SYMPLECTIC GEOMETRY

辛几何笔记

朧千夏

January 3, 2026

Contents

这是我 2025 春季学期的辛几何课程笔记, 课程大纲如下:

- 线性辛几何
- 辛流形基础
- 局部理论
- 近复结构
- 辛群作用与 Toric 几何
- 经典/量子力学
- Morse 理论/Flow 理论

大纲供参考, 以笔记实际内容为准.

1 线性辛几何

1.1 辛空间

Definition 1.1. 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上的 m 维线性空间, $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ 是非退化, 反对称的双线性映射, 则称 ω 是 V 上的一个辛结构, (V, ω) 构成一个辛空间.

定义中的非退化指的是: 对任意 $0 \neq v \in V$，存在 $0 \neq w \in V$ 使得 $\omega(v, w) \neq 0$. 由定义可知:

- 非退化: $\widetilde{\omega} : V \to V^*$, $v \mapsto \omega(v, \cdot)$ 是同构.
- 反对称: 选取 V 的一组基 $\{e_1, \cdots, e_m\}$, 则 (ω_{ij}) 是反对称矩阵, 其中 $\omega_{ij} = \omega(e_i, e_j)$.

同时也有推论: $m = 2n$, 为偶数.

Example 1.1. 令 $\{e_1 \cdots, e_{2n}\}$ 为 $\mathbb{R}^{2n}$ 的一组基, $e_i = (0, \cdots, 0, \underset{i\text{-th}}{1}, 0 \cdots, 0)$ (我们称其为标准基). 令 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的一个非退化反对称双线性映射 ω_0 由以下矩阵给出:

$$(\omega_{ij}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{id}_{n\times n} \\ \hline -\mathrm{id}_{n\times n} & 0 \end{array}\right)$$

则 $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ 是辛空间. 为了方便, 记 $f_i = e_{n+i}$, $1 \leq i \leq n$, 则有

$$\begin{cases} \omega_0(e_i, f_j) = \delta_{ij} \\ \omega_0(e_i, e_j) = \omega_0(f_i, f_j) = 0 \end{cases}$$

Definition 1.2. 设 $\varphi : V \to V'$ 是辛空间 (V, ω) 到 (V', ω') 的线性同构, 且满足 $\varphi^*\omega' = \omega$, 则称 φ 是辛同构.

Proposition 1.1. 任意 $2n$ 维辛空间 (V, ω) 都与 $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ 辛同构.

Proof. 我们运用归纳法证明. 目的: 证明存在 V 的一组基 $\{e_1', \cdots, e_n', f_1' \cdots, f_n'\}$ 使得

$$\begin{cases} \omega(e_i', f_j') = \delta_{ij} \\ \omega(e_i', e_j') = \omega(f_i', f_j') = 0 \end{cases}$$

先任取一非零向量 e_n', 由非退化性和双线性性, $\exists f_n'$ 使得 $\omega(e_n', f_n') = 1$, 由此也可知 e_n', f_n' 线性无关. 考虑 $V' = \{v \in V \mid \omega(e_n', v) = 0, \omega(f_n', v) = 0\}$, 则有:

(1) V' 是 $2n-2$ 维线性空间.

(2) $\omega\mid_{V'}$ 非退化. (若对 $u \in V'$, $\forall u' \in V'$ 都有 $\omega(u, u') = 0$, 则 $\omega(u, v) = 0$ 对 $\forall v \in V$ 成立, 与 ω 非退化矛盾)

故 $\omega\mid_{V'}$ 是 V' 上的辛结构, 通过对维数归纳得证. $\square$

若 (V,ω) 的一组基 $\{e_1,\cdots,e_n,f_1\cdots,f_n\}$ 满足:

$$\begin{cases}\omega(e_i,f_j)=\delta_{ij}\\ \omega(e_i,e_j)=\omega(f_i,f_j)=0\end{cases}$$

则称该组基为辛基, 注意辛基不唯一.

Definition 1.3. 设 Y 是 (V,ω) 的一个线性子空间, 定义 Y 的辛补空间为 $Y^\omega=\{v\in V\mid\omega(v,u)=0,\forall u\in Y\}$.

由线性代数可知:

- $\dim Y+\dim Y^\omega=\dim V$.
- $(Y^\omega)^\omega=Y$.
- $Y\subseteq Z\iff Y^\omega\supseteq Z^\omega$.

Definition 1.4. 当 (V,ω) 的子空间 Y 分别满足以下条件时, 称其为:

$Y\cap Y^\omega=0$	辛子空间
$Y\subseteq Y^\omega$	迷向子空间
$Y\supseteq Y^\omega$	余迷向子空间
$Y=Y^\omega$	*Lagrange* 子空间

且分别有维数: $\dim Y$ 为偶数, $\dim Y\le n$, $\dim Y\ge n$, $\dim Y=n$.

当 Y 是辛子空间时, $\omega|_Y$ 是其上的辛结构 (这也是为什么 Y 被称为辛子空间).

Remark 1.1. Lagrange 子空间是很重要的子空间, 它兼具极大各向同性 (maximal isotropic) 与结构对称性. 在后续的学习中我们也能看到 Lagrange 子流形的重要性.

Example 1.2. 在 $(\mathbb{R}^6,\omega_0)$ 中, $\{e_1,e_2,e_3,f_1,f_2,f_3\}$ 为标准基, 则有:

$L(e_1,f_1)$	辛子空间
$L(e_1)$	迷向子空间
$L(e_1,e_2,e_3,f_1)$	余迷向子空间
$L(e_1,e_2,e_3)$	Lagrange 子空间

Example 1.3. 设 Y 是 (V,ω) 的迷向子空间, 在 Y^ω/Y 上定义 ϖ 为 $\varpi(\overline{u},\overline{v})=\omega(u,v)$.

Exercise 1.1. 证明: $(Y^\omega/Y,\varpi)$ 是辛空间.

Solution.

- 良定义: 对于 $\forall x, x', y, y' \in Y^\omega$, $x - x' \in Y, y - y' \in Y$, 有 $\omega(x,y) - \omega(x',y') = \omega(x - x', y) + \omega(x', y - y') = 0$, 故 ϖ 是良定义的.
- 非退化: 若存在 $(x+Y) \in Y^\omega/Y$ 使得 $\forall (y+Y) \in Y^\omega/Y$, $\varpi(x+Y, y+Y) = 0$, 则对 $\forall y \in Y^\omega$ 有 $\omega(x,y) = 0$, 故 $x \in (Y^\omega)^\omega = Y$, 可知 ϖ 非退化.
- 反对称: 由 ω 反对称继承而来.

$\square$

Remark 1.2. 对于辛空间 (V,ω) 和其子空间 Y，$V = Y + Y^\omega$ 不一定成立, 例如 Y 为迷向子空间.

Exercise 1.2. 证明: (V,ω) 的任意迷向子空间可扩充为一个 Lagrange 子空间.

Solution. 任取 V 的迷向子空间 Y, 考虑满足以下条件的迷向子空间 M:

(1) $Y \subseteq M$; (2) 对任意满足 $Y \subseteq L$ 的迷向子空间 L, $L \subseteq M$.

下证 M 是 Lagrange 子空间: 若存在 $x \in M^\omega$ 且 $x \notin M$, 则 M 和 x 线性张成的子空间是包含 Y 的迷向子空间, 故有 $x \in M$, 矛盾. 因此 $M^\omega = M$, M 是 Lagrange 子空间.

(本题还可以用上题证明的结论解决, 考虑如上题的商空间, 由于其为辛空间, 则这个商空间中存在 Lagrange 子空间, 现在把这个 Lagrange 子空间用商映射拉回到 Y^ω 中, 证明这个空间就是包含 Y 的 Lagrange 子空间.) $\square$

Exercise 1.3. 若 Y 是 (V,ω) 的 Lagrange 子空间, 则 (V,ω) 辛同构与 $(Y \oplus Y^*, \omega_0)$, ω_0 定义为 $\omega_0\left((u,\alpha),(v,\beta)\right) = \beta(u) - \alpha(v)$.

Solution. 由于 ω 是辛结构, 则存在一个线性同构 $\iota : V \to V^*$, $v \mapsto \omega(v,\cdot)$. 定义

$$f : Y \oplus Y^* \to V,\ (u,\alpha) \mapsto u - \iota^{-1}(\alpha)$$

下证 f 是辛同构:

- f 是线性同构: 线性性是显然的. 若 $u - \iota^{-1}(\alpha) = 0$, 则 $\iota(u) = \omega(u,\cdot) = \alpha$. 则有 $\alpha(v) = \omega(u,v) = 0$, $\forall v \in Y$. 故 $\alpha = 0, u = 0$, f 是单射. 由于 $\iota^{-1}(Y^*)$ 是 V 的 n 维子空间, 若 $V = Y \oplus \iota^{-1}(Y^*)$, 则满射是显然的. 假设 $u \in Y \cap \iota^{-1}(Y^*)$, 则存在 $\alpha \in Y^*$ 使得 $u = \iota^{-1}(\alpha)$, 故 $u = 0$. 因此 f 是线性同构.
- f 是辛同构: $f^*\omega((u,\alpha),(v,\beta)) = \omega(u - \iota^{-1}(\alpha), v - \iota^{-1}(\beta)) = \omega(\iota^{-1}(\beta), u) - \omega(\iota^{-1}(\alpha), v) = \beta(u) - \alpha(v)$.

$\square$

1.2 复结构

Definition 1.5. 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 若线性变换 $J : V \to V$ 满足 $J^2 = -\mathrm{id}$, 则称 J 为 V 上的一个复结构.

- 若 V 上有复结构, 则 $(-1)^{\dim V} = \det(J^2) = (\det J)^2 \geq 0$, 故 $\dim V$ 为偶数且 J 可逆.

- 给定复结构 J, V 可以看成复线性空间, 这时 $\dim_{\mathbb{C}} V = \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} V$:

$$\mathbb{C}\times V \to V,\ (s+it, v)\mapsto sv + tJ(v)$$

Example 1.4. 令 $\{e_1\cdots, e_{2n}\}$ 为 $\mathbb{R}^{2n}$ 的标准基, 考虑 J_0: $\begin{cases} J_0(e_i) = e_{n+i} \\ J_0(e_{n+i}) = -e_i \end{cases}$, 其中 $1\le i\le n$, 则 J_0 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的复结构, 有矩阵表示: $J_0 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\mathrm{id}_{n\times n} \\ \hline \mathrm{id}_{n\times n} & 0 \end{array}\right)$

Proposition 1.2. 若 $2n$ 维实线性空间 V 上有复结构 J, 则有线性同构 $\psi:\mathbb{R}^{2n}\to V$ 使得 $J\psi = \psi J_0$.

Proof. 我们只需找出 V 的一组形如 $\{v_1,\cdots,v_n,Jv_1,\cdots,Jv_n\}$ 即可. 同样地, 我们使用归纳法证明.

任取 V 上的一个内积 h, 再令

$$g: V\times V\to\mathbb{R},\quad (u,v)\mapsto \frac{1}{2}\left(h(u,v)+h(Ju,Jv)\right).$$

易证 g 对称且正定, 故 g 是 V 上内积, 注意到 $g(Ju,Jv)=g(u,v)$, 故 g 是 J-不变内积. 设 v_n 是 (V,g) 中的单位向量, 则 Jv_n 也是单位向量. 计算

$$g(v_n,Jv_n) = g(Jv_n, J^2v_n) = g(Jv_n,-v_n) = -g(v_n,Jv_n),$$

故 $v_n\perp Jv_n$. 现在考虑 $L(v_n,Jv_n)$ 在 g 下的正交补 V', 容易得出 $J|_{V'}$ 是 V' 上的复结构, 故由归纳法可以找出 V 的一组基形如 $\{v_1,\cdots,v_n,Jv_1,\cdots,Jv_n\}$. □

1.3 相容复结构

对于辛空间 (V,ω) 和其上复结构 J, 我们有同构 $\mathbb{R}^{2n}\overset{\varphi_1}{\cong} V$, $\mathbb{R}^{2n}\overset{\varphi_2}{\cong} V$ 分别保持辛结构和复结构, 但这两个同构通常来说是不相同的. 若要求这两个同构相同, 我们需要引入相容复结构.

Definition 1.6. 设 (V,ω) 是辛空间, J 是 V 上的复结构. 若有

- $\omega(Ju,Jv)=\omega(u,v)$, $\forall u,v\in V$
- $\omega(v,Jv)>0$ 对 $\forall\ 0\neq v\in V$

则称 J 与 ω 相容. $J(V,\omega)$ 表示 V 上所有与 ω 相容的复结构的集合.

Remark 1.3. 研究相容复结构对后续进行辛流形的局部分析有重要作用.

若给定相容复结构 J, 则可定义: $g_J: V\times V\to\mathbb{R}$, $(u,v)\mapsto\omega(u,Jv)$, 容易看出这是一个双线性映射. 进一步还有:

- g_J 是对称的: $g_J(u,v)=\omega(u,Jv)=\omega(Ju,-v)=\omega(v,Ju)=g_J(v,u)$.
- g_J 是正定的: $\forall\ 0\neq v\in V$, $g_J(v,v)=\omega(v,Jv)>0$.

因此 g_J 是 V 上的一个内积. 我们将看到这个内积有很好的性质.

- g_J 是 J-不变内积: $g_J(Ju,Jv)=\omega(Ju,-v)=\omega(v,Ju)=g_J(v,u)=g_J(u,v)$.
- J 相对于 g_J 是反自伴的: $g_J(Ju,v)=g_J(Ju,J(-Jv))=-g_J(u,Jv)$.
- ω,J,g_J 任意两个可以决定第三个.

  我们称 (ω,J,g_J) 为相容三元组.

Example 1.5. 对于 $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$, J_0 与 ω_0 相容, 且对于 $\mathbb{R}^{2n}$ 的标准内积 g_0，有 $g_0=g_{J_0}$，即标准内积和 J_0 诱导的内积相同.

Theorem 1.1. 设 (V,ω) 是辛空间, J 是 V 上的复结构. 则以下叙述等价:

(1) J 与 ω 相容.

(2) (V,ω) 有如下形式的辛基: $\{v_1,\cdots,v_n,Jv_1,\cdots,Jv_n\}$.

(3) 存在线性同构 $\Phi:\mathbb{R}^{2n}\to V$ 使得: $\Phi^*\omega=\omega_0$, $\Phi J_0=J\Phi$.

(4) $\forall v\neq 0$, 有 $\omega(v,Jv)>0$ 且 J 将 Lagrange 子空间映为 Lagrange 子空间.

Proof. 我们按照 $(1)\Rightarrow(2),(2)\Rightarrow(3),(3)\Rightarrow(1),(1)\Leftrightarrow(4)$ 的顺序证明:

- 任取 V 的 Lagrange 子空间 Λ, 在其中选相对 g_J 的标准正交基 $\{v_1,\cdots,v_n\}$, 则有

$$\begin{cases}\omega(v_i,Jv_j)=g_J(v_i,v_j)=\delta_{ij}\\ \omega(v_i,v_j)=\omega(Jv_i,Jv_j)=0\end{cases}$$

  故 (V,ω) 有如下形式的辛基: $\{v_1,\cdots,v_n,Jv_1,\cdots,Jv_n\}$.

