



Étude de chaines de transmissions en bande de base

Albarede Nathan
Lafon Alphonse

Département Sciences du Numérique - Première année
2022-2023

Table des matières

1	Introduction	4
2	Étude de modulateurs bande de base	4
2.1	Premier modulateur	4
2.2	Deuxième modulateur	5
2.3	Troisième modulateur	7
3	Étude des interférences entre symbole et du critère de Nyquist	9
3.1	Étude sans canal de propagation	9
3.2	Étude sans canal de propagation	11
3.2.1	BW = 1000 Hz	11
3.2.2	BW = 8000 Hz	13
4	Étude de l'impact du bruit et du filtrage adapté, notion d'efficacité en puissance	14
4.1	Étude de chaque chaîne de transmission	15
4.1.1	Chaîne 1	15
4.1.2	Chaîne 2	17
4.1.3	Chaîne 3	19
4.2	Comparaison des chaînes de transmission implantées	21

Table des figures

1	Signal généré par le modulateur 1	4
2	DSP du signal généré par le modulateur 1	5
3	Signal généré par le modulateur 2	6
4	DSP du signal généré par le modulateur 2	6
5	Signal généré par le modulateur 3	7
6	DSP du signal généré par le modulateur 3	8
7	DSP des 3 modulateurs	8
8	Réponse impulsionnelle globale de la chaîne de transmission	9
9	Signal en sortie du filtre de réception	10
10	Diagramme de l'oeil de la chaîne de transmission sans canal de propagation	10
11	Réponse impulsionnelle globale de la chaîne de transmission (BW = 1000 Hz)	11
12	Diagramme de l'oeil(BW = 1000 Hz)	12
13	Réponse en fréquence du canal de propagation et du filtre de mise en forme (BW = 1000 Hz)	12
14	Réponse impulsionnelle globale de la chaîne de transmission (BW = 8000 Hz)	13
15	Diagramme de l'oeil(BW = 8000 Hz)	13
16	Réponse en fréquence du canal de propagation et du filtre de mise en forme (BW = 8000 Hz)	14
17	Diagramme de l'oeil de la chaîne de transmission sans bruit	15
18	Diagramme de l'oeil pour $\frac{E_b}{n_0} = 1$ et pour $\frac{E_b}{n_0} = 5$	15
19	Diagramme de l'oeil pour $\frac{E_b}{n_0} = 20$ et pour $\frac{E_b}{n_0} = 100$	16
20	Taux d'erreur binaire obtenu par simulation et du taux d'erreur binaire théorique de la chaîne étudiée	16
21	Diagramme de l'oeil de la chaîne de transmission sans bruit	17
22	Diagramme de l'oeil pour $\frac{E_b}{n_0} = 1$ et pour $\frac{E_b}{n_0} = 5$	17
23	Diagramme de l'oeil pour $\frac{E_b}{n_0} = 20$ et pour $\frac{E_b}{n_0} = 100$	18
24	Taux d'erreur binaire obtenu par simulation et du taux d'erreur binaire théorique de la chaîne étudiée	18

25	Diagramme de l'oeil de la chaine de transmission sans bruit	19
26	Diagramme de l'oeil pour $\frac{E_b}{n_0} = 1$ et pour $\frac{E_b}{n_0} = 5$	19
27	Diagramme de l'oeil pour $\frac{E_b}{n_0} = 20$ et pour $\frac{E_b}{n_0} = 100$	20
28	Taux d'erreur binaire obtenu par simulation et du taux d'erreur binaire théorique de la chaine étudiée	20
29	TEBs obtenu par simulation pour les chaines de transmission 1, 2 et 3	21

1 Introduction

L'objectif de cette partie est d'étudier une chaîne de transmission en bande de base. Nous nous intéresserons en particulier à l'efficacité spectrale et en puissance d'une telle chaîne : nous allons comparer, et essayer d'optimiser ces grandeurs.

2 Étude de modulateurs bande de base

Dans un premier temps, nous nous intéressons à l'impact du modulateur numérique en bande de base sur l'efficacité spectrale de la transmission. Pour cela, nous traçons pour chaque modulateur le signal généré ainsi que le tracé de la densité spectrale de puissance (celle du signal généré, et la théorique).

2.1 Premier modulateur

Le premier modulateur correspond à un mapping avec des symboles binaires à moyenne nulle (+1 et -1), et à un filtre de mise en forme rectangulaire de hauteur 1, et de largeur égale à la durée symbole T_s . Voici le signal généré :

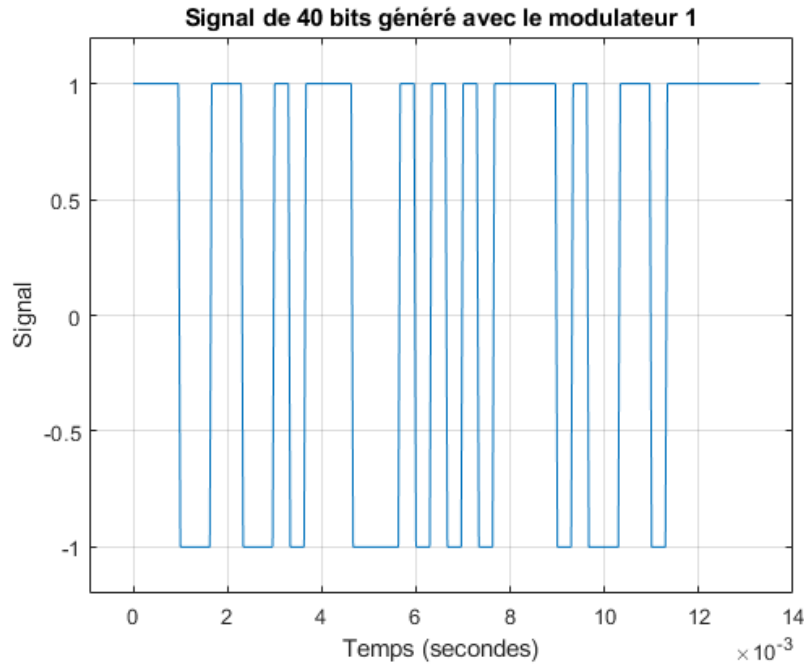


FIGURE 1 – Signal généré par le modulateur 1

Pour étudier l'efficacité d'un tel modulateur, nous pouvons étudier sa densité spectrale de puissance. L'expression générale de la densité spectrale de puissance d'un signal de communication numérique en bande de base est :

$$S_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Re [R_a(k) e^{j2\pi f k T_s}] + \frac{|m_a|^2}{T_s^2} \sum_k \left| H\left(\frac{k}{T_s}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

Or

$$m_a = E[a_k] = P(a_k = -1) \times (-1) + P(a_k = +1) \times (+1) = \frac{1}{2} \times (-1) + \frac{1}{2} \times (+1) = 0$$

$$\sigma_a^2 = E[|a_k - m_a|^2] = E[|a_k|^2] = P(a_k = -1) \times |-1|^2 + P(a_k = +1) \times |+1|^2 = 1$$

$$\forall k \neq 0, R_a(k) = 0 \text{ (symboles indépendants)}$$

D'où :

$$S_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H(f)|^2$$

Après calcul de la réponse en fréquence du filtre de modulation, on obtient :

$$S_x(f) = T_s \frac{\sin^4\left(\pi f \frac{T_s}{2}\right)}{\left(\pi f \frac{T_s}{2}\right)^2}$$

Ce calcul nous a permis de tracer la densité spectrale théorique, superposée à la densité spectrale de puissance du signal généré :

