

# Étude du model Lotka-Volterra

Robin Botrel, Axel Carpentier

*Université Paul Sabatier  
Toulouse, France*

28 Decembre, 2022

## CONTENTS

### I Introduction

- 1 Le model classique proie prédateur . . . . .
- 2 Généralisation . . . . .

### II Le cas 2D

- 1 Une étude des bifurcations . . . . .

### III Chaos en 4D

- 1 introduction aux attracteurs . . . . .
- 2 bifurcations . . . . .
- 3 Exposant de Liapounov . . . . .
- 4 Bassin d'attraction . . . . .

### IV Conclusion

### V bibliographie

## I INTRODUCTION

CETTE étude des équations de prédation de Lotka-Volterra s'effectue dans le cadre d'une unité d'enseignement ouverte de la licence de mathématique de l'université Paul Sabatier. Il s'agit d'une première exploration du champs de recherche associé aux équations différentielles non linéaire.

### 1 Le model classique proie prédateur

Les équations de Lotka-Volterra qualifient un système d'équations différentielles non linéaires, historiquement développées au début du 20ème siècle pour modéliser les interactions entre espèces et plus particulièrement entre 2 espèces : une proie  $x(t)$  et un prédateur  $y(t)$ , elles sont un exemple classique d'EDO. Le système est décrit équation 1. Les paramètres  $\alpha\beta\delta\gamma$  sont positifs et  $\beta\delta$  modulent les interactions entre espèces et  $\alpha\gamma$  sont des paramètres de croissance de la population sans interaction. [3]

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t) (\alpha - \beta y(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = y(t) (\delta x(t) - \gamma) \end{cases} \quad (1)$$

## UN PEU D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Dans sa publication de 1920 (c'est la première apparition sous cette forme de l'équation 1), Lotka introduit son model comme un simple cas particulier d'interaction entre deux espèces : La source de nourriture de l'espèce 1 (notée  $S_1$ ) est en excès et peut donc être considérée constante sur la période donnée. L'espèce  $S_2$  se nourrit exclusivement de  $S_1$ . Il introduit

son raisonnement,  $X_i$  est la masse de l'espèce  $S_i$  :

$$\begin{aligned} 1 & \left[ \begin{array}{l} \text{Variation de } X_1 \\ \text{par unité de temps} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} X_1 \text{ engendré} \\ \text{par unité de temps} \end{array} \right] \\ 2 & - \left[ \begin{array}{l} X_1 \text{ détruit par } X_2 \\ \text{par unité de temps} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{l} \text{autre perte de } X_1 \\ \text{par unité de temps} \end{array} \right] \\ 3 & \left[ \begin{array}{l} \text{Variation de } X_2 \\ \text{par unité de temps} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} X_2 \text{ engendré par l'ingestion de } X_1 \\ \text{par unité de temps} \end{array} \right] \\ 5 & - \left[ \begin{array}{l} \text{autre perte de } X_2 \\ \text{par unité de temps} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

Pour translater ce raisonnement en un système d'EDO, il va faire de nouvelles assumptions, citons Lotka :

Pour de petits changements, le taux de formation de nouvelle matière d'une espèce donnée d'organisme dans des conditions déterminées est proportionnel à la masse existante de cette espèce. En d'autres termes, la croissance de la matière vivante est un processus typiquement "autocatakinetic". [...]. La proportionnalité ne s'applique pas aux grandes variations de  $X_1$ ,  $X_2$ , ce qui est dûment pris en compte dans la mesure où  $A'_1$ , est une fonction de  $X_1$ ,  $X_2$ . [...]. De même, la masse de  $S_1$  détruite par  $S_2$  qui s'en nourrit sera, pour de petites variations, proportionnelle à  $X_2$  et aussi à  $X_1$ . Ce terme a donc été défini sous la forme  $B_1 X_1 X_2$ . Ici encore, les écarts de proportionnalité sont pris en charge par les variations de  $B_1$  avec  $X_1$  et  $X_2$ , variables dont  $B_1$  est une fonction.

$$\begin{aligned} \frac{dX_1(t)}{dt} &= A'_1 X_1 - B_1 X_1 X_2 - A''_1 X_1 \\ \frac{dX_2(t)}{dt} &= A_2 X_1 X_2 - B_2 X_2 \end{aligned} \quad (3)$$

Il construit sa translation vers un système d'EDO (voir eq.3) sur l'idée de proportionnalité mais tout en traitant cette proportionnalité comme des fonctions du temps. Durant toute la publication il n'envisage pas d'en faire des constantes. C'est Volterra qui en 1926 dans des lettres à Umberto D'Ancona, décrit la même équation mais telles que les différentes fonctions  $A$  et  $B$  soit fixes, c'est l'équation que l'on a décrite eq.1. Volterra ne semble pas connaître les résultats précédents de Lotka. [7]

Prenons le temps d'étudier certaines propriétés de ce système non linéaire, ces propriétés seront valables pour les généralisations présentés dans la prochaine section. Premièrement, L'EDO est sous formes résolues. Possons  $F(t, x, y) = (F_1, F_2) = (x(\alpha - \beta y), y(\delta x - \gamma))$ , Les fonctions  $F_1(x, y)$  et  $F_2(x, y)$  sont des polynômes à plusieurs indéterminées, il en découle la propriété de régularité  $C^\infty$ . Les solutions de l'EDO étant  $C^1$  leur régularité est transmise à la

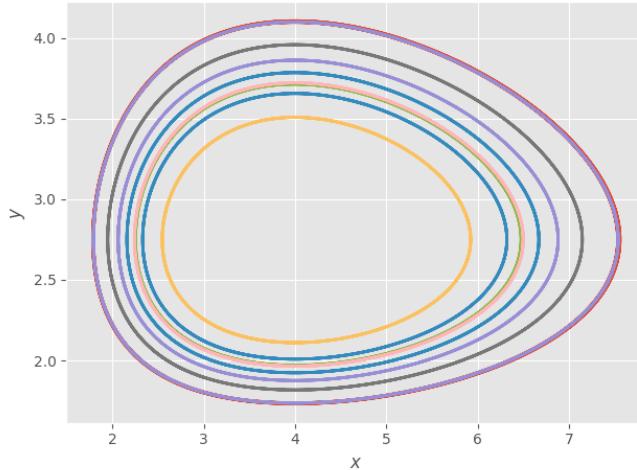


Figure 1. Quelques trajectoires du modèle proie-prédateur

fonction  $F(t, x, y)$  en  $t$ , la variable n'intervenant pas explicitement. Les solutions sont alors  $\mathcal{C}^2$  car elles sont l'intégrale d'une fonction  $\mathcal{C}^1$  :  $(x, y)(t) - (x, y)(0) = \int_0^t F(s, x, y)ds$ , en continuant ce raisonnement on en déduit que les solutions sont  $\mathcal{C}^\infty$ .

