TP6 Correction

Clément LAROCHE

31 mars 2019

Dans ce TP, la valeur que nous cherchons à approcher est la suivante :

```r
pnorm(1)-pnorm(0)
```

```
## [1] 0.3413447
```

En effet, la fonction `pnorm` correspond à la fonction de répartition de la loi normale. On rappelle que, si l'on note F cette fonction de répartition, on a :

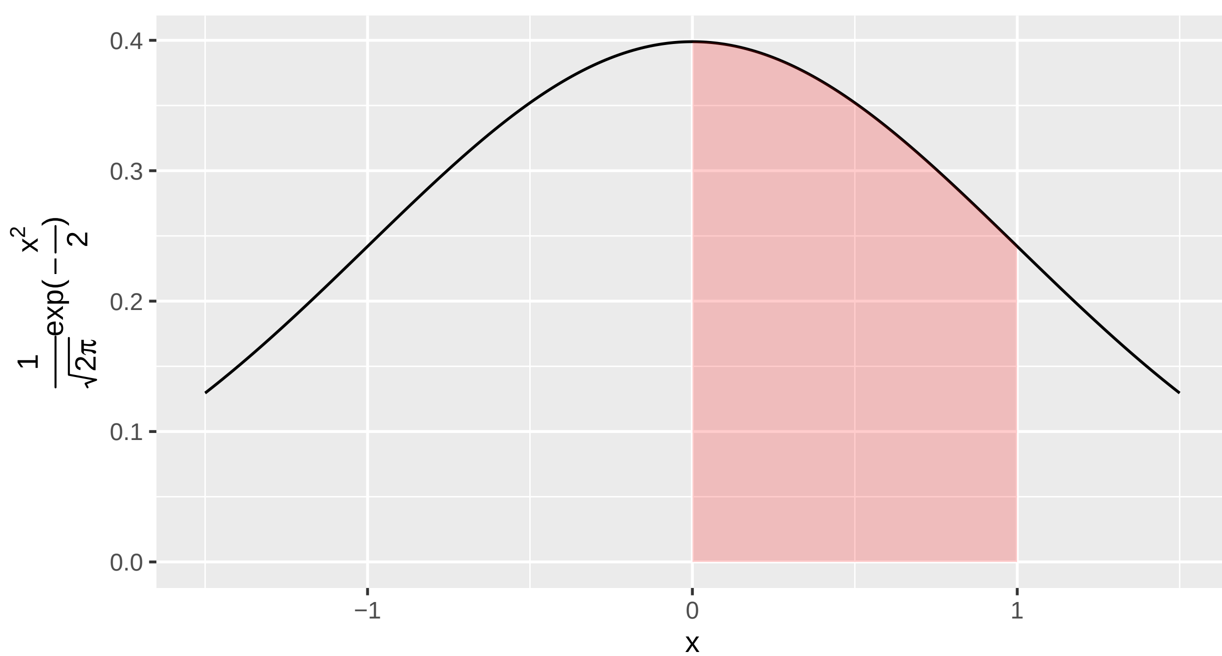
$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \mathrm{d}x$$

Donc si l'on calcule la quantité suivante, on retrouve bien ce que l'on cherche à approcher :

$$F(1) - F(0) = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \mathrm{d}x = \int_{0}^{1} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \mathrm{d}x$$

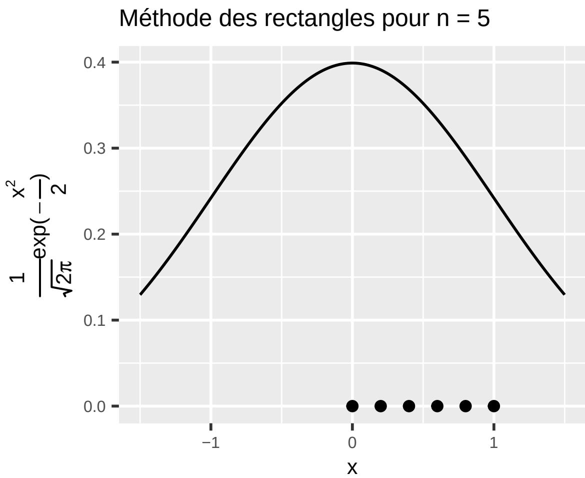
(Ce résultat vient de la relation de Chasles dans les intégrales.)

