SYMPLECTIC GEOMETRY

辛几何笔记

Misuzu/Yuxuan Liu

March 1, 2025

Contents

这是我 2025 春季学期的辛几何课程笔记, 课程大纲如下:

- 线性辛几何
- 辛流形基础
- 局部理论
- 近复结构
- 辛群作用与 Toric 几何
- 经典/量子力学
- Morse 理论/Flow 理论

1 线性辛几何

1.1 辛空间

Definition 1.1. 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上的 m 维线性空间, $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ 是非退化, 反对称的双线性映射, 则称 ω 是 V 上的一个辛结构, (V, ω) 构成一个辛空间.

定义中的非退化指的是: 对任意 $0 \neq v \in V$，存在 $0 \neq w \in V$ 使得 $\omega(v, w) \neq 0$. 由定义可知:

- 非退化: $\widetilde{\omega} : V \to \widetilde{V}$, $v \mapsto \omega(v, \cdot)$ 是同构.
- 反对称: 选取 V 的一组基 $\{e_1, \cdots, e_m\}$, 则 (ω_{ij}) 是反对称矩阵, 其中 $\omega_{ij} = \omega(e_i, e_j)$.

同时也有推论: $m = 2n$, 为偶数.

Example 1.1. 令 $\{e_1 \cdots, e_{2n}\}$ 为 $\mathbb{R}^{2n}$ 的一组基, $e_i = (0, \cdots, 0, \underset{i\text{-th}}{1}, 0 \cdots, 0)$ (我们称其为标准基). 令 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的一个非退化反对称双线性映射 ω_0 由以下矩阵给出:

$$(\omega_{ij}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & id_{n\times n} \\ \hline -id_{n\times n} & 0 \end{array}\right)$$

则 $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ 是辛空间. 为了方便, 记 $f_i = e_{n+i}$, $1 \leq i \leq n$, 则有

$$\begin{cases} \omega_0(e_i, f_j) = \delta_{ij} \\ \omega_0(e_i, e_j) = \omega_0(f_i, f_j) = 0 \end{cases}$$

Definition 1.2. 设 $\varphi : V \to V'$ 是辛空间 (V, ω) 到 (V', ω') 的线性同构, 且满足 $\varphi^*\omega' = \omega$, 则称 φ 是辛同构.

Proposition 1.1. 任意 $2n$ 维辛空间 (V, ω) 都与 $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ 辛同构.

Proof. 我们运用归纳法证明. 目的: 证明存在 V 的一组基 $\{e'_1, \cdots, e'_n, f'_1 \cdots, f'_n\}$ 使得

$$\begin{cases} \omega(e'_i, f'_j) = \delta_{ij} \\ \omega(e'_i, e'_j) = \omega(f'_i, f'_j) = 0 \end{cases}$$

先任取一非零向量 e'_n, 由非退化性质和双线性性, $\exists f'_n$ 使得 $\omega(e'_n, f'_n) = 1$, 由此也可知 e'_n, f'_n 线性无关. 考虑 $V' = \{v \in V \mid \omega(e'_n, v) = 0, \omega(f'_n, v) = 0\}$, 则有:

(1) V' 是 $2n - 2$ 维线性空间.

(2) $\omega\mid_{V'}$ 非退化. (若对 $u \in V'$, $\forall u' \in V'$ 都有 $\omega(u, u') = 0$, 则 $\omega(u, v) = 0$ 对 $\forall v \in V$ 成立, 与 ω 非退化矛盾)

故 $\omega\mid_{V'}$ 是 V' 上的辛结构, 通过对维数归纳得证. □

若 (V, ω) 的一组基 $\{e_1, \cdots, e_n, f_1 \cdots, f_n\}$ 满足:

$$\begin{cases} \omega(e_i, f_j) = \delta_{ij} \\ \omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0 \end{cases}$$

则称该组基为辛基, 注意辛基不唯一.

Definition 1.3. 设 Y 是 (V, ω) 的一个线性子空间, 定义 Y 的辛补空间为 $Y^\omega = \{v \in V \mid \omega(v, u) = 0, \forall u \in Y\}$.

由线性代数可知:

- $\dim Y + \dim Y^\omega = \dim V$.
- $(Y^\omega)^\omega = Y$.
- $Y \subseteq Z \iff Y^\omega \supseteq Z^\omega$.

