概率论与数理统计

第三讲

概率 —— 可能性度量

1、概率的定义

- 从两大学派谈起

  频率派：

  奈曼（Neyman, 1894-1981），“伯克利们”

  上世纪30年代学派形成

  贝叶斯派：

  贝叶斯（Bayes, 1701-1761），

  杰弗莱（Jeffrey, 1891 –1989）

  上世纪60年代学派形成

- 公理化概率论的出现

  柯尔莫戈洛夫（1903-1987）

- **实际问题中如何确定概率？**

频率说：在一系列重复随机试验中，考察随机事件发生的频率 ⟷ **样本信息**

如掷币试验，又如：

例：考察26个英文字母在文献中出现的频率

字母	频率	字母	频率	字母	频率	字母	频率
E	0.1268	R	0.0594	M	0.0244	K	0.0060
T	0.0978	H	0.0573	W	0.0214	X	0.0016
A	0.0788	L	0.0394	Y	0.0202	J	0.0010
O	0.0776	D	0.0389	G	0.0187	Q	0.0009
I	0.0707	U	0.0280	P	0.0186	Z	0.0006
N	0.0706	C	0.0268	B	0.0156		
S	0.0634	F	0.0256	V	0.0102		

- **实际问题中如何确定概率？**

主观说：根据以往的资料或经验，形成的关于随机事件发生可能性的印象 ⟷ **先验信息**

例：考察某地区男婴的出生概率

例：考察某人是某案件嫌疑人的概率

第3讲 概率 —— 可能性度量

- **实际问题中如何确定概率？**

等可能说：认为基本事件的发生没有任何偏好，都是等可能的 ⟷ **无信息**

例：掷一枚均匀的钱币，考察正面出现的概率

第3讲 概率 —— 可能性度量

- 等可能原理的拓广

- 物理学中，研究分子热运动时，假设每个分子朝任何方向的运动都是等可能的

- 当样本空间 S 为R^n 中的某个区域，如果没有特别的信息，则认为 R^n 中每一点的出现都是等可能的。因此如果事件A为S中的某个子区域，则认为A发生的概率为A与S “体积” （或面积、长度）之比 ⟷ **几何概型**

- 当基本事件数为有限时，适用等可能原理的称为**古典概型**
- 形形色色的概率有什么共同点？
  非负：可能性大小当然应该如此
  规范：虽然不是本质的，但很自然
  可加：两个互斥事件之和发生的可能性大小，应该是各自可能性大小之和

例（机场接人）某客人自外埠来访需要去机场接，但信息不清，根据以往的经验，他上午来的概率为0.4，下午来的概率为0.4，晚上来的概率为0.2。则他中午12点以后到的概率为多少？

互斥

"中午以后到" = "下午到" ∪ "晚上到"

0.6 = 0.4 + 0.2

- **定义** 称定义在 S 的事件族 $\mathcal{A}$ 上的实值函数 P 为一个**概率**，如果它满足

1° 非负性 $P(A) \geq 0$,$\forall A \in \mathcal{A}$

2° 规范性 $P(S)=1$

3° 可列可加性 即设 $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ 且互斥，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right)$$

- 为什么需要可列可加性？

例（掷双骰子）反复掷两个骰子，观察其点数和，若出现首次7点或8点，则试验结束。

弱 A_i ——偬 i 蜍烯挛洴嗺 7 浐食 A ——春 7 浐叉諳

B_i ——偬 i 蜍烯挛洴嗺 8 浐食 B ——春 8 浐叉諳

兮硼遲春倞归 $P(A_i)$ 食 $P(B_i)$ 食酤緘崦 A_i 食 B_i 腔評惢食

帮

$$P(A)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i),\quad P(B)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i)$$

2、概率的性质

1° $P(\varnothing)=0$

提示：$P(\varnothing)=P(\varnothing\cup\varnothing\cup\ldots)=P(\varnothing)+P(\varnothing)+\ldots$

2° 有限可加性 设$A_1,\ldots,A_n$为互斥事件，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P\left(A_i\right)$$

提示：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=P(A_1\cup\ldots\cup A_n\cup\varnothing\cup\varnothing\ldots)$$

