概率论与数理统计

第三十七讲

区间估计(II)

正态总体参数的区间估计

一、一个总体$N(\mu, \sigma^2)$的情形

1、方差 σ^2未知，μ 的置信区间

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，σ^2未知，求 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

因为 μ 的MLE是$\bar{X}$,选取枢轴变量

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

正态总体参数的区间估计

一、一个总体$N(\mu, \sigma^2)$的情形

1、方差 σ^2未知，μ 的置信区间

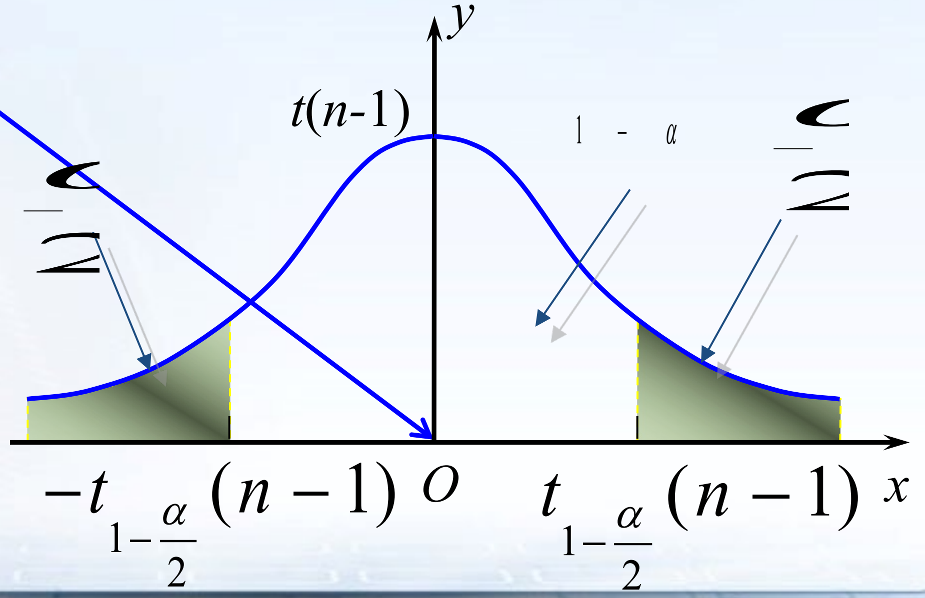
设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，σ^2未知，求 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

因为 μ 的MLE是$\bar{X}$，选取枢轴变量

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

第37讲 区间估计(II)

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$



$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

即有 $P\{-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\} = 1-\alpha$

解 $$-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

得 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

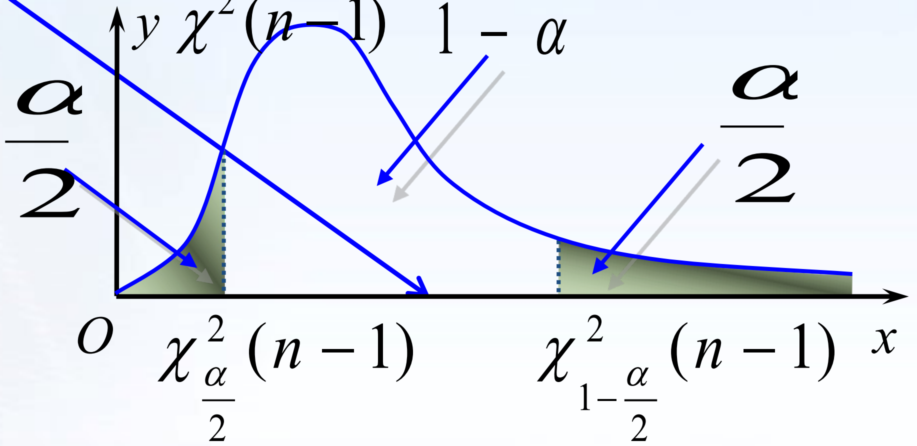
2、μ未知，方差σ^2的置信区间

设 X_1，X_2，…，X_n 是总体 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$ 的样本，μ未知，求σ^2的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

σ^2的MLE是S^2, 选取枢轴变量

$$\frac{n\tilde{S}^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$



$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

即有 $P\{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\} = 1-\alpha$

解 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

得 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

例　需要评估某轮胎厂生产的汽车轮胎的使用寿命. 随机抽取了12只轮胎，实验测得它们的使用寿命(单位：万公里)如下：

4.61，5.02，4.38，5.2，4.85，4.6

4.58，4.7，5.1，4.68，4.72，4.32

假设汽车轮胎的使用寿命 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 求未知参数 μ，σ^2 的置信度为95%的置信区间.

二、两个正态总体的情形

设研究对象的某指标 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

如果外界条件发生了变化，则要研究外界条件的变化是否对该指标产生了影响.

设变化前指标 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$，变化后指标 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

若外界条件的变化对指标产生影响，则应反映在参数 μ_1, σ_1^2，μ_2, σ_2^2 的改变上.

故有必要求 $\mu_1 - \mu_2$, $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的区间估计.

假设：

设 X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 $N(\mu_1, \ \sigma_1^2)$ 的样本，

Y_1，Y_2，…，Y_m 是来自总体 $N(\mu_2, \ \sigma_2^2)$ 的样本，

两个样本相互独立

$\bar{X}, \ S_1^2; \bar{Y}, \ S_2^2$ 分别是两个样本的样本均值和样本方差.

