概率论与数理统计

第十八讲

二维随机变量函数的分布（Ⅰ）

0302

同一维情形一样，有时我们需要二维随机变量的变换或函数的分布.

例（落点问题）设导弹理论点为 $(0,0)$，实际落点 (X, Y) 为随机变量，设它有密度函数 $f(x,y)$.

令 $\rho=\sqrt{X^2+Y^2}$，θ 为 x 正方向与 ρ 的方向的夹角，则 $(\rho,\theta)=\big(\rho(X,Y),\theta(X,Y)\big)$ 是 (X, Y) 的变换，问 (ρ,θ) 有什么样的分布？

进一步，设 (X,Y) 为二维随机变量, 分布已知, 一些普通的 (X, Y) 的函数 $X+Y$, X/Y, $\max\{X,Y\}$, $\min\{X,Y\}$, 它们的分布与(X, Y)的分布有什么关系?

或者一般地, 设(X,Y)分布已知，$h(x,y)$ 为确定的实函数, 问 $Z=h(X,Y)$ 的分布如何？我们将分别加以研究.

1. 二维变量变换的分布

- **问题** 设(X,Y)有密度函数 $f(x,y)$, (U,V)为(X,Y)的一个变换. 并设变换的雅可比矩阵存在, 且行列式不为零, 求(U,V)的密度函数$g(x,y)$.
- **分析** (U,V) 是 (X,Y) 的一个变换, 故可设

$$X = X(U,V),\ \ Y = Y(U,V),$$

又(U,V)的分布函数可表为

$$G(u,v) = P\{U \le u, V \le v\} = \iint\limits_{U \le u, V \le v} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

将上述变换用于积分，即得

$$G(u,v)=\int_{-\infty}^{u}\int_{-\infty}^{v} f\left(x\left(s,t\right),y\left(s,t\right)\right)\left|J(s,t)\right|\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

对上式求两阶偏导，即得

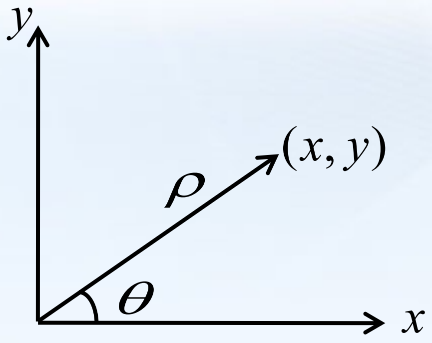
$$g(u,v)=\frac{\partial^2 G(u,v)}{\partial u\partial v}=f\left(x\left(u,v\right),y\left(u,v\right)\right)\left|J\left(u,v\right)\right|.$$

例（落点问题）在前例中, 设 X,Y相互独立, 且均服从 $N\left(0,\sigma^2\right)$,求$\left(\rho,\theta\right)$的分布.

解: 令 $x=\rho\cos\theta,\ \ y=\rho\sin\theta$

则 $|J|=\rho$, 故

$$g(\rho,\theta)=\begin{cases}\dfrac{\rho}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{\rho^2}{2}} & \rho>0, 0<\theta\le 2\pi\\ 0 & \text{其余}\end{cases}$$



注 $g(\rho,\theta)$ 可表成分离形式 $g(\rho,\theta)=g_1(\rho)g_2(\theta)$,

其中 $g_1(\rho)=\begin{cases}\dfrac{\rho}{\sigma^2}e^{-\frac{\rho^2}{2}} & \rho>0\\ 0 & \text{其余}\end{cases}$ $\quad g_2(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & 0\le\theta\le 2\pi\\ 0, & \text{其余}\end{cases}$

说明：两者独立, 其中 g_1 所表示的分布称为瑞利(Rayleigh)分布.

第18讲　二维随机变量函数的分布（ I ）

- 变换公示的前提: 连续型随机变量, 变换可微, 且$|J|\neq 0.$
- 利用变换公式, 可推出一般随机变量可微二元函数的密度函数. 设(X,Y)具有密度函数 $f(x,y)$,求 $Z=h(X,Y)$ 的密度函数.

① 求分布函数 $F_{X,Z}(x,z)=\iint\limits_{\{X\le x\}\cap\{h(x,y)\le z\}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

② 做变换$(x,y)\to(x,z)$ $F_{X,Z}(x,z)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{z} f\left(x,y(x,z)\right)\left|J(x,z)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}z$

③ 得联合密度函数 $f_{X,Z}(x,z)=f\left(x,y(x,z)\right)\left|J(x,z)\right|$

④ 求得Z的边缘密度函数 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,y(x,z)\right)\left|J(x,z)\right|\mathrm{d}x$

2. 和的分布

设X, Y为连续型随机变量, 有密度函数$f(x,y)$.
$Z=X+Y$, 求Z的分布.