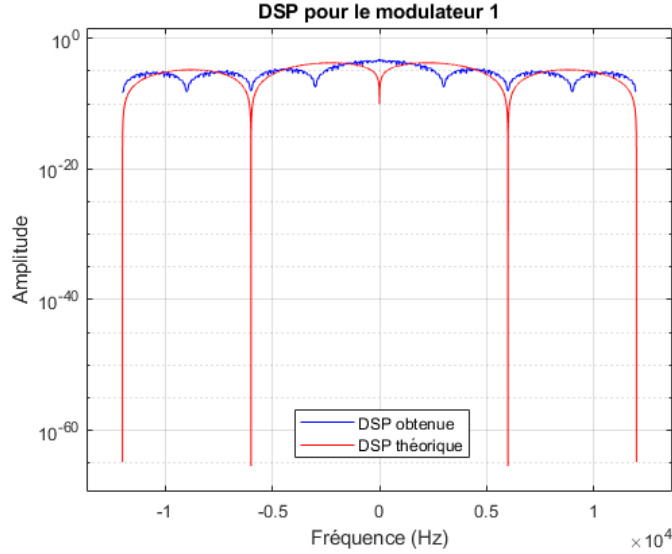


FIGURE 2 – DSP du signal généré par le modulateur 1

On remarque que la densité spectrale de notre signal épouse bien la courbe théorique, ce qui paraît cohérent.

2.2 Deuxième modulateur

Le second modulateur correspond à un mapping avec des symboles 4-aires à moyenne nulle ($-3V$, $-V$, V et $3V$, avec $V = 1$ ici par exemple), et à un filtre de mise en forme rectangulaire de hauteur 1, et de largeur égale à la durée symbole T_s . Voici le signal généré :

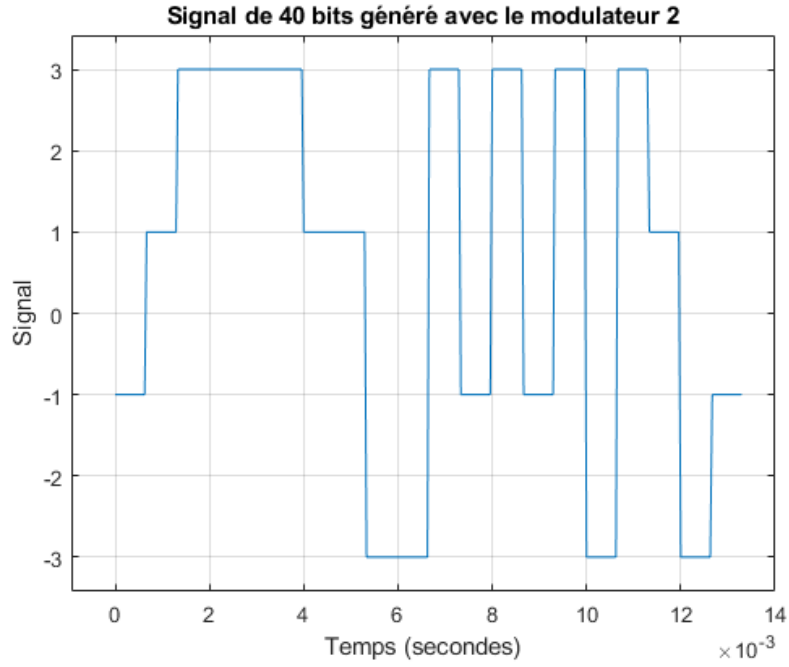


FIGURE 3 – Signal généré par le modulateur 2

Ici aussi, on calcule la densité spectrale de puissance théorique. La seule différence avec le calcul du modulateur 1 est que

$$\sigma_a^2 = 5$$

Ce qui implique que :

$$S_x(f) = 5 \times T_s \frac{\sin^4\left(\pi f \frac{T_s}{2}\right)}{\left(\pi f \frac{T_s}{2}\right)^2}$$

D'où les densités spectrale ci-dessous :

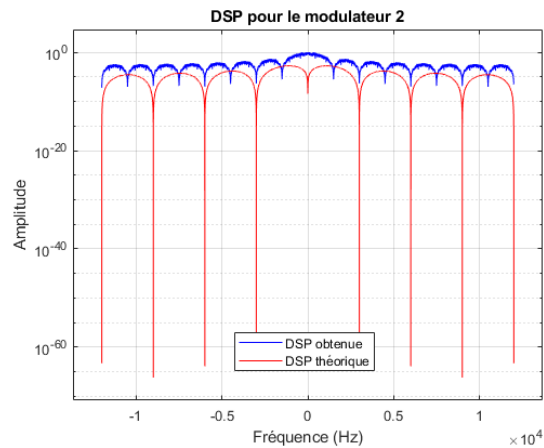


FIGURE 4 – DSP du signal généré par le modulateur 2

On remarque la aussi que la densité spectrale de notre signal épouse bien la courbe théorique, ce qui paraît cohérent.

2.3 Troisième modulateur

Le troisième modulateur correspond à un mapping avec des symboles binaires à moyenne nulle (+1 et -1), et à un filtre de mise en forme en racine de cosinus surélevé. Ce filtre a une bande fréquentielle finie, il a donc une réponse impulsionnelle infinie que l'on a tronquée afin de réaliser un filtre de type RIF. Voici le signal généré :

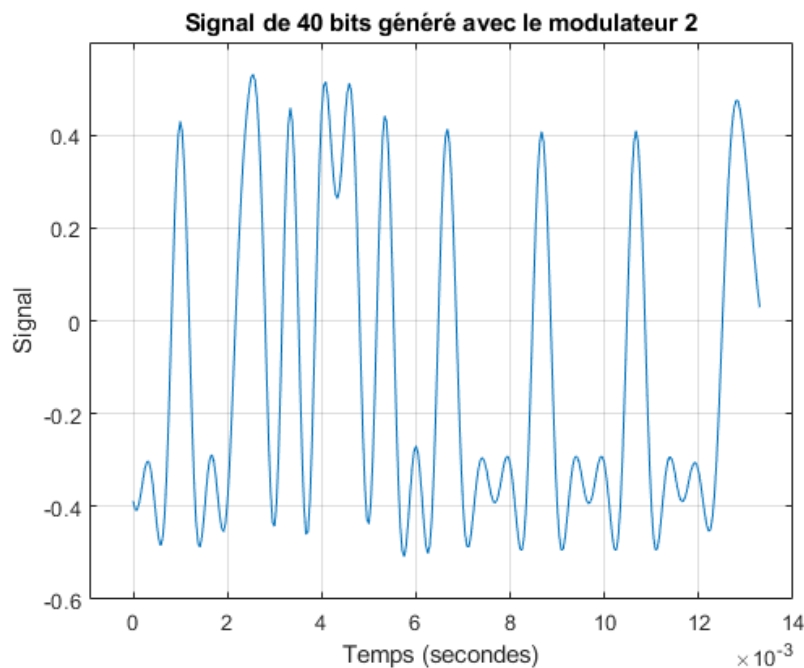


FIGURE 5 – Signal généré par le modulateur 3

La densité spectrale de puissance théorique associée au modulateur 3 est :

$$S_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_s} \begin{cases} T_s & \text{si } |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T_s} \\ \frac{T_s}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi T_s}{\alpha} \left(|f| - \frac{1-\alpha}{2T_s} \right) \right) \right) & \text{si } \frac{1-\alpha}{2T_s} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T_s} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette formule nous permet de tracer la densité spectrale de puissance théorique. On superpose à ce tracé la densité spectrale de puissance du signal généré par le modulateur 3 en pratique, ce qui nous donne la figure ci-dessous :

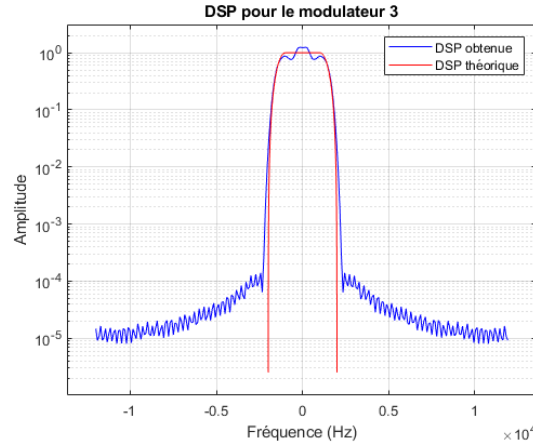


FIGURE 6 – DSP du signal généré par le modulateur 3

Ici aussi, on remarque de nouveau que la densité spectrale de notre signal épouse bien la courbe théorique, ce qui paraît cohérent.

