საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

კალკულუსი 1

ლექციების კურსი „Thomas' Calculus, Early Transcedentals“ მიხედვით

(სტუ ბიბლიოთეკა # 51/164)

„ ნიადაგისა და წყლის რესურსების ინჟინერიის“

სპეციალობის I კურსის სტუდენტებისათვის

2014

THOMAS'
CALCULUS
EARLY TRANSCENDENTALS
Twelfth Edition

Based on the original work by
George B. Thomas, Jr.
Massachusetts Institute of Technology

as revised by

Maurice D. Weir
Naval Postgraduate School

Joel Hass
University of California, Davis

Addison-Wesley

Boston Columbus Indianapolis New York San Francisco Upper Saddle River

Amsterdam Cape Town Dubai London Madrid Munich Paris Montréal Toronto

Delhi Mexico City São Paulo Sydney Hong Kong Seoul Singapore Taipei Tokyo

დ.ნატროშვილი, გ.ბერიკელაშვილი, შ.ზაზაშვილი

კალკულუსი 1

ლექციების კურსი მომზადებულია

„Thomas' Calculus, Early Transcedentals“

მიხედვით

თბილისი 2014

სარჩევი

1

ფუნქციები

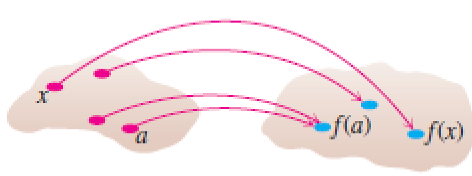
ფუნქციის ცნება უმნიშვნელოვანია კალკულუსის შესწავლისათვის . ამ თავში ჩვენ გავიხსენებთ, რას წარმოადგენს ფუნქცია და მიმოვიხილავთ მასთან დაკავშირებულ სხვა ძირითად ცნებებს და თვისებებს, როგორიცაა: განსაზღვრის და მნიშვნელობათა არეები, გრაფიკები, ზრდადობა და კლებადობა, ლუწობა და კენტობა, სიმეტრია, შედგენილი ფუნქციები, პერიოდულობა, ურთიერთცალსახა და შექცეული ფუნქციები.

ფუნქციები. განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე

შესაძლოა ერთი ცვლადი სიდიდე, ვთქვათ y , დამოკიდებული იყოს მეორე ცვლად სიდიდეზე, ვუწოდოთ მას x. ასეთ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ y არის x-ის ფუნქცია და სიმბოლურად ჩავწერთ $y = f(x)$. ამ აღნიშვნაში f სიმბოლო წარმოადგენს ფუნქციას, x არის **დამოუკიდებელი ცვლადი,** ხოლო y კი **დამოკიდებული ცვლადი.**

განსაზღვრება. f ფუნქცია D სიმრავლიდან Y სიმრავლეზე ეწოდება წესს, რომელიც ყოველ $x \in D$ ელემენტს შეუსაბამებს ერთადერთ $f(x) \in Y$ ელემენტს .

D სიმრავლეს ფუნქციის **განსაზღვრის არე** ეწოდება. Y-ის ყველა იმ ელემენტისგან შედგენილ ქვესიმრავლეს, რომლებიც D-ს ერთ ელემენტს მაინც შეესაბამებიან, ფუნქციის **მნიშვნელობათა სიმრავლე** ან **ცვლილების არე** ეწოდება.



$D =$ განსაზღვრის არე $\quad Y$ შეიცავს ცვლილების არეს

თუ ფუნქცია ფორმულითაა მოცემული და არ არის მითითებული განსაზღვრის არე D, მაშინ D არედ მოიაზრება არგუმენტის ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლისთვისაც ფორმულას აზრი აქვს. ასეთ D არეს **ბუნებრივი განსაზღვრის არე** ეწოდება.

მაგალითი . რამდენიმე ფუნქციისათვის ცხრილის სახით ვუჩვენოთ ბუნებრივი განსაზღვრის არეები და შესაბამისი ცვლილების არეები.

ფუნქცია	**განსაზღვრის არე** (x)	**ცვლილების არე** (y)
$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = 1/x$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4 - x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$

ფუნქციის გრაფიკი

D არეზე განსაზღვრული $y = f(x)$ ფუნქციის **გრაფიკი** ეწოდება სიბრტყის ყველა $\{(x, f(x)| \ x \in D\}$ წერტილთა სიმრავლეს.

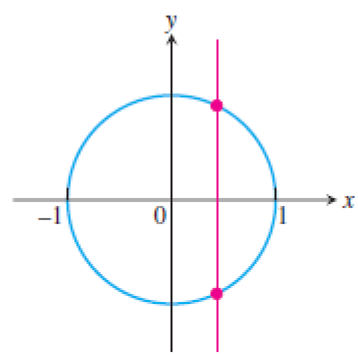
ფუნქციის გრაფიკს, ჩვეულებრივ, **წირი** (ან **მრუდი**) ეწოდება, $y = f(x)$ განტოლებას კი -- წირის განტოლება.

ვერტიკალური წრფის ტესტი ფუნქციისათვის

საკოორდინატო სიბრტყის რაიმე მრუდი შეიძლება ფუნქციის გრაფიკს არ წარმოადგენდეს.

განსაზღვრის არის ნებისმიერ x წერტილს f ფუნქცია ერთადერთ $f(x)$ მნიშვნელობას შეუსაბამებს. ამიტომ **ვერტიკალური წრფე არ შეიძლება ფუნქციის გრაფიკს ერთზე მეტ წერტილში კვეთდეს.**

მაგალითად, წრეწირი არ წარმოადგენს ფუნქციის გრაფიკს.



ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრის არის სხვადასხვა უბანზე სხვადასხვა ფორმულითაა მოცემული, **უბან-უბან განსაზღვრული ფუნქცია** ეწოდება. მაგალითად გამოდგება აბსოლუტური მნიშვნლობის ფუნქცია

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}.$$

ზრდადი და კლებადი ფუნქციები

თუ x-ის ზრდასთან ერთად $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა იზრდება და გრაფიკი ზევით მიიწევს, ვიტყვით, რომ *ფუნქცია ზრდადია.* ხოლო თუ x -ის ზრდასთან ერთად ფუნქციის მნიშვნელობა $f(x)$ კლებულობს და გრაფიკი ქვევით ეშვება, ვიტყვით, რომ *ფუნქცია კლებადია.*

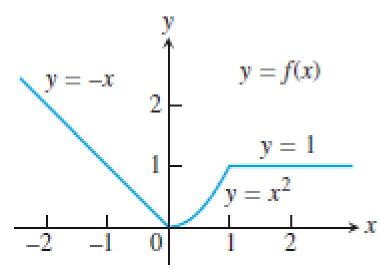
განსაზღვრება. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია რაიმე I ინტერვალზე და $x_1, x_2 \in I$ ნებისმიერი ორი წერტილია.

1. თუ $f(x_2) > f(x_1)$ ყოველთვის, როცა $x_2 > x_1$, მაშინ f ფუნქციას ეწოდება **ზრდადი** I-ზე.
2. თუ $f(x_2) < f(x_1)$ ყოველთვის, როცა $x_2 > x_1$, მაშინ f ფუნქციას ეწოდება **კლებადი** I-ზე.

მაგალითი . უბან-უბან განსაზღვრული ფუნქცია (ფიგ.1.9)

$$f(x)=\begin{cases} -x, & x<0 \\ x^2, & 0\le x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

კლებადია $(-\infty,0]$-ზე და ზრდადია $[0,1]$ -ზე. ფუნქცია არც ზრდადია და არც კლებადია $[1,\infty)$ ინტერვალზე.



ფიგურა 1.9

ლუწი და კენტი ფუნქციები. სიმეტრია

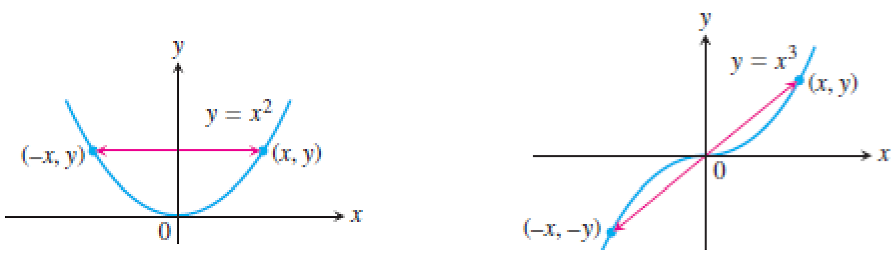
რიცხვთა რაიმე E სიმრავლეს ეწოდება სიმეტრიული ნულის მიმართ, თუ $x\in E$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $-x\in E$.

განსაზღვრება. f ფუნქციას ეწოდება ლუწი, თუ მისი განსაზღვრის არე D სიმეტრიულია ნულის მიმართ და ნებისმიერი $x\in D$-სათვის $f(-x)=f(x)$.

განსაზღვრება. f ფუნქციას ეწოდება კენტი, თუ მისი განსაზღვრის არე D სიმეტრიულია ნულის მიმართ და ნებისმიერი $x \in D$-სათვის $f(-x) = -f(x)$.

ლუწი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია y -ღერძის მიმართ.
მართლაც, $f(-x) = f(x)$ ტოლობის გამო (x, y) წერტილი ძევს გრაფიკზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $(-x, y)$ ძევს გრაფიკზე (ფიგურა 1.12ა).

კენტი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია სათავის მიმართ.
მართლაც, $f(-x) = -f(x)$ ტოლობის გამო (x, y) წერტილი ძევს გრაფიკზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $(-x, -y)$ ძევს გრაფიკზე (ფიგურა 1.12ბ).



ა ბ

ფიგურა 1.12

ფუნქციათა კომპოზიცია (რთული ფუნქცია)

განსაზღვრება. ვთქვათ მოცემულია f და g ფუნქციები. მათი კომპოზიცია $f \circ g$ (" f -ის კომპოზიცია g -სთან") ეწოდება

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

ტოლობით განსაზღვრულ ფუნქციას. $f \circ g$ -ს განსაზღვრის არე შედგება ყველა იმ $x \in D(g)$ რიცხვისაგან, რომელთათვისაც $g(x) \in D(f)$

$f \circ g$ და $g \circ f$ რთული ფუნქციები საზოგადოდ განსხვავებულია.

მაგალითი. ვთქვათ, $f(x)=\sqrt{x}$ და $g(x)=x+1$. ვიპოვოთ

(ა) $(f\circ g)(x)$ (ბ) $(g\circ f)(x)$ (გ) $(f\circ f)(x)$ (დ) $(g\circ g)(x)$

ამოხსნა.

	კომპოზიცია	განსაზღვრის არე
(ა)	$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)}=\sqrt{x+1}$	$[-1,\infty)$
(ბ)	$(g\circ f)(x)=g(f(x))=f(x)+1=\sqrt{x}+1$	$[0,\infty)$
(გ)	$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\sqrt{f(x)}=\sqrt{\sqrt{x}}=x^{1/4}$	$[0,\infty)$
(დ)	$(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(x)+1=x+2$	$[-\infty,\infty)$

შევნიშნოთ, რომ თუ $f(x)=x^2$ და $g(x)=\sqrt{x}$, მაშინ $(f\circ g)(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2=x$. თუმცა $f\circ g$ -ს განსაზღვრის არეა $[0,\infty)$ და არა $(-\infty,\infty)$, რადგან $\sqrt{x}$ საჭიროებს $x\geq 0$ -ს.

ფუნქციათა პერიოდულობა

განსაზღვრება. f ფუნქციას **პერიოდული** ეწოდება, პერიოდით $p\neq 0$, თუ ნებისმიერი $x\in D(f)$ -სათვის რიცხვები $x-p$ და $x+p$ აგრეთვე ეკუთვნის $D(f)$ -ს და მართებულია ტოლობა

$$f(x+p)=f(x).$$

განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ f ფუნქციის პერიოდი არის p და $x\in D(f)$, მაშინ

$$f(x)=f((x-p)+p)=f(x-p).$$

ასევე შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$f(x+kp)=f(x), \qquad \text{სადაც} \quad k\in\mathbb{Z}.$$

ამრიგად, ყოველ პერიოდულ ფუნქციას გააჩნია პერიოდთა უსასრულო სიმრავლე.

ტრიგონომეტრიული ფუნქციები პერიოდულია. კერძოდ, tan, cot ფუნქციათა უმცირესი დადებითი პერიოდია π, ხოლო sin, cos, sec, csc ფუნქციათა უმცირესი დადებითი პერიოდი კი არის 2π.

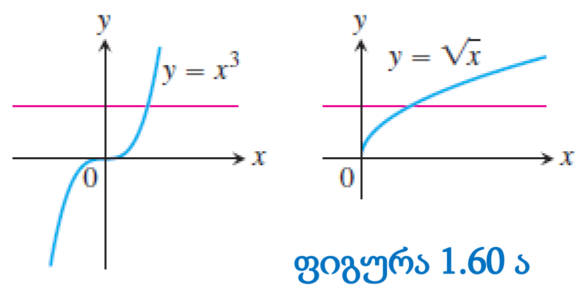
ურთიერთცალსახა ფუნქცია. შექცეული ფუნქცია

> **განსაზღვრება.** $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **ურთიერთცალსახა** D არეზე, თუ $f(x_1) \neq f(x_2)$ ყოველთვის, როცა განსაზღვრის D არეზე $x_1 \neq x_2$.

ზოგიერთი ფუნქცია შეიძლება ურთიერთცალსახა იყოს ბუნებრივ განსაზღვრის არეზე. ასეთია, მაგალითად, $f(x) = \sqrt{x}$, $D = [0, \infty)$. მართლაც, D-დან აღებული $x_1 \neq x_2$ ორი რიცხვისათვის $\sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2}$.

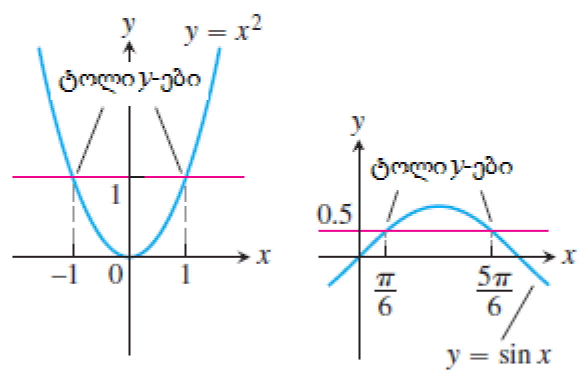
ზოგიერთი ფუნქცია კი შეიძლება არ იყოს ურთიერთცალსახა რაიმე არეზე, ამ არის ნაწილზე კი ეს თვისება ჰქონდეს. მაგალითად, $f(x) = \sin x$, $D = [0, \pi]$ ფუნქცია არაა ურთიერთცალსახა, რადგან $\sin(\pi/6) = \sin(5\pi/6)$. ამავე დროს $f(x) = \sin x$, $D = [0, \pi/2]$ ფუნქცია ურთიერთცალსახაა.

ურთიერთცალსახა ფუნქციის გრაფიკი ჰორიზონტალურ წრფეს შეიძლება კვეთდეს არაუმეტეს ერთხელ (ფიგურა 1.60ა)



ფიგურა 1.60 ა

თუ ფუნქციის გრაფიკი ჰორიზონტლურ წრფეს კვეთს ერთზე მეტჯერ, ის მიიღებს ერთი და იგივე მნიშვნელობას ცვლადის განსხვავებული სიდიდეებისთვის და, მაშასადამე, არაა ურთიერთცალსახა (ფიგურა 1.60 ბ).



ფიგურა 1.60 ბ

> **ჰორიზონტალური წრფის ტესტი ურთიერთცალსახა ფუნქციისათვის**
>
> $y = f(x)$ ფუნქცია ურთიერთცალსახაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ მისი გრაფიკი კვეთს ყოველ ჰორიზონტალურ წრფეს არაუმეტეს ერთხელ.

შექცეული ფუნქციები

განსაზღვრება. ვთქვათ f ურთიერთცალსახა ფუნქციის განსაზღვრის არეა D, ცვლილების არე კი R. **შექცეული ფუნქცია** f^{-1} განსაზღვრულია წესით

$$f^{-1}(b) = a \quad \text{თუ} \quad f(a) = b.$$

f^{-1}-ის განსაზღვრის არეა R, ცვლილების არე კი D.

f^{-1} იკითხება " f-ის შექცეული". ზედა ინდექსი "-1" შექცეული ფუნქციის სიმბოლოში ხარისხის მაჩვენებელი არაა. $f^{-1}(x)$ არ ნიშნავს $1/f(x)$-ს. შევნიშნოთ, რომ f-ის და f^{-1}-ის განსაზღვრის და ცვლილების არეები ურთიერთმონაცვლეა.

მაგალითი. ურთიერთცალსახა $y = f(x)$ ფუნქცია ცხრილის სახითაა მოცემული

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	3	4.5	7	10.5	15	20.5	27	34.5

$x = f^{-1}(y)$ შექცეული ფუნქციის შესაბამისი ცხრილი f ფუნქციის ცხრილის სტრიქონების უბრალო გადანაცვლებითაა მიღებული:

y	3	4.5	7	10.5	15	20.5	27	34.5
$f^{-1}(y)$	1	2	3	4	5	6	7	8

თუ ჩვენ x-ზე ვიმოქმედებთ f-ით, შემდეგ კი მიღებულ $f(x)$-ზე ვიმოქმედებთ f^{-1} ფუნქციით, კვლავ დავბრუნდებით x-ზე, რომლიდანაც დავიწყეთ. ასევე, თუ ჩვენ ავიღებთ რაიმე y-ს f-ის მნიშვნელობათა სიმრავლიდან და გამოვთვლით $f^{-1}(y)$-ს, შემდეგ კი მიღებულ შედეგზე ვიმოქმედებთ f-ით, დავბრუნდებით კვლავ y მნიშვნელობაზე, რითაც დავიწყეთ. ფუნქციისა და მისი შექცეულის კომპოზიციას ისეთი ეფექტი აქვს, თითქოს არ განხორციელებულა მოქმედება:

$(f^{-1} \circ f)(x) = x$, ნებისმიერი $x \in D \in (f)$-სათვის,

$(f \circ f^{-1})(y) = y$, ნებისმიერი $y \in D \in (f^{-1})$-სათვის (ანუ f-ის მნიშვნელობათა სიმრავლეზე).

მხოლოდ ურთიერთცალსახა ფუნქციას აქვს შექცეული ფუნქცია. ანუ, ფუნქციას რომ ჰქონდეს შექცეული ფუნქცია რაიმე ინტერვალზე, ის უნდა იყოს ზრდადი ან კლებადი ამ ინტერვალზე.

შექცეული ფუნქციის პოვნა

f -დან f^{-1}-ზე გადასვლა ორსაფეხურიანი პროცედურის სახით შეიძლება ჩამოყალიბდეს.

1. $y = f(x)$ ტოლობიდან ამოვხსნათ x . ეს გვაძლევს $x = f^{-1}(y)$ ფორმულას, რომელშიც x გამოსახულია y -ით.
2. მიღებულ ფორმულაში ადგილები შევუცვალოთ x და y -ს. შედეგად მიიღება ფორმულა $y = f^{-1}(x)$, რომელშიც დამოუკიდებელი ცვლადი კვლავ x იქნება.

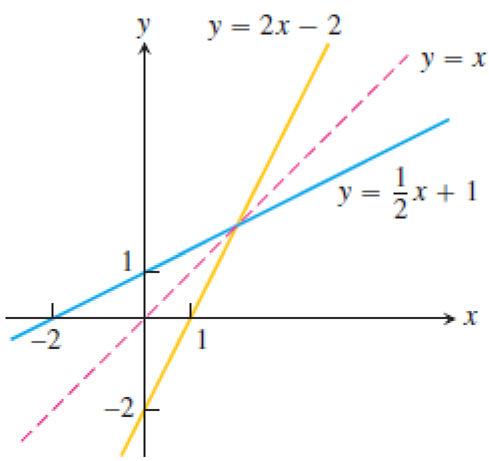
მაგალითი. ვიპოვოთ $y = \frac{1}{2}x + 1$ -ის შექცეული ფუნქცია, გამოსახული როგორც x -ის ფუ-ნქცია.

ამოხსნა. 1. ამოვხსნათ x მოცემული ტოლობიდან :

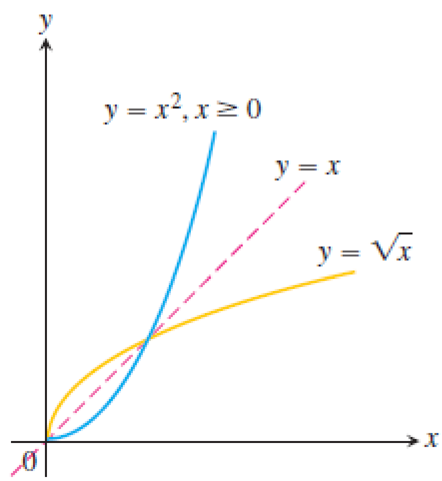
$$y = \frac{1}{2}x + 1; \qquad 2y = x + 2; \qquad x = 2y - 2 .$$

2. შევცვალოთ ერთმანეთით x და y : $y = 2x - 2$.

ამრიგად, $f(x) = (1/2)x + 1$ ფუნქციის შექცეული ფუნქციაა $f^{-1}(x) = 2x - 2$ (ფიგურა 1.62).



ფიგურა 1.62



ფიგურა 1.63

შემოწმება გვიჩვენებს, რომ მათი კომპოზიციები იგივურ ფუნქციას წარმოადგენს:

$$f^{-1}(f(x)) = 2\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 2 = x , \qquad f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{2}(2x - 2) + 1 = x .$$

მაგალითი. ვიპოვოთ $y = x^2, x \geq 0$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია, გამოსახული როგორც x-ის ფუნქცია.

ამოხსნა. ჯერ მოცემული ტოლობიდან ვიპოვოთ x:

$$y = x^2 \quad ; \qquad \sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = x.$$

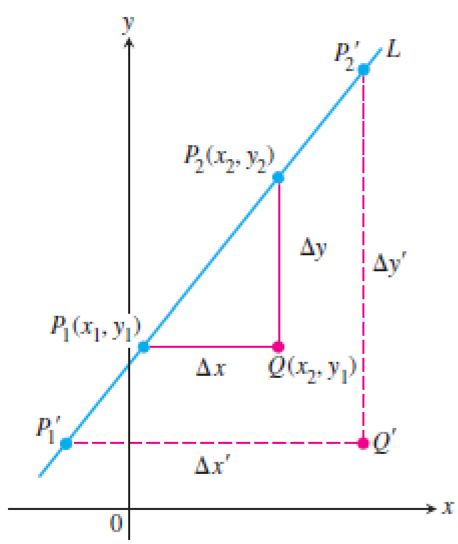
შემდეგ x და y-სთვის ადგილების შეცვლა გვაძლევს $y = \sqrt{x}$.

მაშასადამე, $y = x^2, x \geq 0$-ის შექცეულია ფუნქცია $y = \sqrt{x}$ (ფიგურა 1.63).

ურთიერთშექცეული ფუნქციების გრაფიკები სიმეტრიულია $y = x$ წრფის მიმართ.

წრფის დახრილობა

ვთქვათ ნაწილაკი გადაადგილდა საკოორდინატო სიბრტყის $P_1(x_1, y_1)$ წერტილიდან $P_2(x_2, y_2)$ წერტილში. კოორდინატთა ცვლილების სიდიდეებს ვუწოდოთ ნაზრდები: $\Delta x = x_2 - x_1$ სიდიდე არის x-ის ნაზრდი, $\Delta y = y_2 - y_1$ კი არის y-ის ნაზრდი. ასეთი ორი წერტილი განსაზღვრავს ერთადერთ წრფეს. ვუწოდოთ მას P_1P_2 წრფე.



ფიგურა A7

მსგავს სამკუთხედებში მსგავსებული გვერდები პროპორციულია (ფიგურა $A7$). ამიტომ საკოორდინატო სიბრტყის ყოველი არავერტიკალური P_1P_2 წრფისათვის

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

შეფარდებას აქვს ერთი და იგივე მნიშვნელობა ნებისმიერი ორი $P_1(x_1, y_1)$ და $P_2(x_2, y_2)$ წერტილის შემთხვევაში.

განსაზღვრება. $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ მუდმივ შეფარდებას ეწოდება არავერტიკალური P_1P_2 **წრფის დახრილობა.**

დადებითი დახრილობის მქონე წრფე ზევით მიიწევს მარჯვენა მხარეს, უარყოფითი დახრილობის მქონე კი ქვევით ეშვება. ვერტიკალური წრფის დახრილობა არ განისაზღვრება.

სავარჯიშოები 1.1

1--6 სავარჯიშოებში იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრისა და ცვლილების არეები.

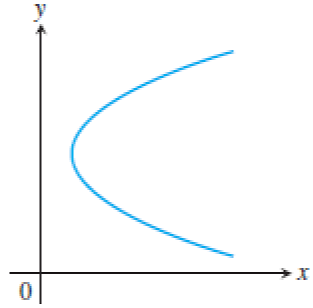
1. $f(x) = 1 + x^2$ **2.** $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

3. $F(x) = \sqrt{5x + 10}$ **4.** $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

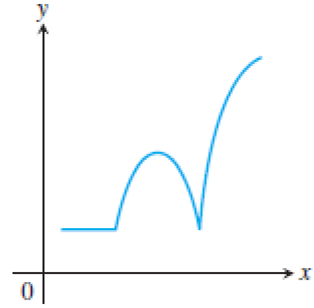
5. $f(t) = \dfrac{4}{3 - t}$ **6.** $G(t) = \dfrac{2}{t^2 - 16}$

7 და 8 სავარჯიშოებში რომელი გრაფიკია x ცვლადის ფუნქციის გრაფიკი და რომელი არა? პასუხი დაასაბუთეთ.

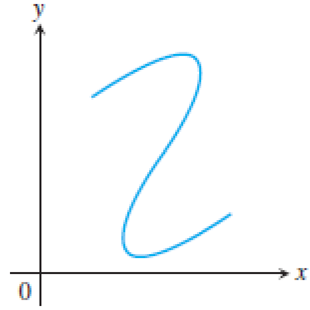
7. a.



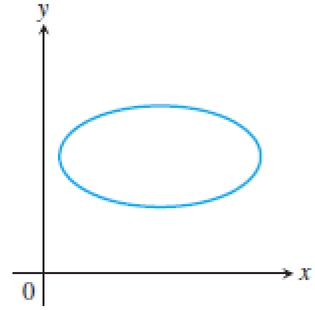
b.



8. a.



b.



9. წარმოადგინეთ ტოლგვერდა სამკუთხედის ფართობი და პერიმეტრი, როგორც სამკუთხედის გვერდის x სიგრძის ფუნქცია.

10. წარმოადგინეთ კვადრატის გვერდის სიგრძე მისი დიაგონალის d სიგრძის ფუნქციად. შემდეგ გამოსახეთ ფართობი როგორც დიაგონალის სიგრძის ფუნქცია.

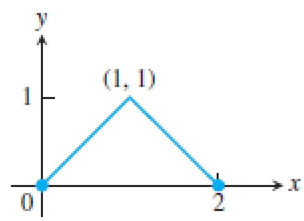
25--28 სავარჯიშოებში დახაზეთ ფუნქციათა გრაფიკები.

25. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$ **26.** $g(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

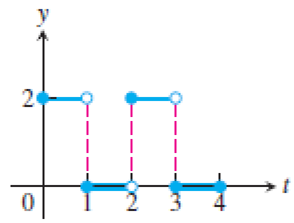
27. $F(x)=\begin{cases}4-x^2, & x\le 1\\ x^2+2x, & x>1\end{cases}$ **28**. $G(x)=\begin{cases}1/x, & x<0\\ x, & 0\le x\end{cases}$

29--31 სავარჯიშოებში იპოვეთ გრაფიკულად მოცემულ ფუნქციათა ფორმულები.

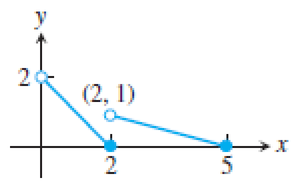
29. a.



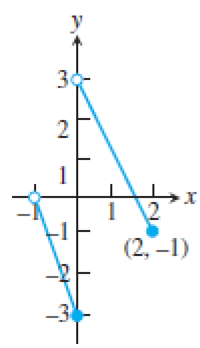
b.



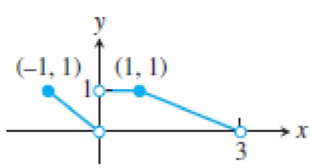
30. a.



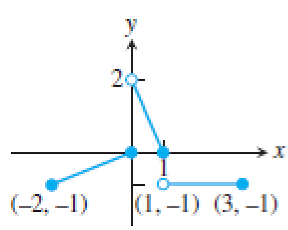
b.



31. a.



b.



47--58 სავარჯიშოებში დაადგინეთ, რომელია ლუწი, კენტი ან არც ლუწი და არც კენტი ფუნქცია.

47. $f(x) = 3$ **48.** $f(x) = x^{-5}$

49. $f(x) = x^2 + 1$ **50.** $f(x) = x^2 + x$

51. $g(x) = x^3 + x$ **52.** $g(x) = x^4 + 3x^2 - 1$

53. $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ **54.** $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

55. $h(t) = \dfrac{1}{t - 1}$ **56.** $h(t) = |t^3|$

57. $h(t) = 2t + 1$ **58.** $h(t) = 2|t| + 1$

სავარჯიშოები 1.2

5. თუ $f(x) = x + 5$ და $g(x) = x^2 - 3$, მაშინ იპოვეთ

a. $f(g(0))$ **b.** $g(f(0))$

c. $f(g(x))$ **d.** $g(f(x))$

e. $f(f(-5))$ **f.** $g(g(2))$

g. $f(f(x))$ **h.** $g(g(x))$

6. თუ $f(x) = x - 1$ და $g(x) = 1/(x + 1)$, მაშინ იპოვეთ

a. $f(g(1/2))$ **b.** $g(f(1/2))$

c. $f(g(x))$ **d.** $g(f(x))$

e. $f(f(2))$ **f.** $g(g(2))$

g. $f(f(x))$ **h.** $g(g(x))$

10. ცხრილში მოყვანილი რიცხვითი მნიშვნელობების გამოყენებით გამოთვალეთ მითითებული გამოსახულებები .

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1	0	-2	1	2
$g(x)$	2	1	0	-1	0

a. $f(g(-1))$ **b.** $g(f(0))$ **c.** $f(f(-1))$

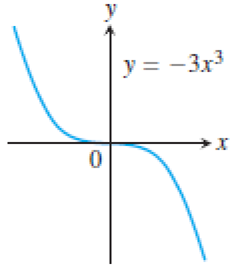
d. $g(g(2))$ **e.** $g(f(-2))$ **f.** $f(g(1))$

20. ვთქვათ $f(x) = 2x^3 - 4$. იპოვოთ ისეთი $y = g(x)$, რომ $(f \circ g)(x) = x + 2$.

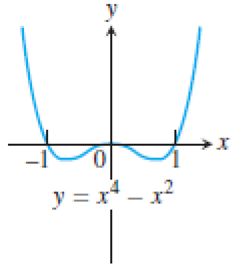
სავარჯიშოები 1.6

1--6 სავარჯიშოებში დაადგინეთ, რომელი ფუნქციაა ურთიერთცალსახა და რომელი არა.

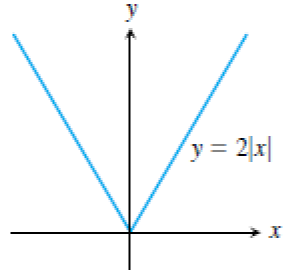
1.