解：作变换$\begin{cases} x=x \\ y=z-x \end{cases}$，则$|J|=1.$

由变换公式

得 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x.$

对称地有 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y(x,z))\left|J(x,z)\right|\mathrm{d}x$

特别，若X与Y独立，则有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y$$

称 f_Z 为 f_X 与 f_Y 的卷积，记为 $f_Z=f_X*f_Y$.

例（独立正态和）设 X,Y 独立均服从$N(0,1)$，则 $Z=X+Y\sim N(0,2)$. 事实上由卷积公式，有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-\frac{z}{2})^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\sqrt{\pi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2(\sqrt{2})^2}}$$

对于一般的两独立正态随机变量

$X \sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right),\ Y \sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right),$

可以同样计算出 $Z = X + Y \sim N\left(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2\right).$

用数学归纳法不难证明, 若 $X_i \sim N\left(\mu_i,\sigma_i^2\right), i = 1,\cdots,n,$

且相互独立, 则 $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i,\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right).$

利用前面关于正态线性函数的结论, 可知

若 $X_i \sim N\left(\mu_i,\sigma_i^2\right), i = 1,\cdots,n,$ 且相互独立, a_i 为一组

非零的数, 则 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\mu_i,\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2\right).$

第18讲　二维随机变量函数的分布（Ⅰ）

例 设某种系统的寿命由一个关键部件决定, 该部件寿命 $X \sim EXP(\theta)$, 另有一相同的备用件, 问系统的工作寿命服从什么分布？

解: 设另一个备用件的寿命为Y,由题意$Y \sim EXP(\theta)$, 且与X独立, 故系统工作寿命为 $Z=X+Y$, 由卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z) f_Y(z-x)\mathrm{d}x =\int_0^z \frac{1}{\theta^2} e^{-\frac{x+z-x}{\theta}}\mathrm{d}x=\frac{z}{\theta^2}e^{-\frac{z}{\theta}} \quad (z>0)$$

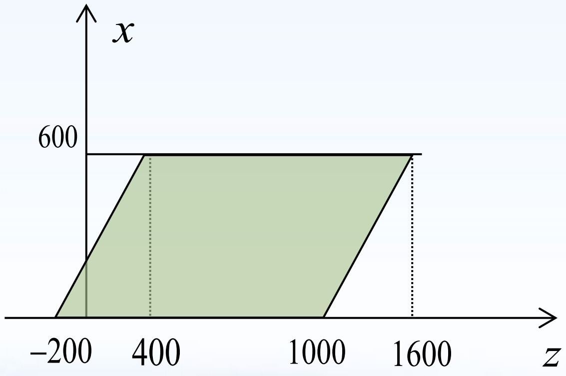
思考 设 $X_i \sim EXP(\theta)$, $i=1,2,\cdots,n$, 且相互独立, 则

$Z=\sum_{i=1}^{n} X_i$ 的密度函数为 $f_Z(z)=\begin{cases} \dfrac{z^{n-1}}{\theta^n(n-1)!}e^{-\frac{z}{\theta}}, & z>0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}$

例（投资组合）设投资甲种产品每万元年收益 $X\sim U(0,600)$, 投资乙种产品每万元年收益 $Y\sim U(-200,1000)$, 若两种收益独立, 求投资组合 $Z=X+Y$ 的分布.

分析 用卷积公式麻烦, 作出 (X,Z) 的联合密度的支撑图, 再求 Z 的边缘密度,

可见 $$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{z+200}{600\times1200} & -200\le z<400\\ \dfrac{1}{1200} & 400\le z<1000\\ \dfrac{1600-z}{600\times1200} & 1000\le z<1600\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



2. 商的分布

- **问题** 设 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)$，
  求 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的密度函数.

解： 考虑变换 $\begin{cases} x = yz \\ y = y \end{cases}$，则 $|J|=|y|$.

故 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(yz,y)|y|\,\mathrm{d}y.$$

例 设 X, Y 独立同分布 $EXP(1)$,求 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的分布.

解： $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y) f_Y(yz)|y|\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-(y+yz)} y\mathrm{d}y=\frac{1}{1+z}\int_0^{+\infty} e^{-(y+yz)}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{(1+z)^2} \quad (z>0)$$

即 $f_Z(z)=\begin{cases}(1+z)^{-2} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$