概率论与数理统计

第三十九讲

假设检验的基本思想(I)

第39讲 假设检验的基本思想(I)

问题　何为假设检验？

实际生活中，经常需要对某个问题做出判断

例 刑事案件中，某嫌疑人是否是真正的案犯？

塑化剂到底对人的身体有无显著影响？

一般做法：先提出一个假设，再来找证据证实

例如：**无罪推定**；

有罪推定。

问题数理统计中如何进行假设检验？

第39讲 假设检验的基本思想(I)

例(定货问题)

甲厂向乙厂订购一批产品，合同规定次品率不得超过 5%。现随机抽取 200 件进行检查，发现有 9 件次品，问甲方是否应接受这批产品？

- **分析** 抽样结论是次品率为4.5%，能出厂

争议
乙厂：抽样结论为4.5%，未超过5%，合格
甲厂：抽样结果是随机的，有波动性，可能实际次品率超过5%

- **假设** 产品不合格 $p \geq 5\%$

例(寿命问题)

据推测，矮个子比高个子寿命长. 下表给出了美国11位自然死亡的总统的寿命，他们分属两类: 矮个子和高个子，试问这些数据是否符合上述推测？

高个子						
身高	185.5	188	188	188	188	189
寿命	78	67	56	63	64	83
矮个子						
身高	162.5	167.5	167.6	170	170	
寿命	85	79	67	90	80	

分析 高个子的平均寿命为68.5，
矮个子的平均寿命为80.2，有依据！

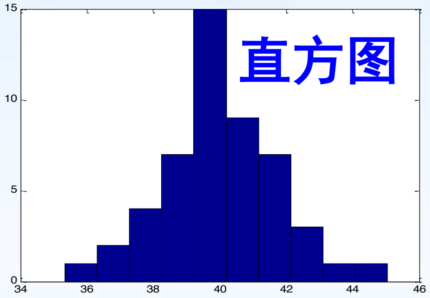
高个子						
身高	185.5	188	188	188	188	189
寿命	78	67	56	63	64	83

矮个子						
身高	162.5	167.5	167.6	170	170	
寿命	85	79	67	90	80	

- **分析** 可假设身高服从正态分布，
  高个子身高 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$
  矮个子身高 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
- **假设** $\mu_1 \geq \mu_2$?

例(测量问题) 一台测速雷达对某匀速运动物体进行测量，50次测量的结果如下，问该雷达的测量误差是否服从正态分布？

41.04，	39.96，	39.93，	38.40，	42.04，	39.73，	38.57，	42.70，	39.55，	38.82
39.41，	38.30，	37.76，	45.05，	43.31，	40.61，	37.49，	38.27，	39.65，	41.58
37.34，	35.34，	37.10，	40.67，	40.78，	40.90，	39.74，	40.37，	39.05，	41.72
37.28，	40.91，	38.30，	39.33，	41.11，	42.08，	37.76，	42.52，	41.32，	39.86
39.61，	39.56，	39.39，	40.05，	40.10，	41.65，	43.05，	40.93，	39.58，	41.25



分析

假设测量值是随机变量 X，问题是根据数据对假设：X服从正态分布，做出拒绝还是接受的结论。

归纳 上述三个问题的特点：

- 都需要对总体提出某个假设；
- 都需要根据采样来对假设进行检验；
- 结论只有“接受”或“拒绝”两种；
- 问题不同，假设不同。

例1为单总体，总体分布形式已知，对参数作假设

例2为双总体，总体分布形式已知，对参数 作假设

例3是直接对总体分布作假设

第39讲 假设检验的基本思想(I)

"拒绝"假设 **等价于** "接受"其对立结论

- **假设的提法** H_0：原假设（零假设）
  H_1：备择假设（对立假设）

例 (定货问题)

$$H_0: p \geq 5\% \quad H_1: p < 5\%$$

例 (寿命问题）

$$H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \quad H_1: \mu_1 < \mu_2$$

例 (测量问题）

H_0：X服从正态分布　H_1：X不服从正态分布

第39讲 假设检验的基本思想(I)

假设检验分类：

参数检验：

总体分布形式已知，对总体分布中的参数进行检验(订货问题、寿命问题)

非参数检验：

对总体分布的假设作检验(测量问题)

以下主要讨论参数检验问题！

第39讲 假设检验的基本思想(I)