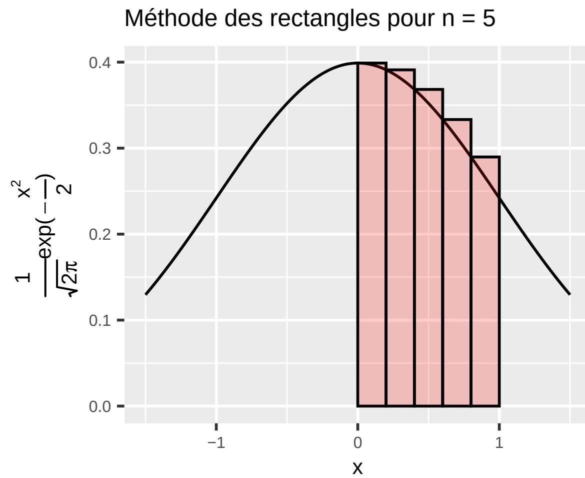
Avant de commencer :
Qu'essaie-t-on de faire ici ? Graphiquement, la question que nous nous posons est : comment faire pour calculer l'aire sous la courbe en rouge dans la figure suivante.



Méthode des rectangles

Intuition graphique





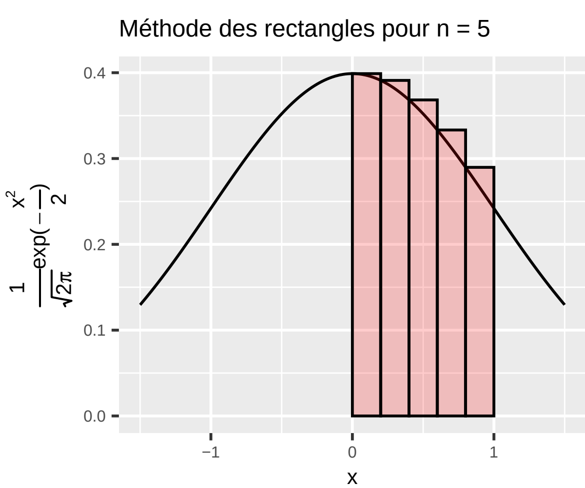
Etapes de la méthode des rectangles :

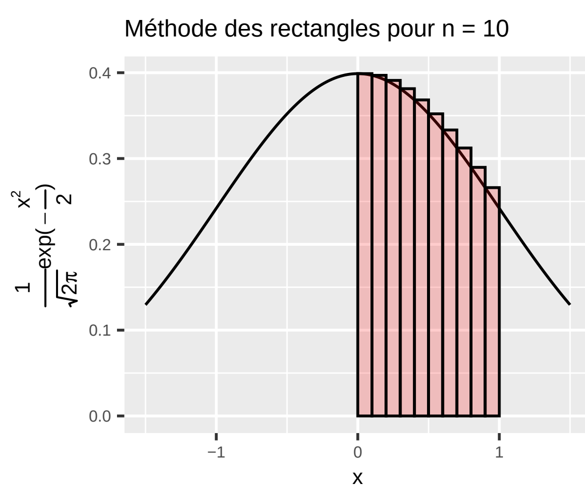
1. (figure de gauche) Je prends mon intervalle d'intégration $[a, b]$ (ici $[0, 1]$) et je le découpe en n intervalles de même taille $\frac{1}{n}$. Dans mon exemple, $n = 5$. Mon intervalle $[0, 1]$ est donc découpé en 5 intervalles et j'obtiens la grille $(0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1)$ sur l'axe des abscisses.
2. (figure de droite) Pour chaque intervalle $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, je construis le rectangle de hauteur $f(\frac{k}{n})$ (et de largeur $\frac{1}{n}$).

3. Je calcule l'aire de chaque rectangle obtenu qui, sur l'intervalle $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, est de largeur $\frac{1}{n}$ et de longueur $f(\frac{k}{n})$. Son aire est donc de $\frac{1}{n} f(\frac{k}{n})$.

4. Je somme les aires des n rectangles obtenus pour avoir une approximation de l'aire sous la coubre sur l'intervalle $[0, 1]$ ce qui me donne $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$ (formule de l'énoncé).

Autrement dit, j'approche ma fonction sur chaque intervalle $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ par une constante (ce qui est très facile à intégrer). Graphiquement, il est facile de voir que, plus je mets de rectangles dans mon intervalle d'intégration $[a, b]$, plus l'estimation de l'aire sous la courbe sera précise.





Partie code

```
# on recode la densité de la loi normale centrée réduite
f <- function(x)
{
  1/sqrt(2*pi)*exp(-x^2/2)
}
# on code la méthode des rectangles sous forme
# de fonction, argument n = nombre de rectangles
rectangle <- function(n)
{
  # on code le vecteur k/n pour
  # k allant de 0 à (n-1)
  pas <- seq(from = 0,to = (n-1)/n,by = 1/n)
  # on recode la forume I_0 de l'énoncé
  1/n*sum(f(pas))
}
# on teste la fonction
rectangle(100)
```

```
## [1] 0.3421276
```

Partie majoration (encadré et questions qui suivent) :

Ici, $(b-a)^n = 1$ pour tout n car notre intervalle est $[0,1]$. Donc nous devons coder $\frac{M_1}{2n}$.

```
# on code sa dérivée
fprime <- function(x)
{
  -1/sqrt(2*pi)*x*exp(-x^2/2)
}
# on calcule le M_1 de l'encadré
M1 <- max(abs(fprime(seq(from = 0,to = 1,by = 0.001))))
# je ne fais qu'un seul exemple de calcul
# je le fais pour n = 10^4
n <- 10^4
M1/(2*n)
```

```
## [1] 1.209854e-05
```