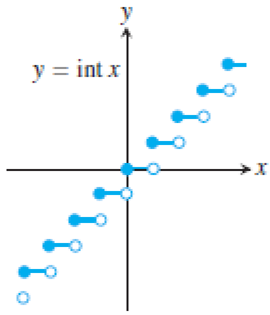
2.



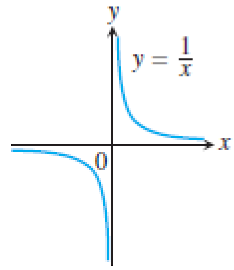
3.



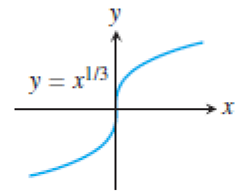
4.



5.



6.



აქ $y = \operatorname{int} x$ ფუნქცია არის x-ის მთელი ნაწილი.

მაგ., $\operatorname{int}(3) = 3$, $\operatorname{int}(3.8) = 3$, $\operatorname{int}(-3) = -3$, $\operatorname{int}(-3.8) = -4$

7--10 სავარჯიშოებში გრაფიკულად დაადგინეთ, რომელი ფუნქციაა ურთიერთცალსახა.

7. $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 0 \\ 3, & x \geq 0 \end{cases}$

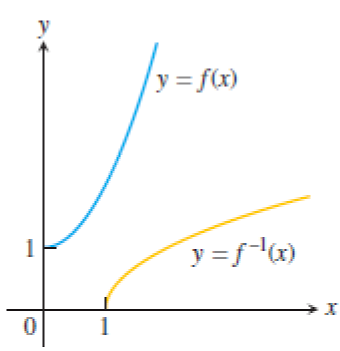
8. $f(x) = \begin{cases} 2x + 6, & x \leq -3 \\ x + 4, & x > -3 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2}, & x \leq 0 \\ \dfrac{x}{x + 2}, & x > 0 \end{cases}$

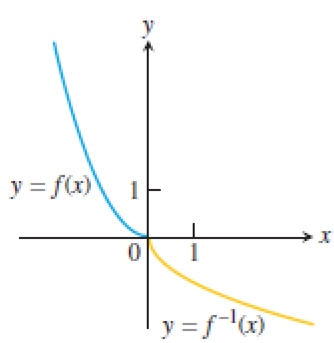
10. $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

19--22 სავარჯიშოებში მოცემულია $y = f(x)$ ფუნქციის ფორმულა და ნაჩვენებია f და f^{-1}-ის გრაფიკები. თითოეული შემთხვევისათვის იპოვეთ f^{-1}-ის ფორმულა.

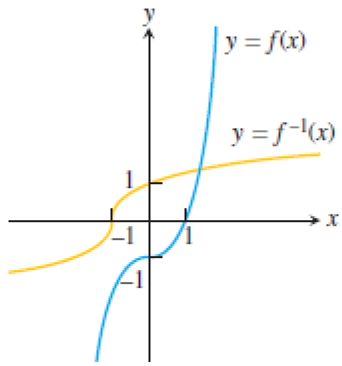
19. $f(x) = x^2 + 1, \quad x \geq 0$



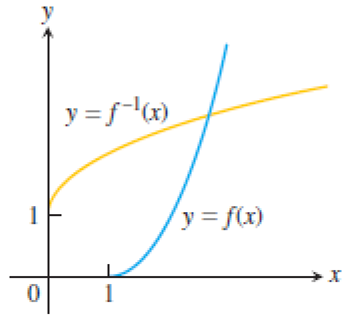
20. $f(x) = x^2, \quad x \leq 0$



21. $f(x) = x^3 - 1$



22. $f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad x \geq 1$



25--32 სავარჯიშოებში მოცემულია $y = f(x)$ ფუნქციის ფორმულა. თითოეულ შემთხვევაში იპოვეთ $f^{-1}(x)$ და დაადგინეთ f^{-1} -ის განსაზღვრისა და ცვლილების არეები. შემოწმების მიზნით აჩვენეთ, რომ $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$.

25. $f(x) = x^5$

26. $f(x) = x^4, \quad x \geq 0$

27. $f(x) = x^3 + 1$

28. $f(x) = (1/2)x - 7/2$

29. $f(x) = 1/x^2, \quad x > 0$

30. $f(x) = 1/x^3, \quad x \neq 0$

31. $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$

32. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3}$

35. **ა.** იპოვეთ $f(x) = mx$ -ის შექცეული ფუნქცია, სადაც m ნულისაგან განსხვავებული მუდმივია.

ბ. რა დასკვნის გაკეთება შეიძლება $y = f(x)$ -ის შექცეული ფუნქციის შესახებ, რომლის გრაფიკი კოორდინატთა სათავეზე გამავალი არანულოვანი m დახრილობის მქონე წრფეა.

36. ვთქვათ $f(x) = mx + b$, სადაც m და b მუდმივებია და $m \neq 0$. აჩვენეთ, რომ შექცეული ფუნქციის გრაფიკი, წარმოადგენს $1/m$ დახრილობის მქონე წრფეს, რომელიც y ღერძს $-b/m$ წერტილში კვეთს.

39. შემდეგი ლოგარითმები გამოსახეთ $\ln 2$ და $\ln 3$ სიდიდეებით.

a. $\ln 0.75$

b. $\ln(4/9)$

c. $\ln(1/2)$

d. $\ln \sqrt[3]{9}$

e. $\ln 3\sqrt{2}$

f. $\ln \sqrt{13.5}$

2

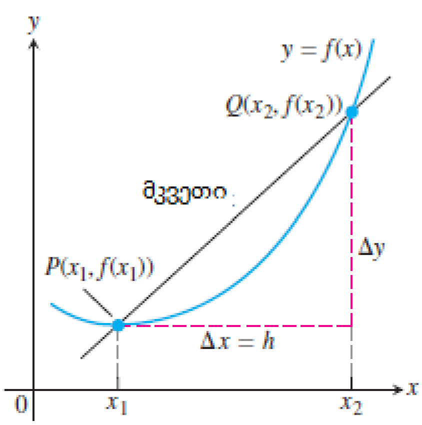
ზღვრები და უწყვეტობა

ამ თავში შევისწავლით ზღვრის ცნებას, ჯერ ინტუიციურად, შემდეგ კი ფორმალურად. ეს ცნება ფუნქციათა გამოკვლევის უმნიშვნელოვანესი საშუალებაა. მის გარეშე შეუძლებელია ობიექტის მოძრაობის სიჩქარისა და მიმართულების დადგენა დროის ნებისმიერ მომენტში.

2.1 ცვლილების სიჩქარე და მრუდის მხები

განსაზღვრება. $y = f(x)$ ფუნქციის x-ის მიმართ ცვლილების საშუალო სიჩქარე $[x_1, x_2]$ ინტერვალზე ეწოდება შეფარდებას

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \quad h \neq 0.$$



ფიგურა 2.1

გეომეტრიულად, $[x_1, x_2]$-ზე f-ის ცვლილების სიჩქარე არის $P(x_1, f(x_1))$ და $Q(x_2, f(x_2))$ წერტილებზე გამავალი წრფის დახრილობა (ფიგურა 2.1). მაშასადამე, x_1-დან x_2-მდე f-ის ცვლილების საშუალო სიჩქარე PQ მკვეთის დახრილობაა. ვნახოთ რა ხდება, როცა წირის გასწვრივ მოძრავი Q წერტილი უახლოვდება P-ს, ანუ განსახილავი ინტერვალის სიგრძე h უახლოვდება ნულს.

ჩვენ ვიცით, რა იგულისხმება წრფის დახრილობაში. მაგრამ რა უნდა იყოს მრუდის დახრილობა მის რომელიმე P წერტილში? თუკი ამ წერტილში არსებობს მხები წრფე (რომელიც წრეწირის მხების მსგავსად შეეხება მრუდს), მის დახრილობას ვუწოდოთ მრუდის დახრილობა P წერტილში. წრეწირისთვის შეხება მარტივადაა - მხები წრფე შეხების წერტილში გავლებული რადიუსის მართობულია. მაგრამ რა უნდა ვიგულისხმოთ , თუ ვიტყვით, L რომ წრფე წარმოადგენს C მრუდის მხებს P წერტილში?

2.2 ფუნქციის ზღვარი და ზღვართა თვისებები

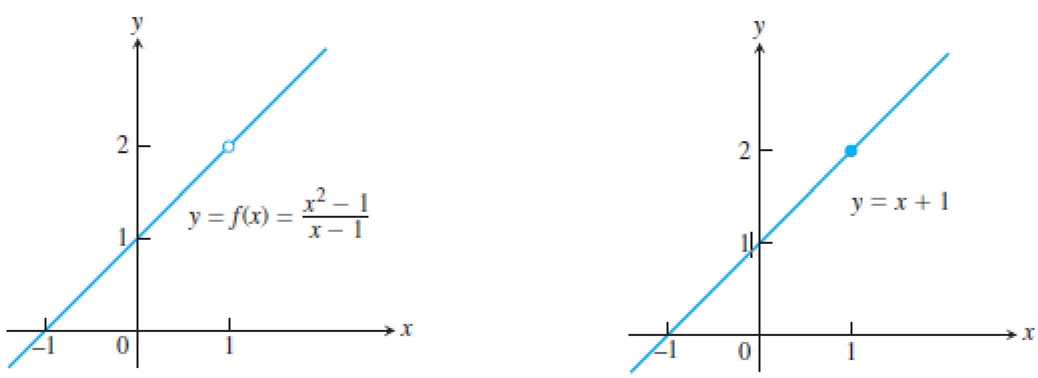
რაიმე $y = f(x)$ ფუნქციის შესწავლისას ხშირად საჭირო ხდება ამ ფუნქციის ყოფაქცევის გარკვევა რაიმე x_0 წერტილის მიდამოში, და არა თვით ამ წერტილში. მაგალითად, ეს შეიძლება მოხდეს თუ x_0 ირაციონალური რიცხვია, რომლის მნიშვნელობაც მიახლოებით ჩაიწერება. სხვა სიტუაციაში, შეიძლება x_0 წერტილში ფუნქციის გამოთვლა ნულზე გაყოფასთან იყოს დაკავშირებული.

მაგალითი 1. როგორი ყოფაქცევა აქვს $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ ფუნქციას $x=1$ წერტილის მახლობლობაში?

ამოხსნა. მოცემული ფორმულით f ფუნქცია განსაზღვრულია ნებისმიერი ნამდვილი x რიცხვისათვის, გარდა $x=1$ რიცხვისა. ნებისმიერი $x \neq 1$ რიცხვისათვის ჩვენ შეგვიძლია გავამარტივოთ ფორმულა მრიცხველის მამრავლებად დაშლით და შეკვეცით:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1, \quad \text{თუ } x \neq 1.$$

f ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს $y = x+1$ წრფეს $(1,\ 2)$ წერტილის *გამოტოვებით.* ეს გამოტოვებული წერტილი ფიგურა 2.7(ა) -ზე ნაჩვენებია როგორც "ნაჩხვლეტი".



(ა) (ბ)

ფიგურა 2.7

მიუხედავად იმისა, რომ $f(1)$ განსაზღვრული არაა, ჩვენ შეგვიძლია $f(x)$-ის მნიშვნელობა *რაგინდ უფრო მივუახლოვოთ* 2-ს, შევარჩევთ რა x-ის მნიშვნელობას 1-თან *საკმარისად ახლოს* (ცხრილი 2.2).

ცხრილი 2.2. x-ის 1-თან მიახლოებისას ჩანს, რომ $f(x) = (x^2-1)/(x-1)$ უახლოვდება 2-ს

x-ის 1-ზე ნაკლები და 1-ზე მეტი მნიშვნელობები	$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} = x+1, \quad x \neq 1$
0.9	1.9
1.1	2.1
0.99	1.99
1.01	2.01
0.999	1.999
1.001	2.001
0.999999	1.999999
1.000001	2.000001

განვაზოგადოთ მაგალითი 1-ით ნაჩვენები იდეა.

ვთქვათ $f(x)$ განსაზღვრულია x_0-ის შემცველ ღია ინტერვალზე, *გარდა შესაძლოა თვით x_0 წერტილისა.* თუ $f(x)$ ნებისმიერად ახლოსაა L რიცხვთან (იმდენად ახლოს, როგორც მოვისურვებ) x_0-თან საკმარისად ახლო ყველა x წერტილისათვის, ვიტყვით რომ f უახლოვდება L ზღვარს როცა x უახლოვდება x_0-ს, და ვწერთ

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L .$$

იკითხება: "$f(x)$-ის **ზღვარი** როცა x მიისწრაფის x_0-ისკენ ტოლია L-ის".

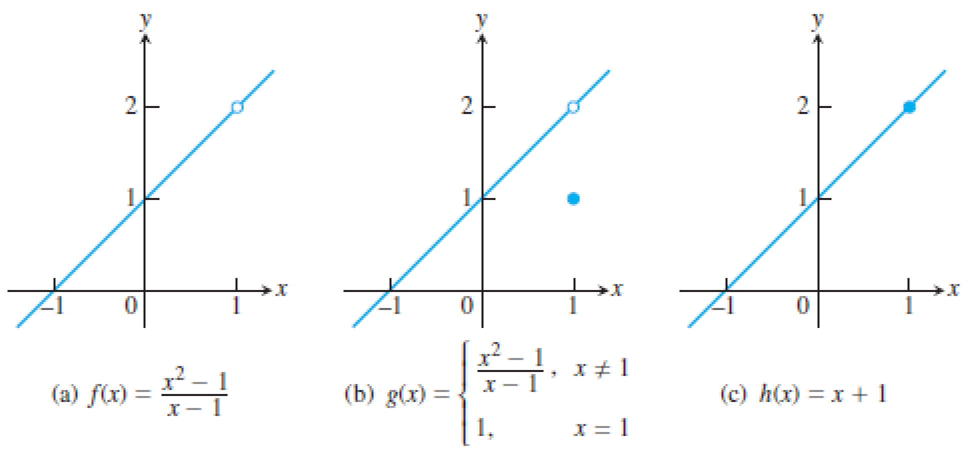
კერძოდ, მაგალით 1-ში შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $f(x)$-ის ზღვარია 2, როცა x მიისწრაფის 1-სკენ, და ვწერთ

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 , \quad \text{ან} \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 .$$

ზემოთმოყვანილი ზღვრის განმარტება "არაფორმალურია", რადგან ფრაზები *"ნებისმიერად ახლოს"* და *"საკმარისად ახლოს"* არაზუსტია; მათი აზრი კონტექსტით შეიძლება იყოს განსაზღვრული. ზუსტ განსაზღვრებას ჩვენ სექცია 2.3-ში მოვიყვანთ. ახლა კი განვიხილოთ კიდევ რამდენიმე მაგალითი ზღვრის იდეაში გასარკვევად.

მაგალითი 2. ეს მაგალითი უჩვენებს, რომ ზღვრის მნიშვნელობა შეიძლება დამოკიდებული არ იყოს იმ წერტილში ფუნქციის განსაზღვრულობაზე, რომელსაც ვუახლოვდებით.

განვიხილოთ სამი ფუნქცია ფიგურა 2.8-ზე. g ფუნქციას აქვს 2-ის ტოლი ზღვარი, როცა $x \to 1$, თუმცა $2 \neq g(1)$. ამ ფუნქციებიდან $h(x)$ ერთადერთია, რომლის ზღვარი როცა $x \to 1$ ტოლია მისი მნიშვნელობისა $x=1$ წერტილში. გვაქვს $\lim_{x\to 1} h(x) = h(1)$. ზღვრისა და ფუნქციის მნიშვნელობის ეს ტოლობა მნიშვნელოვანია და ჩვენ მას სექცია 2.5-ში დავუბრუნდებით.



ფიგურა 2.8. როცა x მიისწრაფის 1-სკენ, $f(x)$, $g(x)$ და $h(x)$ ფუნქციათა ზღვრები 2-ის ტოლია. თუმცა, მხოლოდ $h(x)$ -ის მნიშვნელობა ემთხვევა ზღვარს $x=1$ წერტილში.

მაგალითი 3.

(a) $f(x) = x$ **იგივური ფუნქციისათვის** და ნებისმიერი x_0 რიცხვისათვის (ფიგ.2.9a),

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x = x_0 .$$

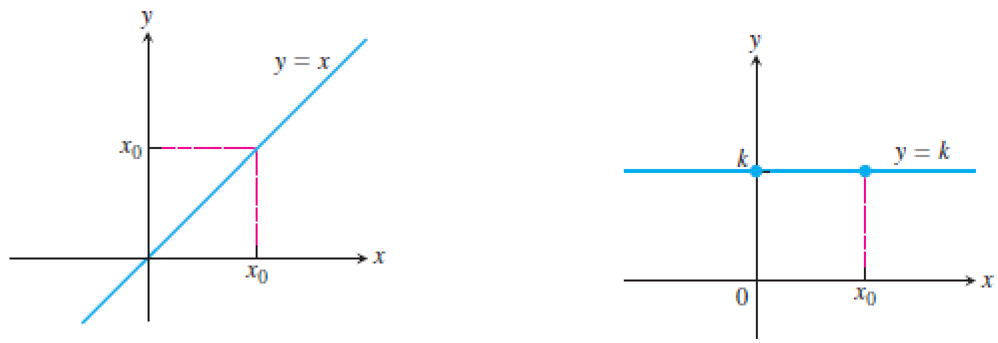
(b) $f(x) = k$ **მუდმივი ფუნქციისათვის** (k მუდმივი რიცხვია) და ნებისმიერი x_0 რიცხვისათვის (ფიგ.2.9b),

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} k = k\,.$$

კერძოდ,

$$\lim_{x \to 3} x = 3 \text{ და } \lim_{x \to -7}(4) = \lim_{x \to 2}(4) = 4.$$

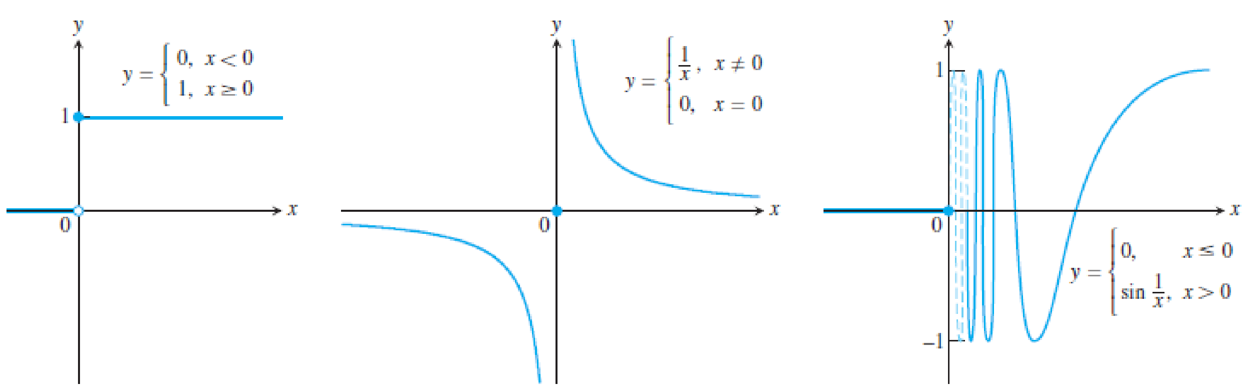
მაგალითი 3-ის ამ წესებს ჩვენ სექცია 3-ში დავამტკიცებთ.



(a) იგივური ფუნქცია (b) მუდმივი ფუნქცია

ფიგურა 2.9. მაგალითი 3-ის ფუნქციებს ზღვარი აქვთ ნებისმიერ x_0 წერტილში.

ზოგიერთი შემთხვევა, როცა ზღვრები შეიძლება არ არსებობდეს, ნაჩვენებია ფიგურა 2.10-ზე და აღწერილია მომდევნო მაგალითში.



(a) $U(x)$ (b) $g(x)$ (c) f(x)

ფიგურა 2.10. არცერთ ამ ფუნქციას ზღვარი არა აქვს, როცა $x \to 0$ (მაგალითი 4).

მაგალითი 4. ვიმსჯელოთ შემდეგი ფუნქციების ყოფაქცევაზე, როცა $x \to 0$:

(a) $U(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$, (b) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, (c) $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \sin\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$.

ამოხსნა.

(a) $U(x)$ **საფეხურა ფუნქციას** ზღვარი არა აქვს როცა $x \to 0$, რადგან $x=0$ წერტილში მისი მნიშვნელობები განიცდიან *ნახტომს.* ნულთან ნებისმიერად ახლოს მყოფი x-ის უარყოფითი მნიშვნელობებისათვის $U(x)=0$. ნულთან ნებისმიერად ახლოს მყოფი x-ის დადებითი მნიშვნელობებისათვის $U(x)=1$. ამიტომ არ არსებობს *ერთი* ისეთი L მნიშვნელობა , რომელსაც $U(x)$ მიუახლოვდება როცა $x \to 0$ (ფიგ. 2.10a).

(b) $g(x)$ ფუნქციას არა აქვს ზღვარი როცა $x \to 0$, რადგან მისი აბსოლუტური მნიშვნელობები ნებისმიერად დიდი ხდებიან როცა $x \to 0$ და არ ჩერდებიან რაიმე ფიქსირებულ რიცხვთან ახლოს (ფიგ. 2.10 b).

(c) $f(x)$ -ს არა აქვს ზღვარი როცა $x \to 0$, რადგან ფუნქციის მნიშვნელობები -1 და 1-ს შორის ირხევა ნულის შემცველ ყოველ ღია ინტერვალზე. ფუნქციის მნიშვნელობები არ ჩერდებიან რაიმე ერთ ფიქსირებულ რიცხვთან ახლოს , $x \to 0$ როცა (ფიგ. 2.10c).

თეორემა 1 -- ზღვრების წესები. თუ L, M, c და k ნამდვილი რიცხვებია და

$$\lim_{x\to c} f(x)=L \quad \text{და} \quad \lim_{x\to c} g(x)=M, \text{ მაშინ}$$

1. ჯამის წესი : $\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big)=L+M$
2. სხვაობის წესი : $\lim_{x\to c}\big(f(x)-g(x)\big)=L-M$
3. მუდმივი მამრავლის წესი : $\lim_{x\to c}\big(k\cdot f(x)\big)=k\cdot L$
4. ნამრავლის წესი : $\lim_{x\to c}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=L\cdot M$
5. განაყოფის წესი : $\lim_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}, \quad M\ne 0$
6. ხარისხის წესი : $\lim_{x\to c}\left[f(x)\right]^n=L^n, \quad n$ დადებითი მთელია
7. ფესვის წესი : $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}=L^{1/n}, \quad n$ დადებითი მთელია

(თუ ლუწია, მაშინ ვგულისხმობთ, რომ $\lim_{x\to c} f(x)=L>0$.)

ამ წესებიდან ზოგიერთს ჩვენ მოგვიანებით დავამტკიცებთ.

მაგალითი 5. ზღვრების თვისებებისა და მაგალითი 3-ის შედეგების გამოყენებით ვიპოვოთ რამდენიმე ზღვარი.

(a) $\lim_{x\to c}\left(x^3+4x^2-3\right)=\lim_{x\to c}x^3+\lim_{x\to c}4x^2-\lim_{x\to c}3=c^3+4c^2-3$.

(b) $\lim_{x\to c}\dfrac{x^4+x^2-1}{x^2+5}=\dfrac{\lim_{x\to c}\left(x^4+x^2-1\right)}{\lim_{x\to c}\left(x^2+5\right)}=\dfrac{\lim_{x\to c}x^4+\lim_{x\to c}x^2-\lim_{x\to c}1}{\lim_{x\to c}x^2+\lim_{x\to c}5}=\dfrac{c^4+c^2-1}{c^2+5}$

(c) $\lim_{x\to -2}\sqrt{4x^2-3}=\sqrt{\lim_{x\to -2}\left(4x^2-3\right)}=\sqrt{\lim_{x\to -2}4x^2-\lim_{x\to -2}3}=\sqrt{4(-2)^2-3}=\sqrt{13}$

მაგალითი 5a და მაგალითი 5b -ს შედეგები შეიძლება განვაზოგადოთ თეორემების სახით.

თეორემა 2 -- პოლინომის ზღვარი. თუ $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$, მაშინ

$$\lim_{x\to c}P(x)=P(c)=a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+\cdots+a_0 .$$

თეორემა 3 -- რაციონალური ფუნქციის ზღვარი.

თუ $P(x)$ და $Q(x)$ პოლინომებია და $Q(c)\neq 0$, მაშინ

$$\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(c)}{Q(c)} .$$

მაგალითი 6.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+4x^2-3}{x^2+5}=\frac{(-1)^3+4(-1)^2-3}{(-1)^2+5}=\frac{0}{6}=0.$$

მაგალითი 7. გამოვთვალოთ $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x}$.

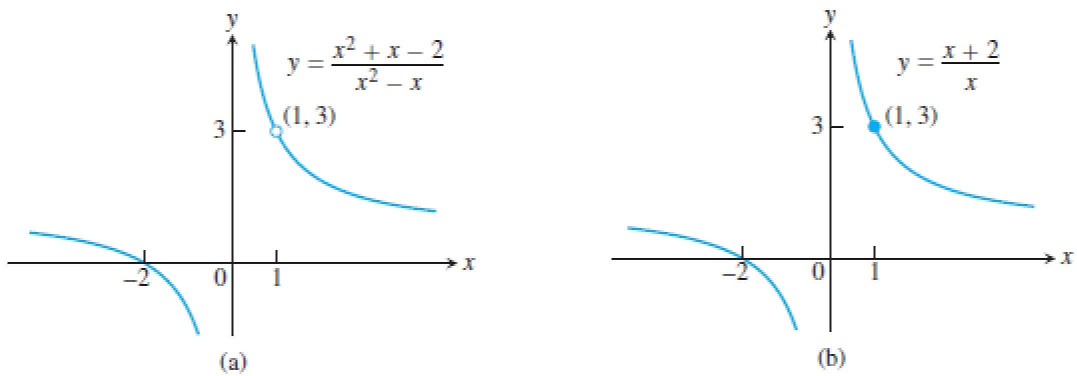
ამოხსნა.

ჩვენ არ შეგვიძლია ჩავსვათ $x=1$, რადგან მნიშვნელი განულდება. შევამოწმოთ ნულდება თუ არა მრიცხველიც როცა $x=1$. ნულდება. ამიტომ მრიცხველს და მნიშვნელს აქვთ საერთო მამრავლი $(x-1)$. დავშალოთ მამრავლებად მრიცხველიც და მნიშვნელიც და შევკვეცოთ:

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)}=\frac{x+2}{x}, \quad \text{თუ} \quad x\neq 1.$$

გამარტივებული წილადის გამოყენებით ვპოულობთ ზღვარს (იხ. ფიგ. 2.11):

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x}=\frac{1+2}{1}=3.$$



ფიგურა 2.11. $f(x)=(x^2+x-2)/(x^2-x)$ ფუნქციის გრაფიკი (a) ნაწილზე იგივეა რაც $g(x)=(x+2)/x$ -ის გრაფიკი (b) ნაწილზე, გარდა $x=1$ შემთხვევისა, როცა f განუსაზღვრელია. ფუნქციებს ერთი და იგივე ზღვარი აქვთ, როცა $x\to 1$.

თუ მნიშვნელის ზღვარი ნული ხდება და შეუძლებელია თეორემა 1-ის გაყოფის წესის გამოყენება, შეგვიძლია ზღვრის სიდიდის დასადგენად კალკულატორით ვისარგებლოთ . ასეთი მეთოდი ჩვენ მაგალით 1-ში გამოვიყენეთ. თუმცა კალკულატორმა შეიძლება ზოგჯერ შეცდომაში შეგვიყვანოს.

ცხრილი 2.3. $f(x)=\left(\sqrt{x^2+100}-10\right)\Big/x^2$ -ის მნიშვნელობები $x=0$ -ის სიახლოვეს

x	$f(x)$	
± 1	0.049876	უახლოვდება 0.05 -ს ?
± 0.5	0.049969	
± 0.1	0.049999	
± 0.01	0.050000	
± 0.0005	0.050000	უახლოვდება 0 -ს ?
± 0.0001	0.000000	
± 0.00001	0.000000	
± 0.000001	0.000000	

მაგალითი 8. შევაფასოთ $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$ ზღვრის სიდიდე.

ამოხსნა. ცხრილ 2.3-ში მოყვანილია ფუნქციის მნიშვნელობები $x=0$-ის მახლობელი არგუმენტის ზოგიერთი მნიშვნელობისათვის. როცა ამ მნიშვნელობებად აღებულია $\pm 1, \pm 0.5, \pm 0.10$ და ± 0.01, გვეჩვენება რომ ფუნქციის ზღვარია 0.05.

მაგრამ თუ ავიღებთ x ცვლადის უფრო მცირე მნიშვნელობებს $\pm 0.0005, \pm 0.0001$, ± 0.00001 და ± 0.000001, ფუნქციის ნნიშვნელობები ახლო აღმოჩნდება 0-თან.

რომელია სწორი პასუხი, 0.05 თუ 0, თუ რომელიმე სხვა? ამ შეკითხვაზე პასუხს მომდევნო მაგალითში ვუპასუხებთ.

მაგალითი 9. გამოვთვალოთ $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$.

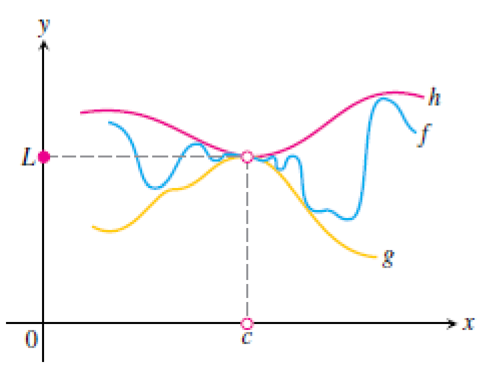
ამოხსნა. მაგალითი 7-სგან განსხვავებით, მრიცხველს და მნიშვნელს საერთო მამრავლი არ აქვთ. მაგრამ აქ ჩვენ თვითონ შეგვიძლია შევქმნათ საერთო მამრავლი, მრიცხველის და მნიშვნელის გამრავლებით შეუღლებულ $\sqrt{x^2+100}+10$ გამოსახულებაზე (მიიღება კვადრატული ფესვის შემდეგ ნიშნის შეცვლით). შედეგად მრიცხველში მოვიცილებთ ირაციონალობას:

$$\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}=\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+100}+10}{\sqrt{x^2+100}+10}=\frac{x^2+100-100}{x^2\left(\sqrt{x^2+100}+10\right)}=\frac{1}{\sqrt{x^2+100}+10}.$$

ამიტომ $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+100}+10}=\frac{1}{\sqrt{0^2+100}+10}=\frac{1}{20}=0.05.$

განსხვავებით მაგალითი 8-ისგან, ამ გამოთვლებმა სწორი პასუხი მოგვცა .

ზოგ შემთხვევაში ძნელია ალგებრული მეთოდების ან კალკულატორის გამოყენებით ვიპოვოთ ზღვარი, მაგრამ ეს მოხერხდეს გეომეტრიული მოსაზრების საფუძველზე.



ფიგურა 2.12. f -ის გრაფიკი მოქცეულია g და h ფუნქციათა გრაფიკებს შორის

თეორემა 4 --**სენდვიჩის თეორემა.** ვთქვათ $g(x) \le f(x) \le h(x)$ ნებისმიერი x-სათვის c-ს შემცველი ნებისმიერი ღია ინტერვალიდან, გარდა შესაძლოა თვით $x = c$ მნიშვნელობისა. გარდა ამისა, ვთქვათ

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L .$$

მაშინ $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

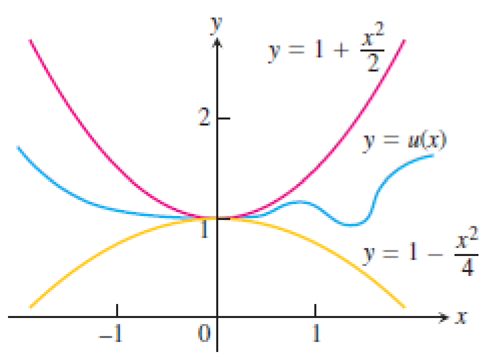
სენდვიჩის თეორემას ორი პოლიციელის თეორემასაც ეძახიან.

