Intégration

Chapitre 4 : Les espaces $\mathscr{L}^1$, L^1 et L^p

Olivier Cots

14 novembre 2023

INP TOULOUSE ENSEEIHT n7

Chapitre 4 : Les espaces $\mathscr{L}^1$, L^1 et L^p

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

Chapitre 4 : Les espaces $\mathscr{L}^1$, L^1 et L^p

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

Remarque 4.1.1. On considère des fonctions mesurables de signe quelconque à valeurs dans $\mathbb{R}$ pour éviter la forme indéterminée

$$\infty - \infty.$$

Nous avons déjà noté $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions étagées de $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ et $\mathcal{M}$ celui des fonctions mesurables de $(E, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$, *i.e.* $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}))$, donc nous n'introduisons pas de nouvelles notations pour $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

Remarque 4.1.2. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Nous pouvons toujours écrire f sous la forme

$$f = f^+ - f^-$$

avec

$$f^+ := f\,\mathbb{1}_{f>0} \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A}, \mathscr{B}(\mathbb{R})) \quad \text{et} \quad f^- := -f\,\mathbb{1}_{f<0} \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A}, \mathscr{B}(\mathbb{R})).$$

Définition 4.1.1 – Intégrale d'une fonction de $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Une fonction $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ **admet une intégrale** si f^+ ou f^- est intégrable.

Si f^+ et f^- sont intégrables alors on dit que f est **μ-intégrable** (ou **intégrable**).

Si f admet une intégrale, ce qui est le cas si f est intégrable, alors on définit **l'intégrale de f sur E par rapport à μ** par

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu := \int_E f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_E f^- \, \mathrm{d}\mu \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Définition 4.1.2

On notera $\mathscr{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ ou $\mathscr{L}^1(\mu)$ ou $\mathscr{L}^1$, l'ensemble des fonctions intégrables.

Remarque 4.1.3. Bien noter $\mathscr{L}^1$ car la notation L^1 fera référence à un autre espace.

Proposition 4.1.3

Soit $f \in \mathscr{L}^1$. Alors

$$\left| \int_E f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_E |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty$$

et donc $|f| \in \mathscr{L}^1$. **Réciproquement**, $|f| \in \mathscr{L}^1 \Rightarrow f \in \mathscr{L}^1$.

- Par définition, f^+ et f^- sont intégrables et

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int f^- \, \mathrm{d}\mu \leq \int f^+ \, \mathrm{d}\mu + \int f^- \, \mathrm{d}\mu = \int |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty,$$

par **additivité** (on rappelle que $|f| = f^+ + f^-$). De même, on démontre que $-\int f \, \mathrm{d}\mu \leq \int |f| \, \mathrm{d}\mu$. ∎

Chapitre 4 : Les espaces $\mathscr{L}^1$, L^1 et L^p

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

Théorème 4.1.4 – Linéarité de l'intégrale

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

L'espace $\mathscr{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un **espace vectoriel** et l'application

$$T : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & T(f) := \int_E f \, \mathrm{d}\mu \end{array}$$

est une **forme linéaire croissante**.

- Montrons que $\mathscr{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un **espace vectoriel**.

Soient f, g dans $\mathscr{L}^1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque

$$|\lambda f + g| \leq |\lambda||f| + |g|$$

et puisque par **additivité et homogénéité positive** de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$

$$\int (|\lambda||f| + |g|) \,\mathrm{d}\mu = |\lambda| \int |f| \,\mathrm{d}\mu + \int |g| \,\mathrm{d}\mu,$$

alors par le **théorème de comparaison**, $|\lambda f + g|$ est intégrable, donc d'après la **proposition précédente**, $\lambda f + g \in \mathscr{L}^1$.

- Montrons que $\int (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}\mu + \int g\,\mathrm{d}\mu$ pour f, g dans $\mathscr{L}^1$.

