



Département Sciences du Numérique

Mesure et Intégration

Olivier Cots et Ehouarn Simon

21 novembre 2023

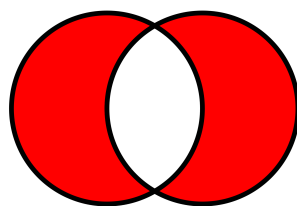


Table des matières

Chapitre 1. Motivations	1
Chapitre 2. Théorie de la mesure	3
2.1 Espaces mesurables	4
2.1.1 Définitions et exemples	4
2.1.2 Propriétés	4
2.1.3 Tribus de Borel sur la droite réelle et la droite réelle achevée	6
2.1.4 Lemme de transport et tribu trace	7
2.2 Applications mesurables	9
2.2.1 Définitions et exemples	9
2.2.2 Propriétés	10
2.3 Mesures et espaces mesurés	12
2.3.1 Définitions et exemples	12
2.3.2 Propriétés	14
2.3.3 La mesure de Lebesgue	16
Chapitre 3. Intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives	17
3.1 Intégrale des fonctions étagées positives	17
3.1.1 Fonctions étagées et intégrale	17
3.1.2 Propriétés de l'intégrale	19
3.2 Intégrale des fonctions mesurables positives	20
3.2.1 Approximation des fonctions mesurables positives	20
3.2.2 Définition de l'intégrale et propriétés élémentaires	21
3.2.3 Théorème de convergence monotone	23
3.2.4 Linéarité positive	25
3.2.5 Interspersion intégrale et somme	26
3.2.6 Égalité des intégrales	27
Chapitre 4. Les espaces de Lebesgue	29
4.1 Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque	29
4.1.1 Définitions	29
4.1.2 Linéarité	30
4.2 Ensemble négligeable et propriété vraie presque partout	31
4.2.1 Définitions	31
4.2.2 Intégrale et fonctions égales presque partout	32
4.3 Introduction à l'espace L^1	34
4.3.1 L'espace \mathcal{L}^1 est un espace vectoriel semi-normé	34
4.3.2 L'espace L^1 est un espace vectoriel normé	35
4.4 Introduction aux espaces L^p	36
4.4.1 Définitions	36
4.4.2 L'espace L^p , $0 < p \leq +\infty$, est un espace vectoriel	37

4.4.3	L'espace L^p , $1 \leq p \leq +\infty$, est un espace vectoriel normé.....	38
Chapitre 5.	Théorèmes limites et applications	41
5.1	Théorèmes de convergence	41
5.1.1	Espace mesuré complet	41
5.1.2	Convergence monotone (ou Beppo-Levi)	43
5.1.3	Convergence dominée	45
5.2	Liens avec l'intégrale de Riemann	47
5.2.1	Intégrale sur un segment	47
5.2.2	Intégrale impropre	49
5.3	Intégrale à paramètre	51
5.3.1	Continuité	52
5.3.2	Dérivabilité	53
Chapitre 6.	Intégration sur les produits	57
6.1	Tribu et mesure produits	57
6.2	Théorèmes de Fubini	58
6.3	Changement de variables	60
Chapitre 7.	Perspectives probabilistes (compléments)	65
7.1	Cadre mathématique	65
7.2	Loi discrète	67
7.3	Loi à densité	68
Chapitre 8.	Corrections des exercices	71
Bibliographie		85

CHAPITRE 1

Motivations

Voir slides.

Théorie de la mesure

2.1	Espaces mesurables	4
2.1.1	Définitions et exemples	4
2.1.2	Propriétés	4
2.1.3	Tribus de Borel sur la droite réelle et la droite réelle achevée	6
2.1.4	Lemme de transport et tribu trace	7
2.2	Applications mesurables	9
2.2.1	Définitions et exemples	9
2.2.2	Propriétés	10
2.3	Mesures et espaces mesurés	12
2.3.1	Définitions et exemples	12
2.3.2	Propriétés	14
2.3.3	La mesure de Lebesgue	16

Un des objectifs est de définir l'intégrale de Lebesgue, c'est-à-dire de donner du sens à :

$$\int_{(E,\mathcal{A})} f \, d\mu.$$

Dans ce chapitre, nous allons partir d'un ensemble E quelconque. Sur cet ensemble, nous allons définir une famille de parties de E , c'est-à-dire une famille contenue dans $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E , que nous appellerons une tribu sur E . Cette famille sera notée \mathcal{A} et devra vérifier quelques axiomes pour avoir le privilège se s'appeler une tribu : contenir E , être stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable. Les éléments de \mathcal{A} sont donc des parties de E , autrement dit des ensembles composés d'éléments de E . Nous appellerons les éléments de \mathcal{A} des ensembles mesurables. Un ensemble mesurable est un ensemble que l'on va mesurer, c'est-à-dire à qui on va attribuer une valeur. L'opération qui consiste à quantifier ces ensembles mesurables se fera à l'aide d'une application particulière appelée mesure, notée μ . Une mesure μ est donc une application définie sur une tribu \mathcal{A} , sur un ensemble E quelconque, qui attribue à chaque ensemble mesurable $A \in \mathcal{A}$ un nombre : une valeur réelle ou l'infini plus précisément. Enfin, étant donné un ensemble E muni d'une tribu \mathcal{A} , l'intégrale de Lebesgue d'une application f peut se voir comme une simple application qui à l'application f attribue aussi une valeur. Cette valeur dépendant de f mais aussi de E , \mathcal{A} et μ . Avant de définir l'intégrale de Lebesgue au chapitre suivant, nous devons introduire la notion d'application mesurable. En effet, pour avoir une chance d'être intégrable, une application f devra nécessairement être mesurable. Les applications mesurables sont les analogues des applications continues pour les espaces topologiques et la définition est en un certain sens très analogue aussi. Comme vous l'aurez compris le mot clé pour ce chapitre est "mesure".

2.1 Espaces mesurables

2.1.1 Définitions et exemples

Définition 2.1.1 – Tribu

Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ une famille de parties de E .

\mathcal{A} est une **tribu** sur E si :

- i) $E \in \mathcal{A}$;
- ii) \mathcal{A} est stable par passage au complémentaire : $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = E \setminus A \in \mathcal{A}$;
- iii) \mathcal{A} est stable par réunion dénombrable : $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$.

Exemple 2.1.1. Les familles suivantes sont des tribus :

- La tribu **grossière** : $\mathcal{A} = \{\emptyset, E\}$. Cette tribu n'a pas d'intérêt pratique.
- La tribu **discrète** : $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$. Cette tribu permet de retrouver la notion de **familles sommables**, voir Exemple 3.2.2 où $E = \mathbb{N}$.
- $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, E\}$ pour $A \subset E$ est la plus petite tribu contenant A , voir Exemple 2.1.2.

□

Remarque 2.1.1. Les éléments de la tribu sont appelés les **ensembles mesurables**. Il faut noter la contrainte de dénombrabilité dans la condition iii), la réunion d'une famille quelconque d'ensembles mesurables n'est pas en général mesurable.

Définition 2.1.2 – Espace mesurable

Pour \mathcal{A} une tribu sur l'ensemble E , le couple (E, \mathcal{A}) s'appelle un **espace mesurable**.

2.1.2 Propriétés

Proposition 2.1.3

Une tribu est stable par :

- \cap : intersection $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$.
- \setminus : différence. $A \setminus B = A \cap B^c$.
- Δ : différence symétrique. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
- \bigcap_n : intersection au plus dénombrable.

► Il ne reste à prouver que la stabilité par intersection au plus dénombrable. Soient $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$. On note $B_n := A_n^c$. Par définition d'une tribu, $\forall n: B_n \in \mathcal{A}$ et $\bigcup_n B_n \in \mathcal{A}$. Ainsi,

$$\bigcap_n A_n = \bigcap_n B_n^c = \left(\bigcup_n B_n \right)^c \in \mathcal{A}.$$

■

Nous pouvons retenir de la proposition précédente qu'une tribu est stable par de nombreuses opérations. Sachant que l'on aimerait pouvoir calculer l'intégrale du plus d'applications possibles, il est important que la tribu contiennent de nombreux éléments. La proposition suivante nous permet de construire une tribu à partir d'une famille dans $\mathcal{P}(E)$ qui ne vérifie pas nécessairement les axiomes de la Définition 2.1.1. À la place de construire, nous dirons que l'on engendre une tribu à partir d'une famille de parties de E .

Proposition 2.1.4

- i) L'intersection d'une famille quelconque de tribus est une tribu ;
- ii) Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, on appelle **tribu engendrée** par \mathcal{C} , notée $\sigma(\mathcal{C})$, l'intersection de toutes les tribus contenant \mathcal{C} : c'est la plus petite tribu contenant \mathcal{C} .

► i) On note $\mathcal{A} := \cap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ l'intersection des tribus.

- $\forall i \in I : E \in \mathcal{A}_i \Rightarrow E \in \mathcal{A}$;
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \forall i \in I : A \in \mathcal{A}_i \Rightarrow \forall i \in I : A^c \in \mathcal{A}_i \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$;
- $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} : \text{idem.}$

ii) Soit \mathcal{A} une tribu contenant \mathcal{C} . Alors $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$ par définition. ■

Exemple 2.1.2. Soit $A \subset E$. Alors $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, E\}$. □

Une tribu est une famille potentiellement nombreuse pour laquelle il peut s'avérer difficile de chercher à caractériser ces éléments. L'avantage à travailler avec une tribu engendrée est que l'on pourra montrer des résultats en utilisant seulement les éléments de la famille qui engendre et non pas la tribu engendrée. La proposition suivante va nous permettre de formaliser ceci.

Proposition 2.1.5

- i) Si $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$ dans $\mathcal{P}(E)$ alors $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$. Si $\mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$ et si $\mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$ alors $\sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_2)$;
- ii) Si (E, \mathcal{O}) est un espace topologique¹ alors $\sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{F})$, \mathcal{F} étant l'ensemble des fermés de E .

► i) Tout d'abord $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$ puisque par définition $\sigma(\mathcal{C}_2)$ contient \mathcal{C}_2 . Ainsi, puisque $\sigma(\mathcal{C}_1)$ est la plus petite tribu contenant \mathcal{C}_1 et puisque $\sigma(\mathcal{C}_2)$ est une tribu, on a $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$. On a donc

$$\mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_2) \Rightarrow \sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$$

et de manière similaire $\mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_1) \Rightarrow \sigma(\mathcal{C}_2) \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$ ce qui permet de conclure que $\sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_2)$ si $\mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$ et $\mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$.

ii) Montrons que $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{F})$ et que $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{O})$. Soit $O \in \mathcal{O}$. On a

$$F := O^c \in \mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{F}) \Rightarrow O = F^c \in \sigma(\mathcal{F}) \Rightarrow \mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{F}).$$

On montre de même que $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{O})$ et on conclut à l'aide du résultat précédent. ■

1. Une topologie $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$ contient \emptyset et E , et est stable par réunions quelconques et intersections finies.

Remarque 2.1.2. Par exemple, pour montrer que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, on utilisera la méthodologie suivante : on montre que $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{C})$ et que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$.

Nos applications à intégrer seront toujours à valeurs dans \mathbb{R} , $\bar{\mathbb{R}}$ ou \mathbb{C} et parfois définies sur \mathbb{R} . Sur \mathbb{R} (comme pour $\bar{\mathbb{R}}$ et \mathbb{C}) il existe une topologie usuelle, dont les éléments sont appelés les ouverts de \mathbb{R} (pour cette topologie). Nous allons définir la tribu engendrée par cette topologie qui sera notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ces tribus particulières engendrées par des topologies ont un rôle fondamental et porte un nom particulier donné par la définition suivante.

Définition 2.1.6 – Tribu de Borel et boréliens

Soit (E, \mathcal{O}) un espace topologique. Les éléments de $\mathcal{B}(E) := \sigma(\mathcal{O})$ sont appelés les **boréliens** de E et on appelle $\mathcal{B}(E)$ la **tribu de Borel** de E . L'espace topologique étant sous-entendu.

2.1.3 Tribus de Borel sur la droite réelle et la droite réelle achevée

Lorsqu'une tribu est engendrée par une famille de parties (autre que la tribu elle-même), il est intéressant de travailler directement avec la famille qui engendre car elle contient moins d'éléments et en principe on sait caractériser les éléments de cette famille. Ainsi, il apparaît intéressant de chercher pour une tribu donnée, des familles qui l'engendre constituées d'éléments, c'est-à-dire des parties de E , simples à caractériser. L'exercice suivant en est l'illustration.

Exercice 2.1.1 (solution p. 71) : Soit $\mathcal{C} := \{]a, b[\mid a < b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} =: \bar{\mathbb{R}}\}$. Montrer que $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, où \mathcal{O} est l'ensemble des ouverts de \mathbb{R} pour la valeur absolue.

On sait donc que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu des boréliens de \mathbb{R} (ou tribu de Borel). Elle est engendrée par les ouverts de \mathbb{R} , par les fermés de \mathbb{R} , mais aussi, comme l'indique l'exemple précédent, par les intervalles ouverts à extrémités réelles. On admet que la tribu de Borel sur $\bar{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des parties de $\bar{\mathbb{R}}$ prenant l'une des formes suivantes : A , $A \cup \{+\infty\}$, $A \cup \{-\infty\}$ ou $A \cup \{-\infty, +\infty\}$, où $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. La proposition suivante nous donne de nouvelles possibilités pour engendrer ces deux tribus de Borel.

Proposition 2.1.7

Soit S une partie dense de la droite réelle.²

Alors $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu engendrée par les intervalles du type

$$1) [a, +\infty[, \quad 2)]a, +\infty[, \quad 3)]-\infty, a[, \quad 4)]-\infty, a],$$

avec $a \in S$. Il en est de même pour $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ avec les intervalles du type $[a, +\infty]$...

► La preuve est laissée en exercice. ■

2. C'est-à-dire telle que tout nombre réel est limite d'une suite à valeurs dans S ; par exemple $S = \mathbb{Q}$.

2.1.4 Lemme de transport et tribu trace

Soit une application $f: E_1 \rightarrow E_2$ avec E_1 et E_2 deux ensembles. Il est important de noter que nous ne supposons rien de plus sur f . On ne la suppose ni bijective, ni surjective, ni rien d'autre.

Proposition 2.1.8

Si \mathcal{A}_2 est une tribu sur E_2 , alors³ $f^{-1}(\mathcal{A}_2) := \{f^{-1}(B) \subset E_1 \mid B \in \mathcal{A}_2\}$ est une tribu sur E_1 , appelée **tribu image réciproque** de \mathcal{A}_2 par f .

- Montrons que $f^{-1}(\mathcal{A}_2)$ est une tribu. On a
- $E_1 = f^{-1}(E_2) \in f^{-1}(\mathcal{A}_2)$;
 - Si $A = f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathcal{A}_2)$ alors $A^c = (f^{-1}(B))^c = f^{-1}(B^c) \in f^{-1}(\mathcal{A}_2)$ car $B^c \in \mathcal{A}_2$;
 - Si $(A_n)_n \in f^{-1}(\mathcal{A}_2)^{\mathbb{N}}$, avec $A_n = f^{-1}(B_n)$ alors puisque $\cup_n B_n \in \mathcal{A}_2$, on a :

$$\bigcup_n A_n = \bigcup_n f^{-1}(B_n) = f^{-1}(\cup_n B_n) \in f^{-1}(\mathcal{A}_2)$$

■

Proposition 2.1.9

Si \mathcal{A}_1 est une tribu sur E_1 , alors $\mathcal{B} := \{B \subset E_2 \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1\}$ est une tribu sur E_2 , appelée **tribu image** de \mathcal{A}_1 par f .

- La preuve est laissée en exercice. ■

Remarque 2.1.3. La tribu image n'est pas $f(\mathcal{A}_1)$ qui n'est en général pas une tribu. Nous avons défini la tribu image (directe) \mathcal{B} via les images réciproques $f^{-1}(B)$, $B \subset E_2$. Cependant, on peut noter que $f^{-1}(B)$ ne fait pas intervenir l'application réciproque de f qui n'existe pas nécessairement mais fait intervenir seulement l'application f , puisque $f^{-1}(B) = \{x \in E_1 \mid f(x) \in B\}$.

Le résultat suivant est difficile à montrer mais très puissant. Il dit qu'étant donnée une application $f: E_1 \rightarrow E_2$ et une famille $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E_2)$, la tribu engendrée par l'image réciproque de \mathcal{C} par f est égale à l'image réciproque par f de la tribu engendrée par \mathcal{C} . Autrement dit, les opérations "engendrer une tribu" et "calculer une image réciproque" commutent.

Théorème 2.1.10 – Lemme de transport

Soient une application $f: E_1 \rightarrow E_2$ et une famille $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E_2)$. Alors

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})).$$

3. Pour $B \subset E_2$, l'**image réciproque** de B par f est définie par $f^{-1}(B) := \{x \in E_1 \mid f(x) \in B\}$. Attention, $f^{-1}(B)$ est un ensemble défini par f , E_1 et B mais ne fait pas intervenir l'application réciproque f^{-1} qui elle n'est pas nécessairement définie.

► Montrons que $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$. On a

$$\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C}) \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{C}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \Rightarrow \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$$

car $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ est une tribu (c'est la tribu image réciproque de $\sigma(\mathcal{C})$ par f) contenant $f^{-1}(\mathcal{C})$ et $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ est la plus petite tribu contenant $f^{-1}(\mathcal{C})$.

• Montrons l'inclusion réciproque, c'est-à-dire que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$. Soit \mathcal{A}_2 la tribu image de $\mathcal{A}_1 := \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ par $f : \mathcal{A}_2 = \{B \subset E_2 \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1\}$. On a

$$\forall B \in \mathcal{C} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1 \quad \text{car} \quad f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})),$$

donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}_2$. Ainsi $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}_2$ et donc $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\mathcal{A}_2)$. Mais,

$$f^{-1}(\mathcal{A}_2) = \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{A}_2\} \subset \mathcal{A}_1$$

donc en conclusion $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$. ■

Ce théorème peut se représenter sous la forme d'un schéma commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{f^{-1}} & f^{-1}(\mathcal{C}) \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \sigma(\mathcal{C}) & \xrightarrow{f^{-1}} & \mathcal{A} \end{array}$$

avec $\mathcal{A} = \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$.

Tribu trace. Soient E un ensemble et \mathcal{O} une topologie sur E , *i.e.* un ensemble de parties de E appelés des ouverts de E . La paire (E, \mathcal{O}) est donc un espace topologique. On rappelle que la tribu de Borel sur (E, \mathcal{O}) , notée $\mathcal{B}(E)$, est la tribu sur E engendrée par \mathcal{O} , c'est-à-dire $\mathcal{B}(E) = \sigma(\mathcal{O})$. La **topologie trace** (ou induite) de \mathcal{O} sur un ensemble $X \subset E$ est constituée par définition des intersections des ouverts de E avec X :

$$\text{tr}(\mathcal{O}) := \{O \cap X \mid O \in \mathcal{O}\}.$$

On parle aussi de trace des ouverts sur X . Si $X \in \mathcal{O}$ alors la topologie trace est simplement les ouverts de \mathcal{O} inclus dans X , mais X peut ne pas être dans \mathcal{O} . Prenons un exemple. On considère \mathbb{R} muni de la topologie usuelle et on prend $X = [0, 2] \subset \mathbb{R}$. Alors, pour la topologie trace sur X , l'ensemble $]1, 2]$ est un ouvert puisqu'il peut s'écrire $]1, 2] = X \cap]1, 3[$, avec $]1, 3[$ un ouvert de \mathbb{R} . Revenons au cas général. On souhaite maintenant écrire la topologie trace comme l'image réciproque de \mathcal{O} par une certaine application. Soit $i : X \rightarrow E$ **l'injection canonique**, alors

$$\text{tr}(\mathcal{O}) = i^{-1}(\mathcal{O}) = \{i^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{O}\},$$

car :

$$\forall O \in \mathcal{O} : i^{-1}(O) = \{x \in X \mid i(x) = x \in O\} = X \cap O.$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 2.1.11 – Tribu trace

La **tribu trace** de $\mathcal{B}(E)$ sur X définie par $\text{tr}(\mathcal{B}(E)) := \{B \cap X \mid B \in \mathcal{B}(E)\}$ est la tribu engendrée par la topologie trace de \mathcal{O} sur X , c-à-d $\text{tr}(\mathcal{B}(E)) = \sigma(\text{tr}(\mathcal{O}))$.

► Lemme de transport : $\text{tr}(\mathcal{B}(E)) = \text{tr}(\sigma(\mathcal{O})) = i^{-1}(\sigma(\mathcal{O})) = \sigma(i^{-1}(\mathcal{O})) = \sigma(\text{tr}(\mathcal{O}))$. ■

Exemple 2.1.3. La tribu $\mathcal{B}([0, 1])$, c'est-à-dire la tribu engendrée par la topologie trace des ouverts de \mathbb{R} sur $[0, 1]$, est donc aussi la tribu trace de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sur $[0, 1]$. Ainsi, connaissant $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, nous connaissons maintenant $\mathcal{B}([a, b])$ pour tous $a \leq b$ réels. □

2.2 Applications mesurables

2.2.1 Définitions et exemples

Définition 2.2.1 – Application mesurable

Soient (E_1, \mathcal{A}_1) et (E_2, \mathcal{A}_2) deux espaces mesurables et $f: E_1 \rightarrow E_2$ une application.

i) On dit que f est **mesurable** de (E_1, \mathcal{A}_1) dans (E_2, \mathcal{A}_2) si

$$f^{-1}(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}_1,$$

c'est-à-dire si :

$$\forall B \in \mathcal{A}_2 : f^{-1}(B) = \{x \in E_1 \mid f(x) \in B\} \in \mathcal{A}_1 ;$$

On écrira aussi $f: (E_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow (E_2, \mathcal{A}_2)$ mesurable.

ii) Si E_1 et E_2 sont des espaces topologiques et si \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sont les tribus de Borel correspondantes, on dit alors que f est **borélienne**.

Remarque 2.2.1. Les applications mesurables ont la même importance pour les espaces mesurables que les applications continues pour les espaces topologiques. On rappelle que si (E_1, \mathcal{O}_1) et (E_2, \mathcal{O}_2) sont deux espaces topologiques, alors une application f est continue en tout point de E_1 si et seulement si $f^{-1}(\mathcal{O}_2) \subset \mathcal{O}_1$. On peut donc remarquer la similitude dans la définition d'une application mesurable.

On parlera parfois de fonction à la place d'application quand l'application est à valeurs dans \mathbb{R} ou $\overline{\mathbb{R}}$.

Exemple 2.2.1. La fonction indicatrice $\mathbb{1}_A: (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\{0, 1\}, \mathcal{P}(\{0, 1\}))$ est mesurable si et seulement si A est mesurable, i.e. $A \in \mathcal{A}$. Montrons pour cela que l'image réciproque par $\mathbb{1}_A$ de tout ensemble mesurable de $\mathcal{P}(\{0, 1\})$ est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{A}$. On a :

$$\mathbb{1}_A^{-1}(\{0\}) = A^c, \quad \mathbb{1}_A^{-1}(\{1\}) = A, \quad \mathbb{1}_A^{-1}(\{0, 1\}) = E, \quad \mathbb{1}_A^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

Ainsi, puisque \emptyset et E appartiennent à la tribu et puisque pour que $A^c \in \mathcal{A}$ il faut et il suffit que $A \in \mathcal{A}$, le résultat est démontré. □

Exemple 2.2.2. Toute fonction constante de (E, \mathcal{A}) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable. □

2.2.2 Propriétés

La proposition suivante fournit des critères assurant la mesurabilité d'une application. Le premier point montre encore l'avantage à travailler avec une tribu engendrée car il suffit d'utiliser la famille qui engendre pour montrer la mesurabilité de l'application. On mettra à profit ce résultat pour montrer les deux derniers points affirmant qu'une application continue ou continue par morceaux est mesurable.