მაგალითი 10. მოცემულია $1 - \dfrac{x^2}{4} \le u(x) \le 1 + \dfrac{x^2}{2}$ ნებისმიერი $x \ne 0$-სათვის. ვიპოვოთ $\lim_{x \to 0} u(x)$ იმის მიუხედავად , რამდენად რთულია $u(x)$.

ამოხსნა. რადგან

$$\lim_{x \to 0}(1 - (x^2/4)) = 1 \quad \text{და} \quad \lim_{x \to 0}(1 + (x^2/2)) = 1 ,$$

ამიტომ სენდვიჩის თეორემის თანახმად $\lim_{x \to 0} u(x) = 1$ (ფიგ. 2.13).

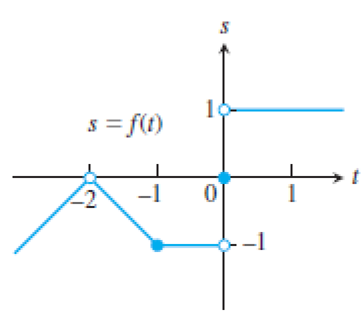


ფიგ. 2.13. ნებისმიერ ფუნქციას, რომლის გრაფიკი ძევს $y = 1 - x^2/4$ და $y = 1 + x^2/2$ გრაფიკებით შემოსაზღვრულ არეში, აქვს 1-ის ტოლი ზღვარი, როცა $x \to 0$ (მაგალითი 10).

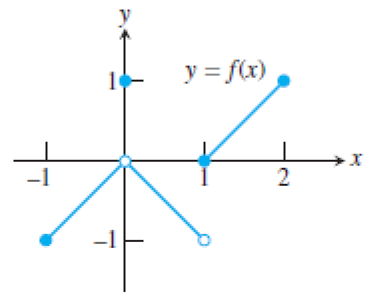
სავარჯიშოები 2.2

2. $f(t)$-ს გრაფიკის მიხედვით იპოვეთ შემდეგი ზღვრები, ან ახსენით რატომ არ არსებობს ისინი.

$a.\ \lim_{t \to -2} f(t)$ $b.\ \lim_{t \to -1} f(t)$ $c.\ \lim_{t \to 0} f(t)$ $d.\ \lim_{t \to -0.5} f(t)$



3. $y = f(x)$-ის გრაფიკის მიხედვით განსაზღვრეთ ჭეშმარიტია თუ მცდარი შემდეგი გამონათქვამები.



$a.\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ არსებობს; $b.\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$; $c.\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

$d.\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$; $e.\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

$f.\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ არსებობს ნებისმიერი $x_0 \in (-1,1)$-სათვის; $g.\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ არ არსებობს

12-48 მაგალითებში გამოთვალეთ ზღვრები

12. $\lim\limits_{x\to 2}(-x^2+5x-2)$ **14.** $\lim\limits_{x\to -2}(x^3-2x^2+4x+8)$ **15.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+3}{x+6}$ **21.** $\lim\limits_{h\to 0}\frac{3}{\sqrt{3h+1}+1}$

22. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{5h+4}-2}{h}$ **23.** $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-25}$ **26.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x-2}$ **32.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}}{x}$

35. $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ **36.** $\lim\limits_{x\to 4}\frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}}$ **39.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+12}-4}{x-2}$ **40.** $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3}$

43. $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x-1)$ **44.** $\lim\limits_{x\to 0}\sin^2 x$ **46.** $\lim\limits_{x\to 0}\tan x$ **48.** $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-1)(2-\cos x)$

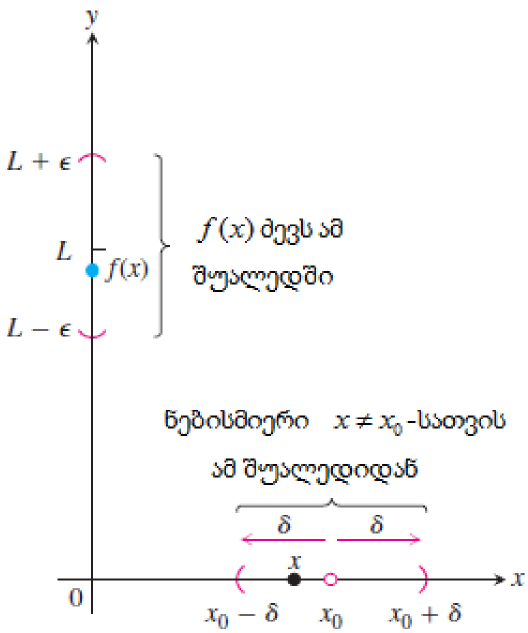
54. ვთქვათ $\lim_{x\to 4} f(x)=0$ და $\lim_{x\to 4} g(x)=-3$. იპოვეთ

$a.\ \lim_{x\to 4}(g(x)+3)$ $b.\ \lim_{x\to 4} xf(x)$ $c.\ \lim_{x\to 4}(g(x))^2$ $d.\ \lim\limits_{x\to 4}\frac{g(x)}{f(x)-1}$

55. ვთქვათ $\lim_{x\to b} f(x)=7$ და $\lim_{x\to b} g(x)=-3$. იპოვეთ

$a.\ \lim_{x\to b}(f(x)+g(x))$ $b.\ \lim_{x\to b} f(x)\cdot g(x)$ $c.\ \lim_{x\to b} 4g(x)$ $d.\ \lim\limits_{x\to b} f(x)/g(x)$

2.3 ზღვრის ფორმალური განმარტება



განსაზღვრება. ვთქვათ $f(x)$ განსაზღვრულია x_0 წერტილის შემცველ რაიმე ღია ინტერვალზე, გარდა შესაძლოა თვით x_0 წერტილისა. ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში არის L რიცხვი და ვწერთ

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს შესაბამისი $\delta > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ ყოველი x-სათვის,

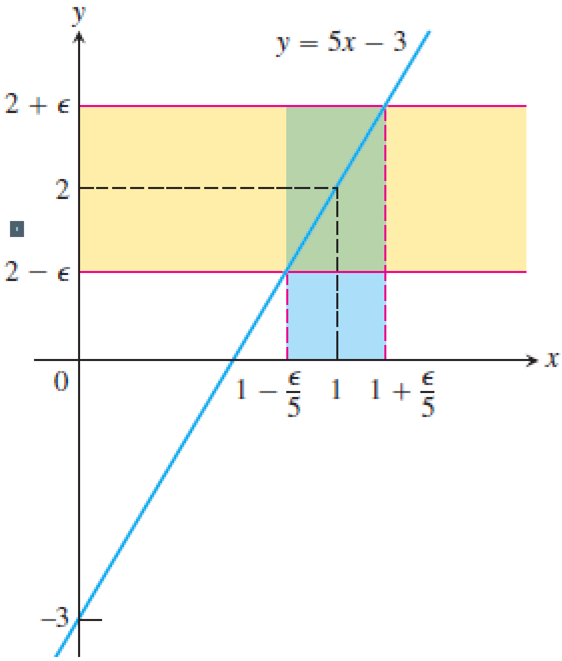
$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

მაგალითი 2. ვაჩვენოთ, რომ $\lim_{x \to 1}(5x - 3) = 2.$

დამტკიცება. ვთქვათ $x_0 = 1$, $f(x) = 5x - 3$ და $L = 2$. ზღვრის განმარტების საფუძველზე საჭიროა მოიძებნოს ისეთი $\delta > 0$, რომ $0 < |x - 1| < \delta$ უტოლობით განსაზღვრული x-ებისათვის ადგილი ჰქონდეს შეფასებას

$$|f(x) - 2| = |(5x - 3) - 2| = 5|x - 1| < \varepsilon, \text{ ანუ } |x - 1| < \varepsilon / 5.$$

ამრიგად, შეგვიძლია ავიღოთ $\delta = \varepsilon / 5$ (ფიგურა 2.18). თუ $0 < |x - 1| < \delta = \varepsilon / 5$, მაშინ $|(5x - 3) - 2| = 5|x - 1| < 5(\varepsilon / 5) = \varepsilon$, რაც ამტკიცებს, რომ $\lim_{x \to 1}(5x - 3) = 2.$ დასახელებული $\delta = \varepsilon / 5$ მნიშვნელობა არაა ერთადერთი, რომლისთვისაც $0 < |x - 1| < \delta$-დან გამომდინარეობს $|5x - 5| < \varepsilon$. გამოდგება აგრეთვე ნებისმიერი უფრო მცირე დადებითი δ. განსაზღვრებაში არ მოითხოვება "საუკეთესო" δ-ს შერჩევა.



ფიგურა 2.18. თუ $f(x) = 5x - 3$, მაშინ $0 < |x - 1| < \varepsilon / 5$ გარანტიას გვაძლევს, რომ $|f(x) - 2| < \varepsilon$ (მაგალითი 2)

მაგალითი 3. დავამტკიცოთ წინა სექციაში გრაფიკულად წარმოდგენილი ორი შედეგი.

(a) $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$ $\qquad$ (b) $\lim\limits_{x \to x_0} k = k$ $\quad$ (k მუდმივია)

ამოხსნა.

(a) ვთქვათ მოცემულია $\varepsilon > 0$. ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ ისეთი δ >0, რომ ყველა x -სათვის

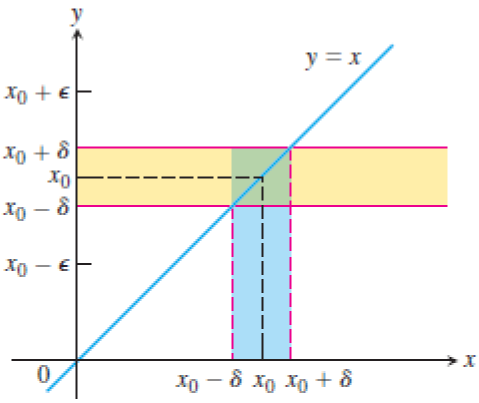
$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x - x_0| < \varepsilon .$$

იმპლიკაციას ადგილი ექნება, თუ შევარჩევთ ε -ის ტოლ ან მასზე ნაკლებ დადებით δ რიცხვს (ფიგ. 2.19). ეს ამტკიცებს (a) ტოლობას.

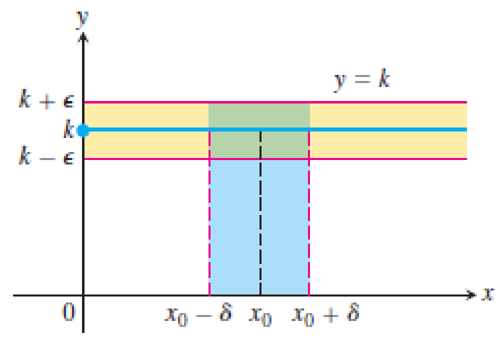
(b) ვთქვათ მოცემულია $\varepsilon > 0$. ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ ისეთი δ >0, რომ ყველა x -სათვის

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |k - k| < \varepsilon .$$

რადგან $k - k = 0$, ამიტომ იმლიკაცია სამართლიანი იქნება ნებისმიერი დადებით δ რიცხვისთვის (ფიგურა 2.20). ეს ამტკიცებს (b) ტოლობას.



ფიგურა 2.19. $f(x)=x$ - სთვის ვპოულობთ, რომ $0<|x-x_0|<\delta$ გამოიწვევს $|f(x)-x_0|<\varepsilon$ -ს, თუკი $\delta\le\varepsilon$ (მაგალითი $3a$).



ფიგურა 2.20. $f(x)=k$ -სთვის ვპოულობთ, რომ $|f(x)-k|<\varepsilon$ ნებისმიერი დადებითი δ -სთვის (მაგალითი $3b$).

სავარჯიშოები 2.3

31-34 მაგალითებში იპოვეთ $L=\lim_{x\to x_0} f(x)$. შემდეგ იპოვეთ δ >0 ისეთი, რომ ყოველი x -სთვის

$$0<|x-x_0|<\delta \quad\Rightarrow\quad |f(x)-L|<\varepsilon .$$

31. $f(x)=3-2x,\quad x_0=3,\quad \varepsilon=0.02$

32. $f(x)=-3x-2,\quad x_0=-1,\quad \varepsilon=0.03$

33. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2},\quad x_0=2,\quad \varepsilon=0.05$

34. $f(x)=\dfrac{x^2+6x+5}{x+5},\quad x_0=-5,\quad \varepsilon=0.05$

38, 39, 43, 45 მაგალითებში შეამოწმეთ ტოლობის სამართლიანობა

38. $\lim_{x\to 3}(3x-7)=2$

39. $\lim_{x\to 9}\sqrt{x-5}=2$

43. $\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{x}=1$

45. $\lim_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=-6$

2.4 ცალმხრივი ზღვრები

იმისათვის, რომ ჰქონდეს ზღვარი როცა $x\to c$, f ფუნქცია განსაზღვრული უნდა იყოს c -ს ორივე მხარეს და მისი მნიშვნელობები უახლოვდებოდეს ზღვრულს ნებისმიერი

მხრიდან მისწრაფებისას. ამის გამო ჩვეულებრივ ზღვარს **ორმხრივ ზღვარს** უწოდებენ. თუ f -ს არ გააჩნია ორმხრივი ზღვარი წერტილში, მას ჯერ კიდევ შეიძლება ჰქონდეს ცალმხრივი ზღვარი, ე.ი. ზღვარი როცა მიახლოება ხდება მხოლოდ ერთი -- მარცხენა ან მარჯვენა მხრიდან.

L რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის **მარჯვენა ზღვარი** x_0 წერტილში და წერენ

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L \ ,$$

თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს შესაბამისი $\delta>0$ რიცხვი ისეთი, რომ

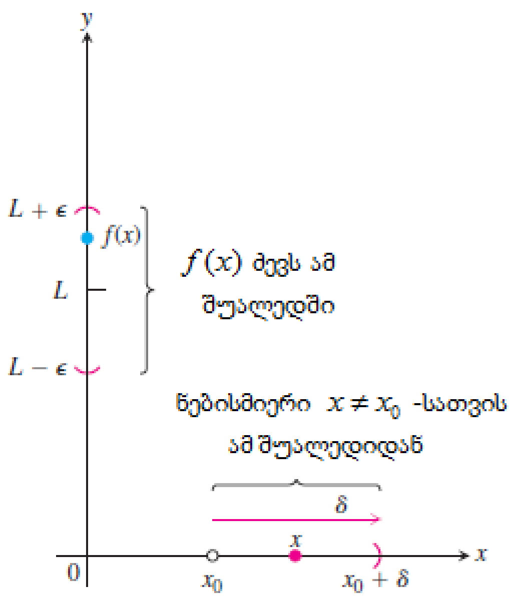
$$x_0<x<x_0+\delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-L|<\varepsilon . \qquad \text{(იხ. ფიგურა 2.28)}$$

L რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის **მარცხენა ზღვარი** x_0 წერტილში და წერენ

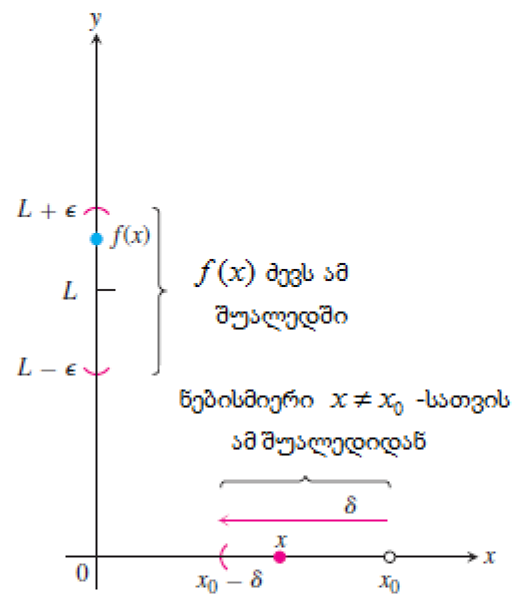
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L \ ,$$

თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს შესაბამისი $\delta>0$ რიცხვი ისეთი, რომ

$$x_0-\delta<x<x_0 \quad \Rightarrow \quad |f(x)-L|<\varepsilon . \qquad \text{(იხ. ფიგურა 2.29)}$$



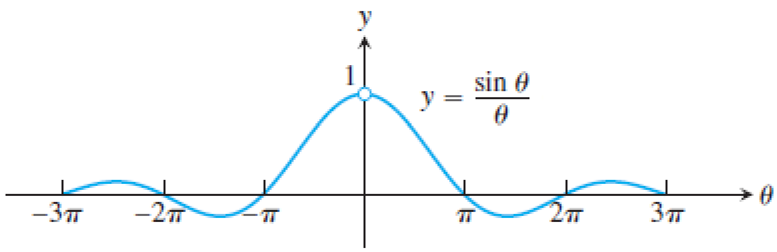
ფიგურა 2.28. მარჯვენა ზღვრის განმარტებასთან დაკავშირებული ინტერვალები



ფიგურა 2.29. მარცხენა ზღვრის განმარტებასთან დაკავშირებული ინტერვალები

ფუნქციის მარცხენა და მარჯვენა ზღვრებს ფუნქციის **ცალმხრივ ზღვრებს** უწოდებენ. ცალმხრივ ზღვრებს ახასიათებთ სექცია 2.2-ის თეორემა 1-ში ჩამოთვლილი თვისებები.

თეორემა 6. იმისათვის, რომ $f(x)$ ფუნქციას გააჩნდეს ზღვარი x_0 წერტილში, აუცილებელი და საკმარისია, რომ მას ამ წერტილში გააჩნდეს ერთმანეთის ტოლი ცალმხრივი ზღვრები.

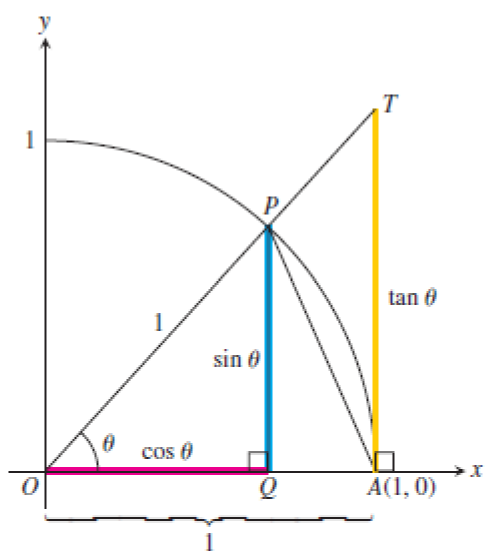


ფიგურა 2.32.

ვთქვათ θ არის კუთხის რადიანული ზომა. ფიგურა 2.32 გვკარნახობს, რომ θ -ს 0-საკენ მისწრაფებისას $y=(\sin\theta)/\theta$ ფუნქციის მარცხენა და მარჯვენა ზღვრები ერთმანეთის ტოლია. დავამტკიცოთ ეს ალგებრულად.

თეორემა 7.

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1 \qquad (\theta \text{ რადიანული ზომაა}) \qquad (1)$$



ფიგურა 2.33.

დამტკიცება. ჯერ ვაჩვენოთ, რომ მარჯვენა ზღვარი ერთის ტოლია. ფიგ.2.33-ის თანახმად

ფართ. $\Delta OAP <$ ფართ. სექტ. $OAP <$ ფართ. ΔOAT

ანუ $\frac{1}{2}\sin\theta<\frac{1}{2}\theta<\frac{1}{2}\tan\theta$; $\Rightarrow$ $1<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta}$;

$\Rightarrow$ $1>\frac{\sin\theta}{\theta}>\cos\theta$ (2). რადგან $\lim_{\theta\to0^+}\cos\theta=1$,

ამიტომ სენდვიჩის თეორემის თანახმად (2)-დან მიიღება $\lim_{\theta\to0^+}(\sin\theta)/\theta=1$, $0<\theta<\pi/2$. (3)

თუ აქ θ-ს შევცვლით ($-\theta$)-თი და გავიხსენებთ რომ $\sin\theta$ კენტი ფუნქციაა, გვექნება

$\lim_{\theta\to0^-}(\sin\theta)/\theta=1$, $-\pi/2<\theta<0$. (4)

(3),(4) -დან გამომდინარეობს (1)-ის სამართლიანობა.

მაგალითი 5. ვაჩვენოთ, რომ $(a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}=0$ და $(b)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{5x}=\dfrac{2}{5}$

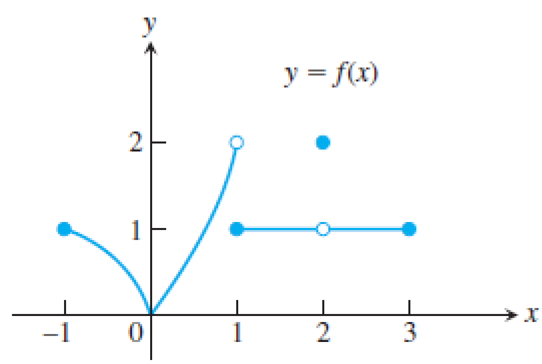
ამოხსნა. (a). ნახევარი კუთხის ფორმულის თანახმად $\cos x = 1-2\sin^2(x/2)$. ამიტომ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x}=-\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\sin\theta=-1\cdot 0=0 \quad (\text{აქ აღნიშნულია } \theta=x/2).$$

(b) . $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\frac{2}{5}\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=\frac{2}{5} \quad (\text{აქ აღნიშნულია } \theta=2x).$$

სავარჯიშოები 2.4

2. მოცემული ნახაზის მიხედვით დაადგინეთ გამოთქვამების ჭეშმარიტობა ან მცდარობა.



a. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=1$ *b.* $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ არ არსებობს

c. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$ *d.* $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$

e. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$ *f.* $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ არ არსებობს

g. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ *h.* $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ არსებობს ყოველი c-სთვის (-1, 1)-დან

i. $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ არსებობს ყოველი c-სთვის $(1, 3)$-დან *j.* $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=0$

k. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ არ არსებობს

გამოთვალეთ ზღვრები:

17. *a.* $\lim\limits_{x\to -2^+}(x+3)\dfrac{|x+2|}{x+2}$ *b.* $\lim\limits_{x\to -2^-}(x+3)\dfrac{|x+2|}{x+2}$

18. *a.* $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$ *b.* $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$

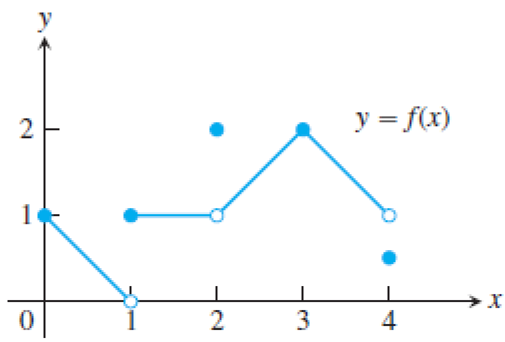
23. $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin 3y}{4y}$ **29.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x\cos x}{\sin x\cos x}$ **30.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x+\sin x}{2x}$ **36.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}$

2.5 უწყვეტობა

უწყვეტობაზე წარმოდგენის შესაქმნელად განვიხილოთ ფიგურა 2.35-ზე გრაფიკულად მოცემული ფუნქცია.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ წერტილები, რომლებშიც ფიგურა 2.35-ზე მოცემული ფუნქცია უწყვეტია; აგრეთვე წერტილები, რომლებშიც ეს ფუნქცია არაა უწყვეტი.

ამოხსნა. f ფუნქცია $[0,\ 4]$ განსაზღვრის არის ყველა წერტილშია უწყვეტი, გარდა $x=1$, $x=2$ და $x=4$ წერტილებისა. ამ წერტილებში კი გრაფიკი წყდება. დავუკვირდეთ განსაზღვრის არის წერტილებში ფუნქციის მნიშვნელობას და ზღვარს შორის დამოკიდებულებას .



ფიგურა 2.35

წერტილები რომლებშიც f უწყვეტია:

$x=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$

$x=3$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$

$0<c<4,\ c\neq 1,2$, $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

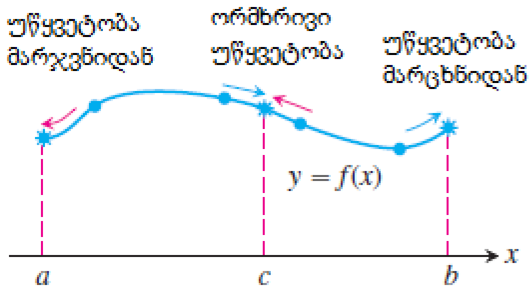
წერტილები რომლებშიც f არაა უწყვეტია:

$x=1$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ არ არსებობს

$x=2$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$ მაგრამ $1\neq f(2)$

$x=4$, $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=1$ მაგრამ $1\neq f(4)$

$c<0,\ c>4$, ეს წერტილები არაა f -ის განსაზღვრის არეში



ფიგურა 2.36

უწყვეტობა a, b და c წერტილებში

განსაზღვრება. $y = f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი განსაზღვრის არის შიგა c წერტილში თუ

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

$y = f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი განსაზღვრის არის მარცხენა a ან მარჯვენა b ბოლოზე, თუ

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{ან} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b),$$

შესაბამისად

თუ f ფუნქცია არაა უწყვეტი c წერტილში, ამბობენ რომ f **წყვეტილია** c წერტილში და რომ c არის f **-ის წყვეტის წერტილი**. შევნიშნოთ, რომ არაა აუცილებელი c ეკუთვნოდეს ფუნქციის განსაზღვრის არეს.

f ფუნქციას ეწოდება **მარჯვნიდან უწყვეტი** მისი განსაზღვრის არის $x = c$ წერტილში, თუ $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$. მას ეწოდება **მარცხნიდან უწყვეტი** c წერტილში, თუ $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$. ამრიგად, ფუნქცია უწყვეტია განსაზღვრის არის მარცხენა a ბოლოზე, თუ ის მარჯვნიდან უწყვეტია a-ში. ასევე, f უწყვეტია მისი განსაზღვრის არის მარჯვენა b ბოლოზე, თუ ის მარცხნიდან უწყვეტია ამ წერტილში.

თეორემა 8. -უწყვეტი ფუნქციის თვისებები. თუ f და g ფუნქციები უწყვეტია $x = c$ წერტილში, მაშინ ამავე წერტილში უწყვეტია შემდეგი კომბინაციებიც.

1. ჯამი და სხვაობა: $f \pm g$

2. მუდმივზე ნამრავლი: $k \cdot f$, ნებისმიერი k რიცხვისათვის

3. ნამრავლი: $f \cdot g$

4. განაყოფი: f / g იმ პირობით, რომ $g(c) \neq 0$

5. ხარისხი: f^n, n დადებითი მთელი რიცხვია

6. ფესვი: $\sqrt[n]{f}$, პირობით, რომ ის განსაზღვრულია c-ს შემცველ ღია ინტერვალზე, სადაც n დადებითი მთელია

ეს თეორემა უშუალოდ გამომდინარეობს ფუნქციის ზღვრის თვისებებიდან.

> **თეორემა 9--უწყვეტ ფუნქიათა კომპოზიცია.** თუ $y=f(x)$ უწყვეტია x_0 წერტილში , ხოლო $g(y)$ უწყვეტია $y_0=f(x_0)$ წერტილში, მაშინ კომპოზიცია $G=g\circ f$ უწყვეტია x_0 წერტილში.

დამტკიცება. რადგან $y=f(x)$ უწყვეტია x_0 წერტილში, ამიტომ თუ $x\to x_0$, მაშინ $y\to y_0$. y_0 წერტილში $g(y)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო გვაქვს:

$$\lim_{x\to x_0} G(x)=\lim_{x\to x_0} g\left(f(x)\right)=\lim_{y\to y_0} g(y)=g(y_0)=G(x_0).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ ახლა უფრო ზოგადი შედეგი.

> **თეორემა 10.** თუ $g(y)$ უწყვეტია y_0 წერტილში და $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_0$, მაშინ
>
> $$\lim_{x\to x_0} g\left(f(x)\right)=g(y_0)=g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right).$$

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია $\varepsilon>0$. რადგან g უწყვეტია y_0 წერტილში, ამიტომ არსებობს $\delta_1>0$ რიცხვი ისეთი, რომ

$$|g(y)-g(y_0)|<\varepsilon \quad \text{როცა} \quad 0<|y-y_0|<\delta_1 .$$

რადგან $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_0$, ამიტომ არსებობს ისეთი $\delta>0$, რომ

$$|f(x)-y_0|<\delta_1 \quad \text{როცა} \quad 0<|x-x_0|<\delta .$$

თუ დავუშვებთ, რომ $y=f(x)$, მაშინ გვექნება

$$0<|y-y_0|<\delta_1 \qquad \text{როცა} \quad 0<|x-x_0|<\delta,$$

საიდანაც $|g(y)-g(y_0)|=|g\left(f(x)\right)-g(y_0)|<\varepsilon$, როცა $0<|x-x_0|<\delta$. ზღვრის განმარტების საფუძველზე ეს ამტკიცებს თეორემას.

მაგალითი 9. თეორემა 10-ის გამოყენებით გამოვთვალოთ ზღვრები.

$$(a)\quad \lim_{x\to\pi/2}\cos\left(2x+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\right)=\cos\left(\lim_{x\to\pi/2}2x+\lim_{x\to\pi/2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\right)=$$

$$=\quad \cos(\pi+\sin 2\pi)=\cos\pi=-1\,.$$

$$(b)\quad \lim_{x\to1}\sin^{-1}\left(\frac{1-x}{1-x^2}\right)=\sin^{-1}\left(\lim_{x\to1}\frac{1-x}{1-x^2}\right)=\sin^{-1}\left(\lim_{x\to1}\frac{1}{1+x}\right)=\sin^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}\,.$$

$$(c)\quad \lim_{x\to0}\sqrt{x+1}\,e^{\tan x}=\lim_{x\to0}\sqrt{x+1}\cdot\exp\left(\lim_{x\to0}\tan x\right)=1\cdot e^0=1\,.$$

განსაზღვრება. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი (a,b) ინტერვალში, თუ ის უწყვეტია ამ ინტერვალის ყველა წერტილში. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი $[a,b]$ სეგმენტზე, თუ ის უწყვეტია (a,b) ინტერვალში და გარდა ამისა, a წერტილში უწყვეტია მარჯვნიდან, b წერტილში კი მარცხნიდან.

უწყვეტად გაგრძელება წერტილში

ფუნქცია $y=f(x)=(\sin x)/x$ უწყვეტია ყოველ წერტილში , გარდა $x=0$ წერტილისა . ამ წერტილში ის თითქოს $y=1/x$ ფუნქციის მსგავსია. მაგრამ მისგან განსხვავებით $y=(\sin x)/x$ -ს სასრული ზღვარი აქვს, როცა $x\to0$ (თეორემა 7). ამიტომ შესაძლებელია ფუნქციის განსაზღვრის არის გაფართოება მასში $x=0$ წერტილის ჩართვით იმგვარად, რომ ის უწყვეტი გახდეს ამ წერტილშიც. ახალი ფუნქცია განვსაზღვროთ ამგვარად

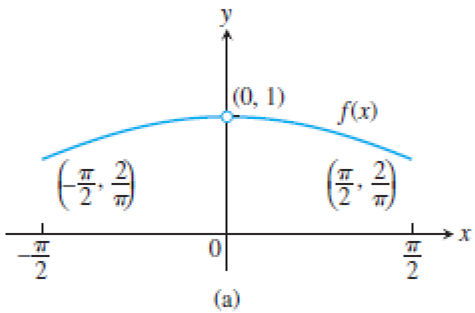
$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq0\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია $x=0$ წერტილში, რადგან $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=F(0)$ (ფიგურა 2.44).