On peut alors, dans le cas d'un problème de Cauchy, affirmer l'unicité et l'existence de la solution,  $F(t, x, y)$  étant infiniment dérivable, cela implique sa continuité en  $t$  ainsi que d'être localement lipschitzienne en  $(x, y)$ . Pour rappel un problème de Cauchy consiste à se donner une EDO et un vecteur de conditions initiales, ici de taille 2 (EDO de degré 1 et de dimension 2). Les conditions initiales seront majoritairement étudiées dans le quartier positif du plan  $(\mathbb{R}^+)^2$  pour des raisons historiques d'utilisation de ce modèle en écologie des populations.

Nous étudierons dans les détails les points fixes et les propriétés d'un tel système dans la section II. En ouverture nous avons simulé quelques trajectoires de L'EDO définie eq.1 pour les paramètres  $[\alpha = 1.1, \beta = 0.4, \delta = -0.4, \gamma = 0.1]$  sur la figure.1. On remarque que ses trajectoires sont cycliques.

## 2 Généralisation

Comme de nombreux modèles, les équations de Lotka-Volterra ont de nombreuses limitations. Les biologistes et écologistes ont proposés des améliorations, dans un premier temps en ajoutant un modèle logistique pour limiter la croissance exponentielle des populations, limités non plus par le prédateur ou la proie mais par un environnement à ressources finies. Ce nouveaux modèles présenté equation 4, se nomme le modèle compétitif (de Lotka-Volterra).

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t) (a - by(t) - cx(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = y(t) (dx(t) - e - fy(t)) \end{cases} \quad (4)$$

Dans un même temps, les interactions furent étendues à  $N$  espèces, l'EDO se décrit vectoriellement et ses paramètres sont concentrés dans un vecteur définissant l'évolution de la population sans interaction et d'une matrice décrivant les interactions entre espèces et avec l'environnement (modélisé par la

diagonale de la matrice). C'est le modèle généralisé de Lotka-Volterra décrit eq.5.

Soit une espèce  $i$  et une espèce  $j$ , si les coefficients  $A_{i,j}$  et  $A_{j,i}$  sont de signe négatif, l'interprétation communément admise est une compétition directe de ces deux espèces, par exemple pour une même ressource. Si les signes sont distincts c'est une interaction proie-prédateur, finalement si les deux signes sont positifs il peut s'agir d'entraide mais le modèle possède des limitations dans ce cas, principalement car cela reconduit à des comportements de croissance exponentielle.

$$\frac{d}{dt} X(t) = X(t) (R + AX(t)) \quad (5)$$

Dans la prochaine section nous allons nous arrêter sur le cas à deux espèces du modèle généralisé qui, malgré son faible nombre d'espèces, exhibe des comportements intéressants.

## II LE CAS 2D

Quels sont les informations que nous pouvons tirer d'un modèle généralisé de Lotka-Volterra, contrairement à certaines EDO il n'est pas possible ici de trouver une solution analytique. Il est néanmoins possible de déterminer de nombreuses propriétés du système analytiquement, en particulier les points d'équilibres ou fixes du système sont l'ensemble des  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  où  $F(x, y) = 0$ . Toute trajectoire avec des conditions initiales hors d'un point fixe ne peut l'atteindre en un temps fini, la fonction constante  $(x(t), y(t)) = (x, y)$  est solution et est unique comme montré précédemment. En dynamique des populations, l'isocline  $i$  moins restrictive que les points fixes est l'ensemble des points tel que la composante  $F_i$  soit nulle.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Appliquons ces outils à un cas très simple, l'équation 5 muni des paramètres définis eq.6. On obtient en fait deux équations logistiques découpées, il n'y a pas d'interactions entre les espèces. Étudions la première isocline,  $x(1-x) = 0$  deux solutions s'offrent à nous  $x = 0$  et  $x = 1$ , les courbes sont donc des droites verticales d'abscisse 0 et 1. La seconde isocline est similaire, les solutions sont  $y = 0$  et  $y = 1$ . Sur la première isocline  $\dot{x} = 0$ , le champs vectoriel est donc dirigé selon  $y$  et le sens du vecteur dépend de l'ordonnée  $\dot{y} = y(1-y)$  strictement positif  $\forall 0 < y < 1$ . On décompte 4 points fixes  $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$  qui résultent de l'intersection des isoclines. Ces informations sont présentées sur le graphe fig.2. Vient ensuite l'outil numérique, très puissant dans l'étude des EDO, il introduit cependant de nombreuses approximations. Dans un premier temps il est intéressant d'afficher le champs vectoriel associé à l'EDO, à chaque point  $(x, y)$  du plan on associe un vecteur égal à  $F(x, y)$ , se sont les dérivées tangentes à la trajectoire, la norme des vecteurs est encodée par la couleur pour faciliter la lisibilité de la figure (voir fig.3). On peut aussi tracer des trajectoires par une méthode pas à pas,  $(x_{t+dt}, y_{t+dt}) = dt * F(x_t, y_t) + (x_t, y_t)$  on répète alors l'opération un grand nombre de fois avec  $dt$  un pas de temps suffisamment petit, c'est la méthode d'Euler explicite (voir fig.4). Dû aux nombreuses limitations de cette méthode nous utilisons l'algorithme de Runge Kutta qui offre une meilleure robustesse à l'erreur. Le système qui va nous intéresser pour la suite est défini 7, il possède une infinité de points fixes suivant la droite