Pour obtenir la valeur de n qui nous permettra d'atteindre une erreur d'approximation en 10^{-15}, on procède théoriquement. On pose :

$$\frac{M_1}{2n} = 10^{-15} \iff n = \frac{M_1 10^{15}}{2}$$

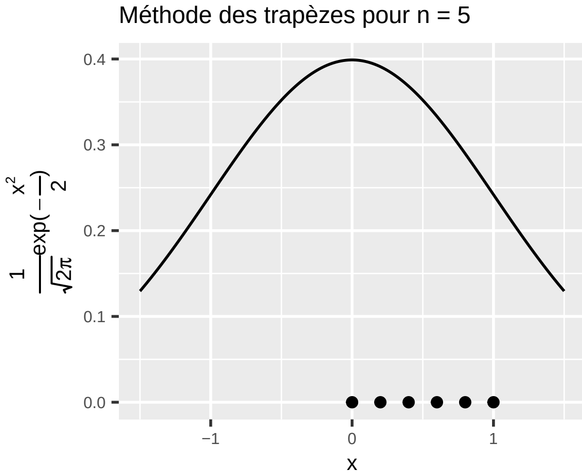
Obtenons une valeur numérique de ce n :

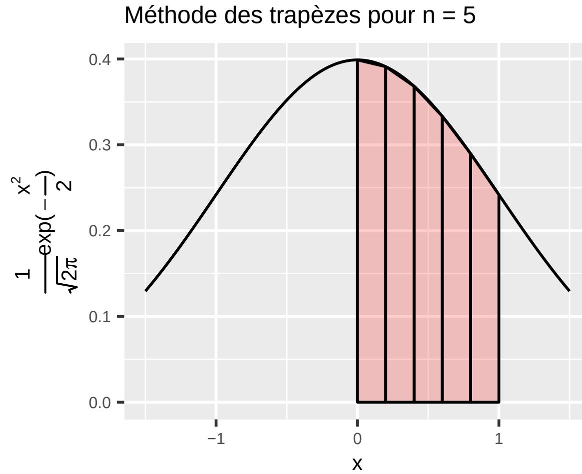
```
n_rectangle <- M1*10^15/2
n_rectangle
```

```
## [1] 1.209854e+14
```

Méthode des trapèzes

Intuition graphique

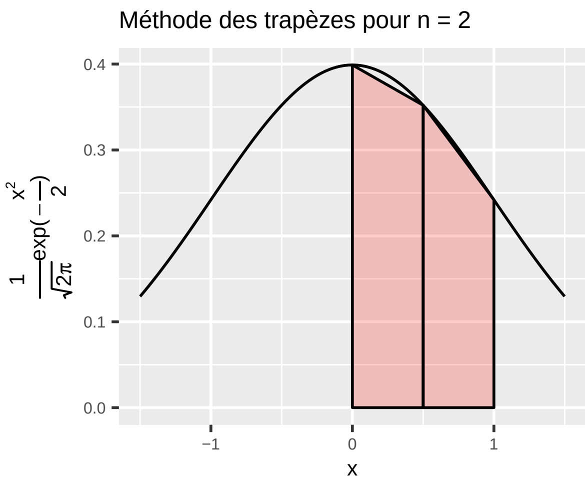


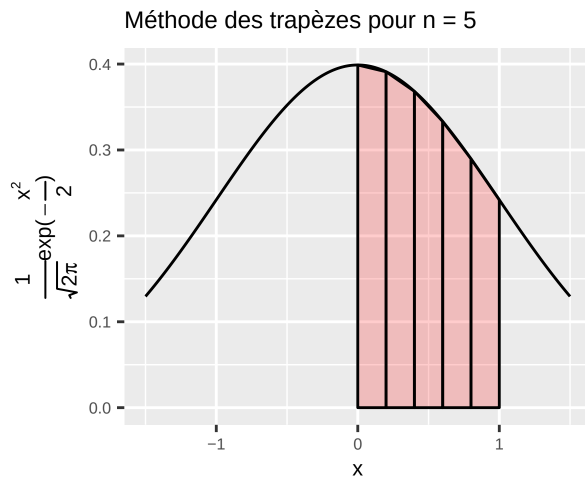


Etapes de la méthode des trapèzes :