უფრო ზოგადად, ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს ზღვარი წერტილებში, რომლებშიც არაა განსაზღვრული. თუ $f(c)$ არაა განსაზღვრული, მაგრამ არსებობს $\lim_{x\to c}f(x)=L$, ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ ახალი ფუნქცია $F(x)$ ამგვარად

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in D(f)\\ L, & x=c\,.\end{cases}$$

F ფუნქცია უწყვეტია $x = c$ წერტილში. მას ეწოდება **f ფუნქციის უწყვეტი გაგრძელება $x = c$ წერტილში .**



ფიგურა 2.44

მაგალითი 10. ვაჩვენოთ, რომ არსებობს

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}, \quad x \neq 2$$

ფუნქციის უწყვეტი გაგრძელება $x = 2$ წერტილში.

ამოხსნა. რადგან $f(2)$ არ არსებობს, გარდავქმნათ ფუნქციის გამოსახულება

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}, \quad x \neq 2.$$

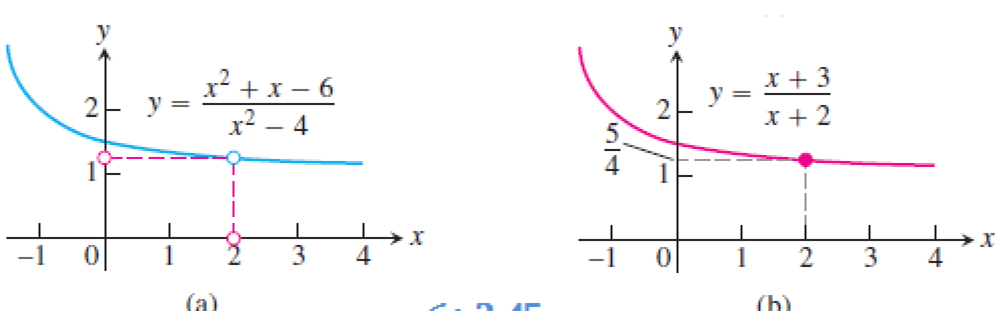
ახალი ფუნქცია

$$F(x) = \frac{x+3}{x+2}$$

$f(x)$ -ის ტოლია როცა $x \neq 2$, მაგრამ უწყვეტია $x = 2$ -ზე და ამ წერტილში მისი მნიშვნელობაა 5/4 . ამრიგად , F არის f -ის უწყვეტი გაგრძელება $x = 2$ -ზე და

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} f(x) = \frac{5}{4} \quad .$$

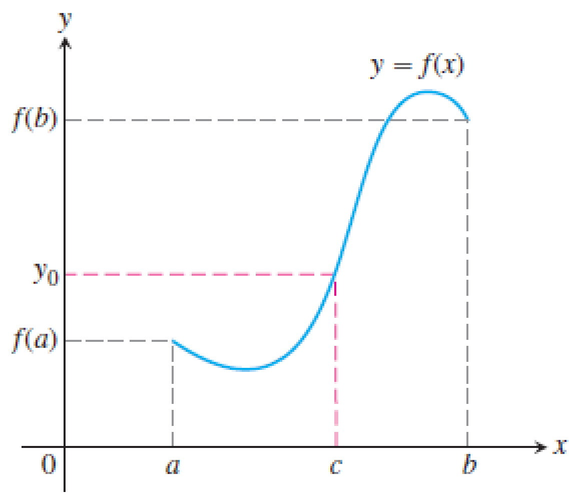
f და F ფუნქციების გრაფიკები ფიგურა 2.45-ზეა მოცემული.



ფიგურა 2.45

თეორემა 11-(კოში)- საშუალედო მნიშვნელობის თეორემა უწყვეტი ფუნქციებისთვის

თუ f უწყვეტი ფუნქციაა ჩაკეტილ $[a,b]$ ინტერვალზე, ხოლო y_0 რაიმე მნიშვნელობაა $f(a)$ და $f(b)$ -ს შორის, მაშინ არსებობს ერთი მაინც ისეთი $c \in [a,b]$, რომლისთვისაც $y_0 = f(c)$.



გეომეტრიულად , საშუალო მნიშვნელობის თეორემა ამბობს, რომ ნებისმიერი $y = y_0$ ჰორიზონტალური წრფე, რომელიც y ღერძს კვეთს $f(a)$ და $f(b)$-ს შორის, f -ის გრაფიკს ერთხელ მაინც გადაკვეთს $[a,b]$ ინტერვალზე.

თეორემა 11-ის გამოყენება შეიძლება $f(x) = 0$ განტოლების ფესვების მოსაძებნად.

მაგალითი 11. ვაჩვენოთ, რომ $x^3 - x - 1 = 0$ განტოლებას ფესვი აქვს [1, 2] შუალედში.

ამოხსნა. ვთქვათ $f(x) = x^3 - x - 1$. რადგან

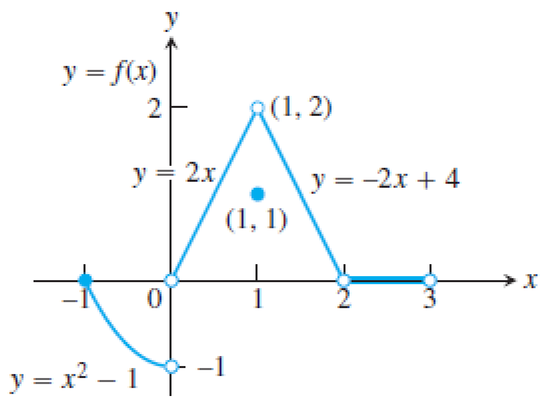
$$f(1) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0 \text{ და } f(2) = 2^3 - 2 - 1 = 5 > 0 \,,$$

ვხედავთ რომ $y_0 = 0$ მნიშვნელობა $f(1)$ და $f(2)$ -ს შორისაა მოთავსებული. f ფუნქცია უწყვეტია, ამიტომ საშუალო მნიშვნელობის თეორემის თანახმად არსებობს x -ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $f(x) = 0$, ე.ი. არსებობს ფესვი.

სავარჯიშოები 2.5

5-10 სავარჯიშოებში განსახილავი $f(x)$ ფუნქციის ანალიზური და გრაფიკული სახე ასეთია:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & -1 \le x < 0 \\ 2x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -2x + 4, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < 3 \end{cases}$$



5. (a) არსებობს $f(-1)$? (b) არსებობს $\lim_{x\to -1^+} f(x)$?

(c) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$? (d) უწყვეტია f ფუნქცია $x = -1$ -ში?

6. (a) არსებობს $f(1)$? (b) არსებობს $\lim_{x\to 1} f(x)$?

(c) $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$? (d) უწყვეტია f ფუნქცია $x = 1$ -ში?

7. (a) განსაზღვრულია f ფუნქცია $x = 2$ -ში ? (b) უწყვეტია f ფუნქცია $x = 2$ -ში ?

8. x -ის რა მნიშვნელობებისთვისაა f უწყვეტი ?

9. რა რიცხვი უნდა დასახელდეს $f(2)$ -ის მნიშვნელობად, რომ გაფართოებული ფუნქცია უწყვეტი გახდეს $x = 2$ -ში ?

10. რა ახალი მნიშვნელობა უნდა მიენიჭოს $f(1)$ -ს, რომ ავიცილოთ წყვეტა?

x -ის რა მნიშვნელობებისთვისაა 13-30 სავარჯიშოებში ნაჩვენები ფუნქციები უწყვეტი?

13. $y = \dfrac{1}{x-2} - 3x$ **14.** $y = \dfrac{1}{(x+2)^2} + 4$

15. $y = \dfrac{x+1}{x^2 - 4x + 3}$ **16.** $y = \dfrac{x+3}{x^2 - 3x - 10}$

17. $y = |x - 1| + \sin x$ **18.** $y = \dfrac{1}{|x| + 1} - \dfrac{x^2}{2}$

19. $y = \dfrac{\cos x}{x}$ **20.** $y = \dfrac{x+2}{\cos x}$

21. $y = \csc 2x$ **22.** $y = \tan \dfrac{\pi x}{2}$

23. $y = \dfrac{x \tan x}{x^2+1}$ **24.** $y = \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{1+\sin^2 x}$

25. $y = \sqrt{2x+3}$ **26.** $y = \sqrt[4]{3x-1}$

27. $y = (2x-1)^{1/3}$ **28.** $y = (2-x)^{1/5}$

29. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-6}{x-3}, & x \neq 3 \\ 5, & x = 3 \end{cases}$

30. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x^2-4}, & x \neq 2, x \neq -2 \\ 3, & x = 2 \\ 4, & x = -2 \end{cases}$

39. განსაზღვრეთ $g(3)$ იმგვარად, რომ $g(x) = (x^2-9)/(x-3)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელდეს $x = 3$ წერტილში.

40. განსაზღვრეთ $h(2)$ იმგვარად, რომ $h(t) = (t^2+3t-10)/(t-2)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელდეს $t = 2$ წერტილში.

41. განსაზღვრეთ $f(1)$ იმგვარად, რომ $f(s) = (s^3-1)/(s^2-1)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელდეს $s = 1$ წერტილში.

42. განსაზღვრეთ $g(4)$ იმგვარად, რომ $g(x) = (x^2-16)/(x^2-3x-4)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელდეს $x = 4$ წერტილში.

43. a -ს რა მნიშვნელობისთვის იქნება

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x < 3 \\ 2ax, & x \geq 3 \end{cases}$$

ფუნქცია უწყვეტი არგუმენტის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის?

44. b -ს რა მნიშვნელობისთვის იქნება

$$g(x) = \begin{cases} x, & x < -2 \\ bx^2, & x \geq -2 \end{cases}$$

ფუნქცია უწყვეტი არგუმენტის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის?

45. a -ს რა მნიშვნელობისთვის იქნება

$$f(x)=\begin{cases} a^2x-2a, & x\ge 2 \\ 12, & x<2 \end{cases}$$

ფუნქცია უწყვეტი არგუმენტის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის?

46. b -ს რა მნიშვნელობისთვის იქნება

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x-b}{b+1}, & x<0 \\ x^2+b, & x>0 \end{cases}$$

ფუნქცია უწყვეტი არგუმენტის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის?

47. a და b -ს რა მნიშვნელობებისთვის იქნება

$$g(x)=\begin{cases} -2, & x\le -1 \\ ax-b, & -1<x<1 \\ 3, & x\ge 1 \end{cases}$$

ფუნქცია უწყვეტი არგუმენტის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის?

48. a და b -ს რა მნიშვნელობებისთვის იქნება

$$g(x)=\begin{cases} ax+2b, & x\le 0 \\ x^2+3a-b, & 0<x\le 2 \\ 3x-5, & x>2 \end{cases}$$

ფუნქცია უწყვეტი არგუმენტის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის ?

54. დაასაბუთეთ, რატომ აქვს $\cos x = x$ განტოლებას ერთი ფესვი მაინც.

55. აჩვენეთ, რომ $x^3-15x+1=0$ განტოლებას აქვს სამი ფესვი [-4, 4] შუალედში.

57. ვთქვათ $f(x)=x^3-8x+10$. აჩვენეთ, რომ არსებობს ისეთი c რიცხვი, რომლისთვისაც $f(c)=$ ა) π ; ბ) $-\sqrt{3}$; გ) 5000000 .

2.6 ზღვარი უსასრულობაში. გრაფიკის ასიმპტოტები

განსაზღვრება

ვიტყვით, რომ L რიცხვი არის $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი, როდესაც x მიისწრაფვის პლიუს (მინუს) უსასრულობისაკენ და ჩავწერთ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L \qquad \left(\lim_{x\to-\infty} f(x)=L\right),$$

თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი M რიცხვი, რომ როცა $x>M$ ($x<M$), მაშინ $|f(x)-L|<\varepsilon$.

თუ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$, მაშინ ვიტყვით, რომ L არის $f(x)$-ის ზღვარი, როდესაც x მიისწრაფვის უსასრულობისკენ და დავწერთ $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$.

ფორმალური განსაზღვრების საფუძველზე ძნელი არაა შემოწმდეს, რომ

$$\lim_{x\to\pm\infty} k=k \qquad \text{და} \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0.$$

ჩვენ ახლა დავამტკიცებთ მეორე მათგანს, პირველის დამტკიცება კი გადატანილია სავარჯიშო 87 და 88-ში.

მაგალითი 1. ვაჩვენოთ, რომ

$(a)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

ამოხსნა. ვთქვათ მოცემულია $\varepsilon>0$. ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ ისეთი M რიცხვი, რომ

$$x>M \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{1}{x}-0\right|=\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon.$$

ამ იმპლიკაციას ადგილი ექნება, თუ $M=1/\varepsilon$ ან მასზე მეტი რაიმე დადებითი რიცხვია.

ეს ამტკიცებს (a) შემთხვევას.

(b) ვთქვათ მოცემულია $\varepsilon>0$. ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ ისეთი M რიცხვი, რომ

$$x<M \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{1}{x}-0\right|=\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon.$$

ამ იმპლიკაციას ადგილი ექნება, თუ $M=-1/\varepsilon$ ან მასზე ნაკლები რაიმე დადებითი რიცხვია. ეს ამტკიცებს (b) შემთხვევას.

უსასრულობაში ზღვრებს სასრული შემთხვევის ანალოგიური თვისებები აქვთ.

თეორემა 12. ზღვრების ყველა წესი თეორემა 1-დან მართებული იქნება, თუ მათში $\lim_{x\to c}$ შეიცვლება $\lim_{x\to-\infty}$, $\lim_{x\to+\infty}$ ან $\lim_{x\to\infty}$ -ით.

მაგალითი 2.

$$(a)\quad \lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}5+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=5+0=5$$

$$(b)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\pi\sqrt{3}}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\pi\sqrt{3}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\pi\sqrt{3}\cdot0\cdot0=0$$

რაციონალური ფუნქციის ზღვრის მოსაძებნად როცა $x\to\pm\infty$, ჯერ მრიცხველს და მნიშვნელს ვყოფთ x-ის უდიდეს ხარისხზე მნიშვნელიდან.

მაგალითი 3.

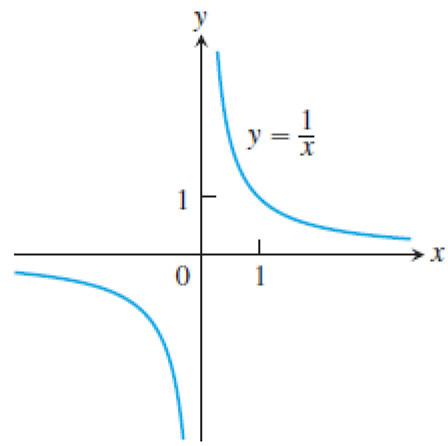
$$(a)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+(8/x)-(3/x^2)}{3+(2/x^2)}=\frac{5+0-0}{3+0}=\frac{5}{3}$$

$$(b)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{11x+2}{2x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(11/x^2)+(2/x^3)}{2-(1/x^3)}=\frac{0+0}{2-0}=0$$

ჰორიზონტალური ასიმპტოტები

თუ მანძილი ფუნქციის გრაფიკსა და რაიმე წრფეს შორის მიისწრაფვის ნულისკენ, როცა გრაფიკის წერტილი უსასრულოდ შორდება კოორდინატთა სათავეს, ამბობენ რომ გრაფიკი ასიმპტოტურად უახლოვდება წრფეს და რომ წრფე წარმოადგენს გრაფიკის ასიმპტოტს.

თუ შევხედავთ $f(x)=1/x$ ფუნქციის გრაფიკს, შევამჩნევთ, რომ x-ღერძი წარმოადგენს გრაფიკის ასიმპტოტს მარჯვნივ, რადგან $\lim_{x\to\infty}(1/x)=0$, აგრეთვე მარცხნივ, რადგან $\lim_{x\to-\infty}(1/x)=0$.

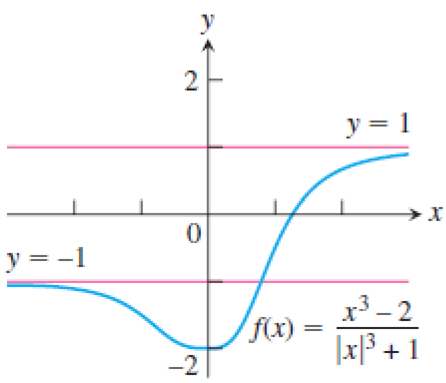


(a)

განსაზღვრება. $y=b$ წრფეს ეწოდება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ჰორიზონტალური ასიმპტოტი, თუ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b \quad \text{ან} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=b$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ $f(x)=\dfrac{x^3-2}{|x|^3+1}$-ის გრაფიკის ჰორიზონტალური ასიმპტოტები.



ფიგურა 2.53

ამოხსნა

თუ $x\ge 0$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2}{|x|^3+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2}{x^3+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-(2/x^3)}{1+(1/x^3)}=1;$$

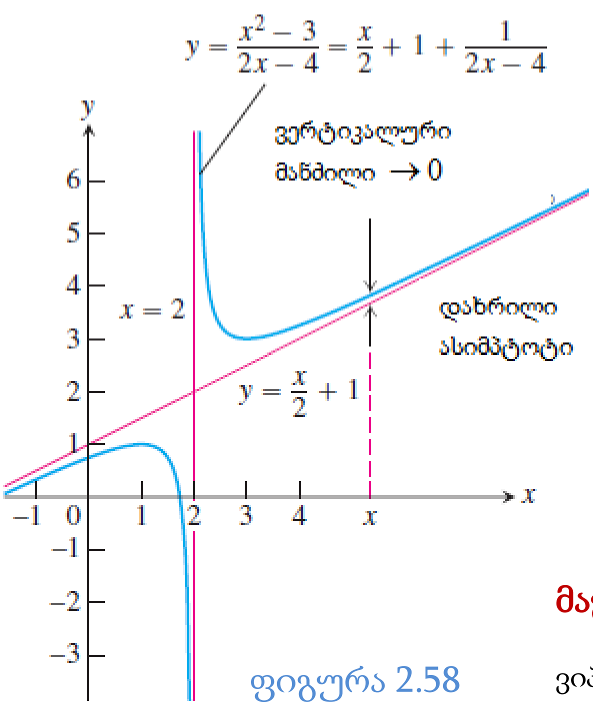
თუ $x<0$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2}{|x|^3+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2}{(-x)^3+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-(2/x^3)}{-1+(1/x^3)}=-1.$$

ჰორიზონტალური ასიმპტოტებია:

$y=-1$ (მარცხნივ) და $y=1$ (მარჯვნივ)

(ფიგურა 2.53)



ფიგურა 2.58

თუ რაციონალური ფუნქციის მრიცხველის ხარისხი 1-ით მეტია მნიშვნელის ხარისხზე, მაშინ გრაფიკს აქვს **დახრილი ასიმპტოტი.** ჩვენ ვიპოვოთ ასეთი ასიმპტოტის განტოლებას f-ის გამოსახულებაში მრიცხველის მნიშვნელზე გაყოფით: მიიღება წრფივი ფუნქცია პლიუს ნაშთი, რომელიც ნულისაკენ მიისწრაფვის, როცა $x\to\pm\infty$.

მაგალითი 10.

ვიპოვოთ $f(x)=\dfrac{x^2-3}{2x-4}$-ის გრაფიკის დახრილი ასიმპტოტი.

ამოხსნა.

ჩვენ გვაინტერესებს ფუნქციის ყოფაქცევა, როცა $x \to \pm\infty$.

შევასრულოთ გაყოფა :

$$
\begin{array}{r|l}
x^2-3 & 2x-4 \\ \cline{2-2}
-\;x^2-2x & x/2+1 \\ \cline{1-1}
2x-3 & \\
-\;2x-4 & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}
$$

ამრიგად, $f(x)=g(x)+r(x)$, სადაც

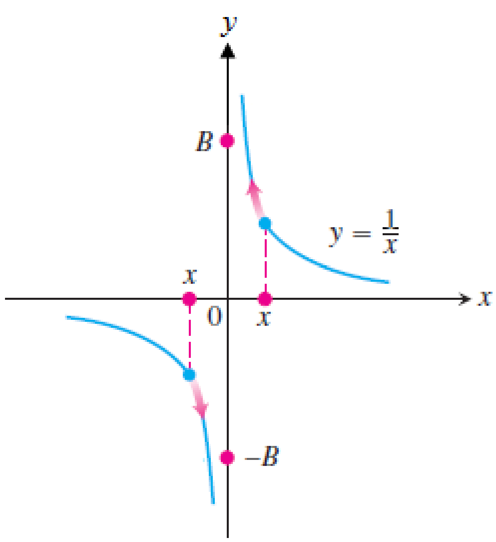
$g(x)=\dfrac{x}{2}+1$ ასიმპტოტია, ხოლო ნაშთი

$r(x)=\dfrac{1}{2x-4}\to 0$, როცა $x\to\pm\infty$

(ფიგურა 2.58)

შევხედოთ კვლავ $f(x)=1/x$ ფუნქციის გრაფიკს. როცა $x\to 0^+$, f -ის მნიშვნელობები შემოუსაზღვრელად იზრდება. რაც უნდა დიდი იყოს დადებითი ნამდვილი რიცხვი B , f -ის მნიშვნელობები უფრო მეტი ხდება (ფიგურა 2.59). ამრიგად, f -ს არა აქვს ზღვარი როცა $x\to 0^+$. მიუხედავად ამისა მოსახერხებელია აღვწეროთ f -ის ყოფაქცევა იმის თქმით, რომ $f(x)$ მიისწრაფვის ∞ - სკენ, როცა $x\to 0^+$. ჩვენ ვწერთ

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty .$$



ფიგურა 2.59

ამ ტოლობის დაწერისას არ ვამბობთ, რომ ზღვარი არსებობს. ჩვენ ასევე არ ვამბობთ, რომ ∞ ნამდვილი რიცხვია, რადგან ასეთი რიცხვი არ არსებობს.

როცა $x\to 0^-$, f -ის მნიშვნელობები შემოუსაზღვრელად დიდი და უარყოფითია . თუ მოცემულია ნებისმიერი უარყოფითი რიცხვი $-B$, ფუნქციის მნიშვნელობები მასზე უფრო ქვევითაც ძევს (იხ. ფიგურა 2.59). ჩვენ ვწერთ

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

მაგალითი 13. ეს მაგალითები გვიჩვენებენ, რომ რაციონალურ ფუნქციებს შეიძლება ჰქონდეთ სხვადასხვა ყოფაქცევა მათი მნიშვნელების ნულების სიახლოვეს.

$$(a)\quad \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x+2}=0$$

$$(b)\quad \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$$

$$(c)\quad \lim_{x\to 2^+}\frac{x-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-3}{(x-2)(x+2)}=-\infty$$

$$(d)\quad \lim_{x\to 2^-}\frac{x-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x-3}{(x-2)(x+2)}=\infty$$

$$(e)\quad \lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{(x-2)(x+2)}\qquad \text{არ არსებობს}$$

$$(f)\quad \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{(x-2)^3}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{(x-2)^3}=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{(x-2)^2}=-\infty$$

მოვიყვანოთ ახლა უსასრულო ზღვრის ფორმალური განმარტება.

განსაზღვრება

1. ვიტყვით, რომ $f(x)$ მიისწრაფვის უსასრულობისკენ როცა x მიისწრაფვის x_0-სკენ და ვწერთ

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty,$$

თუ ნებისმიერი დადებითი B რიცხვისათვის არსებობს შესაბამისი $\delta>0$ ისეთი, რომ

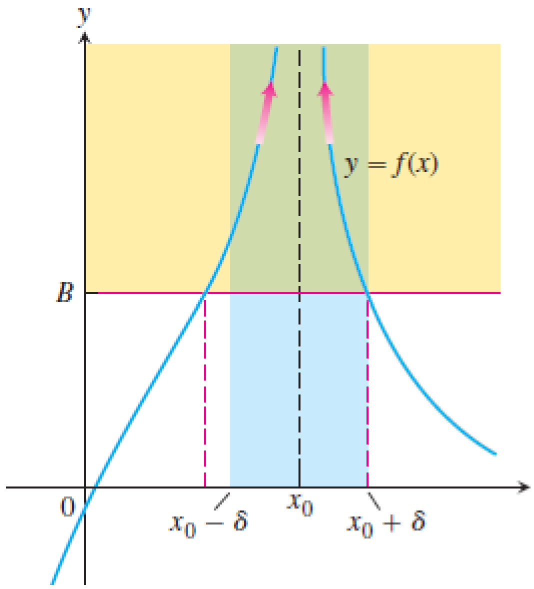
$$0<|x-x_0|<\delta \quad\Rightarrow\quad f(x)>B \qquad \text{(ფიგ. 2.62).}$$

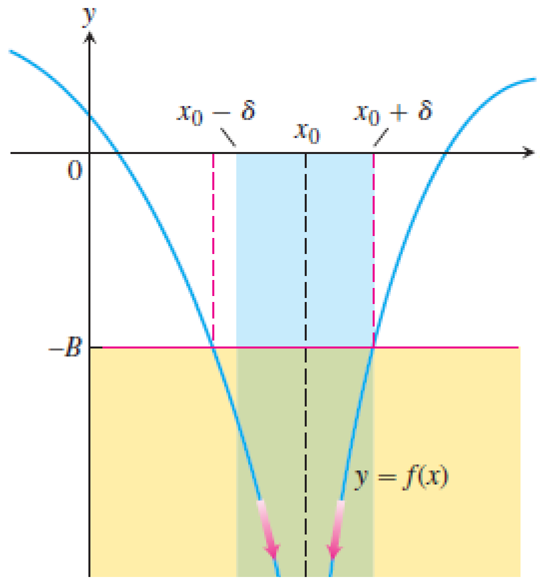
2. ვიტყვით, რომ $f(x)$ მიისწრაფვის მინუს უსასრულობისკენ როცა x მიისწრაფვის x_0-სკენ და ვწერთ

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty,$$

თუ ნებისმიერი უარყოფითი $-B$ რიცხვისათვის არსებობს შესაბამისი $\delta>0$ ისეთი, რომ

$$0<|x-x_0|<\delta \quad\Rightarrow\quad f(x)<-B \qquad \text{(ფიგ. 2.63)}$$





ფიგურა 2.62

როცა $x_0-\delta<x<x_0+\delta$, მაშინ f -ის გრაფიკი ძევს $y=B$ წრფის ზევით

ფიგურა 2.63

როცა $x_0-\delta<x<x_0+\delta$, მაშინ f -ის გრაფიკი ძევს $y=-B$ წრფის ქვევით

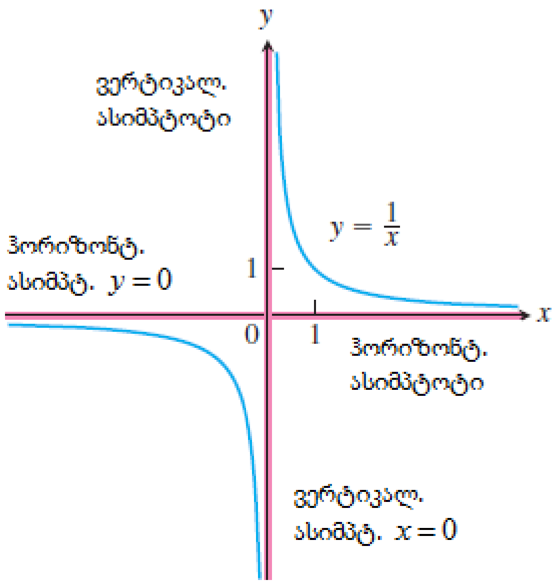
შევნიშნოთ, რომ მანძილი $f(x)=1/x$ -ის წერტილსა და y ღერძს შორის მიისწრაფვის ნულისკენ, როცა ეს წერტილი გადაადგილდება გრაფიკზე ვერტიკალურად და შორდება კოორდინატთა სათავეს (ფიგურა 2.64). ფუნქცია $f(x)=1/x$ შემოუსაზღვრელია როცა x მიისწრაფვის 0-სკენ, რადგან

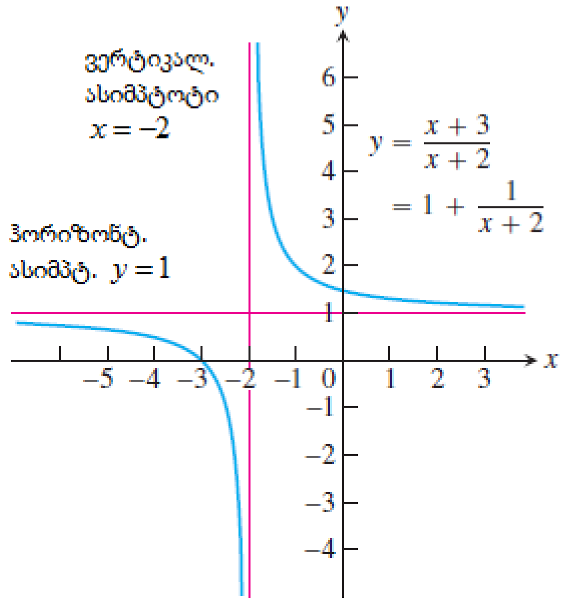
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty \qquad \text{და} \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty .$$

ჩვენ ვიტყვით, რომ $x=0$ წრფე (y -ღერძი) არის $f(x)=1/x$ -ის გრაფიკის **ვერტიკალური ასიმპტოტი** . შევნიშნოთ, რომ მნიშვნელი ნულის ტოლია $x=0$ -ზე და აქ ფუნქცია არაა განსაზღვრული.

განსაზღვრება. $x=a$ წრფეს ეწოდება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის **ვერტიკალური ასიმპტოტი,** თუ

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty \qquad \text{ან} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$$





ფიგურა 2.64

ფიგურა 2.65

მაგალითი 15. ვიპოვოთ $y=\dfrac{x+3}{x+2}$ მრუდის ჰორიზონტალური და ვერტიკალური ასიმპტოტები.

ამოხსნა. გარდავქმნათ y ამგვარად: $y=1+\dfrac{1}{x+2}$.

როცა $x\to\pm\infty$, მრუდი უახლოვდება $y=1$ წრფეს; როცა $x\to-2$, მრუდი უახლოვდება $x=-2$ წრფეს (ფიგურა 2.65). ამრიგად, ასიმპტოტებია $y=1$ და $x=-2$ წრფეები.

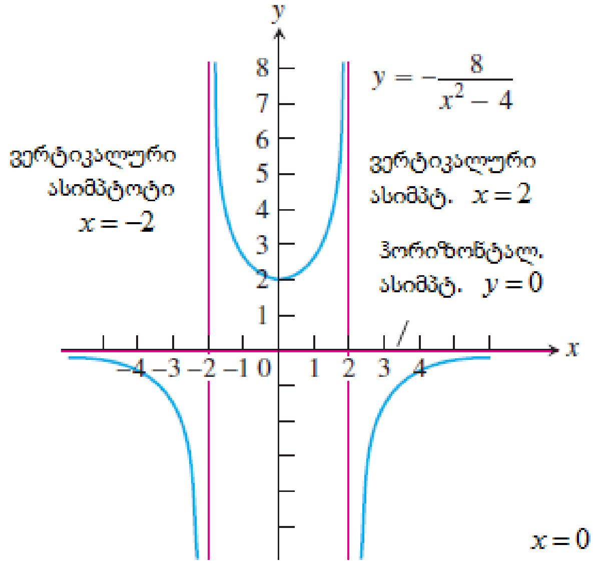
მაგალითი 16. ვიპოვოთ $f(x)=-\dfrac{8}{x^2-4}$ მრუდის ჰორიზონტალური და ვერტიკალური ასიმპტოტები

ამოხსნა. ჩვენთვის საინტერესოა ფუნქციის ყოფაქცევა, როცა $x\to\pm\infty$, აგრეთვე როცა $x\to\pm2$ (ე.ი. მნიშვნელი ნული ხდება). შევნიშნოთ, რომ f ლუწი ფუნქციაა, ასე რომ მისი გრაფიკი სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ.