Tout d'abord, par définition

$$f+g = (f+g)^+ - (f+g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-.$$

Ainsi

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+ \geq 0$$

et donc par **additivité** de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ on a

$$\int (f+g)^+\,\mathrm{d}\mu + \int f^-\,\mathrm{d}\mu + \int g^-\,\mathrm{d}\mu = \int (f+g)^-\,\mathrm{d}\mu + \int f^+\,\mathrm{d}\mu + \int g^+\,\mathrm{d}\mu$$

ce qui donne puisque toutes ces quantités sont finies

$$\int (f+g)^+\,\mathrm{d}\mu - \int (f+g)^-\,\mathrm{d}\mu = \int f^+\,\mathrm{d}\mu - \int f^-\,\mathrm{d}\mu + \int g^+\,\mathrm{d}\mu - \int g^-\,\mathrm{d}\mu$$

autrement dit

$$\int (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}\mu + \int g\,\mathrm{d}\mu.$$

- Montrons que $\int \lambda f \, \mathrm{d}\mu = \lambda \int f \, \mathrm{d}\mu$ pour f dans $\mathscr{L}^1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarquons que $\lambda f = \lambda(f^+ - f^-) = \lambda f^+ - \lambda f^-$ mais surtout que

$$\lambda > 0 \Rightarrow (\lambda f)^+ = \lambda f^+ \quad \text{et} \quad (\lambda f)^- = \lambda f^-,$$
$$\lambda < 0 \Rightarrow (\lambda f)^+ = -\lambda f^- \quad \text{et} \quad (\lambda f)^- = -\lambda f^+.$$

Ainsi, en utilisant l'**homogénéité positive** de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on a :

$$\lambda > 0 \Rightarrow \int \lambda f \, \mathrm{d}\mu = \int \lambda f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int \lambda f^- \, \mathrm{d}\mu = \lambda \int f^+ \, \mathrm{d}\mu - \lambda \int f^- \, \mathrm{d}\mu,$$
$$\lambda < 0 \Rightarrow \int \lambda f \, \mathrm{d}\mu = \int -\lambda f^- \, \mathrm{d}\mu - \int -\lambda f^+ \, \mathrm{d}\mu = -\lambda \int f^- \, \mathrm{d}\mu - (-\lambda) \int f^+ \, \mathrm{d}\mu.$$

et donc dans les deux cas $\int \lambda f \, \mathrm{d}\mu = \lambda \int f \, \mathrm{d}\mu$.

Les deux points précédents démontrent la linéarité de l'application T : $T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$. Ainsi T est bien une forme linéaire, car définie sur un espace vectoriel et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Montrons que $\int f \,\mathrm{d}\mu \leq \int g \,\mathrm{d}\mu$ pour f, g dans $\mathscr{L}^1$ si $f \leq g$, *i.e.* montrons que T est croissante.

En fait, T est une forme linéaire **positive** donc croissante.

En effet, posons $h \coloneqq g - f$. Alors $h = h^+ \geq 0$ et puisque alors $h \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ il vient que $T(h) \geq 0$ (T est donc positive).

Mais $T(h) = T(g) - T(f)$ par **linéarité** de T et donc $T(g) \geq T(f)$.

$\blacksquare$

Chapitre 4 : Les espaces $\mathscr{L}^1$, L^1 et L^p

$$\mu(A) = 0$$

Définition 4.2.1 – Ensemble négligeable

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

On dit que $A \in \mathcal{A}$ est un **ensemble négligeable** (ou μ-négligeable) si $\mu(A) = 0$.

Remarque 4.2.1. Soit $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Au lieu d'écrire $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$ si f est nulle sauf sur un **ensemble négligeable**, on notera souvent

$$f = 0 \ \mu\text{-presque partout} \quad \text{ou} \quad f = 0 \ \mu\text{-p.p.},$$

ou encore $f = 0$ p.p., et on dira que f est μ-presque partout nulle.

Cette terminologie bien pratique est définie au slide suivant de manière générale.

Définition 4.2.2 – Propriété vraie μ-p.p.

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Soient $A \in \mathcal{A}$ un **ensemble négligeable** et une propriété P qui dépend de $x \in E$.

Si l'on a
$$\{x \in E \mid P(x) \text{ est fausse}\} \subset A,$$
alors on dira que $P(x)$ est vraie "pour μ-presque tout x" ou que **P est vraie μ-p.p**.

Remarque 4.2.2. Il est possible dans certains contextes que P soit fausse sur un ensemble non mesurable inclus dans un ensemble négligeable. Dans ce cas, il serait **incorrect** de dire que "P est vraie partout sauf sur un ensemble négligeable". On peut en revanche toujours dire que "P est vraie au moins sur le complémentaire d'un ensemble négligeable".