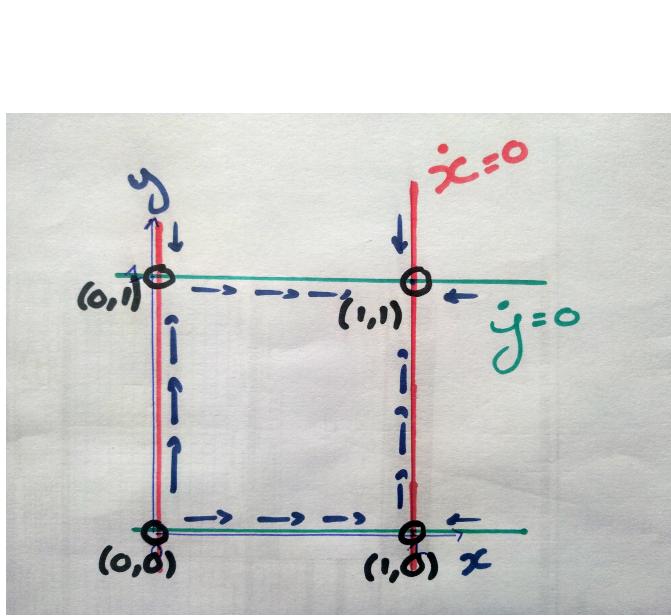


Figure 2. Schématisation des données connues sur le système.6

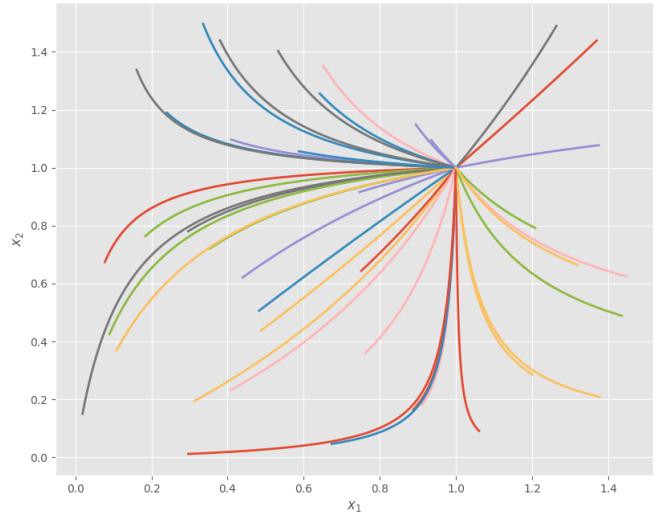
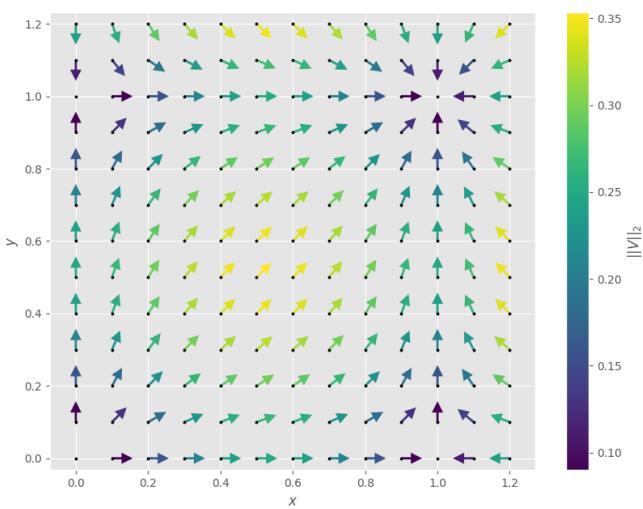


Figure 4. Trajectoires d'une trentaine de points placés aléatoirement selon l'équation.6

Figure 3. Champ vectoriel sur  $[0, 1.2]^2$  défini par l'équation.6

$y = 1 - x$  visible sur la figure.5.

$$R = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

## 1 Une étude des bifurcations

Le système définit par 7 possède un comportement étonnant découlant de la non inversibilité de  $A$ . L'étude des bifurcations a pour objet d'étudier l'évolution d'un système dynamique (entre autres ses points d'équilibres) en fonction d'un ou plusieurs paramètres autour d'un changement majeur du système. Il est intéressant dans notre cas d'introduire un paramètre dans  $A$  8, rendant  $A(s)$  inversible  $\forall s \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ ,  $|A(s)| = 1 - s^2 \neq 0$ .

$$R = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A(s) = -\begin{bmatrix} 1 & s \\ s & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

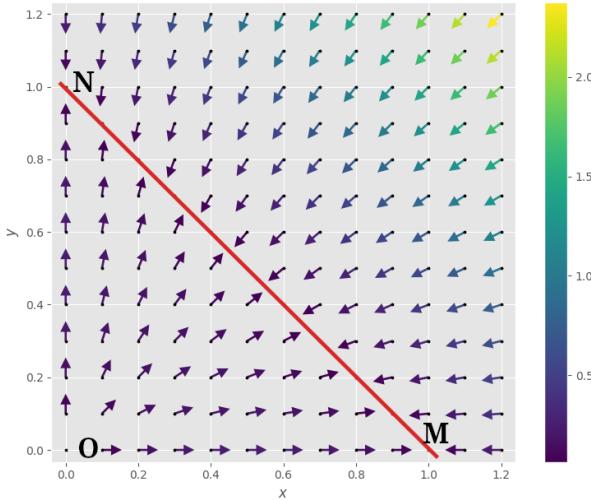
Étudions les points d'équilibres et leurs stabilités de ce système paramétrique 8. Étudions les différents cas selon les valeurs de  $s, x_1$  et  $x_2$ . On rappelle que  $F$  est la fonction :  $F(t, X) = X(t)(R + AX(t))$ .

$$\begin{aligned} X(R + AX) &\stackrel{!}{=} 0 \wedge (x_1 = 0 \vee x_2 = 0) \Rightarrow (X = (0, 0)(O) \vee \\ &X = (1, 0)(M) \vee X = (0, 1)(N)) \end{aligned}$$

$$X(R + AX) \stackrel{!}{=} 0 \wedge (x_1 \neq 0 \wedge x_2 \neq 0 \wedge s = 1) \Rightarrow x_2 = 1 - x_1$$

$$X(R + AX) \stackrel{!}{=} 0 \wedge (x_1 \neq 0 \wedge x_2 \neq 0 \wedge s = -1) \Rightarrow X = \emptyset$$

$$\begin{aligned} X(R + AX) &\stackrel{!}{=} 0 \wedge (x_1 \neq 0 \wedge x_2 \neq 0 \wedge s \neq \pm 1) \Rightarrow X = -A^{-1}R \\ &= \frac{1}{1 - s^2} \begin{bmatrix} 1 & -s \\ -s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + s} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (S) \end{aligned} \quad (9)$$

Figure 5. Champ vectoriel sur  $[0, 1.2]^2$  défini par l'équation.7

$$\begin{aligned} J(F)_X &= \begin{bmatrix} r_1 - 2x_1 - sx_2 & -sx_1 \\ -sx_2 & r_2 - 2x_2 - sx_1 \end{bmatrix} \\ J(F)_O &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{particular } J(F)_M &= \begin{bmatrix} -1 & -s \\ 0 & 1-s \end{bmatrix} \quad (10) \\ J(F)_N &= \begin{bmatrix} 1-s & 0 \\ -s & -1 \end{bmatrix} \\ J(F)_{S,s \neq \{1,-1\}} &= \frac{1}{1+s} A(s) \end{aligned}$$