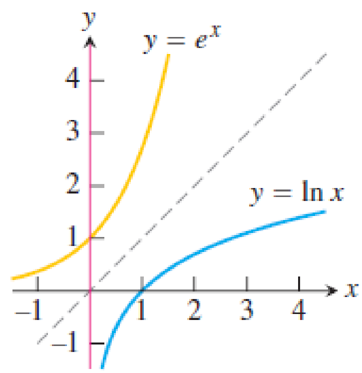
(a) ყოფაქცევა, როცა $x\to\pm\infty$. რადგან $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, ამიტომ $y=0$ წრფე ჰორიზონტალური ასიმპტოტია მარჯვენა მხარეს. სიმეტრიის გამო ის ასიმპტოტია მარცხენა მხარესაც (ფიგურა 2.66). შევნიშნოთ, რომ მრუდი უახლოვდება x-ღერძს ქვედა მხრიდან.

(b) ყოფაქცევა, როცა $x\to\pm2$. რადგან $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=-\infty$ და $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\infty$, ამიტომ $x=2$ წრფე ვერტიკალური ასიმპტოტია როგორც მარჯვენა, ასევე მარცხენა მხრიდან. სიმეტრიის

გამო $x=-2$ წრფეც ვერტიკალური ასიმპტოტია.



ფიგურა 2.66



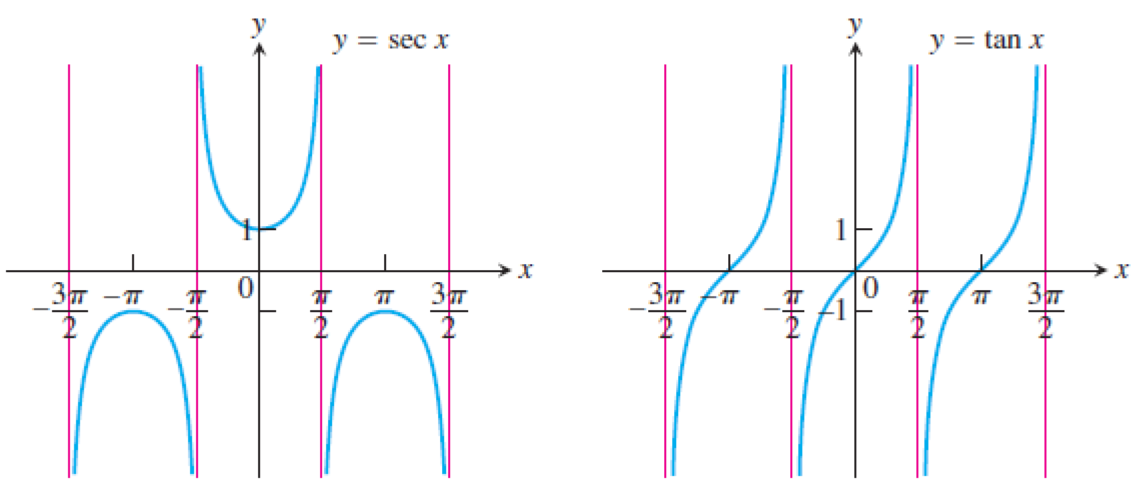
ფიგურა 2.67

$x=0$ წრფე არის ნატურალური ლოგარითმის ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტი

მაგალითი 17. ნატურალური ლოგარითმის გრაფიკისათვის y - ღერძი ($x=0$ წრფე) წარმოადგენს ვერტიკალურ ასიმპტოტს. ეს ფაქტი თვალსაჩინოა ფიგურა 2.67-ზე აგებული გრაფიკიდან (რომელიც წარმოადგენს ნატურალური ექსპონენციალური ფუნქციის გრაფიკის სიმეტრიულ ასახვას $y=x$ წრფის მიმართ) და იმ ფაქტიდან, რომ x -ღერძი არის $y=e^x$ მრუდის ჰორიზონტალური ასიმპტოტი (მაგალითი 5). ამრიგად,

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty .$$

იგივე შედეგია ჭეშმარიტი $y=\log_a x$ მრუდისათვის, როცა $a>1$.



ფიგურა 2.68

მაგალითი 18. $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ და $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ ფუნქციათა გრაფიკების ვერტი-კალური ასიმპტოტებია $x = (2k+1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$ წრფეები (როცა $\cos x = 0$) (ფიგურა 2.68).

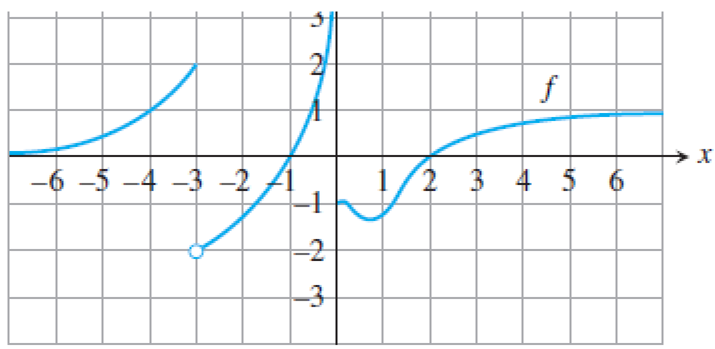
სავარჯიშოები 2.6

1. გრაფიკულად მოცემული ფუნქციისათვის გამოთვალეთ შემდეგი ზღვრები

a. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ **b.** $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$ **c.** $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$

d. $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ **e.** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ **f.** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

g. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **h.** $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ **i.** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$



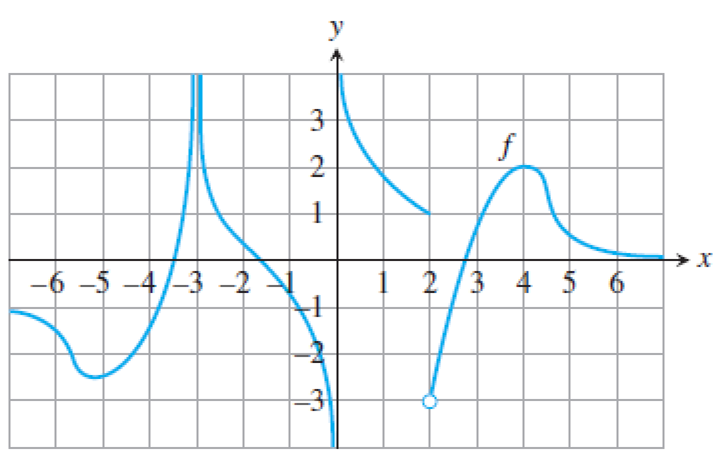
2. გრაფიკულად მოცემული ფუნქციისათვის გამოთვალეთ შემდეგი ზღვრები

a. $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ **b.** $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ **c.** $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

d. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ **e.** $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$ **f.** $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$

g. $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ **h.** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ **i.** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

j. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **k.** $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ **l.** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$



13 -- 22 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ ზღვრები : (a) როცა $x \to \infty$; (b) როცა $x \to -\infty$

13. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{5x + 7}$

14. $f(x) = \dfrac{2x^3 + 7}{x^3 - x^2 + x + 7}$

15. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 3}$

16. $f(x) = \dfrac{3x + 7}{x^2 - 2}$

17. $h(x) = \dfrac{7x^3}{x^3 - 3x^2 + 6x}$

18. $g(x) = \dfrac{1}{x^3 - 4x + 1}$

19. $g(x) = \dfrac{10x^5 + x^4 + 31}{x^6}$

20. $h(x) = \dfrac{9x^4 + x}{2x^4 + 5x^2 - x + 6}$

21. $h(x) = \dfrac{-2x^3 - 2x + 3}{3x^3 + 3x^2 - 5x}$

22. $h(x) = \dfrac{-x^4}{x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 9}$

23 -- 32 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ ზღვრები (მითითება: წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი გავყოთ მნიშვნელში მყოფ x -ის უდიდეს ხარისხზე)

23. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{8x^2 - 3}{2x^2 + x}}$

24. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^2 + x - 1}{8x^2 - 3}\right)^{1/3}$

25. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1 - x^3}{x^2 + 7x}\right)^5$

26. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{x^2 - 5x}{x^3 + x - 2}}$

27. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\sqrt{x} + x^{-1}}{3x - 7}$

28. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$

29. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}$

30. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{-1} + x^{-4}}{x^{-2} - x^{-3}}$

31. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^{5/3} - x^{1/3} + 7}{x^{8/5} + 3x + \sqrt{x}}$

32. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 5x + 3}{2x + x^{2/3} - 4}$

53--56 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ მითითებული ზღვრები

53. $\lim \dfrac{1}{x^2 - 4}$, როცა

$a.$ $x \to 2^+$ $b.$ $x \to 2^-$ $c.$ $x \to -2^+$ $d.$ $x \to -2^-$

54. $\lim \dfrac{x}{x^2 - 1}$, როცა

$a.$ $x \to 1^+$ $b.$ $x \to 1^-$ $c.$ $x \to -1^+$ $d.$ $x \to -1^-$

55. $\lim\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{x}\right)$, როცა

$a.\quad x\to 0^+$ $\qquad b.\quad x\to 0^-$ $\qquad c.\quad x\to \sqrt[3]{2}$ $\qquad d.\quad x\to -1$

56. $\lim\dfrac{x^2-1}{2x+4}$, როცა

$a.\quad x\to -2^+$ $\qquad b.\quad x\to -2^-$ $\qquad c.\quad x\to 1^+$ $\qquad d.\quad x\to 0^-$

69--72 სავარჯიშოებში ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც მოცემულ პირობებს დააკმაყოფილებს. ფორმულა არ მოითხოვება -- უბრალოდ მონიშნეთ კოორდინატთა ღერძები და შეასრულეთ შესაბამისი გრაფიკი. (პასუხი ერთადერთი არ იქნება).

69. $f(0)=0,\ f(1)=2,\ f(-1)=-2,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1,$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$

70. $f(0)=0,\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2,$
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-2$

71. $f(0)=0,\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\infty,$
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$

72. $f(2)=1,\ f(-1)=0,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\infty,$
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

73--76 სავარჯიშოებში იპოვეთ ფუნქცია, რომელიც მოცემულ პირობებს დააკმაყოფილებს. პასუხი ერთადერთი არ იქნება. დასაშვებია უბან-უბან განსაზღვრული ფუნქციებიც.

73. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\infty,\quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\infty$

74. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=0,\ \lim\limits_{x\to 3^-} g(x)=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to 3^+} g(x)=\infty$

75. $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=-1,\ \lim\limits_{x\to\infty} h(x)=1,\ \lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=-1,$
$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=1$

76. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} k(x)=1,\ \lim\limits_{x\to 1^-} k(x)=\infty,\quad \lim\limits_{x\to 1^+} k(x)=-\infty$

78. შეიძლება თუ არა $f(x)/g(x)$ ფუნქციის გრაფიკს ჰქონდეს ასიმპტოტი, თუ f და g მრავალწევრებია, ამასთან $g(x)$ არსად ნული არ ხდება ? პასუხი დაასაბუთეთ.

80--86 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ ზღვრები

80. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x+4}\right)$

81. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+25}-\sqrt{x^2-1}\right)$

82. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)$

83. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2+3x-2}\right)$

84. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2-x}-3x\right)$

85. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

86. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$

87 და 88 სავარჯიშოებში $x\to\pm\infty$ ზღვრის დასადგენად გამოიყენეთ ფორმალური განსაზღვრება .

87. თუ $f(x)=k$ მუდმივი ფუნქციაა, მაშინ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=k$.

88. თუ $f(x)=k$ მუდმივი ფუნქციაა, მაშინ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=k$.

89--92 სავარჯიშოებში ნაჩვენები ზღვრების დასადგენად გამოიყენეთ ფორმალური განსაზღვრება.

89. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-1}{x^2}=-\infty$

90. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{|x|}=\infty$

91. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{-2}{(x-3)^2}=-\infty$

92. $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{1}{(x+5)^2}=\infty$

99--104 სავარჯიშოებში დახაზეთ რაციონალურ ფუნქციათა გრაფიკები. იპოვეთ ასიმპტოტების ფორმულებიც და გამოსახეთ მათი გრაფიკები.

99. $y=\dfrac{x^2}{x-1}$

100. $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$

101. $y=\dfrac{x^2-4}{x-1}$

102. $y=\dfrac{x^2-1}{2x+4}$

103. $y=\dfrac{x^2-1}{x}$

104. $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$

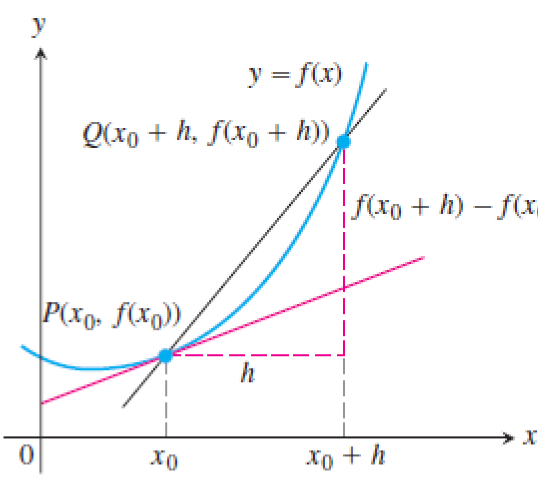
3

დიფერენცირება

მეორე თავის დასაწყისში ვმსჯელობდით, როგორ განგვესაზღვრა მრუდის დახრილობა წერტილში და როგორ გაგვეზომა ფუნქციის ცვლილების სიჩქარე. ახლა, როცა უკვე შესწავლილი გვაქვს ზღვრები, შეგვიძლია ამ იდეების ზუსტად განსაზღვრა. ორივე მათგანი წარმოადგენს წერტილში ფუნქციის წარმოებულის ინტერპრეტაციას. შემდეგ ამ კონცეფციას გავავრცელებთ წერტილში წარმოებულიდან ფუნქციის წარმოებულზე. შევიმუშავებთ წარმოებულის მოძებნის იოლ წესებს, რომლებიც აღარ მოითხოვენ რაიმე ზღვრის გამოთვლას.

წარმოებული წარმოადგენს კალკულუსის საკვანძო იდეას და ჩვენ გამოვიყენებთ მას ამოცანათა ფართო სპექტრისათვის.

3.1 მხები და წარმოებული წერტილში



ფიგურა 3.1

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ნებისმიერი $y = f(x)$ მრუდის მხები $P(x_0, f(x_0))$ წერტილში, გამოვთვალოთ ამ წერტილზე და მის მეზობელ $Q(x_0+h, f(x_0+h))$ წერტილზე გამავალი წრფის დახრილობა. შემდეგ გადავიდეთ $h \to 0$ ზღვარზე (ფიგ. 3.1). თუ ეს ზღვარი არსებობს, ვუწოდოთ მას მრუდის დახრილობა წერტილში. მხები კი ვუწოდოთ ამ დახრილობის მქონე და P-ზე გამავალ წრფეს.

განსაზღვრება. $y=f(x)$ **მრუდის დახრილობა** $P(x_0, f(x_0))$ წერტილში ეწოდება

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

რიცხვს, თუკი ეს ზღვარი რსებობს.

მრუდის **მხები** P წერტილში არის ამ წერტილზე გამავალი წრფე, რომლის დახრილობა მრუდის დახრილობის ტოლია.

$\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, $h\neq 0$ გამოსახულებას ეწოდება f -ის h -ნაზრდიანი **გაყოფილი სხვაობა** x_0 წერტილში. თუ არსებობს გაყოფილი სხვაობის ზღვარი როცა h მიისწრაფვის ნულისკენ, მაშინ ამ ზღვარს სპეციალური სახელი და აღნიშვნა გააჩნია.

განსაზღვრება. f **ფუნქციის წარმოებული** x_0 წერტილში , აღნიშნავენ $f'(x_0)$ სიმბოლოთი, ეწოდება

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

სიდიდეს, თუკი ეს ზღვარი არსებობს.

თუ გაყოფილი სხვაობის ინტერპრეტაციას მოვახდენთ , როგორც მკვეთი წრფის დახრილობას, მაშინ წარმოებული გვაძლევს $y=f(x)$ მრუდის დახრილობას $P(x_0, f(x_0))$ წერტილში.

სავარჯიშო 31 გვიჩვენებს, რომ $f(x)=mx+b$ წრფივი ფუნქციის წარმოებული ნებისმიერ x_0 წერტილში უბრალოდ ამ წერტილში $f'(x_0)=m$ დახრილობის ტოლია . ეს თანხმობაშია დახრილობის განსაზღვრებასთან.

$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ გაყოფილი სხვაობის ზღვრის ინტერპრეტაციები:

1. $y=f(x)$ მრუდის გრაფიკის დახრილობა $x=x_0$ -ში;
2. $y=f(x)$ მრუდის მხების დახრილობა $x=x_0$ -ში;
3. $f(x)$ -ის ცვლილების სიჩქარე x -ის მიმართ $x=x_0$ -ში;
4. $f'(x_0)$ წარმოებული წერტილში.

სავარჯიშოები 3.1

5-10 სავარჯიშოებში იპოვეთ მრუდის მხების განტოლება მოცემულ წერტილში. შემდეგ ააგეთ გრაფიკი მხებთან ერთად

5. $y = 4 - x^2$, $(-1, 3)$
6. $y = (x-1)^2 + 1$, $(1, 1)$
7. $y = 2\sqrt{x}$, $(1, 2)$
8. $y = \frac{1}{x^2}$, $(-1, 1)$
9. $y = x^3$, $(-2, -8)$
10. $y = \frac{1}{x^3}$, $\left(-2, -\frac{1}{8}\right)$

11--18 სავარჯიშოებში იპოვეთ ფუნქციის გრაფიკის დახრილობა ნაჩვენებ წერტილში. შემდეგ იპოვეთ მხების განტოლება ამ წერტილში.

11. $f(x) = x^2 + 1$, $(2, 5)$
12. $f(x) = x - 2x^2$, $(1, -1)$
13. $g(x) = \frac{x}{x-2}$, $(3, 3)$
14. $g(x) = \frac{8}{x^2}$, $(2, 2)$
15. $h(t) = t^3$, $(2, 8)$
16. $h(t) = t^3 + 3t$, $(1, 4)$
17. $f(x) = \sqrt{x}$, $(4, 2)$
18. $f(x) = \sqrt{x+1}$, $(8, 3)$

19--22 სავარჯიშოებში იპოვეთ მრუდის დახრილობა ნაჩვენებ წერტილში.

19. $y = 5x^2$, $x = -1$
20. $y = 1 - x^2$, $x = 2$
21. $y = \frac{1}{x-1}$, $x = 3$
22. $y = \frac{x-1}{x+1}$, $x = 0$

23--24 სავარჯიშოებში დაადგინეთ, რომელ წერტილში აქვს ფუნქციის გრაფიკს ჰორიზონტალური მხები .

23. $f(x) = x^2 + 4x - 1$
24. $g(x) = x^3 - 3x$

31. აჩვენეთ, რომ $y = mx + b$ წრფე მისივე გრაფიკის მხებია ნებისმიერ $(x_0, mx_0 + b)$ წერტილში.

ვერტიკალური მხები

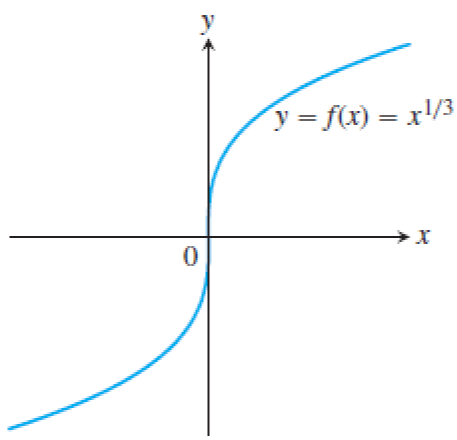
ვიტყვით, რომ $y = f(x)$ მრუდს აქვს ვერტიკალური მხები წერტილში თუ $\lim_{h\to 0}(f(x_0+h)-f(x_0)) = \infty$ ან $-\infty$.

მაგალითად, $y = x^{1/3}$ მრუდს აქვს ვერტიკალური მხები $x=0$-ში (იხ. **ფიგურა (ა)**), რადგან

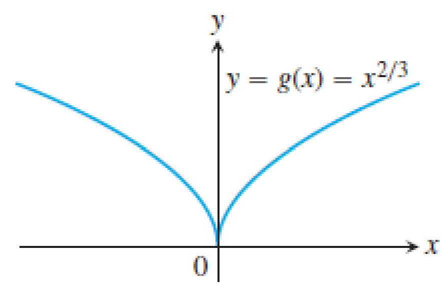
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^{1/3}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{2/3}} = \infty .$$

თუმცა $y = x^{2/3}$-ს არა აქვს ვერტიკალური მხები $x=0$-ში (იხ. **ფიგურა (ბ)**):

$\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^{2/3}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{1/3}}$ არ არსებობს, რადგან მარცხნიდან ზღვარია $-\infty$, მარჯვნიდან კი ∞.



ფიგურა (ა)



ფიგურა (ბ)

35. აქვს

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

ფუნქციის გრაფიკს ვერტიკალური მხები კოორდინატთა სათავეში? პასუხი დაასაბუთეთ.

36. აქვს

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$$

ფუნქციის გრაფიკს ვერტიკალური მხები $(0,\,1)$ წერტილში? პასუხი დაასაბუთეთ.

3.2 წარმოებული როგორც ფუნქცია

განსაზღვრება. $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული x ცვლადის მიმართ წარმოადგენს $f'(x)$ ფუნქციას, რომლის მნიშვნელობა x წერტილში $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ ტოლობითაა განსაზღვრული, თუკი ეს ზღვარი არსებობს .

f' -ის განსაზღვრის არეა f -ის განსაზღვრის არის იმ წერტილთა სიმრავლე , რომლებშიც ზღვარი არსებობს. თუ f' არსებობს რომელიმე x წერტილში, ვიტყვით რომ f **დიფერენცირებადია (აქვს წარმოებული) x წერტილში.**

წარმოებულის გამოთვლის პროცესს **გაწარმოება** ეწოდება. იმ ფაქტის ხაზგასასმელად, რომ გაწარმოება $f(x)$ -ის გარდასაქმნელი ოპერაციაა, f' -ის ნაცვლად გამოვიყენებთ აღნიშვნას

$$\frac{d}{dx}f(x).$$

მაგალითი 1. გავაწარმოოთ $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$.

ამოხსნა. რადგან $f(x+h)=\dfrac{x+h}{x+h-1}$, ამიტომ

$$f(x+h)-f(x)=\frac{x+h}{x+h-1}-\frac{x}{x-1}=\frac{(x+h)(x-1)-x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)}=\frac{-h}{(x+h-1)(x-1)}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h-1)(x-1)}=\frac{-1}{(x-1)^2}.$$

გაწარმოების ალტერნატიული ფორმულა: $$f'(x)=\lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}.$$

მაგალითი 2.

(a) ვიპოვოთ $f(x)=\sqrt{x}$ -ის წარმოებული, როცა $x>0$.

(b) ვიპოვოთ $y=\sqrt{x}$ მრუდის მხები წრფე $x=4$ წერტილში.

ამოხსნა.

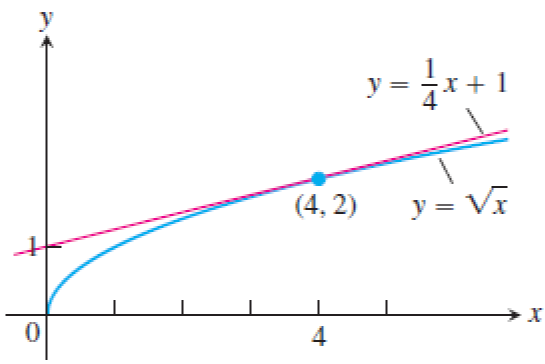
(a) $$f'(x)=\lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}=\lim_{z\to x}\frac{\sqrt{z}-\sqrt{x}}{z-x}=\lim_{z\to x}\frac{\sqrt{z}-\sqrt{x}}{(\sqrt{z}-\sqrt{x})(\sqrt{z}+\sqrt{x})}=\lim_{z\to x}\frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(b) $x=4$ წერტილში მრუდის დახრილობაა

$$f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}\ .$$

მხები არის (4, 2) წერტილზე გამავალი წრფე, რომლის დახრილობაა 1/4 (ფიგურა 3.5) :

$$y=2+\frac{1}{4}(x-4)\quad ,\qquad y=\frac{1}{4}x+1\,.$$



ფიგურა 3.5

კვადრატული ფესვის ფუნქციის წარმოებული

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,,\ x>0$$

$y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებულის აღსანიშნავად სხვადასხვა სიმბოლოებს იყენებენ.

ზოგიერთი უფრო გავრცელებული აღნიშვნა ასეთია:

$$f'(x)=y'=\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=D(f)(x)=D_x f(x)\,.$$

dy/dx სიმბოლოს ვკითხულობთ " y -ის წარმოებული x -ის მიმართ".

$x=a$ წერტილში წარმოებულის მნიშვნელობის აღსანიშნავად იყენებენ , მაგალითად, ჩანაწერს:

$$f'(a)=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}=\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}=\left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=a}\ .$$

კერძოდ, მაგალითი 2-ის შემთხვევაში

$$f'(4)=\frac{d}{dx}\sqrt{x}\bigg|_{x=4}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\bigg|_{x=4}=\frac{1}{4}.$$

დიფერენცირებადობა ინტერვალზე

$y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **დიფერენცირებადი ღია ინტერვალზე ,** თუ მას წარმოებული აქვს ინტერვალის ყველა წერტილში. ის **დიფერენცირებადია** $[a,\,b]$ **ჩაკეტილ ინტერვალზე,** თუ დიფერენცირებადია (a,b) -ზე და ბოლო წერტილებზე არსებობს ზღვრები:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ **მარჯვენა წარმოებული** a **წერტილში**

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}$$ **მარცხენა წარმოებული** b **წერტილში**

თეორემა 1. -დიფერენცირებადობიდან გამომდინარეობს უწყვეტობა

თუ ფუნქცია წარმოებადია რაიმე წერტილში, მაშინ ის ამ წერტილში უწყვეტია.

დამტკიცება. ვთქვათ $y=f(x)$ წარმოებადია $x=c$ წერტილში. თუ $h\neq 0$, მაშინ

$$f(c+h)=f(c)+\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\cdot h;$$ აქედან

$$\lim_{h\to 0}f(c+h)=\lim_{h\to 0}f(c)+\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}h=f(c)+f'(c)\cdot 0=f(c),$$

რაც ნიშნავს, რომ $f(x)$ უწყვეტია c წერტილში.

სავარჯიშოები 3.2

1-5 სავარჯოშოებში განსაზღვრების საფუძველზე გამოთვალეთ წარმოებულები. შემდეგ იპოვეთ მითითებული მნიშვნელობები.

1. $f(x)=4-x^2;\quad f'(-3), f'(0), f'(1)$
2. $F(x)=(x-1)^2+1;\quad F'(-1), F'(0), F'(2)$
3. $g(t)=\frac{1}{t^2};\quad g'(-1), g'(2), g'\left(\sqrt{3}\right)$
4. $k(z)=\frac{1-z}{2z};\quad k'(-1), k'(1), k'\left(\sqrt{2}\right)$
5. $p(\theta)=\sqrt{3\theta};\quad p'(1), p'(3), p'(2/3)$

7-12 სავარჯიშოებში იპოვეთ მითითებული წარმოებულები

7. $\dfrac{dy}{dx}$, თუ $y = 2x^2$

8. $\dfrac{dr}{ds}$, თუ $r = s^3 - 2s^2 + 3$

9. $\dfrac{ds}{dt}$, თუ $s = \dfrac{t}{2t+1}$

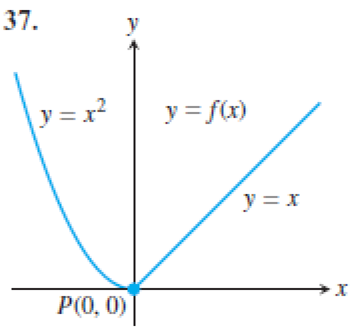
10. $\dfrac{dv}{dt}$, თუ $v = t - \dfrac{1}{t}$

11. $\dfrac{dp}{dq}$, თუ $p = \dfrac{1}{\sqrt{q+1}}$

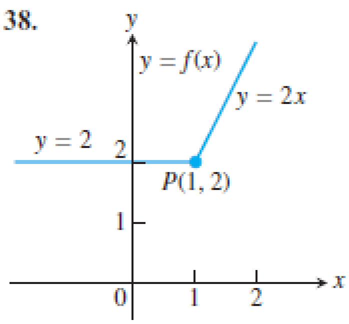
12. $\dfrac{dz}{dw}$, თუ $z = \dfrac{1}{\sqrt{3w-2}}$

37-40 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ მარჯვენა და მარცხენა წარმოებულები, როგორც ზღვრები, იმის საჩვენებლად, რომ ფუნქციები არასა დიფერენცირებადი P წერტილში.

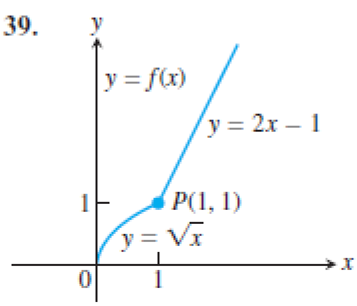
37.



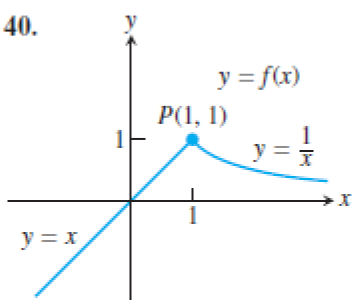
38.



39.



40.



41 და 42 სავარჯიშოებში განსაზღვრეთ, დიფერენცირებადია თუ არა უბან-უბან მოცემული ფუნქცია კოორდინატთა სათავეში.

41. $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \ge 0 \\ x^2 + 2x + 7, & x < 0 \end{cases}$

42. $g(x) = \begin{cases} x^{2/3}, & x \ge 0 \\ x^{1/3}, & x < 0 \end{cases}$

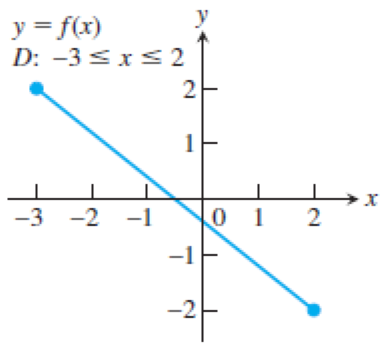
ყოველი ფიგურა 43--48 სავარჯიშოებში წარმოადგენს ჩაკეტილ D ინტერვალზე განსაზღვრულ ფუნქციას. წერტილთა რა სიმრავლეზეა ფუნქცია

a. დიფერენცირებადი?

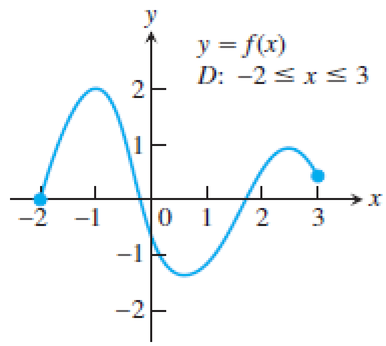
b. უწყვეტი, მაგრამ არა დიფერენცირებადი?

c. არც უწყვეტი და არც დიფერენცირებადი? პასუხი დაასაბუთეთ.

