

Étude du model Lotka-Volterra

Robin Botrel, Axel Carpentier

*Université Paul Sabatier
Toulouse, France*

28 Decembre, 2022

CONTENTS

I Introduction

- 1 Le model classique proie prédateur
- 2 Généralisation

II Le cas 2D

- 1 Une étude des bifurcations

III Chaos en 4D

- 1 introduction aux attracteurs
- 2 bifurcations
- 3 Cycle limite
- 4 Exposant de Liapounov

IV Conclusion

V Annexes

VI bibliographie

I INTRODUCTION

CETTE étude des équations de prédation de Lotka-Volterra s'effectue dans le cadre d'une unité d'enseignement ouverte de la licence de mathématique de l'université Paul Sabatier. Nous allons partir d'un exercice vu en cours d'équations différentielles ordinaires (EDO), pour ensuite s'éloigner des frontières de ce cours et voir ce que peut offrir la discipline.

1 Le model classique proie prédateur

Les équations de Lotka-Volterra qualifient un système d'équations différentielles non linéaires, historiquement développées au début du 20ème siècle pour modéliser les interactions entre espèces et plus particulièrement entre 2 espèces : une proie et un prédateur, elles sont un exemple classique d'EDO. Le système est décrit équation 1. [3]

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t) (\alpha - \beta y(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = y(t) (\delta x(t) - \gamma) \end{cases} \quad (1)$$

UN PEU D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Dans sa publication de 1920 (c'est la première apparition sous cette forme de l'équation 1), Lokta introduit son model comme un simple cas particulier d'interaction entre deux espèces : La source de nourriture de l'espèce 1 (notée S_1) est en excès et peut donc être considérée constante sur la période donnée. l'espèce S_2 se nourrit exclusivement de S_1 . Il introduit

son raisonnement, X_i est la masse de l'espèce S_i :

$$\begin{aligned} 1 & \left[\begin{array}{l} \text{Variation de } X_1 \\ \text{par unité de temps} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} X_1 \text{ engendré} \\ \text{par unité de temps} \end{array} \right] \\ 1 & - \left[\begin{array}{l} X_1 \text{ détruit par } X_2 \\ \text{par unité de temps} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{l} \text{autre perte de } X_1 \\ \text{par unité de temps} \end{array} \right] \\ 2 & \left[\begin{array}{l} \text{Variation de } X_2 \\ \text{par unité de temps} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} X_2 \text{ engendré par l'ingestion de } X_1 \\ \text{par unité de temps} \end{array} \right] \\ 2 & - \left[\begin{array}{l} \text{autre perte de } X_2 \\ \text{par unité de temps} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

Pour translater ce raisonnement en un système d'EDO, il va faire de nouvelles assumptions, citons Lotka :

Pour de petits changements, le taux de formation de nouvelle matière d'une espèce donnée d'organisme dans des conditions déterminées est proportionnel à la masse existante de cette espèce. En d'autres termes, la croissance de la matière vivante est un processus typiquement "autocatakinetic". [...]. La proportionnalité ne s'applique pas aux grandes variations de X_1 , X_2 , ce qui est dûment pris en compte dans la mesure où A'_1 , est une fonction de X_1 , X_2 . [...]. De même, la masse de S_1 détruite par S_2 qui s'en nourrit sera, pour de petites variations, proportionnelle à X_2 et aussi à X_1 . Ce terme a donc été défini sous la forme $B_1 X_1 X_2$. Ici encore, les écarts de proportionnalité sont pris en charge par les variations de B_1 avec X_1 et X_2 , variables dont B_1 est une fonction.

$$\begin{aligned} \frac{dX_1(t)}{dt} &= A'_1 X_1 - B_1 X_1 X_2 - A''_1 X_1 \\ \frac{dX_2(t)}{dt} &= A_2 X_1 X_2 - B_2 X_2 \end{aligned} \quad (3)$$

Il construit sa translation vers un système d'EDO sur l'idée de proportionnalité mais tout en traitant cette proportionnalité comme des fonctions du temps. Durant toute la publication il n'envisage pas d'en faire des constantes. C'est Volterra qui en 1926 dans des lettres à Umberto D'Ancona, décrit la même équation mais tel que AB soit fixes, c'est l'équation que l'on a décrite eq.1. Volterra ne semble pas connaître les résultats précédents de Lotka. [volterra1926]

Ce système d'EDO est non linéaire autonome, solution analytique, figure, C inf, forme résolue ??

2 Généralisation

Carrying capacity...