À l'aide des Jacobiniennes, nous pouvons étudier la stabilité de ces points fixes et donc le comportement local des trajectoires. Soit P un des points fixes. F étant  $\mathcal{C}^\infty$  effectuons un développement de Taylor à l'ordre 1 en P, sachant que  $F(t, P) = 0$ .

$$F(t, P + H) = J(F)_X H + \mathcal{O}(\|H\|^2) \quad (11)$$

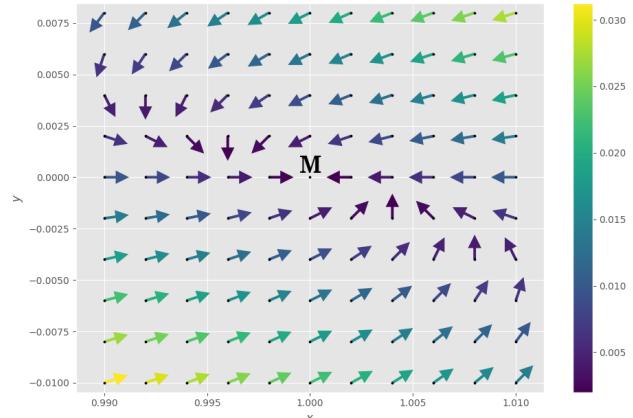
En négligeant les termes d'ordres strictement supérieurs à un, on obtient une nouvelle équation différentielle linéaire, valable localement en P.

$$\frac{dP + H}{dt} = \frac{dH}{dt} = J(F)_P H \quad (12)$$

Commençons l'analyse des points fixes par le point O dont la matrice jacobienne est invariante par s et est diagonale. On obtient alors le système d'EDO linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{dh_1(t)}{dt} = h_1(t) \\ \frac{dh_2(t)}{dt} = h_2(t) \end{cases} \quad (13)$$

la solution analytique de l'équation 13 est  $H(t) = \exp(t) Id_2 H_0$ , autrement dit le point fixe O est expansif, les trajectoires s'éloignent de ce point.

Figure 6. Champ vectoriel autour de M défini par l'équation.8 en  $s = 2$ 

$J(F)_M$  et  $J(F)_N$  sont diagonalisables  $\forall s \neq 2$ , cette information est déductible de l'étude de  $\text{Det}(J(F)_M - XId_2) = (1-s-X)(1+X)$ , le polynôme est scindé à racine simple  $\forall s \neq 2$ , dans le cas où  $s = 2$  le polynôme caractéristique  $(1+X)^2$  est minimale. Soit  $s = 2$ , résolvons l'EDO par cascade  $h_2(t) = C \exp(-t)$  puis  $h_1 = -2Ct \exp(-t) + D \exp(-t)$ . Le comportement obtenu s'observe numériquement en affichant le champ vectoriel autour de M (fig 6).

Soit  $S \neq 2 \Rightarrow \exists P \in GL(\mathbb{R}), D \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$  diagonal,  $M = P^{-1}DP$  on a alors  $\frac{dY}{dt} = DY$  avec  $Y(t) = PH(t)$   $\lambda_{1,2}$  les valeurs propres, déterminant et trace sont invariants par changement de base et peuvent nous informer sur le signe des valeurs propres en dimension 2.

- $s > 1 \Rightarrow \text{Det}(J(F)_M) > 0 \wedge \text{Tr}(J(F)_M) < 0 \Rightarrow \lambda_i < 0$  **point stable**
- $s = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = -1$
- $1 > s > 0 \Rightarrow \text{Det}(J(F)_M) < 0 \wedge \text{Tr}(J(F)_M) > 0 \Rightarrow \lambda_1 < 0 \wedge \lambda_2 > 0$  **point selle**
- $s = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 \wedge \lambda_2 = 1$  **point selle**
- $s < 0 \Rightarrow \text{Det}(J(F)_M) < 0 \wedge \text{Tr}(J(F)_M) > 0 \Rightarrow \lambda_1 < 0 \wedge \lambda_2 > 0$  **point stable**

Le cas du point fixe N est similaire au point M. Intéressons nous maintenant au point S. Vérifions que  $\forall s \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$   $J(F)_S$  diagonalisable.  $\text{Det}(J(F)_S - XId_2) = \frac{1}{1+s} (\frac{1-s}{1+s} + X)(1+X)$  le polynôme est scindé à racine simple  $\forall s \neq 0$  dans le cas où  $s = 0$  la jacobienne est diagonale. Finalement,  $J(F)_S$  est diagonalisable  $\forall s \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ . On peut alors étudier le signe du déterminant et de la trace en fonction de s :  $\text{Det}(J(F)_S) = \frac{1-s}{1+s}$  et  $\text{Tr}(J(F)_S) = \frac{-2}{1+s}$ .

- $s > 1 \Rightarrow \text{Det}(J(F)_S) < 0 \wedge \text{Tr}(J(F)_S) < 0 \Rightarrow \lambda_1 < 0 \wedge \lambda_2 > 0$  **point selle**
- $1 > s > -1 \Rightarrow \text{Det}(J(F)_S) > 0 \wedge \text{Tr}(J(F)_S) < 0 \Rightarrow \lambda_i < 0$  **point stable**

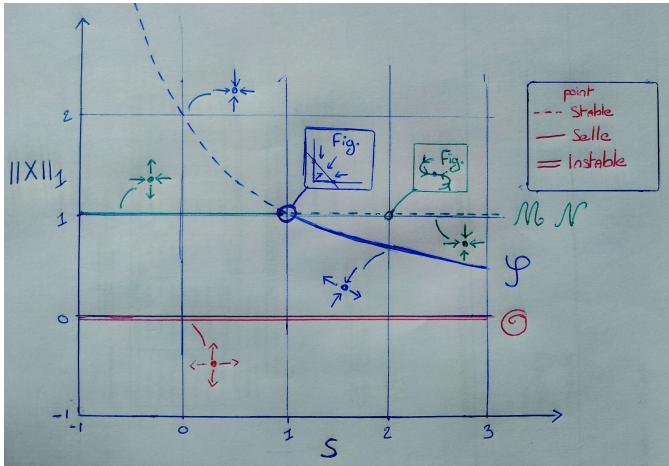


Figure 7. Schéma du diagramme de bifurcation autour de  $s = 1$  eq.8

- $s < -1 \Rightarrow \text{Det}(J(F)_S) < 0 \wedge \text{Tr}(J(F)_S) > 0 \Rightarrow \lambda_1 < 0 \wedge \lambda_2 > 0$  **point selle**

On a obtenu toutes les informations nécessaires à la production d'un diagramme des bifurcations de notre système défini eq.8. Sur la figure.7, nous avons produit un schéma de l'évolution des points fixes en fonction de  $s \in [-1, 4]$ , pour nous limiter à un diagramme à deux dimensions nous avons pris en ordonnée la norme 1  $\|X\|_1$  de la position des points fixes. Il est intéressant de le comparer à son pendant numérique. La figure 8 est le résultat de l'évolution d'une centaine de points tel que  $(x_0, y_0) \in [0, 1]$  et cela pour chaque valeur de  $s \in [-0.5, 4]$ . On retrouve bien la stabilité de M et N pour  $s > 1$  et la stabilité de S pour  $(-1 <) s < 1$ .