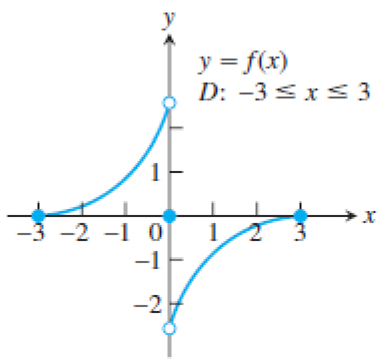
43.



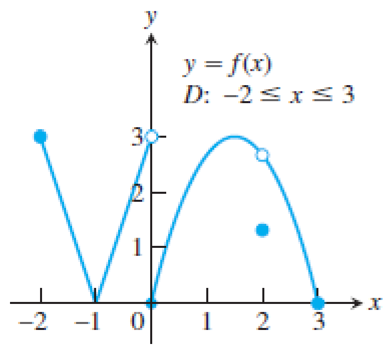
44.



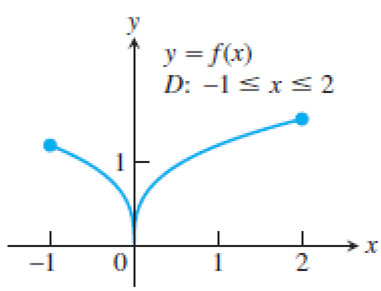
45.



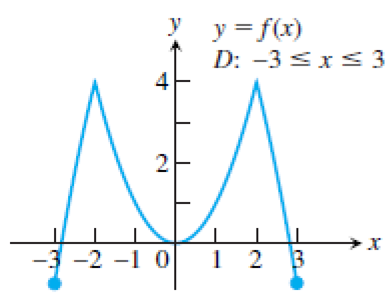
46.



47.



48.



53. შეიძლება თუ არა $y = 2x^2 - 13x + 5$ პარაბოლას ჰქონდეს მხები, რომლის დახრილობაა -1? თუ კი, მაშინ იპოვეთ მხების განტოლება და შეხების წერტილი. თუ არა, დაასაბუთეთ რატომ?

54. შეიძლება თუ არა $y = \sqrt{x}$ მრუდის მხები კვეთდეს აბსცისათა ღერძს $x = -1$-ში? პარაბოლას ჰქონდეს მხები, რომლის დახრილობაა -1? თუ კი, მაშინ იპოვეთ მხების განტოლება და შეხების წერტილი. თუ არა, დაასაბუთეთ რატომ?

3.3 გაწარმოების წესები

გაწარმოების უმარტივესი წესია, რომ მუდმივის წარმოებული ნულია.

მუდმივი ფუნქციის წარმოებული

თუ $f(x)=c$ მუდმივი ფუნქციაა, მაშინ $\dfrac{df}{dx}=\dfrac{d}{dx}(c)=0$

დამტკიცება.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=0\,.$$

ხარისხის გაწარმოება

თუ n ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, მაშინ

$$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1},$$

ყველა x-სთვის, რომლებისთვისაც x^n და x^{n-1} განსაზღვრულია

დამტკიცება. (თუ n ნატურალური რიცხვია).

ფორმულა

$$z^n-x^n=(z-x)(z^{n-1}+z^{n-2}x+\cdots+zx^{n-2}+x^{n-1})$$

იოლად მტკიცდება მარჯვენა მხარეში გამრავლების შესრულებით.

თუ $f(x)=x^n$, მაშინ გამოვიყენოთ წარმოებულის განსაზღვრის ალტერნატული ფორმულა

$$f'(x)=\lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}=\lim_{z\to x}\frac{z^n-x^n}{z-x}=$$

$$=\lim_{z\to x}(z^{n-1}+z^{n-2}x+\cdots+zx^{n-2}+x^{n-1})=nx^{n-1}\,.$$

მაგალითი 1. გავაწარმოვოთ x-ის შემდეგი ხარისხები

$$(a)\ x^3\qquad (b)\ x^{2/3}\qquad (c)\ x^{\sqrt{2}}\qquad (d)\ \frac{1}{x^4}\qquad (e)\ x^{-4/3}\qquad (f)\ \sqrt{x^{2+\pi}}$$

ამოხსნა.

(a) $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^{3-1} = 3x^2$ **(b)** $\frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \frac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3}$

(c) $\frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$ **(d)** $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^4}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-4}) = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$

(e) $\frac{d}{dx}(x^{-4/3}) = -\frac{4}{3}x^{-(4/3)-1} = -\frac{4}{3}x^{-7/3}$

(f) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^{2+\pi}}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{1+(\pi/2)}\right) = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x^{1+(\pi/2)-1} = \frac{1}{2}(2 + \pi)\sqrt{x^{\pi}}$

მუდმივი თანამამრავლის წესი

თუ $u(x)$ დიფერენცირებადი ფუნქციაა და c მუდმივი რიცხვია, მაშინ

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}.$$

კერძოდ, თუ n ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია,

$$\frac{d}{dx}(cx^n) = cnx^{n-1}.$$

დამტკიცება.

$$\frac{d}{dx}(cu) = \lim_{h\to 0}\frac{cu(x+h)-cu(x)}{h} = c\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} =$$

$$\frac{d}{dx}(cu) = \lim_{h\to 0}\frac{cu(x+h)-cu(x)}{h} = c\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} = c\frac{du}{dx}.$$

მაგალითი 2.

(a) (a) $\frac{d}{dx}(3x^2) = 3\cdot 2x = 6x$

(b) $\frac{d}{dx}(-u) = \frac{d}{dx}(-1\cdot u) = -1\cdot\frac{d}{dx}(u) = -\frac{du}{dx}.$

ჯამის გაწარმოების წესი

თუ $u(x)$ და $v(x)$ დიფერენცირებადი ფუნქციებია, მაშინ მათი $u+v$ ჯამიც დიფერენცირებადი იქნება და

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$$

მაგალითად, თუ $y = x^4 + 12x$, მაშინ y არის $u(x) = x^4$ და $v(x) = 12x$ ფუნქციათა ჯამი. გვექნება

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(12x) = 4x^3 + 12.$$

დამტკიცება.

$$\frac{d}{dx}[u(x)+v(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)+v(x+h)]-[u(x)+v(x)]}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h} - \frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right] =$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

მაგალითი 4. შეიძლება $y = x^4 - 2x^2 + 2$ მრუდს ჰქონდეს ჰორიზონტალური მხები? თუ კი, რომელი?

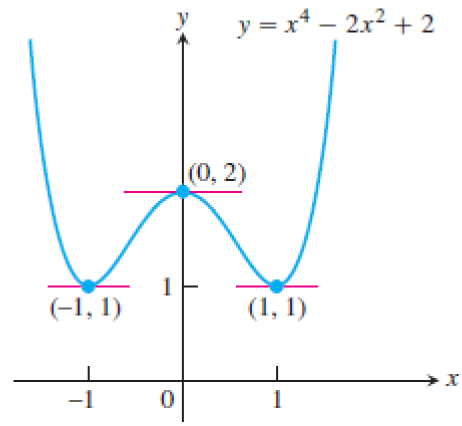
ამოხსნა. ჰორიზონტალური მხები შეიძლება გაჩნდეს იქ, სადაც დახრილობა dy/dx ნულის ტოლია.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4 - 2x^2 + 2) = 4x^3 - 4x.$$

გავუტოლოთ ნულს:

$4x^3 - 4x = 0; \quad 4x(x^2-1) = 0; \quad x = 0, 1, -1.$

მრუდზე შესაბამისი წერტილებია (0, 2), (1, 1) და (-1, 1) (იხ. ფიგურა 3.11)



ფიგურა 3.11

ექსპონენციალური ფუნქციის გაწარმოება

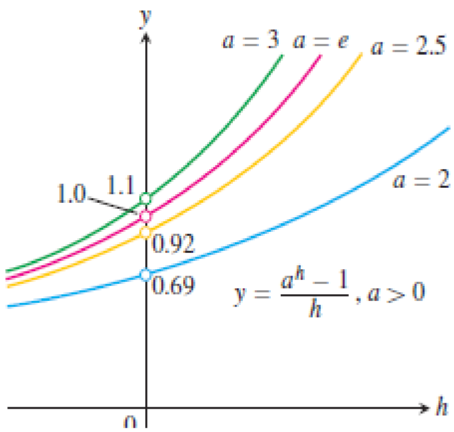
ვთქვათ $f(x) = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$. გვაქვს

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h} = \left(\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}\right)\cdot a^x.$$

ამრიგად, ვხედავთ , რომ a^x -ის წარმოებული მუდმივი L რიცხვისა და a^x -ის ნამრავლის ტოლია. შევნიშნოთ, რომ

$$f'(0) = \left(\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}\right)\cdot a^x\Big|_{x=0} = \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = L.$$

მაშასადამე ზღვარი წარმოადგენს $f(x)=a^x$ მრუდის დახრილობას, როცა გრაფიკი კვეთს y-ღერძს. მე-7 თავში დაწვლილებით შევისწავლით ლოგარითმულ და ექსპონენციალურ ფუნქციებს, ვაჩვენებთ, რომ L ზღვარი არსებობს და ის $\ln a$ -ს ტოლია. ახლა კი გამოვიკვლევთ L-ის სიდიდეს $y=(a^h-1)/h$ მრუდის დახაზვით და მისი ყოფაქცევის შესწავლით, როცა $h\to 0$.



ფიგურა 3.12

ფიგურა 3.12 წარმოგვიდგენს $y=(a^h-1)/h$-ის გრაფიკს a პარამეტრის ოთხი განსხვავებული მნიშვნელობისათვის.

$L\approx 0.69$, როცა $a=2$;

$L\approx 0.92$, როცა $a=2.5$;

$L\approx 1.1$, როცა $a=3$.

ეს გვაფიქრებინებს, რომ L რიცხვი 1-ის ტოლია რომელიღაც a-სათვის 2.5-დან 3-მდე. ეს რიცხვი მოიცემა ტოლობით $a=e\approx 2.718281828$.

ამ თვისებაზე დაყრდნობით მივიღეთ ნატურალური ექსპონენციალური ფუნქცია $f(x)=e^x$ და ვხედავთ, რომ

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1\ ; \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{d}{dx}(e^x)=e^x}$$

ნამრავლის გაწარმოების წესი

თუ u და v დიფერენცირებადია x-ის მიმართ, მაშინ uv ნამრავლიც დიფერენცირებადია და

$$\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

დამტკიცება.

$$\frac{d}{dx}(uv)=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[u(x+h)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}+v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right]=$$

$$=\lim_{h\to 0}u(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}+v(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}.$$

როცა $h\to 0$, მაშინ $u(x+h)\to 0$, რადგან დიფერენცირებადობიდან გამომდინარეობს უწყვეტობა. ორი წილადი კი მიისწრაფვის dv/dx, du/dx წარმოებულებისკენ x წერტილში. რ.დ.გ.

მაგალითი 7. ვიპოვოთ $y=(x^2+1)(x^3+3)$ ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა. ვთქვათ $u=x^2+1$ და $v=x^3+3$. მაშინ ნამრავლის გაწარმოების წესით

$$\frac{d}{dx}\left[(x^2+1)(x^3+3)\right]=(x^2+1)(3x^2)+(x^3+3)(2x)=5x^4+3x^2+6x.$$

შენიშვნა. იგივე შედეგს მივიღებდით, თუ ჯერ გადავამრავლებდით თანამამრავლებს და მერე გავაწარმოებდით.

შეფარდების წარმოებული

თუ u და v წარმოებადია x-წერტილში და $v(x)\neq 0$, მაშინ u/v განაყოფიც წარმოებადია ამავე წერტილში და

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vu'-uv'}{v^2}.$$

დამტკიცება.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x+h)}{v(x+h)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{v(x)u(x+h)-u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{v(x)\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}-u(x)\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}.$$

მრიცხველში და მნიშვნელში ზღვარზე გადასვლით მიიღება რ.დ.გ.

მაგალითი 8. ვიპოვოთ $(a)\ y=\dfrac{t^2-1}{t^3+1}$, $(b)\ y=e^{-x}$ ფუნქციების წარმოებულები

ამოხსნა.

(a) $$\frac{dy}{dt}=\frac{(t^2-1)'(t^3+1)-(t^2-1)(t^3+1)'}{(t^3+1)^2}=\frac{2t(t^3+1)-(t^2-1)3t^2}{(t^3+1)^2}=\frac{-t^4+3t^2+2t}{(t^3+1)^2}.$$

(b) $$\frac{d}{dx}(e^{-x})=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{e^x}\right)=\frac{e^x\cdot 0-1\cdot e^x}{(e^x)^2}=-e^{-x}.$$

მაგალითი 9. ვიპოვოთ $y=\dfrac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}$ ფუნქციის წარმოებული.

ცხადია, შეგვიძლია გამოვიყენოთ შეფარდების გაწარმოების წესი. მაგრამ აქ უმჯობესია ჯერ გარდავქმნათ გამოსახულება და მერე ხარისხის გაწარმოების წესი გამოვიყენოთ.

$$y=\frac{x^3-3x^2+2x}{x^4}=x^{-1}-3x^{-2}+2x^{-3};$$

$$\frac{dy}{dx}=-x^{-2}-3(-2)x^{-3}+2(-3)x^{-4}=-\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^3}-\frac{6}{x^4}.$$

მეორე და მაღალი რიგის წარმოებულები

თუ $y=f(x)$ დიფერენცირებადი ფუნქციაა, მაშინ მისი წარმოებული $f'(x)$ კვლავ ფუნქციას წარმოადგენს. თუ $f'(x)$ თვითონაც დიფერენცირებადია, შეგვიძლია გავაწარმოოთ ის და მიღებული ახალი ფუნქცია აღვნიშნოთ f''-ით. მაშასადამე, $f''=(f')'$.

f'' ფუნქციას ეწოდება f-ის **მეორე რიგის წარმოებული,** რადგან ის მიღებულია პირველი წარმოებულის კიდევ ერთხელ გაწარმოებით. ამას სხვადასხვაგვარად წერენ:

$$f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dy'}{dx}=y''=D^2(f)(x)=D_x^2f(x).$$

თუ $y=x^6$, მაშინ $y'=6x^5$ და $y''=(6x^5)'=30x^4$.

თუ y'' დიფერენცირებადია, მაშინ მის წარმოებულს ეწოდება y-ის **მესამე რიგის წარმოებული** x-ის მიმართ:

$$y'''=\frac{dy''}{dx}=\frac{d^3y}{dx^3}.$$

ანალოგიურად განისაზღვრება y-ის n**-ური რიგის წარმოებული** x-ის მიმართ :

$$y^{(n)}=\frac{d}{dx}y^{(n-1)}=\frac{d^ny}{dx^n}=D^ny, \qquad (n \text{ ნატურალური რიცხვია})$$

მაგალითი 10. $y=x^3-3x^2+2$ ფუნქციის წარმოებულები მეოთხე რიგამდე:

$$y'=3x^2-6x;$$

$$y''=6x-6; \qquad y'''=6; \qquad y^{(4)}=0.$$

ამ ფუნქციას აქვს წარმოებულები ნებისმიერ რიგამდე. დაწყებული მეოთხე რიგიდან ყველა წარმოებული ნულის ტოლია.

სავარჯიშოები 3.3

1--12 სავარჯიშოებში იპოვეთ პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები

1. $y = -x^2 + 3$
2. $y = x^2 + x + 8$
3. $s = 5t^3 - 3t^5$
4. $w = 3z^7 - 7z^3 + 21z^2$
5. $y = \dfrac{4x^3}{3} - x + 2e^x$
6. $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{4}$
7. $w = 3z^{-2} - \dfrac{1}{z}$
8. $s = -2t^{-1} + \dfrac{4}{t^2}$
9. $y = 6x^2 - 10x - 5x^{-2}$
10. $y = 4 - 2x - x^{-3}$
11. $r = \dfrac{1}{3s^2} - \dfrac{5}{2s}$
12. $r = \dfrac{12}{\theta} - \dfrac{4}{\theta^3} + \dfrac{1}{\theta^4}$

13--16 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ პირველი რიგის წარმოებული: **(ა)** ნამრავლის გაწარმოების წესით; (ბ) ჯერ გადაამრავლეთ თანამამრავლები და გაამარტივეთ.

13. $y = (3 - x^2)(x^3 - x + 1)$
14. $y = (2x + 3)(5x^2 - 4x)$
15. $y = (x^2 + 1)\left(x + 5 + \dfrac{1}{x}\right)$
16. $y = (1 + x^2)(x^{3/4} - x^{-3})$

17--40 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ პირველი რიგის წარმოებულები.

17. $y = \dfrac{2x + 5}{3x - 2}$
18. $z = \dfrac{4 - 3x}{3x^2 + x}$
19. $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 0.5}$
20. $f(t) = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + t - 2}$
21. $v = (1 - t)(1 + t^2)^{-1}$
22. $w = (2x - 7)^{-1}(x + 5)$
23. $f(s) = \dfrac{\sqrt{s} - 1}{\sqrt{s} + 1}$
24. $u = \dfrac{5x + 1}{2\sqrt{x}}$
25. $v = \dfrac{1 + x - 4\sqrt{x}}{x}$
26. $r = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\right)$
27. $y = \dfrac{1}{(x^2 - 1)(x^2 + x + 1)}$
28. $y = \dfrac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$
29. $y = 2e^{-x} + e^{3x}$
30. $y = \dfrac{x^2 + 3e^x}{2e^x - x}$

31. $y = x^3 e^x$

32. $w = re^{-r}$

33. $y = x^{9/4} + e^{-2x}$

34. $y = x^{-3/5} + \pi^{3/2}$

35. $s = 2t^{3/2} + 3e^2$

36. $w = \dfrac{1}{z^{1.4}} + \dfrac{\pi}{\sqrt{z}}$

37. $y = \sqrt[7]{x^2} - x^e$

38. $y = \sqrt[3]{x^{9.6}} + 2e^{1.3}$

39. $r = \dfrac{e^s}{s}$

40. $r = e^\theta\left(\dfrac{1}{\theta^2} + \theta^{-\pi/2}\right)$

41--44 სავარჯიშოებში იპოვეთ ყველა რიგის წარმოებული

41. $y = \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{3}{2}x^2 - x$

42. $y = \dfrac{x^5}{120}$

43. $y = (x - 1)(x^2 + 3x - 5)$

44. $y = (4x^3 + 3x)(2 - x)$

45--50 სავარჯიშოებში იპოვეთ პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები.

45. $y = \dfrac{x^3 + 7}{x}$

46. $s = \dfrac{t^2 + 5t - 1}{t^2}$

47. $r = \dfrac{(\theta - 1)(\theta^2 + \theta + 1)}{\theta^3}$

48. $u = \dfrac{(x^2 + x)(x^2 - x + 1)}{x^4}$

49. $w = \left(\dfrac{1 + 3z}{3z}\right)(3 - z)$

50. $p = \dfrac{q^2 + 3}{(q - 1)^3 + (q + 1)^3}$

53. ვთქვათ u და v არიან x ცვლადის ფუნქციები და

$$u(0) = 5, \quad u'(0) = -3, \quad v(0) = -1, \quad v'(0) = 2 .$$

იპოვეთ შემდეგი წარმოებულების მნიშვნელობები $x = 0$ წერტილში:

$$a. \ \frac{d}{dx}(uv); \quad b. \ \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right); \quad c. \ \frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right); \quad d. \ \frac{d}{dx}(7v - 2u)$$

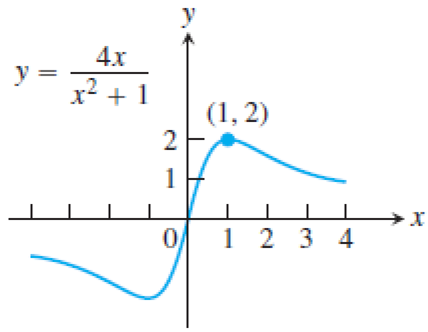
54. ვთქვათ u და v არიან x ცვლადის ფუნქციები და

$u(1) = 2, \quad u'(1) = 0, \quad v(1) = 5, \quad v'(1) = -1$.

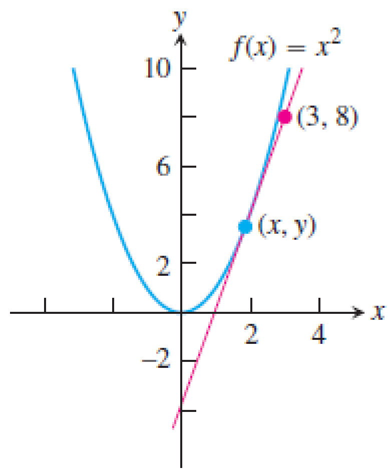
იპოვეთ შემდეგი წარმოებულების მნიშვნელობები $x = 1$ წერტილში:

$$a. \ \frac{d}{dx}(uv); \quad b. \ \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right); \quad c. \ \frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right); \quad d. \ \frac{d}{dx}(7v - 2u)$$

57. იპოვეთ ***ნიუტონის სერპანტინის*** (გამოსახულია ნახაზზე) მხებები კოორდინატთა სათავეში და (1,2) წერტილში.



64. $f(x)=x^2$ ფუნქციის გრაფიკზე იპოვეთ ყველა (x,y) წერტილი, რომელშიც გავლებუ-ლი მხები (3, 8) წერტილზე გაივლის.



59. $y=ax^2+bx+c$ მრუდი გადის (1, 2) წერტილზე და ეხება $y=x$ წრფეს სათავეში. იპოვეთ a,b,c

69. იპოვეთ a პარამეტრის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც

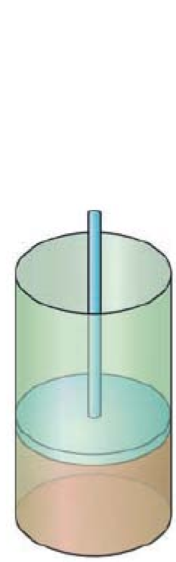
$$g(x)=\begin{cases} ax, & x<0 \\ x^2-3x, & x\ge 0 \end{cases}$$

ფუნქცია წარმოებადი გახდება.

77. თუ გაზი ცილინდრში მუდმივ T ტემპერატურაზეა შენარჩუნებული, მაშინ P წნევა V მოცულობასთან დაკავშირებულია ფორმულით

$$P=\frac{nRT}{V-nb}-\frac{an^2}{V^2},$$

სადაც a,b,n,R მუდმივებია. იპოვეთ dP/dV.



3.4 წარმოებული როგორც ცვლილების სიჩქარე

თუ ჩვენ $(f(x+h)-f(x))/h$ გაყოფილ სხვაობას წარმოვიდგენთ, როგორც f-ის ცვლილების სიჩქარეს x-დან $x+h$-მდე ინტერვალზე, მაშინ ამ გამოსახულების ზღვარი როცა $h \to 0$ შეგვიძლია ჩავთვალოთ სიჩქარედ, რომლითაც f იცვლება x წერტილში.

განსაზღვრება . x-ის მიმართ f **ფუნქციის ცვლილების მყისი სიჩქარე** x_0 წერტილში ეწოდება

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

წარმოებულს, თუკი ის არსებობს.

მაშასადამე, მყისი სიჩქარე წარმოადგენს საშუალო სიჩქარის ზღვარს.

მიღებულია გამოვიყენოთ სიტყვა "*მყისი*" მაშინაც კი, როცა x დროს არ წარმოადგენს.

ხშირად ამ სიტყვას გამოვტოვებთ კიდეც. როცა ვიტყვით *ცვლილების სიჩქარეს,* ვგულისხმობთ *ცვლილების მყის სიჩქარეს.*

მაგალითი 1. წრის ფართობი A მის დიამეტრთან დაკავშირებულია ფორმულით

$$A=\frac{\pi}{4}D^2.$$

როგორია დიამეტრის მიმართ ფართობის ცვლილების სიჩქარე, როცა დიამეტრია 10 მ?

ამოხსნა. დიამეტრის მიმართ ფართობის ცვლილების სიჩქარე არის

$$\frac{dA}{dD}=\frac{\pi}{4}\cdot 2D=\frac{\pi D}{2}.$$

როცა $D=10$ მ, სიჩქარე იქნება $(\pi/2)\cdot 10=5\pi\approx 15.71$ მ^2/მ .

გადაადგილება წრფის გასწვრივ

ვთქვათ ობიექტი გადაადგილდება საკოორდინატო წრფის (s-ღერძის) გასწვრივ და ჩვენ ვიცით მისი პოზიცია (მდებარეობა) t მომენტში:

$$s=f(t).$$

ობიექტის გადაადგილების **ნაზრდი** t-დან $t+\Delta t$-მდე დროის ინტერვალში არის

$$\Delta s=f(t+\Delta t)-f(t),$$

ხოლო **საშუალო სიჩქარე** დროის ამ შუალედში არის

$$v_{\text{საშ.}} = \frac{\text{ნაზრდი}}{\text{დახარჯ. დრო}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

ზუსტად t მომენტში სხეულის მყისი სიჩქარის გასაგებად უნდა გამოვთვალოთ საშულო სიჩქარის ზღვარი, როცა Δt ნაზრდი მიისწრაფვის ნულისკენ. ეს ზღვარი f -ის წარმოებულია t ცვლადით.

განსაზღვრება. **სიჩქარე (მყისი სიჩქარე)** წარმოადგენს პოზიციის წარმოებულს t ცვლადით

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

(სიჩქარე -velocity (ინგლ))

სიჩქარე ვექტორული სიდიდეა. თუ ობიექტი გადაადგილდება წინ (s იზრდება), სიჩქარე დადებითია. თუ ობიექტი გადაადგილდება უკან (s მცირდება), სიჩქარე უარყოფითია.

თუ ჩვენ ავტომობილით მივდივართ მეგობრის სახლში და სპიდომეტრი უჩვენებს 70 კმ/სთ-ს, ისეთივე სისწრაფით სახლში დაბრუნებისას (მანძილი სახლამდე მცირდება) სპიდომეტრი კვლავ 70 კმ/სთ-ს გვიჩვენებს, და არა -70 კმ/სთ-ს. სპიდომეტრი ყოველთვის გვიჩვენებს მოძრაობის სისწრაფეს, რომელიც სიჩქარის სიდიდის ტოლია. სიჩქარის სიდიდე სკალარული სიდიდეა.

განსაზღვრება. **სიჩქარის სიდიდე** ეწოდება სიჩქარის აბსოლუტურ მნიშვნელობას

$$\text{სიჩქარის სიდიდე} = |v(t)| = \left|\frac{ds}{dt}\right|.$$

(speed (ინგლ.)-- სიჩქარის სიდიდე).

განსაზღვრება. **აჩქარება** ეწოდება სიჩქარის წარმოებულს დროის მიმართ. თუ სხეულის პოზიცია t მომენტში არის $s = f(t)$, მაშინ სხეულის აჩქარება t მომენტში არის

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

სავარჯიშოები 3.4

1--6 სავარჯიშოებში საკოორდინატო წრფის გასწვრივ მოძრავი სხეულის პოზიციის $s = f(t)$ ფუნქციაა მოცემული.

(ა) იპოვეთ სხეულის გადაადგილების ნაზრი და საშუალო სიჩქარე მოცემულ დროის შუალედში.

(ბ) იპოვეთ სხეულის სიჩქარის სიდიდე და აჩქარება ინტერვალის ბოლო წერტილებზე.

(გ) რა მომენტში იცვლება სხეულის მოძრაობის მიმართულება?

1. $s = t^2 - 3t + 2, \quad 0 \le t \le 2$
2. $s = 6t - t^2, \quad 0 \le t \le 6$
3. $s = -t^3 + 3t^2 - 3t, \quad 0 \le t \le 3$
4. $s = (t^4/4) - t^3 + t^2, \quad 0 \le t \le 3$
5. $s = \dfrac{25}{t^2} - \dfrac{5}{t}, \quad 1 \le t \le 5$
6. $s = \dfrac{25}{t+5}, \quad -4 \le t \le 0$

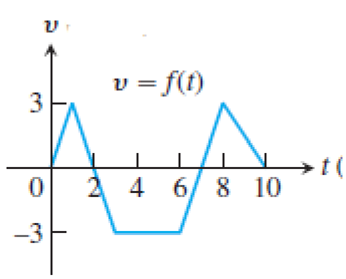
7. s-ღერძის გასწვრივ მოძრავი სხეულის პოზიცია t მომენტში არის $s = t^3 - 6t^2 + 9t$.

(ა) იპოვეთ სხეულის აჩქარება იმ მომენტში, როცა სიჩქარე ნულია.

(ბ) იპოვეთ სხეულის სიჩქარის სიდიდე იმ მომენტში, როცა აჩქარება ნულია.

(გ) იპოვეთ სხეულის მიერ გავლილი საერთო მანძილი $t = 0$-დან $t = 2$-მდე.

15. თანმხლებ ფიგურაზე ნაჩვენებია საკოორდინატო წრფის გასწვრივ მოძრავი სხეულის $v = ds/dt$ სიჩქარის გრაფიკი.



(ა) როდის იცვლის სხეული მოძრაობის მიმართულებას?

(ბ) დაახლოებით როდის მოძრაობს სხეული მუდმივი სიჩქარის სიდიდით?

(გ) დახაზეთ სხეულის სიჩქარის სიდიდის გრაფიკი $0 \le t \le 10$ შუალედზე.

(დ) დახაზეთ აჩქარების გრაფიკი, სადაც განსაზღვრულია.

3.5 ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა წარმოებულები

სინუს ფუნქციის წარმოებული არის კოსინუს ფუნქცია

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

დამტკიცება. გავიხსენოთ ფორმულა

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h\,.$$

თუ $f(x) = \sin x$, მაშინ

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\sin x\cdot\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \lim_{h\to 0}\left(\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}\right) = \sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} =$$

$= \sin x\cdot 0 + \cos x\cdot 1 = \cos x\,.$ რ.დ.გ.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ წარმოებულები

(a) $y = x^2 - \sin x$: $y' = 2x - (\sin x)' = 2x - \cos x$

(b) $y = e^x \sin x$: $y' = e^x\cdot(\sin x)' + (e^x)'\cdot\sin x = e^x\cos x + e^x \sin x$

(c) $y = \dfrac{\sin x}{x}$: $y' = \dfrac{x\cdot(\sin x)' - \sin x\cdot(x)'}{x^2} = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

კოსინუს ფუნქციის წარმოებული არის მინუს სინუს ფუნქცია

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

დამტკიცება. გავიხსენოთ ფორმულა

$$\cos(x+h) = \cos x\cos h - \sin x \sin h\,.$$

თუ $f(x)=\cos x$, მაშინ

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h-1)-\sin x\sin h}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\cos x\cdot\frac{\cos h-1}{h}\right)-\lim_{h\to 0}\left(\sin x\cdot\frac{\sin h}{h}\right)=\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=$$

$$=\cos x\cdot 0-\sin x\cdot 1=-\sin x\,.$$ რ.დ.გ.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ წარმოებულები

(a) $y=5e^x+\cos x$: $y'=(5e^x)'+(\cos x)'=5e^x-\sin x$

(b) $y=\sin x\cos x$: $y'=\sin x(\cos x)'+\cos x(\sin x)'=-\sin^2 x+\cos^2 x$

(c) $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$: $y'=\dfrac{(1-\sin x)\cdot(\cos x)'-\cos x\cdot(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2}=$

$$=\frac{(1-\sin x)\cdot(-\sin x)-\cos x\cdot(0-\cos x)}{(1-\sin x)^2}=\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}=\frac{1}{1-\sin x}$$

რადგან $\sin x$ და $\cos x$ დიფერენცირებადი ფუნქციებია, ამიტომ დიფერენცირებადია მათთან დაკავშირებული ფუნქციები

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\quad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x},\quad \sec x=\frac{1}{\cos x},\quad \csc x=\frac{1}{\sin x}$$

არგუმენტის იმ მნიშვნელობებისთვის, რომლებშიც განსაზღვრული არიან.