Definition 1.4. 当 (V, ω) 的子空间 Y 分别满足以下条件时, 称其为:

$Y \cap Y^\omega = 0$	辛子空间
$Y \subseteq Y^\omega$	迷向子空间
$Y \supseteq Y^\omega$	余迷向子空间
$Y = Y^\omega$	*Lagrange* 子空间

且分别有维数: $\dim Y$ 为偶数, $\dim Y \leq n$, $\dim Y \geq n$, $\dim Y = n$.

当 Y 是辛子空间时, $\omega|_Y$ 是其上的辛结构 (这也是为什么 Y 被称为辛子空间).

Remark 1.1. Lagrange 子空间是很重要的子空间, 它兼具极大各向同性 (maximal isotropic) 与结构对称性. 在后续的学习中我们也能看到 Lagrange 子流形的重要性.

Example 1.2. 在 $(\mathbb{R}^6, \omega_0)$ 中, $\{e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3\}$ 为标准基, 则有:

$L(e_1, f_1)$	辛子空间
$L(e_1)$	迷向子空间
$L(e_1, e_2, e_3, f_1)$	余迷向子空间
$L(e_1, e_2, e_3)$	Lagrange 子空间

Example 1.3. 设 Y 是 (V, ω) 的迷向子空间, 在 Y^ω / Y 上定义 $\overline{\omega}$ 为 $\overline{\omega}(\overline{u}, \overline{v}) = \omega(u, v)$.

Exercise 1.1. 证明: $(Y^\omega/Y, \varpi)$ 是辛空间.

Solution.

- 良定义: 对于 $\forall x, x', y, y' \in Y^\omega$, $x - x' \in Y, y - y' \in Y$, 有 $\omega(x, y) - \omega(x', y') = \omega(x - x', y) + \omega(x', y - y') = 0$, 故 ϖ 是良定义的.
- 非退化: 若存在 $(x + Y) \in Y^\omega/Y$ 使得 $\forall (y + Y) \in Y^\omega/Y$, $\varpi(x + Y, y + Y) = 0$, 则对 $\forall y \in Y^\omega$ 有 $\omega(x, y) = 0$, 故 $x \in (Y^\omega)^\omega = Y$, 可知 ϖ 非退化.
- 反对称: 由 ω 反对称继承而来.

□

Remark 1.2. 对于辛空间 (V, ω) 和其子空间 Y，$V = Y + Y^\omega$ 不一定成立, 例如 Y 为迷向子空间.

Exercise 1.2. 证明: (V, ω) 的任意迷向子空间可扩充为一个 Lagrange 子空间.

Solution. 任取 V 的迷向子空间 Y, 考虑满足以下条件的迷向子空间 M:

(1) $Y \subseteq M$; (2) 对任意满足 $Y \subseteq L$ 的迷向子空间 L, $L \subseteq M$.

下证 M 是 Lagrange 子空间: 若存在 $x \in M^\omega$ 且 $x \notin M$, 则 M 和 x 线性张成的子空间是包含 Y 的迷向子空间, 故有 $x \in M$, 矛盾. 因此 $M^\omega = M$, M 是 Lagrange 子空间.

(本题还可以用上题证明的结论解决, 考虑如上题的商空间, 由于其为辛空间, 则这个商空间中存在 Lagrange 子空间, 现在把这个 Lagrange 子空间用商映射拉回到 Y^ω 中, 证明这个空间就是包含 Y 的 Lagrange 子空间.) □

Exercise 1.3. 若 Y 是 (V, ω) 的 Lagrange 子空间, 则 (V, ω) 辛同构与 $(Y \oplus Y^*, \omega_0)$, ω_0 定义为 $\omega_0\left((u, \alpha), (v, \beta)\right) = \beta(u) - \alpha(v)$.

1.2 复结构

Definition 1.5. 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 若线性变换 $J : V \to V$ 满足 $J^2 = -id$, 则称 J 为 V 上的一个复结构.