Pour éviter ces difficultés, il est commode d'introduire la notion de **tribu complétée** à laquelle on ajoute (entres autres) toutes les parties de E incluses dans un ensemble négligeable. Ainsi, dans ce contexte, on pourra alors toujours dire que "P est vraie partout sauf sur un ensemble négligeable". Cette notion est introduite au chapitre 5.

Chapitre 4 : Les espaces $\mathscr{L}^1$, L^1 et L^p

$$\mu(A) = 0$$

Théorème 4.2.3

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Si $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ est nulle p.p., c-à-d si $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$, alors

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = 0$$

et la réciproque est vraie si $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A}, \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.

- Nous avons, **cf. Chapitre 3**, que pour $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A}, \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}))$:

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \ \mu\text{-p.p.}$$

Or si $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ est nulle p.p., alors $f^+ = f \mathbb{1}_{f>0}$ et $f^- = -f \mathbb{1}_{f<0}$ le sont aussi, et puisque f^+ et f^- sont positives alors leurs intégrales sont nulles. Ainsi, $f \in \mathscr{L}^1$ et

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int f^- \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

■

Corollaire 4.2.4

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ et $A \in \mathcal{A}$ un ensemble négligeable. Alors

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

- Par **définition**,

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_E f \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu,$$

et par le **théorème précédent**, $\int_E f \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu = 0$. ■

Proposition 4.2.5 – Relation de Chasles

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ et $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ t.q. f intégrable sur $A \cup B$ et $\mu(A \cap B) = 0$.

Alors

$$\int_{A \cup B} f \,\mathrm{d}\mu = \int_A f \,\mathrm{d}\mu + \int_B f \,\mathrm{d}\mu.$$

Exercice : faire l'exercice.

Proposition 4.2.5 – Relation de Chasles

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ et $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ t.q. f intégrable sur $A \cup B$ et $\mu(A \cap B) = 0$.

Alors
$$\int_{A \cup B} f \,\mathrm{d}\mu = \int_A f \,\mathrm{d}\mu + \int_B f \,\mathrm{d}\mu.$$

► On a toujours $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$. Puisque f intégrable sur $A \cup B$, alors f intégrable sur A, B et $A \cap B$, cf. $|f \mathbb{1}_A| \leq |f \mathbb{1}_{A \cup B}|$, etc.

Par **linéarité** de l'intégrale

$$\int_{A \cup B} f \,\mathrm{d}\mu = \int_A f \,\mathrm{d}\mu + \int_B f \,\mathrm{d}\mu - \int_{A \cap B} f \,\mathrm{d}\mu$$

mais $\int_{A \cap B} f \,\mathrm{d}\mu = 0$ car $\mu(A \cap B) = 0$, cf. **corollaire précédent**. ■

***Lemme 4.2.1**. Si $f = g$ μ-p.p., alors f est intégrable (resp. admet une intégrale) ssi g est intégrable (resp. admet une intégrale).*

- Comme $f = g$ μ-p.p., alors il est clair que $f^+ = g^+$ μ-p.p. et $f^- = g^-$ μ-p.p.

Il suffit donc de montrer que pour toutes f, g dans $\mathcal{M}_+$, si $f = g$ μ-p.p. alors

$$\int f \,\mathrm{d}\mu < +\infty \quad \text{ssi} \quad \int g \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

En fait, nous avons déjà démontré mieux (cf. **Chapitre 3**) :

$\forall f, g \in \mathcal{M}_+$, si $f = g$ μ-p.p. alors on a l'égalité $\int f \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. ■

Théorème 4.2.6

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Soient $f \in \mathscr{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ et $g \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ t.q. $f = g$ μ-p.p. Alors,

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_E g \,\mathrm{d}\mu.$$

- D'après le lemme 4.2.1, $g \in \mathscr{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$. Par **linéarité** de l'intégrale,

$$\int f \,\mathrm{d}\mu - \int g \,\mathrm{d}\mu = \int (f-g) \,\mathrm{d}\mu.$$

La fonction $f - g$ est nulle presque partout donc d'après le **théorème précédent**,

$$\int (f-g) \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

■

Remarque 4.2.3. On retiendra que deux fonctions égales p.p. ont la même intégrale.