1. (figure de gauche) Je prends mon intervalle d'intégration $[a, b]$ (ici $[0, 1]$) et je le découpe en n intervalles de même taille $\frac{1}{n}$. Dans mon exemple, $n = 5$. Mon intervalle $[0, 1]$ est donc découpé en 5 intervalles et j'obtiens la grille $(0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1)$ sur l'axe des abscisses.
2. (figure de droite) Pour chaque intervalle $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, je construis le trapèze ayant les hauteurs $f(\frac{k}{n})$ et $f(\frac{k+1}{n})$ (et de largeur $\frac{1}{n}$).
3. Je calcule l'aire de chaque trapèze obtenu qui, sur l'intervalle $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, vaut : $largeur \times (hauteur_1 + hauteur_2)/2$. Dans notre cas de figure, cela s'écrit comme $\frac{1}{n} \times \frac{1}{2}\left(f(\frac{k}{n}) + f(\frac{k+1}{n})\right)$. (si vous n'êtes pas à l'aise avec le calcul de l'aire d'un trapèze, internet est votre ami).
4. Je somme les aires des n trapèzes obtenus pour avoir une approximation de l'aire sous la coubre sur l'intervalle $[0, 1]$ ce qui me donne $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \times \frac{1}{2}\left(f(\frac{k}{n}) + f(\frac{k+1}{n})\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}\left(f(\frac{k}{n}) + f(\frac{k+1}{n})\right)$ (formule de l'énoncé).

Autrement dit, j'approche ma fonction sur chaque intervalle $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ par un segment de droite (ce qui est très facile à intégrer). Graphiquement, il est facile de voir que, plus je mets de trapèzes dans mon intervalle d'intégration $[a, b]$, plus l'estimation de l'aire sous la courbe sera précise.





Partie code

```
# je code la méthode des trapèzes
# toujours sous forme de fonction
# argument n = nombre de trapèzes
trapeze <- function(n)
{
  # je définis ma grille (étape 1 décrite plus haut)
  pas <- seq(from = 0,to = 1,by = 1/n)
  # je calcule ma fonction sur chaque point de la grille
  res <- f(pas)
  # je calcule les aires de tous les trapèzes
  # elles sont toutes stockées dans le vecteur res
  res <- 0.5*(res[-1]+res[-length(res)])
  # j'applique la formule de l'énoncé
  1/n*sum(res)
}
# on teste la fonction
trapeze(100)
```

```
## [1] 0.3413427
```

Partie majoration (encadré et questions qui suivent) :

Ici, $(b-a)^n = 1$ pour tout n car notre intervalle est $[0,1]$. Donc nous devons coder $\frac{M_2}{12n^2}$.

```
# on code la dérivée seconde
fsecond<- function(x)
{
    1/sqrt(2*pi)*exp(-x^2/2)*(x^2-1)
}
# on calcule le M_2 de l'énoncé
M2 <- max(abs(fsecond(seq(from = 0,to = 1,by = 0.001))))
# je ne le teste que pour un seul n
# je prends n = 10^4
n <- 10^4
M2/(12*n^2)
```

```
## [1] 3.324519e-10
```

Pour obtenir la valeur de n qui nous permettra d'atteindre une erreur d'approximation en 10^{-15}, on procède théoriquement. On pose :

$$\frac{M_2}{12n^2} = 10^{-15} \iff n = \sqrt{\frac{M_2 10^{15}}{12}}$$

Obtenons une valeur numérique de ce n :

```
n_trapeze <- sqrt(M2*10^15/12)
n_trapeze
```

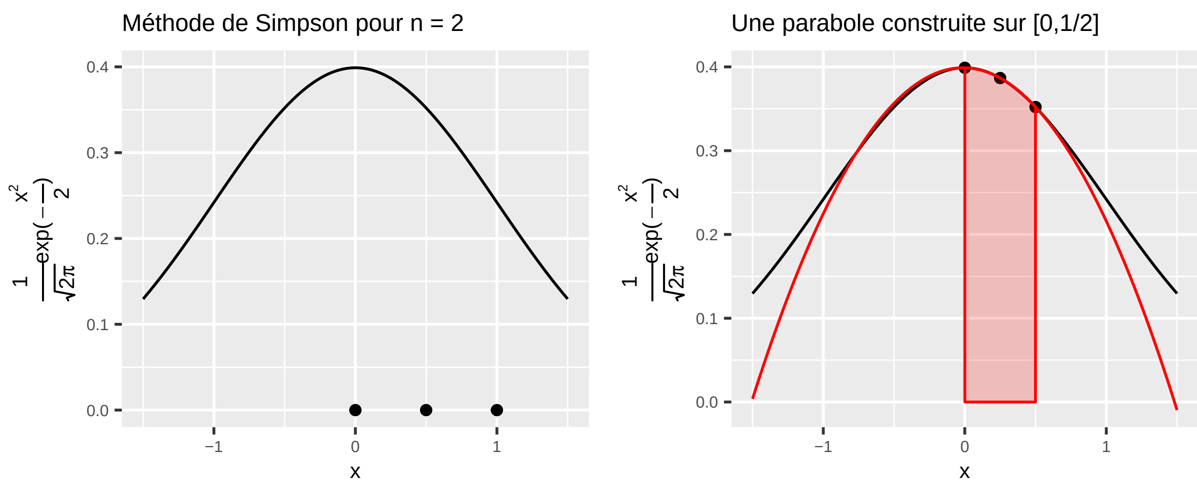
```
## [1] 5765864
```

```
##                           n pour précision 10^{-15}
## Méthode des rectangles                 1.209854e+14
## Méthode des trapezes                   5.765864e+06
```

On voit que cette méthode est beaucoup plus précise que celle des rectangles (on avait l'intuition graphique).