Proposition 2.2.2 – Critères de mesurabilité

i) Soit \mathcal{C} une classe de parties d'un ensemble F , i.e. $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(F)$. On note $\mathcal{B} := \sigma(\mathcal{C})$. Alors,

$$f: (E, \mathcal{A}) \rightarrow (F, \mathcal{B}) \text{ mesurable} \Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A};$$

ii) Soient $f_1: (E_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow (E_2, \mathcal{A}_2)$ et $f_2: (E_2, \mathcal{A}_2) \rightarrow (E_3, \mathcal{A}_3)$ deux applications. Si f_1 et f_2 sont mesurables alors $f_2 \circ f_1: (E_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow (E_3, \mathcal{A}_3)$ est mesurable;

iii) Soient (E, \mathcal{O}_1) et (F, \mathcal{O}_2) deux espaces topologiques. On a $\mathcal{B}(E) = \sigma(\mathcal{O}_1)$ et $\mathcal{B}(F) = \sigma(\mathcal{O}_2)$ les tribus de Borel correspondantes. Si $f: (E, \mathcal{B}(E)) \rightarrow (F, \mathcal{B}(F))$ est **continue** alors elle est mesurable;

iv) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux ($a < b \in \mathbb{R}$), alors f mesurable de $([a, b], \mathcal{B}([a, b]))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

► i) Par définition, f est mesurable si $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$. D'après le lemme de transport, on a $f^{-1}(\mathcal{B}) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$. Le point est alors démontré puisque d'après la Proposition 2.1.5, $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset \mathcal{A}$ si et seulement si $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$.

ii) On a $\forall A_3 \in \mathcal{A}_3: (f_2 \circ f_1)^{-1}(A_3) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(A_3)) \in \mathcal{A}_1$ car f_1 mesurable et $f_2^{-1}(A_3) \in \mathcal{A}_2$ puisque $A_3 \in \mathcal{A}_3$ et f_2 mesurable.

iii) Pour montrer le point, il suffit de montrer que $f^{-1}(\mathcal{O}_2) \subset \mathcal{B}(E) = \sigma(\mathcal{O}_1)$. Par hypothèse de continuité de l'application f et définition de la tribu engendrée, on a :

$$\forall O_2 \in \mathcal{O}_2: f^{-1}(O_2) \in \mathcal{O}_1 \subset \sigma(\mathcal{O}_1)$$

autrement dit $f^{-1}(\mathcal{O}_2) \subset \sigma(\mathcal{O}_1)$. Le point iv) est laissé en exercice. ■

La proposition suivante nous permettra de montrer que toute combinaison linéaire d'applications mesurables est mesurable, que le produit aussi, ou encore le min, le max, etc.

Proposition 2.2.3

Si f_1, \dots, f_d sont des applications réelles mesurables sur (E, \mathcal{A}) et g une fonction borélienne sur \mathbb{R}^d , alors $h: (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par $h(x) := g(f_1(x), \dots, f_d(x))$, est mesurable.

► On pose

$$\begin{aligned} f: (E, \mathcal{A}) &\longrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \\ x &\longmapsto f(x) := (f_1(x), \dots, f_d(x)) \end{aligned}$$

de telle sorte que $h = g \circ f$. Il suffit de montrer que f est mesurable. D'après la Proposi-

tion 2.3.6 donnée par la suite, on a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{C})$ avec $\mathcal{C} := \left\{ \prod_{i=1}^d]a_i, b_i[\mid a_i < b_i \text{ réels} \right\}$. Il suffit donc de montrer que $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$. Soit $I := \prod_{i=1}^d]a_i, b_i[\in \mathcal{C}$. Alors,

$$f^{-1}(I) = \bigcap_{i=1}^d \underbrace{f_i^{-1}(]a_i, b_i[)}_{\substack{\in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\ \in \mathcal{A} \text{ car } f_i \text{ mesurable}}} \in \mathcal{A} \text{ car stable par intersection,}$$

ce qui permet de conclure. ■

Exemple 2.2.3. Si f_1, \dots, f_d sont des applications réelles mesurables sur (E, \mathcal{A}) alors les applications suivantes le sont aussi : $\sum_{i=1}^d a_i f_i$, $a_i \in \mathbb{R}$, $\min(f_1, \dots, f_d)$, $\max(f_1, \dots, f_d)$. □

Exercice 2.2.1 (solution p. 71) : Soient f_1 et f_2 deux applications mesurables de (E, \mathcal{A}) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que :

- a) $\{x \in E \mid f_1(x) = f_2(x)\} \in \mathcal{A}$,
- b) $\{x \in E \mid f_1(x) \leq f_2(x)\} \in \mathcal{A}$ et $\{x \in E \mid f_1(x) \geq f_2(x)\} \in \mathcal{A}$,
- c) $\{x \in E \mid f_1(x) < f_2(x)\} \in \mathcal{A}$ et $\{x \in E \mid f_1(x) > f_2(x)\} \in \mathcal{A}$.

Proposition 2.2.4

Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications mesurables sur (E, \mathcal{A}) à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

- i) Les applications $\sup_n f_n$ et $\inf_n f_n$ sont mesurables ;
- ii) On a $\limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} f_k$ et $\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} f_k$ mesurables ;
- iii) Si $(f_n)_n$ converge simplement vers f (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$), alors f est mesurable.

Remarque 2.2.2. Rappelons que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les $] -\infty, a]$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par les $[-\infty, a]$, pour $a \in \mathbb{R}$.

► i) On pose $g := \sup_n f_n$. On a $\forall a \in \mathbb{R} : g^{-1}([-\infty, a]) = \bigcap_n f_n^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A}$ car

$$\begin{aligned} x \in g^{-1}([-\infty, a]) &\Leftrightarrow g(x) \leq a \Leftrightarrow \forall n : f_n(x) \leq a \\ &\Leftrightarrow \forall n : x \in f_n^{-1}([-\infty, a]) \Leftrightarrow x \in \bigcap_n f_n^{-1}([-\infty, a]). \end{aligned}$$

De même, en posant $h := \inf_n f_n$, on a $h^{-1}([a, -\infty]) = \bigcap_n f_n^{-1}([a, -\infty]) \in \mathcal{A}$. D'après le premier point de la Proposition 2.2.2, les fonctions $\sup_n f_n$ et $\inf_n f_n$ sont mesurables.

ii) Puisque $\sup_n f_n$ et $\inf_n f_n$ sont mesurables et en remarquant que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n = \inf_{n \geq 0} \sup_{k \geq n} f_k \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n = \sup_{n \geq 0} \inf_{k \geq n} f_k$$

alors on peut conclure.

iii) Si $f_n \rightarrow f$ alors $f = \limsup_n f_n$ qui est mesurable. ■

2.3 Mesures et espaces mesurés

2.3.1 Définitions et exemples

Définition 2.3.1 – Mesure

Soit (E, \mathcal{A}) un espace mesurable. On appelle **mesure** sur (E, \mathcal{A}) une application

$$\mu: \mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

telle que

- i) $\mu(\emptyset) = 0$;
- ii) pour tous A_1, A_2, \dots dans \mathcal{A} 2 à 2 **disjoints** :

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n) \quad (\sigma\text{-additivité}).$$

Définition 2.3.2 – Espace mesuré

Soit (E, \mathcal{A}) un espace mesurable et μ une mesure sur (E, \mathcal{A}) . On dit que (E, \mathcal{A}, μ) est un **espace mesuré**.

Définition 2.3.3

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

- i) La mesure μ est dite **finie** si $\mu(E) < +\infty$;
- ii) La mesure μ est dite **de probabilité** si $\mu(E) = 1$;
- iii) La mesure μ est dite **σ -finie** si

$$\exists (A_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \text{ t.q. } E = \bigcup_n A_n \text{ et } \mu(A_n) < +\infty \forall n.$$

Remarque 2.3.1. On rappelle que pour une tribu \mathcal{A} , les ensembles $A \in \mathcal{A}$ sont appelés des ensembles mesurables. Une mesure attribue à un ensemble mesurable une valeur.

Remarque 2.3.2. La condition $\mu(\emptyset) = 0$ équivaut à dire que μ n'est pas identiquement égale à $+\infty$. En effet, s'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < +\infty$, alors $\mu(A) = \mu(A \cup \emptyset) = \mu(A) + \mu(\emptyset)$ d'où $\mu(\emptyset) = 0$.

Exemple 2.3.1 (Mesure de Dirac). Soit (E, \mathcal{A}) un espace mesurable et $a \in E$. On définit

$$\begin{aligned} \delta_a: \mathcal{A} &\longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ \\ A &\longmapsto \delta_a(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \notin A \\ 1 & \text{si } a \in A. \end{cases} \end{aligned}$$

Alors, δ_a est une mesure sur (E, \mathcal{A}) . Montrons que δ_a vérifie les axiomes la définition :

- $\delta_a(\emptyset) = 0$;

- Soit A_1, A_2, \dots dans \mathcal{A} 2 à 2 disjoints. Si a appartient à l'un des A_n alors $\delta_a(\cup_n A_n) = \sum_n \delta_a(A_n) = 1$, sinon $\delta_a(\cup_n A_n) = \sum_n \delta_a(A_n) = 0$.

□

Remarque 2.3.3. δ_a est une mesure de probabilité.

Exemple 2.3.2 (Mesure de comptage). Soit l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. On définit

$$\begin{aligned} \text{card}: \mathcal{P}(\mathbb{N}) &\longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ \\ A &\longmapsto \text{card}(A) = \begin{cases} \#A & \text{si } A \text{ est fini} \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

où $\#A$ désigne le nombre d'éléments d'un ensemble fini. Alors, card est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrons que card vérifie les deux propriétés de la définition :

- $\text{card}(\emptyset) = 0$;
- Si A_1, A_2, \dots dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont 2 à 2 disjoints alors $\text{card}(\cup_n A_n) = \sum_n \text{card}(A_n)$.

□

Exercice 2.3.1 (solution p. 72) : On considère sur \mathbb{R} , la famille⁴

$$\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid A \text{ est dénombrable ou } A^c \text{ est dénombrable}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Montrer que \mathcal{A} est une tribu. On définit ensuite

$$\begin{aligned} \mu: \mathcal{A} &\longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ \\ A &\longmapsto \mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Montrer que μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.

Définition – Ensemble négligeable

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. On dit que $A \in \mathcal{A}$ est un *ensemble négligeable* (ou μ -négligeable) si $\mu(A) = 0$.

Remarque 2.3.4. Attention, les ensembles négligeables ne contiennent pas nécessairement peu de points, tout dépend de la mesure.

- Par exemple, si $\mu = \delta_0$, la masse de Dirac en 0 sur \mathbb{R} , alors \mathbb{R}^* est négligeable.
- Si $\mu = \lambda$, la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} , cf. Section 2.3.3, alors \mathbb{Q} est négligeable.
- Pour la mesure de comptage sur \mathbb{N} , le seul ensemble négligeable est l'ensemble vide.

On retiendra que les ensembles négligeables d'une tribu dépend de la mesure.

4. L'ensemble vide, un ensemble fini et un ensemble infini dénombrable, sont tous dits dénombrables.

Définition 2.3.4 – Mesure image

Soient (E_1, \mathcal{A}_1) et (E_2, \mathcal{A}_2) deux espaces mesurables. Soient $\mu: \mathcal{A}_1 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ une mesure sur (E_1, \mathcal{A}_1) et f une application mesurable de (E_1, \mathcal{A}_1) dans (E_2, \mathcal{A}_2) . On pose

$$\begin{aligned} \mu_f: \mathcal{A}_2 &\longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ \\ B &\longmapsto \mu_f(B) := \mu(f^{-1}(B)). \end{aligned}$$

Alors, μ_f est une mesure sur (E_2, \mathcal{A}_2) , appelée *mesure image* de μ par f .

Exercice 2.3.2: (Formules de Hausdorff) Soient E et F deux ensembles. Soit $f: E \rightarrow F$ une application. Montrer les propositions suivantes :

1. $\forall B \subset F, [f^{-1}(B)]^c = f^{-1}(B^c)$.
2. Soit I un ensemble d'indices non vide et soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille de parties de F . Alors : $f^{-1}(\cup_{i \in I} B_i) = \cup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$ et $f^{-1}(\cap_{i \in I} B_i) = \cap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.

Exercice 2.3.3 (solution p. 72) : Montrer que l'application μ_f défini dans la Définition 2.3.4 est bien une mesure sur (E_2, \mathcal{A}_2) .

2.3.2 Propriétés

La proposition suivante regroupe les propriétés essentielles des mesures.

Proposition 2.3.5 – Propriétés essentielles des mesures

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

i) Soient A, B dans \mathcal{A} t.q. $B \subset A$. Alors

$$\mu(B) \leq \mu(A) \quad (\text{croissance de } \mu)$$

et si $\mu(B) < +\infty$ alors $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.

ii) Si $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ vérifie $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n , alors

$$\mu(\cup_n A_n) = \lim_n \mu(A_n) = \sup_n \mu(A_n) \quad (\text{continuité à gauche})$$

iii) Si $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ vérifie $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout n et si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, alors

$$\mu(\cap_n A_n) = \lim_n \mu(A_n) = \inf_n \mu(A_n) \quad (\text{continuité à droite})$$

iv) Si $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ alors

$$\mu(\cup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n) \quad (\text{sous } \sigma\text{-additivité})$$

► i) On a $\mu(A) = \mu(B \cup (A \setminus B)) = \mu(B) + \mu(A \setminus B)$ ce qui permet de conclure.

ii) On pose $B_0 := A_0$ et $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. On a alors

$$\begin{aligned} \mu(\cup_n A_n) &= \mu(\cup_n B_n) && \text{par définition des } B_n \\ &= \sum_n \mu(B_n) && \text{car les } B_n \text{ sont 2 à 2 disjoints.} \end{aligned}$$

D'autre part, on a $\sum_n \mu(B_n) = \lim_n \sum_{k=0}^n \mu(B_k) = \lim_n \mu(\cup_{k=0}^n B_k) = \lim_n \mu(A_n)$ car $\cup_{k=0}^n B_k = A_n$, ce qui permet de conclure pour la première égalité. La croissance de μ nous donne la seconde égalité : $(\mu(A_n))_n$ est une suite croissante.

iii) On pose $B_n := A_{n_0} \setminus A_n$ pour tout $n \geq n_0$. La suite $(B_n)_n$ est croissante, majorée par A_{n_0} et $\mu(A_{n_0}) < +\infty$ donc

$$\mu(\cup_n B_n) = \lim_n \mu(B_n) = \lim_n (\mu(A_{n_0}) - \mu(A_n)) = \mu(A_{n_0}) - \lim_n \mu(A_n).$$

D'autre part, on a $\cup_n B_n = \cup_n (A_{n_0} \cap A_n^c) = A_{n_0} \cap (\cup_n A_n^c) = A_{n_0} \cap (\cap_n A_n)^c = A_{n_0} \setminus (\cap_n A_n)$, donc on a aussi $\mu(\cup_n B_n) = \mu(A_{n_0}) - \mu(\cap_n A_n)$ ce qui permet de conclure pour la première égalité. La croissance de μ nous donne la seconde égalité : $(\mu(A_n))_n$ est une suite décroissante.

iv) On pose $B_0 := A_0$ et $B_n := A_n \setminus \cup_{k=0}^{n-1} B_k$ pour $n \geq 1$. Les B_n sont 2 à 2 disjoints, $A_n = \cup_{k=0}^n B_k$ et $B_n \subset A_n$. On a

$$\begin{aligned} \mu(\cup_n B_n) &= \sum_n \mu(B_n) && \text{car les } B_n \text{ sont 2 à 2 disjoints} \\ &\leq \sum_n \mu(A_n) && \text{car } B_n \subset A_n. \end{aligned}$$

D'autre part, on a $\cup_n A_n = \cup_n B_n$ car $B_n \subset A_n \subset \cup_n A_n$ et $A_n = \cup_{k=0}^n B_k \subset \cup_n B_n$. ■

Il est important de noter que pour définir la continuité à droite, nous avons imposé qu'il existe un rang à partir duquel les mesures des éléments de la suite sont finies. En effet, prenons l'exemple de la suite des $A_n := [n, +\infty[$. Cette suite est décroissante de limite l'ensemble vide. Chaque élément est de mesure infinie or l'ensemble vide est de mesure nulle. Nous n'avons donc pas l'égalité entre la mesure de la limite et la limite des mesures.

Exercice 2.3.4 (solution p. 72) : Soit p une probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pose

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} &\longrightarrow [0, 1] \\ t &\longmapsto F(t) := p(]-\infty, t]) \end{aligned}$$

- 1) Montrer que F est croissante et continue à droite.
- 2) Calculer (si existence) $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} F(t)$.

Remarque 2.3.5. La fonction F n'est pas nécessairement continue à gauche, bien que p le soit. D'après-vous, pourquoi ?

2.3.3 La mesure de Lebesgue

Proposition 2.3.6

La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est la tribu engendrée par la classe des pavés ouverts⁵, mais est aussi la tribu engendrée par la classe des pavés ouverts à extrémités dans \mathbb{Q} ou dans toute autre partie dense de \mathbb{R} .

Théorème 2.3.7 – Mesure de Lebesgue (ou mesure de Borel-Lebesgue)

Il existe une unique mesure notée λ_d sur les boréliens de \mathbb{R}^d telle que la mesure de tout pavé $\prod_{i=1}^d]a_i, b_i[$ soit donnée par :

$$\lambda_d \left(\prod_{i=1}^d]a_i, b_i[\right) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i).$$

Elle est appelée **mesure de (Borel-)Lebesgue** et parfois notée λ .

► Voir par exemple [1, Théorème 2.34], [4, Chapitre IV], [3, Chapitre 2]. ■

Voici une liste de propriétés de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$:

- $\forall x \in \mathbb{R} : \lambda(\{x\}) = 0$;
- $\forall a < b \in \mathbb{R} : \lambda([a, b]) = \lambda([a, b]) = \lambda([a, b]) = \lambda([a, b]) = b - a$;
- $\forall a < b \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R} : \lambda([a + x, b + x]) = \lambda([a, b])$;
- La mesure de Lebesgue d'un ensemble (au plus) dénombrable est nulle : $\lambda(\mathbb{N}) = \lambda(\mathbb{Z}) = \lambda(\mathbb{Q}) = 0$. Attention, l'ensemble triadique de Cantor est infini, non dénombrable, mais de mesure nulle. Autrement dit, tous les ensembles négligeables ne sont pas nécessairement dénombrables.

Remarque 2.3.6. En toute rigueur, la mesure de Lebesgue est la complétée (voir Théorème 5.1.4) de la mesure de Borel-Lebesgue (définie dans le Théorème 2.3.7). La mesure de Lebesgue est définie sur la complétée de la tribu de Borel sur \mathbb{R}^d . Cette tribu complétée est appelée la tribu de Lebesgue et elle est strictement plus grande que la tribu de Borel. En effet, il existe des ensembles mesurables pour la tribu complétée qui ne sont pas des boréliens. Cependant, la tribu de Lebesgue ne contient pas toutes les parties de \mathbb{R}^d . En effet, il existe des parties de \mathbb{R}^d non mesurables, c'est-à-dire à qui on ne peut pas attribuer de valeur de manière consistante avec la définition de la mesure.

Exercice 2.3.5 (solution p. 73) : On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ avec λ la mesure de Lebesgue. Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

1. λ est σ -finie.
2. $\forall K \subset \mathbb{R}$ compact, $\lambda(K) < +\infty$.
3. Soit O un ouvert de \mathbb{R} . $\lambda(O) < +\infty \Rightarrow O$ borné.

5. pavé = produit d'intervalles ; pavé ouvert = produit d'intervalles ouverts.

Intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives

3.1	Intégrale des fonctions étagées positives	17
3.1.1	Fonctions étagées et intégrale	17
3.1.2	Propriétés de l'intégrale	19
3.2	Intégrale des fonctions mesurables positives	20
3.2.1	Approximation des fonctions mesurables positives	20
3.2.2	Définition de l'intégrale et propriétés élémentaires	21
3.2.3	Théorème de convergence monotone	23
3.2.4	Linéarité positive	25
3.2.5	Interversion intégrale et somme	26
3.2.6	Égalité des intégrales	27

3.1 Intégrale des fonctions étagées positives

Dans ce chapitre et les suivants nous parlerons la plupart du temps de fonctions au lieu d'applications pour les applications à valeurs numériques, c'est-à-dire à valeurs dans \mathbb{R} ou $\overline{\mathbb{R}}$.

3.1.1 Fonctions étagées et intégrale

On note $\mathcal{M}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ l'ensemble des applications mesurables de (E_1, \mathcal{A}_1) dans (E_2, \mathcal{A}_2) .

Définition 3.1.1 – Fonction étagée

Une fonction $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est dite *étagée* si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Alors, il existe une partition finie $(A_i)_{i \in I}$ de E , \mathcal{A} -mesurable (au sens où $A_i \in \mathcal{A}$ pour tout $i \in I$), et des nombres réels $(\alpha_i)_{i \in I}$ t.q. :

$$f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}.$$

On note $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ (ou \mathcal{E}) l'ensemble des fonctions étagées de $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On note $\mathcal{E}_+(\mathcal{A})$ (ou \mathcal{E}_+) l'ensemble des fonctions positives de $\mathcal{E}(\mathcal{A})$.

Remarque 3.1.1. Il existe une représentation canonique de $f \in \mathcal{E}$ sous la forme $f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ où les α_i sont 2 à 2 distincts et où $A_i = f^{-1}(\{\alpha_i\}) =: \{f = \alpha_i\}$.

Exemple 3.1.1. Une fonction indicatrice est étagée car $\mathbb{1}_A = 1 \cdot \mathbb{1}_A + 0 \cdot \mathbb{1}_{A^c}$. \square

Proposition 3.1.2

$\forall f, g$ dans \mathcal{E} et $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda f + g \in \mathcal{E}$, autrement dit \mathcal{E} est un espace vectoriel.

De même fg , $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont dans \mathcal{E} .

► Sous forme canonique, on écrit $f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ et $g = \sum_j \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$. Alors

$$\bigcup_{i,j} (A_i \cap B_j) = \left(\bigcup_i A_i \right) \cap \left(\bigcup_j B_j \right) = E \cap E = E,$$

donc $(A_i \cap B_j)_{i,j}$ est une partition finie de E et

$$\lambda f + g = \sum_{i,j} (\lambda \alpha_i + \beta_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}, \quad fg = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \mathbb{1}_{A_i \cap B_j} \dots$$

■

Définition 3.1.3 – Intégrale des fonctions étagées positives

On appelle **intégrale** (au sens de Lebesgue) d'une fonction étagée positive $f \in \mathcal{E}_+$ par rapport à la mesure μ sur l'espace mesurable (E, \mathcal{A}) , l'élément :

$$\int_E f \, d\mu := \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mu(f^{-1}(\{\alpha\})) \in \bar{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty],$$

avec la convention $0 \times \infty = 0$.

Si $\int_E f \, d\mu < +\infty$, on dit que f est **intégrable**.

Remarque 3.1.2. L'intégrale ne dépend pas de la représentation. Si $f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ alors

$$\int_E f \, d\mu = \int_E \left(\sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \right) d\mu = \sum_i \alpha_i \mu(A_i).$$

Exemple 3.1.2. Pour $A \in \mathcal{A}$ on a $\int_E \mathbb{1}_A \, d\mu = \mu(A)$ et pour $a \in \mathbb{R}_+$, $\int_E a \, d\mu = a\mu(E)$. \square

Exercice 3.1.1 (solution p. 74) : Soit $f \in \mathcal{E}_+$. Soit δ_0 la mesure de Dirac en 0 définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par :

$$\begin{aligned} \delta_0 : \mathcal{B}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ \\ A &\longmapsto \delta_0(A) := \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Déterminer $\int_{\mathbb{R}} f \, d\delta_0$.