სხვა ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა წარმოებულები

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x)=-\csc x\cot x$$

დავამტკიცოთ ამ ფორმულებიდან ერთ-ერთი.

მაგალითი 5. ვიპოვოთ $d(\tan x)/dx$.

ამოხსნა.

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\frac{\cos x(\sin x)'-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x \qquad \text{რ.დ.გ.}$$

ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა დიფერენცირებადობა, განსაზღვრის არეში მათი უწყვეტობის კიდევ ერთი დამტკიცებაა. ამრიგად, ჩვენ შეიძლება ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა კომბინაციების შემცველი ზღვრების გამოთვლისას პირდაპირი ჩასმით ვისარგებლოთ.

მაგალითი 7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+\sec x}}{\cos(\pi-\tan x)}=\frac{\sqrt{2+\sec 0}}{\cos(\pi-\tan 0)}=\frac{\sqrt{2+1}}{\cos(\pi-0)}=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}\,.$$

სავარჯიშოები 3.5

1--18 სავარჯიშოებში იპოვეთ dy/dx .

1. $y=-10x+3\cos x$ 2. $y=\frac{3}{x}+5\sin x$ 3. $y=x^2\cos x$

4. $y=\sqrt{x}\sec x+3$ 5. $y=\csc x-4\sqrt{x}+7$ 6. $y=x^2\cot x-\frac{1}{x^2}$

7. $y=\sin x\tan x$ 8. $y=\csc x\cot x$ 9. $y=(\sec x+\tan x)(\sec x-\tan x)$

10. $y=(\sin x+\cos x)\sec x$ 11. $y=\frac{\cot x}{1+\cot x}$ 12. $y=\frac{\cos x}{1+\sin x}$

11. $y=\frac{\cot x}{1+\cot x}$ **12.** $y=\frac{\cos x}{1+\sin x}$

13. $y=\frac{4}{\cos x}+\frac{1}{\tan x}$ **14.** $y=\frac{\cos x}{x}+\frac{x}{\cos x}$

15. $y=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x$

16. $y=x^2\cos x-2x\sin x-2\cos x$

17. $f(x)=x^3\sin x\cos x$ **18.** $g(x)=(2-x)\tan^2 x$

3.6 რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი

როგორ გავაწარმოოთ $F(x)=\sin(x^2-4)$? ეს ფუნქცია ორი ფუნქციის კომპოზიციას წარმოადგენს: $y=f(u)=\sin u$ და $u=g(x)=x^2-4$, ე.ი. $F=f\circ g=f(g(x))$.

თეორემა 2. **რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი.**

თუ $u=g(x)$ ფუნქცია წარმოებადია რაიმე x წერტილში, ხოლო u-ს სათანადო მნიშვნელობისათვის წარმოებადია $y=f(u)$ ფუნქცია, მაშინ $y=F(x)=f[g(x)]$ რთული ფუნქცია წარმოებადია x წერტილში და მართებულია ტოლობა

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

ინტუიციური "დამტკიცება". ვთქვათ x არგუმენტის ნაზრდია Δx, ხოლო u ფუნქციის შესაბამისი ნაზრდია

$$\Delta u=g(x+\Delta x)-g(x).$$

მაშინ y ფუნქციის შესაბამისი ნაზრდი იქნება

$$\Delta y=f(u+\Delta u)-f(u).$$

თუ $\Delta u\neq 0$, ჩავწეროთ $\Delta y/\Delta x$ ნამრავლის სახით

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} \tag{1}$$

და გადავიდეთ ზღვარზე $\Delta x\to 0$:

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

ასეთ "დამტკიცებაში" სუსტი ადგილია (1) ტოლობა, რომელიც სამართლიანი ვერ იქნება, როცა $\Delta u=0$.

მაგალითი 4. გავაწარმოოთ $y=e^{\cos x}$.

ამოხსნა. აქ $u=\cos x$. ამიტომ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(e^u)=\frac{d}{du}(e^u)\cdot\frac{du}{dx}=e^u(-\sin x)=-e^{\cos x}\sin x.$$

მაგალითი 6. გავაწარმოოთ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესით.

$(a)\quad y=(5x^3-x^4)^7$;

აქ $u=5x^3-x^4$. ამიტომ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(u^7)=\frac{d}{du}(u^7)\cdot\frac{du}{dx}=7u^6\frac{d}{dx}(5x^3-x^4)=7(5x^3-x^4)^6(5\cdot 3x^2-4x^3)$$

$(b)\quad y=\dfrac{1}{3x-2}$;

აღვნიშნოთ $u=3x-2$. გვექნება

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(u^{-1})=\frac{d}{du}(u^{-1})\cdot\frac{du}{dx}=-1u^{-2}\frac{d}{dx}(3x-2)=-(3x-2)^{-2}3=-\frac{3}{(3x-2)^2}.$$

$(c)\quad y=\sin^5 x;$

აღვნიშნოთ $u=\sin x$. გვექნება

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(u^5)=\frac{d}{du}(u^5)\cdot\frac{du}{dx}=5u^4\frac{d}{dx}\sin x=5\sin^4 x\cos x\ .$$

$(d)\quad y=e^{\sqrt{3x+1}};$

$$\frac{d}{dx}(e^{\sqrt{3x+1}})=e^{\sqrt{3x+1}}\cdot\frac{d}{dx}(\sqrt{3x+1})=e^{\sqrt{3x+1}}\cdot\frac{1}{2}(3x+1)^{-1/2}\cdot 3=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}e^{\sqrt{3x+1}}\ .$$

მაგალითი 9. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გაწარმოებისას ვგულისხმობთ, რომ არგუმენტი რადიანებშია მოცემული. თუ კუთხე გრადუსებში იქნება მოცემული, შეიძლება ასე მოვიქცეთ. რადგან $180°=\pi$ რადიანი, $x°=\pi x/180$ რად., სადაც $x°$ კუთხის გრადუსული ზომაა. რთული ფუნქციის გაწარმოების წესით

$$\frac{d}{dx}\sin(x°)=\frac{d}{dx}\sin\left(\frac{\pi x}{180}\right)=\frac{\pi}{180}\cos\left(\frac{\pi x}{180}\right)=\frac{\pi}{180}\cos(x°).$$

სავარჯიშოები 3.6

9--18 სავარჯიშოებში ჩაწერეთ ფუნქცია $y = f(u)$, $u = g(x)$ ფორმით. შემდეგ იპოვეთ dy/dx, როგორც x-ის ფუნქცია.

9. $y = (2x+1)^5$

10. $y = (4-3x)^9$

11. $y = \left(1 - \frac{x}{7}\right)^{-7}$

12. $y = \left(\frac{x}{2} - 1\right)^{-10}$

13. $y = \left(\frac{x^2}{8} + x - \frac{1}{x}\right)^4$

14. $y = \sqrt{3x^2 - 4x + 6}$

15. $y = \sec(\tan x)$

16. $y = \cot\left(\pi - \frac{1}{x}\right)$

17. $y = \sin^3 x$

18. $y = 5\cos^{-4} x$

23--40 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ წარმოებულები

23. $p = \sqrt{3-t}$

24. $q = \sqrt[3]{2r - r^2}$

25. $s = \frac{4}{3\pi}\sin 3t + \frac{4}{5\pi}\cos 5t$

26. $s = \sin\left(\frac{3\pi t}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right)$

27. $r = (\csc\theta + \cot\theta)^{-1}$

28. $r = 6(\sec\theta - \tan\theta)^{3/2}$

29. $y = x^2\sin^4 x + x\cos^{-2} x$

30. $y = \frac{1}{x}\sin^{-5} x - \frac{x}{3}\cos^3 x$

31. $y = \frac{1}{21}(3x-2)^7 + \left(4 - \frac{1}{2x^2}\right)^{-1}$

32. $y = (5-2x)^{-3} + \frac{1}{8}\left(\frac{2}{x} + 1\right)^4$

33. $y = (4x+3)^4(x+1)^{-3}$

34. $y = (2x-5)^{-1}(x^2-5x)^6$

35. $y = xe^{-x} + e^{3x}$

36. $y = (1+2x)e^{-2x}$

37. $y = (x^2 - 2x + 2)e^{5x/2}$

38. $y = (9x^2 - 6x + 2)e^{x^3}$

39. $h(x) = x\tan\left(2\sqrt{x}\right) + 7$

40. $k(x) = x^2\sec\left(\frac{1}{x}\right)$

71-- 78 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ y''.

71. $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3$

72. $y = \left(1 - \sqrt{x}\right)^{-1}$

73. $y = \frac{1}{9}\cot(3x-1)$

74. $y = 9\tan\left(\frac{x}{3}\right)$

75. $y = x(2x+1)^4$

76. $y = x^2(x^3-1)^5$

77. $y = e^{x^2} + 5x$

78. $y = \sin(x^2e^x)$

79-- 84 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ $(f \circ g)'$ -ის მნიშვნელობა მითითებული არგუმენტი-სთვის

79. $f(u) = u^5 + 1, \quad u = g(x) = \sqrt{x}, \quad x = 1$

80. $f(u) = 1 - \frac{1}{u}, \quad u = g(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x = -1$

81. $f(u) = \cot\frac{\pi u}{10}, \quad u = g(x) = 5\sqrt{x}, \quad x = 1$

82. $f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 u}, \quad u = g(x) = \pi x, \quad x = 1/4$

83. $f(u) = \frac{2u}{u^2+1}, \quad u = g(x) = 10x^2 + x + 1, \quad x = 0$

84. $f(u) = \left(\frac{u-1}{u+1}\right)^2, \quad u = g(x) = \frac{1}{x^2} - 1, \quad x = -1$

3.7 არაცხადი ფუნქციის გაწარმოება

აქამდე შევისწავლიდით $y = f(x)$ სახის ფუნქციებს, რომლებიც ცხადად გამოსახავენ y -ს x ცვლადის ტერმინებში. ჩვენ შევისწავლეთ ამგვარად განსაზღვრული ფუნქციების გაწარმოების წესები. სხვაგვარი სიტუაცია წარმოიქმნება, როცა საქმე გვაქვს, მაგალითად,

$x^3 + y^3 - 9xy = 0, \quad y^2 - x = 0$ ან $x^2 + y^2 - 25 = 0$ სახის განტოლებებთან. მათში y არაცხადადაა დაკავშირებული x ცვლადთან. როცა არ ხერხდება $F(x, y) = 0$ სახის განტოლების მიყვანა $y = f(x)$ სახეზე, ჩვეულებრივი წესებით ვერ შევძლებთ წარმოებულის მოძებნას და დაგვჭირდება **არაცხადი გაწარმოება.**

მაგალითი 1. ვიპოვოთ dy/dx, თუ $y^2 = x$.

ამოხსნა. $y^2 = x$ განტოლება განსაზღვრავს ორ ფუნქციას: $y_1 = \sqrt{x}$ და $y_2 = -\sqrt{x}$, $x > 0$, რომელთა გაწარმოება გვაძლევს პასუხს

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{და} \quad \frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

ვთქვათ ახლა ჩვენ მხოლოდ ის ვიცით , რომ $y^2 = x$ განტოლებით განისაზღვრება x არგუმენტის ერთი ან რამდენიმე ფუნქცია, როცა $x > 0$, მაგრამ არ ვიცით ზუსტად რამდენი. შევძლებთ კვლავ dy/dx -ის პოვნას?

პასუხი დადებითია. dy/dx -ის მოსაძებნად ჩვენ ჯერ გავაწარმოებთ განტოლების ორივე მხარეს x ცვლადით, განვიხილავთ რა y -ს როგორც x -ით წარმოებად ფუნქციას:

$$\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dx}(x) \quad\Rightarrow\quad 2y\frac{dy}{dx}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}.$$

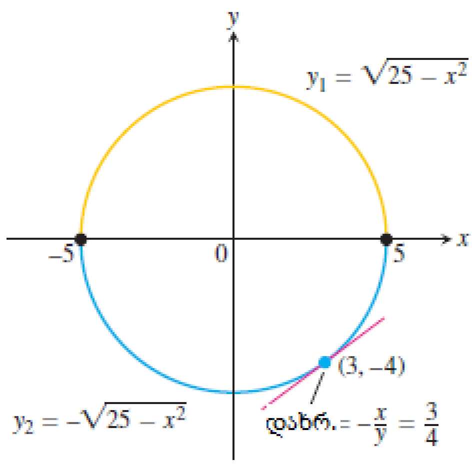
ეს ერთი ფორმულა გვაძლევს წარმოებულებს, რომლებიც გამოვთვალეთ $y_1=\sqrt{x}$ და $y_2=-\sqrt{x}$ ორივე ცხადი ამონახსნისათვის:

$$\frac{dy_1}{dx}=\frac{1}{2y_1}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{და} \quad \frac{dy_2}{dx}=\frac{1}{2y_2}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $x^2+y^2=25$ წრეწირის დახრილობა (3, -4) წერტილში.

ამოხსნა. წრეწირი არაა ცალკე ერთი ფუნქციის გრაფიკი. უფრო ზუსტად რომ ვთქვათ, წრეწირი წარმოადგენს $y_1=\sqrt{25-x^2}$ და $y_2=-\sqrt{25-x^2}$ ორი დიფერენცირებადი ფუნქციის გრაფიკების გაერთიანებას (ფიგურა 3.30). წერტილი (3, -4) ძევს y_2-ის გრაფიკზე, ასე რომ ჩვენ შეგვიძლია ფიპოვოთ დახრილობა წარმოებულის უშუალოდ გამოთვლით:

$$\left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=3}=-\left.\frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}\right|_{x=3}=-\frac{-6}{2\sqrt{25-9}}=\frac{3}{4}.$$



ფიგურა 3.30

ჩვენ შეგვიძლია ამოვხსნათ ეს ამოცანა უფრო იოლადაც, თუ წრეწირის განტოლებას გავაწარმოებთ არაცხადად x არგუმენტით:

$$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dx}(25) \quad ; \quad \Rightarrow$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0; \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

(3, -4) წერტილში დახრილობა არის $\left.-\frac{x}{y}\right|_{(3,-4)}=\frac{3}{4}.$

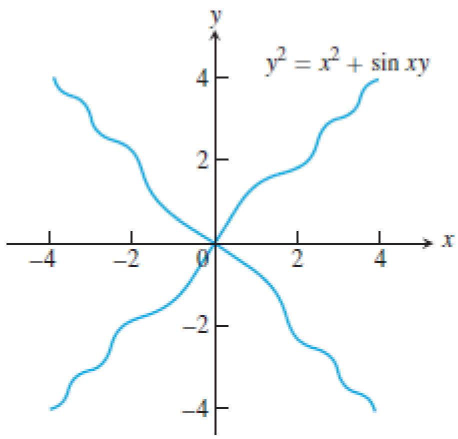
არაცხადი გაწარმოება

1.გავაწარმოოთ განტოლების ორივე მხარე x -ის მიმართ, მივიჩნევთ რა y-ს როგორც x არგუმენტის დიფერენცირებად ფუნქციად .

2. ამოვხსნათ მიღებული განტოლებიდან dy/dx .

მაგალითი 3. ვიპოვოთ dy/dx, თუ $y^2 = x^2 + \sin xy$ (ფიგურა 3.31).

ამოხსნა. გავაწარმოოთ განტოლება არაცხადად:



ფიგურა 3.31

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(\sin xy);$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy)\frac{d}{dx}(xy);$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy)\left(y + x\frac{dy}{dx}\right);$$

$$(2y - x\cos xy)\frac{dy}{dx} = 2x + y\cos xy;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y\cos xy}{2y - x\cos xy}.$$

სავარჯიშო 3.7

1--16 სავარჯიშოებში არაცხადი გაწარმოების წესით იპოვეთ dy/dx.

1. $x^2y + xy^2 = 6$ **2.** $x^3 + y^3 = 18xy$
3. $2xy + y^2 = x + y$ **4.** $x^3 - xy + y^3 = 1$
5. $x^2(x - y)^2 = x^2 - y^2$ **6.** $(3xy + 7)^2 = 6y$
7. $y^2 = \dfrac{x-1}{x+1}$ **8.** $x^3 = \dfrac{2x - y}{x + 3y}$
9. $x = \tan y$ **10.** $xy = \cot(xy)$
11. $x + \tan(xy) = 0$ **12.** $x^4 + \sin y = x^3y^2$
13. $y\sin\left(\dfrac{1}{y}\right) = 1 - xy$ **14.** $x\cos(2x + 3y) = y\sin x$
15. $e^{2x} = \sin(x + 3y)$ **16.** $e^{x^2y} = 2x + 2y$

31--35 სავარჯიშოებში შეამოწმეთ, რომ მოცემული წერტილი ძევს მრუდზე და იპოვეთ ამ წერტილში მხები წრფე.

31. $x^2 + xy - y^2 = 1, \quad (2, 3)$

32. $x^2 + y^2 = 25, \quad (3, -4)$

33. $x^2y^2 = 9, \quad (-1, 3)$

34. $y^2 - 2x - 4y - 1 = 0, \quad (-2, 1)$

35. $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y - 6 = 0, \quad (-1, 0)$

3.8 შექცეული ფუნქციის და ლოგარითმის გაწარმოება

თეორემა 3. შექცეული ფუნქციის გაწარმოება

ვთქვათ f დიფერენცირებადი და მკაცრად მონოტონური ფუნქციაა I ინტერ-ვალზე. თუ $f'(x) \neq 0$ რომელიღაც x-სათვის I-დან, მაშინ შექცეული ფუნქცია f^{-1}დიფერენცირებადია შესაბამის $y = f(x)$ წერტილში f-ის მნიშვნელობათა სიმრავლიდან და

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

მართლაც, შექცეული ფუნქციის განსაზღვრების თანახმად $f(f^{-1}(x)) = x$; გავაწარმოოთ ამ ტოლობის ორივე მხარე. მიიღება $\frac{d}{dx} f(f^{-1}(x)) = 1$. მარცხენა მხარეში გამოვიყენოთ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი:

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = 1 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \qquad \text{რ.დ.გ.}$$

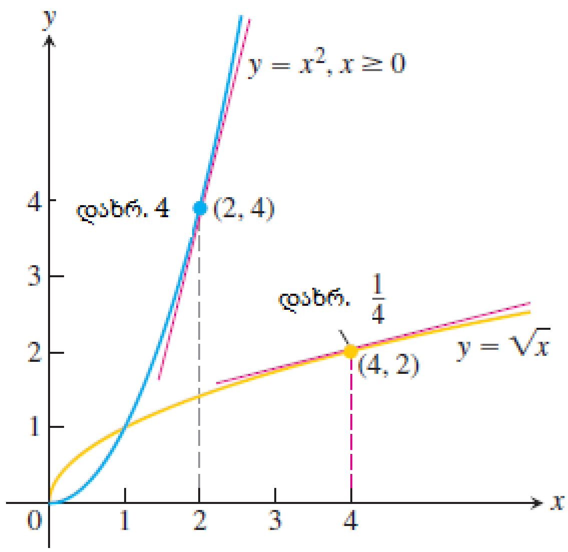
მაგალითი 1. $f(x) = x^2,\ x \geq 0$ და $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ფუნქციებს გააჩნიათ წარმოებულები $f'(x) = 2x$ და $(f^{-1})'(x) = 1/(2\sqrt{x})$.

შევამოწმოთ, რომ თეორემა 3 იგივე შედეგს გვაძლევს $f^{-1}(x)$ ფუნქციის წარმოებულისათვის. მართლაც, $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ (1);

თუ $f'(x)=2x$ ტოლობაში x -ს შევცვლით $f^{-1}(x)$ -ით, გვექნება $f'(f^{-1}(x))=2f^{-1}(x)$, რომლის გათვალისწინებით (1)-დან მიიღება

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{2f^{-1}(x)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

მივიღეთ იგივე შედეგი. $\sqrt{\ }$



ფიგურა 3.36

შევამოწმოთ ახლა თეორემა 3 ცალკეულ წერტილში. შევარჩიოთ $x=2$ და $f(2)=4=y$. თეორემა 3 გვამცნობს, რომ f -ის წარმოებული $x=2$ -ში, ე.ი. $f'(2)=4$ და f^{-1} -ის წარმოებული $y=f(2)=4$ -ზე, ე.ი. $\left(f^{-1}\right)'(4)$, ურთიერთშებრუნებული სიდიდეებია. ეს მართლაც ასეა:

$$\left(f^{-1}\right)'(4)=\frac{1}{f'(f^{-1}(4))}=\frac{1}{f'(2)}=\left.\frac{1}{2x}\right|_{x=2}=\frac{1}{4}.$$

იხ. ფიგურა 3.36.

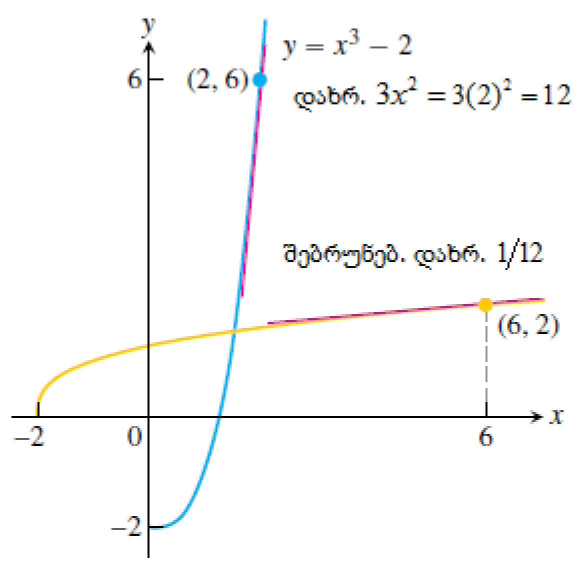
მაგალითი 2. ვთქვათ $f(x)=x^3-2$. ვიპოვოთ df^{-1}/dx წარმოებულის მნიშვნელობა $x=6=f(2)$ წერტილში $f^{-1}(x)$ ფორმულის მოძებნის გარეშე

ამოხსნა. გამოვიყენოთ თეორემა 3:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=2}=\left.3x^2\right|_{x=2}=12$$

$$\left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{x=f(2)}=\frac{1}{\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=2}}=\frac{1}{12}.$$

იხ. ფიგურა 3.37



ფიგურა 3.37

ნატურალური ლოგარითმის ფუნქციის წარმოებული

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln|x|=\frac{1}{x},\ \ x\neq 0}$$

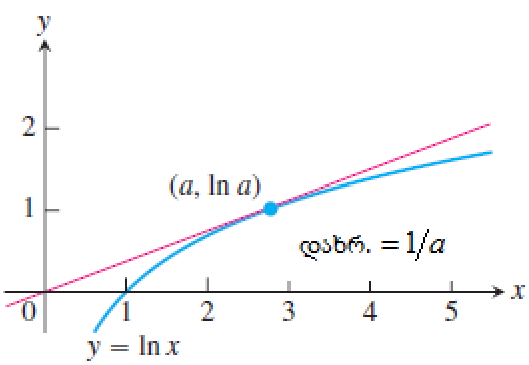
დამტკიცება. $y=\ln x,\ x>0 \quad \Rightarrow \quad e^{y}=x \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}(e^{y})=\frac{d}{dx}(x) \quad \Rightarrow \quad e^{y}\frac{dy}{dx}=1 \Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^{y}}=\frac{1}{x} \qquad \text{ანუ} \qquad \frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x},\ x>0.$$

როცა $x<0$, ფორმულა მტკიცდება ანალოგიურად.

მაგალითი 4. წრფე, რომლის დახრილობაა m, გადის კოორდინატთა სათავეზე და ეხება $y=\ln x$ მრუდს. რისი ტოლია m ?

ამოხსნა. ვთქვათ შეხების წერტილის აბსცისაა $x=a>0$. მაშინ წერტილი $(a,\ln a)$ მრუდზე ძევს და ამ წერტილში დახრილობაა $m=1/a$ (ფიგურა 3.38).



ფიგურა 3.38

რადგან მხები წრფე სათავეზე გადის, მისი დახრილობაა

$$m=\frac{\ln a-0}{a-0}=\frac{\ln a}{a}.$$

თუ m -ის ამ ორ მნიშვნელობას გავუტოლებთ, გვექნება

$$\frac{\ln a}{a}=\frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad \ln a=1; \qquad a=e; \qquad m=\frac{1}{e}.$$

---

a^{x} და $\log_{a}x$ ფუნქციების წარმოებულები

$$\frac{d}{dx}(a^{x})=a^{x}\ln a, \quad a>0,\ a\neq 1$$

$$\frac{d}{dx}(\log_{a}x)=\frac{1}{x\ln a}, \quad a>0,\ a\neq 1$$

მაგალითი 5.

$$(a)\quad \frac{d}{dx}3^x = 3^x \ln 3$$

$$(b)\quad \frac{d}{dx}3^{-x} = 3^x \ln 3\frac{d}{dx}(-x) = -3^x \ln 3$$

$$(c)\quad \frac{d}{dx}3^{\sin x} = 3^{\sin x}(\ln 3)\frac{d}{dx}(\sin x) = 3^{\sin x}(\ln 3)\cos x$$

სექცია 3.3-ში ექსპერიმენტული გზით იყო ნაჩვენები, რომ

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1. \qquad (*)$$

მართებულია უფრო ზოგადი ფორმულაც

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=\ln a,\quad a>0, a\neq 1, \qquad (**)$$

მართლაც,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x-a^0}{x-0}=\frac{d}{dx}(a^x)\Big|_{x=0}=a^x\ln a\Big|_{x=0}=\ln a.$$

(**)-დან $a=e$ შემთხვევაში გამომდინარეობს (*) .

ლოგარითმული გაწარმოება

ნამრავლის, განაყოფის, ხარისხის შემცველი დადებითი ფუნქციების წარმოებული ზოგჯერ სწრაფად შეიძლება ვიპოვოთ, თუ გაწარმოებამდე გავალოგარითმებთ ფუნქციის გამომსა-ხველ ტოლობას. ამ წესს **ლოგარითმული გაწარმოება** ეწოდება.

მაგალითი 6. ვიპოვოთ dy/dx, თუ $y=\dfrac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}, x>1$.

ამოხსნა. გავალოგარითმოთ ნატურალური ფუძით:

$$\ln y=\ln\frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}=\ln(x^2+1)+\ln(x+3)^{1/2}-\ln(x-1).$$

გავაწარმოოთ x ცვლადის მიმართ:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-1}.$$

აქედან ამოვხსნათ dy/dx

$$\frac{dy}{dx}=y\left(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{2x+6}-\frac{1}{x-1}\right)$$

და ჩავსვათ მარჯვენა მხარეში y -ის მნიშვნელობა:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}\left(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{2x+6}-\frac{1}{x-1}\right).$$

მაგალითი 7. გავაწარმოოთ $y=x^x,\ x>0$.

ამოხსნა. გავალოგარითმოთ: $\ln y = x\ln x;\quad \Rightarrow$

$$\frac{d}{dx}(\ln y)=\frac{d}{dx}(x\ln x)=\frac{d}{dx}(x)\cdot\ln x+x\cdot\frac{d}{dx}(\ln x)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x)\cdot\ln x+x\cdot\frac{d}{dx}(\ln x)=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1.$$

ამოვხსნათ აქედან dy/dx:

$$\frac{dy}{dx}=y\left(\ln x+1\right)=x^x\left(\ln x+1\right).$$

თეორემა 4. e **რიცხვის წარმოდგენა ზღვრის სახით**

$$e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$$

დამტკიცება. თუ $f(x)=\ln x$, მაშინ $f'(x)=1/x$ და $f'(1)=1$. მაგრამ წარმოებულის განსაზღვრის თანახმად,

$$f'(1)=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=$$

$$= \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right].$$

რადგან $f'(1)=1$, ამიტომ

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right]=1,$$

საიდანაც გამომდინარეობს დასამტკიცებელი ტოლობა.

სავარჯიშოები 3.8

5. *a.* აჩვენეთ, რომ $f(x)=x^3$ და $g(x)=\sqrt[3]{x}$ ურთიერთშებრუნებული ფუნქციებია.

b. დახაზეთ f და g მრუდები x-ის მიმართ იმდენად დიდ შუალედზე, რომ გამოჩნდეს მათი კვეთა (1, 1) და (-1, -1) წერტილებში. დარწმუნდით, რომ სურათი აჩვენებს სიმეტრიას $y=x$ წრფის მიმართ.

c. იპოვეთ ორივე მრუდის დახრილობა (1, 1) და (-1, -1) წერტილებში.

d. იპოვეთ მრუდების მხებები კოორდინატთა სათავეში.

6. *a.* აჩვენეთ, რომ $h(x)=x^3/4$ და $k(x)=(4x)^{1/3}$ ურთიერთშებრუნებული ფუნქციებია.

b. დახაზეთ h და k მრუდები x-ის მიმართ იმდენად დიდ შუალედზე, რომ გამოჩნდეს მათი კვეთა (2, 2) და (-2, -2) წერტილებში. დარწმუნდით, რომ სურათი აჩვენებს სიმეტრიას $y=x$ წრფის მიმართ.

c. იპოვეთ ორივე მრუდის დახრილობა (2, 2) და (-2, -2) წერტილებში.

d. იპოვეთ მრუდების მხებები კოორდინატთა სათავეში.

7. ვთქვათ $f(x)=x^3-3x^2-1, x\ge 2$. იპოვეთ df^{-1}/dx-ის მნიშვნელობა $x=-1=f(3)$ წერტილში წერტილში.

8. ვთქვათ $f(x)=x^2-4x-5, x>2$. იპოვეთ df^{-1}/dx-ის მნიშვნელობა $x=0=f(5)$ წერტილში წერტილში.

13--40 სავარჯიშოებში იპოვეთ ფუნქციათა წარმოებულები შესაბამისი ცვლადების მიმართ

13. $y = \ln(t^2)$

14. $y = \ln(t^{3/2})$

15. $y = \ln\frac{3}{x}$

16. $y = \ln\frac{10}{x}$

17. $y = \ln(\theta + 1)$

18. $y = \ln(2\theta + 2)$

19. $y = \ln x^3$

20. $y = (\ln x)^3$

21. $y = t(\ln t)^2$

22. $y = t\sqrt{\ln t}$

23. $y = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16}$

24. $y = (x^2 \ln x)^4$

25. $y = \frac{\ln t}{t}$

26. $y = \frac{1 + \ln t}{t}$

27. $y = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$

28. $y = \frac{x \ln x}{1 + \ln x}$

29. $y = \ln(\ln x)$

30. $y = \ln(\ln(\ln x))$

31. $y = \theta(\sin(\ln\theta) + \cos(\ln\theta))$

32. $y = \ln(\sec\theta + \tan\theta)$

33. $y = \ln\frac{1}{x\sqrt{x + 1}}$

34. $y = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}$

35. $y = \frac{1 + \ln t}{1 - \ln t}$

36. $y = \sqrt{\ln\sqrt{t}}$

37. $y = \ln(\sec(\ln\theta))$

38. $y = \ln\left(\frac{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}{1 + 2\ln\theta}\right)$

39. $y = \ln\left(\frac{(x^2 + 1)^5}{\sqrt{1 - x}}\right)$

40. $y = \ln\sqrt{\frac{(x + 1)^5}{(x + 2)^{20}}}$

41--52 სავარჯიშოებში იპოვეთ წარმოებულები ლოგარითმული გაწარმოების წესის გამოყენებით

41. $y = \sqrt{x(x + 1)}$

42. $y = \sqrt{(x^2 + 1)(x - 1)^2}$

43. $y = \sqrt{\frac{t}{t + 1}}$

44. $y = \sqrt{\frac{1}{t(t + 1)}}$

45. $y = \sqrt{\theta + 3}\sin\theta$

46. $y = (\tan\theta)\sqrt{2\theta + 1}$

47. $y = t(t + 1)(t + 2)$

48. $y = \frac{1}{t(t + 1)(t + 2)}$

49. $y = \frac{\theta + 5}{\theta\cos\theta}$

50. $y = \frac{\theta\sin\theta}{\sqrt{\sec\theta}}$

51. $y = \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{(x + 1)^{2/3}}$

52. $y = \sqrt{\frac{(x + 1)^{10}}{(2x + 1)^5}}$

55--62 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ y' შესაბამისად x,t ან θ ცვლადებით.

