AA7: Intervalle de confiance de la proportion

Probabilités et statistique - 3^{me} année - **A.U.** 2019/2020

Intervalle de confiance de la proportion

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon aléatoire d'une variable aléatoire X qui suit une loi Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ n-réalisation. On appelle proportion empirique la statistique

$$\hat{P} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

et $\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ une estimation de p.
Si $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$

$$\hat{P} \sim \mathcal{N}(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})$$

Intervalle de confiance de la proportion

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon aléatoire d'une variable aléatoire X qui suit une loi Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ n-réalisation. On appelle proportion empirique la statistique

$$\hat{P} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

et $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ une estimation de p.
Si $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$

$$\hat{P} \sim \mathcal{N}(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})$$

$$\Longrightarrow \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

L'intervalle de confiance de seuil α de la proportion p

$$IC_\alpha(p) = [\hat{P} - \varepsilon, \hat{P} + \varepsilon]$$

où $\varepsilon = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

Exercice

120 arbres dans un échantillon aléatoire de 750 arbres présentent une surface trop rugueuse selon les normes définies.

1. Déterminer un intervalle de confiance à 95% pour la proportion d'arbres hors norme.
2. Combien d'arbres faut-t-il considérer si on veut obtenir, avec une erreur de 5%, un intervalle de confiance de longueur 0.01?

1. La valeur estimée de la proportion est $\hat{p} = \frac{120}{750} = 0.16$

1. La valeur estimée de la proportion est $\hat{p} = \frac{120}{750} = 0.16$
   Seuil = $\alpha = 0.05$

1. La valeur estimée de la proportion est $\hat{p} = \frac{120}{750} = 0.16$
   Seuil = $\alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

1. La valeur estimée de la proportion est $\hat{p} = \frac{120}{750} = 0.16$
   Seuil = $\alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$
   $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

1. **La valeur estimée de la proportion est** $\hat{p} = \frac{120}{750} = 0.16$
   Seuil = $\alpha = 0.05 \to \frac{\alpha}{2} = 0.025$
   $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$
   $\epsilon = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p}}{n}} = 1.96\sqrt{\frac{0.16(1-0.16)}{75}} = 0.08$

$$IC(p) = [\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p}}{n}}] = [0.16 \pm 0.08] = [0.08, 0.24]$$

1. **La valeur estimée de la proportion est** $\hat{p} = \frac{120}{750} = 0.16$
   Seuil = $\alpha = 0.05 \to \frac{\alpha}{2} = 0.025$
   $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$
   $\epsilon = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p}}{n}} = 1.96 \sqrt{\frac{0.16(1-0.16)}{75}} = 0.08$

$$IC(p) = [\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p}}{n}}] = [0.16 \pm 0.08] = [0.08, 0.24]$$

2. $\alpha = 0.05 \to z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

1. **La valeur estimée de la proportion est** $\hat{p} = \frac{120}{750} = 0.16$
   Seuil = $\alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$
   $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$
   $\epsilon = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p}}{n}} = 1.96 \sqrt{\frac{0.16(1-0.16)}{75}} = 0.08$

$$IC(p) = [\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p}}{n}}] = [0.16 \pm 0.08] = [0.08, 0.24]$$

2. $\alpha = 0.05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$$\text{La longueur } = 2\epsilon = 0.01 \rightarrow \epsilon = 0.005$$

1. La valeur estimée de la proportion est $\hat{p} = \frac{120}{750} = 0.16$
   Seuil = $\alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$
   $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$
   $\epsilon = z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p}}{n}} = 1.96\sqrt{\frac{0.16(1-0.16)}{75}} = 0.08$

$$IC(p) = [\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p}}{n}}] = [0.16 \pm 0.08] = [0.08, 0.24]$$

2. $\alpha = 0.05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$$\text{La longueur } = 2\epsilon = 0.01 \rightarrow \epsilon = 0.005$$

$$z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p}}{n}} = 0.005$$

1. La valeur estimée de la proportion est $\hat{p} = \frac{120}{750} = 0.16$
   Seuil = $\alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$
   $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$
   $\epsilon = z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p}}{n}} = 1.96\sqrt{\frac{0.16(1-0.16)}{75}} = 0.08$

$$IC(p) = [\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p}}{n}}] = [0.16 \pm 0.08] = [0.08, 0.24]$$

2. $\alpha = 0.05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$$\text{La longueur } = 2\epsilon = 0.01 \rightarrow \epsilon = 0.005$$

$$z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p}}{n}} = 0.005$$

$$n = (z_{\frac{\alpha}{2}})^2\frac{(\hat{p}(1-\hat{p})}{0.000025} = 20652.44$$
$$\rightarrow n \simeq 20653$$