Chapitre 4 : Les espaces $\mathscr{L}^1$, L^1 et L^p

$$f \sim_\mu g$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$f = g \ \mu\text{-p.p.}$$

Définition 4.3.1

Soit F un espace vectoriel. Une fonction $N\colon F \to \mathbb{R}_+$ est appelée **norme** si

i) $\forall u \in F$: $N(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0_F$ (**séparation**) ;

ii) $\forall (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times F$: $N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$ (**absolue homogénéité**) ;

iii) $\forall (u, v) \in F^2$: $N(u+v) \leq N(u)+N(v)$ (**sous-add. / inég. triangulaire**).

Si i) est remplacé par

$$\text{i')} \quad N(0_F) = 0,$$

alors on parle de **semie-norme**.

Remarque 4.3.1. On rappelle qu'une norme N sur un espace vectoriel F induit une topologie sur F, la topologie induite par la distance $d(u, v) := N(u - v)$.

On rappelle que l'espace $\mathscr{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ (ou $\mathscr{L}^1$) est l'ensemble des fonctions de $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ qui sont μ-intégrables, c-à-d t.q.

$$\int_E |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Pour toute $f \in \mathscr{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$, on pose

$$\|f\|_{\mathscr{L}^1} := \int_E |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 4.3.2

L'espace $(\mathscr{L}^1, \|\cdot\|_{\mathscr{L}^1})$ est un espace vectoriel semi-normé.

Proposition 4.3.2

L'espace $(\mathscr{L}^1, \|\cdot\|_{\mathscr{L}^1})$ est un espace vectoriel semi-normé.

- Nous avons déjà que $\mathscr{L}^1$ est un espace vectoriel, cf. Section 4.1.

- Montrons que $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^1}$ est une semie-norme.

  i) Si $f = 0 \in \mathscr{L}^1$ alors $|f| = 0$ et donc $\|f\|_{\mathscr{L}^1} = \int |f| \, \mathrm{d}\mu = 0$;

  ii) Soit $(\lambda, f) \in \mathbb{R} \times \mathscr{L}^1$. Alors par **homogénéité positive** de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$,

$$\|\lambda f\|_{\mathscr{L}^1} = \int |\lambda f| \, \mathrm{d}\mu = |\lambda| \int |f| \, \mathrm{d}\mu = |\lambda| \|f\|_{\mathscr{L}^1} \ ;$$

  iii) Soient f, g dans $\mathscr{L}^1$. Alors $|f+g| \leq |f| + |g|$ donc par **croissance** puis **additivité** de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$,

$$\|f+g\|_{\mathscr{L}^1} = \int |f+g| \, \mathrm{d}\mu \leq \int (|f| + |g|) \, \mathrm{d}\mu = \int |f| \, \mathrm{d}\mu + \int |g| \, \mathrm{d}\mu = \|f\|_{\mathscr{L}^1} + \|g\|_{\mathscr{L}^1}$$

■

$$f \sim_\mu g$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$f = g \ \mu\text{-p.p.}$$

Pour passer d'une semie-norme à une norme, on identifie les vecteurs u et v dans F t.q.

$$N(u-v)=0.$$

Rigoureusement, on définit **l'espace quotient** de F par la relation d'équivalence

$$u \sim v \Longleftrightarrow N(u-v)=0,$$

c-à-d l'ensemble constitué des classes d'équivalences de $\sim$:

- Montrons que $\sim$ est une relation d'équivalence.
  - (réflexivité). $N(u-u)=N(0_F)=0 \Rightarrow u \sim u$;
  - (symétrie). $N(u-v)=0=N(v-u)$ par absolue homogénéité de N ;
  - (transitivité). $N(u-v)=N(v-w)=0 \Rightarrow N(u-w)=N(u-v+v-w) \leq N(u-v)+N(v-w)=0$ par l'inégalité triangulaire. ■

Notation. On note $[u] \coloneqq \{v \in F \mid u \sim v\}$ la classe d'équivalence de $u \in F$ et on définit l'espace quotient de F par la relation d'équivalence $\sim$ par :

$$F/\sim \coloneqq \bigcup \{[u] \mid u \in F\}.$$

Exercice 4.3.1. Montrer $(u' \in [u]$ et $v' \in [v]) \Rightarrow \lambda u' + \mu v' \in [\lambda u + \mu v]$, avec $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$.

