Étude du model Lotka-Volterra

Robin Botrel, Axel Carpentier

Université Paul Sabatier
Toulouse, France

28 Decembre, 2022

Contents

I Introduction

Cette étude des équations de prédation de Lotka-Volterra s'effectue dans le cadre d'une unité d'enseignement ouverte de la licence de mathématique de l'université Paul Sabatier. Nous allons partir d'un exercice vu en cours d'équations différentielles ordinaires (EDO), pour ensuite s'éloigner des frontières de ce cours et voir ce que peut offrir la discipline.

1 Le model classique proie prédateur

Les équations de Lotka-Volterra qualifient un système d'équations différentielles non linéaires, historiquement développées au début du 20ème siècle pour modéliser les interactions entre espèces et plus particulièrement entre 2 espèces : une proie et un prédateur, elles sont un exemple classique d'EDO. 1 [3]

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} &= x(t)\Big(\alpha - \beta y(t)\Big) \\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} &= y(t)\Big(\delta x(t) - \gamma\Big) \end{cases} \tag{1}$$

2 Généralisation

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} &= x(t)\Big(a - by(t) - cx(t)\Big) \\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} &= y(t)\Big(dx(t) - e - fy(t)\Big) \end{cases} \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t) = X(t)\Big(R + AX(t)\Big) \tag{5}$$

II Le cas 2D

1 Champ vectoriel

Un peu d'histoire des mathématiques

Dans sa publication de 1920 (la première fois où l'on voit l'équation 1 sous cette forme), Lokta introduit son model comme un simple cas particulier : La source de nourriture de l'espèce 1 (notée S_1) est en excès et peut donc être considérée constante sur la période donnée. l'espèce S_2 se nourrit alors de S_1. Il introduit son raisonnement, X_1 est la masse de l'espèce S_1 :

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix}\text{Variation de } X_1\\ \text{par unité de temps}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}X_1 \text{ engendré}\\ \text{par unité de temps}\end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix}X_1 \text{ détruit par } X_2\\ \text{par unité de temps}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{autre perte de } X_1\\ \text{par unité de temps}\end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix}\text{Variation de } X_2\\ \text{par unité de temps}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}X_2 \text{ engendré par l'ingestion de } X_1\\ \text{par unité de temps}\end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix}\text{autre perte de } X_2\\ \text{par unité de temps}\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

Pour translater ce raisonnement en un système d'EDO, il va faire de nouvelles assomptions. ≪ Pour de petits changements, le taux de formation de nouvelle matière d'une espèce donnée d'organisme dans des conditions déterminées est proportionnel à la masse existante de cette espèce. En d'autres termes, la croissance de la matière vivante est un processus typiquement 'autocatakinetic'. [...]. La proportionnalité ne s'applique pas aux grandes variations de X1, X2, ce qui est dûment pris en compte dans la mesure où A_1', est une fonction de X1, X2. [...]. De même, la masse de S1 détruite par S2 qui s'en nourrit sera, pour de petites variations, proportionnelle à X2 et aussi à X1. Ce terme a donc été défini sous la forme BiXiX2. Ici encore, les écarts de proportionnalité sont pris en charge par les variations de B1 avec X1 et X2, variables dont B1 est une fonction. ≫

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}X_1(t)}{\mathrm{d}t} &= A_1'X_1 - B_1X_1X_2 - A_1"X_1 \\ \frac{\mathrm{d}X_2(t)}{\mathrm{d}t} &= A_2X_1X_2 - B_2X_2 \end{aligned} \tag{3}$$

Il se base sur l'idée de proportionnalité et traite AB comme des fonctions durant toute la publication. C'est Volterra qui en 1926 dans des lettres à Umberto D'Ancona, décrit la même équation mais tel que AB soit fixes, il semble ne pas connaître les résultats de Lotka.

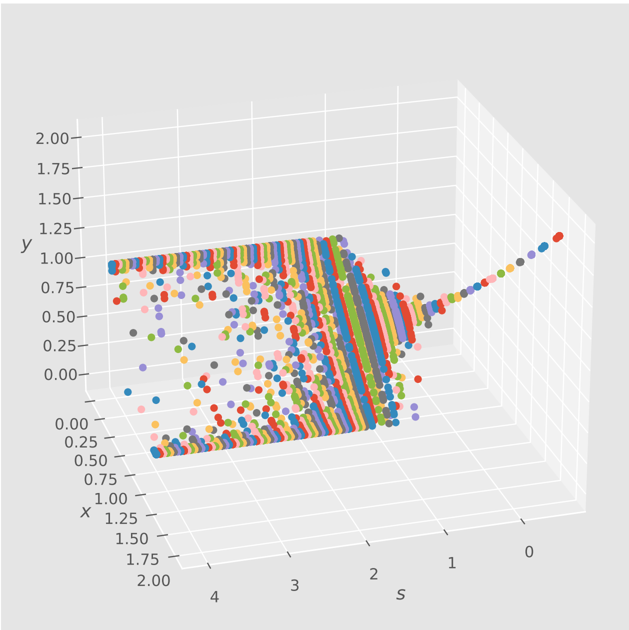

Figure 1. test

2 Une étude des bifurcations

$$R = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A = -\begin{bmatrix} 1 & s \\ s & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

III Chaos en 4D

1 introduction aux attracteurs

$$R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.72 \\ 1.53 \\ 1.27 \end{bmatrix} \quad A = -\begin{bmatrix} 1 & 1.09 & 1.52 & 0 \\ 0 & 0.72 & 0.3168 & 0.9792 \\ 3.5649 & 0 & 1.53 & 0.7191 \\ 1.5367 & 0.6477 & 0.4445 & 1.27 \end{bmatrix} \tag{8}$$

2 bifurcations

3 Cycle limite

4 Exposant de Liapounov

IV Conclusion

V Annexes

VI bibliographie

References

[1] Immanuel M Bomze. “Lotka-Volterra equation and replicator dynamics: a two-dimensional classification”. In: *Biological cybernetics* 48.3 (1983), pp. 201–211.

[2] Immanuel M Bomze. “Lotka-Volterra equation and replicator dynamics: new issues in classification”. In: *Biological cybernetics* 72.5 (1995), pp. 447–453.

[3] Alfred J Lotka. “Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems”. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 6.7 (1920), pp. 410–415.

[4] Alfred J Lotka. “Contribution to the theory of periodic reactions”. In: *The Journal of Physical Chemistry* 14.3 (1910), pp. 271–274.

[5] Lionel Roques and Mickaël D Chekroun. “Probing chaos and biodiversity in a simple competition model”. In: *Ecological Complexity* 8.1 (2011), pp. 98–104.

[6] JA Vano et al. “Chaos in low-dimensional Lotka–Volterra models of competition”. In: *Nonlinearity* 19.10 (2006), p. 2391.