S$的一个划分，$A$为事件，则对于$i=1,\ldots,n$，有

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A \mid B_k)P(B_k)}.$$

# 第6讲　全概率公式与贝叶斯公式

- 贝叶斯公式常用于由果溯因，可根据已发生的事件来推断使之发生各个因素的可能性
- **先验概率**与**后验概率**：
  - 贝叶斯统计的基本出发点
- **先验概率**：由以往的经验得到的概率

  **后验概率**：经随机试验后，

  由结果对先验概率的修正

  **修正方法**：贝叶斯公式

**例**（靶纸判断）已知一老战士与一新战士射击命中率分别为0.9与0.5。两人一同去射击，各3发。设每发命中与否均为独立的。后发现现场留下一靶纸，初步判断认为属于新、老战士留下的可能性是等同的。后发现靶纸上有2发命中，问此时对可能性问题有什么新看法？

**分析** 设$A$为“命中2枪”，

$B_1$为“老战士留下”，$B_2$为“新战士留下”。

则 $\boxed{P(B_1)=P(B_2)=1/2.}$ **先验：二者可能性相等**

此题要比较$P(B_1|A)$与$P(B_2|A)$的大小。

由于 $$P(B_i\mid A)=\frac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum_{k=1}^{2}P(A\mid B_k)P(B_k)},i=1,2$$

故即比较$P(A|B_1)$与$P(A|B_2)$的大小。

$$P(A\mid B_1)=\binom{3}{2}\times0.9^2\times0.1=0.243$$ $\boxed{P(B_1|A)<P(B_2|A)}$

$$P(A\mid B_2)=\binom{3}{2}\times0.5^2\times0.5=0.375$$ **后验：新战士可能性大**