On introduit pour toutes f, g dans $\mathscr{L}^1$ la relation d'équivalence notée $\sim_\mu$ définie par la semie-norme $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^1}$:

$$f \sim_\mu g \iff \|f-g\|_{\mathscr{L}^1} = 0 \iff |f-g| = 0 \ \mu\text{-p.p.} \iff f = g \ \mu\text{-p.p.}$$

Notation. On note pour $f \in \mathscr{L}^1$,

$$[f] := \left\{ g \in \mathscr{L}^1 \;\middle|\; g \sim_\mu f \right\} = \left\{ g \in \mathscr{L}^1 \;\middle|\; g = f \ \mu\text{-p.p.} \right\}$$

sa classe d'équivalence par la relation $\sim_\mu$.

Remarque fondamentale. Les opérations classiques s'étendent aux classes d'équivalence ;

$$\lambda[f] + \mu[g] := [\lambda f + \mu g].$$

Ceci fait de l'espace quotient, un **espace vectoriel**.

> **Remarque 4.3.2**. On fera l'abus de notation qui consiste à ne pas distinguer fonctions et classes d'équivalences, c-à-d qu'on utilisera le même symbole f pour la classe et la fonction. Ceci n'est bien entendu pas dangereux.

Définition 4.3.3

On note $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ ou L^1, l'ensemble des classes d'équivalences des éléments de $\mathscr{L}^1$ par la relation d'équivalence $f \sim_\mu g \iff f = g$ μ-p.p., *i.e.* $L^1 := \mathscr{L}^1/\sim_\mu$.

On définit la fonction $\|\cdot\|_{L^1}$ sur L^1 par

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\|_{L^1} : & L^1 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & [f] & \longmapsto & \|[f]\|_{L^1} := \|f\|_{\mathscr{L}^1} \end{array}$$

où $f \in [f]$ est n'importe quel représentant de la classe d'équivalence, car si $f \sim_\mu g$ alors $\|f\|_{\mathscr{L}^1} = \|g\|_{\mathscr{L}^1}$.

Remarque 4.3.3. Bien entendu, $\|\cdot\|_{L^1}$ est une norme sur L^1.

Théorème 4.3.4

L'espace $(L^1(E, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_{L^1})$ est un espace vectoriel normé.

Exemple 4.3.2. On note l^1 l'espace $\mathscr{L}^1(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), m)$ où $m := \text{card}$ est la mesure de comptage. Soit $u \in l^1$, alors

$$\|u\|_{l^1} = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

Il n'est pas besoin ici de quotienter $\mathscr{L}^1$ car $\|u\|_{l^1} = 0$ implique $u = 0$.

Chapitre 4 : Les espaces $\mathscr{L}^1$, L^1 et L^p

$$\int_E |f|^p \, \mathrm{d}\mu$$

Pour simplifier on ne s'intéressera qu'à L^p en refaisant directement l'assimilation entre une fonction et sa classe d'équivalence (tous les raisonnements précédents faisant le lien entre $\mathscr{L}^p$ et L^p étant similaires).

On étend la définition des espaces L^1 aux fonctions dont la puissance p est intégrable.

Définition 4.4.1

Soit un réel $0 < p < +\infty$.

On appelle $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ ou L^p l'ensemble des fonctions mesurables telles que

$$\int_E |f|^p \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Exemple 4.4.1.

$$\forall p > 1,\ f(x) = \frac{1}{x^p} \in L^p([1, +\infty[, \mathscr{B}([1, +\infty[), \lambda)$$

Le cas $p = +\infty$:

Définition 4.4.2

L^∞ est l'espace des fonctions mesurables essentiellement bornées, *i.e.* telles que

$$\sup\operatorname{ess} |f| < +\infty,$$

où la borne supérieure essentielle de f est définie par

$$\sup\operatorname{ess} f := \inf \left\{ a \in \mathbb{R} \;\middle|\; \mu(f^{-1}(]a\,,\infty[)) = 0 \right\}.$$

Remarque 4.4.1. a est un majorant de f si $f^{-1}(]a\,,\infty[) = \{x \in E \mid f(x) > a\}$ est vide. La borne supérieure classique est définie par : $\sup f := \inf \left\{ a \in \mathbb{R} \;\middle|\; f^{-1}(]a\,,\infty[) = \emptyset \right\}$. C'est le plus petit des majorants de f. La borne supérieure essentielle est donc un majorant de f mais seulement pour presque tout x.