Méthode de Simpson

Intuition graphique

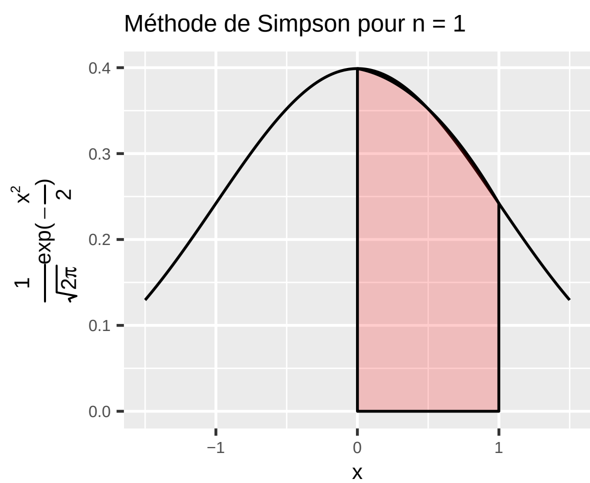


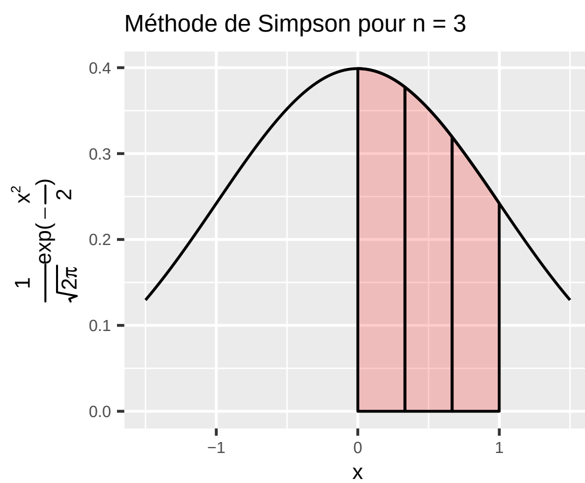
Etapes de la méthode de Simspon :

1. (figure de gauche) Je prends mon intervalle d'intégration $[a, b]$ (ici $[0, 1]$) et je le découpe en n intervalles de même taille $\frac{1}{n}$. Dans mon exemple, $n = 2$. Mon intervalle $[0, 1]$ est donc découpé en 2 intervalles et j'obtiens la grille $(0, \frac{1}{2}, 1)$ sur l'axe des abscisses.
2. (figure de droite) Pour chaque intervalle $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, je construis **la parabole** qui passe par les points $\left(\frac{k}{n}, f(\frac{k}{n})\right)$, $\left(\frac{2k+1}{2n}, f(\frac{2k+1}{2n})\right)$ et $\left(\frac{k+1}{n}, f(\frac{k+1}{n})\right)$. Le point d'abscisse $\frac{2k+1}{2n}$ est le point qui se situe au milieu de l'intervalle $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$. Ici, je vous ai traçé (en rouge) pour l'exemple la parabole pour l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$. Elle passe par les points $\left(0, f(0)\right)$, $\left(\frac{1}{4}, f(\frac{1}{4})\right)$ et $\left(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2})\right)$ (ce sont les points en noir sur la figure). Nous allons voir comment obtenir la formule de chaque parabole pour chaque intervalle $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$.
3. Je calcule l'aire sous chaque parabole obtenue (au moyen d'une intégrale).

4. Je somme les aires des n paraboles obtenues pour avoir une approximation de l'aire sous la courbe sur l'intervalle $[0,1]$ ce qui me donne $\frac{1}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(\frac{k}{n})+4f(\frac{2k+1}{2n})+f(\frac{k+1}{n})\right)$ (formule de l'énoncé).

Autrement dit, j'approche ma fonction sur chaque intervalle $[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]$ par un polynôme d'ordre 2 **(ce qui est très facile à intégrer)**. Graphiquement, il est facile de voir que, plus je mets de polynômes dans mon intervalle d'intégration $[a,b]$, plus l'estimation de l'aire sous la courbe sera précise.





Si l'on regarde les étapes de la méthode de Simpson, nous avons donc besoin de :

- la formule de la fameuse parabole sur chaque $[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]$.
- d'intégrer cette formule obtenue pour trouver l'aire associée à $[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]$.
- de sommer toutes les valeurs d'intégrales pour obtenir l'approximation finale (qui correspondra à la formule de $\tilde{I}_2(n)$ de l'énoncé)

Alors allons-y dans l'ordre (et la bonne humeur).