- 定义 $\Phi:\mathbb{R}^{2n}\to V$, $e_i\mapsto v_i, f_i\mapsto Jv_i$, 即得线性同构 $\Phi:\mathbb{R}^{2n}\to V$ 使得: $\Phi^*\omega=\omega_0$, $\Phi J_0=J\Phi$.
- 这是显然的.
- 任取 V 的 Lagrange 子空间 Λ, $u,v\in\Lambda$, 则有 $\omega(Ju,Jv)=\omega(u,v)=0$, 故 $J(\Lambda)$ 是迷向子空间且维数为 $\frac{1}{2}\dim V$, 故 $J(\Lambda)$ 是 Lagrange 子空间.
- 在 V 上定义 $g_J(u,v)=\omega(u,Jv)$. 我们证明 g_J 对称. 若 g_J 非对称, 则存在 $u,v\in V$ 使得 $g_J(u,v)\neq g_J(v,u)$. 此时 $v,u\neq 0$, 且 $\omega(u,Jv)=g_J(u,v)\neq g_J(v,u)=\omega(v,Ju)$. 记 $w=u-\frac{\omega(v,Ju)}{\omega(v,Jv)}v$, 则有

$$\begin{cases}(1)\ \omega(v,Jw)=\omega(v,Ju)-\omega(v,Ju)=0\\ (2)\ \omega(w,Jv)=\omega(u,Jv)-\omega(v,Ju)\neq 0\end{cases}$$

  由 (2) 知 w,Jv 线性无关, 由于 J 是同构, 故有 Jw,v 线性无关. 由 (1) 知 $L(Jw,v)$ 是一个迷向子空间, 则可扩张成一个 Lagrange 子空间 Λ, 由假设知 $J\Lambda$ 也是 Lagrange 子空间, 则 $w=J(-Jw)\in J\Lambda$, $Jv\in J\Lambda$. 但这与 $\omega(w,Jv)\neq 0$ 矛盾, 故 g_J 对称.

$$\omega(Ju,Jv)=g_J(Ju,v)=g_J(v,Ju)=\omega(v,-u)=\omega(u,v),$$

  故 ω 与 J 相容.

$\square$

1.4 辛群

Definition 1.7. 我们用 $\mathrm{Sp}(2n)$ 表示 $\mathbb{R}^{2n}$ 中保持辛结构 ω_0 不变的线性变换的集合, 即 $\psi\in\mathrm{Sp}(2n)\iff\omega_0(\psi u,\psi v)=\omega_0(u,v)\iff\psi^TJ_0\psi=J_0$. 可见 $\mathrm{Sp}(2n)$ 构成一个群, 叫做辛群.

将 ψ 写成分块矩阵, 计算:

$$\left(\begin{array}{c|c}X & Z\\\hline Y & W\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}0 & -\mathrm{id}_{n\times n}\\\hline \mathrm{id}_{n\times n} & 0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}Z & -X\\\hline W & -Y\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c}0 & -\mathrm{id}_{n\times n}\\\hline \mathrm{id}_{n\times n} & 0\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}X & Z\\\hline Y & W\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}-Y & -W\\\hline X & Z\end{array}\right)$$

则 $\psi J_0=J_0\psi\iff\left(\begin{array}{c|c}X & -Y\\\hline Y & X\end{array}\right)\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\subseteq\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$.

Remark 1.4. 我们有 $\mathbb{R}^{2n}$ 到 $\mathbb{C}^n$ 的典范同构 $\varphi:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{C}^n$, $(\vec{x},\vec{y})\mapsto\vec{x}+i\vec{y}$. 对于 $\xi\in\mathbb{R}^{2n}$, 我们有

$$\varphi\left(\left(\begin{array}{c|c}X & -Y\\\hline Y & X\end{array}\right)(\xi)\right)=(X+iY)\varphi(\xi)$$

此时 $\left(\begin{array}{c|c}X & -Y\\\hline Y & X\end{array}\right)$ 对应于 $X+iY$, 看成 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 中的元素. 因此 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 可以看成 $\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$ 的子群.

Theorem 1.2. $\mathrm{Sp}(2n)\cap\mathrm{O}(2n)=\mathrm{Sp}(2n)\cap\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})=\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\cap\mathrm{O}(2n)=U(n)$.

Proof. 我们有如下关系:

$$\begin{cases}\psi\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\iff\psi J_0=J_0\psi\\ \psi\in\mathrm{Sp}(2n)\iff\psi^TJ_0\psi=J_0\\ \psi\in\mathrm{O}(2n)\iff\psi^T\psi=\psi\psi^T=\mathrm{id}_{2n}\end{cases}$$

故 $\mathrm{Sp}(2n)\cap\mathrm{O}(2n)=\mathrm{Sp}(2n)\cap\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})=\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\cap\mathrm{O}(2n)$ 是显然的.

设 $\psi\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\cap\mathrm{O}(2n)$, 则由 $\psi\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 可知 ψ 可写成 $\left(\begin{array}{c|c}X & -Y\\\hline Y & X\end{array}\right)$. 由 ψ 是正交矩阵可知

$$\left(\begin{array}{c|c}X & -Y\\\hline Y & X\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}X^T & Y^T\\\hline -Y^T & X^T\end{array}\right)=\mathrm{id}_{2n}\Rightarrow(X+iY)(X-iY)=\mathrm{id}_n\Rightarrow\psi\in\mathrm{U}(n)$$

□

Proposition 1.3. $\psi\in\mathrm{Sp}(2n)$ 行列式为 1, 即 $\mathrm{Sp}(2n)\subseteq\mathrm{SL}(2n,\mathbb{R})$.

Proof. $\psi \in \mathrm{Sp}(2n) \Rightarrow \psi^T J_0 \psi = J_0 \Rightarrow \det \psi = \pm 1$, 只需证明 $\det \psi > 0$. 由于 $\psi^T\psi + \mathrm{id}$ 是正定矩阵, 我们有 $\det(\psi^T\psi + \mathrm{id}) > 0$. 而

$$\psi^T\psi + \mathrm{id} = \psi^T\left(\psi + (\psi^T)^{-1}\right) = \psi^T\left(\psi + J_0\psi J_0^{-1}\right),$$

$$J_0\left(\psi + J_0\psi J_0^{-1}\right) = J_0\psi + \psi J_0 = \left(\psi + J_0\psi J_0^{-1}\right) J_0$$

故 $\psi + J_0\psi J_0^{-1} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\exists X, Y$ 使得

$$\psi + J_0\psi J_0^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} X & -Y \\ \hline Y & X \end{array}\right).$$

现在有

$$0 < \det\left(\begin{array}{c|c} X & -Y \\ \hline Y & X \end{array}\right) = \det(X + iY)\det(X - iY) \geq 0,$$

则有

$$0 < \det(\psi^T\psi + \mathrm{id}) = \det(\psi^T)|\det(X + iY)|^2,$$

有 $\det \psi = \det \psi^T > 0$, 得证. □

1.5 $J(V, \omega)$ 的结构

对于 $J(V, \omega)$, 我们考虑两个问题: (1) 是否非空? (2) 若非空, 则其结构如何?

$J(V, \omega)$ 非空是显然的, 因为我们可以从 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的典范相容复结构诱导出 V 上的一个相容复结构. 但这个证明不好用, 因为后续考虑辛流形时, 我们需要考虑一族连续变动的辛空间, 这个证明就无法体现这种连续性, 因此我们采用如下的构造性证明:

Proposition 1.4. $J(V, \omega)$ 非空.

Proof. 任取 V 上的一个内积 g, 由于 g 和 ω 都是非退化的, 则存在唯一的线性变换 $A : V \to V$, 使得 $\omega(u, v) = g(Au, v)$, $\forall u, v \in V$. 具体来说

$$\begin{cases} V \to V^*, \ u \mapsto \omega(u, \cdot) \\ V \to V^*, \ u' \mapsto g(u', \cdot) \end{cases} \quad \text{都是同构, 则可定义} A(u) = u'$$

对于 V 上的任意线性变换 B, 定义 $B^* : V \to V$ 为满足 $g(B^*u, v) = g(u, Bv)$ 的唯一映射 (同之前的分析, 这个映射是存在的), 此时

$$g(A^*u, v) = g(u, Av) = \omega(v, u) = -\omega(u, v) = g(-Au, v)$$

故有 $A^* = -A$, 于是:

$$\begin{cases} (1)\ (AA^*)^* = AA^* \\ (2)\ g(AA^*u, u) = g(A^*u, A^*u) > 0, \forall 0 \neq u \in V \end{cases}$$

故由此可知 AA^* 相对于 g 是正定自伴的. 因此可定义正定自伴算子 $\sqrt{AA^*}$ 满足 $(\sqrt{AA^*})^2 = AA^*$. 定义 $J = (\sqrt{AA^*})^{-1}A$.

由于 $A^* = -A$, A 与 AA^* 交换, 因此 A 也与 $(\sqrt{AA^*})^{-1}$ 交换. 故有 $J^2 = (AA^*)^{-1}A^2 = (-A^2)^{-1}A^2 = -\mathrm{id}$, 因此 J 是复结构.

由于 $J^* = A^*(\sqrt{AA^*})^{-1} = -A(\sqrt{AA^*})^{-1} = -J \Rightarrow JJ^* = \mathrm{id}$, 我们有

$$\omega(Ju, Jv) = g(AJu, Jv) = g(JAu, Jv) = g(J^*JAu, v) = g(Au, v) = \omega(u, v),\ u, v \in V$$

$$\omega(u, Ju) = g(Au, Ju) = g(J^*Au, u) = g(-JAu, u) = g(\sqrt{AA^*}u, u) > 0,\ 0 \neq u$$

因此 J 是相容复结构, 得证. □

Remark 1.5. (1) 由构造过程可知, 对一族连续变动的辛空间 (V_t, ω_t), 可选连续变动的 g_t, 则构造的 $J_t \in J(V_t, \omega_t)$ 也是连续变动的. 因此在辛流形上一定存在近复结构.
(2) 由构造过程有 $g \to J \to g_J$, 但一般情况下 $g \neq g_J$.

由于 $J(V, \omega)$ 是 V 上线性变换全体构成集合的子集, 可以赋予 $J(V, \omega)$ 子空间拓扑. 则 $J(V, \omega)$ 结构如下:

Theorem 1.3. $J(V, \omega)$ 是可缩的.

Proof. 不妨设 $(V, \omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, 若 $J \in J(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, 当且仅当:

$$\begin{cases} (1)\ J^2 = -\mathrm{id} \\ (2)\ J^T J_0 J = J_0 \\ (3)\ \langle v, -J_0 J v\rangle > 0, v \neq 0 \end{cases}$$

因此 $(J_0 J)^T = J^T(-J_0) = J_0 J$. 令 $P = -J_0 J$, 则可验证:

$$\begin{cases} (1)\ P \text{ 是对称的} \\ (2)\ P^T J_0 P = J_0 \\ (3)\ \langle v, Pv\rangle > 0, v \neq 0 \end{cases}$$

因此 P 是正定对称的辛矩阵. 记 $S = \{\text{对称正定的辛矩阵}\}$, 由上述分析可知我们有映射: $J(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \to S$, $J \mapsto -J_0 J$. 反过来, 给定 $P \in S$, 令 $J = J_0 P$, 则有:

- $J^2 = J_0 P J_0 P = J_0 P^T J_0 P = J_0^2 = -\mathrm{id}$
- $J^T J_0 J = P^T J_0^T J_0 J_0 P = P^T J_0 P = J_0$
- $\langle v, -J_0 J v\rangle = \langle v, Pv\rangle > 0, v \neq 0$

故 $S \to J(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, $P \mapsto J_0 P$ 是逆映射, 显然这两个映射是连续映射, 故 $J(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ 同胚于 S, 我们只需证明 S 是可缩的.

我们证明 $\forall P \in S$, $\alpha \in [0, 1]$, 有 $P^\alpha \in S$. 若这个结论成立, 则容易看出 S 是可缩的. 显然 P^α 是正定对称的. 设 $\mathbb{R}^{2n} = \bigoplus\limits_i E_{\lambda_i}$, $\lambda_i > 0$ 是 P 的特征子空间分解, 令 $u = \sum u_i$, $v = \sum v_i$, 其中 $u_i, v_i \in E_{\lambda_i}$, 则

$$\omega_0(u_i, v_j) = \omega_0(Pu_i, Pv_j) = \lambda_i\lambda_j\omega_0(u_i, v_j) \implies \lambda_i\lambda_j = 1 \text{ 或 } \omega_0(u_i, v_j) = 0.$$

有 $\omega_0(P^\alpha u, P^\alpha v) = \sum\limits_{i,j} \lambda_i^\alpha \lambda_j^\alpha \omega_0(u_i, v_j) = \sum\limits_{i,j} \omega_0(u_i, v_j) = \omega_0(u, v)$, 故 $P^\alpha \in S$, 得证. 故 $J(V, \omega)$ 可缩.

□

2 辛流形

2.1 辛流形

注意: 若未特别说明, 我们所谈论的流形都是连通无边的.

Definition 2.1. 设 M 是一个光滑流形, ω 是 M 上的光滑 2-形式, 如果有:

(1) $d\omega = 0$ (可积性条件)

(2) 对 $\forall p \in M$, ω_p 是 T_pM 上的辛结构

则称 (M,ω) 是辛流形, ω 是 M 的辛结构.

Example 2.1. $(\mathbb{R}^{2n}, \sum\limits_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i)$ 是辛流形, 其中 $x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n$ 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 的坐标, 对 $\forall p \in \mathbb{R}^{2n}$, $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right\}$ 构成 $T_p\mathbb{R}^{2n}$ 的辛基.

Example 2.2. 考虑 $M = S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. 对 $\forall p \in M$, $u, v \in T_pM$ 可以看成 $p^\perp \subseteq T_p\mathbb{R}^3$ 中的元素. 令 $\omega_p(u,v) = \langle p, u \times v\rangle$, 则 ω_p 给出了 T_pM 的辛结构, ω 是 M 上的光滑 2-形式. 由于 M 是 2 维流形, 故自然有 $d\omega = 0$, 故 (S^2,ω) 是辛流形. 类似地, 取 M 为任意可定向光滑曲面, ω 为 M 上的光滑体积形式, 则 (M,ω) 为辛流形.

Remark 2.1. 辛结构的存在有拓扑障碍, 要求流形满足条件:

- $\dim M$ 为偶数.
- 设 $\dim M = 2n$, 则 $\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ 是处处非零的光滑 $2n$-形式, 故 M 可定向, ω^n 也是 M 上的体积形式, 称为辛体积.
- 若 M 是紧辛 2n 维流形, 则 $H^{2k}_{dR}(M,\mathbb{R}) \neq 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$. 具体来说, 由 $d\omega = 0$ 可知 $[\omega] \in H^2(M,\mathbb{R})$.
  - 当 $k = 0$ 时, $H^0(M,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$.
  - 当 $k = 1, \ldots, n$ 时, $d\omega^k = k\omega^{k-1} \wedge d\omega = 0$, 故 $[\omega^k] \in H^{2k}(M,\mathbb{R})$. 若 $\omega^k = d\beta$, 则有
  $$\int\limits_M \omega^n = \int\limits_M \omega^k \wedge \omega^{n-k} = \int\limits_M d\beta \wedge \omega^{n-k} = \int\limits_M d\left(\beta \wedge \omega^{n-k}\right) = \int\limits_{\partial M} \beta \wedge \omega^{n-k} = 0$$
  而 $\int\limits_M \omega^n \neq 0$, 得出矛盾.