- 若 V 上有复结构, 则 $(-1)^{\dim V} = \det(J^2) = (\det J)^2 \geq 0$, 故 $\dim V$ 为偶数且 J 可逆.
- 给定复结构 J, V 可以看成复线性空间:

$$\mathbb{C} \times V \to V,\ (s + it, v) \mapsto sv + tJ(v)$$

Example 1.4. 令 $\{e_1\cdots,e_{2n}\}$ 为 $\mathbb{R}^{2n}$ 的标准基, 考虑 J_0: $\begin{cases} J_0(e_i)=e_{n+i} \\ J_0(e_{n+i})=-e_i \end{cases}$, 其中 $1\le i\le n$, 则 J_0 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的复结构, 有矩阵表示: $J_0=\left(\begin{array}{c|c} 0 & -id_{n\times n} \\ \hline id_{n\times n} & 0 \end{array}\right)$

Proposition 1.2. 若 $2n$ 维实线性空间 V 上有复结构 J, 则有线性同构 $\psi:\mathbb{R}^{2n}\to V$ 使得 $J\psi=\psi J_0$.

Proof. 我们只需找出 V 的一组形如 $\{v_1,\cdots,v_n,Jv_1,\cdots,Jv_n\}$ 即可. 同样地, 我们使用归纳法证明.

任取 V 上的一个内积 h, 再令 $g:V\times V\to\mathbb{R}$, $(u,v)\mapsto\frac{1}{2}(h(u,v)+h(Ju,Jv))$, 易证 g 对称且正定, 故 g 是 V 上内积, 注意到 $g(Ju,Jv)=g(u,v)$, 故 g 是 J-不变内积. 设 v_n 是 (V,g) 中的单位向量, 则 Jv_n 也是单位向量. 计算 $g(v_n,Jv_n)=g(Jv_n,J^2v_n)=g(Jv_n,-v_n)=-g(v_n,Jv_n)$, 故 $v_n\perp Jv_n$. 现在考虑 $L(v_n,Jv_n)$ 在 g 下的正交补 V', 容易得出 $J|_{V'}$ 是 V' 上的复结构, 故由归纳法可以找出 V 的一组基形如 $\{v_1,\cdots,v_n,Jv_1,\cdots,Jv_n\}$. □

1.3 相容复结构

对于辛空间 (V,ω) 和其上复结构 J, 我们有同构 $\mathbb{R}^{2n}\overset{\varphi_1}{\cong}V$, $\mathbb{R}^{2n}\overset{\varphi_2}{\cong}V$ 分别保持辛结构和复结构, 但这两个同构通常来说是不相同的. 若要求这两个同构相同, 我们需要引入相容复结构.

Definition 1.6. 设 (V,ω) 是辛空间, J 是 V 上的复结构. 若有

- $\omega(Ju,Jv)=\omega(u,v)$, $\forall u,v\in V$
- $\omega(v,Jv)>0$ 对 $\forall 0\neq v\in V$

则称 J 与 ω 相容. $J(V,\omega)$ 表示 V 上所有与 ω 相容的复结构的集合.

Remark 1.3. 研究相容复结构对后续进行辛流形的局部分析有重要作用.

若给定相容复结构 J, 则可定义: $g_J:V\times V\to\mathbb{R}$, $(u,v)\mapsto\omega(u,Jv)$, 容易看出这是一个双线性映射. 进一步还有:

- g_J 是对称的: $g_J(u,v)=\omega(u,Jv)=\omega(Ju,-v)=\omega(v,Ju)=g_J(v,u)$.
- g_J 是正定的: $\forall 0\neq v\in V$, $g_J(v,v)=\omega(v,Jv)>0$.

因此 g_J 是 V 上的一个内积. 我们将看到这个内积有很好的性质.

- g_J 是 J-不变内积: $g_J(Ju,Jv)=\omega(Ju,-v)=\omega(v,Ju)=g_J(v,u)=g_J(u,v)$.
- J 相对于 g_J 是反自伴的: $g_J(Ju,v)=g_J(Ju,J(-Jv))=-g_J(u,Jv)$.

- ω, J, g_J 任意两个可以决定第三个.

我们称 (ω, J, g_J) 为相容三元组.

Example 1.5. 对于 $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, J_0 与 ω_0 相容, 且对于 $\mathbb{R}^{2n}$ 的标准内积 g_0，有 $g_0 = g_{J_0}$, 即标准内积和 J_0 诱导的内积相同.

Theorem 1.1. 设 (V, ω) 是辛空间, J 是 V 上的复结构. 则以下叙述等价:

(1) J 与 ω 相容.

