2.12. Математическое моделирование распределения легкой примеси в приземном слое атмосферы, описанное в рамках теории подобия

2.12.1. Постановка задачи

Дано уравнение (2.19) с одним начальным (2.20) и двумя краевыми условиями (2.21)

$$u\frac{\partial c'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}k_z\frac{\partial c'}{\partial z},$$

$$c'\,|_{x=0}= \frac{M}{u}\delta\,(z-H)\,,$$

$$k_z\frac{\partial c'}{\partial z}\,|_{z=0}= 0,\quad c'\,|_{z\to\infty}\to 0.$$

Для параметризации профилей коэффициента турбулентного обмена $k(z)$ и скорости ветра $u(z)$ используются соотношения теории подобия

$$k_z = \kappa u_* \begin{cases} \frac{1}{\frac{1}{z+z_0}+\frac{4,7}{L}}, & L > 0, \\ (z+z_0)\left(1-\frac{15z}{L}\right)^{0,25}, & L \le 0, \end{cases}$$

$$u(z) = \frac{u_*}{\kappa}\begin{cases} \left(\ln\left(\frac{z}{z_0}+1\right)+\frac{4,7}{L}z\right), & L > 0, \\ (F_u(z+z_0)-F(z_0)), & L \le 0, \end{cases}$$

где z_0– параметр шероховатости,

$$F_u(z) = \ln(z) - 2\ln\left(\frac{1+x}{2}\right) - \ln\left(\frac{1+x^2}{2}\right) + 2\arctan(x),$$

$$x = \left(1-\frac{15z}{L}\right)^{0,25}.$$

Перейдем к безразмерным параметрам, используя следующие масштабы

$$z = L\zeta,\ x = Xx',\ c' = C\overline{c}$$

и обозначения

$$\zeta = \frac{z}{L},\ \zeta_0 = \frac{z_0}{L},\ \zeta_H = \frac{z_H}{L}.$$

Запишем выражения для $u(z)$ и k_z следующим образом

$$u(z) = \frac{u_*}{\kappa}\left(f_u\left(\frac{z}{L} + \frac{z_0}{L}\right) - f_u\left(\frac{z_0}{L}\right)\right),$$

$$k_z = \kappa u_*(z + z_0)\Psi\left(\frac{z}{L}\right).$$

Чтобы найти функции $\Psi(\zeta)$ и $f_u(\zeta)$ приравняем правые части в соответствующих выражениях (), ().

При $L > 0$

$$\kappa u_* \frac{1}{\frac{1}{z+z_0} + \frac{4{,}7}{L}} = \kappa u_*(z + z_0)\Psi\left(\frac{z}{L}\right),$$

$$\frac{u_*}{\kappa}\left(\ln\left(\frac{z}{z_0} + 1\right) + \frac{4,7}{L}z\right) = \frac{u_*}{\kappa}\left(f_u\left(\frac{z}{L} + \frac{z_0}{L}\right) - f_u\left(\frac{z_0}{L}\right)\right).$$

После преобразований получаем

$$\Psi(\zeta) = \frac{1}{1 + 4,7\,(\zeta + \zeta_0)},$$

$$f_u(\zeta) = \ln\left(\zeta L + 4,7\zeta\right),$$

$$f_u(\zeta_0) = \ln\left(\zeta_0 L + 4,7\zeta_0\right).$$

При $L < 0$ масштаб принимает вид $z = |L|\,\zeta$. Исходя из этого, приравниваем правые части (), () и (), () получаем

$$\Psi(\zeta) = (1 - \mathrm{sign}(L)15\zeta)^{0{,}25},$$

$$x(\zeta) = (1 - \mathrm{sign}(L)15\zeta)^{0{,}25},$$

$$f(\zeta) = \ln(\zeta\,|L|) - 2\ln\left(\frac{1+x(\zeta)}{2}\right) - \ln\left(\frac{1+x^2(\zeta)}{2}\right) + 2\arctan(x(\zeta))\,.$$

Переведем исходное уравнение, краевые условия и начальное условие в безразмерные параметры. Для этого подставляем $u(z)$ и k_z, выраженные через $\Psi(\zeta)$ и $f_u(\zeta)$ в исходное уравнение.

$$\frac{u_*}{\kappa}\left(f_u(\zeta) - f_u(\zeta_0)\right)\frac{\partial \overline{c}}{\partial x'} = \kappa\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\zeta + \zeta_0\right)\Psi(\zeta)\frac{\partial \overline{c}}{\partial \zeta}.$$

Переведем начальное условие в безразмерные параметры.

$$c'\Big|_{x=0} = \frac{M}{u_H}\delta(z-H),$$

$$C\overline{c}\Big|_{x=0} = \frac{M}{\frac{u_*}{\kappa}\left(f_u(\zeta_H) - f_u(\zeta_0)\right)}\delta(L\zeta - L\zeta_H).$$

Свойство δ-функции

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x).$$

Воспользовавшись этим свойством получаем

$$C\overline{c}\Big|_{x=0} = \frac{M}{|L|\,u_*}\cdot\frac{\kappa}{\left(f_u(\zeta_H) - f_u(\zeta_0)\right)}\delta(\zeta-\zeta_H),$$

$$C = \frac{M}{u_*\,|L|}.$$

Начальное условие в безразмерных параметрах

$$\overline{c}\Big|_{x=0} = \frac{\kappa}{\left(f_u(\zeta_H) - f_u(\zeta_0)\right)}\delta(\zeta-\zeta_H).$$

Далее переведем граничные условия. Из второго условия $c'\,|_{z\to\infty}\to 0$ следует $\overline{c}\,|_{\zeta\to\infty}\to 0$.

Преобразовав первое условие

$$k_z \frac{\partial c'}{\partial z}\ |_{z=0} = 0,$$

$$L u_* \kappa\, (\zeta + \zeta_0)\, \Psi(\zeta) \frac{C}{L} \frac{\partial \overline{c}}{\partial \zeta}\ |_{\zeta=0} = 0,$$

получаем

$$(\zeta + \zeta_0)\, \Psi(\zeta) \frac{\partial \overline{c}}{\partial \zeta}\ |_{\zeta=0} = 0.$$

Таким образом, задача записана в безразмерных переменных.

Задание

1. Выполнить расчет для следующих значений параметров:

$M = 10$, $L = \pm 100$, $u_* = 0.5$, $\kappa = 0,4187$, $\Delta\zeta = 0,05$, $\Delta x = 0,01$, $\zeta_0 = 0,0002$; расчетная область 3000 м × 100 м.

2. Проанализировать влияние высоты источника:

- Построить графики зависимости приземных (вывести результат для ближайшей к поверхности точке) концентраций от расстояния x (для линейного источника) при $L > 0$ и отдельно при $L < 0$. Рассмотреть значения высоты источника $\zeta = 0{,}2$, $\zeta = 0{,}4$, $\zeta = 0{,}6$.
- Провести численные эксперименты и определить значение максимальной приземной концентрации для разной высоты источника (ζ от 0,1 до 0,7).
- Построить графики зависимости максимальной приземной концентрации от высоты источника при $L > 0$ и отдельно при $L < 0$.
- Построить графики зависимости расстояния, соответствующего максимальной приземной концентрации от высоты источника при $L > 0$ и отдельно при $L < 0$.

3. Проанализировать влияние параметра шероховатости:

$\zeta_0 = 0{,}00002$, $0{,}0002$, $0{,}002$, $0{,}02$ и построить графики при $L > 0$ и отдельно при $L < 0$.