Dans une optique de comparaison d'efficacité spectrale de ces différents modulateurs, on peut superposer les tracés des densités spectrales de puissance des trois modulateurs, qui ont toutes été effectuées avec un même débit binaire :

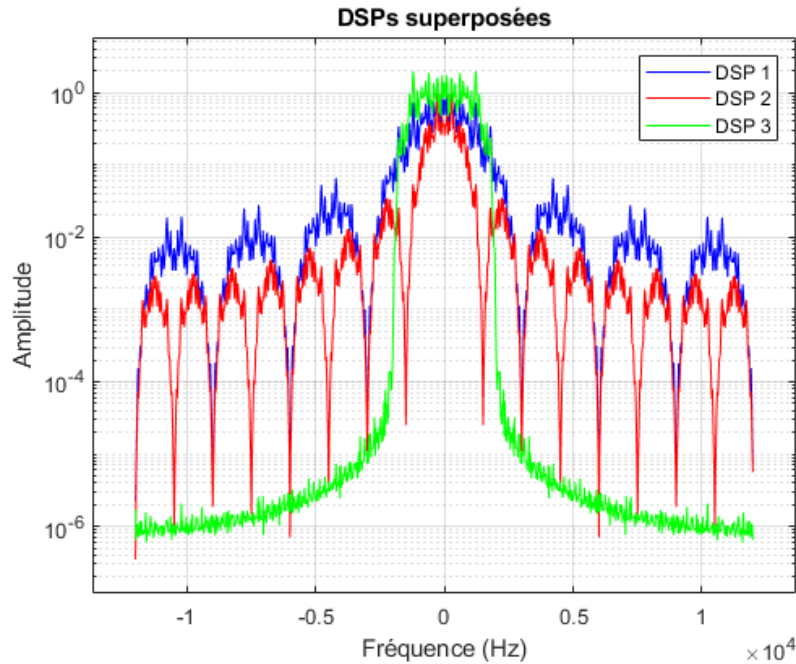


FIGURE 7 – DSP des 3 modulateurs

On remarque que le modulateur 3 a une meilleure efficacité spectrale que les autres, car pour un même débit binaire il est moins étalé en fréquence. Le modulateur 2 est plus efficace que le 1, car il est plus resserré en fréquence.

Sachant que l'efficacité spectrale de la transmission est définie par :

$$\eta = \frac{R_b}{B} = \frac{\log_2(M)}{k}$$

où R_b représente le débit binaire à transmettre, $B = kR_s$ la bande occupée par le signal généré et

$$R_s = \frac{R_b}{\log_2(M)}$$

Pour augmenter l'efficacité spectrale d'un modulateur, nous pouvons influencer sur :

- Le nombre de symbole lors du mapping : si on augmente M , η va lui aussi augmenter, ce que l'on remarque effectivement sur la figure 7 en comparant la densité spectrale de puissance des modulateurs 1 et 2.
- Le filtre utilisé en tant que modulateur : en effet, choisir un "meilleur" filtre permet de diminuer le k , et donc d'augmenter η . On remarque cela en comparant la densité spectrale de puissance du modulateur 3 par rapport aux autres sur la figure 7. En effet, pour un même débit binaire, la densité spectrale de puissance du modulateur 3 est moins étalée en fréquence que les autres.

3 Étude des interférences entre symbole et du critère de Nyquist

Nous allons ici travailler sur une chaîne de transmission en bande de base sans bruit et l'analyser en nous focalisant sur les interférences entre symboles : leur impact sur la transmission et l'influence du respect ou du non respect du critère de Nyquist. Pour cela, on considèrera un mapping binaire à moyenne nulle. Le filtre de mise en forme et le filtre de réception auront les mêmes réponse impulsionnelles rectangulaires de durées égales à la durée symbole et de hauteur 1.

3.1 Étude sans canal de propagation

Le filtre de modulation et celui de démodulation étant des portes de largeur égale à la durée symbole T_s , la réponse impulsionnelle globale de la chaîne de transmission, g , étant égale à $g(t) = h(t) * h_r(t)$, et correspond à la convolution de deux portes de largeur T_s , donc à un triangle de largeur $2 \times T_s$, et de hauteur T_s :

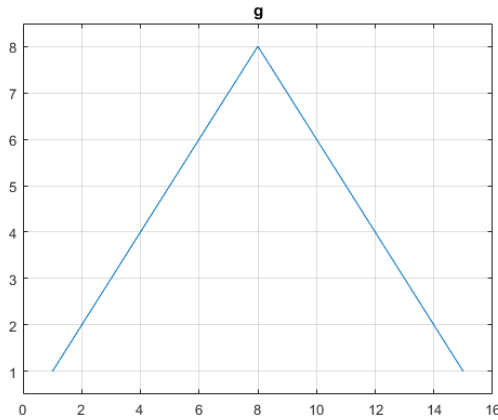


FIGURE 8 – Réponse impulsionnelle globale de la chaîne de transmission

Un symbole -1 sera donc modélisé par un tel triangle, orienté vers le bas, et un $+1$ par un orienté vers le haut. Cependant, comme le triangle a une largeur de $2 \times T_s$, il y aura une superposition de ces triangles :

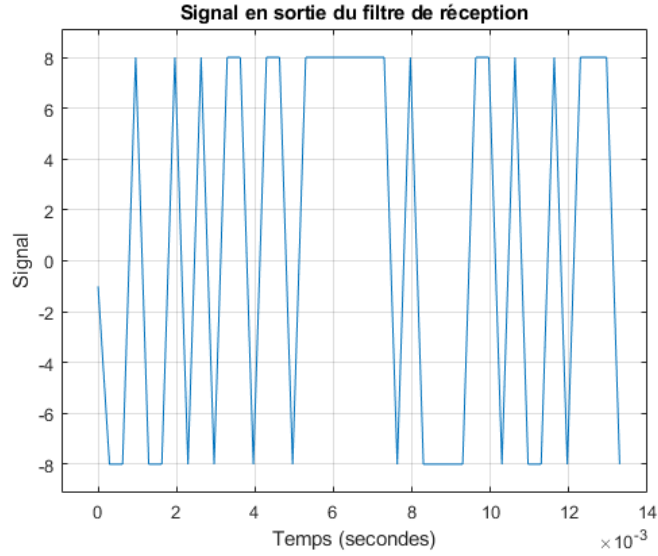


FIGURE 9 – Signal en sortie du filtre de réception

Pour respecter le critère de Nyquist, il faut choisir un instant d'échantillonnage judicieux afin que la superposition des motifs ne créent pas de l'interférence entre symbole. Pour cela, il y a plusieurs méthodes possibles :

-En utilisant la figure 8, il faut trouver un instant t tel que

$$\begin{cases} g(t_0) \neq 0 \\ g(t_0 + T_s) = 0 \text{ pour } p \in \mathbb{Z}^* \end{cases}$$

On remarque que l'instant $t = T_s$ convient parfaitement.