问题 依据什么原理做出决策？

例（Fisher的女士品茶问题）：一种饮料由牛奶和茶按照一定比例混合而成，可以先倒茶后倒牛奶（TM）或者反过来（MT）。某女士称，她可以鉴别是TM还是MT。

设计如下试验来确定她的说法是否可信。准备8杯饮料，TM和MT各半，把他们随机的排成一列让女士依次品尝，并告诉她TM和MT各半，然后请她说出哪4杯是TM，假设她全说对了。

Fisher 的推断过程：

引进一个假设 H：该女士并无鉴别能力

当H成立时，则全部说中的概率为：$1/C_8^4 = 1/70$

因此当女士全部挑对时，只有下列两种情形：

- H不成立，即该女士具有鉴别能力；
- 发生了一个概率为1/70的事件。**小概率事件**

由“实际推断原理”，有理由承认第一种可能性，也就是采样提供了一个显著不利于H的证据。

问题 如果该女士只说对三杯，则情况怎样？

若 H成立，则说对三杯以上的概率为：

$$\frac{C_4^3 C_4^1 + 1}{C_8^4} = 0.243$$

认为0.243不算小，不拒绝 H

此时，若拒绝H可能会犯错误

第一种情况下，拒绝H也可能犯错误。

总结：Fisher的基本思想

- 有一个明确的假设 H
- 给定一个所能容忍的犯这类错误的上限
- 在此上限下,判断证据对拒绝 H 是否显著
- 只要证据对拒绝 H 不显著即接受 H

第39讲 假设检验的基本思想(I)

分析 决策的依据是样本，样本取值有随机性，于是就存在犯错误的可能

若拒绝原假设，可能会**“弃真”**，犯**第一类错误**

若接受原假设，可能会**“取伪”**，犯**第二类错误**

I类风险：犯第一类错误的概率；

II类风险：犯第二类错误的概率；

直观：二者很难同时达到最小，如何折中？

检验原则一：保护 H_0

第39讲 假设检验的基本思想(I)

提出“检验原则一”的原因：

(1) H_0的内容很重要，或关乎检验者的利益

例如，订货问题中，H_0: 产品不合格($p \geq 5\%$)？

例如，无罪推断中疑罪从无。

(2) “弃真”的后果大于“取伪”的后果

例如：2013年禽流感期间，一旦出现高烧一般先假定为禽流感患者。

分析 H_0 和 H_1 的地位不对称！

第39讲 假设检验的基本思想(I)

问题 “保护原假设” 在数学上怎么表示？

分析 ⟷ 保护以下哪种决策状态？

	H_0 为真	H_1 为真
决策	接受 H_0	拒绝 H_1
决策	拒绝 H_0	接受 H_1

α为预先给定的某充分小的数，一般取 0.1, 0.05, 0.025, 0.01 等。

数学描述：$P\{拒H_0 | H_0真\}$ 必须充分小

即 $P\{拒H_0 | H_0真\} \le \alpha$ —— I 类风险

问题 只管 I 类风险，不管 II 类风险。

第39讲 假设检验的基本思想(I)

分析 如何提出原假设？ **其他方法？**

方法：将不应轻易被否定的结论作为原假设！

分析

控制I类风险：$P\{拒H_0|H_0真\}\leq\alpha$

如果做出接受 H_1 的结论，**则结论可靠**！

不管II类风险：

表明如果做出接受 H_0 的结论，则结论未必可靠！

第39讲 假设检验的基本思想(I)

概率反证法:将 H_0 设为与貌似结论相反的结论

例 有一批电子元件，要求其使用寿命不得低于1000小时，否则，定为不合格产品，现抽25件，测得平均寿命为950小时，已知该元件的寿命服从 $N(\mu,100^2)$，试确定这批元件是否合格（$\alpha=0.05$）？

$$H_0:\mu\geq 1000$$

检验原则二：最优检验

控制第一类风险不超过α的前提下，使检验问题的第二类风险达到最小。

最优检验存在两个问题：

1.第二类风险很难计算；

2.实际应用中存在最优检验的情况很少。

第39讲 假设检验的基本思想(I)

以下讨论“检验原则一”下的假设检验问题
—**Fisher 显著性检验问题**。

称 α为显著性水平

以后常用“在显著性水平 α下的对 H作显著性检验”这类术语.

例：女士品茶问题！

关于显著性检验的归纳理解

- 检验原则决定 H_0与 H_1的地位不对等，要注意提出假设的方法；
- 依“原则一”检验时，同时冒着I类和II类风险，但I类风险可控，而II类风险未知；
- 依“原则一”检验时，得出拒绝 H_0的结论时可靠性相对高，反之可靠性相对较低！

谢 谢！