  故 $0 \neq [\omega^k] \in H^{2k}(M,\mathbb{R})$. 因此 S^{2n}, $n \geq 2$ 上没有辛结构. 实际上我们得到了一列非零上同调 $[\omega], \ldots, [\omega^n]$.
  对于 $\mathbb{R}^{2n}$, $\omega_0 = \sum\limits_i dx^i \wedge dy^i = d(\sum\limits_i x^i dy^i)$, 故 $[\omega_0] = 0 \in H^2(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$, 但由于 $\mathbb{R}^{2n}$ 非紧, 因此没有与上述 remark 矛盾.

2.2 余切丛 $M = T^*X$

令 X 是一个光滑流形,$M = T^*X$. 取 X 的一个局部坐标卡 (U, x^i), $U \subseteq X$ 是开集. 对 $\forall x \in U$, $\{dx^1|_x, \cdots, dx^n|_x\}$ 构成了 T_x^*X 的一组基. 若 $\xi \in T_x^*X$, 则有 $\xi^1, \cdots, \xi^n$ 使得 $\xi = \sum_i \xi^i dx^i|_x$. 由此有映射

$$T^*U \to \mathbb{R}^{2n},\ (x, \xi) \mapsto (x^1, \cdots, x^n, \xi^1, \cdots, \xi^n),$$

因此 $(T^*U, (x^1, \cdots, x^n, \xi^1, \cdots, \xi^n))$ 构成 M 的一个局部坐标卡. 若 $\{U_\alpha\}$ 构成 X 的开覆盖, 则 $\{T^*U_\alpha\}$ 也构成 M 的开覆盖. 若 $x \in U \cap U'$, 且 $\xi \in T_x^*X$, 则

$$\xi = \sum_i \xi^i dx^i|_x = \sum_i \xi^i \sum_j \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} dx'^j|_x = \sum_j (\xi')^j dx'^j|_x.$$

故有 $(\xi')^j = \sum_i \xi^i \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}$. 可知 M 也是一个光滑流形.

给定 $(U, x^1, \cdots, x^n)$, 在 T^*U 上定义 $\omega = \sum_i dx^i \wedge d\xi^i$, 则 ω 闭且非退化, 是 T^*U 上的辛形式. 那么我们能否得到 M 上的辛形式呢?

Proposition 2.1. ω 不依赖于局部坐标卡的选取.

Proof. 定义 $\alpha = \sum_i \xi^i dx^i$, 则 $\omega = -d\alpha$, 只需证 α 不依赖于坐标卡的选取. 在 $T^*U_\alpha \cap T^*U_\beta$ 上,

$$\alpha = \sum_i \xi_\alpha^i dx_\alpha^i = \sum_i \xi_\alpha^i \sum_j \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j} dx_\beta^j = \sum_j \sum_i \xi_\alpha^i \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j} dx_\beta^j = \sum_j \xi_\beta^j dx_\beta^j,$$

故 α 不依赖于坐标卡的选取. □

Remark 2.2. 可见对任意的光滑流形其余切丛 (非紧) 上都存在辛结构, 那么对于切丛呢? 事实上, 当流形的性质足够好时, 切丛上可以有复结构. 由此可见辛结构和复结构的某种联系.

Definition 2.2. 在上述命题的证明中, 我们把 α 叫做 *tautological 1-form*, ω 叫做典则辛形式.

但是我们对 α 和 ω 的定义都是依赖于坐标的, 有时候在描述其性质时不好用, 于是我们也给出内蕴的定义:

对于 $\pi : M \to X$, 其诱导切映射和拉回映射:

$$\pi_* : TM \to TX, \quad \pi^* : T^*X \to T^*M$$

Lemma 2.1. $\alpha_p = \pi_p^* \xi$, $p = (x, \xi) \in M$.

Proof. 对 $\forall v \in T_pM$, $v = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial \xi^i}$. 则有

$$(\pi_p^*\xi)(v) = \xi\left(\pi_{*p}(v)\right) = \left(\sum_i \xi^i dx^i\right)\left(\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum_i \xi^i a_i = \left(\sum_i \xi^i dx^i\right) v = \alpha_p(v).$$

$\square$

2.3 辛同胚

Definition 2.3. 设 $\Phi : M_1 \to M_2$ 是辛流形 (M_1, ω_1) 到 (M_2, ω_2) 的微分同胚. 若 $\Phi^*\omega_2 = \omega_1$, 则称 Φ 是一个辛同胚. 记所有 (M, ω) 到自身的辛同胚集合为 $\mathrm{Symp}(M, \omega)$, 显然 $\mathrm{Symp}(M, \omega)$ 上有群结构.

Example 2.3. $\mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ 包含: 平移, 旋转, $\begin{cases} x \mapsto x + f(y) \\ y \mapsto y \end{cases}, \cdots$

Exercise 2.1. 给出几个 $\mathrm{Symp}(S^2, \omega_0)$ 的元素.

设 X_1, X_2 是两个 n 维光滑流形,M_1, M_2 分别是余切丛, α_1, α_2 分别是 tautological 1-form. 设 $f : X_1 \to X_2$ 是微分同胚, 则其诱导了

$$f_\sharp : M_1 \to M_2,\ (x_1, \xi_1) \mapsto \left(f(x_1), (f^*_{x_1})^{-1}(\xi_1)\right).$$

Proposition 2.2. $f_\sharp$ 是辛同胚, 即 $f_\sharp^*\omega_2 = \omega_1$.

Proof. 用局部坐标写出 $f_\sharp$ 与 $f_\sharp^{-1}$, 显然 $f_\sharp$ 是微分同胚. 由于外微分和映射拉回交换, 我们只需证 $f_\sharp^{-1}\alpha_2 = \alpha_1$. 设 $p_1 = (x_1, \xi_1)$, $p_2 = f_\sharp(p_1) = (x_2, \xi_2)$,

$$(f_\sharp^*\alpha_2)_{p_1} = f_\sharp^*\alpha_2|_{p_2} = f_\sharp^*\pi_2^*\xi_2 = (\pi_2 \circ f_\sharp)^*\xi_2 = (f \circ \pi_1)^*\xi_2 = \pi_1^*\xi_1 = \alpha_1.$$

$\square$

若 $f : X_1 \to X_2$, $g : X_2 \to X_3$ 都是微分同胚, 则有 $(g \circ f)_\sharp = g_\sharp \circ f_\sharp$. 若 $X_1 = X_2 = X_3 = X$, 则有 $\mathrm{Diff}(X) \to \mathrm{Symp}(T^*X, \omega)$ 是单同态.

2.4 Lagrange 子流形

Definition 2.4. 设 (M, ω) 是辛流形, $i : Y \hookrightarrow M$ 是 M 的子流形. 若有
(1) $i^*\omega = 0$
(2) $\dim Y = \frac{1}{2}\dim M$
则称 Y 是 M 的一个 Lagrange 子流形. 该定义等价于 $\forall p \in Y$, T_pY 是 T_pM 的 Lagrange 子空间.

Example 2.4. 设 $M = T^*X$, $\dim M = 2n$, $(T^*U, x^1, \cdots, x^n, \xi^1, \cdots, \xi^n)$ 是局部坐标卡.
(1) T^*X 的零截面 $X_0 = \{(x, \xi) \mid \xi = 0 \in T_x^*X\}$ 是 Lagrange 子流形.
(2) T^*X 在 x 处的纤维是 Lagrange 子流形.

(3) 设 S 是 X 的 k 维子流形, 定义 $x \in S$ 处的余法空间

$$N_x^* S = \{\xi \in T_x^* X \mid \xi(v) = 0, \forall v \in T_x S\}.$$

余法丛 $N^* S = \{(x, \xi) \mid x \in S, \xi \in N_x^* S\} \subseteq T^* X$ 是 Lagrange 子流形.
(4) 设 μ 是 X 上的光滑 1-形式, 它定义了 T^*X 的光滑截面 $s_\mu : X \to T^*X$, 记 $X_\mu = s_\mu(X)$, $i : X_\mu \hookrightarrow T^*X$ 是嵌入. 则有 $s_\mu^* \alpha = \mu$,

$$X_\mu \text{ 是 Lagrange 子流形} \iff i^*\omega = 0 \iff s_\mu^*\omega = 0 \iff d\mu = 0.$$

于是我们有 X_{df} 是 T^*X 的 Lagrange 子流形, f 称为 X_{df} 的生成函数.

Example 2.5. 当 X 紧, $\dim X \geq 1$ 时, 由于函数 f 至少有两个临界点, $\#(X_0 \cap X_{df}) \geq 2$.

设 (M_i, ω_i), $i = 1, 2$ 是两个 2n 维辛流形. 考虑 pr_1, pr_2 是 $M_1 \times M_2$ 到 M_1, M_2 的投影, 则可定义 $M_1 \times M_2$ 上的 2-形式 $\widetilde{\omega} = pr_1^*\omega_1 - pr_2^*\omega_2$. 有 $(\widetilde{\omega})^{2n} = (-1)^n \binom{2n}{n} pr_1^*\omega_1 \wedge pr_2^*\omega_2$ 处处非零, 故 $\widetilde{\omega}$ 是 $M_1 \times M_2$ 的辛形式.

设 $\varphi : M_1 \to M_2$ 是微分同胚, 考虑

$$\Gamma_\varphi : \{(p, \varphi(p)) \mid p \in M_1\} \overset{i}{\subset} M_1 \times M_2; \; r : M_1 \to M_1 \times M_2, p \mapsto (p, \varphi(p)).$$

Proposition 2.3. Γ_φ 是 $(M_1 \times M_2, \omega)$ 的 Lagrange 子流形当且仅当 φ 是辛同胚. 故判断微分同胚为辛同胚等价于判断某流形为 Lagrange 子流形.

Proof.

$$\begin{aligned} \Gamma_\varphi \text{ 是 Lagrange 子流形} &\iff i^*\omega = 0 \\ &\iff r^* i^* \omega = 0 \\ &\iff (pr_1 \circ i \circ r)^* \omega_1 - (pr_2 \circ i \circ r)^* \omega_2 = 0 \\ &\iff \omega_1 = \varphi^* \omega_2. \end{aligned}$$

□

2.5 Darboux 定理

Theorem 2.1. (**Darboux 定理**) 设 (M, ω) 是辛流形, 则对 $\forall p \in M$, 都存在以 p 为中心的局部坐标卡 $(U, x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$ 使得在 U 上有 $\omega = \sum_i dx^i \wedge dy^i$. 即对 $\forall p \in M$, 存在 $p \in U \subseteq M$ 以及 $U' \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ 使得辛同胚 $\phi : U \to U'$ 存在.

Remark 2.3. 我们知道在黎曼流形有重要的局部不变量: 曲率. 但是 Darboux 定理表明, 辛流形没有局部不变量, 或者说唯一的局部不变量就是流形的维数, 缺少局部不变量也给辛几何的研究带来了困难.

为了证明 Darboux 定理我们需要做一系列准备工作, 先介绍 Moser 稳定性定理, 其中需要用到 Moser 技巧将问题转化成求解向量场的问题.

Theorem 2.2. (Moser 定理)
设 M 是一个紧流形, ω_t, $t \in [0,1]$ 是一族光滑依赖于 t 的 M 上的光滑闭 2-形式, 且满足: (1) 对 $\forall t \in [0,1]$, ω_t 非退化; (2) $\frac{d}{dt}[\omega_t] = [\frac{d}{dt}\omega_t] = 0 \in H^2(M)$.
则存在同痕 $\rho : M \times \mathbb{R} \to M$ 使得 $\rho_t^* \omega_t = \omega_0$, $t \in [0,1]$.

条件 (2) 其实是在说: 对于 $\forall t \in [0,1]$, $[\omega_t]$ 都属于同一个上同调类.

由于证明过程需要用到紧流形的 Hodge 定理, 而该定理的证明超出课程范围, 故在此给出定理的叙述, 我们直接使用即可.

设 (M,g) 是一个 n 维紧致且定向的光滑黎曼流形. 在 $\Omega^k(M)$ 上, Hodge 拉普拉斯算子定义为 $\Delta = d\delta + \delta d$, 其中 d 是外微分算子, δ 是余微分算子. 若一个 k-形式 α 满足 $\Delta\alpha = 0$, 则称其为调和形式. 所有 k 阶调和形式构成的向量空间记为 $\mathcal{H}^k(M)$.

Theorem 2.3. 紧致定向黎曼流形上的光滑 k-形式空间 $\Omega^k(M)$ 具有唯一且关于 L^2 内积正交的直和分解:

$$\Omega^k(M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus d(\Omega^{k-1}(M)) \oplus \delta(\Omega^{k+1}(M))$$

这意味着任何光滑 k-形式 ω 都可以唯一地表示为:

$$\omega = \gamma + d\alpha + \delta\beta$$

其中 γ 是调和形式, $d\alpha$ 是恰当形式, $\delta\beta$ 是余恰当形式.

Theorem 2.4. 在紧致定向黎曼流形上, 每一个 de Rham 上同调类中都存在唯一的一个调和代表元. 即调和形式空间与 de Rham 上同调群之间存在线性同构:

$$\mathcal{H}^k(M) \cong H^k_{dR}(M;\mathbb{R})$$

该定理具有以下重要推论:

1. 调和形式空间 $\mathcal{H}^k(M)$ 是有限维的.
2. 调和形式空间的维度等于流形的第 k 个 Betti 数: $\dim \mathcal{H}^k(M) = b_k(M)$.

Proof. 我们的目标是构造一族微分同胚 ρ_t 满足 $\rho_0 = \mathrm{id}_M$ 且 $\rho_t^*\omega_t = \omega_0$. 我们将通过构造其对应的依赖时间的向量场 V_t (满足 $\frac{d}{dt}\rho_t = V_t \circ \rho_t$) 来实现.

我们先利用 Moser 技巧转化方程: 对等式 $\rho_t^*\omega_t = \omega_0$ 关于 t 求导, 利用依赖时间的拉回导数公式:

$$\frac{d}{dt}(\rho_t^*\omega_t) = \rho_t^*\left(\mathcal{L}_{V_t}\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt}\right) = 0$$

由于 ρ_t 是微分同胚, 上述方程成立等价于所谓的 Moser 方程:

$$\mathcal{L}_{V_t}\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt} = 0 \quad (*)$$

根据条件, 每个 ω_t 都是闭形式 ($d\omega_t = 0$). 由 Cartan Magic Formula $\mathcal{L}_{V_t}\omega_t = d(i_{V_t}\omega_t) +$

$i_{V_t}(d\omega_t)$ 可知:

$$\mathcal{L}_{V_t}\omega_t = d(i_{V_t}\omega_t)$$

将此代入方程 $(*)$, 得到:

$$d(i_{V_t}\omega_t) + \frac{d\omega_t}{dt} = 0$$

由条件 (2) 可知, 在每一个 t 时刻, 形式 $\frac{d\omega_t}{dt}$ 都是闭形式且其上同调类为零. 因此, $\frac{d\omega_t}{dt}$ 是恰当形式. 根据 Hodge 分解定理, 对于任意闭且恰当的形式 η, 存在唯一的 $\mu = \delta G\eta$ (其中 G 为 Green 算子) 满足 $d\mu = \eta$. 令:

$$\mu_t = \delta G\left(\frac{d\omega_t}{dt}\right)$$

由于 Green 算子 G 保持光滑性, 且 $\frac{d\omega_t}{dt}$ 光滑依赖于 t, 故 μ_t 是一族光滑依赖于 t 的 1-形式, 满足:

$$d\mu_t = \frac{d\omega_t}{dt}$$

故我们只需解向量场 V_t 满足:

$$i_{V_t}\omega_t + \mu_t = 0$$

由于条件 (1) 规定 ω_t 是非退化的, 由 interior multiplication 诱导的映射 $V \mapsto i_V\omega_t$ 是切丛 TM 到余切丛 T^*M 的丛同构. 因此, 对于每一时刻的光滑 1-形式 μ_t, 存在唯一的光滑向量场 V_t 满足上式.