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t) (a - b y(t) - c x(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = y(t) (d x(t) - e - f y(t)) \end{cases} \quad (4)$$

N dimension...

$$\frac{d}{dt}X(t) = X(t)(R + AX(t)) \quad (5)$$

II LE CAS 2D

Plusieurs visualisations du système : trajectoire (flow?), Champ vectoriel (def)... Points d'équilibres et importance

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

1 Une étude des bifurcations

Le système définit par 6 possède un comportement étonnant découlant de la non inversibilité de A . L'étude des bifurcations a pour objectif d'étudier l'évolution d'un système dynamique (entre autres ses points d'équilibres) en fonction d'un ou plusieurs paramètres autour d'un changement majeur du système. Il est intéressant dans notre cas d'introduire un paramètre dans A , rendant $A(s)$ inversible $\forall s \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$, $|A(s)| = 1 - s^2 \neq 0$.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A(s) = -\begin{bmatrix} 1 & s \\ s & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Étudions les points d'équilibres et leurs stabilités de ce système paramétrique 8.

$$X(R + AX) \stackrel{!}{=} 0 \wedge (x_1 = 0 \vee x_2 = 0) \Rightarrow (X = (0, 0)(O) \vee X = (1, 0)(M) \vee X = (0, 1)(N))$$

$$X(R + AX) \stackrel{!}{=} 0 \wedge (x_1 \neq 0 \wedge x_2 \neq 0 \wedge s = 1) \Rightarrow x_2 = 1 - x_1$$

$$X(R + AX) \stackrel{!}{=} 0 \wedge (x_1 \neq 0 \wedge x_2 \neq 0 \wedge s = -1) \Rightarrow X = \emptyset$$

$$X(R + AX) \stackrel{!}{=} 0 \wedge (x_1 \neq 0 \wedge x_2 \neq 0 \wedge s \neq \pm 1) \Rightarrow X = -A^{-1}R = \frac{1}{1-s^2} \begin{bmatrix} 1 & -s \\ -s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1+s} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (S) \quad (8)$$

$$J(f)_X = \begin{bmatrix} r_1 - 2x_1 - sx_2 & -sx_1 \\ -sx_2 & r_2 - 2x_2 - sx_1 \end{bmatrix}$$

$$J(f)_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$particular J(f)_M = \begin{bmatrix} -1 & -s \\ 0 & 1-s \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$J(f)_N = \begin{bmatrix} 1-s & 0 \\ -s & -1 \end{bmatrix}$$

$$J(f)_{S,s \neq \{1,-1\}} = \frac{1}{1+s} A(s)$$

À l'aide des Jacobiniennes, nous pouvons étudier la stabilité de ces points fixes et donc le comportement local des trajectoires. Soit F un des points fixes. f étant C^∞ effectuons un développement de Taylor à l'ordre 1 en F , sachant que $f(t, F) = 0$.

$$f(t, F + H) = J(f)_X H + \mathcal{O}(\|H\|^2) \quad (10)$$

En négligeant les termes d'ordres strictement supérieurs à un, on obtient une nouvelle équation différentielle linéaire, valable localement en F .

$$\frac{dF + H}{dt} = \frac{dH}{dt} = J(f)_F H \quad (11)$$

Le point fixe O est expansif ($\forall i, \lambda_i > 0$), $J(f)_M \wedge J(f)_N$ diagonalisable $\forall s \neq 2$ (voir preuve). Soit $s = 2 \dots$ (figure)

Soit $S \neq 2 \Rightarrow \exists P \in GL(\mathbb{R}), D \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ diagonal, $M = P^{-1}DP$ on a alors $\frac{dY}{dt} = DY$ avec $Y(t) = PH(t)$ $\lambda_{1,2}$ les valeurs propres, déterminant et trace sont invariants par changement de base et peuvent nous informer sur le signe des valeurs propres en dimension 2.

- $s > 1 \Rightarrow \text{Det}(J(f)_M) > 0 \wedge \text{Tr}(J(f)_M) < 0 \Rightarrow \lambda_i < 0$ **point stable**
- $s = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = -1$
- $1 > s > 0 \Rightarrow \text{Det}(J(f)_M) < 0 \wedge \text{Tr}(J(f)_M) > 0 \Rightarrow \lambda_1 < 0 \wedge \lambda_2 > 0$ **point selle**
- $s = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 \wedge \lambda_2 = 1$ **point selle**
- $s < 0 \Rightarrow \text{Det}(J(f)_M) < 0 \wedge \text{Tr}(J(f)_M) > 0 \Rightarrow \lambda_1 < 0 \wedge \lambda_2 > 0$ **point selle**

Le cas du point fixe N est similaire au point M . Intéressons-nous maintenant au point S . Vérifions que $\forall s \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ $J(f)_S$ diagonalisable. $\text{Det}(J(f)_S - XId_2) = \frac{1}{1+s} (\frac{1-s}{1+s} + X)(1 + X)$ le polynôme est scindé à racine simple $\forall s \neq 0$ dans le cas où $s = 0$ la jacobienne est diagonale. Finalement, $J(f)_S$ est diagonalisable $\forall s \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$. On peut alors étudier le signe du déterminant et de la trace en fonction de s : $\text{Det}(J(f)_S) = \frac{1-s}{1+s}$ et $\text{Tr}(J(f)_S) = \frac{-2}{1+s}$.