Remarque 4.4.2. On a toujours $\inf f \leq \inf\operatorname{ess} f \leq \sup\operatorname{ess} f \leq \sup f$.

Exemple 4.4.2.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \arctan x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \in L^\infty$$

Chapitre 4 : Les espaces $\mathscr{L}^1$, L^1 et L^p

$$\int_E |f|^p \, \mathrm{d}\mu$$

Proposition 4.4.3

Soit un réel $0 < p \leq +\infty$. L'espace L^p est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

► La stabilité par la multiplication par un scalaire est claire. Pour l'addition on se donne f et g dans L^p. Alors $f + g$ est bien mesurable et on distingue 2 cas :

- $p = +\infty$

D'après l'inégalité triangulaire et la définition du sup essentiel :

$$|f + g| \leq |f| + |g| \leq \sup\mathrm{ess}\,|f| + \sup\mathrm{ess}\,|g| \qquad \text{(presque partout).}$$

Par passage au sup essentiel : $\sup\mathrm{ess}\,|f + g| \leq \sup\mathrm{ess}\,|f| + \sup\mathrm{ess}\,|g|$.

- $0 < p < +\infty$

Notons $h = \max(|f|, |g|)$. On a

$$|f + g|^p \leq (2h)^p = 2^p h^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$$

(faire une disjonction des cas pour la dernière inégalité). D'où le résultat en intégrant. ■

Chapitre 4 : Les espaces $\mathscr{L}^1$, L^1 et L^p

$$\int_E |f|^p \, \mathrm{d}\mu$$

On définit naturellement une application, qui sera une norme sur L^p pour $1 \leq p \leq +\infty$:

Définition 4.4.4

Pour tout réel $0 < p < +\infty$ on pose pour f dans $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$,

$$\|f\|_{L^p} \quad \text{ou} \quad \|f\|_p := \left(\int_E |f|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

Pour $p = +\infty$, on pose $\|f\|_{L^\infty}$ ou $\|f\|_\infty := \sup\operatorname{ess} |f|$.

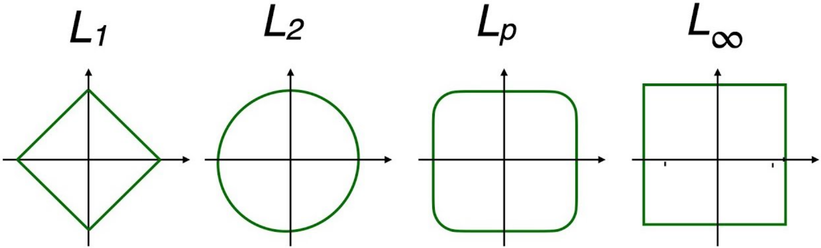
Remarque 4.4.3.

- En dimension finie on définit pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_p := (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$. Tous les résultas de ce chapitre sont transposables en dimension finie.
- On peut montrer que $\forall f \in L^\infty$, $\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$ (et de même sur $\mathbb{R}^n$).

On va maintenant montrer que $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé pour $1 \leq p \leq +\infty$. On aura besoin de l'inégalité de Minkowski qui résulte de celle de Hölder.

Proposition 4.4.5

Soit un réel $1 \leq p \leq +\infty$. Alors, $\|\cdot\|_p$ est une norme sur L^p.



L'inégalité suivante est fondamentale dans les espaces L^p.