由于 M 是紧流形, 任何依赖时间的光滑向量场 V_t 都是完备的. 因此, 初值问题:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\rho_t = V_t(\rho_t) \\ \rho_0 = \mathrm{id}_M \end{cases}$$

在 $t \in [0,1]$ 上存在唯一解 ρ_t. 按照构造过程, 该 ρ_t 满足 $\frac{d}{dt}(\rho_t^*\omega_t) = 0$. 结合初始条件 $\rho_0^*\omega_0 = \omega_0$, 得对所有 t 都有 $\rho_t^*\omega_t = \omega_0$. □

Remark 2.4. 由于不同的书对于李导数的定义会有符号的差异, 在此我们的李导数先定义为: 设 V 是 M 上的向量场, 定义

$$\mathcal{L}_V : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M),\ \mathcal{L}_V\omega = \frac{d}{dt}(\rho_t^*\omega)\mid_{t=0},$$

其中 ρ_t 是 V 的积分曲线.

而当 V 依赖于时间 t 时, 仍可定义 $\mathcal{L}_{V_t}\omega$. 我们有

$$\frac{d}{dt}\rho_t^*\omega = \rho_t^*\mathcal{L}_{V_t}\omega.$$

证明概要如下:

- 先证 $\omega = f$ 为函数时: $\frac{d}{dt}(\rho_t^*f)(p) = \frac{d}{dt}f(\rho_t(p)) = V_t(f)(\rho_t p) = \rho_t^*(\mathcal{L}_{V_t}f)$.
- 等式两边都与 d 交换: $\frac{d}{dt}\rho_t^*df = d(\frac{d}{dt}\rho_t^*f) = d(\rho_t^*\mathcal{L}_{V_t}f) = \rho_t^*\mathcal{L}_{V_t}df$.
- 两边都满足 Leibniz 法则.
- 验证 $\omega = fdx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$ 满足等式.

若 ω 也依赖于 t, 则:

Lemma 2.2. $\frac{d}{dt}(\rho_t^*\omega_t) = \rho_t^*(\mathcal{L}_{V_t}\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt})$.

Proof. $\frac{d}{dt}(\rho_t^*\omega_t) = \frac{d}{dx}\rho_x^*\omega_t\mid_{x=t} + \frac{d}{dy}\rho_t^*\omega_y\mid_{y=t} = \rho_t^*\mathcal{L}_{V_t}\omega_t + \rho_t^*\frac{d\omega_t}{dt}$. □

Exercise 2.2. 证明 Cartan Magic Formula.

Corollary 2.1. 设 M 是紧流形, 闭 2-形式 ω_0, ω_1 满足 $[\omega_0] = [\omega_1] \in H^2(M)$ 且对 $\forall t \in [0,1]$, $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1$ 都非退化. 则存在微分同胚 $\varphi : M \to M$ 使得 $\varphi^*\omega_1 = \omega_0$.

Corollary 2.2. 设 M 是一个光滑闭曲面, ω_0, ω_1 是 M 上的两个光滑体积形式且 $\int_M \omega_0 = \int_M \omega_1$. 则存在微分同胚 $\varphi : M \to M$ 使得 $\varphi^*\omega_1 = \omega_0$.

Theorem 2.5. (**相对 Moser 定理**) 设 M 是一个光滑流形, $i : X \hookrightarrow M$ 是 M 的紧子流形. ω_0, ω_1 是 M 上的辛形式. 若 $\omega_0\mid_p = \omega_1\mid_p$, $\forall p \in X$, 则存在 X 在 M 中的两个邻域 U_0, U_1 以及一个微分同胚 $\varphi : U_0 \to U_1$ 使得 $\varphi \circ i_0 = i_1$ 且 $\varphi^*\omega_1 = \omega_0$, 其中 i_0, i_1 是 X 到 U_0, U_1 的包含映射.

同样地, 我们先进行一些准备工作.

(1) **管状邻域定理**:

设 M 是 n 维流形, $i : X \hookrightarrow M$ 是 k 维子流形, X 在点 x 处的法空间定义为 $N_xX = T_xM/T_xN$, $x \in X$. X 的法丛定义为 $NX = \{(x,v) \mid x \in X, v \in N_xX\}$. 选定 M 上的一个黎曼度量后可将 NX 视为 TM 的子丛. 我们有 $\pi_0 : NX \to X$, $i_0 : X \to NX$.

Theorem 2.6. (**管状邻域定理**) 在 NX 中存在 i_0X 的一个邻域 U_0 满足 $U_0 \cap N_xX_0$ 对于任意 $x \in X$ 都是凸集, 在 M 中存在 X 的一个邻域 U 以及一个微分同胚 $\varphi : U_0 \to U$ 使得 $\varphi \circ i_0 = i$.

(2) **推广的 Poincaré 引理**:

Theorem 2.7. 设 U 是 X 在 M 中的一个管状邻域, $i : X \hookrightarrow U$ 为嵌入映射. 如果 U 上的闭 ℓ-形式 ω ($\ell \geq 1$) 满足 $i^*\omega = 0$, 则存在 $\mu \in \Omega^{\ell-1}(U)$ 使得 $\omega = d\mu$, $\mu\mid_X = 0$.

Proof. 由于存在微分同胚 $\varphi : U_0 \to U$, 我们可以在 $U_0 \subseteq NX$ 中考虑问题. 对 $\forall t \in [0,1]$, 定义

$$\rho_t : U_0 \to U_0,\ (x,v) \mapsto (x, tv),$$

有 $\rho_1 = \mathrm{id}$, $\rho_0 = i_0 \circ \pi_0$, $\rho_t \circ i_0 = i_0$. 考虑 ρ_t 生成的依赖于 t 的向量场 V_t, $V_t\mid_{i_0(X)} = 0$. 定义

$$Q : \Omega^\ell(U_0) \to \Omega^{\ell-1}(U_0),\ \omega \mapsto \int_0^1 \rho_t^*(i_{V_t}\omega)dt,$$

$\boxed{\text{Claim.}}$ $\mathrm{id} - (i_0 \circ \pi_0)^* = dQ + Qd$.

Proof: 对 $\forall \omega \in \Omega^\ell(U_0)$,

$$\begin{aligned} Q d\omega + dQ\omega &= \int_0^1 \rho_t^*(i_{V_t} d\omega)dt + d\int_0^1 \rho_t^*(i_{V_t}\omega)dt \\ &= \int_0^1 \rho_t^*(i_{V_t} d\omega + d i_{V_t}\omega)dt \\ &= \int_0^1 \rho_t^* \mathcal{L}_{V_t}\omega dt \\ &= \int_0^1 (\frac{d}{dt}(\rho_t^*\omega))dt \\ &= \rho_1^*\omega - \rho_0^*\omega \\ &= (\mathrm{id} - (i_0 \circ \pi_0)^*)\omega. \end{aligned}$$

在假设条件下, $i_0^*\omega = 0, d\omega = 0$, 则有 $\omega = dQ\omega$, 令 $\mu = Q\omega$, 由 $V_t\mid_{i_0(X)} = 0$ 有 $\mu_{i_0(X)} = 0$, 得证. □

有了准备工作后, 我们来证明相对 Moser 定理:

Theorem 2.8. (**相对 Moser 定理**) 设 M 是一个光滑流形, $i : X \hookrightarrow M$ 是 M 的紧子流形. ω_0, ω_1 是 M 上的辛形式. 若 $\omega_0\mid_p = \omega_1\mid_p$, $\forall p \in X$, 则存在 X 在 M 中的两个邻域 U_0, U_1 以及一个微分同胚 $\varphi : U_0 \to U_1$ 使得 $\varphi \circ i_0 = i_1$ 且 $\varphi^*\omega_1 = \omega_0$, 其中 i_0, i_1 是 X 到 U_0, U_1 的包含映射.

Proof. 证明分为以下几步:

- 取 X 在 M 中的一个管状邻域 U_0, 则 2-形式 $\omega_1 - \omega_0$ 是闭的且满足 $(\omega_1 - \omega_0)\mid_X = 0$. 由推广的 Poincaré 引理, 存在 U_0 上的 1-形式 μ 使得 $\omega_1 - \omega_0 = d\mu$, $\mu_X = 0$.
- 考虑 $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1 = \omega_0 + td\mu$. 由假设知 $\omega_t\mid_X = \omega_0\mid_X$, 因此 $\omega_t\mid_X$ 总是非退化的. 由于 X 紧, $X \times [0,1]$ 也紧. 另外, 非退化是开条件, 因此在 X 的某个小邻域内 ω_t, $t \in [0,1]$ 都是非退化的. 在这个小邻域内取一个管状邻域作为新的 U_0.
- 解方程 $i_{V_t}\omega_t = -t\mu$, 由 $\mu\mid_X = 0$ 推出 $V_t\mid_X = 0$. (由于 ω_t 非退化, 方程总有解.)
- 考虑 V_t 的积分曲线, 必要时再次缩小 U_0, 可得到一族映射 $\rho : U_0 \times [0,1] \to M$ 使得 $\rho_t^*\omega_t = \omega_0$ 且由 $V_t\mid_X = 0$ 可知 $\rho_t\mid_X = \mathrm{id}\mid_X$.
- 令 $\varphi = \rho_1$, $U_1 = \varphi(U_0)$, 得证.

□

从相对 Moser 定理出发我们容易证明 Darboux 定理:

Theorem 2.9. (**Darboux 定理**) 设 (M, ω) 是辛流形, 则对 $\forall p \in M$, 都存在以 p 为中心的局部坐标卡 $(U, x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$ 使得在 U 上有 $\omega = \sum_i dx^i \wedge dy^i$. 即对 $\forall p \in M$, 存在 $p \in U \subseteq M$ 以及 $U' \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ 使得辛同胚 $\phi : U \to U'$ 存在.

Proof. 将相对 Moser 定理应用到 $X = p$ 为一个点的情形. 由于 T_pM 是辛空间, 任选一个以 p 为中心的坐标 $(U, x'^1, \ldots, x'^{2n})$, 有 $\omega|_p = \sum_{i,j} a_{ij} dx'^i \wedge dx'^j$. 在 T_pM 中选一组辛基, 可构造以 p

为中心的局部坐标卡 $(U, x'^1, \ldots, x'^n, y'^1, \ldots, y'^n)$ 使得 $\omega|_p = \sum_i dx'^i \wedge dy'^i$. 现在 p 的邻域内有两个辛形式 $\omega_0 = \omega$, $\omega_1 = \sum_i dx'^i \wedge dy'^i$, $\omega_0|_p = \omega_1|_p$. 由相对 Moser 定理, 存在以 p 为中心的邻域 U_0, U_1 以及微分同胚 $\varphi : U_0 \to U_1$ 使得 $\varphi(p) = p$ 且 $\varphi^*\omega_1 = \omega_0$. 则有 $\omega = \sum_i d(x'^i \circ \varphi) \wedge d(y'^i \circ \varphi)$, 取 $x^i = x'^i \circ \varphi$, $y^i = y'^i \circ \varphi$, 有 $\omega = \sum_i dx^i \wedge dy^i$, 得证. $\square$

2.6 Lagrange 邻域定理

我们先做一些线性辛空间上的铺垫.

设 (V, ω) 是辛向量空间, U 是 V 的 Lagrange 子空间, W 是与 U 互补的子空间, 即 $V = U \oplus W$. 我们将从 W 出发**典范地**构造出一个与 U 互补的 Lagrange 子空间:

- 定义 $A' : W \to W^*$, $A'(w) = -\frac{1}{2}\omega(w, \cdot)$, 则有: $\forall w_1, w_2 \in W$,
$$\omega(w_1, w_2) = A'(w_2)(w_1) - A'(w_1)(w_2).$$
- $\omega' = \omega|_{U \times W} : U \times W \to \mathbb{R}$ 定义了一个映射 $\widetilde{\omega}' : U \to W^*$ 且该映射是同构 (单射加维度相同).
- 定义 $A : \widetilde{\omega}'^{-1} \circ A' : W \to U$, 则 $W' = \{w + Aw \mid w \in W\}$ 是我们想要的空间.

Proposition 2.4. $W' = \{w + Aw \mid w \in W\}$ 是 (V, ω) 的 Lagrange 子空间.

Proof. 首先有 $\dim W' = \dim W = \frac{1}{2}\dim V$, 故只需验证其为迷向子空间. 对 $\forall w_1, w_2 \in W$, 有
$$\omega(w_1 + Aw_1, w_2 + Aw_2) = \omega(w_1, w_2) + \underbrace{\widetilde{\omega}'(Aw_1)(w_2)}_{=A'(w_1)(w_2)} - \underbrace{\widetilde{\omega}'(Aw_2)(w_1)}_{=A'(w_2)(w_1)} = 0.$$
$\square$

Proposition 2.5. 设 ω_0, ω_1 是 V 上的两个辛结构, U 同时是两个辛结构下的 Lagrange 子空间, 设 W 是与 U 互补的子空间, 则存在典范的辛同构 $L : (V, \omega_0) \to (V, \omega_1)$ 使得 $L|_U = \mathrm{id}_U$.

Proof. 根据前文的讨论, 我们从 W 出发分别在两个辛结构 ω_0, ω_1 下构造对应的与 U 互补的 Lagrange 子空间 W_0, W_1. 同时我们还有 $\omega_0|_{W_0 \times U}$ 和 $\omega_1|_{W_1 \times U}$ 都是非退化的, 故从此出发可以构造同构映射 $B : W_0 \to W_1$ 使得 $\omega_0(w_0, u) = \omega_1(Bw_0, u)$ 对 $\forall w_0 \in W_0, u \in U$ 成立. 定义
$$L : \underset{=U \oplus W_0}{V} \to \underset{=U \oplus W_1}{V}, \quad L = \mathrm{id}|_U \oplus B,$$
则容易验证 L 是辛同构. $\square$

在进入辛流形之前我们先给出微分流形中的一个定理, 证明只给出概要.

Theorem 2.10. (**Whitney 延拓定理**)
设 M 是 n 维流形, $i : X \hookrightarrow M$ 是 k 维子流形. 假设在 X 上的每一点处给定一个光滑依赖于 $p \in X$ 的线性同构 $L_p : T_pM \to T_pM$ 满足 $L_p|_{T_pX} = \mathrm{id}|_{T_pX}$, 则存在 X 在 M 中的

一个邻域 N 以及一个光滑嵌入 $h: N \hookrightarrow M$ 使得 $h|_X = \mathrm{id}_X$, $dh|_p = L_p, \forall p \in X$.

Proof. 在 M 上选定一个黎曼度量, 我们将 X 在 M 中的法丛等同于 $(TX)^\perp$, 且有指数映射 $\exp: (TX)^\perp \to M$. 由于 exp 的切映射在 $(TX)^\perp$ 的零截面处是恒等映射, 存在一个连续函数 $\epsilon: X \to \mathbb{R}^+$ 使得 exp 是从 $U = \{(p,v) \mid p \in X, v \in (TX)^\perp, |v| < \epsilon(p)\}$ 到 $\exp(U) = U^\epsilon$ 的微分同胚. 对 $\forall q \in U^\epsilon$, 有 $\exp^{-1}(q) = (p,v) \in (TX)^\perp$, 定义 $h: q \mapsto \exp(p, L_p v)$, 则 U^ϵ 和 h 满足条件. □

接下来回到辛流形.

