Étude du model Lotka-Volterra

Robin Botrel, Axel Carpentier

Université Paul Sabatier
Toulouse, France

28 Decembre, 2022

Contents

I Introduction

Cette étude des équations de prédation de Lotka-Volterra s'effectue dans le cadre d'une unité d'enseignement ouverte de la licence de mathématique de l'université Paul Sabatier. Nous allons partir d'un exercice vu en cours d'équations différentielles ordinaires (EDO), pour ensuite s'éloigner des frontières de ce cours et voir ce que peut offrir la discipline.

1 Le model classique proie prédateur

Les équations de Lotka-Volterra qualifient un système d'équations différentielles non linéaires, historiquement développées au début du 20ème siècle pour modéliser les interactions entre espèces et plus particulièrement entre 2 espèces : une proie et un prédateur, elles sont un exemple classique d'EDO. 1 [3]

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} &= x(t)\Big(\alpha - \beta y(t)\Big) \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} &= y(t)\Big(\delta x(t) - \gamma\Big) \end{cases} \tag{1}$$

2 Généralisation

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} &= x(t)\Big(a - by(t) - cx(t)\Big) \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} &= y(t)\Big(dx(t) - e - fy(t)\Big) \end{cases} \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t) = X(t)\Big(R + AX(t)\Big) \tag{4}$$

II Le cas 2D

1 Champ vectoriel

2 Une étude des bifurcations

$$R = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad A = -\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} \tag{5}$$

$$R = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad A = -\begin{bmatrix}1 & s\\s & 1\end{bmatrix} \tag{6}$$

III Chaos en 4D

1 introduction aux attracteurs

$$R = \begin{bmatrix}1\\0.72\\1.53\\1.27\end{bmatrix} \quad A = -\begin{bmatrix}1 & 1.09 & 1.52 & 0\\0 & 0.72 & 0.3168 & 0.9792\\3.5649 & 0 & 1.53 & 0.7191\\1.5367 & 0.6477 & 0.4445 & 1.27\end{bmatrix} \tag{7}$$

2 bifurcations

3 Cycle limite

4 Exposant de Liapounov

IV Conclusion

V Annexes

VI bibliographie

References

[1] Immanuel M Bomze. "Lotka-Volterra equation and replicator dynamics: a two-dimensional classification". In: *Biological cybernetics* 48.3 (1983), pp. 201–211.

Un peu d'histoire des mathématiques

Dans sa publication de 1920 (la première fois où l'on voit l'équation 1 sous cette forme), Lokta introduit son model comme un simple cas particulier : La source de nourriture de l'espèce 1 (notée S_1) est en excès et peut donc être considérée constante sur la période donnée. S_2 se nourrit de S_1. Il introduit alors son raisonnement, S_1 est alors pensé comme une masse :

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix}\text{Variation de } S_1\\\text{par unité de temps}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}S_1 \text{ engendré}\\\text{par unité de temps}\end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix}S_1 \text{ détruit par } S_2\\\text{par unité de temps}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{autre perte de } S_1\\\text{par unité de temps}\end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix}\text{Variation de } S_2\\\text{par unité de temps}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}S_2 \text{ engendré par l'ingestion de } S_1\\\text{par unité de temps}\end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix}\text{autre perte de } S_2\\\text{par unité de temps}\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

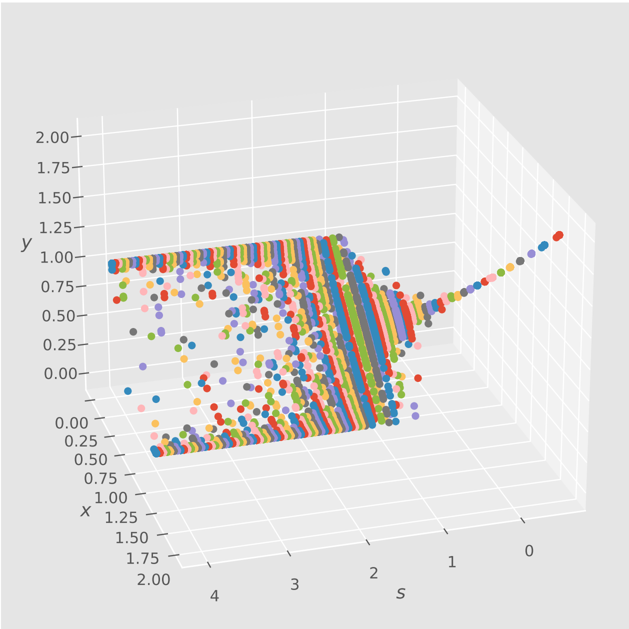

Figure 1. test

[2] Immanuel M Bomze. "Lotka-Volterra equation and replicator dynamics: new issues in classification". In: *Biological cybernetics* 72.5 (1995), pp. 447–453.

[3] Alfred J Lotka. "Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems". In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 6.7 (1920), pp. 410–415.

[4] Alfred J Lotka. "Contribution to the theory of periodic reactions". In: *The Journal of Physical Chemistry* 14.3 (1910), pp. 271–274.

[5] Lionel Roques and Mickaël D Chekroun. "Probing chaos and biodiversity in a simple competition model". In: *Ecological Complexity* 8.1 (2011), pp. 98–104.

[6] JA Vano et al. "Chaos in low-dimensional Lotka–Volterra models of competition". In: *Nonlinearity* 19.10 (2006), p. 2391.