(2) (V, ω) 有如下形式的辛基: $\{v_1, \cdots, v_n, Jv_1, \cdots, Jv_n\}$.

(3) 存在线性同构 $\Phi : \mathbb{R}^{2n} \to V$ 使得: $\Phi^*\omega = \omega_0$, $\Phi J_0 = J\Phi$.

(4) $\forall v \neq 0$, 有 $\omega(v, Jv) > 0$ 且 J 将 Lagrange 子空间映为 Lagrange 子空间.

Proof. 我们按照 $(1) \Rightarrow (2), (2) \Rightarrow (3), (3) \Rightarrow (1), (1) \Leftrightarrow (4)$ 的顺序证明:

- 任取 V 的 Lagrange 子空间 Λ, 在其中选相对 g_J 的标准正交基 $\{v_1, \cdots, v_n\}$, 则有

$$\begin{cases} \omega(v_i, Jv_j) = g_J(v_i, v_j) = \delta_{ij} \\ \omega(v_i, v_j) = \omega(Jv_i, Jv_j) = 0 \end{cases}$$

  故 (V, ω) 有如下形式的辛基: $\{v_1, \cdots, v_n, Jv_1, \cdots, Jv_n\}$.

- 定义 $\Phi : \mathbb{R}^{2n} \to V$, $e_i \mapsto v_i, f_i \mapsto Jv_i$, 即得线性同构 $\Phi : \mathbb{R}^{2n} \to V$ 使得: $\Phi^*\omega = \omega_0$, $\Phi J_0 = J\Phi$.

- 这是显然的.

- 任取 V 的 Lagrange 子空间 Λ, $u, v \in \Lambda$, 则有 $\omega(Ju, Jv) = \omega(u, v) = 0$, 故 $J(\Lambda)$ 是 Lagrange 子空间.

- 在 V 上定义 $g_J(u, v) = \omega(u, Jv)$. 我们证明 g_J 对称. 若 g_J 非对称, 则存在 $u, v \in V$ 使得 $g_J(u, v) \neq g_J(v, u)$. 此时 $v, u \neq 0$, 且 $\omega(u, Jv) = g_J(u, v) \neq g_J(v, u) = \omega(v, Ju)$. 记 $w = u - \frac{\omega(v,Ju)}{\omega(v,Jv)} v$, 则有

$$\begin{cases} (1)\ \omega(v, Jw) = \omega(v, Ju) - \omega(v, Ju) = 0 \\ (2)\ \omega(w, Jv) = \omega(u, Jv) - \omega(v, Ju) \neq 0 \end{cases}$$

  由 (2) 知 w, Jv 线性无关, 由于 J 是同构, 故有 Jw, v 线性无关. 由 (1) 知 $L(Jw, v)$ 是一个迷向子空间, 则可扩张成一个 Lagrange 子空间 Λ, 由假设知 $J\Lambda$ 也是 Lagrange 子空间, 则 $w = J(-Jw) \in J\Lambda$, $Jv \in J\Lambda$. 但这与 $\omega(w, Jv) \neq 0$ 矛盾, 故 g_J 对称. $\omega(Ju, Jv) = g_J(Ju, v) = g_J(v, Ju) = \omega(v, -u) = \omega(u, v)$, 故 ω 与 J 相容.

$\square$

1.4 辛群

Definition 1.7. 我们用 $Sp(2n)$ 表示 $\mathbb{R}^{2n}$ 中保持辛结构 ω_0 不变的线性变换的集合, 即 $\psi \in Sp(2n) \iff \omega_0(\psi u, \psi v) = \omega_0(u, v) \iff \psi^T J_0 \psi = J_0$. 可见 $Sp(2n)$ 构成一个群, 叫做*辛群*.

将 ψ 写成分块矩阵, 计算:

$$\left(\begin{array}{c|c} X & Z \\ \hline Y & W \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 0 & -id_{n\times n} \\ \hline id_{n\times n} & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} Z & -X \\ \hline W & -Y \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & -id_{n\times n} \\ \hline id_{n\times n} & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} X & Z \\ \hline Y & W \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} -Y & -W \\ \hline X & Z \end{array}\right)$$

则 $\psi J_0 = J_0 \psi \iff \left(\begin{array}{c|c} X & -Y \\ \hline Y & X \end{array}\right) \in GL(n, \mathbb{C}) \subseteq GL(2n, \mathbb{R})$.