3.1.2 Propriétés de l'intégrale

On pourra utiliser les notations

$$\int_{(E,A)} f \, d\mu, \quad \int_E f \, d\mu, \quad \int_E f(x) \, d\mu(x), \quad \int_E f(x) \mu(dx) \quad \text{ou} \quad \int f \, d\mu.$$

Proposition 3.1.4

L'application $f \mapsto \int_E f \, d\mu$ du cône¹ \mathcal{E}_+ vérifie :

$$i) \quad \forall f, g \in \mathcal{E}_+ \quad : \quad \int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu; \quad (\text{additivité})$$

$$ii) \quad \forall f \in \mathcal{E}_+, \forall a \geq 0 \quad : \quad \int (af) \, d\mu = a \int f \, d\mu; \quad (\text{homogénéité positive})$$

$$iii) \quad \forall f, g \in \mathcal{E}_+ \quad : \quad f \leq g \Rightarrow \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu. \quad (\text{croissance})$$

► i) Sous forme canonique, si $f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ et $g = \sum_j \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$ alors $E = \cup_i A_i = \cup_j B_j$ et donc $(A_i \cap B_j)_{i,j}$ est une partition finie de E . Par conséquent :

$$\begin{aligned} \int_E (f+g) \, d\mu &= \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i,j} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i,j} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_i \alpha_i \sum_j \mu(A_i \cap B_j) + \sum_j \beta_j \sum_i \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_i \alpha_i \mu(A_i \cap (\cup_j B_j)) + \sum_j \beta_j \mu((\cup_i A_i) \cap B_j) \\ &= \sum_i \alpha_i \mu(A_i) + \sum_j \beta_j \mu(B_j) = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu. \end{aligned}$$

ii) Sous forme canonique, si $f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ alors :

$$\begin{aligned} \int_E (af) \, d\mu &= \int_E \left(a \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \right) \, d\mu = \int_E \left(\sum_i a \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \right) \, d\mu \\ &= \sum_i a \alpha_i \mu(A_i) = a \sum_i \alpha_i \mu(A_i) = a \int_E f \, d\mu. \end{aligned}$$

iii) En écrivant $g = f + (g - f)$ avec $g - f \in \mathcal{E}_+$, on a par additivité :

$$\int_E g \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E (g - f) \, d\mu \Rightarrow \int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu.$$

■

1. K est un cône si $\mathbb{R}_+^* K \subset K$, pointé si $0 \in K$ et épointé si $0 \notin K$.

3.2 Intégrale des fonctions mesurables positives

3.2.1 Approximation des fonctions mesurables positives

On note $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ (ou \mathcal{M}) l'ensemble $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$; On note $\mathcal{M}_+(\mathcal{A})$ (ou \mathcal{M}_+) l'ensemble de fonctions positives de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$;

Théorème 3.2.1 – Lemme fondamental d'approximation

Toute fonction de \mathcal{M}_+ est limite simple d'une suite croissante de fonctions de \mathcal{E}_+ .

► Soit $f \in \mathcal{M}_+$. On définit

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} < f \leq \frac{k+1}{2^n}\}} + n \mathbb{1}_{\{n < f\}}.$$

Alors $\forall n$, f_n est une fonction étagée positive, i.e. $f_n \in \mathcal{E}_+$.

De plus, $\forall x \in E$ la suite $(f_n(x))$ est bien croissante et converge vers $f(x)$. En effet, si $f(x) = +\infty$, alors $f_n(x) = n \rightarrow +\infty$; sinon $\exists n_0$ t.q. $f(x) \leq n_0$, ce qui implique que $\forall n \geq n_0$, $|f_n(x) - f(x)| \leq 2^{-n} \rightarrow 0$. ■

Exemple 3.2.1. On définit

$$f(x) := 1 - (1 - x)^2$$

et on donne les 4 premiers éléments (sans compter $n = 0$) de la suite (f_n) définie dans la preuve du théorème précédent dans la Figure 3.1. □

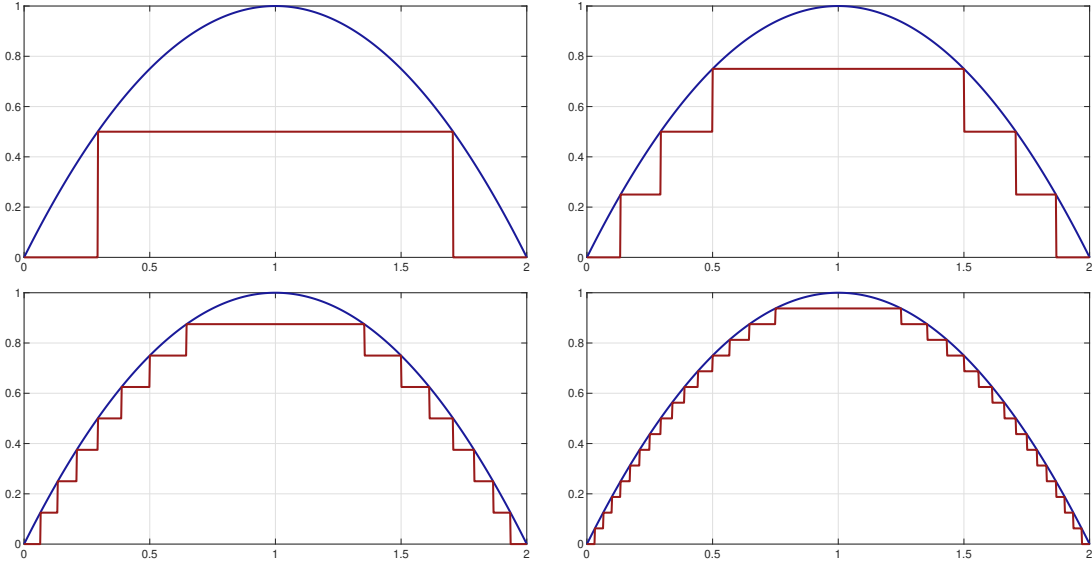


FIGURE 3.1 – Approximation de $f(x) = 1 - (1 - x)^2$ par la suite (f_n) de fonctions étagées croissante données dans la preuve du Théorème 3.2.1. De gauche à droite et de haut en bas, on a $n = 1, 2, 3$ et 4.

3.2.2 Définition de l'intégrale et propriétés élémentaires

Définition 3.2.2 – Intégrale des fonctions mesurables positives

On appelle *intégrale* (au sens de Lebesgue) d'une fonction mesurable positive $f \in \mathcal{M}_+$ par rapport à la mesure μ sur l'espace mesurable (E, \mathcal{A}) , l'élément :

$$\int_{(E, \mathcal{A})} f \, d\mu \quad \text{ou} \quad \int_E f \, d\mu := \sup \left\{ \int_E \varphi \, d\mu \mid \varphi \in \mathcal{E}_+ \text{ et } \varphi \leq f \right\} \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty].$$

Si $\int_E f \, d\mu < +\infty$, on dit que f est *intégrable*.

Proposition 3.2.3 – Intégration sur un ensemble de mesure nulle

Si $\mu(E) = 0$ alors $\int_E f \, d\mu = 0$.

► Soit $\varphi \in \mathcal{E}_+$ sous forme canonique $\varphi = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$. Alors, par croissance de la mesure, $\forall i : \mu(A_i) = 0$ puisque $A_i \subset E$ et $\mu(E) = 0$. Ainsi, $\int_E \varphi \, d\mu = \sum_i \alpha_i \mu(A_i) = 0$. On peut alors conclure. ■

Proposition 3.2.4 – Restriction de l'intégrale à un ensemble mesurable

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$ intégrable sur (E, \mathcal{A}) par rapport à μ .

Soit $A \in \mathcal{A}$ un ensemble mesurable. Alors²

$$\int_{(E, \mathcal{A})} f \mathbb{1}_A \, d\mu = \int_{(A, \text{tr}(\mathcal{A}))} f|_A \, d\mu.$$

► Soit $\varphi \in \mathcal{E}_+(\mathcal{A})$ sous forme canonique $\varphi = \sum \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$. Alors $\varphi \mathbb{1}_A = \sum \alpha_i \mathbb{1}_{A_i \cap A}$ nous donne une représentation de la restriction de φ à A , notée $\varphi|_A$. La fonction étagée $\varphi|_A$ est mesurable sur $(A, \text{tr}(\mathcal{A}))$, i.e. $\varphi|_A \in \mathcal{E}_+(\text{tr}(\mathcal{A}))$. Ainsi,

$$\int_{(E, \mathcal{A})} \varphi \mathbb{1}_A \, d\mu = \sum \alpha_i \mu(A_i \cap A) = \int_{(A, \text{tr}(\mathcal{A}))} \varphi|_A \, d\mu.$$

Il vient ensuite par la définition de l'intégrale dans $\mathcal{M}_+(\mathcal{A})$:

$$\begin{aligned} \int_{(E, \mathcal{A})} f \mathbb{1}_A \, d\mu &= \sup \left\{ \int_E \varphi \, d\mu \mid \varphi \in \mathcal{E}_+(\mathcal{A}) \text{ et } \varphi \leq f \mathbb{1}_A \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_E \varphi \mathbb{1}_A \, d\mu \mid \varphi \in \mathcal{E}_+(\mathcal{A}) \text{ et } \varphi \leq f \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_A \varphi \, d\mu \mid \varphi \in \mathcal{E}_+(\text{tr}(\mathcal{A})) \text{ et } \varphi \leq f|_A \right\} = \int_{(A, \text{tr}(\mathcal{A}))} f|_A \, d\mu. \end{aligned}$$

■

2. Voir Proposition 2.1.11 pour la définition de la tribu trace $\text{tr}(\mathcal{A})$.

Remarque 3.2.1. On utilisera souvent la notation $\int_A f \, d\mu$ à la place de $\int_E f \mathbf{1}_A \, d\mu$, ce qui est justifié par la proposition précédente.

Corollaire 3.2.5

Si $\mu(A) = 0$ alors $\int_E f \mathbf{1}_A \, d\mu = \int_A f \, d\mu = 0$.

Proposition 3.2.6 – Croissance de l'intégrale

Soient f, g dans \mathcal{M}_+ telles que $f \leq g$, alors $\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu$.

► Si $\varphi \in \mathcal{E}_+$ est telle que $\varphi \leq f$ alors $\varphi \leq g$. Ainsi

$$\{\varphi \in \mathcal{E}_+ \mid \varphi \leq f\} \subset \{\varphi \in \mathcal{E}_+ \mid \varphi \leq g\}$$

et donc

$$\sup \left\{ \int_E \varphi \, d\mu \mid \varphi \in \mathcal{E}_+ \text{ et } \varphi \leq f \right\} \leq \sup \left\{ \int_E \varphi \, d\mu \mid \varphi \in \mathcal{E}_+ \text{ et } \varphi \leq g \right\}$$

ce qui est l'inégalité recherchée. ■

Corollaire 3.2.7 – Théoreme de comparaison

Soient f, g dans \mathcal{M}_+ . Si $f \leq g$ et si g est intégrable, alors f est intégrable.

Corollaire 3.2.8

Si μ est finie alors pour toute $f \in \mathcal{M}_+$, si f est bornée alors elle est intégrable.

► $\exists a \geq 0$ t.q. $f \leq a \mathbf{1}_E$ et $\int_E a \mathbf{1}_E \, d\mu = a\mu(E) < +\infty$. ■

Corollaire 3.2.9

Pour toute $f \in \mathcal{M}_+$: $\int_E f \, d\mu < +\infty \Rightarrow \mu(\{f = +\infty\}) = 0$.

► Soit $A := \{f = +\infty\}$. Par contraposée, si $\mu(A) > 0$ alors $\int_E f \, d\mu \geq \int_E f \mathbf{1}_A \, d\mu = +\infty \times \mu(A) = +\infty$. ■

Corollaire 3.2.10 – Inégalité de Markov

Pour toute $f \in \mathcal{M}_+$ et pour tout $a > 0$,

$$\mu(\{f \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int_E f \, d\mu.$$

Exercice 3.2.1 (solution p. 74) : Montrer l'inégalité de Markov.

3.2.3 Théorème de convergence monotone

Théorème 3.2.11 – de Beppo-Levi, ou de convergence monotone

Si (f_n) est une suite croissante de $\mathcal{M}_+(\mathcal{A})$, alors $f := \lim_n f_n \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A})$ et

$$\int_E f \, d\mu = \lim_n \int_E f_n \, d\mu.$$

► Montrons la première inégalité suivante : $\lim_n \int_E f_n \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu$. Puisque la suite (f_n) est croissante, sa limite est bien définie (les fonctions sont à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$) et mesurable par stabilité de la propriété de mesurabilité par passage à la limite : $f := \lim_n f_n = \sup_n f_n \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A})$. Puisque $\forall n: f_n \leq f$, par croissance de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+(\mathcal{A})$, $\int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$, et donc par passage à la limite $\lim_n \int f_n \, d\mu = \sup_n \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$.

• Montrons la seconde inégalité : $\int_E f \, d\mu \leq \lim_n \int_E f_n \, d\mu$. Puisque par définition $\int f \, d\mu = \sup \{ \int \varphi \, d\mu \mid \varphi \in \mathcal{E}_+(\mathcal{A}) \text{ et } \varphi \leq f \}$, il suffit de montrer :

$$\forall \varphi \in \mathcal{E}_+(\mathcal{A}) \text{ t.q. } \varphi \leq f : \int \varphi \, d\mu \leq \lim_n \int f_n \, d\mu.$$

Supposons que l'on ait montré :

$$(H) \quad \forall \varphi \in \mathcal{E}_+(\mathcal{A}) \text{ t.q. } \varphi \leq f \text{ et } \forall a \in [0, 1[: a \int \varphi \, d\mu \leq \lim_n \int f_n \, d\mu.$$

Alors, puisque a est arbitrairement proche de 1, on peut conclure en passant à la limite. Montrons donc l'hypothèse (H). Soit $\varphi \in \mathcal{E}_+(\mathcal{A})$ t.q. $\varphi \leq f$ et soit $a \in [0, 1[$. On pose $E_n := \{a\varphi \leq f_n\}$. Alors, (E_n) est une suite croissante (car (f_n) croissante) dans \mathcal{A} (car f_n et φ mesurables) t.q.

$$\lim E_n = \cup E_n = E.$$

En effet, si $x \in E$ est t.q. $f(x) = 0$, alors $x \in E_n$ pour tout n car $\varphi(x) = f_n(x) = 0$. Sinon, si $f(x) > 0$, alors

$$a\varphi(x) < f(x)$$

car φ ne prend que des valeurs finies. Il existe donc $N_x \in \mathbb{N}$ t.q. $x \in E_n$ pour tout $n \geq N_x$. Passons à la deuxième étape pour montrer (H). Sous forme canonique on écrit $\varphi = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$. Alors,

$$\int a\varphi \mathbb{1}_{E_n} \, d\mu = a \int \left(\sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i \cap E_n} \right) \, d\mu = a \sum_{i \in I} \alpha_i \mu(A_i \cap E_n).$$

Par continuité à gauche de la mesure μ , $\lim_n \mu(A_i \cap E_n) = \mu(A_i)$ pour tout $i \in I$, donc en passant à la limite, I étant fini, on a

$$\lim \int a\varphi \mathbb{1}_{E_n} \, d\mu = a \sum_{i \in I} \alpha_i \mu(A_i) = a \int \varphi \, d\mu.$$

D'autre part, puisque $E_n = \{a\varphi \leq f_n\}$, alors $a\varphi \mathbb{1}_{E_n} \leq f_n$ et donc

$$\int a\varphi \mathbb{1}_{E_n} \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu \leq \lim_n \int f_n \, d\mu \quad (\text{on rappelle que } (f_n) \text{ est croissante}),$$

et (H) est démontrée en passant à la limite et en utilisant l'égalité précédente. ■

Corollaire 3.2.12

L'intégrale $\int_E f \, d\mu$ est la limite des intégrales $\int_E f_n \, d\mu$, où (f_n) est une suite arbitraire de fonctions étagées positives croissant vers f .

Remarque 3.2.2. On aurait pu définir $\int_E f \, d\mu$ comme la limite (et non la borne sup.) des intégrales de toute suite de fonctions étagées positives croissant vers f , mais alors il aurait fallu montrer que cette limite ne dépend pas de la suite de fonctions choisie.

Exemple 3.2.2 (Mesure de comptage). L'intégration par rapport à la mesure de comptage $m := \text{card}$ sur \mathbb{N} est tout simplement la sommation de série. En effet, $u \in \mathcal{M}_+(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ est tout simplement une suite (u_n) de réels positifs, *i.e.* $u(n) = u_n$, et pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'application (qui est une suite)

$$\varphi_N := u \mathbb{1}_{\{n \leq N\}} = \sum_{n=0}^N u_n \mathbb{1}_{\{n\}}$$

est une fonction étagée positive qui converge en croissant vers u ;

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{N \rightarrow +\infty} \varphi_N(n) = u(n) = u_n \quad \text{et} \quad \varphi_N(n) \leq \varphi_{N+1}(n).$$

Par le Théorème 3.2.11 de Beppo-Levi (ou de convergence monotone), puisque (φ_N) est une suite croissante de \mathcal{M}_+ qui converge vers u , alors

$$\int_{\mathbb{N}} u \, dm = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{N}} \varphi_N \, dm = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n m(\{n\}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n. \quad \square$$

Exercice 3.2.2 (solution p. 74) : Soit $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Soit δ_0 la mesure de Dirac en 0 définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Déterminer $\int_{\mathbb{R}} f \, d\delta_0$.

Proposition 3.2.13 – Lemme de Fatou

Pour toute suite (f_n) de $\mathcal{M}_+(\mathcal{A})$, nous avons $\liminf_n f_n \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A})$ et

$$\int_E \liminf_n f_n \, d\mu \leq \liminf_n \int_E f_n \, d\mu.$$

► Soient $g_n := \inf_{k \geq n} f_k$ et $g := \liminf_n f_n = \lim_n g_n$. Comme g est la limite simple de la suite croissante (g_n) dans \mathcal{M}_+ , d'après le théorème de Beppo-Levi, on a

$$\int g \, d\mu = \lim_n \int g_n \, d\mu.$$

D'autre part, $g_n \leq f_n$ donc par croissance de l'intégrale, $\int g_n \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu$ et donc

$$\liminf_n \int g_n \, d\mu \leq \liminf_n \int f_n \, d\mu.$$

D'après ce qui précède, $\liminf_n \int g_n \, d\mu = \lim_n \int g_n \, d\mu = \int g \, d\mu$, ce qui permet de conclure. ■

Remarque 3.2.3. Dans le lemme de Fatou, la suite n'est pas supposée croissante. Ce lemme nous servira à démontrer le théorème central de la théorie de l'intégration : le Théorème 5.1.6 de convergence dominée.

Remarque 3.2.4. Pour $f_n := \mathbb{1}_{A_n}$ où $A_n \in \mathcal{A}$, le lemme de Fatou se traduit par l'inégalité

$$\mu(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mu(A_n).$$

Remarque 3.2.5. Pour les plus curieux, vous trouverez trois exemples où l'inégalité du lemme de Fatou est stricte ici : [4, Chapitre III-1.2].

Exercice 3.2.3 (solution p. 74) : On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*), \lambda)$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \bar{\mathbb{R}} \\ x &\longmapsto f_n(x) := \frac{n e^{-x}}{\sqrt{1+n^2 x^2}} \end{aligned}$$

mesurable de $(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ dans $(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$. Utiliser le lemme de Fatou pour montrer :

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} f_n d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Indication : on admettra que $\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{e^{-x}}{x} d\lambda = +\infty$.

3.2.4 Linéarité positive

Proposition 3.2.14

L'application $f \mapsto \int_E f d\mu$ du cône \mathcal{M}_+ vérifie :

$$i) \forall f, g \in \mathcal{M}_+ : \int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu ; \quad (\text{additivité})$$

$$ii) \forall f \in \mathcal{M}_+, \forall a \geq 0 : \int (af) d\mu = a \int f d\mu ; \quad (\text{homogénéité positive})$$

$$iii) \forall f, g \in \mathcal{M}_+ : f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu. \quad (\text{croissance})$$

Remarque 3.2.6. Comparer à la Proposition 3.1.4.

Remarque 3.2.7. Nous avons déjà démontré la croissance de l'intégrale.

► Puisque $f \in \mathcal{M}_+$, d'après le lemme d'approximation (Théorème 3.2.1), il existe une suite (f_n) dans \mathcal{E}_+ croissante et convergeant simplement vers f .

(i) Par la propriété de l'homogénéité positive sur \mathcal{E}_+ , on a : $\int a f_n d\mu = a \int f_n d\mu$.

(ii) Par le théorème de Beppo-Levi, on a $\lim_n \int a f_n d\mu = \int \lim_n (a f_n) d\mu = \int a f d\mu$ mais aussi $\lim_n a \int f_n d\mu = a \lim_n \int f_n d\mu = a \int \lim_n (f_n) d\mu = a \int f d\mu$.

Ainsi (i) + (ii) nous donne $\int a f d\mu = a \int f d\mu$. L'additivité se montre pareil. ■

3.2.5 Intersion intégrale et somme

Proposition 3.2.15 – Intersion intégrale et somme

Pour toute suite (f_n) de \mathcal{M}_+ , nous avons $\sum_n f_n \in \mathcal{M}_+$ et surtout

$$\int_E \left(\sum_n f_n \right) d\mu = \sum_n \int_E f_n d\mu.$$

► On pose $g_n := \sum_{k=0}^n f_k$. Puisque (g_n) est une suite croissante dans \mathcal{M}_+ , d'après le théorème de Beppo-Levi, on a $\lim_n g_n \in \mathcal{M}_+$ et $\int \lim_n g_n d\mu = \lim_n \int g_n d\mu$. Mais

$$\int \lim_n g_n d\mu = \int \lim_n \left(\sum_{k=0}^n f_k \right) d\mu = \int \left(\sum_n f_n \right) d\mu$$

et

$$\begin{aligned} \lim_n \int g_n d\mu &= \lim_n \int \left(\sum_{k=0}^n f_k \right) d\mu = \lim_n \sum_{k=0}^n \int f_k d\mu \quad (\text{par additivité}) \\ &= \sum_n \int f_n d\mu. \end{aligned}$$

■

Corollaire 3.2.16 – Mesure de densité

Pour toute $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A})$, l'application

$$\begin{aligned} \nu: \mathcal{A} &\longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ \\ A &\longmapsto \nu(A) := \int_A f d\mu \end{aligned}$$

est une mesure sur (E, \mathcal{A}) appelée mesure de **densité** f par rapport à μ . On pourra utiliser la notation $\nu = f\mu$.

Exercice 3.2.4 (solution p. 75) :

1. Montrer que l'application ν définie dans le Corollaire 3.2.16 est bien une mesure.
2. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints, de réunion $A := \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. En déduire :

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

Exercice 3.2.5 (solution p. 75) : Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathcal{A} deux à deux d'intersection de mesure nulle et de réunion $A := \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Soit f mesurable positive de (E, \mathcal{A}) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

Exercice 3.2.6 (solution p. 76) : Montrer que la mesure de Dirac (en 0) n'est pas une mesure à densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

3.2.6 Égalité des intégrales

Proposition 3.2.17

Pour toute $f \in \mathcal{M}_+ : \int f \, d\mu = 0 \iff \mu(\{f \neq 0\}) = 0$.

► Montrons le sens \Rightarrow . On pose $A_n := \{f \geq 1/n\}$. Par l'inégalité de Markov (Corollaire 3.2.10), par positivité de la mesure et par hypothèse,

$$0 \leq \mu(A_n) \leq n \int_E f \, d\mu = 0.$$

Or $A := \{f \neq 0\} = \lim A_n$, donc par continuité à gauche (Proposition 2.3.5) de μ , $\mu(A) = \lim \mu(A_n) = 0$.