-En utilisant le diagramme de l'oeil :

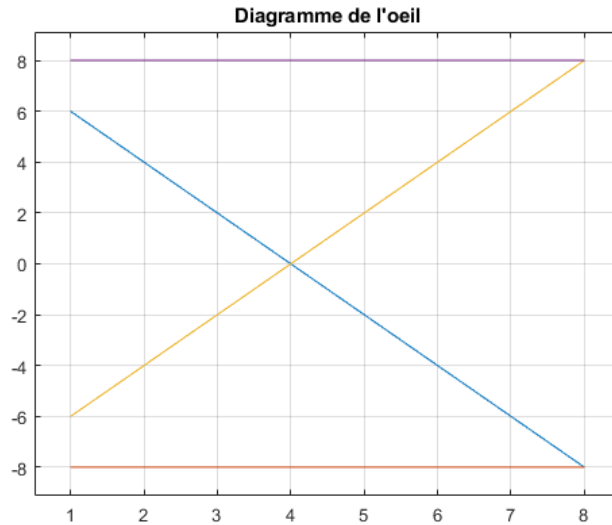


FIGURE 10 – Diagramme de l'oeil de la chaîne de transmission sans canal de propagation

Sur ce diagramme de l'oeil, il faut trouver un instant t tel qu'il n'y ai que M choix possibles (donc ici 2). Pour cette chaine de transmission ; l'unique instant possible est donc $t = T_s$, ce qui est cohérent avec la décision d'échantillonnage précédente.

Enfin, le seuil optimal pour retrouver les symboles émis à partir du signal échantillonné est 0, car il se situe entre $+1$ et -1 , et que ces deux symboles sont "équiprobables".

Si on échantillonne à un mauvais moment (par exemple en prenant $n_0 = 3$ au lieu de 8), on risque d'avoir un taux d'erreur binaire plus élevé. Avec notre chaine de transmission, on obtient

$$T_{eb} = 0,5023$$

Cela est cohérent car si on se réfère au diagramme de l'oeil (figure 17), on voit qu'à l'instant 3, en gardant 0 comme seuil de décision, il y a deux cas justes (les deux lignes horizontales) et deux cas faux (pour la pente montante par exemple, on considère que c'est un -1 car il est < 0 , mais c'est associé au $+1$). D'où le taux d'erreur binaire de 50%.

3.2 Étude sans canal de propagation

On considère maintenant un canal de propagation à bande limitée BW mais qui n'introduit pas de bruit. Pour cela, on reprend notre schéma modulateur/démodulateur optimal implanté précédemment, en y ajoutant un filtre passe-bas représentant le canal de propagation.

3.2.1 BW = 1000 Hz

Voici le tracé de la réponse impulsionnelle globale de la chaine de transmission :

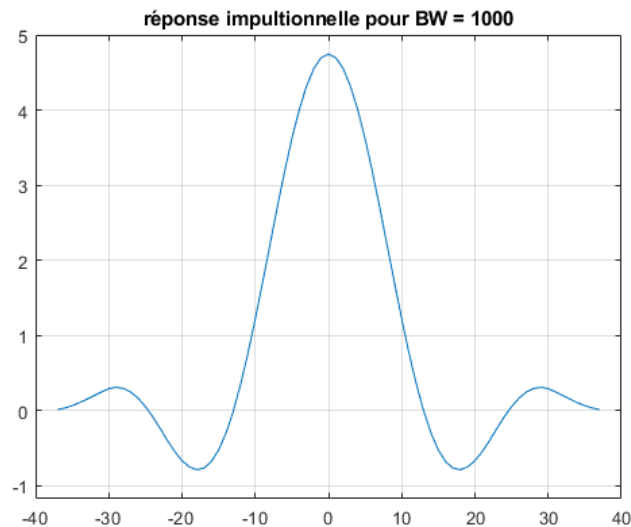


FIGURE 11 – Réponse impulsionnelle globale de la chaine de transmission (BW = 1000 Hz)

Et le tracé du diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception :

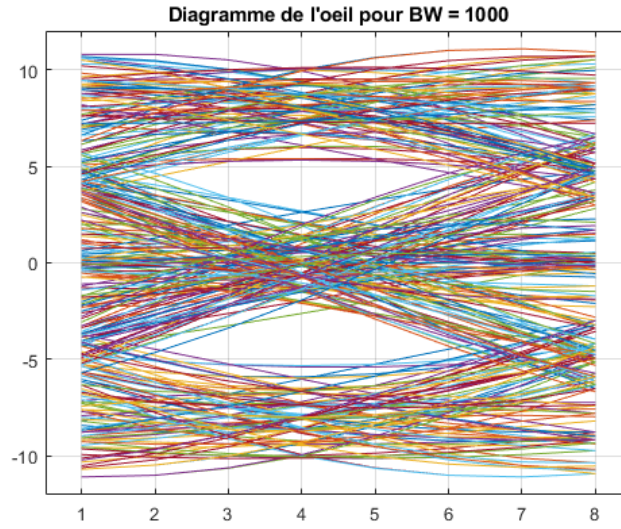


FIGURE 12 – Diagramme de l'oeil(BW = 1000 Hz)

En traçant, sur une même figure, $|H(f)H_r(f)|$ et $|H_c(f)|$, où $H(f)$ est la réponse en fréquence du filtre de mise en forme, $H_r(f)$ la réponse en fréquence du filtre de réception et $H_c(f)$ la réponse en fréquence du filtre canal, on remarque que le filtre lié au canal de propagation coupe une partie de l'information :

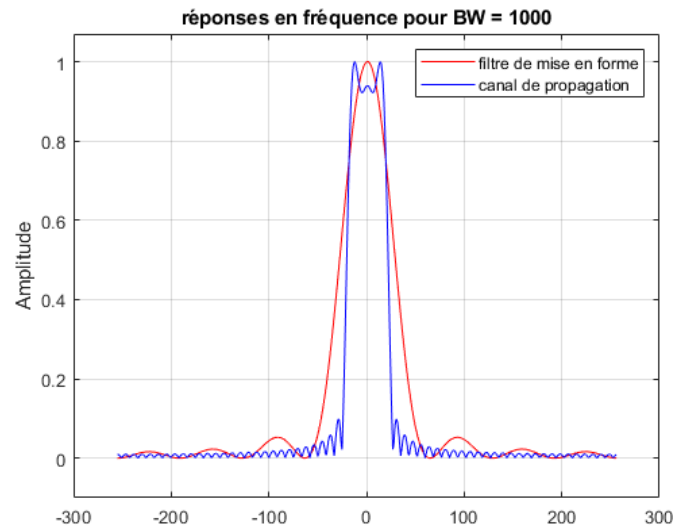


FIGURE 13 – Réponses en fréquence du canal de propagation et du filtre de mise en forme (BW = 1000 Hz)

Cette perte d'information est aussi visible sur les figures 11 et 12. En effet, on remarque que la réponse impulsionnelle globale de la chaîne de transmission (figure 11) est assez éloignée d'un triangle (qui est la réponse en fréquence du filtre de mise en forme). Quand au diagramme de l'oeil (figure 12), on remarque que l'on ne peut pas trouver un instant où il y a seulement deux choix possibles.