2、概率的性质

3° 单调性 若事件 $A \subset B$，则 $P(A) \le P(B)$

提示：$P(B) = P(A \cup (B - A))$

4° A 为事件，则 $P(A) \le 1$

提示：$\varnothing \subset A \subset S$

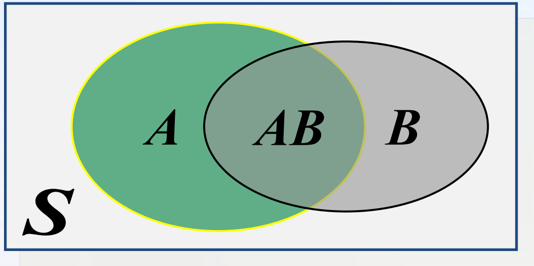
5° 对立事件概率：A 为事件，则 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

提示：$P(S) = P(A \cup \bar{A})$

2、概率的性质

6° 加法公式 设 A,B 为事件，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$



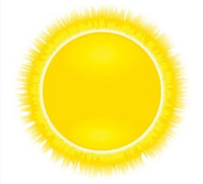
推广：设 $A_1,\ldots,A_n$ 为事件，则

挖补规律: 加奇减偶

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n)$$

第3讲 概率 —— 可能性度量

例 设某地夏季天气只有3种状态：晴、阴（多云）、雨。已知晴的可能性是阴的2倍，雨的可能性只有阴的一半，问三种天的概率为多少？



$$\frac{2}{2+1+1/2}$$

$$\frac{4}{7}$$

$$\frac{1}{2+1+1/2}$$

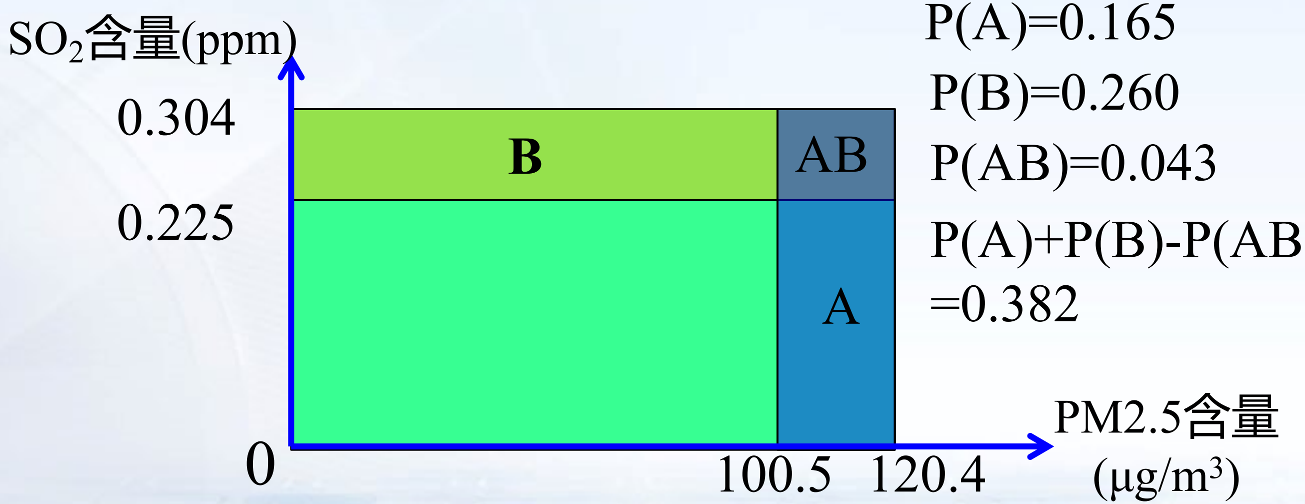
$$\frac{2}{7}$$

$$\frac{1/2}{2+1+1/2}$$

$$\frac{1}{7}$$

⟷ 归一化

例 已知空气中PM2.5含量一般在0.0-120.4（$\mu g/m^3$)之间，SO_2含量一般在0.000-0.304（ppm)之间。一般认为，PM2.5含量在100.5$\mu g/m^3$以上或SO_2含量在0.225ppm以上为对人体有害。问空气质量为有害的概率是多少？



P(A)=0.165

P(B)=0.260

P(AB)=0.043

P(A)+P(B)-P(AB)
=0.382