• Montrons le sens \Leftarrow . Par additivité de l'intégrale sur \mathcal{M}_+ (Proposition 3.2.14), puisque $f = f\mathbb{1}_A + f\mathbb{1}_{A^c}$, on a

$$\int_E f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_{A^c} f \, d\mu$$

mais $\int_{A^c} f \, d\mu = 0$ car $f\mathbb{1}_{A^c} = 0$ sur E , et donc puisque $\mu(A) = 0$ alors $\int_E f \, d\mu = \int_A f \, d\mu = 0$, cf. Corollaire 3.2.5. ■

Proposition 3.2.18

Pour toutes $f, g \in \mathcal{M}_+ : \mu(\{f \neq g\}) = 0 \implies \int f \, d\mu = \int g \, d\mu$.

► On pose

$$h := \begin{cases} \max(f, g) - \min(f, g) & \text{sur } \{\min(f, g) < +\infty\} \\ 0 & \text{sur } \{f = g = +\infty\}. \end{cases}$$

Comme $\{f = g\} = \{h = 0\}$, par complémentaire $\{h \neq 0\} = \{f \neq g\}$, donc par hypothèse $\mu(\{h \neq 0\}) = 0$ et par la proposition précédente $\int_E h \, d\mu = 0$. Puisque $\max(f, g) = \min(f, g) + h$, par additivité on a

$$\int_E \max(f, g) \, d\mu = \int_E \min(f, g) \, d\mu + \int_E h \, d\mu = \int_E \min(f, g) \, d\mu.$$

Mais $\min(f, g) \leq f, g \leq \max(f, g)$, donc par croissance de l'intégrale sur \mathcal{M}_+ (Proposition 3.2.14) :

$$\int_E \max(f, g) \, d\mu = \int_E \min(f, g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu. \quad \blacksquare$$

Les espaces de Lebesgue

4.1	Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque	29
4.1.1	Définitions	29
4.1.2	Linéarité	30
4.2	Ensemble négligeable et propriété vraie presque partout	31
4.2.1	Définitions	31
4.2.2	Intégrale et fonctions égales presque partout	32
4.3	Introduction à l'espace L^1	34
4.3.1	L'espace \mathcal{L}^1 est un espace vectoriel semi-normé	34
4.3.2	L'espace L^1 est un espace vectoriel normé	35
4.4	Introduction aux espaces L^p	36
4.4.1	Définitions	36
4.4.2	L'espace L^p , $0 < p \leq +\infty$, est un espace vectoriel	37
4.4.3	L'espace L^p , $1 \leq p \leq +\infty$, est un espace vectoriel normé	38

4.1 Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque

4.1.1 Définitions

Remarque 4.1.1. On considère des fonctions mesurables de signe quelconque à valeurs dans \mathbb{R} pour éviter la forme indéterminée $\infty - \infty$. Nous avons déjà noté \mathcal{E} l'ensemble des fonctions étagées de $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et \mathcal{M} celui des fonctions mesurables de (E, \mathcal{A}) à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, i.e. $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, donc nous n'introduisons pas de nouvelles notations pour $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Remarque 4.1.2. Soient (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Nous pouvons toujours écrire f sous la forme $f = f^+ - f^-$ avec

$$f^+ := f \mathbf{1}_{f>0} \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \quad \text{et} \quad f^- := -f \mathbf{1}_{f<0} \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

Définition 4.1.1 – Intégrale d'une fonction de $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

Une fonction $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ **admet une intégrale** si f^+ ou f^- est intégrable. On définit alors **l'intégrale** de f sur (E, \mathcal{A}) par rapport à la mesure μ par

$$\int_E f \, d\mu := \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu \in \mathbb{R}.$$

Si f^+ et f^- sont intégrables alors on dit que f est **intégrable**.

Définition 4.1.2

On notera $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ ou $\mathcal{L}^1(\mu)$ ou \mathcal{L}^1 , suivant le contexte, l'ensemble des fonctions intégrables.

Remarque 4.1.3. Bien noter \mathcal{L}^1 car la notation L^1 fera référence à un autre espace.

Proposition 4.1.3

Soit $f \in \mathcal{L}^1$. Alors

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f| \, d\mu < +\infty.$$

Ainsi, $f \in \mathcal{L}^1 \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}^1$.

► Soit $f \in \mathcal{L}^1$. Par définition, f^+ et f^- sont intégrables et puisque $|f| = f^+ + f^-$, on a :

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \leq \int f^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu = \int |f| \, d\mu < +\infty,$$

par additivité. De même, on démontre que $-\int f \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu$. ■

4.1.2 Linéarité**Théorème 4.1.4 – Linéarité de l'intégrale**

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

L'espace $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace vectoriel et l'application

$$\begin{aligned} T: \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto T(f) := \int_E f \, d\mu \end{aligned}$$

est une forme linéaire croissante.

► Montrons que $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace vectoriel. Soient f, g dans \mathcal{L}^1 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque $|\lambda f + g| \leq |\lambda||f| + |g|$ et puisque par additivité et homogénéité positive de l'intégrale sur \mathcal{M}_+

$$\int (|\lambda||f| + |g|) \, d\mu = |\lambda| \int |f| \, d\mu + \int |g| \, d\mu,$$

alors par le théorème de comparaison (Corollaire 3.2.7), $|\lambda f + g|$ est intégrable, donc d'après la proposition précédente, $\lambda f + g \in \mathcal{L}^1$.

- Montrons que $\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$ pour f, g dans \mathcal{L}^1 . Par définition

$$f + g = (f + g)^+ - (f + g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-.$$

Ainsi $(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+ \geq 0$ et donc par additivité de l'intégrale sur \mathcal{M}_+ on a

$$\int (f + g)^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu + \int g^- \, d\mu = \int (f + g)^- \, d\mu + \int f^+ \, d\mu + \int g^+ \, d\mu$$

ce qui donne puisque toutes ces quantités sont finies

$$\int (f + g)^+ d\mu - \int (f + g)^- d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu$$

autrement dit

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

- Montrons que $\int \lambda f d\mu = \lambda \int f d\mu$ pour f dans \mathcal{L}^1 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Remarquons que $\lambda f = \lambda(f^+ - f^-) = \lambda f^+ - \lambda f^-$ mais surtout que

$$\begin{aligned} \lambda > 0 &\Rightarrow (\lambda f)^+ = \lambda f^+ \quad \text{et} \quad (\lambda f)^- = \lambda f^-, \\ \lambda < 0 &\Rightarrow (\lambda f)^+ = -\lambda f^- \quad \text{et} \quad (\lambda f)^- = -\lambda f^+. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'homogénéité positive de l'intégrale sur \mathcal{M}_+ , on a :

$$\begin{aligned} \lambda > 0 &\Rightarrow \int \lambda f d\mu = \int \lambda f^+ d\mu - \int \lambda f^- d\mu = \lambda \int f^+ d\mu - \lambda \int f^- d\mu, \\ \lambda < 0 &\Rightarrow \int \lambda f d\mu = \int -\lambda f^- d\mu - \int -\lambda f^+ d\mu = -\lambda \int f^- d\mu - (-\lambda) \int f^+ d\mu. \end{aligned}$$

et donc dans les deux cas $\int \lambda f d\mu = \lambda \int f d\mu$. Les deux points précédents démontrent la linéarité de l'application T . Ainsi T est bien une forme linéaire, car définie sur un espace vectoriel et à valeurs dans \mathbb{R} .

- Montrons que $\int f d\mu \leq \int g d\mu$ pour f, g dans \mathcal{L}^1 si $f \leq g$, *i.e.* montrons que T est croissante. En fait, T est une forme linéaire positive donc croissante. En effet, posons $h := g - f$ avec $f \leq g$. Alors $h = h^+ \geq 0$ et puisque alors $h \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ il vient que $T(h) \geq 0$ (T est donc positive). Mais $0 \leq T(h) = T(g) - T(f)$ par linéarité de T et donc $T(g) \geq T(f)$. ■

4.2 Ensemble négligeable et propriété vraie presque partout

4.2.1 Définitions

Définition 4.2.1 – Ensemble négligeable

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

On dit que $A \in \mathcal{A}$ est un **ensemble négligeable** si $\mu(A) = 0$.

Remarque 4.2.1. Soit $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Au lieu d'écrire $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$ si f est nulle sauf sur un ensemble négligeable, on notera souvent $f = 0$ μ -presque partout ou $f = 0$ μ -p.p., ou encore $f = 0$ p.p., et on dira que f est μ -presque partout nulle. Cette terminologie bien pratique est définie de manière générale par la proposition suivante.

Définition 4.2.2 – Propriété vraie μ -p.p.

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

Soient $A \in \mathcal{A}$ un ensemble négligeable et une propriété P qui dépend de $x \in E$. Si l'on a $\{x \in E \mid P(x) \text{ est fausse}\} \subset A$, alors on dira que $P(x)$ est vraie “pour μ -presque tout x ” ou que P **est vraie μ -p.p.**

Remarque 4.2.2. Il est possible dans certains contextes que P soit fausse sur un ensemble non mesurable inclus dans un ensemble négligeable. Dans ce cas, il serait incorrect de dire que “ P est vraie partout sauf sur un ensemble négligeable”. On peut en revanche toujours dire que “ P est vraie au moins sur le complémentaire d’un ensemble négligeable”. Pour éviter ces difficultés, il est commode d’introduire la notion de tribu complétée à laquelle on ajoute (entres autres) toutes les parties de E incluses dans un ensemble négligeable. Ainsi, dans ce contexte, on pourra alors toujours dire que “ P est vraie partout sauf sur un ensemble négligeable”. Cette notion est introduite au Chapitre 5 dans le Théorème 5.1.4.

4.2.2 Intégrale et fonctions égales presque partout**Théorème 4.2.3**

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Si $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est nulle p.p., alors

$$\int_E f \, d\mu = 0$$

et la réciproque est vraie si $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.

► Nous avons, cf. Proposition 3.2.17, que pour $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$:

$$\int_E f \, d\mu = 0 \iff f = 0 \text{ } \mu\text{-p.p.}$$

Or si $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est nulle p.p., alors $f^+ = f\mathbb{1}_{f>0}$ et $f^- = -f\mathbb{1}_{f<0}$ le sont aussi, et puisque f^+ et f^- sont positives alors leurs intégrales sont nulles. Ainsi, $f \in \mathcal{L}^1$ et

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu = 0. \quad \blacksquare$$

Corollaire 4.2.4

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $A \in \mathcal{A}$ un ensemble négligeable. Alors, $\int_A f \, d\mu = 0$.

► Par définition,

$$\int_A f \, d\mu = \int_E f\mathbb{1}_A \, d\mu,$$

et par le théorème précédent, $\int_E f\mathbb{1}_A \, d\mu = 0$. \blacksquare

Proposition 4.2.5 – Relation de Chasles

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ t.q. f intégrable sur $A \cup B$ et $\mu(A \cap B) = 0$.

Alors,

$$\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu.$$

► On a toujours $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$. Puisque f intégrable sur $A \cup B$, alors f intégrable sur A , B et $A \cap B$, cf. $|f\mathbb{1}_A| \leq |f\mathbb{1}_{A \cup B}|$, etc. Par linéarité de l'intégrale

$$\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu - \int_{A \cap B} f \, d\mu$$

mais $\int_{A \cap B} f \, d\mu = 0$ car $\mu(A \cap B) = 0$, cf. corollaire précédent. ■

Lemme 4.2.1. Si $f = g$ μ -p.p., alors f est intégrable (resp. admet une intégrale) si et seulement si g est intégrable (resp. admet une intégrale).

► Comme $f = g$ μ -p.p., alors il est clair que $f^+ = g^+$ μ -p.p. et $f^- = g^-$ μ -p.p. Il suffit donc de montrer que pour toutes f, g dans \mathcal{M}_+ , si $f = g$ μ -p.p. alors

$$\int f \, d\mu < +\infty \quad \text{ssi} \quad \int g \, d\mu < +\infty.$$

En fait, nous avons déjà démontré mieux (cf. Proposition 3.2.18) : $\forall f, g \in \mathcal{M}_+$, si $f = g$ μ -p.p. alors on a l'égalité $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. ■

Théorème 4.2.6

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

Soient $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ et $g \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.q. $f = g$ μ -p.p.

Alors,

$$\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu.$$

► D'après le Lemme 4.2.1, $g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$. Par linéarité de l'intégrale,

$$\int f \, d\mu - \int g \, d\mu = \int (f - g) \, d\mu.$$

La fonction $f - g$ est nulle presque partout donc d'après le théorème précédent,

$$\int (f - g) \, d\mu = 0. \quad \blacksquare$$

Remarque 4.2.3. On retiendra que deux fonctions égales presque partout ont la même intégrale. Ce résultat est fondamental dans la théorie de l'intégration de Lebesgue.

4.3 Introduction à l'espace L^1

4.3.1 L'espace \mathcal{L}^1 est un espace vectoriel semi-normé

Définition 4.3.1

Soit F un espace vectoriel. Une fonction $N: F \rightarrow \mathbb{R}_+$ est appelée **norme** si

- i) $\forall u \in F$: $N(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0_F$ (séparation) ;
- ii) $\forall (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times F$: $N(\lambda u) = |\lambda|N(u)$ (absolue homogénéité) ;
- iii) $\forall (u, v) \in F^2$: $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$ (sous-add. / inég. triangulaire).

Si i) est remplacé par : i') $N(0_F) = 0$, alors on parle de **semie-norme**.

Remarque 4.3.1. On rappelle qu'une norme N sur un espace vectoriel F induit une topologie sur F , la topologie induite par la distance $d(u, v) := N(u - v)$.

On rappelle que l'espace $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ (ou \mathcal{L}^1) est l'ensemble des fonctions intégrables, c'est-à-dire telles que

$$\int_E |f| d\mu < +\infty.$$

Pour toute $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$, on pose

$$\|f\|_{\mathcal{L}^1} := \int_E |f| d\mu.$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 4.3.2

L'espace $(\mathcal{L}^1, \|\cdot\|_{\mathcal{L}^1})$ est un espace vectoriel semi-normé.

► Nous avons déjà que \mathcal{L}^1 est un espace vectoriel, cf. Théorème 4.1.4. Montrons que $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1}$ est une semie-norme.

- i) Si on prend $f = 0$ dans \mathcal{L}^1 alors $|f| = 0$ et donc $\|f\|_{\mathcal{L}^1} = \int |f| d\mu = 0$;
- ii) Soit $(\lambda, f) \in \mathbb{R} \times \mathcal{L}^1$. Alors par homogénéité positive de l'intégrale sur \mathcal{M}_+ ,

$$\|\lambda f\|_{\mathcal{L}^1} = \int |\lambda f| d\mu = |\lambda| \int |f| d\mu = |\lambda| \|f\|_{\mathcal{L}^1} ;$$

- iii) Soient f, g dans \mathcal{L}^1 . Alors $|f + g| \leq |f| + |g|$ donc par croissance puis additivité de l'intégrale sur \mathcal{M}_+ ,

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^1} = \int |f + g| d\mu \leq \int (|f| + |g|) d\mu = \int |f| d\mu + \int |g| d\mu = \|f\|_{\mathcal{L}^1} + \|g\|_{\mathcal{L}^1}.$$

■

4.3.2 L'espace L^1 est un espace vectoriel normé

Pour passer d'une semie-norme à une norme, il existe une procédure canonique indépendante de notre contexte. Pour ce faire, on identifie les vecteurs u et v dans F tels que

$$N(u - v) = 0.$$

Rigoureusement, on définit l'espace quotient de F par la relation d'équivalence

$$u \sim v \iff N(u - v) = 0,$$

c'est-à-dire l'ensemble constitué des classes d'équivalences de \sim . Montrons que la relation que nous venons de définir est bien une relation d'équivalence :

- réflexivité : $N(u - u) = N(0_F) = 0 \Rightarrow u \sim u$;
- symétrie : $N(u - v) = 0 = N(v - u)$ par absolue homogénéité de N ;
- transitivité : $N(u - v) = N(v - w) = 0 \Rightarrow N(u - w) = N(u - v + v - w) \leq N(u - v) + N(v - w) = 0$ par l'inégalité triangulaire.

Ainsi, on a bien vérifié les trois axiomes : u est en relation avec lui-même, la relation est symétrique et transitive, et donc c'est bien une relation d'équivalence. On note

$$[u] := \{v \in F \mid u \sim v\}$$

la classe d'équivalence de $u \in F$ et on définit l'espace quotient de F par la relation d'équivalence \sim par :

$$F/\sim := \bigcup \{[u] \mid u \in F\}.$$

Les éléments de l'espace quotient sont donc des classes d'équivalence, c'est-à-dire des ensembles d'éléments de F tous en relation.

Exercice 4.3.1: Montrer $(u' \in [u] \text{ et } v' \in [v]) \Rightarrow \lambda u' + \mu v' \in [\lambda u + \mu v]$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On introduit pour toutes f, g dans \mathcal{L}^1 la relation d'équivalence notée \sim_μ définie par la semie-norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1}$:

$$f \sim_\mu g \iff \|f - g\|_{\mathcal{L}^1} = 0 \iff |f - g| = 0 \text{ } \mu\text{-p.p.} \iff f = g \text{ } \mu\text{-p.p.}$$

On note pour $f \in \mathcal{L}^1$,

$$[f] := \{g \in \mathcal{L}^1 \mid g \sim_\mu f\} = \{g \in \mathcal{L}^1 \mid g = f \text{ } \mu\text{-p.p.}\}$$

sa classe d'équivalence par la relation \sim_μ . Les opérations classiques s'étendent aux classes d'équivalence :

$$\lambda[f] + \mu[g] := [\lambda f + \mu g].$$

Ceci fait de l'espace quotient, un espace vectoriel.

Remarque 4.3.2. On fera l'abus de notation qui consiste à ne pas distinguer fonctions et classes d'équivalences, c'est-à-dire qu'on utilisera le même symbole f pour la classe et la fonction. Ceci n'est bien entendu pas dangereux.

Définition 4.3.3

On note $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ ou L^1 , l'ensemble des classes d'équivalences des éléments de \mathcal{L}^1 par la relation d'équivalence $f \sim_\mu g \iff f = g \text{ } \mu\text{-p.p.}$, i.e. $L^1 := \mathcal{L}^1 / \sim_\mu$.

On définit $\|\cdot\|_{L^1}$ sur L^1 par

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{L^1} : L^1 &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ [f] &\longmapsto \|[f]\|_{L^1} := \|f\|_{\mathcal{L}^1} \end{aligned}$$

où $f \in [f]$ est n'importe quel représentant de la classe d'équivalence, car si $f \sim_\mu g$ alors $\|f\|_{\mathcal{L}^1} = \|g\|_{\mathcal{L}^1}$.

Remarque 4.3.3. Bien entendu, $\|\cdot\|_{L^1}$ est une norme sur L^1 .

Nous obtenons le résultat fondamental suivant.

Théorème 4.3.4

L'espace $(L^1(E, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_{L^1})$ est un espace vectoriel normé.

Exemple 4.3.1. On note l^1 l'espace $\mathcal{L}^1(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ où $m := \text{card}$ est la mesure de comptage. Soit $u \in l^1$, alors

$$\|u\|_{l^1} = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

Il n'est pas besoin ici de quotienter \mathcal{L}^1 car $\|u\|_{l^1} = 0$ implique $u = 0$. □

4.4 Introduction aux espaces L^p

4.4.1 Définitions

Pour simplifier on ne s'intéressera qu'aux espaces L^p en refaisant directement l'assimilation entre une fonction et sa classe d'équivalence (tous les raisonnements précédents faisant le lien entre \mathcal{L}^p et L^p étant similaires). On étend donc la définition des espaces L^1 aux fonctions dont la puissance p est intégrable.

Définition 4.4.1

Soit un réel $0 < p < +\infty$.

On appelle $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ ou L^p l'ensemble des fonctions mesurables telles que

$$\int_E |f|^p d\mu < +\infty.$$

Exemple 4.4.1.

$$\forall p > 1: \quad f(x) = \frac{1}{x^p} \in L^p([1, +\infty[, \mathcal{B}([1, +\infty[), \lambda)$$

□

Le cas $p = +\infty$:

Définition 4.4.2

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

On définit l'espace $L^\infty(E, \mathcal{A}, \mu)$ (ou L^∞) comme l'espace des fonctions mesurables essentiellement bornées, *i.e.* des fonctions mesurables f telles que

$$\sup \text{ess} |f| < +\infty,$$

où la borne supérieure essentielle de f est définie par

$$\sup \text{ess} f := \inf \{a \in \mathbb{R} \mid \mu(\{f \in]a, \infty[) = 0\}.$$

Remarque 4.4.1. On rappelle qu'un nombre a est un majorant de f si $\{f \in]a, \infty[) = \emptyset$. La borne supérieure classique est définie par :

$$\sup f := \inf \{a \in \mathbb{R} \mid \{f \in]a, \infty[) = \emptyset\},$$

autrement dit, c'est le plus petit des majorants de f .

Remarque 4.4.2. On définit de même la borne inférieure essentielle : $\inf \text{ess}$. On a toujours $\inf f \leq \inf \text{ess} f \leq \sup \text{ess} f \leq \sup f$.

Exemple 4.4.2. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \arctan x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Alors, $f \in L^\infty$. □

4.4.2 L'espace L^p , $0 < p \leq +\infty$, est un espace vectoriel

Proposition 4.4.3

Soit un réel $0 < p \leq +\infty$. L'espace L^p est un espace vectoriel.

► La stabilité par la multiplication par un scalaire est claire. Pour l'addition on se donne f et g dans L^p . Alors, $f + g$ est bien mesurable et on distingue 2 cas :

- $p = +\infty$. D'après l'inégalité triangulaire et la définition du sup essentiel :

$$|f + g| \leq |f| + |g| \leq \sup \text{ess} |f| + \sup \text{ess} |g| \quad (\text{presque partout}).$$

Par passage au sup essentiel : $\sup \text{ess} |f + g| \leq \sup \text{ess} |f| + \sup \text{ess} |g|$.

- $0 < p < +\infty$. Notons $h = \max(|f|, |g|)$. On a

$$|f + g|^p \leq (2h)^p = 2^p h^p \leq 2^p (|f|^p + |g|^p).$$

D'où le résultat en intégrant. ■

4.4.3 L'espace L^p , $1 \leq p \leq +\infty$, est un espace vectoriel normé

On définit naturellement une application, qui sera une norme sur L^p pour $1 \leq p \leq +\infty$:

Définition 4.4.4

Pour tout réel $0 < p < +\infty$ on pose pour f dans $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$,

$$\|f\|_{L^p} \quad \text{ou} \quad \|f\|_p := \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Pour $p = +\infty$, on pose $\|f\|_{L^\infty}$ ou $\|f\|_\infty := \sup \text{ess } |f|$.

Remarque 4.4.3. On peut montrer que $\forall f \in L^\infty : \|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p$.

On va maintenant montrer que $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé pour $1 \leq p \leq +\infty$. On aura besoin de l'inégalité de Minkowski qui résulte de celle de Hölder.

Proposition 4.4.5

Soit un réel $1 \leq p \leq +\infty$. Alors, $\|\cdot\|_p$ est une norme sur L^p .

Lemme 4.4.1. Soit $a, b \geq 0$ et $p, q > 0$ deux exposants conjugués. Alors $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

► Le logarithme étant concave sur \mathbb{R}_+ , pour tous $a, b > 0$ on a :

$$\ln \left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right) \geq \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q)$$

puis on passe à l'exponentielle. ■

Théorème 4.4.6 – Inégalité de Hölder

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, $p, q > 0$ des exposants conjugués (i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) et f et g des fonctions de L^p et L^q respectivement.