- $s > 1 \Rightarrow \text{Det}(J(f)_S) < 0 \wedge \text{Tr}(J(f)_S) < 0 \Rightarrow \lambda_1 < 0 \wedge \lambda_2 > 0$ **point selle**
- $1 > s > -1 \Rightarrow \text{Det}(J(f)_S) > 0 \wedge \text{Tr}(J(f)_S) < 0 \Rightarrow \lambda_i < 0$ **point stable**
- $s < -1 \Rightarrow \text{Det}(J(f)_S) < 0 \wedge \text{Tr}(J(f)_S) > 0 \Rightarrow \lambda_1 < 0 \wedge \lambda_2 > 0$ **point selle**

III CHAOS EN 4D

1 introduction aux attracteurs

dimension d'apparition

$$R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.72 \\ 1.53 \\ 1.27 \end{bmatrix} \quad A = -\begin{bmatrix} 1 & 1.09 & 1.52 & 0 \\ 0 & 0.72 & 0.3168 & 0.9792 \\ 3.5649 & 0 & 1.53 & 0.7191 \\ 1.5367 & 0.6477 & 0.4445 & 1.27 \end{bmatrix} \quad (12)$$

2 bifurcations

$$R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.72 \\ 1.53 \\ 1.27 \end{bmatrix} \quad A = -\begin{bmatrix} 1 & 1.09s & 1.52s & 0 \\ 0 & 0.72 & 0.3168s & 0.9792s \\ 3.5649s & 0 & 1.53 & 0.7191s \\ 1.5367s & 0.6477s & 0.4445s & 1.27 \end{bmatrix} \quad (13)$$

3 Cycle limite

$$R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.72 \\ 1.53 \\ 1.27 \end{bmatrix} \quad A = -\begin{bmatrix} 1 & 1.0355 & 1.444 & 0 \\ 0 & 0.72 & 0.30096 & 0.93024 \\ 3.386655 & 0 & 1.53 & 0.683145 \\ 1.459865 & 0.615315 & 0.422275 & 1.27 \end{bmatrix} \quad (14)$$

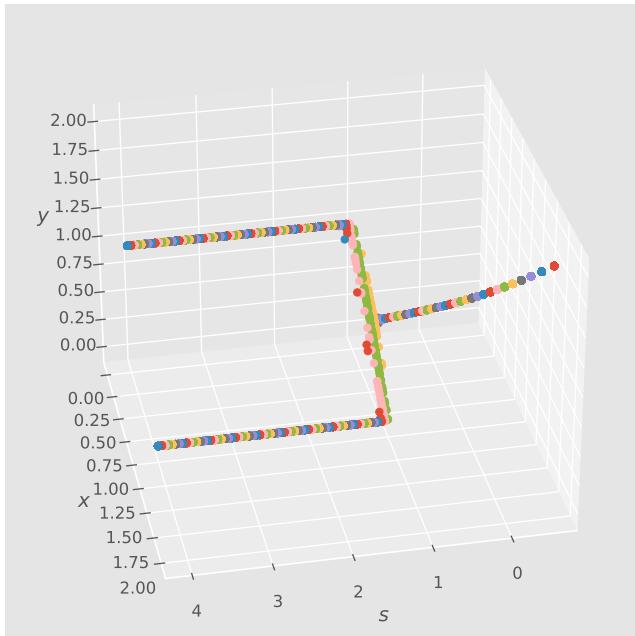


Figure 1. test

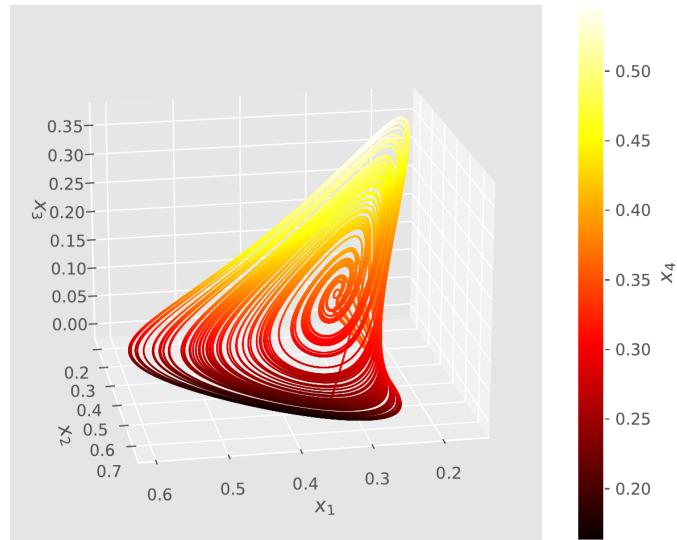
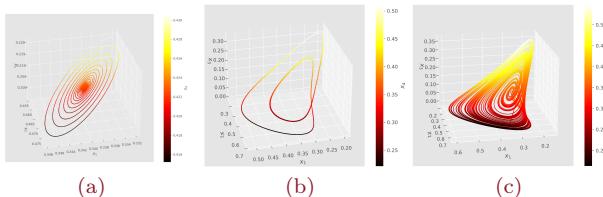