Théorème 4.4.6 – Inégalité de Hölder

Soit (E, A, μ) un espace mesuré, p, $q > 0$ des exposants conjugués (i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) et f et g des fonctions de L^p et L^q respectivement. Alors $fg \in L^1$ et

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Plus généralement si p et q sont tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, alors $f\,g \in L^r$ et

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Pour le démontrer on utilise l'inégalité de Young :

***Lemme 4.4.1**. Soit a, $b \geq 0$ et $p, q > 0$ deux exposants conjugués. Alors $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.*

► (Preuve du lemme). Le logarithme étant concave sur $\mathbb{R}_+$, pour tout a, $b > 0$ on a $\ln(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}) \geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q)$ et on passe à l'exponentielle. ■

► (Preuve de l'inégalité de Hölder). Soit p, $q > 0$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$.

On la montre d'abord pour f et g telles que $\|f\|_p = 1$ et $\|g\|_q = 1$. Ceci résulte de l'inégalité de Young appliquée aux exposants $\tilde{p} = \frac{p}{r}$ et $\tilde{q} = \frac{q}{r}$. En effet on a bien $\frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1$. D'où, $\forall x \in E$,

$$|f(x)|^r |g(x)|^r \leq \frac{1}{\tilde{p}} |f(x)|^p + \frac{1}{\tilde{q}} |g(x)|^q$$

donc par intégration

$$\|fg\|_r^r \leq \frac{1}{\tilde{p}} \|f\|_p^p + \frac{1}{\tilde{q}} \|g\|_q^q = \frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1.$$

Si $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$ l'inégalité est vérifiée.

On passe maintenant au cas général en appliquant le cas particulier précédent aux fonctions $\tilde{f} = \frac{f}{\|f\|_p}$ et $\tilde{g} = \frac{g}{\|g\|_q}$. ■

Remarque 4.4.4. Pour $p = q = 2$ on retrouve l'inégalité de Cauchy-Scwharz.

Remarque 4.4.5. L'inégalité reste vraie pour $(p, q) = (1, +\infty)$ avec $1/\infty = 0$.

Exercice 4.4.3. Soit $p > 1$. Donner une fonction qui est dans L^1 mais pas dans L^p et une fonction qui est dans L^p mais pas dans L^1.

Exercice : faire l'exercice.

Exercice 4.4.3. Soit $p > 1$. Donner une fonction qui est dans L^1 mais pas dans L^p et une fonction qui est dans L^p mais pas dans L^1.

- Par exemple $f(x) = \dfrac{1}{x \ln(x)^2}$ sur $]0\,,\frac{1}{2}[$ et $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ sur $\mathbb{R}_+$. ■

Exercice 4.4.3. Soit $p > 1$. Donner une fonction qui est dans L^1 mais pas dans L^p et une fonction qui est dans L^p mais pas dans L^1.

- Par exemple $f(x) = \dfrac{1}{x \ln(x)^2}$ sur $]0\,,\frac{1}{2}[$ et $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ sur $\mathbb{R}_+$. ■

Exercice 4.4.4. Soit (E, A, μ) un espace mesuré tel que E soit de mesure finie, *i.e.* $\mu(E) = M < +\infty$. Soient $0 < p < q < +\infty$. Montrer que $L^\infty \subset L^q \subset L^p$.

Exercice : faire l'exercice.

Exercice 4.4.3. Soit $p > 1$. Donner une fonction qui est dans L^1 mais pas dans L^p et une fonction qui est dans L^p mais pas dans L^1.

► Par exemple $f(x) = \dfrac{1}{x \ln(x)^2}$ sur $]0, \frac{1}{2}[$ et $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ sur $\mathbb{R}_+$. ■

Exercice 4.4.4. Soit (E, A, μ) un espace mesuré tel que E soit de mesure finie, *i.e.* $\mu(E) = M < +\infty$. Soient $0 < p < q < +\infty$. Montrer que $L^\infty \subset L^q \subset L^p$.