Alors, $fg \in L^1$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Plus généralement, si p et q sont tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, alors $fg \in L^r$ et $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

► Soit $p, q > 0$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. On montre d'abord l'inégalité pour f et g telles que $\|f\|_p = 1$ et $\|g\|_q = 1$. Ceci résulte de l'inégalité de Young appliquée aux exposants $\tilde{p} = \frac{p}{r}$ et $\tilde{q} = \frac{q}{r}$. En effet, on a bien $\frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1$. D'où, $\forall x \in E$,

$$|f(x)|^r |g(x)|^r \leq \frac{1}{\tilde{p}} |f(x)|^p + \frac{1}{\tilde{q}} |g(x)|^q$$

donc par intégration $\|fg\|_r^r \leq \frac{1}{\tilde{p}} \|f\|_p^p + \frac{1}{\tilde{q}} \|g\|_q^q = \frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1$. Si $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$ l'inégalité est vérifiée. On passe maintenant au cas général en appliquant le cas particulier précédent aux fonctions $\tilde{f} = \frac{f}{\|f\|_p}$ et $\tilde{g} = \frac{g}{\|g\|_q}$. ■

Remarque 4.4.4. Pour $p = q = 2$ on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Remarque 4.4.5. L'inégalité reste vraie pour $(p, q) = (1, +\infty)$ avec $1/\infty = 0$.

Exercice 4.4.1 (solution p. 76) : Soit $p > 1$. Donner une fonction qui est dans L^1 mais pas dans L^p et une fonction qui est dans L^p mais pas dans L^1 .

Exercice 4.4.2 (solution p. 76) : Soit (E, A, μ) un espace mesuré tel que E soit de mesure finie, i.e. $\mu(E) = M < +\infty$. Soient $0 < p < q < +\infty$. Montrer que

$$L^\infty \subset L^q \subset L^p.$$

L'inégalité suivante est l'inégalité triangulaire dans les espaces L^p pour $p \geq 1$.

Théorème 4.4.7 – Inégalité de Minkowski

Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et f et g deux fonctions de L^p . On a alors $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

► Pour $p = 1$, resp. $p = +\infty$, c'est clair, cf. Section 4.3.2, resp. Proposition 4.4.3. Sinon, si $\|f + g\|_p = 0$, l'inégalité est trivialement vérifiée. Sinon, en appliquant successivement l'inégalité triangulaire dans \mathbb{R} et l'inégalité de Hölder avec $q = \frac{p}{p-1}$, il vient

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int |f + g|^p d\mu \leq \int (|f| + |g|)|f + g|^{p-1} d\mu \\ &= \int |f||f + g|^{p-1} d\mu + \int |g||f + g|^{p-1} d\mu \\ &\leq \left(\left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int |g|^p d\mu \right)^{1/p} \right) \left(\int |f + g|^{(p-1)(\frac{p}{p-1})} d\mu \right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1}. \end{aligned}$$

■

De l'inégalité de Minkowski, on en déduit comme pour $(L^1, \|\cdot\|_1)$ que

Théorème 4.4.8

$L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace vectoriel normé pour $p \in [1, +\infty]$.

Remarque 4.4.6. L'inégalité est inversée pour $0 < p < 1$ (car $x \Rightarrow x^p$ n'est plus convexe mais concave sur \mathbb{R}_+). Sans l'inégalité triangulaire sur la norme, $(L^p, \|\cdot\|_p)$ n'est donc pas un espace vectoriel normé pour $0 < p < 1$.

Exercice 4.4.3 (solution p. 76) : Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de fonctions de L^2 qui convergent vers f et g dans L^2 . Montrer que la suite $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers fg dans L^1 .

Théorèmes limites et applications

5.1	Théorèmes de convergence	41
5.1.1	Espace mesuré complet	41
5.1.2	Convergence monotone (ou Beppo-Levi)	43
5.1.3	Convergence dominée	45
5.2	Liens avec l'intégrale de Riemann	47
5.2.1	Intégrale sur un segment	47
5.2.2	Intégrale impropre	49
5.3	Intégrale à paramètre	51
5.3.1	Continuité	52
5.3.2	Dérivabilité	53

5.1 Théorèmes de convergence

5.1.1 Espace mesuré complet

Définition 5.1.1 – Espace mesuré complet

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

Il est appelé *espace mesuré complet* si

$$[N \subset A, \text{ avec } N \in \mathcal{P}(E) \text{ et } A \in \mathcal{A} \text{ t.q. } \mu(A) = 0] \Rightarrow N \in \mathcal{A}.$$

Un espace mesuré complet (E, \mathcal{A}, μ) possède dans la tribu toutes les parties de E incluses dans des ensembles négligeables.

Définition 5.1.2 – Convergence μ -p.p.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de E dans $\bar{\mathbb{R}}$.

On dit que (f_n) *converge presque partout* vers f (et on note $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f$) si

$$\exists A \in \mathcal{A} \text{ négligeable tel que } [x \notin A] \Rightarrow [f_n(x) \rightarrow f(x)].$$

Remarque 5.1.1. La convergence simple implique la convergence presque partout.

Remarque 5.1.2. La définition de la convergence presque partout est une application de la Définition 4.2.2 à la propriété $P(x) = “f_n(x) \text{ converge vers } f(x)”$.

Nous savons déjà que la limite pour la convergence simple d'une suite d'applications mesurables est mesurable. Pour la convergence presque partout, nous avons le résultat suivant.

Proposition 5.1.3

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et soit $(f_n)_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))^{\mathbb{N}} = \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$ t.q. $f_n \xrightarrow{p.p.} f$.
Alors $\exists g \in \mathcal{M}$ t.q. $f = g$ μ -p.p. et si (E, \mathcal{A}, μ) est **complet** alors $f \in \mathcal{M}$.

► Par hypothèse, $f_n \xrightarrow{p.p.} f$ signifie : $\exists A \in \mathcal{A}$ t.q. $\mu(A) = 0$ et $\forall x \in A^c, f_n(x) \rightarrow f(x)$.
Remarquons que,

$$\forall a \in \mathbb{R}, f^{-1}([-\infty, a]) = (f^{-1}([-\infty, a]) \cap A) \cup (f^{-1}([-\infty, a]) \cap A^c).$$

D'une part, $f^{-1}([-\infty, a]) \cap A \subset A$, avec $A \in \mathcal{A}$ t.q. $\mu(A) = 0$. Donc si (E, \mathcal{A}, μ) est un espace mesuré complet, alors par définition

$$f^{-1}([-\infty, a]) \cap A \in \mathcal{A}.$$

Supposons donc (E, \mathcal{A}, μ) complet et montrons maintenant que $f^{-1}([-\infty, a]) \cap A^c \in \mathcal{A}$.
Posons $g = \limsup f_n \in \mathcal{M}$ (g est bien mesurable d'après le Chapitre 2). Puisque $\forall x \in A^c, f(x) = g(x)$, on a $f = g$ μ -p.p. (ceci est vrai même si l'espace n'est pas complet) et

$$\begin{aligned} f^{-1}([-\infty, a]) \cap A^c &= \{x \in A^c, f(x) \in [-\infty, a]\} \\ &= \{x \in A^c, g(x) \in [-\infty, a]\} = g^{-1}([-\infty, a]) \cap A^c. \end{aligned}$$

Or, g mesurable de (E, \mathcal{A}) dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})) \Rightarrow g^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A}$.¹ Par stabilité par passage au complémentaire et intersection finie,

$$f^{-1}([-\infty, a]) \cap A^c \in \mathcal{A}.$$

Finalement, par stabilité par union finie, $\forall a \in \mathbb{R}, f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A}$, et f mesurable. ■

Théorème 5.1.4 – Tribu et mesure complétées

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

Il existe \mathcal{B} une tribu sur E et ν une mesure sur \mathcal{B} telles que

- i) $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$,
- ii) $\forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) = \nu(A)$,
- iii) $\forall N \subset E$, t.q. $\exists A \in \mathcal{A}$ t.q. $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$, on a

$$N \in \mathcal{B} \text{ et } \nu(N) = 0.$$

La tribu \mathcal{B} est appelée **tribu complétée** de \mathcal{A} et ν **mesure complétée** de μ .

L'espace (E, \mathcal{B}, ν) est un **espace mesuré complet**.

1. $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ est engendrée par les intervalles de la forme $[-\infty, a]$.

► Remarque : $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N})$, $\mathcal{N} := \{N \subset E \mid \exists A \in \mathcal{A} \text{ t.q. } N \subset A \text{ et } \mu(A) = 0\}$. Voir par exemple [1, Théorème 2.27], [4, Chapitre I-5] pour la preuve. ■

Remarque 5.1.3. Soient (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, f une fonction de E dans $\bar{\mathbb{R}}$ et $g \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ t.q. $f = g$ μ -p.p.. Alors f est mesurable pour la tribu complétée. Ainsi d'après la Proposition 5.1.3, si $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f$ alors f est mesurable pour la tribu complétée.

Exemple 5.1.1 (Tribu de Lebesgue). On connaît déjà l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu de Borel sur \mathbb{R} appelée la tribu de Borel-Lebesgue. Nous avons appelée λ , la mesure de Lebesgue. En toute rigueur, c'est ce que l'on appelle la mesure de Borel-Lebesgue. Par le théorème précédent, on peut compléter la tribu et la mesure. La tribu **complétée** est appelée la **tribu de Lebesgue** et la mesure complétée la **mesure de Lebesgue**, cf. [1, Chapitre 2.5] ou [4, Chapitre I-6].

Notons \mathcal{T}_L la tribu de Lebesgue. Nous avons

$$\mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}_L \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Il est possible de montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ a le même cardinal² que \mathbb{R} , c'est-à-dire qu'ils sont équipotents, autrement dit on peut les mettre en bijection. En revanche, \mathcal{T}_L a le même cardinal que $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Le fait que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et \mathcal{T}_L n'ont pas le même cardinal nous indique qu'il existe des ensembles mesurables (pour \mathcal{T}_L) non boréliens : voir l'exemple de Luzin, 1927. On peut aussi montrer qu'il existe des ensembles non mesurables : $\mathcal{T}_L \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Cependant, ces ensembles sont très particuliers : voir l'ensemble de Vitali (1905) ou le paradoxe de Banach-Tarski. Ces deux exemples font appel à l'axiome du choix (ce qui est nécessaire pour construire des ensembles non mesurables). Pour plus de détails, voir par exemple [1, Remarque 2.46 Chapitre 2.5]. □

5.1.2 Convergence monotone (ou Beppo-Levi)

Théorème 5.1.5 – Convergence monotone

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

Soit (f_n) une suite croissante de $\mathcal{M}_+(\mathcal{A})$, qui converge presque partout vers f **mesurable**.

Alors,

$$\int_E f \, d\mu = \lim_n \int_E f_n \, d\mu.$$

Remarque 5.1.4. Ce théorème étend le théorème de Beppo-Levi, vu au chapitre 3, au cadre de la convergence μ -p.p.

Remarque 5.1.5. Si l'espace mesuré est complet alors l'hypothèse f mesurable est inutile. Si l'espace n'est pas complet et f non mesurable alors le résultat reste vrai si l'on remplace f par une fonction g mesurable t.q. $f = g$ μ -p.p. (qui existe cf. Proposition 5.1.3).

2. Le cardinal d'un ensemble fini est le nombre d'éléments. Pour un ensemble infini, c'est la classe d'équipotence.

Idées de la preuve. Appliquer le Théorème 3.2.11 de Beppo-Levi sur la partie de E sur laquelle la convergence simple a lieu. Le complémentaire de celle-ci étant de mesure nulle, les intégrales de f et des f_n sur ce dernier sont nulles.

► Par hypothèse, $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f : \exists A \in \mathcal{A}$ t.q. $\mu(A) = 0$ et $\forall x \in A^c, f_n(x) \rightarrow f(x)$.

1. Montrons que $\lim_n \int_{A^c} f_n d\mu = \int_{A^c} f d\mu$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \tilde{f}_n = f_n \mathbb{1}_{A^c}$. La suite (\tilde{f}_n) vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \tilde{f}_n \in \mathcal{M}_+$ comme produit de fonctions mesurables positives ($A^c \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{1}_{A^c}$ mesurable) ;
- (\tilde{f}_n) converge simplement vers $\tilde{f} := f \mathbb{1}_{A^c}$ par hypothèse sur la suite (f_n) ;
- la suite (\tilde{f}_n) est croissante :

$$\forall x \in A, \quad \tilde{f}_n(x) = 0 = \tilde{f}_{n+1}(x)$$

et $\forall x \in A^c$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n(x) &= f_n(x) \\ &\leq f_{n+1}(x) \quad \text{par croissance de } (f_n) \\ &\leq \tilde{f}_{n+1}(x). \end{aligned}$$

D'après le Théorème 3.2.11 de Beppo-Levi,

$$\lim_n \int_E \tilde{f}_n d\mu = \int_E \tilde{f} d\mu$$

ou encore

$$\lim_n \int_E f_n \mathbb{1}_{A^c} d\mu = \int_E f \mathbb{1}_{A^c} d\mu.$$

2. Comme $\mu(A) = 0$, il vient d'après le Corollaire 4.2.4 que $\int_A f d\mu = 0$. D'où, par la relation de Chasles (cf. Proposition 4.2.5), f étant mesurable,

$$\int_{A^c} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_{A^c} f d\mu = \int_E f d\mu.$$

On montre de même que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_{A^c} f_n d\mu = \int_E f_n d\mu$, ce qui conduit au résultat. ■

Exercice 5.1.1 (solution p. 77) : Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives. Soit $f = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$. Montrer que si $\exists N \in \mathbb{N}$, t.q. $\int_E f_N d\mu < +\infty$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

5.1.3 Convergence dominée

Le théorème de convergence monotone est le premier résultat central de la théorie de l'intégration de Lebesgue. Le second théorème central est le suivant : le théorème de convergence dominée. C'est un outil puissant pour montrer de nombreux résultats, comme nous le verrons dans la suite du manuscrit.

Théorème 5.1.6 – de Lebesgue ou de Convergence dominée

Soient (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $(f_n) \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$. On suppose que :

- $\exists g \in \mathcal{M}_+$ intégrable sur E telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g$ μ -p.p. ;
- $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f$, f mesurable ;

Alors, on a

- i) $\int_E |f| d\mu < +\infty$, i.e. $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$,
- ii) $\lim_n \int_E |f_n - f| d\mu = \lim_n \|f_n - f\|_1 = 0$,
- iii) $\int_E f d\mu = \lim_n \int_E f_n d\mu$.

Remarque 5.1.6. Si l'espace mesuré est complet alors l'hypothèse f mesurable est inutile. Si l'espace n'est pas complet et f non mesurable alors le résultat reste vrai si l'on remplace f par une fonction g mesurable t.q. $f = g$ μ -p.p. (qui existe cf. Proposition 5.1.3).

Idées de la preuve. Appliquer le lemme de Fatou (cf. Proposition 3.2.13) sur la partie de E sur laquelle les deux hypothèses sont valides. Le complémentaire de celle-ci est alors de mesure nulle et les intégrales de f et des f_n sur ce dernier sont nulles.

► Par hypothèses, on a :

- $\exists g \in \mathcal{M}_+$ intégrable sur E telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g$ μ -p.p. :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists A_n \in \mathcal{A} \text{ t.q. } \mu(A_n) = 0 \text{ et } \forall x \in A_n^c, |f_n(x)| \leq g(x),$$

- $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f : \exists A \in \mathcal{A} \text{ t.q. } \mu(A) = 0 \text{ et } \forall x \in A^c, f_n(x) \rightarrow f(x)$.

On a

$$\begin{aligned} \mu(A \cup (\cup_n A_n)) &\leq \mu(A) + \sum_n \mu(A_n) && (\text{par sous } \sigma\text{-additivité}) \\ &\leq 0 && (\mu(A) = \mu(A_n) = 0). \end{aligned}$$

D'où $\mu(A \cup (\cup_n A_n)) = 0$ et donc $A \cup (\cup_n A_n)$ est négligeable. Posons $B := A \cup (\cup_n A_n)$ pour alléger les notations. Si de plus $\mu(B^c) = 0$, alors

$$\mu(E) = \mu(B) + \mu(B^c) = 0.$$

Auquel cas, toute intégrale sur E est nulle, ce qui démontre le théorème. Pour la suite, on suppose $\mu(E) > 0$, ce qui implique que $\mu(B^c) > 0$.

i) Montrons que $\int_E |f| \, d\mu < +\infty$. On a

$$\forall x \in B^c, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq g(x).$$

A la limite, il vient

$$\forall x \in B^c, |f(x)| \leq g(x).$$

Comme B est négligeable, il vient que $|f| \leq g$ μ -p.p. Or, f mesurable et g est intégrable, d'où $\int_E |f| \, d\mu < +\infty$.

ii) Montrons que $\lim_n \int_E |f_n - f| \, d\mu = 0$. On a $\forall x \in B^c, \forall n \in \mathbb{N}, |f(x) - f_n(x)| \leq |f(x)| + |f_n(x)| \leq 2g(x)$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, h_n := (2g - |f - f_n|)\mathbb{1}_{B^c}$. On montre que (h_n) est une suite dans \mathcal{M}_+ . De plus, elle converge simplement vers $2g\mathbb{1}_{B^c}$ et on a ainsi

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} h_n = 2g\mathbb{1}_{B^c}.$$

D'après le lemme de Fatou (cf. Proposition 3.2.13),

$$\int_E 2g\mathbb{1}_{B^c} \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E (2g - |f - f_n|)\mathbb{1}_{B^c} \, d\mu.$$

Or $\mu(B) = 0$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_B (2g - |f - f_n|) \, d\mu = 0 = \int_B 2g \, d\mu.$$

D'où,

$$\int_E 2g \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E (2g - |f - f_n|) \, d\mu.$$

Par linéarité de l'intégrale, il vient

$$2 \int_E g \, d\mu \leq 2 \int_E g \, d\mu - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_E |f - f_n| \, d\mu,$$

et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_E |f - f_n| \, d\mu \leq 0$. Finalement,

$$0 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E |f - f_n| \, d\mu \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_E |f - f_n| \, d\mu \leq 0,$$

donc

$$\lim_n \int_E |f - f_n| \, d\mu = 0.$$

iii) Montrons que $\lim_n \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ intégrable (car $|f_n| \leq g$ μ -p.p. avec g intégrable). De même, d'après i), f est intégrable. D'où,

$$\left| \int_E f_n \, d\mu - \int_E f \, d\mu \right| = \left| \int_E (f_n - f) \, d\mu \right| \leq \int_E |f_n - f| \, d\mu \rightarrow 0 \quad (\text{par ii}).$$

■

Exemple 5.1.2. Soit l'espace mesuré $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$. Soient les fonctions (pour $n \geq 1$)

$$\begin{aligned} f_n: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto 1 - x^{1/n}. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in]0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ et $f_n(0) = 1$ pour tout $n \geq 1$. Or $\lambda(\{0\}) = 0$, d'où $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f$ (sur $[0, 1]$) avec f la fonction nulle. Pour tout $n \geq 1$, $|f_n| \leq 1$ qui est une fonction intégrable sur $[0, 1]$. En effet,

$$\int_{[0,1]} 1 \, d\lambda = \lambda([0, 1]) = 1 < +\infty.$$

Donc, par le Théorème 5.1.6 de convergence dominée,

$$\int_{[0,1]} f_n \, d\lambda \rightarrow 0.$$

□

Exercice 5.1.2 (solution p. 78) : Soit $0 < p < +\infty$ et $f_n \rightarrow f$ simplement. On suppose : $\exists g \geq 0$ dans L^p telle que $\forall n, |f_n| \leq g$. Montrer que f_n converge vers f dans L^p , c'est-à-dire que $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.

5.2 Liens avec l'intégrale de Riemann

Comme nous allons le voir, l'intégrale de Lebesgue généralise celle de Riemann.

5.2.1 Intégrale sur un segment

Nous nous plaçons sur l'espace mesuré $([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \lambda)$. L'intégrale de Riemann sur $[a, b]$ d'une fonction f bornée sur $[a, b]$ s'écrit

$$\int_a^b f(x) \, dx.$$

Théorème 5.2.1 – Intégrale de Riemann sur un segment

Soit f mesurable sur $([a, b], \mathcal{B}([a, b]))$, $-\infty < a \leq b < +\infty$. Si f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$, alors, f est également intégrable au sens de Lebesgue sur $[a, b]$ et on a

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{[a,b]} f \, d\lambda.$$

Remarque 5.2.1. En pratique, dans ce cadre, on pourra chercher à calculer des intégrales de Lebesgue via ce que l'on connaît déjà pour les intégrales de Riemann.

Idées de la preuve. On construit l'intégrale de Riemann depuis des fonctions en escalier, qui sont également des fonctions étagées, fonctions sur lesquelles on a construit l'intégrale de Lebesgue. On va ainsi revenir à des fonctions en escalier associées à l'intégrale de Riemann de f , les intégrer au sens de Lebesgue, et passer à la limite.

► On définit la subdivision régulière $x(n, k) = a + (b - a)2^{-n}k$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k = 0, \dots, 2^n$. On définit également $\forall k > 1$, $I(n, k) =]x(n, k - 1), x(n, k)]$ et $I(n, 1) = [x(n, 0), x(n, 1)]$. On pose

$$u(n, k) = \inf \{f(x) \mid x \in [x(n, k - 1), x(n, k)]\}$$

et

$$v(n, k) = \sup \{f(x) \mid x \in [x(n, k - 1), x(n, k)]\}.$$

Enfin, on définit :

$$g_n = \sum_{k=0}^{2^n} u(n, k) \mathbb{1}_{I(n, k)} \quad \text{et} \quad h_n = \sum_{k=0}^{2^n} v(n, k) \mathbb{1}_{I(n, k)}.$$

On a alors :

- la suite (g_n) est une suite croissante de fonctions mesurables qui converge vers g , et (h_n) est une suite décroissante de fonctions mesurables qui converge vers h ,
- puisque f est Riemann intégrable, f est bornée. Dans ce cas, g_n et h_n , qui sont de signe quelconque, sont majorées en valeur absolue par la fonction constante égale à $\sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ qui est Lebesgue intégrable sur $[a, b]$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_{[a, b]} g_n \, d\lambda \rightarrow \int_{[a, b]} g \, d\lambda \quad \text{et} \quad \int_{[a, b]} h_n \, d\lambda \rightarrow \int_{[a, b]} h \, d\lambda,$$

- les fonctions h_n et g_n sont à la fois étagées et en escalier. Leurs intégrales de Riemann et de Lebesgue sont les mêmes. Il vient

$$\int_a^b g_n(x) \, dx \rightarrow \int_{[a, b]} g \, d\lambda \quad \text{et} \quad \int_a^b h_n(x) \, dx \rightarrow \int_{[a, b]} h \, d\lambda,$$

- puisque f est Riemann intégrable (caractérisation par les sommes de Darboux) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b g_n(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b h_n(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx.$$

On a donc :

$$\int_{[a, b]} g \, d\lambda = \int_{[a, b]} h \, d\lambda = \int_a^b f(x) \, dx \quad \text{et} \quad \int_{[a, b]} (h - g) \, d\lambda = 0.$$

Puisque f est mesurable et bornée, elle est intégrable au sens de Lebesgue sur $[a, b]$, car $[a, b]$ est de mesure finie (pour la mesure de Lebesgue), cf. Proposition 3.2.8 appliquée à $|f|$ elle-même bornée. De plus, on a :

$$\int_{[a, b]} f \, d\lambda = \int_{[a, b]} g \, d\lambda + \int_{[a, b]} (f - g) \, d\lambda.$$

Or, puisque $g \leq f \leq h$:

$$0 \leq \int_{[a, b]} (f - g) \, d\lambda \leq \int_{[a, b]} (h - g) \, d\lambda = 0,$$

d'où

$$\int_{[a, b]} f \, d\lambda = \int_{[a, b]} g \, d\lambda = \int_a^b f(x) \, dx. \quad \blacksquare$$

5.2.2 Intégrale impropre

Théorème 5.2.2 – Intégrale de Riemann impropre

Soient $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ et f mesurable sur $([a, b], \mathcal{B}([a, b]))$.

On suppose que f possède une intégrale de Riemann impropre³ sur $[a, b[$ absolument convergente, c'est-à-dire que

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t |f(x)| dx < +\infty.$$

La fonction f est alors intégrable au sens de Lebesgue et on a l'égalité

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x) dx.$$

Idées de la preuve. Soit (b_n) une suite croissante de \mathbb{R} qui tend vers b . On se ramène à des intégrales sur des segments via la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n = f \mathbb{1}_{[a, b_n]}$.