Le comportement que l'on vient d'étudier est intéressant, mais c'est dans les dimensions supérieures des équations de Lotka-Volterra que se déplient les phénomènes les plus fascinants. Une partie de l'explication de la pauvreté des phénomènes en 2D se trouve dans l'unicité des solutions, les trajectoires ne peuvent se couper, ce qui est très limitant en 2D, mais facile à contourner en dimension supérieure. Nous allons donc étudier un système à 4 espèces en interactions directes dans cette prochaine section.

### III CHAOS EN 4D

#### 1 introduction aux attracteurs

Sans introduction, voyons directement sur la figure.9 une trajectoire prise dans différents systèmes LV de dimension 4, on observe la variété des comportements que nous allons étudier. Ces objets plus généraux que les points fixes sont des attracteurs. Définissons-les comme suit, Soit A un sous ensemble de l'espace des phases  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  :

- Toute trajectoire dans A reste dans A pour des temps croissants.
- Il existe un ensemble B, le bassin d'attraction, contenant A, tel que toute trajectoire de B tend vers A.
- Alors A est un attracteur.

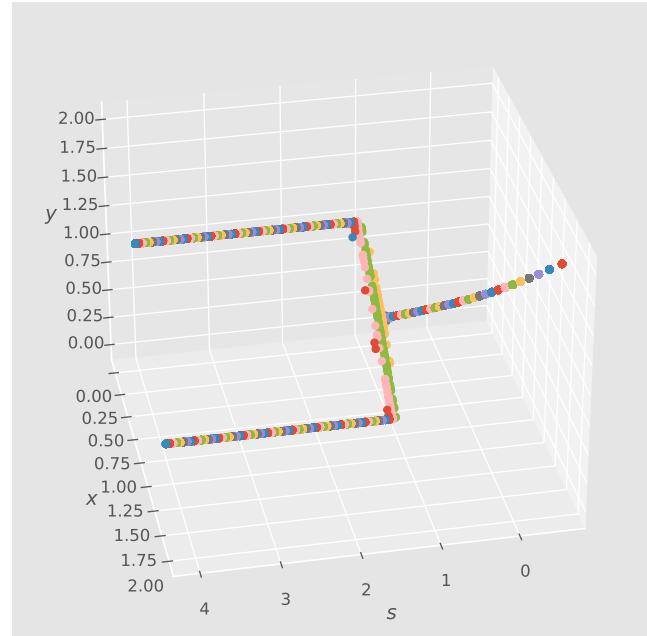


Figure 8. Diagramme de bifurcation autour de  $s = 1$  eq.8

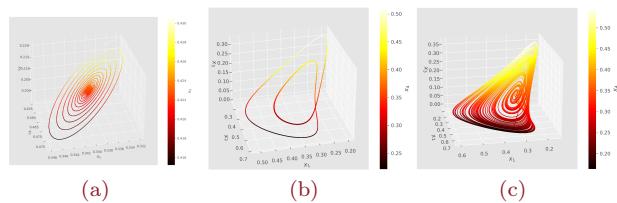


Figure 9. Exemples d'attracteurs (a)  $S = 0.8$  (b)  $S = 0.95$  (c)  $S = 1$  (voir équation 15)

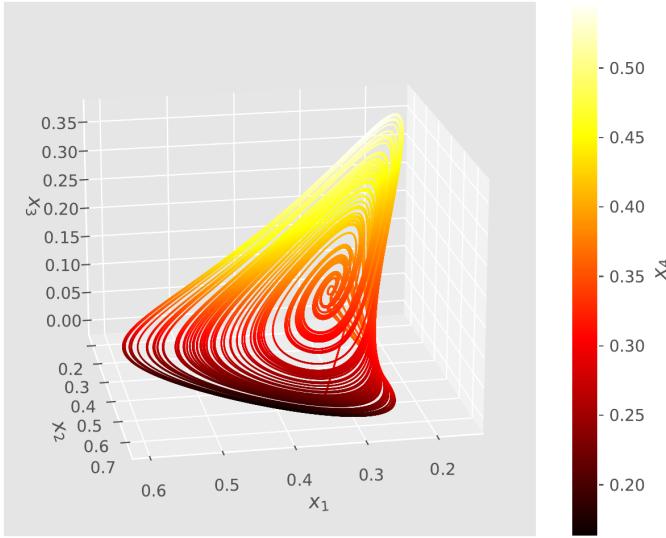


Figure 10. Trajectoire sur l'attracteur étrange défini par 14

Les points fixes sont des exemples d'attracteurs réduits à un singleton, le bestiaire ne s'arrête pourtant pas là, on parle aussi de cycle limite dans le cas d'une orbite périodique et d'attracteur étrange, objet souvent caractérisant un système chaotique (de petits changements entraînent de grandes conséquences), nous reviendrons sur ce dernier terme.