Figure 3. attracteur étrange définit par XXX

Figure 2. (a) $S = 0.8$ (b) $S = 0.95$ (c) $S = 1$

4 Exposant de Liapounov

IV CONCLUSION

V ANNEXES

VI BIBLIOGRAPHIE

REFERENCES

- [1] Immanuel M Bomze. "Lotka-Volterra equation and replicator dynamics: a two-dimensional classification". In: *Biological cybernetics* 48.3 (1983), pp. 201–211.
- [2] Immanuel M Bomze. "Lotka-Volterra equation and replicator dynamics: new issues in classification". In: *Biological cybernetics* 72.5 (1995), pp. 447–453.
- [3] Alfred J Lotka. "Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems". In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 6.7 (1920), pp. 410–415.
- [4] Alfred J Lotka. "Contribution to the theory of periodic reactions". In: *The Journal of Physical Chemistry* 14.3 (1910), pp. 271–274.

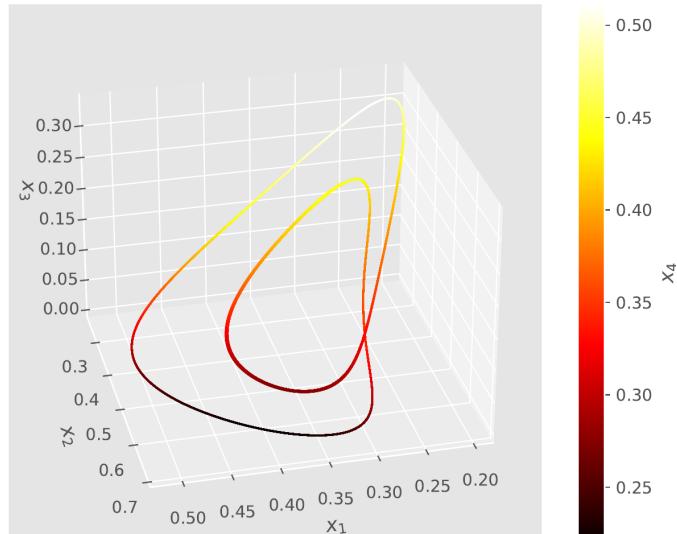


Figure 4. cycle limite définit par XXX

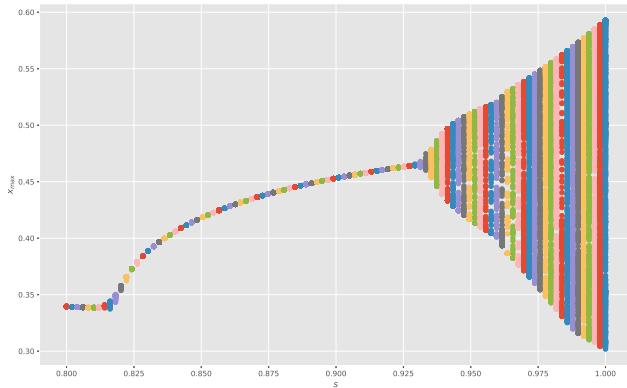


Figure 5. test

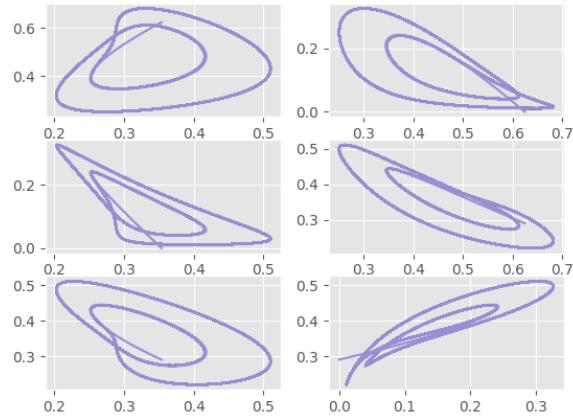


Figure 6. test

- [5] Lionel Roques and Mickaël D Chekroun. “Probing chaos and biodiversity in a simple competition model”. In: *Eco-logical Complexity* 8.1 (2011), pp. 98–104.
- [6] JA Vano et al. “Chaos in low-dimensional Lotka–Volterra models of competition”. In: *Nonlinearity* 19.10 (2006), p. 2391.