Formule de la parabole :

La formule de la parabole s'obtient en effectuant une interpolation de Lagrange sur chaque intervalle $[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]$. Vous pourrez trouver une formule générique pour ces interpolations (une recherche sur wikipédia vous la donnera). Cependant, essayons de comprendre d'où cette formule vient.
Sortons un moment du cadre dans lequel nous sommes. J'aimerais construire un polynôme d'ordre 2 que je vais appeler P_1. En plus d'être d'ordre 2, je veux que ce polynôme vérifie trois propriétés :

1. $P_1(\frac{k}{n})=f(\frac{k}{n})$
2. $P_1(\frac{2k+1}{2n})=0$
3. $P_1(\frac{k+1}{n})=0$

J'ai donc les deux racines de P_1. Je sais donc pour l'instant qu'il est égal à $P_1(x)=\alpha(x-\frac{2k+1}{2n})(x-\frac{k+1}{n})$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$. Pour vérifier la propriété 1, il faut que $P_1(\frac{k}{n})=\alpha(\frac{k}{n}-\frac{2k+1}{2n})(\frac{k}{n}-\frac{k+1}{n})=f(\frac{k}{n})$. Cela nous donne la valeur de α. =)
En effet, cela implique que : $\alpha=\frac{1}{(\frac{k}{n}-\frac{2k+1}{2n})(\frac{k}{n}-\frac{k+1}{n})}f(\frac{k}{n})$. On obtient donc que :

$$P_1(x)=f(\frac{k}{n})\frac{(x-\frac{2k+1}{2n})(x-\frac{k+1}{n})}{(\frac{k}{n}-\frac{2k+1}{2n})(\frac{k}{n}-\frac{k+1}{n})}$$

Bon, très bien mais vous allez me demander pourquoi fait-on cela ?
Je vous répondrai "Attendez ! C'est pas fini ! Suivez moi, on y est pas encore !"

Maintenant, j'aimerais construire un polynôme d'ordre 2 que je vais appeler P_2. En plus d'être d'ordre 2, je veux que ce polynôme vérifie trois propriétés :

1. $P_2(\frac{2k+1}{2n}) = f(\frac{2k+1}{2n})$
2. $P_2(\frac{k}{n}) = 0$
3. $P_2(\frac{k+1}{n}) = 0$

J'ai donc les deux racines de P_2. Je sais donc pour l'instant qu'il est égal à $P_2(x) = \alpha(x - \frac{k}{n})(x - \frac{k+1}{n})$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour vérifier la propriété 1, il faut que $P_1(\frac{2k+1}{2n}) = \alpha(\frac{2k+1}{2n} - \frac{k}{n})(\frac{2k+1}{2n} - \frac{k+1}{n}) = f(\frac{2k+1}{2n})$. Cela nous donne la valeur de α. =)
En effet, cela implique que : $\alpha = \frac{1}{(\frac{2k+1}{2n} - \frac{k}{n})(\frac{2k+1}{2n} - \frac{k+1}{n})} f(\frac{2k+1}{2n})$. On obtient donc que :

$$P_2(x) = f(\frac{2k+1}{2n}) \frac{(x - \frac{k}{n})(x - \frac{k+1}{n})}{(\frac{2k+1}{2n} - \frac{k}{n})(\frac{2k+1}{2n} - \frac{k+1}{n})}$$

Ok, donc là je vois vos regards inquiets qui se tournent vers moi (si si je les vois). Comment ? On vient de lui demander pourquoi on fait ça et lui il nous ressort exactement (ou presque) la même chose. Il est en train de devenir fou, ça y est, on l'a perdu...
Et je vous répondrai : "Attendez ! Attendez ! Je vais vous dire pourquoi, regardez ça maintenant !"

Maintenant, j'aimerais construire un polynôme d'ordre 2 que je vais appeler P_3. En plus d'être d'ordre 2, je veux que ce polynôme vérifie trois propriétés :

1. $P_3(\frac{k+1}{n}) = f(\frac{k+1}{n})$
2. $P_3(\frac{k}{n}) = 0$
3. $P_3(\frac{2k+1}{2n}) = 0$

J'ai donc les deux racines de P_3. Je sais donc pour l'instant qu'il est égal à $P_3(x) = \alpha(x - \frac{k}{n})(x - \frac{2k+1}{2n})$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour vérifier la propriété 1, il faut que $P_3(\frac{k+1}{n}) = \alpha(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n})(\frac{k+1}{n} - \frac{2k+1}{2n}) = f(\frac{k+1}{n})$. Cela nous donne la valeur de α. =)
En effet, cela implique que : $\alpha = \frac{1}{(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n})(\frac{k+1}{n} - \frac{2k+1}{2n})} f(\frac{k+1}{n})$. On obtient donc que :

$$P_3(x) = f(\frac{k+1}{n}) \frac{(x - \frac{k}{n})(x - \frac{2k+1}{2n})}{(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n})(\frac{k+1}{n} - \frac{2k+1}{2n})}$$