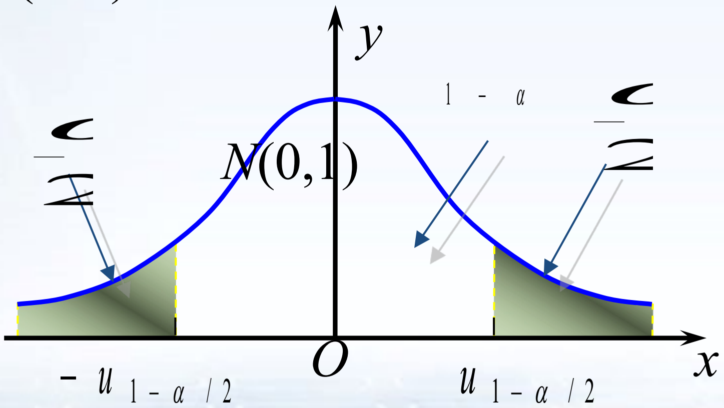
置信度为 $1-\alpha$.

1、σ_1^2,σ_2^2 已知，$\mu_1-\mu_2$的置信区间

μ_1，μ_2 的MLE分别为 $\bar{X}$，$\bar{Y}$

选取枢轴变量

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$$



1、σ_1^2,σ_2^2 已知，$\mu_1-\mu_2$的置信区间

μ_1，　μ_2 的MLE分别为　　$\bar{X}$, $\bar{Y}$

选取枢轴变量

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

所以有 $P\{|\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{m}}}|<u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}=1-\alpha$

解

$$\left|\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}\right|< u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

得 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}},\ (\bar{X}-\bar{Y})+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}\right)$$

2、σ_1^2,σ_2^2 未知，但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，$\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

μ_1，μ_2 的MLE分别为 $\bar{X}$，$\bar{Y}$

选取枢轴变量

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\sim t(n+m-2)$$

其中

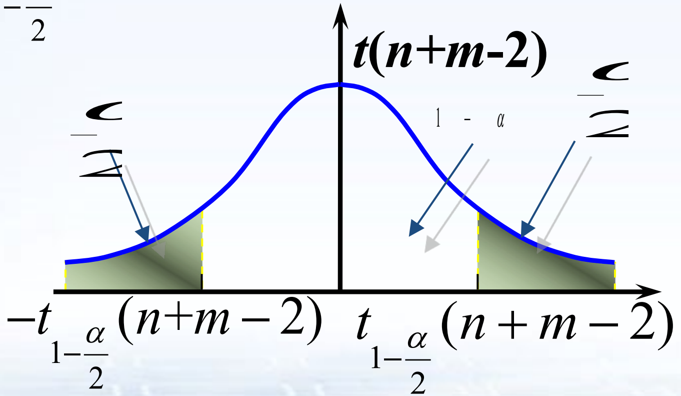
$$S_\omega^2=\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}$$

即有

$$P\left\{\left|\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}}\right| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)\right\} = 1-\alpha$$

解

$$\left|\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}}\right| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)$$



即有

$$P\{\left|\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\right|<t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)\}=1-\alpha$$

解

$$\left|\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\right|<t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)$$

得 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})\pm S_\omega\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\,t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)\right)$$

3、μ_1,μ_2未知，方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间

σ_1^2,σ_2^2 的MLE分别为 $\tilde{S}_1^2$，$\tilde{S}_2^2$

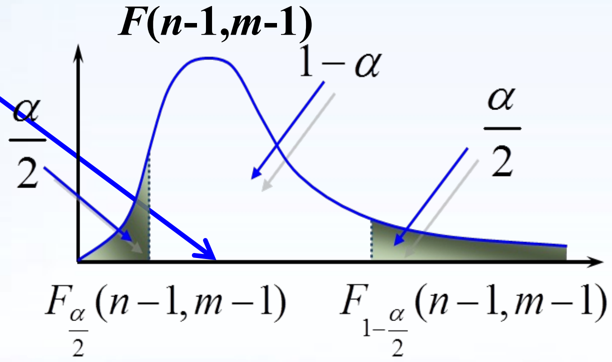
$$\tilde{S}_1^2=\frac{n-1}{n}S_1^2,\quad \tilde{S}_2^2=\frac{m-1}{m}S_2^2$$

选取枢轴变量

$$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n-1,\ m-1)$$

第37讲　区间估计(II)

$$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n-1,m-1)$$



$$\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n-1, m-1)$$

即有

$$P\{F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1) < \frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1)\} = 1-\alpha$$

由此可得 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1)} \right)$$

例　为了比较甲、乙两个机床的加工精度是否有区别. 分别从这两台机床加工的零件中随机抽取了些样本，测得它们的直径(cm)为:

机床甲　20.5，19.8，19.7，20.4，20.1，20，19，19.9

机床乙　19.7，20.8，20.5，19.8，19.4，20.6，19.2

假设两台机床加工的零件的长度服从正态分布. 在置信度95%下，问两台机床的加工精度有无明显区别?

解 设机床甲加工的零件的直径为 X

机床乙加工的零件的直径为 Y

由题设有

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \quad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

两台机床精度比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的95%的置信区间是

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1)}, \ \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1)} \right)$$

计算得到

$$S_1^2 = 0.2164 \quad S_2^2 = 0.3967$$

已知 $n = 8$，$m = 7$，查 F 分布表，得到

$$F_{0.975}(7,6) = 5.7$$

$$F_{0.025}(7,6) = \frac{1}{F_{0.975}(6,7)} = \frac{1}{5.12}$$

所以两台机床精度比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的95%的置信区间是

$$\left(\frac{0.2164}{0.3967}\cdot\frac{1}{5.7},\quad \frac{0.2164}{0.3967}\cdot 5.12\right)=(0.096,\quad 2.79)$$

因为上区间包含了 1，所以认为这两台机床加工的零件的精度没有明显差异.