Theorem 2.11. (Weinstein Lagrange 邻域定理)
设 M 是 $2n$ 维流形, $i: X \hookrightarrow M$ 是 n 维紧子流形, 设 ω_0, ω_1 是 M 上的辛形式, 且 $i^*\omega_0 = i^*\omega_1 = 0$, 则在 M 中存在 X 的邻域 U_0, U_1 以及一个微分同胚 $\varphi: U_0 \to U_1$ 使得 $\varphi|_X = \mathrm{id}_X$, $\varphi^*\omega_1 = \omega_0$.

Proof. 在 M 上选定一个黎曼度量, 取 $p \in X$, 令 $V = T_pM$, $U = T_pX$, $W = (T_pX)^\perp$. 由proposition 2.5 , 存在 $L_p : T_pM \to T_pM$ 使得 $L_p|_{T_pX} = \mathrm{id}|_{T_pX}$, $L_p^*\omega_1 = \omega_0$. 由于 L_p 是典范构造的, 其光滑依赖于 p, 由 Whitney 延拓定理可知存在 X 的邻域 N 以及一个嵌入 $h: N \to M$ 使得 $h|_X = \mathrm{id}_X$, $dh_p = L_p, \forall p \in X$. 此时有 $h^*\omega_1|_p = L_p^*\omega_1 = \omega_0|_p$, 由相对 Moser 定理, 存在 N 中的邻域 U_0 以及一个嵌入 $f: U_0 \to N$ 使得 $f|_X = \mathrm{id}_X$, $f^*h^*\omega_1 = \omega_0$. 只需令 $\varphi = h \circ f$ 即可. □

Theorem 2.12. (Lagrange 管状邻域定理)
设 (M, ω) 是辛流形, $i: X \hookrightarrow M$ 是紧 Lagrange 子流形. 设 ω_0 是 T^*X 上的典则辛形式, $i_0 : X \hookrightarrow T^*X$ 为零截面 (故 X 也是 T^*X 的 Lagrange 子流形), 则存在 X 在 T^*X 中的邻域 U_0, 在 M 中的邻域 U_1 以及一个微分同胚 $\varphi: U_0 \to U_1$ 使得 $\varphi \circ i_0 = i$, $\varphi^*\omega = \omega_0$.

Proof. 由于向量丛 NX, T^*X 典范同构, 存在 X 在 T^*X $(= NX)$ 中的邻域 N_0, X 在 M 中的邻域 U' 以及一个微分同胚 $\psi: N_0 \to U'$ 使得 $\psi \circ i_0 = i$. 令 $\omega_1 = \psi^*\omega$, 由于 X 同时是 (N_0, ω_0), (N_0, ω_1) 的 Lagrange 子流形, 由 Weinstein Lagrange 邻域定理, 存在 N_0 中 X 的邻域 U_0, U_1 以及微分同胚 $\theta: U_0 \to U_1$ 使得 $\theta|X = \mathrm{id}_X$, $\theta^*\omega_1 = \omega_0$. 令 $\varphi = \psi \circ \theta$, $U = \varphi(U_0)$ 即可. □

3 近复结构, 复流形与 Kähler 流形

3.1 近复结构

Definition 3.1. 设 M 是一个 2n 维流形, $J=(J_x)_{x\in M}$ 是一族光滑依赖于 x 的切空间上的复结构, 则称 $J=(J_x)_{x\in M}$ 是 M 上的一个近复结构, (M,J) 是一个近复流形.

Definition 3.2. 设 (M,ω) 是辛流形, M 上的一个近复结构 J 如果满足 $g_x(u,v)=\omega_x(u,Jv)$ 给出了 M 上的一个黎曼度量, 则称 J 与 ω 相容, (g,ω,J) 称为相容三元组.

由同样的推论可知, g,ω 都是 J 不变的. 记 $J(M,\omega)$ 为与 ω 相容的近复结构的集合.

Theorem 3.1. $J(M,\omega)$ 非空.

Proof. 在 M 上选取一个黎曼度量后用第一章中相应的讨论即证. □

Theorem 3.2. $J(M,\omega)$ 是可缩的.

Proof. 给定 M 上的黎曼度量 g, 如同上个定理构造 $J_g\in J(M,\omega)$, 记这个映射为 $\psi:g\mapsto J_g$. 给定 $J\in J(M,\omega)$, 可定义 $g_J=\omega(\cdot,J(\cdot))$, 记这个映射为 $\varphi:J\mapsto g_J$. 记 $\mathfrak{m}(M)$ 为 M 上的黎曼度量的集合, 则 $\varphi\circ\psi\simeq\mathrm{id}:\mathfrak{m}(M)\to\mathfrak{m}(M)$, $\psi\circ\varphi=\mathrm{id}:J(M,\omega)\to J(M,\omega)$. 由于 $\mathfrak{m}(M)$ 是凸集, 故可缩, 由此可知 $J(M,\omega)$ 也是可缩的. □

Remark 3.1. (1)

$$
\begin{aligned}
\text{辛流形的切丛} &\xrightarrow{J\in J(M,\omega)} \text{复向量丛} \to \text{可定义陈类} \\
&\xrightarrow{\text{陈类是离散不变量}} \text{陈类不依赖于相容近复结构的选取} \\
&\to \text{可对辛流形定义陈类}
\end{aligned}
$$

(2) 同样地, 其他不变量也可类似地定义, 如 Gromov-Witten 不变量.

Example 3.1. 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的可定向曲面 Σ, 对 $\forall x\in\Sigma$, $v(x)$ 为 x 处的单位外法向量. 由于 $T_x\mathbb{R}^3\cong\mathbb{R}^3$, 可以在 $T_x\mathbb{R}^3$ 中定义向量外积 $\times$. 令 $J_xu=v(x)\times u$, 则

$$J_x^2(u)=v(x)\times(v(x)\times u)=\langle v(x),u\rangle\cdot v(x)-\langle v(x),v(x)\rangle u=-u,$$

故 $J=(J_x)_{x\in\Sigma}$ 是 Σ 上的近复结构. 此外, $\Sigma\subseteq\mathbb{R}^3$, $T_x\Sigma\subseteq T_x\mathbb{R}^3\cong\mathbb{R}^3$, 则可定义 $T_x\Sigma$ 上的内积 $g_x(u,v)=\langle u,v\rangle_{\mathbb{R}^3}$, 故 g 是 Σ 的黎曼度量. 定义 $\omega:=i_{v(x)}\Omega$, 其中 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中的标准 3-形式 $dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$, 则有

- $d\omega=0$.
- ω 非退化: 选取 $T_x\Sigma$ 处的两个正交向量.

故 ω 是辛形式. 对 $\forall u,w\in T_x\Sigma$, 有

$$\begin{aligned}\omega_x(u,Jw)&=\Omega(v(x),u,Jw)=\langle v(x),u\times Jw\rangle_{\mathbb{R}^3}\\&=\langle v(x),u\times(v(x)\times w)\rangle_{\mathbb{R}^3}=\langle v(x),\langle u,w\rangle v(x)\rangle-\langle v(x),\langle u,v(x)\rangle w\rangle\\&=\langle u,w\rangle=g_x(u,w).\end{aligned}$$

故 J 与 ω 相容, (g,J,ω) 是相容三元组.

Definition 3.3. 设 X 是 (M,J) 的子流形. 如果对 $\forall x\in X$, $\forall v\in T_xX$, 有 $J_x(v)\in T_xX$, 则称 X 为 (M,ω) 的近复子流形.

Proposition 3.1. 设 (M,ω) 是辛流形, $J\in J(M,\omega)$, 则 (M,J) 的近复子流形都是辛子流形.

Proof. 设 $i:X\to M$ 是嵌入, 考虑 $i^*\omega$, 则有 $i^*\omega$ 是闭的. 对 $\forall 0\neq u\in T_xX$, 有

$$\omega(u,J_xu)=g_x(Ju,v)>0$$

故 $i^*\omega$ 非退化, 因此 X 是辛子流形. □

Proposition 3.2. 任意近复流形都是可定向的.

Proof. 只需证明其上有一个处处非零的光滑 $2n$-形式, 为此只需找到一个非退化的光滑 2-形式. 任取 M 上的黎曼度量 h, 令

$$g(u,v)=\frac{1}{2}h(u,v)+\frac{1}{2}h(Ju,Jv),$$

则有 $g(Ju,Jv)=g(u,v)$, 即 g 是 J 不变的黎曼度量. 令 $\omega(u,v)=g(Ju,v)$, 则 ω 是非退化的光滑 2-形式, ω^n 给出了 M 的一个定向. □

Exercise 3.1. 设 (M,J) 是近复流形, ω_0,ω_1 都是与 J 相容的辛结构, 则存在一族光滑依赖于 t 的辛结构 $\widetilde{\omega}_t$, $t\in[0,1]$ 使得 $\widetilde{\omega}_0=\omega_0$, $\widetilde{\omega}_1=\omega_1$.

3.2 切丛与余切丛的复化

设 (M,J) 是一个近复结构, 对 $\forall p\in M$, 定义 $(TM\otimes\mathbb{C})_p:=T_pM\otimes\mathbb{C}$, 则 $TM\otimes\mathbb{C}$ 是 M 上的秩为 $2n$ 的复向量丛. 我们可以将 J_p 线性延拓成 $T_pM\otimes\mathbb{C}$ 上的线性变换. 由 $J^2=-\mathrm{id}$ 可知 J_p 在 $(TM\otimes\mathbb{C})_p$ 上的特征值是 $\pm i$. 定义

$$T_{1,0}:=\{v\in TM\otimes\mathbb{C}\mid Jv=iv\},\quad T_{0,1}:=\{v\in TM\otimes\mathbb{C}\mid Jv=-iv\},$$

则有 $T_pM\otimes\mathbb{C}=T_{1,0}|_p\oplus T_{0,1}|_p$, 故 $\dim_{\mathbb{R}}T_{1,0}|_p+\dim_{\mathbb{R}}T_{0,1}|_p=4n$. 对 $\forall v\in T_pM$, 有

$$J(v\otimes1-Jv\otimes i)=Jv\otimes1+v\otimes i=i(v\otimes1-Jv\otimes i),$$

故 $v\otimes 1-Jv\otimes i\in T_{1,0}|_p$, 由 $v\otimes 1$ 与 $Jv\otimes i$ $\mathbb{R}$-线性无关得 $\dim_{\mathbb{R}} T_{1,0}|_p\geq 2n$. 同理得 $\dim_{\mathbb{R}} T_{0,1}|_p\geq 2n$, 故有

$$T_{1,0}|_p=\{v\otimes 1-Jv\otimes i\mid v\in T_pM\},\quad T_{0,1}|_p=\{v\otimes 1+Jv\otimes i\mid v\in T_pM\}$$

定义 $\mathbb{R}$-线性同构映射

$$\pi_{1,0}:T_pM\to T_{1,0}|_p,\quad v\mapsto \frac{1}{2}(v\otimes 1-Jv\otimes i),$$

$$\pi_{0,1}:T_pM\to T_{0,1}|_p,\quad v\mapsto \frac{1}{2}(v\otimes 1+Jv\otimes i),$$

则 $\pi_{1,0},\pi_{0,1}$ 构成了实向量丛同构 $\pi_{1,0}:TM\to T_{1.0}$, $\pi_{0,1}:TM\to T_{0,1}$. 将这两映射作 $\mathbb{C}$-线性延拓, 有

$$(\pi_{1,0},\pi_{0,1}):TM\otimes\mathbb{C}\xrightarrow{\cong}T_{1,0}\oplus T_{0,1}$$

是复向量丛的分解.

考虑 T^*M 的复化 $(T^*M\otimes\mathbb{C})_p:=T_p^*M\otimes\mathbb{C}$, 定义

$$T^{1,0}:=\{\eta\in T^*M\otimes\mathbb{C}\mid \eta(Jw)=i\eta(w),w\in TM\otimes\mathbb{C}\},$$

$$T^{0,1}:=\{\eta\in T^*M\otimes\mathbb{C}\mid \eta(Jw)=-i\eta(w),w\in TM\otimes\mathbb{C}\},$$

类似地有

$$T^{1,0}=\{\xi\otimes 1-\xi\circ J\otimes i\mid \xi\in T^*M\},\quad T^{0,1}=\{\xi\otimes 1+\xi\circ J\otimes i\mid \xi\in T^*M\}.$$

再定义

$$\pi^{1,0}:T^*M\otimes\mathbb{C}\to T^{1,0},\quad \eta\mapsto\frac{1}{2}(\eta-i\eta\circ J),$$

$$\pi^{0,1}:T^*M\otimes\mathbb{C}\to T^{0,1},\quad \eta\mapsto\frac{1}{2}(\eta+i\eta\circ J),$$

同样地我们有复向量丛分解

$$(\pi^{1,0},\pi^{0,1}):T^*M\otimes\mathbb{C}\xrightarrow{\cong}T^{1,0}\oplus T^{0,1}.$$

3.3 近复流形的微分形式

给定 (M,J), 令 $\Omega^k(M,\mathbb{C})$ 为 M 上的光滑复值 k-形式的集合. 由于 $T^*M\otimes\mathbb{C}\cong T^{1,0}\oplus T^{0,1}$, 有

$$\Lambda^k(T^*M\otimes\mathbb{C})\cong\Lambda^k(T^{1,0}\oplus T^{0,1})=\bigoplus_{l+m=k}(\Lambda^lT^{1,0})\wedge(\Lambda^mT^{0,1}).$$

记右式为 $\bigoplus\limits_{l+m=k}\Lambda^{l,m}$, 将 $\Lambda^{l,m}$ 的光滑截面的集合记为 $\Omega^{l,m}(M)$, 其中的元素称为 (l,m)-形式, 有 $\Omega^k(M,\mathbb{C})\cong\bigoplus\limits_{l+m=k}\Omega^{l,m}(M)$. 记投影

$$\pi^{l,m}:\Omega^k(M,\mathbb{C})\to\Omega^{l,m}(M),$$

定义

$$\partial=\pi^{l+1,m}\circ d:\Omega^{l,m}(M)\to\Omega^{l+1,m}(M),\quad \bar\partial=\pi^{l,m+1}\circ d:\Omega^{l,m}(M)\to\Omega^{l,m+1}(M).$$

$\boxed{\text{一般情况下 } d\neq\partial+\bar\partial.}$

3.4 复流形

Definition 3.4. 设 U 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个开集, $f : U \to \mathbb{C}$ 是连续可微函数. 记 $z_k = x_k + iy_k$ 为 $\mathbb{C}^n$ 上的坐标, $f = u + iv$. 如果有 Cauchy-Riemann 方程成立, 则称 f 是 U 上的全纯函数.

定义 $\frac{\partial}{\partial z_k} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k}\right)$, 则

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} f,\ \forall k = 1, 2, \ldots, n \iff \text{C-R 方程}.$$

3.5 复流形上的微分形式

3.6 Kähler 流形

3.7 J-全纯曲线

4 哈密顿系统

4.1 辛向量场和哈密顿向量场

设 (M, ω) 是辛流形.

Definition 4.1. 设 X 是 M 上的向量场.

(1) 如果有 $L_X\omega = 0$, 则称 X 是辛向量场.

(2) 若 $i_X\omega = dH$, $H \in C^\infty(M)$, 则称 X 是以 H 为哈密顿函数的哈密顿向量场.