Cela est confirmé grâce au calcul du taux d'erreur binaire d'une telle chaîne de transmission :

$$T_{eb} = 0,1$$

3.2.2 BW = 8000 Hz

Voici le tracé de la réponse impulsionnelle globale de la chaîne de transmission :

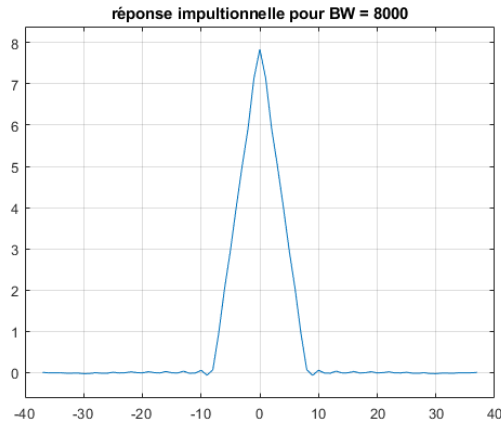


FIGURE 14 – Réponse impulsionnelle globale de la chaîne de transmission (BW = 8000 Hz)

Et le tracé du diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception :

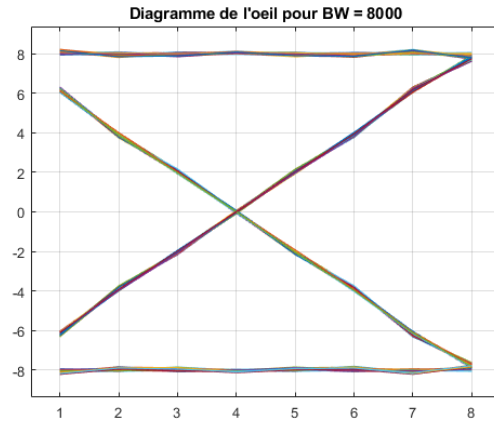


FIGURE 15 – Diagramme de l'oeil(BW = 8000 Hz)

En traçant, sur une même figure, $|H(f)H_r(f)|$ et $|H_c(f)|$, où $H(f)$ est la réponse en fréquence du filtre de mise en forme, $H_r(f)$ la réponse en fréquence du filtre de réception et $H_c(f)$ la réponse en fréquence du filtre canal, on remarque que le filtre lié au canal de propagation englobe complètement la réponse en fréquence du filtre de mise en forme :

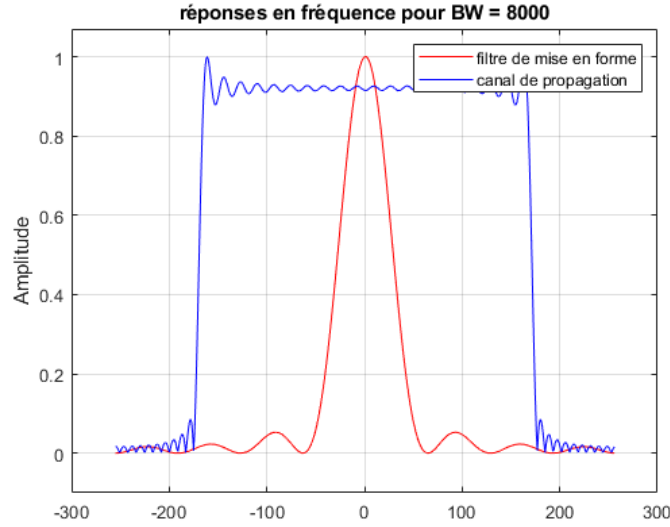


FIGURE 16 – Réponses en fréquence du canal de propagation et du filtre de mise en forme (BW = 8000 Hz)

Cela est aussi visible sur les figures 14 et 15. En effet, on remarque que la réponse impulsionnelle globale de la chaîne de transmission (figure 14) correspond assez bien à un triangle (qui est la réponse en fréquence du filtre de mise en forme). Quand au diagramme de l'oeil (figure 15), on remarque que l'on peut trouver un instant où il y a seulement deux choix possibles ($n_0 = N_s$ par exemple).

Cela est confirmé grâce au calcul du taux d'erreur binaire d'une telle chaîne de transmission :

$$T_{eb} = 0$$

4 Étude de l'impact du bruit et du filtrage adapté, notion d'efficacité en puissance

Cette dernière partie va être dédiée à l'étude du bruit dans la chaîne de transmission numérique : impact du bruit introduit par le canal sur la transmission, influence du filtrage adapté, calcul et estimation du taux d'erreur binaire (TEB) pour comparer les chaînes de transmission en termes d'efficacité en puissance.

Pour cela, nous allons implémenter trois différentes chaînes de transmission :

- Mapping :
 - Chaîne 1 : symboles binaires à moyenne nulle.
 - Chaîne 2 : symboles binaires à moyenne nulle.
 - Chaîne 3 : symboles 4-aires à moyenne nulle.
- Filtre de mise en forme rectangulaire de durée égale à la durée symbole T_s et de hauteur 1.
- Canal de propagation à bruit additif et gaussien.
- Filtre de réception :
 - Chaîne 1 : rectangulaire de durée égale à la durée symbole et de hauteur 1.
 - Chaîne 2 : rectangulaire de durée égale à la moitié de la durée symbole et de hauteur 1.
 - Chaîne 3 : rectangulaire de durée égale à la durée symbole et de hauteur 1.
- Échantillonnage aux instants optimaux.
- Décisions sur les symboles par détecteur à seuil avec seuil(s) optimal(aux).
- Demapping adapté au mapping utilisé.

4.1 Étude de chaque chaîne de transmission

4.1.1 Chaîne 1

4.1.1.1 Sans bruit

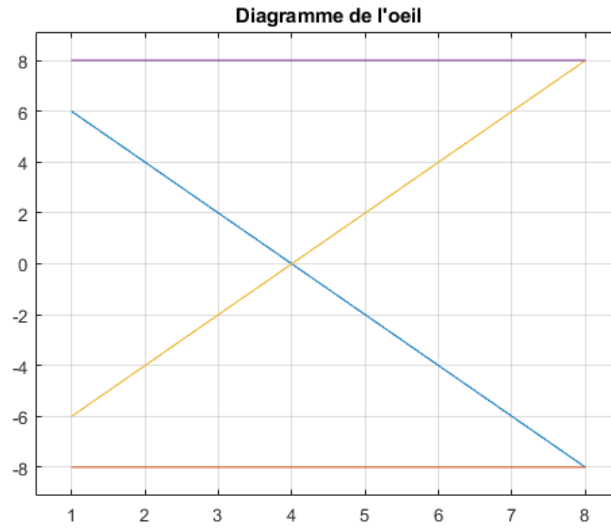


FIGURE 17 – Diagramme de l'oeil de la chaîne de transmission sans bruit

D'après ce diagramme de l'oeil, on choisit d'échantillonner en $n_0 = N_s = 8$, car à cet instant il n'y a que deux choix possibles.

Avec ce choix là, on obtient bien $T_{eb} = 0$.