Remark 1.4. 我们有 $\mathbb{R}^{2n}$ 到 $\mathbb{C}^n$ 的典范同构 $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}^n$, $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x} + i\vec{y}$. 对于 $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$, 我们有

$$\varphi\left(\left(\begin{array}{c|c} X & -Y \\ \hline Y & X \end{array}\right)(\xi)\right) = (X + iY)\varphi(\xi)$$

此时 $\left(\begin{array}{c|c} X & -Y \\ \hline Y & X \end{array}\right)$ 对应于 $X + iY$, 看成 $GL(n, \mathbb{C})$ 中的元素. 因此 $GL(n, \mathbb{C})$ 可以看成 $GL(2n, \mathbb{R})$ 的子群.

Theorem 1.2. $Sp(2n) \cap O(2n) = Sp(2n) \cap GL(n, \mathbb{C}) = GL(n, \mathbb{C}) \cap O(2n) = U(n)$.

Proof. 我们有如下关系:

$$\begin{cases} \psi \in GL(n, \mathbb{C}) \iff \psi J_0 = J_0 \psi \\ \psi \in Sp(2n) \iff \psi^T J_0 \psi = J_0 \\ \psi \in O(2n) \iff \psi^T \psi = \psi \psi^T = id_{2n} \end{cases}$$

故 $Sp(2n) \cap O(2n) = Sp(2n) \cap GL(n, \mathbb{C}) = GL(n, \mathbb{C}) \cap O(2n)$ 是显然的.

设 $\psi \in GL(n, \mathbb{C}) \cap O(2n)$, 则由 $\psi \in GL(n, \mathbb{C})$ 可知 ψ 可写成 $\left(\begin{array}{c|c} X & -Y \\ \hline Y & X \end{array}\right)$. 由 ψ 是正交矩阵可知

$$\left(\begin{array}{c|c} X & -Y \\ \hline Y & X \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} X^T & Y^T \\ \hline -Y^T & X^T \end{array}\right) = id_{2n} \Rightarrow (X + iY)(X - iY) = id_n \Rightarrow \psi \in U(n)$$

□

Proposition 1.3. $\psi \in Sp(2n)$ 行列式为 1, 即 $Sp(2n) \subseteq SL(2n,\mathbb{R})$.

Proof. $\psi \in Sp(2n) \Rightarrow \psi^T J_0 \psi = J_0 \Rightarrow \det\psi = \pm 1$, 只需证明 $\det\psi > 0$. 由于 $\psi^T\psi + id$ 是正定矩阵, 我们有 $\det(\psi^T\psi + id) > 0$. 而

$$\psi^T\psi + id = \psi^T\left(\psi + (\psi^T)^{-1}\right) = \psi^T\left(\psi + J_0\psi J_0^{-1}\right),$$

$$J_0\left(\psi + J_0\psi J_0^{-1}\right) = J_0\psi + \psi J_0 = \left(\psi + J_0\psi J_0^{-1}\right)J_0$$

故 $\psi + J_0\psi J_0^{-1} \in GL(n,\mathbb{C})$, $\exists X, Y$ 使得 $\psi + J_0\psi J_0^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} X & -Y \\ \hline Y & X \end{array}\right)$. 现在有 $0 < \det\left(\begin{array}{c|c} X & -Y \\ \hline Y & X \end{array}\right) = \det(X+iY)\det(X-iY) \geq 0$. 则有 $0 < \det(\psi^T\psi + id) = \det(\psi^T)|\det(X+iY)|^2$, 有 $\det\psi = \det\psi^T > 0$, 得证. □

1.5 $J(V,\omega)$ 的结构

对于 $J(V,\omega)$, 我们考虑两个问题: (1) 是否非空? (2) 若非空, 则其结构如何?

$J(V,\omega)$ 非空是显然的, 因为我们可以从 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的典范相容复结构诱导出 V 上的一个相容复结构. 但这个证明不好用, 因为后续考虑辛流形时, 我们需要考虑一族连续变动的辛空间, 这个证明就无法体现这种连续性, 因此我们采用如下的构造性证明:

Proposition 1.4. $J(V,\omega)$ 非空.