► Soit (b_n) une suite croissante de \mathbb{R} qui tend vers b et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a < b_n$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n = f \mathbb{1}_{[a, b_n]}.$$

1. On suppose f positive sur $[a, b]$. Montrons que $\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x) dx$. Par notre nouvelle hypothèse, (f_n) est une suite croissante de fonctions mesurables positives qui converge μ -p.p vers $f \mathbb{1}_{[a,b]}$. D'après le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{[a,b]} d\lambda = \int_{[a,b]} f d\lambda$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_{[a, b_n]} f d\lambda$. De plus, $\int_a^b f(x) dx$ est convergente par hypothèse. Comme f est positive sur $[a, b]$, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \int_a^{b_n} f(x) dx \right| = \int_a^{b_n} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx < +\infty$$

car f est positive et par définition de la suite (b_n) . Ainsi, f est Riemann-intégrable sur $[a, b_n]$, avec $n \in \mathbb{N}$. Elle est, de plus, mesurable par hypothèse. D'après le théorème précédent, f est Lebesgue-intégrable sur $[a, b_n]$ et on a

$$\int_{[a, b_n]} f d\lambda = \int_a^{b_n} f(x) dx.$$

D'où,

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^{b_n} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

3. Par définition, f est Riemann-intégrable sur tout segment de la forme $[a, t]$, avec $t < b$.

2. On suppose que f n'est pas de signe constant et que $\int_a^b |f(x)| dx < +\infty$. Alors, $(|f_n|)$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives qui converge μ -p.p vers $|f|\mathbb{1}_{[a,b]}$. D'après le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n| d\lambda = \int_{[a,b]} |f| d\lambda.$$

De plus $\int_a^b |f(x)| dx$ est absolument convergente, donc $|f|$ est Riemann-intégrable sur $[a, b_n]$ avec $n \in \mathbb{N}$. D'après le théorème précédent,

$$\int_a^{b_n} |f(x)| dx = \int_{[a,b_n]} |f| d\lambda = \int_{\mathbb{R}} |f_n| d\lambda.$$

Il vient

$$\int_{[a,b]} |f| d\lambda = \int_a^b |f(x)| dx < +\infty.$$

D'où $|f|\mathbb{1}_{[a,b]}$ est Lebesgue-intégrable. Or, $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq |f|\mathbb{1}_{[a,b]}$. D'après le théorème de convergence dominée, il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{[a,b]} d\lambda \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b_n]} f d\lambda = \int_{[a,b]} f d\lambda.$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, f est Riemann-intégrable sur $[a, b_n]$. D'après le théorème précédent,

$$\int_a^{b_n} f(x) dx = \int_{[a,b_n]} f d\lambda.$$

Finalement,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\lambda. \quad \blacksquare$$

Exemple 5.2.1 (Intégrale impropre). Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$. Soit la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^{-x}. \end{aligned}$$

Puisque f est continue sur \mathbb{R}_+ , elle est mesurable. Soit $t > 0$, on a,

$$\int_0^t f(x) dx = -[e^{-x}]_0^t = 1 - e^{-t}.$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty \quad (f \text{ positive}).$$

Finalement, f est Lebesgue-intégrable sur \mathbb{R}_+ et

$$\int_{\mathbb{R}_+} f d\lambda = \int_0^{+\infty} f(x) dx = 1. \quad \square$$

Remarque 5.2.2. Par simplicité, on a supposé, dans les deux théorèmes faisant le lien entre les intégrales de Riemann et Lebesgue (sur un segment et intégrale de Riemann impropre), que la fonction f est mesurable. Cette hypothèse est souvent vérifiée en pratique (f continue, continue par morceaux, etc.). Néanmoins, ces théorèmes restent valides, même sans cette hypothèse, dès lors que l'on se place sur la tribu complétée de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et que l'on intègre vis-à-vis de la mesure complétée de λ . Sinon, sur la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, si on ne suppose pas la mesurabilité de la fonction f alors nous avons la variante ci-après sur le lien Riemann-Lebesgue.

Sans supposer la mesurabilité de la fonction f nous avons la variante suivante.

Théorème 5.2.3 – Variante

Soit f intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$, $-\infty < a \leq b < +\infty$.

Alors $\exists g \in L^1([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \lambda)$ telle que

- i) $f = g$ μ -p.p.,
- ii) $\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} g d\lambda$.

Exercice 5.2.1 (solution p. 78) : Justifier que l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale de Riemann coïncident pour les fonctions suivantes et calculer sa valeur.

1. $\sin(x)$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.
2. $e^{-x} \cos(x)$ sur \mathbb{R}_+ .
3. $\frac{1}{1+x^2}$ sur \mathbb{R}_+ .
4. $\frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbb{1}_{[0,4]}(x) + \frac{1}{x^2} \mathbb{1}_{]4,+\infty[}(x)$ sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 5.2.2 (solution p. 79) : Pour chacune des suites $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions boréliennes de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} suivantes, calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n d\lambda.$$

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = |\cos(x)|^{\frac{1}{n}} e^{-x}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n \cos x \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$.

5.3 Intégrale à paramètre

Nous nous intéressons dans cette section à des intégrales dépendants d'un paramètre réel. Le paramètre apparaît dans la fonction f à intégrer, autrement dit, nous considérons des fonctions à deux variables et nous allons intégrer par rapport à l'une d'entre-elle, l'autre variable faisant office de paramètre.

5.3.1 Continuité

Théorème 5.3.1 – Continuité sous l'intégrale

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

Soit $f: \mathcal{I} \times E \rightarrow \mathbb{R}$, avec \mathcal{I} un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} , telle que

- i) $\forall u \in \mathcal{I}, x \mapsto f(u, x) \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$,
- ii) $\exists u_\infty \in \mathcal{I}$ tel que pour presque tout x , $u \mapsto f(u, x)$ est continue en u_∞ ,
- iii) $\exists g \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ positive et intégrable telle que pour presque tout x , $\forall u \in \mathcal{I}$, $|f(u, x)| \leq g(x)$.

Alors, la fonction $u \mapsto F(u) = \int_E f(u, x) d\mu(x)$ est définie en tout point $u \in \mathcal{I}$ et est continue en u_∞ .

Idées de la preuve. Prendre une suite qui converge vers u_∞ (hypothèse ii)) et appliquer le théorème de convergence dominée (hypothèses i) et iii)).

► Montrons que F est bien définie sur \mathcal{I} . Soit $u \in \mathcal{I}$. On pose $\forall x \in E$, $f_u(x) = f(u, x)$. Alors, f_u est mesurable par i). De plus, $|f_u| \leq g$ μ -p.p., avec g intégrable par iii). Donc f_u est intégrable et F est bien définie sur \mathcal{I} .

Montrons que F est continue en u_∞ . Soit (u_n) une suite de \mathcal{I} qui converge vers u_∞ . On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in E, \quad f_n(x) = f(u_n, x).$$

La suite (f_n) vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par i) ;
- $\exists g \in \mathcal{M}_+$ intégrable sur E telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g$ μ -p.p. par iii) ;
- $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f_{u_\infty}$: d'après ii), $\exists A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0$ et $\forall x \in A^c, f_n(x) \rightarrow f(u_\infty, x)$.

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_n \int_E f_n d\mu = \int_E f_{u_\infty} d\mu \Leftrightarrow \lim_n F(u_n) = F(u_\infty).$$

■

Le théorème précédent nous informe sur la continuité en un point. Pour la continuité globale nous avons le résultat suivant.

Corollaire 5.3.2 – Continuité “globale” sous l'intégrale

Soit $f: \mathcal{I} \times E \rightarrow \mathbb{R}$, avec \mathcal{I} un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} , telle que

- i) $\forall u \in \mathcal{I}, x \mapsto f(u, x) \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$,
- ii) pour presque tout x , $u \mapsto f(u, x)$ est continue sur \mathcal{I} ,
- iii) $\exists g \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ positive et intégrable telle que pour presque tout x , $\forall u \in \mathcal{I}$, $|f(u, x)| \leq g(x)$.

Alors la fonction $u \mapsto F(u) = \int_E f(u, x) d\mu(x)$ est définie et continue sur \mathcal{I} .

Exemple 5.3.1 (Convolution). Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable et $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée et continue. La convolée de f et ϕ est définie par

$$u \mapsto (f \star \phi)(u) := \int_{\mathbb{R}} \phi(u-x)f(x) d\lambda(x).$$

Pour tout x , $u \mapsto \phi(u-x)f(x)$ est continue. Pour tout u , $|\phi(u-x)f(x)| \leq \|\phi\|_{\infty}|f(x)|$ et $\int_{\mathbb{R}} \|\phi\|_{\infty}|f(x)| d\lambda(x) < \infty$ par hypothèse. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \phi(u-x)f(x)$ est mesurable comme produit de fonctions mesurables. Donc par le théorème de continuité globale, $f \star \phi$ est continue sur \mathbb{R} . \square

Exercice 5.3.1 (solution p. 80) : Soit F la fonction définie par :

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-tx}}{1+x^2} d\lambda(x).$$

1. Déterminer le domaine de définition de F (i.e. le domaine sur lequel F existe et est finie) et son domaine de continuité.
2. Calculer $F(0)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t)$.

5.3.2 Dérivabilité

Théorème 5.3.3 – Dérivation sous l'intégrale

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

Soit $f: \mathcal{I} \times E \rightarrow \mathbb{R}$, avec \mathcal{I} un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} , telle que

- i) $\forall u \in \mathcal{I}, x \mapsto f(u, x) \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$,
- ii) $\forall u \in \mathcal{I}, x \mapsto f(u, x)$ est intégrable,
- iii) $\exists u_{\infty} \in \mathcal{I}$ tel que pour presque tout x , la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial u}(u_{\infty}, x)$ existe,
- iv) $\exists g \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ positive et intégrable telle que pour presque tout x ,

$$\forall u \in \mathcal{I}, \quad |f(u, x) - f(u_{\infty}, x)| \leq g(x) |u - u_{\infty}|.$$

Alors, la fonction $u \mapsto F(u) = \int_E f(u, x) d\mu(x)$ est définie en tout point $u \in \mathcal{I}$ et est dérivable en u_{∞} . De plus,

$$F'(u_{\infty}) = \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u_{\infty}, x) d\mu(x).$$

► Les hypothèses i) et ii) assurent que F est bien définie sur \mathcal{I} . Montrons que F est dérivable en u_{∞} . Soit (u_n) une suite de \mathcal{I} qui converge vers u_{∞} telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq u_{\infty}$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in E, \quad \phi_n(x) = \frac{f(u_n, x) - f(u_{\infty}, x)}{u_n - u_{\infty}}.$$

D'après iv), $|\phi_n| \leq g$ μ -p.p., avec g intégrable, et d'après iii), $\phi_n \xrightarrow{\text{p.p.}} \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, \cdot)$:

$$\exists A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) = 0 \text{ et } \forall x \in A^c, \quad \phi_n(x) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x).$$

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_n \int_E \phi_n d\mu = \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x) d\mu(x).$$

Soit

$$\lim_n \frac{F(u_n) - F(u_\infty)}{u_n - u_\infty} = F'(u_\infty) = \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x) d\mu(x).$$

■

De même pour la dérivabilité globale, nous avons le résultat suivant.

Corollaire 5.3.4 – Dérivation “globale” sous l’intégrale

Soit $f :: \mathcal{I} \times E \rightarrow \mathbb{R}$, avec \mathcal{I} un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} , telle que

- i) $\forall u \in \mathcal{I}, x \mapsto f(u, x) \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$,
- ii) $\exists u_0 \in \mathcal{I}, x \mapsto f(u_0, x)$ est intégrable,
- iii) pour presque tout $x, u \mapsto f(u, x)$ est dérivable sur \mathcal{I} ,
- iv) $\exists g \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ positive et intégrable telle que pour presque tout x ,

$$\forall u \in \mathcal{I}, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial u}(u, x) \right| \leq g(x).$$

Alors, la fonction $u \mapsto F(u) = \int_E f(u, x) d\mu(x)$ est définie et dérivable sur \mathcal{I} . De plus,

$$\forall u \in \mathcal{I}, \quad F'(u) = \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u, x) d\mu(x).$$

Idée de la preuve. Exploiter l’inégalité des accroissements finies, là où les hypothèses le permettent (à savoir μ -p.p.).

► 1. Montrons que F est définie sur \mathcal{I} . D’après ii), $\exists u_0 \in \mathcal{I}$ tel que $x \mapsto f(u_0, x)$ est intégrable. Soit $u \in \mathcal{I}$. On a

$$\forall x \in E, \quad |f(u, x)| \leq |f(u_0, x)| + |f(u, x) - f(u_0, x)|.$$

Or, d’après iii), pour presque tout $x, u \mapsto f(u, x)$ est dérivable sur l’intervalle ouvert $]u, u_0[$ et continue sur l’intervalle fermé $[u, u_0]$. De plus, pour presque tout $x, \forall v \in]u, u_0[, |\frac{\partial f}{\partial u}(v, x)| \leq g(x)$ d’après iv). Par inégalité des accroissements finis, pour presque tout x ,

$$|f(u, x) - f(u_0, x)| \leq g(x) |u - u_0|.$$

D’où g intégrable implique $x \mapsto f(u, x) - f(u_0, x)$ intégrable. Finalement, $x \mapsto f(u, x)$ est intégrable, et ce $\forall u \in \mathcal{I}$, donc F est bien définie sur \mathcal{I} .

2. Montrons que F est dérivable sur \mathcal{I} et que

$$\forall u \in \mathcal{I}, \quad F'(u) = \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u, x) d\mu(x).$$

Soit $(u, u_\infty) \in \mathcal{I}^2$. On montre de même que, pour presque tout x ,

$$|f(u, x) - f(u_\infty, x)| \leq g(x) |u - u_\infty|.$$

De plus, pour presque tout x , $\frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x)$ existe, par hypothèse iii). En appliquant le théorème précédent, il vient que F est dérivable en u_∞ , et que

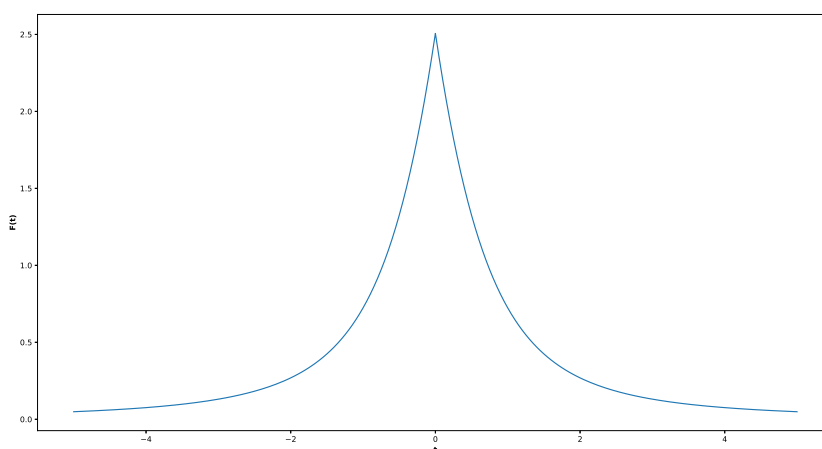
$$F'(u_\infty) = \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x) d\mu(x),$$

et ce $\forall u_\infty \in \mathcal{I}$. ■

Exercice 5.3.2 (solution p. 81) : On considère la fonction F définie par :

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}(x+t^2)} d\lambda(x).$$

représentée par le graphe :



1. Déterminer le domaine de définition de F et son domaine de continuité.
2. Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R}^* .
3. Montrer que F admet une dérivée à droite en 0. Dans le calcul de $\frac{F(t)-F(0)}{t}$, on pourra faire le changement de variable $x = u^2 t^2$ puis utiliser le théorème de convergence dominée.
4. F est-elle dérivable sur \mathbb{R} ?

Intégration sur les produits

6.1	Tribu et mesure produits	57
6.2	Théorèmes de Fubini	58
6.3	Changement de variables	60

Ce chapitre contient très peu de preuves. Pour plus de détails, voir [1, 2, 3, 4, 5].

6.1 Tribu et mesure produits

Définition 6.1.1 – Tribu produit

Soient (E_1, \mathcal{A}_1) et (E_2, \mathcal{A}_2) deux espaces mesurables.

On appelle **tribu produit** sur $E_1 \times E_2$, que l'on note $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, la plus petite tribu contenant les ensembles de la forme $A_1 \times A_2$ avec $\forall i \in \{1, 2\}, A_i \in \mathcal{A}_i$:

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 := \sigma(\{A_1 \times A_2, A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}).$$

Le couple $(E_1 \times E_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ est appelé **espace mesurable produit**.

Remarque 6.1.1. En général, $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$ n'est pas une tribu.

Proposition 6.1.2 – Cas borélien

Soient (E_1, \mathcal{O}_1) et (E_2, \mathcal{O}_2) deux espaces topologiques.¹ On a

- i) $\mathcal{B}(E_1) \otimes \mathcal{B}(E_2) \subset \mathcal{B}(E_1 \times E_2)$.
- ii) Si E_1 et E_2 sont à bases dénombrables d'ouverts, alors

$$\mathcal{B}(E_1) \otimes \mathcal{B}(E_2) = \mathcal{B}(E_1 \times E_2).$$

Corollaire 6.1.3 – Cas particulier $E_i = \mathbb{R}$

$$\forall d \in \mathbb{N}, d \geq 2, \underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})}_{d \text{ fois}} =: \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

► \mathbb{R} est à base dénombrable d'ouverts. ■

1. Une topologie $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$ contient \emptyset et E , et est stable par réunions quelconques et intersections finies.

Remarque 6.1.2.

- On rappelle que si (E, \mathcal{O}) est un espace topologique alors par définition $\mathcal{B}(E) = \sigma(\mathcal{O})$.
- $\mathcal{B}(E_1 \times E_2)$ est une tribu sur $E_1 \times E_2$: c'est la plus petite tribu contenant les ouverts de $E_1 \times E_2$.
- E est à base dénombrable d'ouverts s'il existe une famille dénombrable d'ouverts de E , noté (O_n) , telle que tout ouvert O de E soit une réunion (au plus dénombrable) d'éléments de (O_n) .

Théorème 6.1.4 – Mesure produit

Soient $(E_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés.

On suppose que μ_1 et μ_2 sont σ -finies sur (E_1, \mathcal{A}_1) et (E_2, \mathcal{A}_2) respectivement.²

Alors, il existe une unique mesure m sur $(E_1 \times E_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ vérifiant

$$\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, \quad m(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \mu_2(A_2).$$

Cette mesure est σ -finie et est appelée **mesure produit**. On la note $\mu_1 \otimes \mu_2 := m$.

Remarque 6.1.3.

- Le théorème précédent est faux lorsque μ_1 ou μ_2 n'est pas σ -finie.
- Cas $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$: la mesure $\lambda \otimes \lambda$ mesure les aires, $\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda = \lambda^{\otimes 3}$ les volumes, etc. La mesure de Lebesgue λ_d sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ est aussi la mesure produit $\lambda_1^{\otimes d}$.

6.2 Théorèmes de Fubini**Théorème 6.2.1 – Fubini-Tonelli**

Soient $(E_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés (les mesures sont σ -finies). Soit $f: E_1 \times E_2 \rightarrow [0, +\infty]$ mesurable positive. On définit les fonctions ϕ et ψ sur E_1 et E_2 respectivement par

$$\phi(x) = \int_{E_2} f(x, y) d\mu_2(y), \quad \psi(y) = \int_{E_1} f(x, y) d\mu_1(x).$$

Ces fonctions sont mesurables positives et vérifient

$$\int_{E_1} \phi d\mu_1 = \int_{E_1 \times E_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{E_2} \psi d\mu_2$$

et cette quantité $\in [0, +\infty]$.

Remarque 6.2.1. On retient que pour des fonctions mesurables positives, on peut intervertir l'ordre des intégrations.

2. $\forall i \in \{1, 2\}, \exists (A_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, A_n^i \in \mathcal{A}_i, \mu_i(A_n^i) < +\infty$ et $E_i = \cup_n A_n^i$.

Exemple 6.2.1. Soit

$$\begin{aligned} f: [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) := e^{-(x+y)} \mathbf{1}_{x+y \leq 1} \end{aligned}$$

Cette fonction est mesurable positive. On a

$$\begin{aligned} \int_{[0,1] \times [0,1]} f \, d(\lambda \otimes \lambda) &= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} f(x, y) \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) && \text{(Fubini-Tonelli)} \\ &= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} e^{-(x+y)} \mathbf{1}_{x+y \leq 1} \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \int_{[0,1]} e^{-y} \left(\int_{[0,1-y]} e^{-x} \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \int_{[0,1]} e^{-y} \left(\int_0^{1-y} e^{-x} \, dx \right) d\lambda(y) && \text{(R-L sur un segment)} \\ &= \int_0^1 e^{-y} (1 - e^{-(1-y)}) \, dy = \int_0^1 (e^{-y} - e^{-1}) \, dy = 1 - \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

□

Théorème 6.2.2 – Fubini (ou Fubini-Lebesgue)

Soient $(E_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés (les mesures sont σ -finies). Soit $f: E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On définit les fonctions ϕ et ψ sur E_1 et E_2 respectivement par

$$\phi(x) = \int_{E_2} f(x, y) \, d\mu_2(y), \quad \psi(y) = \int_{E_1} f(x, y) \, d\mu_1(x).$$

Si f est $\mu_1 \otimes \mu_2$ -intégrable alors ϕ et ψ sont resp. μ_1 -intégrable et μ_2 -intégrable, et vérifient la double égalité

$$\int_{E_1} \phi \, d\mu_1 = \int_{E_1 \times E_2} f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{E_2} \psi \, d\mu_2.$$

Remarque 6.2.2. Il est possible de vérifier l'intégrabilité de $|f|$ par rapport à $\mu_1 \otimes \mu_2$ par le Théorème de Fubini-Tonelli.

Exercice 6.2.1 (solution p. 83) : Soit $(u_{k,\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2}$ une double suite de réels positifs. Montrer, à l'aide du théorème de Fubini, que

$$\sum_{\ell \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} u_{k,\ell} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} u_{k,\ell}.$$

6.3 Changement de variables

Définition 6.3.1 – \mathcal{C}^1 -difféomorphisme

Soient U et V deux ouverts de \mathbb{R}^d . Un \mathcal{C}^1 -**difféomorphisme** ϕ de U dans V est une bijection $\phi: U \rightarrow V$ qui est \mathcal{C}^1 et telle que ϕ^{-1} est également \mathcal{C}^1 .

Définition 6.3.2 – Matrice Jacobienne

Si ϕ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de U dans V (deux ouverts de \mathbb{R}^d), on appelle **matrice jacobienne** en $u := (u_1, \dots, u_d)$, la matrice

$$J_\phi(u) := \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_1}(u) & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial u_d}(u) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u_1}(u) & \cdots & \frac{\partial \phi_2}{\partial u_d}(u) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_d}{\partial u_1}(u) & \cdots & \frac{\partial \phi_d}{\partial u_d}(u) \end{bmatrix}.$$

Théorème 6.3.3 – Inversion globale (cadre \mathbb{R}^d)

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^d et $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^d$. Alors, ϕ réalise un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de U sur $V = \phi(U)$ si et seulement si ϕ satisfait les trois conditions suivantes :

- i) ϕ est \mathcal{C}^1 sur U ,
- ii) ϕ est injective,
- iii) $\forall u \in U, \det(J_\phi(u)) \neq 0$.

Remarque 6.3.1. En pratique, on est souvent confrontés aux cas suivants :

- On sait que ϕ est une bijection de U sur V et on connaît U, V (ouverts) et ϕ^{-1} . Il suffit alors de vérifier que ϕ et ϕ^{-1} sont \mathcal{C}^1 .
- On ne sait pas inverser ϕ . On applique alors le théorème d'inversion globale. La difficulté réside souvent dans la détermination de $V = \phi(U)$.