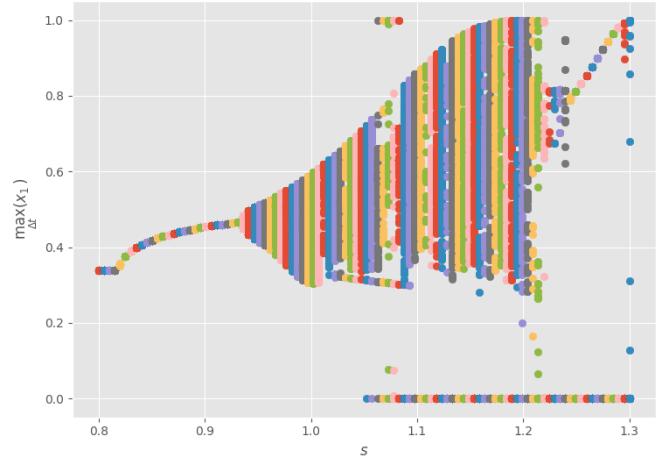
Il peut être très dur de trouver des comportements extraordinaires dans l'espace des paramètres, ainsi nous avons examiné la recherche sur le sujet qui nous a mis sur de nombreuses pistes, en particulier [6]. L'équation 14 donne les paramètres d'un système comprenant un attracteur étrange, ce sera notre base d'étude. Après une première observation, nous étudierons son diagramme de bifurcation, les comportements qui précèdent son apparition, sa capacité chaotique et son bassin d'attraction.

$$R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.72 \\ 1.53 \\ 1.27 \end{bmatrix} \quad A = -\begin{bmatrix} 1 & 1.09 & 1.52 & 0 \\ 0 & 0.72 & 0.3168 & 0.9792 \\ 3.5649 & 0 & 1.53 & 0.7191 \\ 1.5367 & 0.6477 & 0.4445 & 1.27 \end{bmatrix} \quad (14)$$

L'attracteur étrange déjà aperçu fig.9(c) est isolé fig.10. On observe sur cette figure une seule trajectoire qui semble converger dans une spirale étrange vers un centre puis repart dans la périphérie de l'attracteur. Ce centre est un point fixe de coordonnées  $[0.3013 \ 0.4587 \ 0.1308 \ 0.3557]$ , par curiosité on peut regarder les valeurs propres de sa matrice Jacobienne  $[0.0414 + 0.1904j \ 0.0414 - 0.1904j \ -0.3343 \ -1.032]$ . On a deux valeurs conjuguées principalement complexes qui soutiennent un comportement rotatif, puis deux valeurs réelles de signes opposées supposément une cause de ce mouvement de va et vient de la trajectoire.

## 2 bifurcations

Cet objet spectaculaire qu'est l'attracteur étrange doit survenir de conditions bien précises, qu'est ce qui détermine l'apparition d'un tel objet. Nos réponses vont être bien maigres, néanmoins la perturbation des paramètres autour de ce

Figure 11. Diagramme de bifurcation autour de  $s = 1$  équation 15

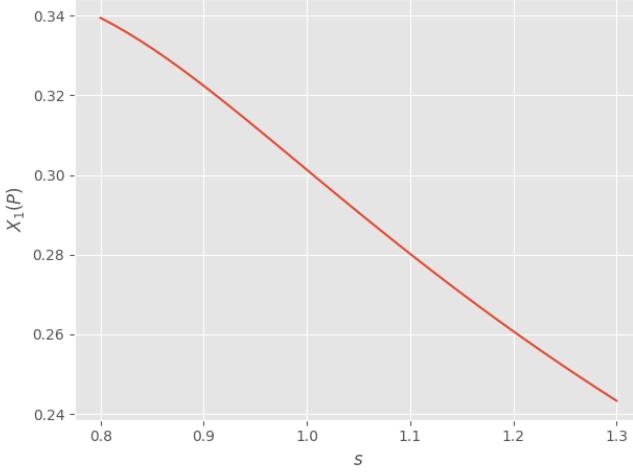
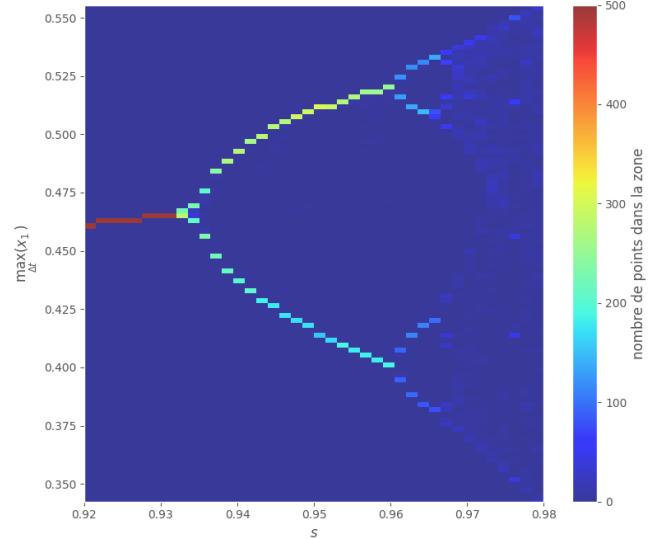
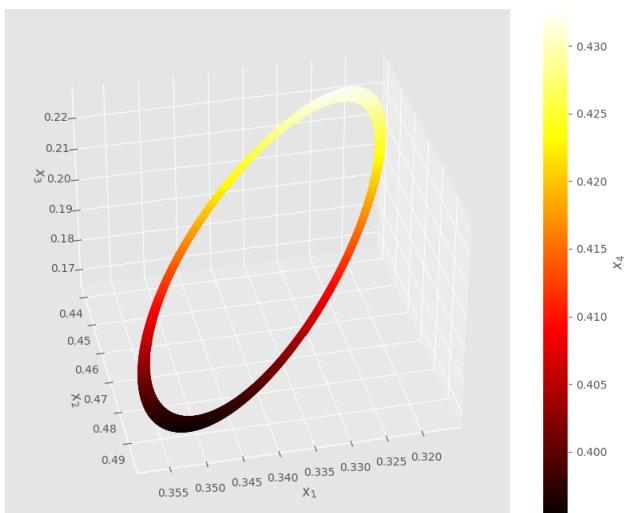
système ouvre des pistes de réflexions fascinantes.

$$R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.72 \\ 1.53 \\ 1.27 \end{bmatrix} \quad A = -\begin{bmatrix} 1 & 1.09s & 1.52s & 0 \\ 0 & 0.72 & 0.3168s & 0.9792s \\ 3.5649s & 0 & 1.53 & 0.7191s \\ 1.5367s & 0.6477s & 0.4445s & 1.27 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Nous allons, comme précédemment, introduire un paramètre  $s$  dans la matrice  $A$  hors de la diagonale, voir éq.15. Les interactions entre espèces sont sensiblement les mêmes avec des ordres de grandeurs différents. L'analyse sera ici numérique, pour chaque valeur de  $s \in [0.8, 1.3]$  (avec un pas de 0.005), nous allons simuler la trajectoire d'une centaine de points, après un temps donné, les points seront sur l'attracteur, ses coordonnées sont alors enregistrées pendant un laps de temps  $\Delta t$ , finalement la figure résultante (fig.11) est le maximum de la coordonnée  $x_1$  sur ce laps de temps en fonction de  $s$ . Quelles informations peut-on extraire d'une telle simulation, quelques valeurs sont remarquables :

En amont de  $s = 0.82$ , on demeure dans un régime constant, toutes les trajectoires se concentrent en un point, comme on peut l'intuiter il s'agit en fait d'un point stable (P). N'oublions pas que les coordonnées de P sont sensibles aux variations de  $s$ , prenons le temps de regarder la relation qui les lie, les résultats visibles figure.12 ne se superposent qu'avant  $s = 0.82$  puis vont à l'encontre du diagramme de bifurcation, sur ce dernier la fonction devient croissante, d'un autre côté la composante en  $x$  de  $P$  décroît. Le point fixe n'est plus attracteur, un cycle limite est en train de s'élargir autour du point fixe (voir fig.13). C'est ce qu'on appelle une bifurcation de Hopf. Les trajectoires suivent une orbite périodique, toutes similaires, ce qui implique que le maximum de  $x_0$  est le même (Le laps de temps est plus long que la période de l'orbite), et donc l'unique point du diagramme pour  $\forall 0.82 < s < 0.93$ .