Proof. 任取 V 上的一个内积 g, 由于 g 和 ω 都是非退化的, 则存在唯一的线性变换 $A : V \to V$, 使得 $\omega(u,v) = g(Au,v)$, $\forall u, v \in V$. 具体来说

$$\begin{cases} V \to V^*, \ u \mapsto \omega(u,\cdot) \\ V \to V^*, \ u' \mapsto g(u',\cdot) \end{cases} \quad \text{都是同构, 则可定义} A(u) = u'$$

对于 V 上的任意线性变换 B, 定义 $B^* : V \to V$ 为满足 $g(B^*u,v) = g(u,Bv)$ 的唯一映射 (同之前的分析, 这个映射是存在的), 此时

$$g(A^*u,v) = g(u,Av) = \omega(v,u) = -\omega(u,v) = g(-Au,v)$$

故有 $A^* = -A$, 于是: $\begin{cases} (1)\ (AA^*)^* = AA^* \\ (2)\ g(AA^*u,u) = g(A^*u,A^*u) > 0, \forall 0 \neq u \in V \end{cases}$. 故由此可知 AA^* 相对于 g 是正定自伴的. 因此可定义正定自伴算子 $\sqrt{AA^*}$ 满足 $(\sqrt{AA^*})^2 = AA^*$. 定义 $J = (\sqrt{AA^*})^{-1}A$.

由于 $A^* = -A$, A 与 AA^* 交换, 因此 A 也与 $(\sqrt{AA^*})^{-1}$ 交换. 故有 $J^2 = (AA^*)^{-1}A^2 = (-A^2)^{-1}A^2 = -id$, 因此 J 是复结构.

由于 $J^* = A^*(\sqrt{AA^*})^{-1} = -A(\sqrt{AA^*})^{-1} = -J \Rightarrow JJ^* = id$, 我们有

$$\omega(Ju,Jv) = g(AJu,Jv) = g(JAu,Jv) = g(J^*JAu,v) = g(Au,v) = \omega(u,v), \ u,v \in V$$

$$\omega(u, Ju) = g(Au, Ju) = g(J^*Au, u) = g(-JAu, u) = g(\sqrt{AA^*}u, u) > 0,\ 0 \neq u$$

因此 J 是相容复结构, 得证. □

Remark 1.5. (1) 由构造过程可知, 对一族连续变动的辛空间 (V_t, ω_t), 可选连续变动的 g_t, 则构造的 $J_t \in J(V_t, \omega_t)$ 也是连续变动的. 因此在辛流形上一定存在近复结构.

(2) 由构造过程有 $g \to J \to g_J$, 但一般情况下 $g \neq g_J$.

由于 $J(V, \omega)$ 是 V 上线性变换全体构成集合的子集, 可以赋予 $J(V, \omega)$ 子空间拓扑. 则 $J(V, \omega)$ 结构如下:

Theorem 1.3. $J(V, \omega)$ 是可缩的.

Proof. 不妨设 $(V, \omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, 若 $J \in J(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, 当且仅当:

$$\begin{cases} (1)\ J^2 = -id \\ (2)\ J^T J_0 J = J_0 \\ (3)\ \langle v, -J_0 J v\rangle > 0, v \neq 0 \end{cases}$$

因此 $(J_0 J)^T = J^T(-J_0) = J_0 J$. 令 $P = -J_0 J$, 则可验证:

$$\begin{cases} (1)\ P \text{ 是对称的} \\ (2)\ P^T J_0 P = J_0 \\ (3)\ \langle v, Pv\rangle > 0, v \neq 0 \end{cases}$$

因此 P 是正定对称的辛矩阵. 记 $S = \{\text{对称正定的辛矩阵}\}$, 由上述分析可知我们有映射: $J(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \to S$, $J \mapsto -J_0 J$. 反过来, 给定 $P \in S$, 令 $J = J_0 P$, 则有:

- $J^2 = J_0 P J_0 P = J_0 P^T J_0 P = J_0^2 = -id$
- $J^T J_0 J = P^T J_0^T J_0 J_0 P = P^T J_0 P = J_0$
- $\langle v, -J_0 J v\rangle = \langle v, Pv\rangle > 0, v \neq 0$

故 $S \to J(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, $P \mapsto J_0 P$ 是逆映射, 显然这两个映射是连续映射, 故 $J(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ 同胚于 S, 我们只需证明 S 是可缩的.