Théorème 6.3.4 – Changement de variables

Soient U, V deux ouverts de \mathbb{R}^d . Soient $\phi: U \rightarrow V$ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme et $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne sur V et intégrable. Alors, la fonction $f \circ \phi: U \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable et

$$\int_V f \, d\lambda = \int_U (f \circ \phi) |\det(J_\phi)| \, d\lambda.$$

Remarque 6.3.2. Attention à ne pas oublier la valeur absolue dans les calculs. On a encore

$$\int_V f \, d\lambda = \int_U (f \circ \phi) |\det(J_\phi)| \, d\lambda.$$

si $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne sur V et positive (avec $\phi: U \rightarrow V$ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme).

Remarque 6.3.3 (Dimension 1 : lien avec le changement de variables (Riemann)). Soient $]a, b[$ et $]c, d[$ deux intervalles ouverts de \mathbb{R} . Soit $\phi:]a, b[\rightarrow]c, d[$ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme. On a que ϕ' ne peut s'annuler sur $]a, b[$ et est de signe constant. Supposons $\phi' > 0$. Alors la formule du changement de variable pour les intégrales de Riemann donne

$$\int_c^d f(x) dx = \int_a^b (f \circ \phi)(y) \phi'(y) dy = \int_a^b (f \circ \phi)(y) |\phi'(y)| dy.$$

Si $\phi' < 0$, alors

$$\begin{aligned} \int_c^d f(x) dx &= \int_b^a (f \circ \phi)(y) \phi'(y) dy \\ &= - \int_a^b (f \circ \phi)(y) \phi'(y) dy \\ &= \int_a^b (f \circ \phi)(y) |\phi'(y)| dy. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi la formule du changement de variables pour l'intégrale de Lebesgue.

Exemple 6.3.1 (Coordonnées polaires). Soit

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{R}_+^* \times]0, \frac{\pi}{2}[&\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \\ (\rho, \theta) &\longmapsto \phi(\rho, \theta) := (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \end{aligned}$$

L'application ϕ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme (admis), de matrice Jacobienne

$$\forall (\rho, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, \frac{\pi}{2}[, \quad J_\phi(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Il vient

$$|\det J_\phi(\rho, \theta)| = |\rho \cos^2(\theta) + \rho \sin^2(\theta)| = |\rho|.$$

Soit

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto e^{-(x^2+y^2)}, \end{aligned}$$

f est mesurable (car continue) et positive. D'après le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} e^{-(x^2+y^2)} d(\lambda \otimes \lambda)(x, y) &= \int_{[0, +\infty[} \int_{[0, +\infty[} e^{-(x^2+y^2)} d\lambda(x) d\lambda(y) \\ &= \int_{[0, +\infty[} e^{-x^2} \left(\int_{[0, +\infty[} e^{-y^2} d\lambda(y) \right) d\lambda(x) \\ &= \left(\int_{[0, +\infty[} e^{-y^2} d\lambda(y) \right) \times \int_{[0, +\infty[} e^{-x^2} d\lambda(x) \\ &= \left(\int_{[0, +\infty[} e^{-y^2} d\lambda(y) \right)^2. \end{aligned}$$

En utilisant la formule du changement de variables, il vient

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} e^{-(x^2+y^2)} d(\lambda \otimes \lambda)(x, y) &= \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} e^{-(x^2+y^2)} d(\lambda \otimes \lambda)(x, y) \\
 &= \int_{]0, +\infty[\times]0, \pi/2[} e^{-\rho^2} |\rho| d(\lambda \otimes \lambda)(\rho, \theta) \\
 &= \int_{[0, +\infty] \times [0, \pi/2]} e^{-\rho^2} |\rho| d(\lambda \otimes \lambda)(\rho, \theta).
 \end{aligned}$$

Par Fubini-Tonelli, il vient

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} e^{-(x^2+y^2)} d(\lambda \otimes \lambda)(x, y) &= \int_{[0, +\infty]} \left(\int_{[0, \pi/2]} e^{-\rho^2} |\rho| d\lambda(\theta) \right) d\lambda(\rho) \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}_+} \rho e^{-\rho^2} d\lambda(\rho).
 \end{aligned}$$

Or, l'intégrale de Riemann impropre $\int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho$ est convergente (et vaut $1/2$), avec $\rho \rightarrow \rho e^{-\rho^2}$ mesurable positive sur \mathbb{R}_+ . Il vient que $\rho \rightarrow \rho e^{-\rho^2}$ est Lebesgue-intégrable sur \mathbb{R}_+ et on a

$$\int_{\mathbb{R}_+} \rho e^{-\rho^2} d\lambda(\rho) = \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\left(\int_{[0, +\infty]} e^{-y^2} d\lambda(y) \right)^2 = \frac{\pi}{4},$$

soit

$$\int_{[0, +\infty]} e^{-y^2} d\lambda(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

□

Exemple 6.3.2 (Convolution). Soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et intégrables. Rappelons que la convolée de f et g est

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) d\lambda(y).$$

Montrons que cette fonction est bien définie (c'est à dire que $f \star g < \infty$ p.p.). Nous avons

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} |(f \star g)(x)| d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) d\lambda(y) \right| d\lambda(x) \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)||g(x-y)| d\lambda(y) \right) d\lambda(x) \\
 (\text{par Fubini-Tonelli}) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)||g(x-y)| d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-y)| d\lambda(x) \right) d\lambda(y).
 \end{aligned}$$

Pour y fixé, soit le changement de variable en dimension 1 ($u = x - y$, $x = u + y$) :

$$\begin{aligned}\phi: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto u + y\end{aligned}$$

ϕ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme et $\forall u \in \mathbb{R}$, $|\det(J_\phi)| = |\phi'(u)| = 1$. Il vient

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x - y)| d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} |g(u)| d\lambda(u).$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |(f \star g)(x)| d\lambda(x) &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |g(u)| d\lambda(u) \right) d\lambda(y) \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} |g(u)| d\lambda(u) \right) \times \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)| d\lambda(y) \right) \\ (f \text{ et } g \text{ intégrables}) &< +\infty.\end{aligned}$$

Il vient $|f \star g|$ est finie μ -p.p., et donc $f \star g$ est finie μ -p.p. Fixons x et opérons un changement de variable $y = x - u$ dans l'intégrale :

$$\begin{aligned}\phi: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto x - u,\end{aligned}$$

ϕ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme et $\forall u \in \mathbb{R}$, $|\det(J_\phi)| = |\phi'(u)| = 1$. On a

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y) d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x - u)g(u) d\lambda(u)$$

Finalement,

$$f \star g = g \star f.$$

□

Exercice 6.3.1 (solution p. 83) : On pose

$$I = \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} d\lambda(x) d\lambda(y).$$

1. Vérifier que le théorème de Fubini s'applique à I .
2. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{1+x^2y} d\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\pi}{2}.$$

3. En déduire que $I = \frac{\pi^2}{2}$.
4. Retrouver ce résultat en utilisant le changement de variables : $v = x\sqrt{y}$, $t = \sqrt{y}$.

Perspectives probabilistes (compléments)

7.1	Cadre mathématique	65
7.2	Loi discrète	67
7.3	Loi à densité	68

Pour plus de détails, voir par exemple [1].

7.1 Cadre mathématique

Définition 7.1.1 – Espace “probabilisé”

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace mesuré avec

- Ω : espace fondamental de l’épreuve (espace des “éventualités”),
- \mathcal{A} : tribu sur Ω des “événements” (ensemble d’éventualités),
- P : mesure de probabilité sur \mathcal{A} .

Définition 7.1.2 – Variable aléatoire réelle

Soit $X: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. X est une variable aléatoire réelle si X est mesurable.

Remarque 7.1.1 (Notations). On parlera de v.a.r. pour variable aléatoire réelle. Soit X une v.a.r.. Alors, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. On adoptera les notations

$$(X \in B) := X^{-1}(B) \quad \text{et} \quad P(X \in B) := P(X^{-1}(B)).$$

Définition 7.1.3 – Loi de X

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace “probabilisé” et X une v.a.r. On définit

$$\begin{aligned} P_X: \mathcal{B}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ \\ B &\longmapsto P_X(B) := P(X^{-1}(B)). \end{aligned}$$

P_X est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, appelé loi de la variable X .

Remarque 7.1.2. La loi de la variable X est en fait la mesure image de P par X .

Définition 7.1.4 – Fonction de répartition

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace “probabilisé” et X une v.a.r.. P_X est une mesure de probabilité. Elle est caractérisée par ses valeurs sur les intervalles de la forme $]-\infty, t]$ avec $t \in \mathbb{R}$. On définit ainsi sa fonction de répartition, notée F_X par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) := P_X(]-\infty, t]) = P(X^{-1}(]-\infty, t])) = P(X \leq t).$$

Définition 7.1.5 – Espérance mathématique

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace “probabilisé” et X une v.a.r. positive ou intégrable (c’est-à-dire $\int_{\Omega} |X| dP < +\infty$). On définit l’espérance mathématique de X , notée $E[X]$, par

$$E[X] = \int_{\Omega} X dP.$$

Remarque 7.1.3. Cette formule de l’espérance n’est pas forcément pratique pour son calcul. Il s’agit de l’intégrale sur l’espace fondamental Ω vis-à-vis de la mesure P , ce qui renvoie à un cadre plutôt abstrait. On va donc chercher à se ramener à des espaces mesurés pour lesquels on maîtrise mieux les calculs.

Théorème 7.1.6 – Mesure image

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace “probabilisé”, X une v.a.r. et $\phi \in \mathcal{F}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\phi(X)$ est intégrable. Alors,

$$E[\phi(X)] = \int_{\Omega} \phi(X) dP = \int_{\mathbb{R}} \phi dP_X.$$

► Revenir aux fonctions étagées mesurables positives, puis passer à la limite. ■

Corollaire 7.1.7 – Cas particulier

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace “probabilisé” et X une v.a.r. positive ou intégrable. On a

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x).$$

► i) On suppose que $\phi = \mathbf{1}_B$ avec $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. ϕ est mesurable (positive) et on a

$$\phi(X) = \mathbf{1}_B \circ X = \mathbf{1}_{X^{-1}(B)}.$$

D’où

$$E[\phi(X)] = \int_{\Omega} \mathbf{1}_{X^{-1}(B)} dP = P(X^{-1}(B)) = P_X(B) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_B dP_X = \int_{\mathbb{R}} \phi dP_X.$$

ii) On suppose que $\phi \in \mathcal{M}_+^0$. On note $\phi = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{B_i}$ avec $\forall i = 1 : n, a_i \geq 0, B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

ϕ est mesurable (positive) et on a

$$\begin{aligned} E[\phi(X)] &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n a_i (\mathbb{1}_{B_i} \circ X) dP = \sum_{i=1}^n a_i \int_{\Omega} \mathbb{1}_{B_i} \circ X dP \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{B_i} dP_X \quad (\text{par } i)) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{B_i} dP_X = \int_{\mathbb{R}} \phi dP_X. \end{aligned}$$

iii) On suppose que $\phi \in \mathcal{M}_+$. Alors $\exists(\phi_n)$ une suite croissante de fonctions étagées mesurables positives qui converge simplement vers ϕ . D'après le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n dP_X = \int_{\mathbb{R}} \phi dP_X.$$

De même, la suite $(\phi_n(X))$ est une suite croissante de fonctions étagées mesurables positives qui converge simplement vers $\phi(X)$. D'après le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \phi_n(X) dP = \int_{\Omega} \phi(X) dP.$$

D'après ii), on a $\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\Omega} \phi_n(X) dP = \int_{\mathbb{R}} \phi_n dP_X$. À la limite, il vient

$$E[\phi(X)] = \int_{\Omega} \phi(X) dP = \int_{\mathbb{R}} \phi dP_X.$$

iv) On suppose que $\phi \in \mathcal{M}$. Le résultat suit en appliquant iii) aux parties positive et négative de ϕ . ■

7.2 Loi discrète

Définition 7.2.1

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace “probabilisé”. X une v.a.r. est de loi discrète si elle est à valeurs dans une partie au plus dénombrable de \mathbb{R} . Dans la suite on supposera que X est à valeurs dans \mathbb{N} .

Proposition 7.2.2 – Mesure image

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace “probabilisé”, X une v.a.r. de loi discrète. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P(X = n) = P_X(\{n\}).$$

On a

$$P_X = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \delta_n.$$

P_X est ainsi la mesure de probabilité discrète.

► Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}
 P_X(B) &= P(X \in B) = P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B\}) \\
 &= P(\cup_{n \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B \cap \{n\}\}) \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B \cap \{n\}\}) \quad (\text{éléments disjoints 2 à 2}) \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N} \cap B} \underbrace{P(X = n)}_{=p_n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \mathbb{1}_B(n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \delta_n(B).
 \end{aligned}$$

■

Proposition 7.2.3 – Mesure image

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace “probabilisé”, X une v.a.r. de loi discrète. On a

$$E[X] = \sum_{n \in \mathbb{N}} n p_n.$$

De plus, $\forall \phi$ définie sur \mathbb{N} et mesurable, on a

$$E[\phi(X)] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi(n) p_n.$$

► On a

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \int_{\mathbb{R}} x \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n d\delta_n(x) \quad (= \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x)) \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \int_{\mathbb{R}} x d\delta_n(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n n \quad (\text{car } \int_{\mathbb{R}} x d\delta_n(x) = n)
 \end{aligned}$$

■

7.3 Loi à densité

Définition 7.3.1 – Mesure à densité

Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. La mesure μ est dite avoir pour densité la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ (par rapport à λ) si

$$\forall \phi \in \mathcal{M}_+, \quad \int_{\mathbb{R}} \phi d\mu = \int_{\mathbb{R}} \phi f d\lambda.$$

En particulier $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu(B) = \int_B f d\lambda$.

■ **Remarque 7.3.1.** Soit P une mesure de probabilité ayant pour densité la fonction

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Alors,

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = P(\mathbb{R}) = 1.$$

Dans le cadre des probabilités, on dit que X v.a.r. admet pour densité f si $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $P_X(B) = \int_B f \, d\lambda$, avec f mesurable positive telle que $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = 1$. C'est un abus de langage : ce n'est pas X qui admet une densité, mais la mesure image P_X , qui dépend naturellement de X .

Proposition 7.3.2 – Mesure image

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace “probabilisé”, X une v.a.r. positive ou intégrable “admettant” une densité f . On a

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x) \, d\lambda(x).$$

De plus, $\forall \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\phi(X)$ est intégrable, on a

$$E[\phi(X)] = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f(x) \, d\lambda(x).$$

► La preuve est similaire à celle du théorème de la mesure image. ■

Remarque 7.3.2. S'étant ramener à l'intégrale vis-à-vis de la mesure de Lebesgue, les calculs se feront en pratique via les liens entre les intégrales de Riemann et Lebesgue sur des segments et intervalles. On se ramènera ainsi à

$$E[\phi(X)] = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f(x) \, d\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) f(x) \, dx.$$

Corrections des exercices

Solution de l'Exercice 2.1.1 p. 6 : Montrons que $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{O})$ et que $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{C})$.

- Soit $I :=]a, b[\in \mathcal{C}$. On a

$$I \in \mathcal{C} \subset \mathcal{O} \Rightarrow I \in \sigma(\mathcal{O}) \Rightarrow \mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{O}).$$

- Soit $O \in \mathcal{O}$. On suppose pour le moment que l'on peut écrire O sous la forme

$$O = \bigcup_n]a_n, b_n[, \quad \text{avec} \quad \forall n :]a_n, b_n[\in \mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C}).$$

Puisque $\sigma(\mathcal{C})$ est stable par réunion dénombrable, $O \in \sigma(\mathcal{C})$ et donc $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{C})$.

Il reste à montrer que l'on peut écrire O sous la forme

$$O = \bigcup_n]a_n, b_n[, \quad \forall n :]a_n, b_n[\in \mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C}).$$

On introduit $\mathcal{C}_O := \{]a, b[\mid a < b \in \mathbb{Q} \text{ et }]a, b[\subset O\}$. \mathcal{C}_O est dénombrable car s'injecte dans \mathbb{Q}^2 . Montrons que $O = \bigcup_{I \in \mathcal{C}_O} I$.

- Soit $x \in \bigcup_{I \in \mathcal{C}_O} I$. Alors $\exists a < b \in \mathbb{Q}$ t.q. $x \in]a, b[\subset O$ donc $x \in O$.
- Soit $x \in O$.

O est un ouvert donc $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset O$.

Puisque \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , $\exists a < b$ dans \mathbb{Q} t.q. $x - \varepsilon < a < x < b < x + \varepsilon$, i.e. $]a, b[\subset]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset O$ et $x \in]a, b[$, donc $]a, b[\in \mathcal{C}_O$ et $x \in \bigcup_{I \in \mathcal{C}_O} I$.

Solution de l'Exercice 2.2.1 p. 11 : On note pour $\Delta \in \{=, \leq, \geq, <, >\}$, $A_\Delta := \{x \in E \mid f_1(x) - f_2(x) \Delta 0\}$. On définit $h := f_1 - f_2$ de (E, \mathcal{A}) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Alors, h est mesurable comme combinaison linéaire d'applications mesurables. On a d'une part

$$A_ = h^{-1}(\{0\}), \quad A_\leq = h^{-1}(\mathbb{R}_-), \quad A_\geq = h^{-1}(\mathbb{R}_+), \quad A_< = h^{-1}(\mathbb{R}_-^*) \text{ et } A_> = h^{-1}(\mathbb{R}_+^*).$$

D'autre part, puisque $\{0\}$, \mathbb{R}_- , \mathbb{R}_+ , \mathbb{R}_-^* et \mathbb{R}_+^* appartiennent à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ en tant qu'ouverts ou fermés de \mathbb{R} , pour tout $\Delta \in \{=, \leq, \geq, <, >\}$, il vient finalement que A_Δ est mesurable, c'est-à-dire $A_\Delta \in \mathcal{A}$, comme image réciproque d'un ensemble mesurable par une application mesurable.

Solution de l'Exercice 2.3.1 p. 13 : Montrons que μ vérifie les deux propriétés de la définition.

- $\mu(\emptyset) = 0$ car \emptyset est de cardinal nul ;
- Soient A_1, A_2, \dots dans \mathcal{A} 2 à 2 disjoints. Notons $A = \cup_n A_n$.
 - Si tous les A_i sont dénombrables, alors A l'est et

$$\mu(A) = 0 = \sum_n 0 = \sum_n \mu(A_n).$$

- Si $\exists m$ tel que A_m soit non dénombrable, alors A est non dénombrable et A_m^c est dénombrable (car $A_m \in \mathcal{A}$). On sait que $\forall n, n \neq m, A_n \subset A_m^c$ (car disjoints) et donc A_n est dénombrable. Finalement,

$$\mu(A) = 1 = 0 + 1 = \sum_{n \neq m} \mu(A_n) + \mu(A_m) = \sum_n \mu(A_n).$$

Solution de l'Exercice 2.3.3 p. 14 : Tout d'abord, μ_f est bien une application définie sur une tribu, en l'occurrence \mathcal{A}_2 . Elle est bien définie car $\mu_f(B) = \mu(f^{-1}(B))$ avec $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$ pour $B \in \mathcal{A}_2$ car f mesurable, et bien à valeurs dans \mathbb{R}_+ car μ est une mesure sur (E_1, \mathcal{A}_1) . Vérifions maintenant les deux axiomes de la définition d'une mesure :

- $\mu_f(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$.
- Soit (B_n) une suite d'éléments de \mathcal{A}_2 2 à 2 disjoints.

$$\begin{aligned} \mu_f(\cup_n B_n) &= \mu(f^{-1}(\cup_n B_n)) \\ &= \mu(\cup_n f^{-1}(B_n)), \text{ d'après les formules de Hausdorff} \\ &= \sum_n \mu(f^{-1}(B_n)), \text{ car } x \in f^{-1}(B_i) \cap f^{-1}(B_j) \Leftrightarrow f(x) \in B_i \cap B_j, \\ &\quad \text{donc les } f^{-1}(B_i) \text{ sont 2 à 2 disjoints} \\ &= \sum_n \mu_f(B_n). \end{aligned}$$

Donc μ_f est une mesure sur (E_2, \mathcal{A}_2) .

Solution de l'Exercice 2.3.4 p. 15 :

- Soient $t_1 < t_2$, alors $]-\infty, t_1] \subset]-\infty, t_2]$, donc par croissance de la mesure p :

$$F(t_1) = p(]-\infty, t_1]) \leq p(]-\infty, t_2]) = F(t_2).$$

Donc F est croissante.

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Soit $(t_n) \searrow$ telle que $t_n \rightarrow t^+$. On note $A_n =]-\infty, t_n]$ et $A =]-\infty, t]$.

Pour tout n , $p(A_n) < +\infty$, donc par continuité à droite de p on a

$$\lim F(t_n) = \lim p(A_n) = p(\lim A_n) = p(\cap A_n) = p(A) = F(t).$$

Donc F est continue à droite.

Remarque. Soit (A_n) une suite de sous-ensembles d'un ensemble E donné et A un autre sous-ensemble. $A = \lim A_n$ si : $\forall x \in A$, $\exists n_0$ tel que $\forall n \geq n_0$, $x \in A_n$ et si $\forall x \in A^c$, $\exists n_1$ tel que $\forall n \geq n_1$, $x \notin A_n$.

Remarque. D'après l'exercice 2.20.6 de "Topologie et analyse fonctionnelle" de C. Wagschal, on peut ne considérer que les suites strictement décroissantes pour montrer la continuité à droite.

- Soit $(t_n) \searrow$ telle que $t_n \rightarrow -\infty$. Par continuité à droite de p on a

$$\lim F(t_n) = \lim p(A_n) = p(\lim A_n) = p(\cap A_n) = p(\emptyset) = 0.$$

- Soit $(t_n) \nearrow$ telle que $t_n \rightarrow +\infty$. Par continuité à gauche de p on a

$$\lim F(t_n) = \lim p(A_n) = p(\lim A_n) = p(\cup A_n) = p(\mathbb{R}) = 1.$$

Donc $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 1$.

Solution de l'Exercice 2.3.5 p. 16 :

1. Montrons que λ est σ -finie, i.e. $\exists (E_n)$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\mathbb{R} = \cup_n E_n$ et $\lambda(E_n) < +\infty$, $\forall n$ (i.e. il existe un recouvrement dénombrable de \mathbb{R} par des sous-ensembles mesurables de mesures finies).

$$\mathbb{R} = \cup_n [-n, n] \quad \text{et} \quad \lambda([-n, n]) = 2n < +\infty \quad \forall n.$$

$\Rightarrow \lambda$ est σ -finie.

2. K compact donc fermé donc mesurable. Il est aussi borné donc $\exists n$ tel que $K \subset [-n, n]$ donc $\lambda(K) \leq 2n < +\infty$. La proposition est vraie.
3. Soit $O = \cup_{n \geq 1}]n, n + \frac{1}{2^n}[$ mesurable car ouvert. Alors,

$$\lambda(O) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(]n, n + \frac{1}{2^n}[) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < +\infty,$$

par σ -additivité de λ car les intervalles sont 2 à 2 disjoints. Puisque O n'est pas borné et de mesure finie, la proposition est fausse.

Solution de l'Exercice 3.1.1 p. 18 : Soit $f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ une représentation de f (I de cardinal fini).