Remark 4.1. (1) 对于辛向量场, 我们有

- $0 = L_X\omega = d(i_X\omega)$.
- X 可定义同痕 ρ_t, 满足 $\frac{d}{dt}\rho_t^*\omega = \rho_t^* L_X\omega \implies \rho_t^*\omega = \omega$, 故 ρ_t 是辛同胚.

(2) 给定 $H \in C^\infty(M)$, 由 ω 非退化可知 $\exists! X_H$ 使得 $i_{X_H}\omega = dH$. $L_{X_H}H = i_{X_H}dH = \omega(X_H, X_H) = 0$, 故 H 在 X_H 的积分曲线上取值为常数.

Example 4.1. 设 $(M, \omega) = (T^2, d\theta_1 \wedge d\theta_2)$, 则 $X_1 = \frac{\partial}{\partial\theta_1}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial\theta_2}$ 都是辛向量场, 但不是哈密顿向量场.

我们自然会有如下的问题: 什么辛向量场是哈密顿向量场? 答案是看流形的上同调.

Remark 4.2. (1) 当 $H^1(M) = 0$ 时, $\mathrm{Symp}(M) = Ham(M)$ (所有闭形式都是恰当形式), 如 S^2.

(2) 设 ω 与 J 相容, 对 $H \in C^\infty(M)$, 有 H 定义的哈密顿向量场 X_H 以及在诱导度量下的梯度 ∇H. 两者的关系如下:

$$dH = g(\nabla H, \cdot) = \omega(\nabla H, J\cdot) = \omega(-J\nabla H, \cdot) \implies X_H = -J\nabla H.$$

Exercise 4.1. 设 L 是 (M, ω) 的 Lagrange 子流形, $V = X_H$ 是哈密顿向量场, V 与 L 相切. 证明 H 在 L 上取常值.

4.2 泊松结构

不严格地说, 我们有如下对应:

$$\text{辛几何} \to \text{经典力学}, \ \text{泊松几何} \to \text{量子力学}$$

回忆: $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, 我们定义了李括号 $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$. 对 $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, 有 Jacobi 恒等式, 即 $[X, \cdot]$ 满足 Leibniz 法则.

Exercise 4.2. 对 $\forall \alpha \in \Omega^k(M)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, 有 $i_{[X,Y]}\alpha = [L_X, i_Y]\alpha$.

Proposition 4.1. 设 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ 是辛向量场，则 $[X, Y]$ 是以 $\omega(Y, X)$ 为哈密顿函数的哈密顿向量场，即 $i_{[X,Y]}\omega = d(\omega(Y, X))$.

Proof. $i_{[X,Y]}\omega = [L_X, i_Y]\omega = L_X i_Y \omega = d i_X i_Y \omega = d(\omega(Y, X))$. □

Corollary 4.1. $Ham(M) \subseteq \mathrm{Symp}(M) \subseteq \mathfrak{X}(M)$，包含关系为李代数的包含.

Definition 4.2. $\forall f, g \in C^\infty(M)$，记 $\{f, g\} := \omega(X_f, X_g)$，$\{\cdot, \cdot\}$ 称为 泊松括号.

由定义有：$\{f, g\} = i_{X_g} i_{X_f} \omega = i_{X_g} df = X_g f = -X_f g$.

Theorem 4.1. 泊松括号满足：

(1) $X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$.

(2) $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$.

(3) $\{f, g \cdot h\} = \{f, g\} \cdot h + g \cdot \{f, g\}$. (可知 $\{f, \cdot\}$ 是向量场)

Proof. (1) $i_{[X_f, X_g]}\omega = d(\omega(X_g, X_f)) = -d(\omega(X_f, X_g)) = -d\{f, g\} = -i_{\{f,g\}}\omega$，由 ω 非退化可知 $X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$.

(3) $\{f, g \cdot h\} = \omega(X_f, X_{gh}) = \omega(X_f, hX_g + gX_h) = \{f, g\} h + g \{f, h\}$.

(2) 将等式左边记为 F，先证 F 为常值，再证 $F = 0$. 由于

$$\begin{aligned}
X_F &= -[X_f, X_{\{g,h\}}] - [X_g, X_{\{h,f\}}] - [X_h, X_{\{f,g\}}] \\
&= [X_f, [X_g, X_h]] + [X_g, [X_h, X_f]] + [X_h, [X_f, X_g]] \\
&= 0
\end{aligned}$$

故 F 为常值 c. 注意到 $\{f, g\}(p)$ 只依赖于 f, g 在 p 的邻域的取值. 对于 $p \in V' \subseteq \overline{V'} \subseteq V \subseteq M$，取鼓包函数 ρ 使得 $\rho|_{V'} \equiv 1$, $supp(\rho) \subseteq V$. 计算

$$\{\rho f, \{\rho g, \rho h\}\} + \{\rho g, \{\rho h, \rho f\}\} + \{\rho h, \{\rho f, \rho g\}\} = \begin{cases} c & \text{在 } V' \text{ 内} \\ 0 & \text{在 } M \backslash V \end{cases}$$

由此推出 $c = 0$，得证. □

Definition 4.3. 若一个结合代数 A 上有一个 $\{\cdot, \cdot\} : A \times A \to A$ 满足：

- $\{f, g \cdot h\} = \{f, g\} \cdot h + g \cdot \{f, g\}$.
- Jacobi 恒等式

则称 $(A, \{\cdot, \cdot\})$ 为一个泊松代数.

由定理可知：

- $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$ 构成一个泊松代数.
- $f \mapsto X_f$ 是一个代数反同态，即 $[X_f, X_g] = -X_{\{f,g\}}$.

Example 4.2. 在 $(\mathbb{R}^2, \omega_0 = dq \wedge dp)$ 中计算 $\{f, g\}$. $\{f, g\} = -X_f g$, 而 $X_f = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p}$, 故可知 $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p}$

4.3 哈密顿系统

设 (M, ω) 是一个辛流形, $H \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, X_H 是哈密顿向量场. 设 $(U, (q_i), (p_i))$ 是 Darboux 坐标卡, 则辛形式有局部表达式 $\omega = \sum dq_i \wedge dp_i$, 通过计算可得 X_H 有局部表达式 $X_H = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right)$, 则 X_H 的积分曲线 $\rho = (q_i, p_i) : \mathbb{R} \to M$ 满足:

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

这个方程称为哈密顿方程.

Proposition 4.2. $H(\rho(t))$ 为常值.

Proof. $\frac{dH(\rho(t))}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$. □

Example 4.3. 我们知道物体的运动遵循牛顿第二定律: $ma = F$. 考虑质量为 m 的粒子在 $\mathbb{R}^3$ 中的运动, (q_1, q_2, q_3) 为 $\mathbb{R}^3$ 中坐标, 势能函数为 $V(t)$, 则牛顿第二定律为 $m\frac{d^2\vec{q}}{dt^2} = -\nabla V(q)$. 引入动量 $p_i = m\frac{dq_i}{dt}$, $H(p, q) = \frac{1}{2m}\|\vec{p}\|^2 + V(q)$. 考虑 $\mathbb{R}^6 \cong T^*\mathbb{R}^3$, 坐标记为 $(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$, 辛形式为 $\omega = \sum dq_i \wedge dp_i$. 写出 H 在 $T^*\mathbb{R}^3$ 中的哈密顿方程为:

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m} \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \end{cases}$$

可见第二个方程即为牛顿第二定律. H 在积分曲线上为常值意味着能量守恒.

Example 4.4. 设 $H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2$ 是 $(\mathbb{R}^2), dq \wedge dp$ 上的函数, 则哈密顿方程为

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = p \\ \frac{dp}{dt} = -q \end{cases}$$

由 ODE 可解得 $\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}$. 如果将 q 视为标量坐标, p 看成动量坐标, 则该方程表述了简谐振动.

Example 4.5. 设 $H = \sqrt{p^2 + q^2}$ 是 $(\mathbb{R}^2), dq \wedge dp$ 上的函数, 则哈密顿方程为

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = \frac{p}{H} \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{q}{H} \end{cases}$$

由于 H 在积分曲线上为常值, 可将 H 视为常数求解方程, 解得

$$\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{H} & -\sin\frac{t}{H} \\ \sin\frac{t}{H} & \cos\frac{t}{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}$$

可见质点做圆周运动, 周期为 $2\pi H$.

Definition 4.4. 设 (M,ω) 为辛流形, $H \in C^\infty(M)$, 则称 (M,ω,H) 定义了一个 哈密顿系统.

4.4 可积哈密顿系统

Proposition 4.3. 在 (M,ω,H) 中, $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, 则 $\{f,H\}=0$ 当且仅当 f 在 X_H 的积分曲线上为常值.

Proof. 设 ρ_t 为 X_H 生成的流, 则 $\frac{d}{dt}(f\circ\rho_t) = \rho_t^*\mathcal{L}_{X_H}f = \rho_t^*\{f,H\}$. □

Remark 4.3. 记两个函数 f,g 生成的哈密顿流为 ρ_t^f, ρ_t^g, 则

$$\begin{aligned} \rho_t^f \text{ 与}\rho_t^g \text{ 交换} &\iff [X_f,X_g]=0 \\ &\iff X_{\{f,g\}}=0 \\ &\iff d\{f,g\}=0 \\ &\iff \{f,g\} \text{ 为常值.} \end{aligned}$$

Definition 4.5. 设 (M,ω) 为辛流形, 映射 $H=(H_1,\ldots,H_n): M\to\mathbb{R}^n$ 满足 $\{H_i,H_j\}=0$, $\forall i,j$. 假设对 $\forall H_i$, $\rho_t^{H_i}$ 对 $\forall t\in\mathbb{R}$ 都存在, 则 $\rho_t^{H_i}$ 互相交换, 由此有

$$\mathbb{R}^n\times M\to M,\ ((t_1,\ldots,t_n),x)\mapsto\rho_t^H(x)=\rho_{t_1}^{H_1}\cdots\rho_{t_n}^{H_n}(x),$$

称为哈密顿 $\mathbb{R}^n$ 作用.

Lemma 4.1. 设 $H: M\to\mathbb{R}^n$ 是哈密顿作用, 则作用的光滑轨道都是 M 的迷向子流形. 特别地, 若 H 有正则值, 则 $\dim M\geq 2n$.

Proof. 设 $\Omega(x)$ 是 x 的轨道, $y\in\Omega(x)$, 则 $T_y\Omega(x)$ 是由 X_{H_i} 张成的. 由 $\omega(X_{H_i},X_{H_j})=\{H_i,H_j\}=0$ 可知 $\Omega(x)$ 是迷向子流形. 当 H 有正则点时, 记 z 为正则点, 则 dH_i 在 z 处线性无关. 由 ω 非退化, X_{H_i} 线性无关, $\omega(H_i,H_j)=0$ 可知 $\dim M\geq 2n$. □

Definition 4.6. 设 (M,ω) 是一个 $2n$ 维辛流形, $H: M\to\mathbb{R}^n$ 满足 $\{H_i,H_j\}=0$, 则称 (M,ω,H) 为一个完全交换的哈密顿系统. 若进一步有:

- H 的正则值是 $\mathbb{R}^n$ 中的稠密开集
- H 是逆紧的, 且纤维是连通集

则称 (M,ω,H) 是可积哈密顿系统.

Proposition 4.4. 设 (M,ω) 是 $2n$ 维辛流形, $H: M \to \mathbb{R}^n$ 是哈密顿 $\mathbb{R}^n$ 作用. 若 H 的纤维都是连通的, 则 H 的正则纤维都是 $\mathbb{R}^n$ 作用的轨道, 且都是 M 的 Lagrange 子流形.

Proof. 由 $\{H_i,H_j\}=0$ 可知 H_j 在 X_{H_i} 的积分曲线上为常值. 因此对 $x\in H^{-1}(b)$, $b\in\mathbb{R}^n$, 有 $\Omega(x)\subseteq H^{-1}(b)$, 即 $H^{-1}(b)$ 是轨道的并. 当 b 为正则值时, $H^{-1}(b)$ 是 n 维子流形, 对 $H^{-1}(b)$ 中的任意轨道 $\Omega(x)$, $T_x\Omega(x)$ 中包含 n 个线性无关的向量 $X_{H_i}|_x$, 故 $\Omega(x)$ 是 Lagrange 子流形. 由于 $H^{-1}(b)=\bigsqcup\Omega(x)$, 若 $\Omega(x)\subseteq H^{-1}(b)$, 则对 $0\in T\underset{\text{开集}}{\subseteq}\mathbb{R}^n$, $\left\{\rho_t^H(x)\mid t\in T\right\}$ 是 x 在 $H^{-1}(b)$ 中的开集, 故 $\Omega(x)$ 是 $H^{-1}(b)$ 中开集. 由于 $H^{-1}(b)$ 连通, 故 $H^{-1}(b)$ 中只有一个轨道. □

4.5 Arnold-Liouville 定理

Definition 4.7. 设 (M^{2n},ω) 是一个辛流形, 若光滑映射

$$H=(H_1,\dots,H_n): M\to\mathbb{R}^n$$

满足 $\{H_i,H_j\}=0$, 则我们称 (M,ω,H) 为一个完全交换的哈密顿系统. 若进一步有:

- H 的正则值全体是稠密开集
- H 是逆紧的, 且纤维都连通

则称 (M,ω,H) 是可积的哈密顿系统.

由上一节内容知, 正则值的原像都是哈密顿作用的轨道, 且都是 M 的 Lagrange 子流形.

Definition 4.8. 给定一个可积哈密顿系统 $H: M\to\mathbb{R}^n$, 设 B 是一个只包含正则值的开集, $\sigma: B\to M$ 为一个截面, 则

$$\Lambda_b^H=\left\{t\in\mathbb{R}^n \mid \rho_t^H(\sigma(b))=\sigma(b)\right\}$$

称为 $b\in B$ 处的周期格点集.

Remark 4.4. Λ_b^H 与 σ 的选取无关.

Example 4.6. (1) 对 $H(p,q)=\frac{1}{2}(p^2+q^2)$, $M=(\mathbb{R}^2, dq\wedge dp)$, 可选取 $B=\mathbb{R}_{>0}$, $\sigma(b)=(\sqrt{2b},0)$. 则有 $\rho_t^H(\sigma(b))=(\sqrt{2b}\cos t,\sqrt{2b}\sin t)$, 可得 $\Lambda_b^H=2\pi\mathbb{Z}$.
(2) 作业.

Exercise 4.3. 对 $M=(\mathbb{R}^2,dq\wedge dp)$, $H=\sqrt{p^2+q^2}$, $B=\mathbb{R}_{>0}$, 计算 Λ_b^H.

在上述例子中, 可以看出 (1) 不依赖于 b 的选取 (标准), (2) 依赖于 b 的选取 (不标准). 我们的目标是将 H 换成 G 使得周期格点集与 b 的选取无关.

Lemma 4.2. 设 $H: M \to \mathbb{R}^n$ 是可积哈密顿系统, 则对任意正则纤维中的点 x, 存在 $H(x)$ 的一个邻域 B 以及一个光滑映射 $\sigma: B \to M$ 使得

- B 只包含正则值
- $\sigma(H(x)) = x$
- $\sigma(B)$ 是 Lagrange 子流形

Proof. 由 Darboux 定理, 存在 x 的一个 Darboux 坐标邻域 $(U, q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$, $\omega = \sum dq_i \wedge dp_i$. 在 (T_xM, ω) 中选取一个相容近复结构 J (将辛空间视为辛流形), 则 $J(T_x\Omega(x))$ 是与 $T_x\Omega(x)$ 互补的 Lagrange 子空间. 将 U 与 T_xM 中的一个邻域等同, 则 $J(T_x\Omega(x))$ 决定了 M 中的一个 Lagrange 子流形.