4.1.1.2 Avec bruit

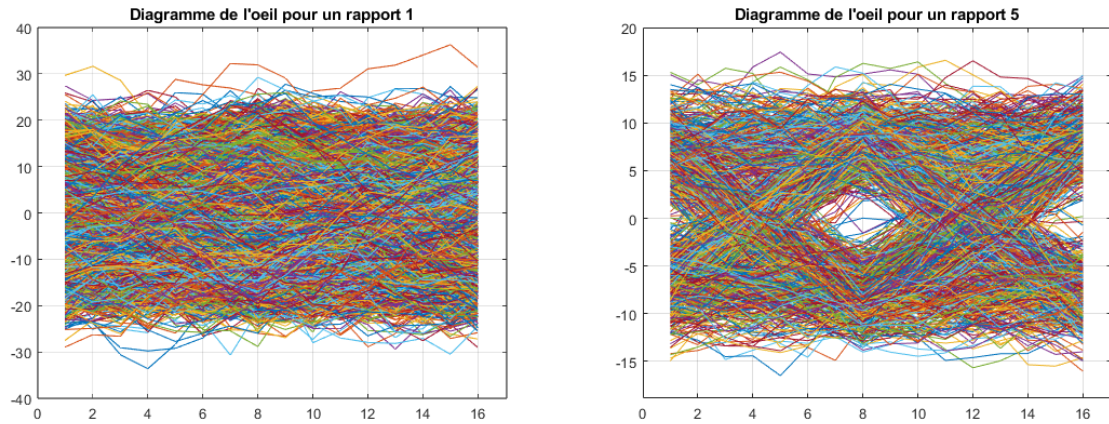


FIGURE 18 – Diagramme de l'oeil pour $\frac{E_b}{n_0} = 1$ et pour $\frac{E_b}{n_0} = 5$

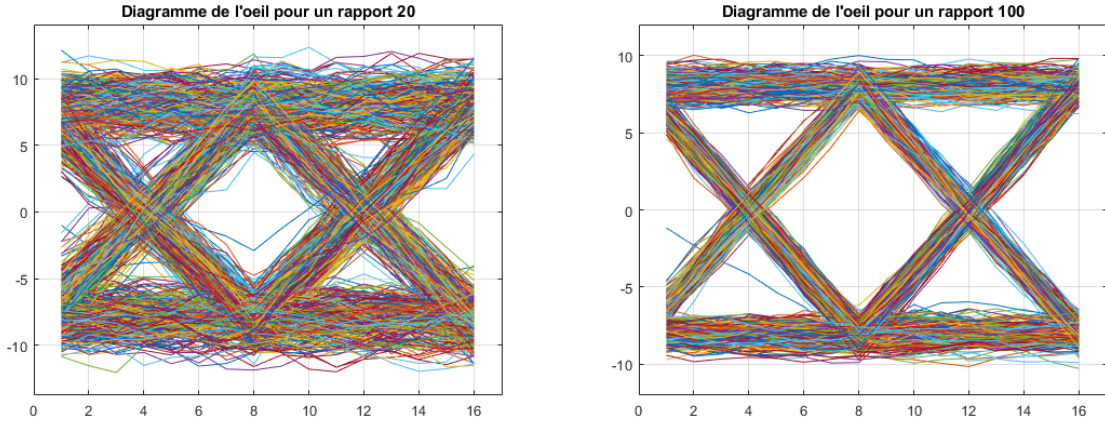


FIGURE 19 – Diagramme de l'oeil pour $\frac{E_b}{n_0} = 20$ et pour $\frac{E_b}{n_0} = 100$

La formule utilisée pour calculer le taux d'erreur binaire théorique est :

$$TEB = Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right)$$

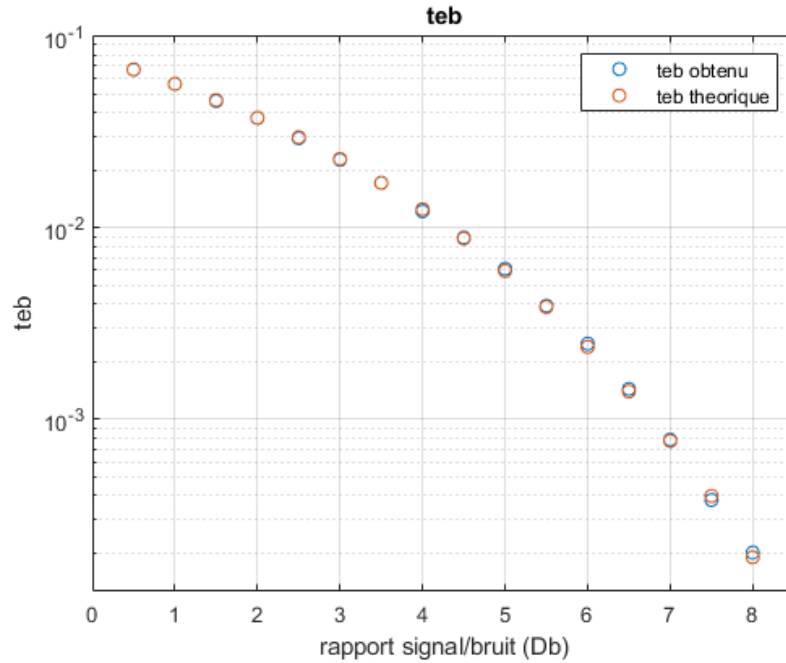


FIGURE 20 – Taux d'erreur binaire obtenu par simulation et du taux d'erreur binaire théorique de la chaîne étudiée

On remarque que les courbes se superposent parfaitement, ce qui confirme la validité de notre chaîne simulée.

4.1.2 Chaîne 2

4.1.2.1 Sans bruit

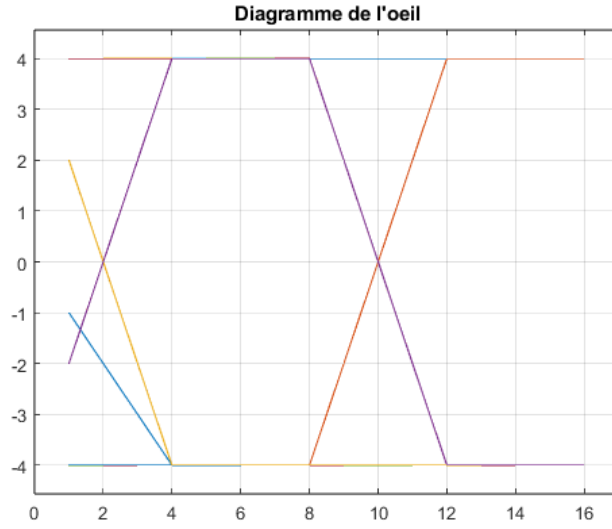


FIGURE 21 – Diagramme de l'oeil de la chaîne de transmission sans bruit

D'après ce diagramme de l'oeil, on choisit d'échantillonner en $n_0 = N_s = 8$, car à cet instant il n'y a que deux choix possibles.

Avec ce choix là, on obtient bien $T_{eb} = 0$.

4.1.2.2 Avec bruit

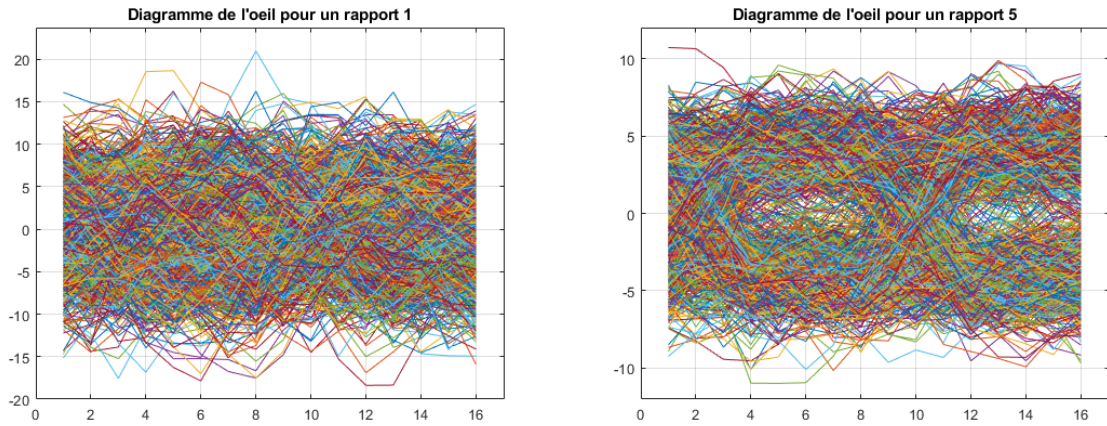


FIGURE 22 – Diagramme de l'oeil pour $\frac{E_b}{n_0} = 1$ et pour $\frac{E_b}{n_0} = 5$