► L'inégalité de Hölder donne en prenant $g = 1$ et en notant $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} > 0$, c-à-d $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$:

$$\|fg\|_p = \|f\|_p \leq \|f\|_q \|1\|_r = M^{\frac{1}{r}} \|f\|_q.$$

Ce qui montre que si $f \in L^q$ alors $f \in L^p$. ■

On aurait aussi pu écrire :

$$
\begin{aligned}
\|f\|_q^q &= \left(\int_E |f|^q \,\mathrm{d}\mu\right) \\
&= \left(\int_{\{|f|\leq 1\}} |f|^q \,\mathrm{d}\mu\right) + \left(\int_{\{|f|>1\}} |f|^q \,\mathrm{d}\mu\right) \\
&\leq \mu(\{|f| \leq 1\}) + \left(\int_{\{|f|>1\}} |f|^q \,\mathrm{d}\mu\right) \\
&\leq \mu(E) + \left(\int_{\{|f|>1\}} |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right) \\
&\leq \mu(E) + \left(\int_E |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right).
\end{aligned}
$$

Pour montrer $L^\infty \subset L^q$ on note que si $f \in L^\infty$ alors f est finie p.p. : $|f| \leq K < +\infty$. D'où en élevant à la puissance q et en intégrant

$$\|f\|_q^q \leq K^q \mu(E) < +\infty.$$

C'est l'inégalité triangulaire dans les espaces L^p pour $p \geq 1$.

Théorème 4.4.7 – Inégalité de Minkowski

Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et f et g deux fonctions de L^p. On a alors $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

► Pour $p = 1$, resp. $p = +\infty$, c'est clair, cf. Section 2, resp. Proposition 4.4.3. Sinon, si $\|f+g\|_p = 0$, l'inégalité est trivialement vérifiée. Sinon, en appliquant successivement l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ et l'inégalité de Hölder avec $q = \frac{p}{p-1}$, il vient

$$\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^p \mathrm{d}\mu \leq \int (|f|+|g|)|f+g|^{p-1}\mathrm{d}\mu$$

$$= \int |f||f+g|^{p-1}\mathrm{d}\mu + \int |g||f+g|^{p-1}\mathrm{d}\mu$$

$$\leq \left(\left(\int |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\right)\left(\int |f+g|^{(p-1)\left(\frac{p}{p-1}\right)}\mathrm{d}\mu\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

$$= (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{p-1}.$$

■

De l'inégalité de Minkowski, on en déduit comme pour $(L^1, \|\cdot\|_1)$ que

Théorème 4.4.8

L'espace $(L^p(E, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé pour $p \in [1\,, +\infty]$.

Remarque 4.4.6. L'inégalité est inversée pour $0 < p < 1$ (car $x \Rightarrow x^p$ n'est plus convexe mais concave sur $\mathbb{R}_+$). Sans l'inégalité triangulaire sur la norme, $(L^p, \|\cdot\|_p)$ n'est donc pas un espace vectoriel normé pour $0 < p < 1$.

Exercice 4.4.5. Soit $0 < p < +\infty$ et $f_n \to f$ simplement. On suppose : $\exists g \geq 0$ dans L^p telle que $\forall n$, $|f_n| \leq g$. Montrer que f_n converge vers f dans L^p (*i.e.* $\|f_n - f\|_p) \to 0$.

Exercice : faire l'exercice après avoir vu le chapitre 5.

De l'inégalité de Minkowski, on en déduit comme pour $(L^1, \|\cdot\|_1)$ que

Théorème 4.4.8

L'espace $(L^p(E, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé pour $p \in [1\,, +\infty]$.

Remarque 4.4.6. L'inégalité est inversée pour $0 < p < 1$ (car $x \Rightarrow x^p$ n'est plus convexe mais concave sur $\mathbb{R}_+$). Sans l'inégalité triangulaire sur la norme, $(L^p, \|\cdot\|_p)$ n'est donc pas un espace vectoriel normé pour $0 < p < 1$.

Exercice 4.4.5. Soit $0 < p < +\infty$ et $f_n \to f$ simplement. On suppose : $\exists g \geq 0$ dans L^p telle que $\forall n$, $|f_n| \leq g$. Montrer que f_n converge vers f dans L^p (*i.e.* $\|f_n - f\|_p) \to 0$.

► Par passage à la limite dans $|f_n| \leq g$ on a $|f| \leq g$. Donc par inégalité triangulaire $|f_n - f| \leq 2g$, puis $|f_n - f|^p \leq 2^p g^p$, où g^p est une fonction intégrable indépendante de n. D'après le théorème de convergence dominée on peut donc passer à la limite dans

$$\int_E |f_n - f|^p \,\mathrm{d}\mu$$

ce qui fournit $\|f_n - f\|_p \Rightarrow 0$. ■