下面还需说明 $J(T_x\Omega(x))$ 可视为 $H: M \to \mathbb{R}^n$ 在 B 上的一个截面. 由于 $dH_1, \dots, dH_n$ 在 x 处线性无关, 又 H 在 $\Omega(x)$ 为常值, 故 dH 限制在 $J(T_x\Omega(x))$ 上为线性同构, 故 H 在 x 的邻域 $H: J(T_x\Omega(x)) \to B$ 是同胚. 定义 $\sigma = H^{-1}$, 则 σ 满足所有条件. □

Exercise 4.4. 设 U 是 V 的 Lagrange 子空间, 将 V 视为辛流形时, 证明 U 可视为 Lagrange 子流形.

设 $H: M \to \mathbb{R}^n$ 是可积的哈密顿系统, B 是一个只包含正则值的开集, $\sigma: B \to M$ 是一个 Lagrange 截面 (即 $\sigma(B)$ 是 Lagrange 子流形), 定义

$$\psi: B \times \mathbb{R}^n \to M, \ (b, t) \mapsto \rho_t^H(\sigma(b)).$$

Proposition 4.5. $\psi^*\omega = \sum dt_i \wedge db_i$.

Proof. 只需要验证 $\psi^*\omega$ 在 $\frac{\partial}{\partial t_i}$ 和 $\frac{\partial}{\partial b_i}$ 上的作用即可.

首先, 根据定义可知 $\psi_*(\frac{\partial}{\partial b_i}) = \rho_{t*}^H \circ \sigma_*(\frac{\partial}{\partial b_i})$, $\psi_*(\frac{\partial}{\partial t_i}) = X_{H_i}$. 由于 $\rho_t^H(\sigma(B))$ 是 M 中的 Lagrange 子流形且 $\psi_*(\frac{\partial}{\partial b_i})$ 与 $\rho_t^H(\sigma(B))$ 相切, 有

- $\omega(\psi_*(\frac{\partial}{\partial b_i}), \psi_*(\frac{\partial}{\partial b_j})) = 0$
- $\omega(\psi_*(\frac{\partial}{\partial t_i}), \psi_*(\frac{\partial}{\partial t_j})) = \{H_i, H_j\} = 0$
- $\omega(\psi_*(\frac{\partial}{\partial t_i}), \psi_*(\frac{\partial}{\partial b_j})) = dH_i(\psi_*(\frac{\partial}{\partial b_j})) = \frac{\partial}{\partial b_j}(H_i \circ \psi) = \delta_{ij}$

故 $\psi^*\omega = \sum dt_i \wedge db_i$. □

Remark 4.5. 由定义, $\Lambda^H = \{(b, \Lambda_b^H) \mid b \in B\} = \psi^{-1}(\sigma(B))$. 由于 ψ 是局部辛同胚, $\sigma(B)$ 是 Lagrange 子流形, 故 Λ^H 是 Lagrange 子流形的并.

Proposition 4.6. 设 $H: M \to \mathbb{R}^n$ 为可积哈密顿系统, $\sigma: B \to M$ 为 Lagrange 截面, 则每一个正则轨道 $\Omega(\sigma(b))$ 都同胚于 $T^n \simeq \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

Proof. 由周期格点集的定义, 对 $\forall b \in B$, $\psi: B \times \mathbb{R}^n \to M$ 建立了 $\mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ 到 $\Omega(\sigma(b))$ 的同胚, 由 $\Omega(\sigma(b))$ 紧可知 $k = n$. □

Lemma 4.3. 设 $H: M \to B \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个圆盘上的仅有正则纤维的可积哈密顿系统, 设 $\alpha: B \to C \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个微分同胚, 记 $G = \alpha \circ H$. 设 $A(b) = (A_{ij}(b)) = \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial b_j}(b)\right)$ 为 α 的 Jacobi 矩阵, 则

- $X_{G_i} = \sum A_{ij} X_{H_j}$
- $\rho_t^G = \rho_{A^T t}^H$, $t = (t_1, \ldots, t_n)^T$
- $A^T \Lambda_{\alpha(b)}^G = \Lambda_b^H$

Proof. 可验证 $\{G_i, G_j\} = 0$.

(1) $i_{\sum A_{ij} X_{h_j}} \omega = \sum A_{ij} i_{X_{H_j}} \omega = \sum \frac{\partial \alpha_i}{\partial b_j} dH_j = d(\alpha \circ H) = dG_i = i_{X_{G_i}} \omega$. 由 ω 非退化可知 $X_{G_i} = \sum A_{ij} X_{H_j}$.

(2) $\sum t_i X_{G_i} = \sum t_i A_{ij} X_{H_j}$, 故 $\rho_t^G = \rho_{A^T t}^H$.

(3) 由 (2) 易得. □

Theorem 4.2. 设 $H: M \to B \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个开球 B 上仅包含正则纤维的可积哈密顿系统, $\sigma: B \to M$ 是一个 Lagrange 截面, 则存在一个微分同胚 $\alpha: B \to C \subseteq \mathbb{R}^n$ 使得对于 $G = \alpha \circ H$, 有 $\Lambda_{\alpha(b)}^G = 2\pi \mathbb{Z}^n$, $\forall b$ 且映射

$$(c, t) \mapsto \rho_t^G \sigma(\alpha^{-1}(c))$$

给出了一个辛同胚 $C \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n \to G^{-1}(C) = H^{-1}(B) \subseteq M$.

Proof. 由于 B 是可缩的, 可选取 $\Lambda^H \to B$ 的整体截面 $2\pi\tau_1(b), \ldots, 2\pi\tau_n(b) \in \mathbb{R}^n$ 使得: (1) 它们光滑依赖于 b; (2) 对 $\forall b \in B$, 它们自由生成 Λ_b^H.

记 $\tau_i(b) = (A_{i1}(b), \ldots, A_{in}(b))$, 则有 $\Lambda_b^H = 2\pi A^T \mathbb{Z}^n$. 对比之前的引理可知, 只需找到 $\alpha: B \to C$ 使得 $(\frac{\partial \alpha_i}{\partial b_j}) = A$.

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial b_j} = A_{ij} \iff \sum \frac{\partial \alpha_i}{\partial b_j} db_j = \sum A_{ij} db_j \iff d\alpha_i = \sum A_{ij} db_j,$$

故 α_i 存在 $\iff$ $\sum A_{ij} db_j$ 在 B 上正合 $\iff$ $\sum A_{ij} db_j$ 是闭的 $\iff$ $2\pi \sum \tau_{ij} db_j$ 是闭的. 而 $(b, 2\pi\tau_i(b))$ 是 $B \times \mathbb{R}^n$ 的 Lagrange 子流形, 故 $2\pi \sum \tau_{ij} db_j$ 是闭的.

□

Definition 4.9. $(\alpha_i \circ H)_{i=1}^n$ 为 $G: M \to \mathbb{R}^n$ 的作用量坐标, $(t_1', \ldots, t_n')^T = (t_1, \ldots, t_n)^T A^{-1}$ 为角坐标.

Theorem 4.3. (**Arnold-Liouville 定理**) 设 $H: M \to \mathbb{R}^n$ 为一个可积哈密顿系统, 则它的任一正则纤维都同胚于 T^n, 且有一个邻域辛同胚于 $B \times T^n$, 其中 B 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开球, $B \times T^n$ 上的辛形式为 $\omega = \sum dt_i \wedge db_i$, 在此辛同胚下, H 的轨道为 $\{b\} \times T^n$

Example 4.7. 对 $H(p,q)=\sqrt{p^2+q^2}$, $M=(\mathbb{R}^2, dq\wedge dp)$, 有 $\Lambda_b^H=2\pi b\mathbb{Z}$. 取 $\alpha:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$, $x\mapsto\frac{1}{2}x^2$, $G=\alpha\circ H=\frac{1}{2}(p^2+q^2)$, 则有 $\Lambda_{\alpha(b)}^G=2\pi\mathbb{Z}$.

4.6 泊松流形

Definition 4.10. 设光滑流形 M 上有一个 $\mathbb{R}$-双线性映射

$$\{\cdot,\cdot\}:C^\infty(M)\times C^\infty(M)\to C^\infty(M)$$

满足:

- (反对称性) $\{f,g\}=-\{g,f\}$
- (导子性) $\{f,gh\}=\{f,g\}h+\{f,h\}g$
- (Jacobi 恒等式) $\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0$

则称 $(M,\{\cdot,\cdot\})$ 是一个泊松流形. $\psi:(M,\{\cdot,\cdot\}_1)\to(N,\{\cdot,\cdot\}_2)$ 如果满足

$$\{\psi^*f,\psi^*g\}_1=\psi^*\{f,g\}_2\,,$$

则称 ψ 是一个泊松映射.

由导子性知 $\{f,\cdot\}$ 对应于 M 上的一个向量场, 再由反对称性知存在 M 上的反对称 (2,0) 型张量 π 使得 $\{f,g\}=\pi(df,dg)$, 其中 $\pi=\sum\pi^{ij}\partial_i\wedge\partial_j$, $\pi^{ij}=-\pi^{ji}$.

Example 4.8. 任意辛流形都是泊松流形, 辛流形辛同胚诱导泊松结构的泊松映射.

Remark 4.6. 辛流形都是泊松流形, 但反过来不一定. (最简单的例子, 存在奇数维泊松流形.)

对于辛流形, 有 $f\mapsto X_f$, $i_{X_f}\omega=df$; 对于泊松流形, 有 $H\in C^\infty(M)$, $\{-,H\}$ 是 $C^\infty(M)$ 上的导子, 则其对应向量场 X_H, $X_Hf=\{f,H\}=\pi(df,dH)$, 称 X_H 为 H 的哈密顿向量场, $X_H=-i_{dH}\pi$.

Exercise 4.5. 当 M 上的泊松结构来自于 ω 时, 由辛结构和泊松结构定义的哈密顿向量场相同.

Proposition 4.7. 设 $(M,\{\cdot,\cdot\})$ 是一个泊松流形, 则

(1) Jacobi 恒等式 $\iff$ $L_{X_H}\pi=0, \forall H\in C^\infty(M)$.

(2) $X_{\{f,g\}}=-[X_f,X_g]$.

Proof. (1) 由于 d 和 L_{X_H} 交换, 则有

$$\begin{aligned}(L_{X_H}\pi)(dF,dG)&=X_H(\pi(dF,dG))-\pi(L_{X_H}dF,dG)-\pi(dF,L_{X_H}dG)\\&=X_H\{F,G\}-\pi(d\{F,H\},dG)-\pi(dF,d\{G,H\})\end{aligned}$$

$$= \{\{F,G\},H\} - \{\{F,H\},G\} - \{F,\{G,H\}\}.$$

(2)

$$\begin{aligned} X_{\{f,g\}}H &= -\{\{f,g\},H\} \\ &= \{\{g,H\},f\} + \{\{H,f\},g\} \\ &= -X_f X_g H + X_g X_f H \\ &= -[X_f, X_g]H. \end{aligned}$$

□

接下来刻画 $\{\cdot,\cdot\}$. 由于 $\{\cdot,\cdot\} \leftrightarrow \pi = \sum \pi^{ij}\partial_i \wedge \partial_j$, $\pi^{ij} = -\pi^{ji}$, 先定义 Schouten-Nijenhuis 括号: 设 $\Gamma(\wedge^k TM)$ 为 M 上光滑 k-向量场的集合, $\alpha \in \Gamma(\wedge^k TM)$, 则

$$\alpha = \alpha^{i_1\cdots i_k}\partial_{i_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{i_k},\ \ \pi \in \Gamma(\wedge^2 TM).$$

在 $\bigoplus\limits_{k=0}^{\dim M} \Gamma(\wedge^k TM)$ 上定义 $[\cdot,\cdot]_{SN}$:

$$\Gamma(\wedge^k TM) \times \Gamma(\wedge^\ell TM) \to \Gamma(\wedge^{k+\ell-1} TM),$$

它满足:

- $\mathbb{R}$-线性
- $\forall f, g \in C^\infty(M) = \Gamma(\wedge^0 TM)$, $X_1 \wedge \cdots \wedge X_k \in \Gamma(\wedge^k TM)$, 有
$$[f,g] = 0,\ \ [f, X_1 \wedge \cdots \wedge X_k] = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i X_i f \cdot X_1 \wedge \cdots \wedge \hat{X}_i \wedge \cdots \wedge X_k.$$
- $\forall X_1 \wedge \cdots \wedge X_k \in \Gamma(\wedge^k TM)$, $Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_\ell \in \Gamma(\wedge^\ell TM)$, 有

$$[X_1 \wedge \cdots \wedge X_k, Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_\ell] = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} (-1)^{i+j}[X_i, Y_j] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge \hat{X}_i \wedge \cdots \wedge X_k \wedge Y_1 \wedge \cdots \wedge \hat{Y}_j \wedge \cdots \wedge Y_\ell.$$

这三条性质唯一决定 $[\cdot,\cdot]_{SN}$, 其可看作 TM 中李括号的推广.

Theorem 4.4. $\pi \in \Gamma(\wedge^2 TM)$ 是泊松张量 $\iff$ $[\pi,\pi]_{SN} = 0$

Proof. 设 $\pi = \pi^{ij}\partial_i \wedge \partial_j$, 由 π 定义的泊松括号为 $\{f,g\} = \pi(df, dg) = \pi^{ij}\partial_i f \partial_j g$. 由于 π 是泊松张量当且仅当 Jacobi 恒等式成立, 而

$$\text{Jacobi 恒等式} \iff \forall i,j,k,\ \pi^{ki}\frac{\partial \pi^{jk}}{\partial x_k} + \pi^{kj}\frac{\partial \pi^{ki}}{\partial x_k} + \pi^{kk}\frac{\partial \pi^{ij}}{\partial x_k} = 0 \iff [\pi,\pi]_{SN} = 0.$$

□

Example 4.9. 若 $\pi = X \wedge Y$, 则 $[\pi,\pi] = 2[X,Y] \wedge X \wedge Y$, 故 $[X,Y] = 0$ 或 $\dim M = 2$ 可推出 $[\pi,\pi] = 0$.

5 辛作用

5.1 辛作用

设 G 是一个李群, $\mathfrak{g}$ 记为 G 上所有左不变向量场的集合. 事实: $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$, $[X, Y] \in \mathfrak{g}$, 称 $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ 为 G 的李代数. 由定义, $X \in \mathfrak{g}$ 由其在 $e \in G$ 处的值决定, 且 $\mathfrak{g} \to T_e G$ 是线性同构, 因此 $(T_e G, [\cdot, \cdot])$ 是李代数.

李群在其自身有共轭作用 $G \to \mathrm{Diff}(G)$, $g \mapsto \psi_g$, 其中 $\psi_g(h) = ghg^{-1}$, 则 ψ_g 诱导了 $T_e G$ 的自同构, 推出 $Ad_g = \psi_{g*} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 是自同构, 且由定义知 $Ad_h \circ Ad_g = Ad_{hg}$, $Ad_e = \mathrm{id}$, 故 $Ad : G \to \mathfrak{g}$, $g \mapsto Ad_g$ 是群同态, 这给出了 G 在 $\mathfrak{g}$ 上的一个表示, 称为伴随表示.