À partir de  $s = 0.93$  tous les points ne s'accordent plus sur la même valeur, le cycle limite est devenu trop grand, le laps de temps  $\Delta t$  ne permet plus d'en faire le tour. C'est en effet une partie de la réponse. C'est en diminuant  $\delta t$  et en analysant la concentration des points que la réponse

Figure 12. Variation de la coordonnée  $x_1$  de  $P$  en fonction de  $s$ Figure 14. Diagramme de bifurcation autour de  $s = 0.95$ .  
Dédoublement du cycle limite.Figure 13. Trajectoire sur le cycle limite en  $s = 0.82$ 

s’offre à nous (fig.14), le cycle s’est dédoublé (fig.15), formant toujours un ensemble unifié. Ce dédoublement de période continue en cascade avec  $s$ , avec pour paroxysme l’attracteur étrange.

Notre système d’étude à  $s = 1$  se trouve dans le comportement chaotique, le bassin d’attraction s’élargit avec  $s$  jusqu’à une valeur de buté  $s = 1.22$ , un seul cycle va reprendre le dessus. Le comportement de l’attracteur est loin d’être uniforme sur l’interval  $s \in [1, 1.2]$ , en plus de s’élargir, on remarque que de nombreuses trajectoires tendent à faire disparaître l’espèce 1. Nous allons justement voir une manière de quantifier cette propriété chaotique de l’attracteur, qui varie fortement sur l’interval précédemment cité.

### 3 Exposant de Liapounov

Nous avons de nombreuses fois défini l’attracteur étrange comme un système chaotique, qu’entendons nous par là. Si nous prenons deux points très proches comme conditions initiales, les trajectoires résultantes divergent de façons exponentielles.

$$|\delta \mathbf{Z}(t)| \approx e^{\lambda t} |\delta \mathbf{Z}_0| \quad (16)$$

L’exposant de lyapunov d’un attracteur est le  $\lambda$  de l’éq.16, sur des temps assez long il ne dépend pas des conditions initiales, dans les systèmes non chaotiques il est négatif ou nul. Nous allons essayer de le calculer en utilisant l’algorithme suivant (Python):

```
def lyapunov_exponent(x):
    # x est un point sur l'attracteur
    d_0 = 1e-5
    # d_0 = norme xy
    delta = d_0*(1/2)*np.array([1,1,1,1])
    y = x+delta
    itel = 1e5 #
```

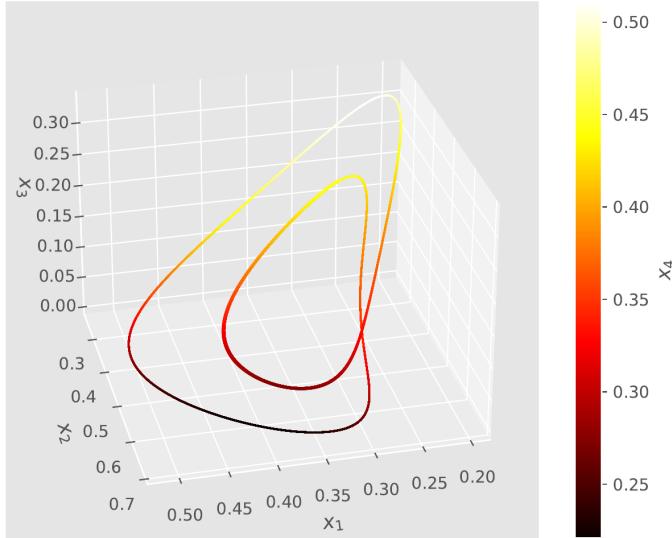
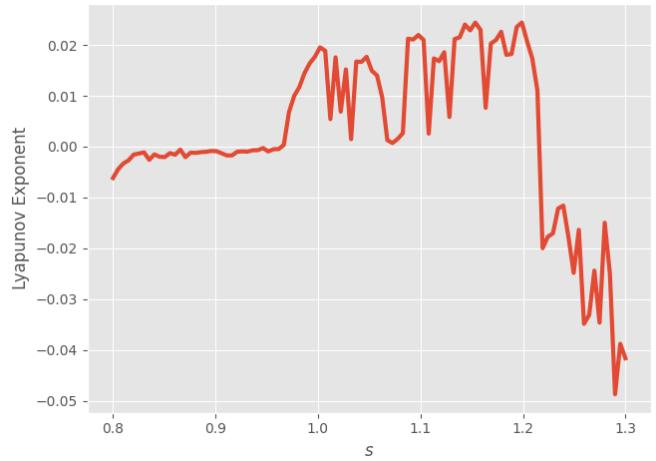
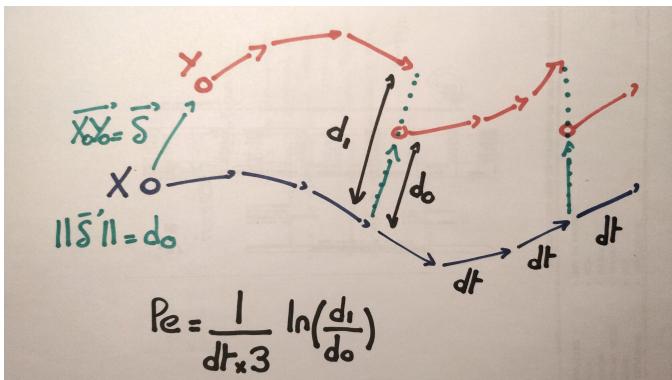
Figure 15. Trajectoire sur le cycle limite en  $s = 0.95$ Figure 17. Variation de l'exposant de Lyapunov en fonction de  $s$ 