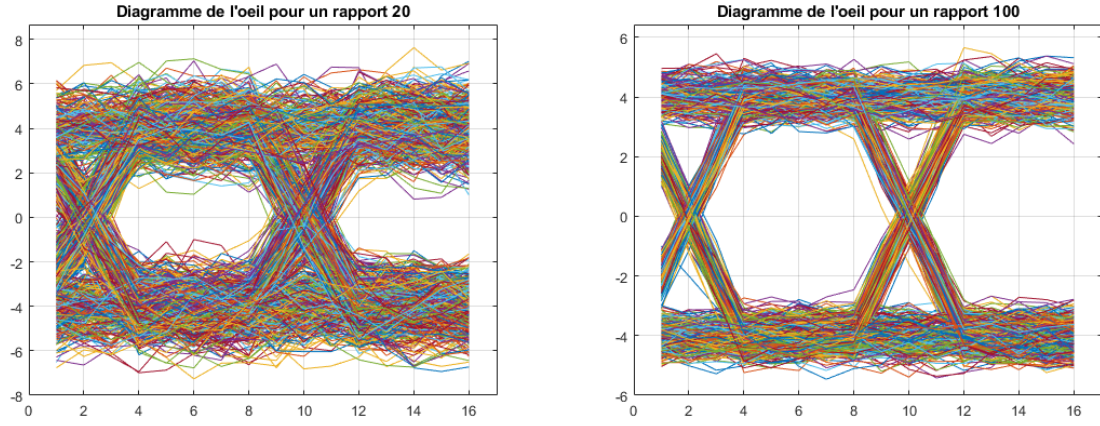


FIGURE 23 – Diagramme de l'oeil pour $\frac{E_b}{n_0} = 20$ et pour $\frac{E_b}{n_0} = 100$

La formule utilisée pour calculer le taux d'erreur binaire théorique est :

$$TEB = Q \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

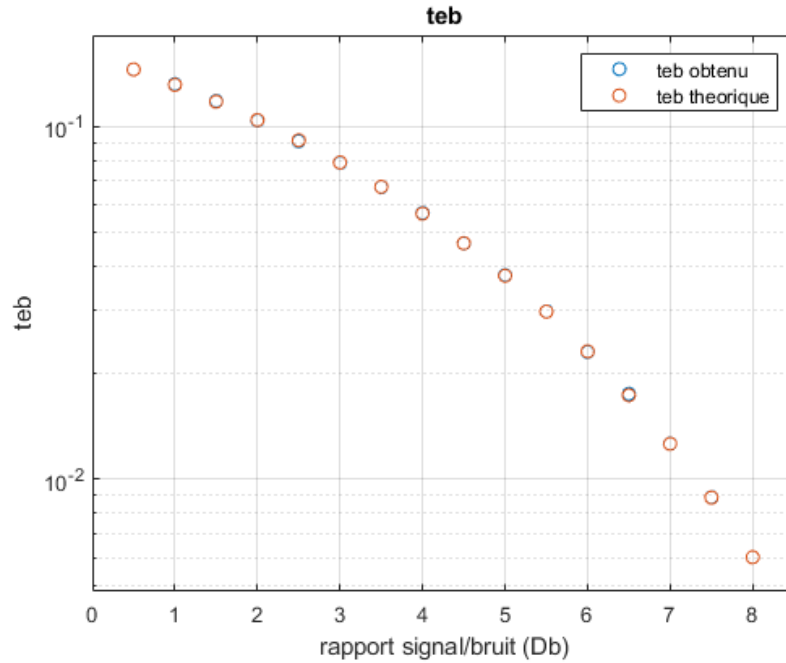


FIGURE 24 – Taux d'erreur binaire obtenu par simulation et du taux d'erreur binaire théorique de la chaîne étudiée

On remarque que les courbes se superposent parfaitement, ce qui confirme la validité de notre chaîne simulée.

4.1.3 Chaîne 3

4.1.3.1 Sans bruit

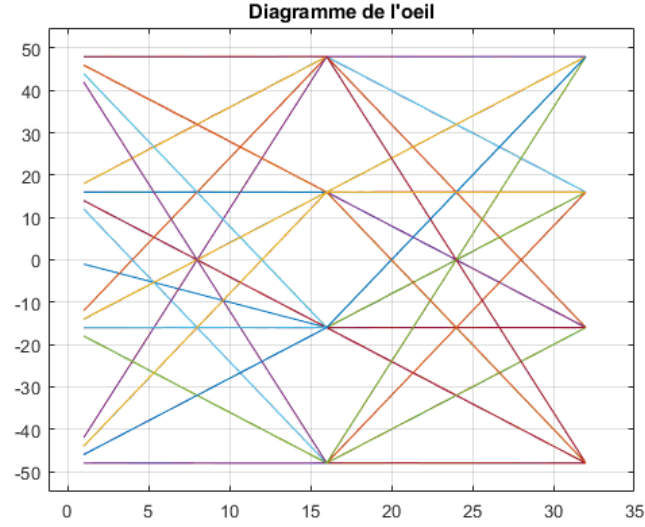


FIGURE 25 – Diagramme de l'oeil de la chaîne de transmission sans bruit

D'après ce diagramme de l'oeil, on choisit d'échantillonner en $n_0 = N_s = 16$, car à cet instant il n'y a que quatre choix possibles.

Avec ce choix là, on obtient bien $T_{eb} = 0$.

4.1.3.2 Avec bruit

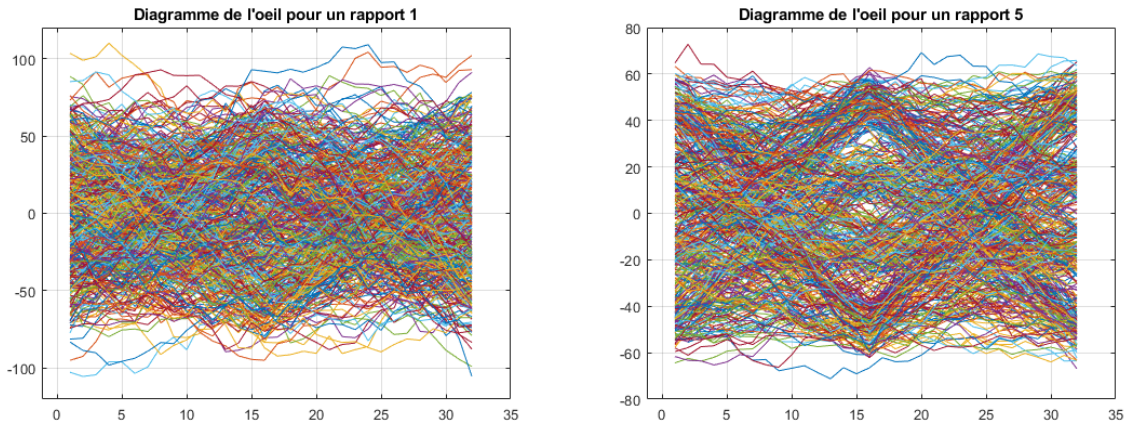


FIGURE 26 – Diagramme de l'oeil pour $\frac{E_b}{n_0} = 1$ et pour $\frac{E_b}{n_0} = 5$