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f \, d\delta_0 &= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \right) d\delta_0 \\ &= \sum_{i \in I} \alpha_i \delta_0(A_i) = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(0) = f(0). \end{aligned}$$

Solution de l'Exercice 3.2.1 p. 22 : Soit $a > 0$. On a $a \mathbb{1}_{\{f > a\}} \leq f$ car f est positive. Par croissance de l'intégrale

$$\int_E a \mathbb{1}_{\{f > a\}} \, d\mu = a \mu(\{f > a\}) \leq \int_E f \, d\mu.$$

Solution de l'Exercice 3.2.2 p. 24 : D'après l'Exercice 3.1.1, on sait que pour toute fonction étagée f on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\delta_0 = f(0).$$

Soit $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. D'après le lemme d'approximation, il existe une suite croissante (f_n) dans $\mathcal{E}_+(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ qui converge simplement vers f . D'après le théorème de convergence monotone (ou Beppo-Levi) :

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\delta_0 = \lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\delta_0 = \lim_n f_n(0) = f(0).$$

Remarque. On peut aussi utiliser la relation de Chasles, cf. Proposition 4.2.5 :

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\delta_0 = \int_{\{0\}} f \, d\delta_0 + \int_{\mathbb{R}^*} f \, d\delta_0 = \int_{\{0\}} f \, d\delta_0 = f(0)$$

car $\int_{\mathbb{R}^*} f \, d\delta_0 = 0$ puisque $\delta_0(\mathbb{R}^*) = 0$ et $\int_{\{0\}} f \, d\delta_0 = \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{\{0\}} \, d\delta_0 = f(0)$ car $f \mathbb{1}_{\{0\}}$ étagée.

Solution de l'Exercice 3.2.3 p. 25 : La suite (f_n) converge simplement sur \mathbb{R}_+^* vers $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$. D'après le lemme de Fatou

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^*} \liminf_n f_n \, d\lambda &\leq \liminf_n \int_{\mathbb{R}_+^*} f_n \, d\lambda \\ \Rightarrow \int_{\mathbb{R}_+^*} \liminf_n f_n \, d\lambda &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \lim_n f_n \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}_+^*} f \, d\lambda \leq \liminf_n \int_{\mathbb{R}_+^*} f_n \, d\lambda \\ \Rightarrow \liminf_n \int_{\mathbb{R}_+^*} f_n \, d\lambda &= +\infty, \text{ d'après l'indication.} \end{aligned}$$

On a $\liminf_n f_n = \lim_n f_n = f$ car (f_n) converge. Ainsi $\liminf_n \int_{\mathbb{R}_+^*} f_n d\lambda = +\infty = \limsup_n \int_{\mathbb{R}_+^*} f_n d\lambda = \lim_n \int_{\mathbb{R}_+^*} f_n d\lambda$.

Solution de l'Exercice 3.2.4 p. 26 : 1. Vérifions que ν est bien une mesure.

- ν est bien définie, définie sur la tribu \mathcal{A} et est bien à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+$.
- $\nu(\emptyset) = \int_E f \mathbb{1}_\emptyset d\mu = 0$, car $f \mathbb{1}_\emptyset$ est la fonction étagée nulle partout.
- Soit (A_n) une suite d'éléments de \mathcal{A} 2 à 2 disjoints. On a

$$\begin{aligned} \nu(\cup_n A_n) &= \int_E f \mathbb{1}_{\cup_n A_n} d\mu = \int_E f \sum_n \mathbb{1}_{A_n} d\mu, \quad \text{car les } A_n \text{ sont 2 à 2 disjoints} \\ &= \int_E \sum_n f \mathbb{1}_{A_n} d\mu = \sum_n \int_E f \mathbb{1}_{A_n} d\mu, \quad \text{d'après la Proposition 3.2.15} \\ &\quad \text{avec } f_n = f \mathbb{1}_{A_n} \\ &= \sum_n \nu(A_n). \end{aligned}$$

Donc ν est une mesure sur (E, \mathcal{A}) .

2. Puisque ν est une mesure, par σ -additivité :

$$\int_A f d\mu = \nu(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \nu(A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

Solution de l'Exercice 3.2.5 p. 26 : Posons $f_n = f \mathbb{1}_{\cup_{i=0}^n A_i}$. Puisque f est positive, la suite (f_n) est une suite croissante de fonctions mesurables positives, de limite $f \mathbb{1}_A$. D'après le Théorème 3.2.11 de convergence monotone :

$$\int_A f d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_E f \mathbb{1}_A d\mu = \lim_n \int_E f_n d\mu = \lim_n \int_E f \mathbb{1}_{\cup_{i=0}^n A_i} d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \lim_n \int_{\cup_{i=0}^n A_i} f d\mu.$$

Puisque les A_i sont deux à deux d'intersection de mesure nulle, par la relation de Chasles, cf. Proposition 4.2.5, on a

$$\int_{\cup_{i=0}^n A_i} f d\mu = \sum_{i=0}^n \int_{A_i} f d\mu.$$

En passant à la limite, on obtient

$$\int_A f d\mu = \lim_n \int_{\cup_{i=0}^n A_i} f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

Note. Nous utilisons la relation de Chasles qui est montré au chapitre suivant pour simplifier la démonstration.

Solution de l'Exercice 3.2.6 p. 27 : Supposons que $\delta_0 = f\lambda$. Alors, d'après le Corollaire 3.2.5,

$$1 = \delta_0(\{0\}) = \int_{\{0\}} f \, d\lambda = 0 \quad \text{car} \quad \lambda(\{0\}) = 0.$$

Solution de l'Exercice 4.4.1 p. 39 : Par exemple $f(x) = \frac{1}{x \ln^2(x)}$ sur $]0, \frac{1}{2}[$ et $f(x) = \frac{1}{1+x}$ sur \mathbb{R}_+ .

Solution de l'Exercice 4.4.2 p. 39 : L'inégalité de Hölder donne en prenant $g = 1$ et en notant $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} > 0$, c-à-d $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$:

$$\|fg\|_p = \|f\|_p \leq \|f\|_q \|1\|_r = M^{\frac{1}{r}} \|f\|_q.$$

Ce qui montre que si $f \in L^q$ alors $f \in L^p$.

On aurait aussi pu écrire :

$$\begin{aligned} \|f\|_q^q &= \left(\int_E |f|^q \, d\mu \right) \\ &= \left(\int_{\{|f| \leq 1\}} |f|^q \, d\mu \right) + \left(\int_{\{|f| > 1\}} |f|^q \, d\mu \right) \\ &\leq \mu(\{|f| \leq 1\}) + \left(\int_{\{|f| > 1\}} |f|^q \, d\mu \right) \\ &\leq \mu(E) + \left(\int_{\{|f| > 1\}} |f|^p \, d\mu \right) \\ &\leq \mu(E) + \left(\int_E |f|^p \, d\mu \right). \end{aligned}$$

Pour montrer $L^\infty \subset L^q$ on note que si $f \in L^\infty$ alors f est finie p.p. : $|f| \leq K < +\infty$. D'où en élevant à la puissance q et en intégrant

$$\|f\|_q^q \leq K^q \mu(E) < +\infty.$$

Solution de l'Exercice 4.4.3 p. 39 : D'après l'inégalité de Hölder (enfin Cauchy-Schwarz puisque $p = q = 2$), cf. Théorème 4.4.6, vu que f_n et g_n sont dans L^2 , alors $f_n g_n$ est dans L^1 . En utilisant l'inégalité triangulaire, Cauchy-Schwarz, et le fait qu'il existe $M > 0$ tel que $\|f_n\|_2 \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (f_n est une suite convergente dans

L^2 donc bornée)

$$\begin{aligned}
 \|f_n g_n - f g\|_1 &= \|f_n g_n - f_n g + f_n g - f g\|_1 \\
 &\leq \|f_n g_n - f_n g\|_1 + \|f_n g - f g\|_1 \\
 &\leq \|f_n\|_2 \|g_n - g\|_2 + \|g\|_2 \|f_n - f\|_2 \\
 &\leq M \|g_n - g\|_2 + \|g\|_2 \|f_n - f\|_2
 \end{aligned}$$

Et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g_n - g\|_2 = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n g_n - f g\|_1 = 0.$$

Solution de l'Exercice 5.1.1 p. 44 : On pose pour $n \geq N$, $g_n = (f_N - f_n) \mathbb{1}_{\{f_N < +\infty\}}$.

Remarque. Puisque $\int_E f_N d\mu < +\infty$, alors $f_N < +\infty$ μ -pp. Puisque $f_n \leq f_N$ alors $g_n < +\infty$ sur tout E . On peut supposer pour la suite que $\forall n$, $f_n < +\infty$, pour alléger les notations.

La suite $(g_n)_{n \geq N}$ est une suite de fonctions mesurables positives croissantes donc d'après le théorème de convergence monotone : $g = \lim_n g_n = \sup_n g_n \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A})$ et

$$\int_E g d\mu = \lim_n \int_E g_n d\mu.$$

- Etudions le terme de droite (on utilise des arguments sur l'intégrale des fonctions mesurables positives). Puisque $f_N = g_n + f_n$ avec $f_n, g_n \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
 \int_E f_N d\mu &= \int_E (g_n + f_n) d\mu = \int_E g_n d\mu + \int_E f_n d\mu \\
 \Rightarrow \int_E f_N d\mu &= \lim_n \int_E g_n d\mu + \lim_n \int_E f_n d\mu, \text{ par passage à la limite.}
 \end{aligned}$$

Remarque. On peut aussi utiliser les résultats sur l'intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque. Dans ce cas, puisque f_N et f_n sont intégrables, alors $\int g_n = \int f_N - \int f_n$ et par passage à la limite on a

$$\lim_n \int_E g_n d\mu = \int_E f_N d\mu - \lim_n \int_E f_n d\mu.$$

- De même, pour le terme de gauche, on a $g = \sup_n (f_N - f_n) = f_N - \inf_n f_n = f_N - f$, donc en écrivant $f_N = g + f$ on obtient (sachant que $f, g \geq 0$) :

$$\int_E f_N d\mu = \int_E g d\mu + \int_E f d\mu.$$

Finalement on obtient le résultat recherché puisque $\int f_N < +\infty$.

Remarque. On pouvait aussi utiliser directement le Théorème 5.1.6 de convergence dominée en choisissant f_N comme majorant à partir de $n \geq N$.

Solution de l'Exercice 5.1.2 p. 47 : Par passage à la limite dans $|f_n| \leq g$ on a $|f| \leq g$. Donc par inégalité triangulaire $|f_n - f| \leq 2g$, puis $|f_n - f|^p \leq 2^p g^p$, où g^p est une fonction intégrable indépendante de n . D'après le théorème de convergence dominée on peut donc passer à la limite dans

$$\int_E |f_n - f|^p d\mu$$

ce qui fournit $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.

Solution de l'Exercice 5.2.1 p. 51 :

1. La fonction $\sin(x)$ est continue sur $[0, \pi]$ et donc Riemann intégrable. D'après le Théorème 5.2.1 faisant le lien entre les intégrales de Riemann et Lebesgue sur un segment, $\sin(x)$ est aussi Lebesgue intégrable et

$$\int_{[0, \pi]} \sin(x) d\lambda(x) = \int_0^\pi \sin(x) dx = 2.$$

2. La fonction $e^{-x} \cos(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $|e^{-x} \cos(x)| \leq e^{-x}$. Et donc la fonction $e^{-x} \cos(x)$ possède une intégrale de Riemann absolument convergente. D'après le Théorème 5.2.2 faisant le lien entre les intégrales de Riemann impropre et Lebesgue, $e^{-x} \cos(x)$ admet une intégrale de Lebesgue sur \mathbb{R}_+ égale à celle de Riemann :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-x} \cos(x) d\lambda(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x+ix} + e^{-x-ix} \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{e^{-x+ix}}{-1+i} \right]_0^{+\infty} + \left[\frac{e^{-x-ix}}{-1-i} \right]_0^{+\infty} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-i} + \frac{1}{1+i} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. La fonction $1/(1+x^2)$ est continue sur $[0, +\infty[$, positive et son intégrale de Riemann (impropre) sur \mathbb{R}_+ est bien finie $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx < +\infty$. D'après le Théorème 5.2.2 faisant le lien entre les intégrales de Riemann impropre et Lebesgue, $\frac{1}{1+x^2}$ admet une intégrale de Lebesgue sur \mathbb{R}_+ :

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{1+x^2} d\lambda(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan(x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

4. La fonction

$$h(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbb{1}_{[0,4]}(x) + \frac{1}{x^2} \mathbb{1}_{]4,+\infty[}(x)$$

est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+^* . De plus, h possède une intégrale de Riemann absolument convergente au voisinage de 0^+ et de $+\infty$. D'après le Théorème 5.2.2

faisant le lien entre les intégrales de Riemann impropre et Lebesgue, h admet une intégrale de Lebesgue sur \mathbb{R}_+^* :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+^*} h(x) d\lambda(x) &= \int_0^{+\infty} h(x) dx \\ &= \int_0^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx + \int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = [\sqrt{x}]_0^4 + \left[\frac{-1}{x}\right]_4^{+\infty} = \frac{9}{4}.\end{aligned}$$

Solution de l'Exercice 5.2.2 p. 51 :

1. Vu que $|\cos(x)| \in [0, 1]$, la suite des fonctions f_n est une suite de fonctions croissante. De plus, $f_n(x)$ est positive pour tout x dans \mathbb{R}_+ . D'après le Théorème 5.1.5 de convergence monotone,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n(x) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\lambda(x).$$

Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$. Notons

$$A := \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{3\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Remarquons que $\forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus A$, $\cos(x) \neq 0$. Et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\cos(x)|^{\frac{1}{n}} = 1$ et que $\forall x \in A$, $f_n(x) = 0$. Alors la suite de fonction f_n va converger simplement vers la fonction

$$\begin{aligned}f: \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto f(x) := \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \notin A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}\end{aligned}$$

Comme A est dénombrable, f_n converge p.p. vers e^{-x} . Et comme l'intégrale de Riemann et de Lebesgue de e^{-x} coïncident :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n(x) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-x} dx = 1.$$

2. En écrivant

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{x}{n})}$$

et sachant que $\ln(1 - x) = -x + o(x)$, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = e^{-x} \cos(x)$ et $e^{-x} \cos(x)$ est mesurable. Par concavité du logarithme, on a pour tout $u < 1$

$$\ln(1 - u) \leq -u.$$

Soit $0 < x < n$. En prenant $u = \frac{x}{n}$, on a

$$\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \leq -\frac{x}{n}.$$

Et donc par croissance de l'exponentielle

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{x}{n})} \leq e^{-x}.$$

Alors

$$|f_n(x)| \leq \left| \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,n]}(x) \right| \leq e^{-x}.$$

En appliquant le Théorème 5.1.6 de convergence dominée à la suite de fonctions f_n , on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}_+} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-x} \cos(x) dx = \frac{1}{2}.$$

Solution de l'Exercice 5.3.1 p. 53 :

1. Soit $t \geq 0$, alors

$$\frac{e^{-tx}}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ . Et donc F est définie sur \mathbb{R}_+ . Si $t < 0$, comme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-tx}}{1+x^2} = +\infty,$$

alors $\int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-tx}}{1+x^2} d\lambda(x) = +\infty$, F est alors définie seulement sur \mathbb{R}_+ . Déterminons le domaine de continuité de F . Posons

$$f(t, x) := \frac{e^{-tx}}{1+x^2},$$

- i. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto f(t, x)$ est mesurable.
- ii. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto f(t, x)$ est continue sur \mathbb{R}_+ .
- iii. Plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$0 \leq f(t, x) \leq \frac{1}{1+x^2}$$

Le membre de gauche est positive, mesurable et intégrable sur \mathbb{R}_+ .

D'après le Corollaire 5.3.2, F est continue sur \mathbb{R}_+ .

2. On a

$$F(0) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{1+x^2} d\lambda(x) = [\arctan(x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Soit t_n une suite de \mathbb{R}_+ qui converge vers $+\infty$ et définissons pour $x \in \mathbb{R}_+$, posons

$$g_n(x) := \frac{\exp(-t_n x)}{1+x^2}.$$

i. On a

$$0 \leq g_n(x) \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

De plus, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est intégrable positive sur \mathbb{R}_+^* .

ii. $\forall x > 0$, $g_n(x)$ converge vers 0. Donc g_n converge simplement vers $0 * \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ presque partout.

D'après le Théorème 5.1.6 de convergence dominée

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+} g_n(x) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) d\lambda(x) = 0$$

et vu qu'on a choisi n'importe quel suite t_n qui tend vers $+\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 0.$$

Solution de l'Exercice 5.3.2 p. 55 :

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x(x+t^2)}} d\lambda(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$. Pour déterminer si la fonction est intégrable, déterminons un équivalent intégrable au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$. Pour $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ et en utilisant que $\sin x \leq x$ on a

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x(x+t^2)}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (8.1)$$

et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable au voisinage de 0^+ . Pour tout x dans \mathbb{R}

$$\left| \frac{\sin x}{\sqrt{x(x+t^2)}} \right| \leq \frac{1}{x\sqrt{x}} \quad (8.2)$$

et le second membre est intégrable au voisinage de $+\infty$. Et donc $F(t)$ est définie sur tout \mathbb{R} . Posons

$$h(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{]0, \frac{\pi}{2}[}(x) + \frac{1}{x\sqrt{x}} \mathbb{1}_{] \frac{\pi}{2}, +\infty[}(x), \quad f(t, x) := \frac{\sin x}{\sqrt{x(x+t^2)}}.$$

- i. $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t, x)$ est mesurable
- ii. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(t, x)$ est continue par rapport à t .
- iii. En combinant (8.1) et (8.2) on obtient

$$|f(t, x)| \leq h(x),$$

et il est clair que h est intégrable et mesurable sur \mathbb{R}_+ .

D'après le Corollaire 5.3.2, F est continue sur \mathbb{R} .

2. Vu que F est paire, on pourra se restreindre à $t \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $0 < \varepsilon < M$ et $\varepsilon < t < M$.

- i. $f(\varepsilon, x)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

ii. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(t, x)$ est dérivable par rapport à t et

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial t} = -\frac{2t \sin x}{\sqrt{x}(x+t^2)^2}$$

iii. En utilisant le fait que $\varepsilon < t < M$,

$$\left| \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} \right| \leq \frac{2M}{\sqrt{x}(x+\varepsilon^2)^2}.$$

Le membre de droite est intégrable sur \mathbb{R}_+ car au voisinage de 0^+ ,

$$\frac{2M}{\sqrt{x}(x+\varepsilon^2)^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

et au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{2M}{\sqrt{x}(x+\varepsilon^2)^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{xx^2}}\right).$$

D'après le Théorème 5.3.4 de dérivation "globale" sous le signe intégrale, F est dérivable sur $]\varepsilon, M[$ pour toutes les valeurs $M > \varepsilon > 0$, et donc dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

3. On a

$$\begin{aligned} \frac{F(t) - F(0)}{t} &= \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}(x+t^2)} - \frac{\sin x}{\sqrt{xx}} d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{-t^2 \sin x}{x\sqrt{x}(x+t^2)} d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{-t \sin x}{x\sqrt{x}(x+t^2)} d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{-2t \sin(u^2 t^2) u t^2}{u^2 t^2 u t (u^2 t^2 + t^2)} d\lambda(u) \\ &= -2 \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin(u^2 t^2)}{u^2 t^2 (1 + u^2)} d\lambda(u) \end{aligned} \quad (8.3)$$

Soit $t_n \rightarrow 0^+$. Notons

$$g_n(u) := \frac{\sin(u^2 t_n^2)}{u^2 t_n^2 (1 + u^2)}.$$

Alors,

$$|g_n(u)| \leq \frac{1}{1 + u^2},$$

le membre de droite est intégrable sur \mathbb{R}_+ . D'autre part $g_n(u)$ converge simplement vers la fonction $\frac{1}{1+u^2}$ sur \mathbb{R}_+ ($\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$). Par le Théorème 5.1.6 de convergence dominée, on obtient que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} g_n(u) d\lambda(u) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{1 + u^2} d\lambda(u) = \frac{\pi}{2}.$$

En injectant le dernier résultat dans (8.3) et le fait que t_n est une suite quelconque qui converge vers 0^+ , on a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t) - F(0)}{t} = -\pi.$$

4. Calculons la limite à gauche de zéro de $\frac{F(t)-F(0)}{t}$ en utilisant la parité de F

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t) - F(0)}{-t} = \pi.$$

Et donc F n'est pas dérivable en zéro.

Solution de l'Exercice 6.2.1 p. 59 : Soit $E = \mathbb{N}$, \mathcal{A} la tribu triviale (i.e. $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$) et μ la mesure de comptage (ou cardinalité) : (E, \mathcal{A}, μ) est un espace mesuré. Posons

$$\begin{aligned} f: (E, \mathcal{A}) \times (E, \mathcal{A}) &\longrightarrow (\bar{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}_+)) \\ (k, \ell) &\longmapsto f(k, \ell) := u_{k, \ell}. \end{aligned}$$

Alors, f est une fonction positive et mesurable. En appliquant le théorème de Fubini à la fonction f , on obtient

$$\int_E \left(\int_E f(k, \ell) d\mu(k) \right) d\mu(\ell) = \int_E \left(\int_E f(k, \ell) d\mu(\ell) \right) d\mu(k).$$

Et donc en utilisant le fait que

$$\int_E g(k) d\mu(k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} g(k)$$

pour toute fonction g positive et mesurable de (E, \mathcal{A}) dans $(\bar{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}_+))$. On obtient

$$\sum_{\ell \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} u_{k, \ell} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} u_{k, \ell}.$$

Remarque. On pouvait utiliser le théorème de Beppo-Levi en considérant la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\varphi_n = f_k \mathbb{1}_{\{l \leq n\}}$ avec

$$\begin{aligned} f_k: E &\longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ \\ l &\longmapsto f_k(l) := u_{k, l}. \end{aligned}$$

Solution de l'Exercice 6.3.1 p. 63 :

1. La fonction

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto g(x, y) := \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} \end{aligned}$$

est positive et continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Donc c'est une fonction mesurable et

positive et le théorème de Fubini s'applique.

2. En utilisant le changement de variable $u = x\sqrt{y}$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{1+x^2y} d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{1+u^2} \frac{1}{\sqrt{y}} d\lambda(u) = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\pi}{2}.$$

3. En appliquant Fubini pour le calcul de I et le résultat de la question précédente

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} d\lambda(x) d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{(1+y)} \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\pi}{2} d\lambda(y). \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $t = \sqrt{y}$ et donc $d\lambda(t) = \frac{d\lambda(y)}{2\sqrt{y}}$, on obtient

$$I = \pi \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{1+t^2} d\lambda(t) = \frac{\pi^2}{2}.$$

4. Pour le changement de variable indiqué, posons

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \\ (v, t) &\longmapsto \phi(v, t) := \left(\frac{v}{t}, t^2\right). \end{aligned}$$

La fonction ϕ est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dans $\phi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\det(J_\phi(v, t)) = \begin{vmatrix} \frac{1}{t} & -v \\ 0 & 2t \end{vmatrix} = 2.$$

En appliquant le changement de variable ϕ , on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} g(\phi(v, t)) |\det(J_\phi(v, t))| d\lambda(v) d\lambda(t) \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} \left(\frac{1}{1+t^2}\right) \left(\frac{1}{1+(\frac{v}{t})^2 t^2}\right) d\lambda(v) d\lambda(t) \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} \left(\frac{1}{1+t^2}\right) \left(\frac{1}{1+v^2}\right) d\lambda(v) d\lambda(t) = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] T. Gallouët and R. Herbin, *Mesure, intégration, probabilités*, Ellipses Edition Marketing, 2013. \leftrightarrow 16, 43, 57 et 65.
- [2] A. Kolmogorov and S. Fomine, *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*, Editions Mir, 1974. \leftrightarrow 57.
- [3] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, traduit de l'américain par N. Dhombres et F. Hoffman. Masson, 1975. \leftrightarrow 16 et 57.
- [4] C. Villani, *Intégration et Analyse de Fourier*, Cours de première année donné à l'Ecole normale supérieure de Lyon, année universitaire 2005–2006. \leftrightarrow 16, 25, 43 et 57.
- [5] C. Wagschal, *Dérivation, intégration*, Hermann, 2012. \leftrightarrow 57.