Figure 16. Schématisation du processus de calcul de l'exposant de Lyapunov

```

ite2 = 1e2 #nb de boucles avant renormalisation
for i in range(ite1):
    for j in range(ite2):
        x = self.step(x)
# step est la fonction d'iteration
        y = self.step(y)
        d_1 = np.sum((x-y)**2, axis=0)**(1/2.)
# d_1 = norme xy apres ite2 iterations
        lya_exp = lya_exp + ((1/(self.dt*ite)) *
                             *np.log(d_1/d_0)-lya_exp)/(i+1)
# moyenne des exposants de Lyapunov
        y = x + d_0*((y-x)/d_1)
# renormalisation de xy
    
```

En quelques mots, nous étudions la divergence de deux points localement, en particulier nous renormalisons la distance entre ces deux points de temps en temps pour ne pas mesurer une divergence globale qui rapidement peut perdre de son sens. En

pratique nous faisons une seconde moyenne sur 500 points. Les résultats sont les suivants pour  $s = 1$  : moy=−0.0197 std=0.0031 min=−0.0105 max=0.0282. On a bien une valeur strictement positive de l'exposant de Lyapunov, l'attracteur est chaotique. Il serait légitime de questionner les limites du calcul numérique dans ces conditions, par exemple à chaque itération du calcul de la trajectoire une petite erreur est faite ( $\alpha * dt * 2$  pour la méthode d'Euler), ce delta entre la solution analytique et numérique prend rapidement des proportions énormes dans système chaotique. Les trajectoires calculées sont rapidement peu fiables, elles restent cependant un bon moyen de visualiser l'attracteur. Nous pouvons observer sur la figure 17 la variation de l'exposant de Lyapunov en fonction de  $s$ , constatons les variations rapides de la fonction entre  $s = 1.0$  et  $s = 1.2$ . La propriété chaotique du système est très instable sur cette partie, un cycle limite peut reprendre le dessus comme pour la valeur de  $s \approx 1.08$ .

#### 4 Bassin d'attraction

Cette dernière partie n'est qu'une ébauche, une piste de réflexion, fortement limitée par les temps de calculs. Il s'agit d'étudier les vitesses de convergence du bassin d'attraction vers l'attracteur et d'en saisir les irrégularités. Quelles sont les difficultés supplémentaires qu'imposent cette méthode : c'est la condition d'arrêt, autrement dit quand est ce que on est sur l'attracteur. De nombreux moyens sont à disposition, nous avons choisi de laisser converger de nombreux points dans des temps très long pour s'assurer de leur appartenance à l'attracteur, cet ensemble de points définira l'attracteur, les nouvelles trajectoires auront convergées lorsqu'elles seront à proximité de l'un des points du premier ensemble. Ce test de proximité utilise une structure d'arbre k-d pour optimiser la recherche du plus proche voisin. La figure 18, présente les temps de convergences pour un ensemble de points du plan  $x_1 = 0.2, x_2 = 0.2$ . Ce premier résultat semble rejeter une vision simpliste de la convergence, qui par exemple serait fonction linéaire de la distance à l'attracteur. Nous avons ici de grande variation sur de petites distances.

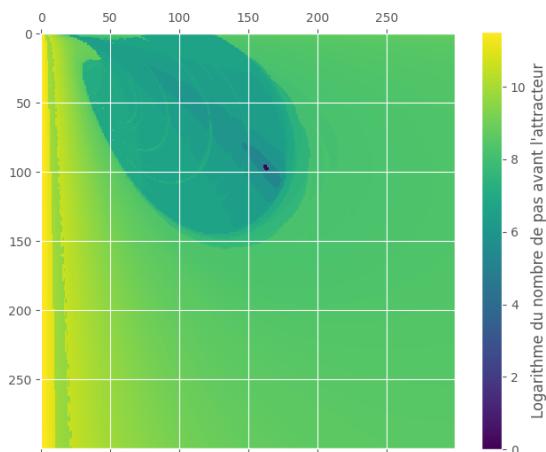


Figure 18. Étude du temps de convergence des points du plan  $x_1 = 0.2, x_2 = 0.2$  pour les paramètres 14

#### IV CONCLUSION

Ce sujet avait pour objectif d'entrer dans le champs mathématique que sont les équations différentielles, nous pensons que c'est chose faite. Bien sûr il reste bien des choses à découvrir et nous n'avons que effleuré le sujet et ses complexités. Nous aurions par exemple aimé développer la notion de dimension d'un attracteur et de fonction de Poincaré. Nous avons cependant réussi à parcourir de nombreux sujets centraux : les différents types d'attracteurs, dont certains possèdent cette propriété très étonnante qui est d'être chaotique, comment mesurer ce phénomène, nous avons aussi étudié les bifurcations de comportements de ces systèmes. Bien que nous avons résolus analytiquement quelques équations nous nous sommes rapidement tourné vers l'outil numérique. Les EDO non linéaires laissent peu de place à la résolution analytique. Fort heureusement, l'informatique a bien pris racine dans cet espace, c'était aussi une partie des raisons qui nous a amené à nous intéresser à ce sujet, nous avons pu utiliser et programmer de nombreux outils numériques pour capter des informations sur le système. Tous les codes, sources, sont disponibles sur github : [github.com/Myosis-R/LotkaVolterra](https://github.com/Myosis-R/LotkaVolterra).

#### V BIBLIOGRAPHIE

##### REFERENCES

- [1] Immanuel M Bomze. “Lotka-Volterra equation and replicator dynamics: a two-dimensional classification”. In: *Biological cybernetics* 48.3 (1983), pp. 201–211.
- [2] Immanuel M Bomze. “Lotka-Volterra equation and replicator dynamics: new issues in classification”. In: *Biological cybernetics* 72.5 (1995), pp. 447–453.
- [3] Alfred J Lotka. “Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems”. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 6.7 (1920), pp. 410–415.
- [4] Alfred J Lotka. “Contribution to the theory of periodic reactions”. In: *The Journal of Physical Chemistry* 14.3 (1910), pp. 271–274.
- [5] Lionel Roques and Mickaël D Chekroun. “Probing chaos and biodiversity in a simple competition model”. In: *Eco-logical Complexity* 8.1 (2011), pp. 98–104.
- [6] JA Vano et al. “Chaos in low-dimensional Lotka–Volterra models of competition”. In: *Nonlinearity* 19.10 (2006), p. 2391.
- [7] V Volterra. “Lois de fluctuation de la population de plusieurs espèces coexistant dans le même milieu”. In: *Association Franc. Lyon* 1927 (1926), pp. 96–98.