...
Donc là je vous entends (si si je vous entends) gueuler "Ah mais c'est pas possible il nous emmerde avec ses polynômes à la con ! Il répond pas à la question, il est chiant !!!"
Et là, déjà je vous fais un grand sourire, et je vous dis que ça y est. Nous venons de trouver la formule de notre parabole qui passe par les trois points que l'on voulait à savoir $\left(\frac{k}{n}, f(\frac{k}{n})\right)$, $\left(\frac{2k+1}{2n}, f(\frac{2k+1}{2n})\right)$ et $\left(\frac{k+1}{n}, f(\frac{k+1}{n})\right)$. Pourquoi ?
Parce que si maintenant je prends le polynôme $P(x) = P_1(x) + P_2(x) + P_3(x)$, il vérifie les conditions suivantes :

- il est d'ordre 2, je viens de sommer trois polynômes d'ordre 2.
- $P(\frac{k}{n}) = f(\frac{k}{n})$
- $P(\frac{2k+1}{2n}) = f(\frac{2k+1}{2n})$
- $P(\frac{k+1}{n}) = f(\frac{k+1}{n})$

C'est donc bien une parabole qui passe par mes trois points. Donc le polynôme (d'ordre 2 donc la parabole) obtenu par interpolation de Lagrange passant par les points $(\frac{k}{n}, f(\frac{k}{n}))$, $(\frac{2k+1}{2n}, f(\frac{2k+1}{2n}))$ et $(\frac{k+1}{n}, f(\frac{k+1}{n}))$ a pour équation :

$$\begin{aligned}
P(X) &= P_1(x) + P_2(x) + P_3(x) \\
&= f(\frac{k}{n})\frac{(X-\frac{2k+1}{2n})(X-\frac{k+1}{n})}{(\frac{k}{n}-\frac{2k+1}{2n})(\frac{k}{n}-\frac{k+1}{n})} + f(\frac{2k+1}{2n})\frac{(X-\frac{k}{n})(X-\frac{k+1}{n})}{(\frac{2k+1}{2n}-\frac{k}{n})(\frac{2k+1}{2n}-\frac{k+1}{n})} + f(\frac{k+1}{n})\frac{(X-\frac{k}{n})(X-\frac{2k+1}{2n})}{(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n})(\frac{k+1}{n}-\frac{2k+1}{2n})} \\
&= 2n^2 f(\frac{k}{n})(X-\frac{2k+1}{2n})(X-\frac{k+1}{n}) - 4n^2 f(\frac{2k+1}{2n})(X-\frac{k}{n})(X-\frac{k+1}{n}) + 2n^2 f(\frac{k+1}{n})(X-\frac{k}{n})(X-\frac{2k+1}{2n})
\end{aligned}$$

Vous comprenez donc maintenant pleinement l'étape 2 de la méthode de Simpson.

Aire sous la courbe de la parabole :

Une fois cette charmante formule obtenue, on se rappelle qu'on veut l'aire sous la courbe de cette parabole. Pour l'obtenir, nous allons intégrer $P(x)$.

Attenzione ! Je rappelle que $P(x)$ a été obtenu spécifiquement pour l'intervalle $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ (voir les dessins si ce n'est pas clair !!!), c'est donc naturellement sur cet intervalle que l'on intègre.

On décompose le calcul de l'intégrale de ce polynôme en trois intégrales (celle de $P_1(x)$, celle de $P_2(x)$ et celle de $P_3(x)$). Allons-y. On a premièrement que :

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} P_1(x)\mathrm{d}x &= 2n^2 \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(\frac{k}{n})\left(x-\frac{2k+1}{n}\right)\left(x-\frac{k+1}{n}\right)\mathrm{d}x \\
&= 2n^2 f(\frac{k}{n}) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} x^2 - x\left(\frac{4k+3}{2n}\right) + \frac{(2k+1)(k+1)}{2n^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}n^2 f(\frac{k}{n})\left[\left(\frac{k+1}{n}\right)^3 - \left(\frac{k}{n}\right)^3\right] \\
&- \frac{n}{2}(4k+3)f(\frac{k}{n})\left[\left(\frac{k+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right] \\
&+ 2n^2 f(\frac{k}{n})\frac{(2k+1)(k+1)}{2n^2} \times \frac{1}{n} \\
&= \frac{2}{3n}f(\frac{k}{n})(3k^2+3k+1) - \frac{1}{2n}f(\frac{k}{n})(4k+3)(2k+1) + f(\frac{k}{n})\frac{2k^2+3k+1}{n} \\
&= \frac{1}{n}f(\frac{k}{n})[\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 1] = \frac{1}{6n}f(\frac{k}{n})
\end{aligned}$$