我们证明 $\forall P \in S$, $\alpha \in [0, 1]$, 有 $P^\alpha \in S$. 若这个结论成立, 则容易看出 S 是可缩的. 显然 P^α 是正定对称的. 设 $\mathbb{R}^{2n} = \bigoplus\limits_i E_{\lambda_i}$, $\lambda_i > 0$ 是 P 的特征子空间分解, 令 $u = \sum u_i$, $v = \sum v_i$, 其中 $u_i, v_i \in E_{\lambda_i}$, 则

$$\omega_0(u_i, v_j) = \omega_0(Pu_i, Pv_j) = \lambda_i \lambda_j \omega_0(u_i, v_j) \implies \lambda_i \lambda_j = 1 \text{ 或 } \omega_0(u_i, v_j) = 0.$$

有 $\omega_0(P^\alpha u, P^\alpha v) = \sum\limits_{i,j} \lambda_i^\alpha \lambda_j^\alpha \omega_0(u_i, v_j) = \sum\limits_{i,j} \omega_0(u_i, v_j) = \omega_0(u, v)$, 故 $P^\alpha \in S$, 得证. 故 $J(V, \omega)$ 可缩.

□

2 辛流形

注意: 若未特别说明, 我们所谈论的流形都是连通无边的.

Definition 2.1. 设 M 是一个光滑流形, ω 是 M 上的光滑 2-形式, 如果有:

(1) $d\omega = 0$ (可积性条件)

(2) 对 $\forall p \in M$, ω_p 是 T_pM 上的辛结构

则称 (M, ω) 是辛流形, ω 是 M 的辛结构.

Example 2.1. $(\mathbb{R}^{2n}, \sum\limits_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i)$ 是辛流形, 其中 $x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n$ 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 的坐标, 对 $\forall p \in \mathbb{R}^{2n}$, $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right\}$ 构成 $T_p\mathbb{R}^{2n}$ 的辛基.

Example 2.2. 考虑 $M = S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. 对 $\forall p \in M$, $u, v \in T_pM$ 可以看成 $p^\perp \subseteq T_p\mathbb{R}^3$ 中的元素. 令 $\omega_p(u, v) = \langle p, u \times v \rangle$, 则 ω_p 给出了 T_pM 的辛结构, ω 是 M 上的光滑 2-形式. 由于 M 是 2 维流形, 故自然有 $d\omega = 0$, 故 (S^2, ω) 是辛流形. 类似地, 取 M 为任意可定向光滑曲面, ω 为 M 上的光滑体积形式, 则 (M, ω) 为辛流形.

Remark 2.1. 辛结构的存在有拓扑障碍, 要求流形满足条件:

- $\dim M$ 为偶数.
- 设 $\dim M = 2n$, 则 $\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ 是处处非零的光滑 $2n$-形式, 故 M 可定向, $\frac{\omega^n}{n!}$ 也是 M 上的体积形式, 称为辛体积.
- 若 M 是紧辛 2n 维流形, 则 $H^{2k}(M, \mathbb{R}) \neq 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$. 具体来说, 由 $d\omega = 0$ 可知 $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{R})$.
  - 当 $k = 0$ 时, $H^0(M, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$.
  - 当 $k = 1, \ldots, n$ 时, $d\omega^k = k\omega^{k-1} \wedge d\omega = 0$, 故 $[\omega^k] \in H^{2k}(M, \mathbb{R})$. 若 $\omega^k = d\beta$, 则有

    $$\int_M \omega^n = \int_M \omega^k \wedge \omega^{n-k} = \int_M d\beta \wedge \omega^{n-k} = \int_M d\left(\beta \wedge \omega^{n-k}\right) = \int_{\partial M} \beta \wedge \omega^{n-k} = 0$$

    而 $\int\limits_M \omega^n \neq 0$, 得出矛盾.

  故 $0 \neq [\omega^k] \in H^{2k}(M, \mathbb{R})$. 因此 S^{2n}, $n \geq 2$ 上没有辛结构.

对于 $\mathbb{R}^{2n}$, $\omega_0 = \sum\limits_i dx^i \wedge dy^i = d(\sum\limits_i x^i dy^i)$, 故 $[\omega_0] = 0 \in H^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$, 但由于 $\mathbb{R}^{2n}$ 非紧, 因此没有与上述 remark 矛盾.