Ce que j'ai écrit en cours

Problème primal

$$\min_{w} \frac{1}{2} w^T w$$

$$\text{s.c.} \quad w^T x_i \geq \rho \qquad \forall i = 1..n$$

On pose le lagrangien :

$$\mathcal{L}(w, \rho) = \frac{1}{2} w^T w - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (w^T x_i - \rho)$$

On annule la dérivée du lagrangien :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = 0 \iff w - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \iff w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = 0 \iff \boxed{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0}$$ PROBLÈME !

On remplace dans l'expression du lagrangien :

$$\mathcal{L}(w, \rho) = \frac{1}{2} w^T w - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(w^T x_i - \rho \right)$$

$$= \frac{1}{2} w^T w - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j^T \right) x_i + \cancel{\rho \sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

!!
0

$$= -\frac{1}{2} w^T w = -\frac{1}{2} \alpha^T X X^T \alpha$$

D'où on déduit le

<u>problème dual</u>

$$\max_{\alpha} \; -\frac{1}{2} \alpha^T X X^T \alpha$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} \alpha_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0 \end{cases}$$

Oui, comme vous l'avez justement souligné, n'admet pas de solution !

Ce que j'aurais dû écrire

Problème primal

$$\min_{w} \frac{1}{2} w^T w - \rho$$

On a fixé ρ, on optimise w donc ça revient bien au même

$$\text{s.c.} \quad w^T x_i \geq \rho \qquad \forall i = 1..n$$

On pose le lagrangien :

$$\mathcal{L}(w, \rho) = \frac{1}{2} w^T w - \rho - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (w^T x_i - \rho)$$

On annule la dérivée du lagrangien

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = 0 \iff w - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \iff w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = 0 \iff -1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0 \iff \boxed{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1}$$

MIEUX !

On remplace dans l'expression du lagrangien :

$$\mathcal{L}(w,\rho) = \frac{1}{2} w^T w - \rho - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (w^T x_i - \rho)$$

$$= \frac{1}{2} w^T w - \rho - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j^T\right) x_i + \rho \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}_{=1}$$

$$= \frac{1}{2} w^T w - \rho - w^T w + \rho$$

$$= -\frac{1}{2} w^T w = -\frac{1}{2} \alpha^T X X^T \alpha$$

même résultat !!

D'où on déduit le

problème dual

$$\max_{\alpha} \; -\frac{1}{2} \alpha^T X X^T \alpha$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} \alpha_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \end{cases}$$

le problème dual est quasi le même excepté que maintenant, il admet une solution !