记 $\mathfrak{g}^*$ 为 $\mathfrak{g}$ 的对偶空间, 且令 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$, $\langle \xi, x \rangle = \xi(x)$. 定义 $Ad_g^* : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ 为满足 $\langle Ad_g^* \xi, x \rangle = \langle \xi, Ad_{g^{-1}} x \rangle$, $\forall \xi, x$ 的映射, 容易验证 $Ad_g^* Ad_h^* = Ad_{gh}^*$, 故这给出了 G 在 $\mathfrak{g}^*$ 上的表示, 称为余伴随表示.

对于 $\forall X \in \mathfrak{g}$, 设 $g(t)$ 是 G 中的道路, $g(0) = e$, $\frac{dg}{dt}|_{t=0} = X$, 可取 $g(t) = \exp(tX)$，则有 $Ad_{g(t)} Y = L_{g(t)*} R_{g(t)^{-1}*}(Y)$. 将两边关于 t 求导可得 $ad_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $Y \mapsto [X, Y]$, 故其诱导了映射 $\mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g})$, $X \mapsto ad_X$. 由 Jacobi 恒等式可知 $[ad_X, ad_Y] = ad_{[X,Y]}$, 故 ad 是李代数同态. 这得到了 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{g}$ 上的表示, 称为 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示.

定义 $ad^* : \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g}^*)$, $\langle ad_X^* \xi, Y \rangle = \langle \xi, -ad_X Y \rangle$. 同理有 $[ad_X^*, ad_Y^*] = ad_{[X,Y]}^*$, 这得到了 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{g}^*$ 上的余伴随表示.

设 M 是光滑流形, G 是李群, 称同态 $\psi : G \to \mathrm{Diff}(M)$, $g \mapsto \psi_g$ 为 G 在 M 上的作用. 如果映射 $ev_\psi : M \times G \to M$, $(p, g) \mapsto \psi_g(p)$ 是光滑的, 则称 ψ 为光滑作用.

Example 5.1. 李群在自身的共轭作用是光滑的.

Definition 5.1. 设 (M, ω) 是辛流形, G 是李群, $\psi : G \to \mathrm{Diff}(M)$ 是光滑作用. 若对 $\forall g \in G$, $\psi_g \in \mathrm{Symp}(M, \omega)$, 则称 ψ 是一个辛作用.

Lemma 5.1. $\{M\text{上的完备辛向量场}\} \xleftrightarrow{1-1} \{\mathbb{R}\text{在}M\text{上的辛作用}\}$.

Definition 5.2. 如果存在映射 $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ 满足

- $\forall X \in \mathfrak{g}$, 令 $\mu^X : M \to \mathbb{R}$, $\mu^X(p) = \langle \mu(p), X \rangle$, $X^\sharp(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \psi_{\exp tX}(p)$, 有 $i_{X^\sharp}\omega = d\mu^X$.
- μ 是 G 等变的, 即 $\mu \circ \psi_g = Ad_g^* \circ \mu$.

则称 (M, ω, G, μ) 为一个哈密顿 G-空间, μ 称为 G 作用的动量映射.

Theorem 5.1. 设 (M, ω, G, μ) 为一个哈密顿 G-空间, 则存在映射

$$\mu^* : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$$

称为余动量映射, 使得

- $\mu^*(X)$ 是 $X^\sharp$ 的哈密顿函数.
- $\mu^*([X,Y]) = \{\mu^*(X), \mu^*(Y)\}$.

Proof. (1) $\forall X \in \mathfrak{g}$, $\mu^*(X)(p) := \langle \mu(p), X \rangle$, $\forall p \in M$, 故 (1) 显然满足.

(2) 由于

$$\begin{aligned}
\mu \circ \psi_g = Ad_g^* \circ \mu &\iff \langle \mu \circ \psi_g, X \rangle = \langle Ad_g^* \circ \mu, X \rangle \\
&\iff \langle \mu \circ \psi_g, X \rangle = \langle \mu, Ad_{g^{-1}}(X) \rangle \\
&\iff \mu^*(X)(g \cdot p) = \mu^*(Ad_{g^{-1}}X)(p)
\end{aligned}$$

取 $g_t = \exp tY$, 则 $\psi_{g_t}^* \mu^*(X) = \mu^*(Ad_{g_t^{-1}}X)$. 于是

$$\begin{aligned}
\{\mu^*(X), \mu^*(Y)\}(p) &= Y^\sharp \mu^*(X)(p) \\
&= \frac{d}{dt} \psi_{g_t}^* \mu^*(X)(p)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \mu^*(Ad_{g_t^{-1}}X)(p)|_{t=0} \\
&= \langle \mu(p), \frac{d}{dt} Ad_{g_t^{-1}}(X)|_{t=0} \rangle \\
&= \langle \mu(p), -[Y, X] \rangle \\
&= \mu^*([X,Y])(p).
\end{aligned}$$

□

我们有交换图 $\left(\mathfrak{g} \xrightarrow{X \mapsto \mu^X} C^\infty(M) \xrightarrow{f \mapsto X_f} \mathfrak{X}(M)\right) = \left(\mathfrak{g} \xrightarrow{X \mapsto X^\sharp} \mathfrak{X}(M)\right)$.

Example 5.2. 对于 $M = \mathbb{R}^6$, $\omega = \sum dx_i \wedge dy_i$, $G = \mathbb{R}^3$, $\psi_{\vec{g}}(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x} + \vec{g}, \vec{y})$. 对 $\forall \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$(李代数), $\vec{a}^\sharp = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$. 令 $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$, $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{y}$, 则

- μ 是 $\mathbb{R}^3$ 不变的, 而 $\mathbb{R}^3$ 是交换李群, 故 Ad_g^* 平凡, 故符合 $\mu \circ \psi_g = Ad_g^* \circ \mu$.
- $\mu^{\vec{a}} = \langle \mu(\vec{x}, \vec{y}), \vec{a} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{y}$, $d\mu^{\vec{a}} = \sum a_i dy_i = i_{\vec{a}^\sharp}\omega$

故 $(\mathbb{R}^6, \omega, \mathbb{R}^3, \mu)$ 是哈密顿 G-空间, 在物理中, $\vec{y}$ 是 (共轭) 动量.

5.2 辛约化

问题: 我们有辛流形 $(\mathbb{C}^{n+1}, \omega_0)$, $\mathbb{C}P^n$ 作为商流形有一个诱导的辛形式 ω_{FS}. 那么更一般地, 什么样的商流形能有一个诱导的辛形式?

Theorem 5.2. (Morsden-Weinstein-Meyer)
设 (M, ω, G, μ) 是哈密顿 G-空间, G 是一个紧李群, $i : \mu^{-1}(0) \hookrightarrow M$ 为含入映射. 假设 $\boxed{G \text{ 在 } \mu^{-1}(0) \text{ 上的作用是自由的}}$, 则

(1) 轨道空间 $M_{red} := \mu^{-1}(0)/G$ 是光滑流形.

(2) $\pi : \mu^{-1}(0) \to M_{red}$ 是 G-主丛.

(3) M_{red} 上有一个辛形式 ω_{red}, 使得 $i^*\omega = \pi^*\omega_{red}$.

Remark 5.1. 我们先给出一些注记.
(1) 为什么 G 能作用在 $\mu^{-1}(0)$ 上? 因为对 $\forall p \in \mu^{-1}(0)$, $\mu(g \cdot p) = Ad_g^*\mu(p) = 0$, 故 G 能作用在 $\mu^{-1}(0)$ 上.
(2) 令 $\psi : G \to \mathrm{Diff}(M)$ 为光滑作用, 定义 $O_p := \{g \cdot p \mid g \in G\}$ 为 p 在 G 作用下的轨道, $G_p := \{g \in G \mid g \cdot p = p\}$ 为 p 的稳定子群. 若对 $\forall p \in M$, $G_p = \{e\}$, 则称 G 作用是自由的. $M/G = \{O_p \mid p \in M\}$ 称为轨道空间, 由典范映射 $\pi : M \to M/G$ 赋予商拓扑.
(3) 令 G 为李群, B 是流形. 一个流形 B 上的 G-主丛由一个二元组 (P, π) 构成, 其中 P 是流形, $\pi : P \to B$ 为映射, 满足:

- G 在 P 的作用是自由的.
- B 是 G 在 P 上作用的商空间, $\pi : P \to B$ 是投影.
- π 是局部平凡的. 对 $\forall p \in B$, 存在邻域 U 和映射 $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\text{diffeo.}} U \times G$, 其中 $\varphi_U(q) = (\pi(q), s_U(q))$, $q \in \pi^{-1}(U)$, 满足
  - $\pi(g \cdot q) = \pi(q)$.
  - $s_U(g \cdot q) = g \cdot s_U(q)$.

  我们称 B 为底空间, P 为全空间, G 为结构群.

下面给出一个 G-主丛的例子.

Example 5.3. (Hopf-Fibration) 令 $P = S^3 = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\right\}$, $G = S^1 = \left\{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi)\right\} \subseteq \mathbb{C}$, G 在 P 上的作用为 $e^{i\theta}(z_1, z_2) = (e^{i\theta}z_1, e^{i\theta}z_2)$, 可见作用是自由的, $B = P/G \cong S^2 \cong \mathbb{C}P^1$.

那接下来我们着手证明这个定理.

Lemma 5.2. 在定理的假设下, 令 $d\mu_p : T_pM \to \mathfrak{g}^* \cong T_{\mu(p)}\mathfrak{g}^*$ 为切映射, 则有 $\ker d\mu_p = (T_pO_p)^{\omega_p}$ (回忆 $(T_pO_p)^{\omega_p}$ 代表辛补空间), $\operatorname{im} d\mu_p = \mathfrak{g}^*$.

Proof. 给定 $X \in \mathfrak{g}$, $X^\sharp$ 是 X 生成的 M 上的向量场. 则有

$$\omega_p(X^\sharp, v) = i_v d\mu^X = i_v\langle d\mu, X\rangle = \langle i_v d\mu, X\rangle = \langle d\mu(v), X\rangle,$$

故 $v \in \ker d\mu_p \implies \forall X \in \mathfrak{g},\ \omega_p(X^\sharp, v) \implies v \in (T_pO_p)^{\omega_p}$. 但我们又有 $\operatorname{im} d\mu_p \subseteq \mathfrak{g}^*$, 于是有维数关系 $2n = \dim\ker d\mu_p + \dim\operatorname{im} d\mu_p \le \underbrace{2n - \dim\mathfrak{g}}_{G\text{ 作用自由}} + \dim\mathfrak{g} = 2n$, 故以上的包含为等于, 即 $\ker d\mu_p = (T_pO_p)^{\omega_p},\ \operatorname{im} d\mu_p = \mathfrak{g}^*$.

□

由此可见:

- $\forall p \in \mu^{-1}(0)$, $\operatorname{im} d\mu_p = \mathfrak{g}^*$, 故 0 是正则值, 推出 $\mu^{-1}(0)$ 是余维数为 $\dim G$ 的子流形.

- $T_pO_p \subseteq T_p\mu^{-1}(0) = \ker d\mu_p = (T_pO_p)^{\omega_p}$, 故 T_pO_p 是 T_pM 的迷向子空间.

Lemma 5.3. 设 I 是辛空间 (V, ω) 的迷向子空间, 则 I^ω/I 有自然的辛结构.

接下来看定理的 (2) 部分.

Theorem 5.3. 设紧李群 G 在光滑流形 N 自由作用, 则 N/G 是流形且 $\pi : N \to N/G$ 是 G-主丛.

为了证明这个定理, 我们将默认以下引理和定理成立.

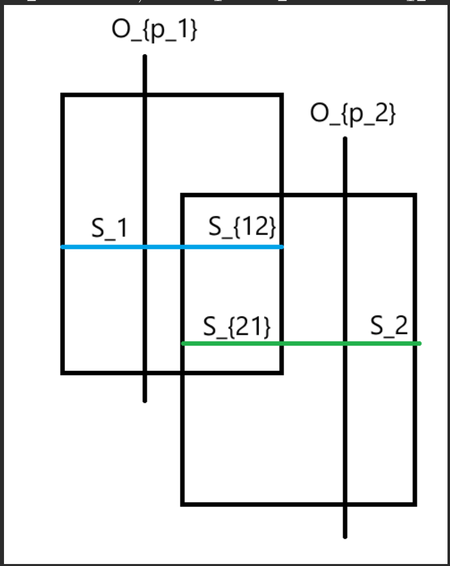
Lemma 5.4. 假设同上, 取 $p \in N$, 则 O_p 是 N 中微分同胚于 G 的子流形.

设 S 是一个与 O_p 在 p 点处横截相交的 $\pi : N \to N/G$ 的截面, 在 p 的邻域内取一个局部坐标系 (x_i) 使得 $O_p \cong G = \{x_1 = \cdots = x_k = 0\}$, $S = \{x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\}$. 令 $S_\epsilon := S \cap B_\epsilon(0, \mathbb{R}^n)$, $\eta : G \times S_\epsilon \to N$, $(g, s) \mapsto g \cdot s$.

Theorem 5.4. (Slice 定理) 假设同上, $p \in N$, 对充分小 $\epsilon > 0$, η 将 $G \times S_\epsilon$ 微分同胚地映为 O_p 在 N 中的一个 G-不变邻域 U.

接下来证明定理 5.3

Proof. 对 $p \in N$, 令 $q = \pi(p) \in N/G$, 用 Slice 定理在 N 中选取 O_p 的一个不变邻域 $U \cong G \times S$, 则 $V := \pi(U) = U/G$ 是 q 在 N/G 中的一个开邻域, 且 V 微分同胚于 S, 也微分同胚于 $\mathbb{R}^{n-k}$ 中的一个开球, 由此得到 N/G 的一个开覆盖. 为证 N/G 是流形, 只需证不同 V 之间的转移函数是光滑的. 考虑 N 中的 G-不变开集 U_1, U_2 以及相应的切片 S_1, S_2, 定义 $S_{12} = S_1 \cap S_2$, $S_{21} = S_2 \cap S_1$, 它们都是 $U_1 \cap U_2$ 的切片, 即 $U_1 \cap U_2 \cong G \times S_{12} \cong G \times S_{21}$.



考虑交换图 $S_{12} \cong e \times S_{12} \hookrightarrow G \times S_{12} \cong U_1 \cap U_2 \cong G \times S_{21} \hookleftarrow e \times S_{21} \cong S_{21}$. 则 $S_{12} \to S_{21}$ 的转移函数恰是 $S_{12} \hookrightarrow U_1 \cap U_2 \xrightarrow{p_2} S_{21}$, 这是光滑映射. 主丛的其他性质是显然的. $\square$

有了这些定理后我们来证明 Morsden-Weinstein-Meyer 定理.

Proof. 前两点由上述引理和定理可直接推出, 注意到 $\dim M_{red} = \dim M - 2\dim G$ 是偶数维的 (这样才能保证辛结构的存在). 对 $\forall p \in \mu^{-1}(0)$, T_pO_p 是 (T_pM, ω_p) 的迷向子空间, 且 $\ker d\mu_p = (T_pO_p)^{\omega_p}$. □

Exercise 5.1. 设李群 G 在 (M_1, ω_1), (M_2, ω_2) 上的作用都是哈密顿作用, 动量映射为 μ_1, μ_2, $(M_1 \times M_2, \pi_1^*\omega_1 + \pi_2^*\omega_2)$ 是辛流形. 证明 $(M_1 \times M_2, \pi_1^*\omega_1 + \pi_2^*\omega_2, G, \mu)$ 也是哈密顿作用, 其中 $\mu(m_1, m_2) = \mu_1(m_1) + \mu_2(m_2)$.

5.3 凸性定理

5.4 辛环面流形 (Symplectic Toric Manifold)

5.5 S^1-等变上同调