On enchaine avec la deuxième partie du calcul :

$$
\begin{aligned}
-\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} P_2(x)\mathrm{d}x &= 4n^2 \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(\frac{2k+1}{2n})\left(x-\frac{k}{n}\right)\left(x-\frac{k+1}{n}\right)\mathrm{d}x \\
&= 4n^2 f(\frac{2k+1}{2n}) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} x^2 - x\left(\frac{2k+1}{n}\right) + \frac{k(k+1)}{n^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{4n^2}{3n^3} f(\frac{2k+1}{2n})\left[3k^2+3k+1\right] - \frac{4n^2}{2n^2} f(\frac{2k+1}{2n})\frac{(2k+1)^2}{n} \\
&+ 4n^2 f(\frac{2k+1}{2n})\frac{k(k+1)}{n^3} \\
&= \frac{1}{n} f(\frac{2k+1}{2n})(\frac{4}{3}-2) \\
&= -\frac{4}{6n} f(\frac{2k+1}{2n})
\end{aligned}
$$

Faites attention au signe moins qui rôde devant ! (reprenez la formule de P(x) si ce n'est pas clair)

Pour la dernière partie, on obtient que :

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} P_3(x)\mathrm{d}x &= 2n^2 \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(\frac{k+1}{n})\left(x-\frac{k}{n}\right)\left(x-\frac{2k+1}{2n}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2n^2}{3n^3} f(\frac{k+1}{n})\left[3k^2+3k+1\right] - \frac{2n^2}{n^2} f(\frac{k+1}{n})\frac{(2k+1)(4k+1)}{4n} \\
&+ 2n^2 f(\frac{k+1}{n})\frac{k(2k+1)}{2n^3} \\
&= \frac{1}{n} f(\frac{k+1}{n})(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{6n} f(\frac{k+1}{n})
\end{aligned}
$$

On a donc finalement que :

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} P(x)\mathrm{d}x &= \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} P_1(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} P_2(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} P_3(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{6n} f(\frac{k}{n}) + \frac{4}{6n} f(\frac{2k+1}{2n}) + \frac{1}{6n} f(\frac{k+1}{n}) \\
&= \frac{1}{6n}\left(f(\frac{k}{n}) + 4f(\frac{2k+1}{2n}) + f(\frac{k+1}{n})\right)
\end{aligned}
$$

Ca commence à ressembler à quelque chose de familier, non ? Regardez la formule de $\tilde{I}_2$ de l'énoncé. ;)
Vous venez de comprendre l'étape 3 de la formule de Simpson. Victoire !

Formule de Simpson

Il ne vous reste donc qu'à sommer sur tous les intervalles $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$. Cela donne la formule de Simpson de l'énoncé, à savoir :

$$
\hat{I}_2(n) = \frac{1}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(k/n) + 4f((2k+1)/2n) + f((k+1)/n))
$$

Félicitations pour être resté jusqu'à la fin ! J'espère que c'est plus clair maintenant.

Partie code :

```
# toujours sous forme de fonction
Simpson <- function(n)
{
  # définition de la grille
  pas <- seq(from = 0,to = 1,by = 1/n)
  # défintion des points milieux
  pm <- seq(from = 1/(2*n),to = (2*n-1)/(2*n),by = 1/n)
  # application de la formule de l'énoncé
  1/(6*n)*sum(f(pas[-length(pas)])+4*f(pm)+f(pas[-1]))
}
# on test la fonction
Simpson(100)
```

```
## [1] 0.3413447
```

Partie majoration (encadré et questions qui suivent) :

Ici, $(b-a)^n = 1$ pour tout n car notre intervalle est $[0,1]$. Donc nous devons coder $\frac{M_4}{2880n^4}$.

```
# on code la dérivée quatrième
fourth <- function(x)
{
  1/sqrt(2*pi)*exp(-0.5*x^2)*(x^4-4*x^2+1)
}
# on code le M_4 de l'énoncé
M4 <- max(abs(fourth(seq(from = 0,to = 1,by = 0.001))))
# toujours la même chose je ne teste que
# pour un seul n
n <- 10^4
M4/(2880*n^4)
```

```
## [1] 1.680352e-20
```

Pour obtenir la valeur de n qui nous permettra d'atteindre une erreur d'approximation en 10^{-15}, on procède théoriquement. On pose :

$$\frac{M_4}{2880n^4} = 10^{-15} \iff n = \left(\frac{M_4 10^{15}}{2880}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Obtenons une valeur numérique de ce n :

```
n_homer <- (M4*10^15/2880)^0.25
n_homer
```

```
## [1] 640.2507
```

```
##                          n pour précision 10^{-15}
## Méthode des rectangles                1.209854e+14
## Méthode des trapezes                  5.765864e+06
## Méthode de Simpson                    6.402507e+02
```

On voit que la méthode de Simspon est **beaucoup** plus rapide que les deux autres.