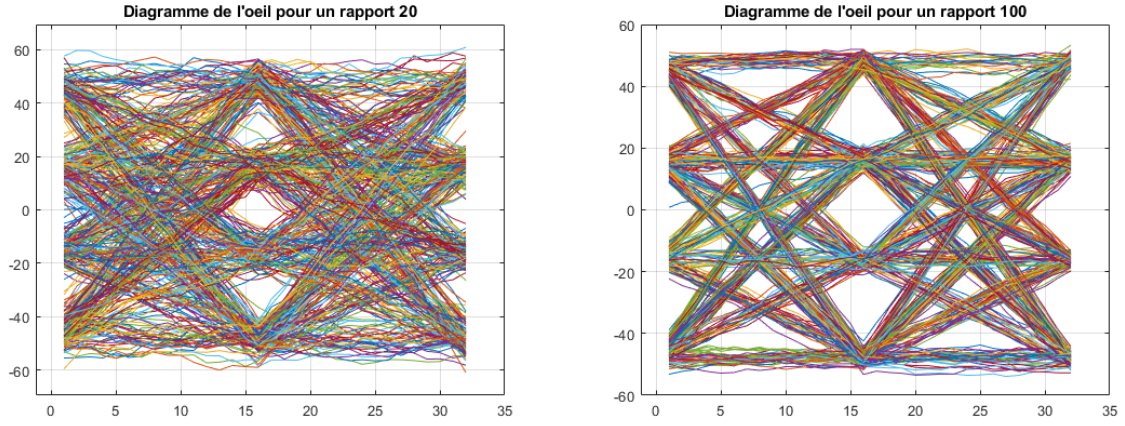


FIGURE 27 – Diagramme de l'oeil pour $\frac{E_b}{n_0} = 20$ et pour $\frac{E_b}{n_0} = 100$

La formule utilisée pour calculer le taux d'erreur binaire théorique est :

$$TEB \approx \frac{3}{4} Q \left(\sqrt{\frac{4 E_b}{5 N_0}} \right)$$

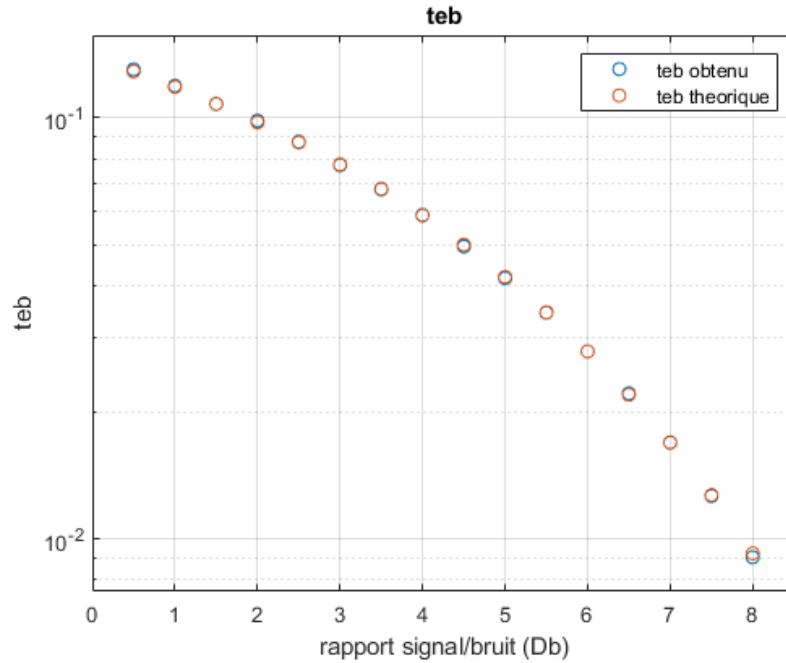


FIGURE 28 – Taux d'erreur binaire obtenu par simulation et du taux d'erreur binaire théorique de la chaîne étudiée

On remarque que les courbes se superposent parfaitement, ce qui confirme la validité de notre chaîne simulée.

4.2 Comparaison des chaines de transmission implantées

Pour comparer ces différentes chaines de transmission implémentées, nous traçons leur taux d'erreur binaire en fonction du rapport signal sur bruit sur un même graphique :

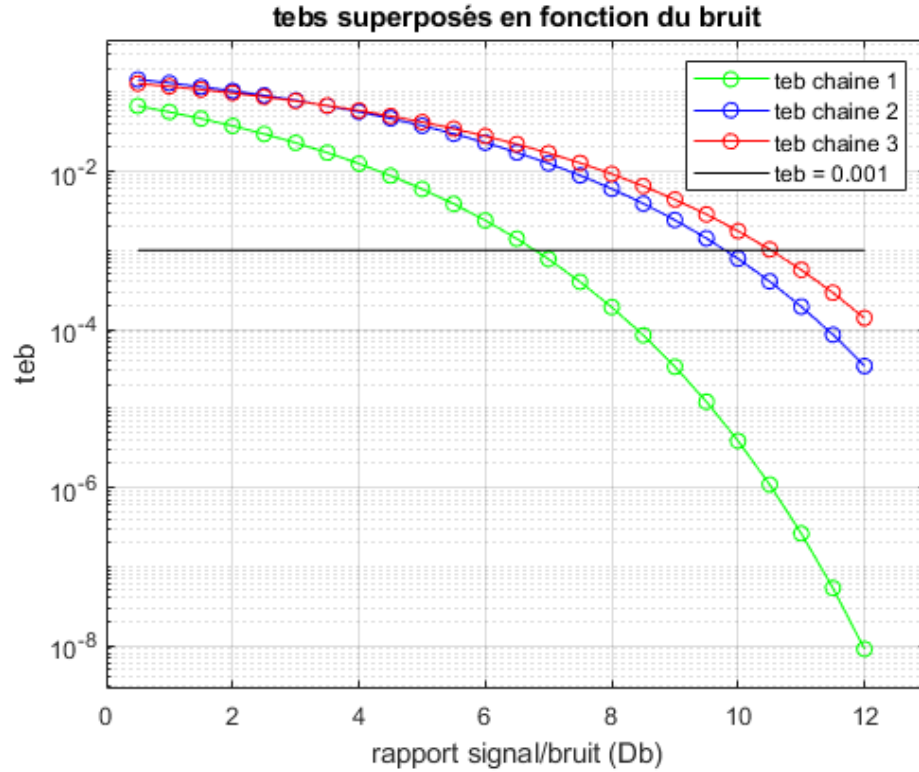


FIGURE 29 – TEBs obtenu par simulation pour les chaines de transmission 1, 2 et 3

Nous avons également tracé une ligne horizontale, qui correspond à un certain taux d'erreur binaire fixé (ici égal à 10^{-3})

On remarque, en comparant la chaîne 1 et la chaîne 2, que la chaîne 2 a besoin d'un rapport signal à bruit plus élevé pour atteindre le même taux d'erreur binaire. Cela signifie donc que la chaîne 2 a une plus faible efficacité en puissance. Cela peut-être expliqué par le fait que l'on n'utilise pas un filtre adapté lors de la démodulation.

De plus on remarque, en comparant la chaîne 1 et 3, que la chaîne 3 a besoin d'un rapport signal à bruit plus élevé pour atteindre le même taux d'erreur binaire. Cela signifie donc que la chaîne 3 a une plus faible efficacité en puissance. Cela peut-être expliqué par le fait que le mapping est 4-aire ($M = 4$), ce qui permet cependant une meilleure efficacité spectrale.