55. $y = \ln(\cos^2\theta)$

56. $y = \ln(3\theta e^{-\theta})$

57. $y = \ln(3te^{-t})$

58. $y = \ln(2e^{-t}\sin t)$

59. $y = \ln\left(\dfrac{e^\theta}{1 + e^\theta}\right)$

60. $y = \ln\left(\dfrac{\sqrt{\theta}}{1 + \sqrt{\theta}}\right)$

61. $y = e^{(\cos t + \ln t)}$

62. $y = e^{\sin t}(\ln t^2 + 1)$

63--66 სავარჯიშოებში იპოვეთ dy/dx .

63. $\ln y = e^y \sin x$

64. $\ln xy = e^{x+y}$

65. $x^y = y^x$

66. $\tan y = e^x + \ln x$

67--88 სავარჯიშოებში იპოვეთ წარმოებული მოცემული დამოუკიდებელი ცვლადით

67. $y = 2^x$

68. $y = 3^{-x}$

69. $y = 5^{\sqrt{s}}$

70. $y = 2^{(s^2)}$

71. $y = x^\pi$

72. $y = t^{1-e}$

73. $y = \log_2 5\theta$

74. $y = \log_3(1 + \theta \ln 3)$

75. $y = \log_4 x + \log_4 x^2$

76. $y = \log_{25} e^x - \log_5 \sqrt{x}$

77. $y = \log_2 r \cdot \log_4 r$

78. $y = \log_3 r \cdot \log_9 r$

79. $y = \log_3\left(\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{\ln 3}\right)$

80. $y = \log_5 \sqrt{\left(\dfrac{7x}{3x+2}\right)^{\ln 5}}$

81. $y = \theta \sin(\log_7 \theta)$

82. $y = \log_7\left(\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{e^\theta 2^\theta}\right)$

83. $y = \log_5 e^x$

84. $y = \log_2\left(\dfrac{x^2e^2}{2\sqrt{x+1}}\right)$

85. $y = 3^{\log_2 t}$

86. $y = 3\log_8(\log_2 t)$

87. $y = \log_2(8t^{\ln 2})$

88. $y = t\log_3\left(e^{(\sin t)(\ln 3)}\right)$

89-- 96 სავარჯიშოებში იპოვეთ y' ლოგარითმული გაწარმოების წესის გამოიყენებით.

89. $y = (x+1)^x$

90. $y = x^{(x+1)}$

91. $y = (\sqrt{t})^t$

92. $y = t^{\sqrt{t}}$

93. $y = (\sin x)^x$

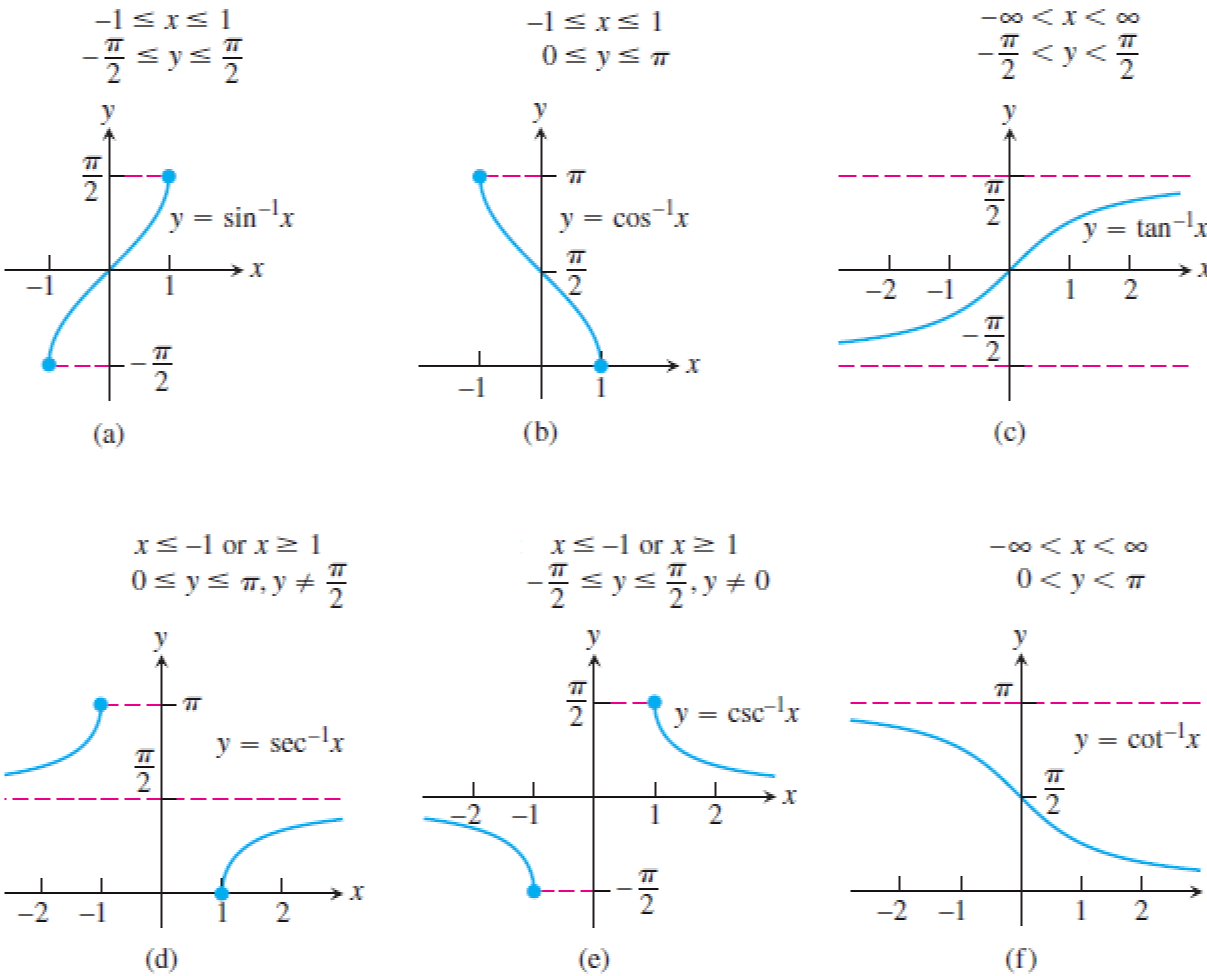
94. $y = x^{\sin x}$

95. $y = x^{\ln x}$

96. $y = (\ln x)^{\ln x}$

3.9 შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

ფიგურა 3.39-ზე ნაჩვენებია ექვსი ძირითადი შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქცია. ისინი მიღებულია შეზღუდული ტრიგონომეტრიული ფუნქციების $y = x$ წრფის მიმართ სიმეტრიული ასახვით.



ფიგურა 3.39

განსაზღვრება

$y = \tan^{-1}x$ ეწოდება რიცხვს $(-\pi/2,\ \pi/2)$ შუალედიდან, რომლისთვისაც $\tan y = x$.

$y = \cot^{-1}x$ ეწოდება რიცხვს $(0, \pi)$ შუალედიდან, რომლისთვისაც $\cot y = x$.

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1<x<1 \qquad \textbf{(a)}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1<x<1 \qquad \textbf{(b)}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2} \qquad \textbf{(c)}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x)=-\frac{1}{1+x^2} \qquad \textbf{(d)}$$

დამტკიცება.

(a) $y=\sin^{-1}x \quad \Rightarrow \quad \sin y = x \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}(\sin y)=\frac{d}{dx}(x)$; ამ ტოლობის მარცხენა მხარეში გამოვიყენოთ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი. მიიღება

$$\cos y\frac{dy}{dx}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad .$$

(c) ვთქვათ $y=\tan^{-1}x$. განსაზღვრების თანახმად $\tan y = x$. რთული ფუნქციის გაწარმოების წესით მიიღება:

$$\frac{d}{dx}(\tan y)=\frac{d}{dx}(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\cos^2 y}\frac{dy}{dx}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2} \quad .$$

არკკოსინუსის და არკტანგენსის გაწარმოებისთვის ანალოგიური გზით შეგვიძლია ფორმულების გამოყვანა. მაგრამ გაცილებით იოლი იქნება, თუ გამოვიყენებთ შემდეგ ტრიგონომეტრიულ ფორმულებს.

ურთიერთკავშირი ზოგიერთ შექცეულ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციას შორის

$$\cos^{-1}x=\pi/2-\sin^{-1}x; \qquad \cot^{-1}x=\pi/2-\tan^{-1}x$$

(b) $$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}x\right)=-\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(d) $$\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)=-\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=-\frac{1}{1+x^2}.$$

სავარჯიშოები 3.9

1-- 8 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ კუთხის სიდიდეები.

1. a. $\tan^{-1} 1$ b. $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ c. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

2. a. $\tan^{-1}(-1)$ b. $\tan^{-1}\sqrt{3}$ c. $\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

3. a. $\sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$ b. $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ c. $\sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

4. a. $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ b. $\sin^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ c. $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

5. a. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ b. $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ c. $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

6. a. $\csc^{-1}\sqrt{2}$ b. $\csc^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right)$ c. $\csc^{-1} 2$

7. a. $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$ b. $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ c. $\sec^{-1}(-2)$

8. a. $\cot^{-1}(-1)$ b. $\cot^{-1}(\sqrt{3})$ c. $\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

13--20 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ ზღვრები. თუ შეგეექვათ, შეხედეთ გრაფიკებს

13. $\lim_{x\to 1^-} \sin^{-1} x$ 14. $\lim_{x\to -1^+} \cos^{-1} x$

15. $\lim_{x\to \infty} \tan^{-1} x$ 16. $\lim_{x\to -\infty} \tan^{-1} x$

17. $\lim_{x\to \infty} \sec^{-1} x$ 18. $\lim_{x\to -\infty} \sec^{-1} x$

19. $\lim_{x\to \infty} \csc^{-1} x$ 20. $\lim_{x\to -\infty} \csc^{-1} x$

3.10 დაკავშირებულ ცვლილებათა სიჩქარეები

დავუშვათ, რომ ჩვენ ვტუმბავთ ჰაერს სფერულ ბალონში, რომლის მოცულობაც და რადიუსიც დროის განმავლობაში იზრდება. თუ V მოცულობაა, ხოლო V რადიუსი დროის მყისიერ მომენტში, მაშინ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

V და r-ის ცვლილებათა სიჩქარეების დამაკავშირებელი განტოლების მისაღებად, გამოვიყენოთ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი და გავაწარმოოთ ორივე მხარე t-ს მიმართ:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

ასე რომ, თუ ვიცით ბალონის რადიუსი და მოცულობის ცვლილების სიჩქარე dV/dt დროის მოცემულ მყისიერ მომენტში, მაშინ შეგვიძლია ამოვხსნათ ეს უკანასკნელი განტოლება dr/dt-ს მიმართ და გავიგოთ რამდენად სწრაფად იზრდება რადიუსი დროის ამ მომენტში.

შევნიშნოთ, რომ მოცულობის ზრდის სიჩქარის გაზომვა უფრო იოლია, ვიდრე რადიუსის ცვლილებისა. დაკავშირებულ ცვლილებათა სიჩქარეების განტოლებიდან dV/dt-ს მეშვეობით შეგვიძლია გამოვთვალოთ dr/dt.

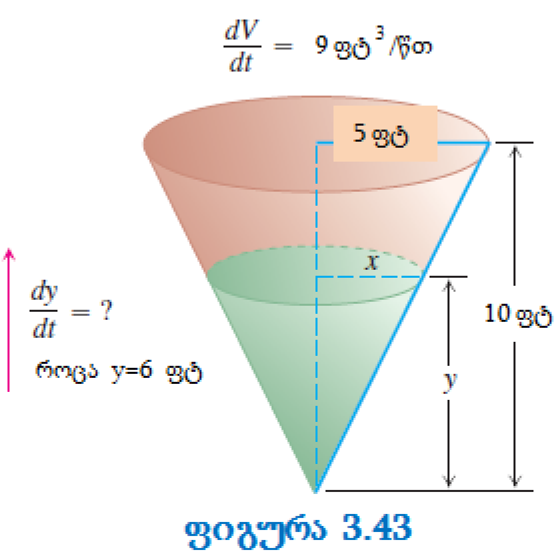
მაგალითი 1. კონუსურ ავზში წყალი ჩადის 9 ფტ^3/წთ სიჩქარით. ავზის წვერო ქვევითაა მიმართული. სიმაღლეა 10 ფტ, ფუძის რადიუსი კი 5 ფტ. როგორია წყლის დონის ზრდის სიჩქარე 6 ფუტის სიმაღლეზე?

ამოხსნა. ფიგურა 3.43-ზე ნაწილობრივ შევსებული კონუსური ავზია ნაჩვენები. ამოცანის ცვლადებია:

V = წყლის მოცულობა (ფტ^3) ავზში დროის t (წთ) მომენტში

x = წყლის ზედაპირის რადიუსი (ფტ) დროის t მომენტში

y = წყლის დონე ავზში (ფტ) დროის t მომენტში



ფიგურა 3.43

ვგულისხმობთ, რომ V, x და y არიან t ცვლადის დიფერენცირებადი ფუნქციები. მუდმივები ავზის განზომილებებია. ჩვენი მიზანია dy/dt-ს განსაზღვრა როცა y =6ფტ და dV/dt = 9 ფტ^3/წთ .

წყლის (კონუსის) მოცულობაა

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y.$$

რადგან არ გვაქვს ინფორმაცია x-ის და dx/dt-ს შესახებ ჩვენთვის საინტერესო მომენტში, საჭიროა ამ ცვლადის გამორიცხვა განტოლებიდან. სამკუთხედების მსგავსებიდან (ფიგურა 3.43) ვღებულობთ

$$\frac{x}{y}=\frac{5}{10} \text{ ანუ } x=\frac{y}{2}.$$

ამრიგად, ვპოულობთ

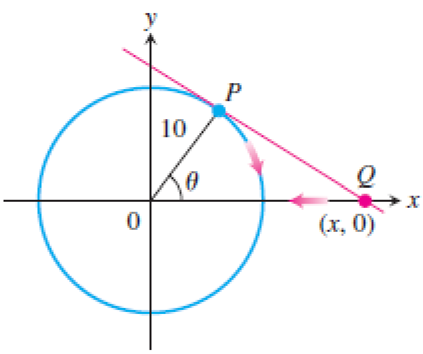
$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 y=\frac{\pi}{12}y^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{4}y^2\frac{dy}{dt};$$

გავითვალისწინოთ მოცემული პირობები:

$$9=\frac{\pi}{4}(6)^2\frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt}=\frac{1}{\pi}\approx 0.32$$

შეკითხვაში ნახსენები მომენტისათვის წყლის დონე მატულობს 0.32 ფტ/წთ სიჩქარით.

მაგალითი 4. ნაწილაკი P მუდმივი სიჩქარით გადაადგილდება საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით 10 მ რადიუსიან წრეწირზე, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია. ნაწილაკის საწყისი პოზიციაა (0, 10) წერტილი y-ღერძზე, საბოლოო პოზიცია კი წერტილი (10, 0) x-ღერძზე. როცა ნაწილაკი მოძრაობაშია, P წერტილში გავლებული მხები წრფე კვეთს x-ღერძს Q წერტილში (რომელიც დროის განმავლობაში გადაადგილდება). თუ ნაწილაკს საწყისი წერტილიდან ფინიშამდე მისასვლელად სჭირდება 30 წმ, რისი ტოლია მისი მყისი სიჩქარე x-ღერძის გასწვრივ იმ მომენტში, როცა ცენტრიდან 20 მ-ით არის დაშორებული?



ფიგურა 3.46

ამოხსნა. სიტუაცია წარმოდგენილია ფიგურა 3.46-ზე.

აღვნიშნოთ დრო t-თი, ხოლო θ აღნიშნავდეს კუთხეს x-ღერძსა და P წერტილის რადიუს-ვექტორს შორის. ნაწილაკი სტარტიდან ფინიშამდე მოძრაობს მუდმივი $\pi/2$ რადიანი $1/2$ წთ-ში, ანუ π რად/წთ სიჩქარით. ან სხვა სიტყვებით, $d\theta/dt=-\pi$, სადაც t-ს განზომილებაა წთ. მინუს ნიშანი გამოწვეულია θ-ს კლებადობით დროის განმავლობაში.

მანძილი Q წერტილიდან სათავემდე t მომენტში იყოს $x(t)$. ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ dx/dt, როცა

$$x = 20 \text{ მ} \qquad \text{და} \quad \frac{d\theta}{dt} = -\pi \text{ რად/წთ} .$$

x და θ სიდიდეების დასაკავშირებლად ფიგურა 3.46-დან ჩანს $x\cos\theta = 10$, ანუ $x = 10\sec\theta$. ამ განტოლების გაწარმოება გვაძლევს

$$\frac{dx}{dt} = 10\sec\theta\tan\theta\frac{d\theta}{dt} = -10\pi\sec\theta\tan\theta .$$

შევნიშნოთ, რომ dx/dt უარყოფითია, რადგან x კლებადია (Q მოძრაობს სათავისკენ).

როცა x=20, მაშინ $\cos\theta = 1/2$ და $\sec\theta = 2$. აგრეთვე $\tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \sqrt{3}$. მივიღებთ

$$\frac{dx}{dt} = (-10\pi)(2)(\sqrt{3}) = -20\sqrt{3}\pi .$$

შეკითხვაში ნახსენებ მომენტში, Q მოძრაობს სათავისკენ $20\sqrt{3}\pi \approx 108.8$ მ/წთ სიჩქარით.

სავარჯიშოები 3.10

1. ვთქვათ, წრის რადიუსი r და ფართობი $A = \pi r^2$ წარმოებადია t -ს მიმართ. დაწერეთ განტოლება, რომელიც აკავშირებს dA/dt -ს და dr/dt -ს.

2. ვთქვათ, სფერული ზედაპირის რადიუსი r და ფართობი $S = 4\pi r^2$ წარმოებადია t -ს მიმართ. დაწერეთ განტოლება, რომელიც აკავშირებს dS/dt -ს და dr/dt -ს.

3. ვთქვათ $y = 5x$ და $dx/dt = 2$. იპოვეთ dy/dt .

4. ვთქვათ $2x + 3y = 12$ და $dy/dt = -2$. იპოვეთ $dx/dt = 2$.

5. თუ $y = x^2$ და $dx/dt = 3$, მაშინ რისი ტოლია dy/dt , როცა $x = -1$?

8. თუ $x^2y^3 = 4/27$ და $dy/dt = 1/2$, მაშინ რისი ტოლია dx/dt როცა $x = 2$?

11. საწყისი 24 მ სიგრძის კუბის წიბო მცირდება 5 მ/წთ სიჩქარით. იმ მომენტისათვის, როცა წიბოს სიგრძე გახდება $x = 3$ მ, რისი ტოლი იქნება

(ა) ზედაპირის ფართობის ცვლილების სიჩქარე?

(ბ) მოცულობის ცვლილების სიჩქარე?

12. კუბის ზედაპირის ფართობი იზრდება 72 მ ^{2} /წმ სიჩქარით. რა სიჩქარით იცვლება კუბის მოცულობა იმ მომენტისათვის, როცა წიბოს სიგრძე იქნება $x = 3$ მ ?

17. ვთქვათ x და y არიან t -ს მიმართ დიფერენცირებადი ფუნქციები და $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ წარმოადგენს მანძილს $(x, 0)$ და $(0, y)$ წერტილებს შორის xy -სიბრტყეზე.

(ა) როგორაა დაკავშირებული ds/dt და dx/dt , თუ y მუდმივია?

(ბ) როგორაა დაკავშირებული ერთმანეთთან ds/dt , dx/dt და dy/dt , როცა არც x და არც y არაა მუდმივი?

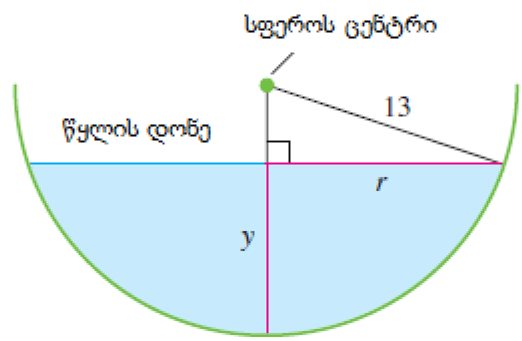
(გ) როგორაა დაკავშირებული dx/dt და dy/dt , თუ s მუდმივია?

29. წყალი 6 მ ^{3} / წთ სიჩქარით გადმოედინება ნახევარსფეროს ფორმის რეზერვუარიდან, რომლის რადიუსია 13 მ. ცნობილია, რომ R რადიუსიანი რეზერვუარის შემთხვევაში წყლის მოცულობა $V = (\pi/3)y^2(3R - y)$, როცა წყლის სიღრმეა y მ. უპასუხეთ შემდეგ შეკითხვებს.

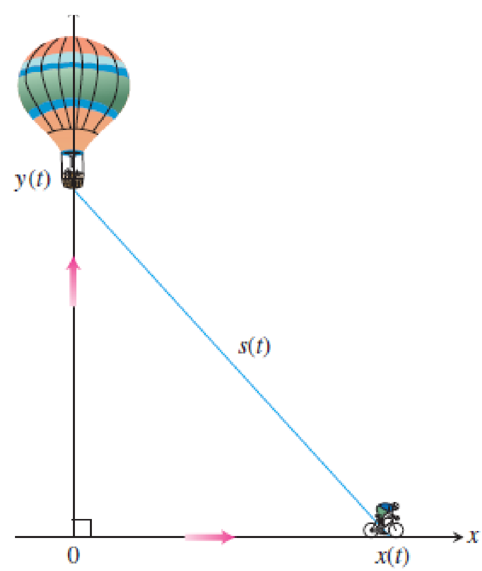
(ა) როგორია წყლის დონის ცვლილების სიჩქარე, როცა სიღრმეა 8 მ ?

(ბ) რისი ტოლია წყლის ზედაპირის r რადიუსი, როცა წყლის სიღრმეა y მ ?

(გ) როგორია r რადიუსის ცვლილების სიჩქარე, როცა წყლის სიღრმეა y მ ?



33. ჰაერბურთი მოძრაობს ვერტიკალურად ზევით მუდმივი 1მ/წმ სიჩქარით. როცა ჰაერბურთი ზედაპირიდან 65 მ სიმაღლეზე იყო, მის ქვეშ მუდმივი 17 მ/წმ სიჩქარით მოძრავმა ველოსიპედმა გაიარა. რისი ტოლი იქნება მათ შორის $s(t)$ მანძილის ზრდის სისწრაფე 3 წამის შემდეგ?

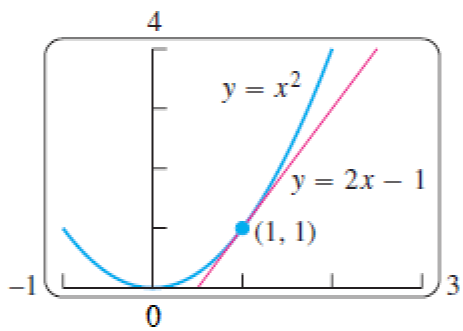


3.11 გაწრფივება და დიფერენციალი

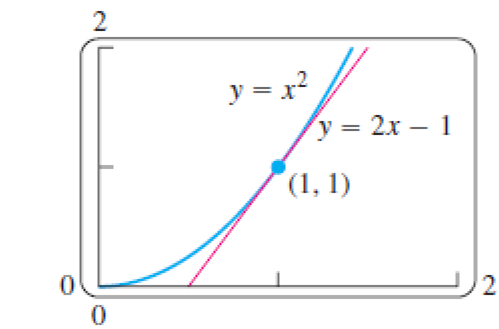
ზოგჯერ ჩვენ შეგვიძლია მიახლოებით შევცვალოთ რთული ფუნქცია უფრო მარტივი ფუნქციით, რომელიც უფრო იოლი გამოსაყენებელი იქნება და კონკრეტული ამოცანისთვის მოგვცემს სასურველ სიზუსტეს. მააპროქსიმებელ ფუნქციებს, ამ სექციაში რომ გამოვიყენებთ, ლინეარიზაციები ეწოდება და ეფუძნება მხებ წრფეებს.

შემოვიღებთ ახალ dx და dy ცვლადებს, რომლებსაც დიფერენციალები ეწოდებათ და მათ იმგვარად განვსაზღვრით, რომ წარმოებულისთვის ლაიბნიცის აღნიშვნა ჭეშმარიტ შეფარდებას წარმოადგენდეს.

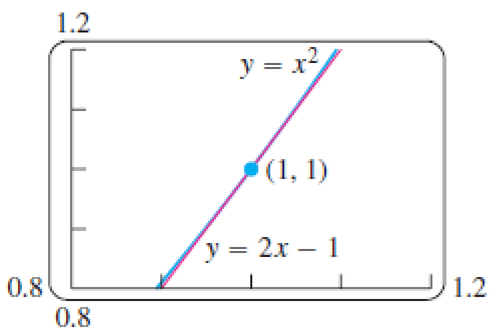
როგორც ფიგურა 3.49-დან ჩანს, $y = x^2$ -ის მხების წერტილები შეხების წერტილის მახლობლობაში ახლოსაა მრუდთან. მოკლე ინტერვალის შემთხვევაში შეხების წერტილის ორივე მხარეს მხები წრფის y სიდიდეები კარგ მიახლოებას წარმოადგენენ მრუდის y სიდიდეებისთვის. ეს თვალსაჩინოა, თუ გრაფიკებს მასშტაბურად გავადიდებთ შეხების წერტილის მახლობლობაში.



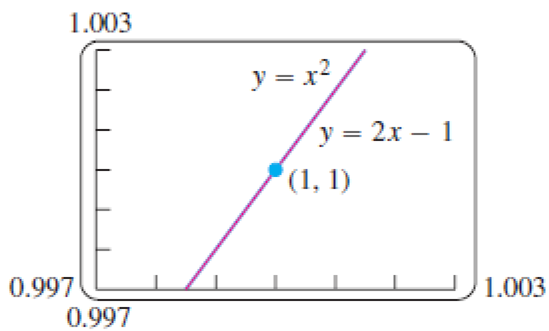
$y = x^2$ და $(1, 1)$ წერტილში მისი მხები $y = 2x - 1$



მხები და მრუდი $(1, 1)$-თან ძალზე ახლოს



მხები და მრუდი $(1, 1)$-თან ძალზე ახლოს მთელს ინტერვალზე



შეუძლებელია მხების და მრუდის გარჩევა ამ x-ინტერვალზე

ფიგურა 3.49

ეს მოვლენა მხოლოდ პარაბოლისთვის არაა დამახასიათებელი -- ყოველი დიფერენცირებადი მრუდის ყოფაქცევაც ანალოგიურია .

საზოგადოდ, დიფერენცირებადი $y=f(x)$ მრუდის მხები $(a,\ f(a))$ წერტილში არის

$$y=f(a)+f'(a)(x-a)\,.$$

განსაზღვრება . თუ f დიფერენცირებადია $x=a$ წერტილში, მაშინ

$$L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

მააპროქსიმებელ ფუნქციას ეწოდება f -ის **გაწრფივება** a წერტილში.

$$f(x)\approx L(x)$$

აპროქსიმაციას ეწოდება f -ის **სტანდარტული წრფივი აპროქსიმაცია** a წერტილში, $x=a$ წერტილს კი აპროქსიმაციის **ცენტრი** ეწოდება.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $f(x)=\sqrt{1+x}$ ფუნქციის გაწრფივება $x=0$ წერტილში.

ამოხსნა. რადგან

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}\,,$$

გვაქვს $f(0)=1$ და $f'(0)=1/2$. ამიტომ გვექნება გაწრფივება

$$L(x)=1+\frac{1}{2}(x-0)=1+\frac{x}{2}\,.$$

შემდეგი ცხრილი გვიჩვენებს რამდენად ზუსტია აპროქსიმაცია $\sqrt{1+x}\approx 1+(x/2)$.

მიახლოებითი	ჭეშმარიტი მნიშვნელობა	|ჭეშმარიტ. მნიშვნელ. - მიახლოებ.|
$\sqrt{1.2}\approx 1+\frac{0.2}{2}=1.10$	1.095445	$<10^{-2}$
$\sqrt{1.05}\approx 1+\frac{0.05}{2}=1.025$	1.024695	$<10^{-3}$
$\sqrt{1.005}\approx 1+\frac{0.005}{2}=1.00250$	1.002497	$<10^{-5}$

წრფივი აპროქსიმაცია სიზუსტეს კარგავს ცენტრიდან დაშორებით.

$\sqrt{1+x} \approx 1+(x/2)$ აპროქსიმაცია უხეში იქნება $x=3$ -ის მახლობლობაში. ამ წერტილისათვის სხვა გაწრფივება იქნება საჭირო.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $f(x)=\sqrt{1+x}$ ფუნქციის გაწრფივება $x=3$ წერტილში.

ამოხსნა. რადგან

$$f(3)=2, \quad f'(3)=\frac{1}{2}(1+x)_{-1/2}\bigg|_{x=3}=\frac{1}{4} \ ,$$

გვექნება

$$L(x)=2+\frac{1}{4}(x-3)=\frac{5}{4}+\frac{x}{4} \ .$$

ეს გაწრფივება $x=3.2$ წერტილში გვაძლევს

$$L(3.2)=\frac{5}{4}+\frac{3.2}{4}=2.050 ,$$

რაც კარგი მიახლოებაა, რადგან ჭეშმარიტი მნიშვნელობაა

$$\sqrt{1+3.2}=\sqrt{4.2}\approx 2.049 .$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $f(x)=\cos x$ ფუნქციის გაწრფივება $x=\pi/2$ წერტილში.

ამოხსნა. რადგან $f(\pi/2)=\cos(\pi/2)=0, \quad f'(x)=-\sin x$ და $f'(\pi/2)=-\sin(\pi/2)=-1$,

გვექნება

$$L(x)=0+(-1)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-x+\frac{\pi}{2} .$$

დიფერენციალები

ზოგჯერ ჩვენ y ფუნქციის x ცვლადით წარმოებულის აღსანიშნავად ვიყენებთ dy/dx ლაიბნიცის აღნიშვნას. მიუხედავათ გარეგნული მსგავსებისა, ეს არაა შეფარდება. ახლა

შემოვიღოთ ისეთი თვისების ორი ახალი dy და dx ცვლადი, რომ მათი შეფარდება, როცა ის არსებობს, წარმოებულის ტოლი იქნება.

განსაზღვრება. ვთქვათ $y = f(x)$ წარმოადგენს დიფერენცირებად ფუნქციას.
დამოუკიდებელი x ცვლადის დიფერენციალი (აღნიშნავენ dx სიმბოლოთი) ეწოდება არანულოვან Δx რიცხვს,

$$dx = \Delta x \quad \text{(დამოუკიდებელი ცვლადია).}$$

დამოკიდებული y ცვლადის დიფერენციალი (აღნიშნავენ dy სიმბოლოთი) განისაზღვრება ფორმულით

$$dy = f'(x)dx\,.$$

განსხვავებით dx დამოუკიდებელი ცვლადისგან, dy ყოველთვის დამოკიდებული ცვლადია. ის დამოკიდებულია x და dx ცვლადებზე, ორი დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქციაა .

მაგალითი 4.

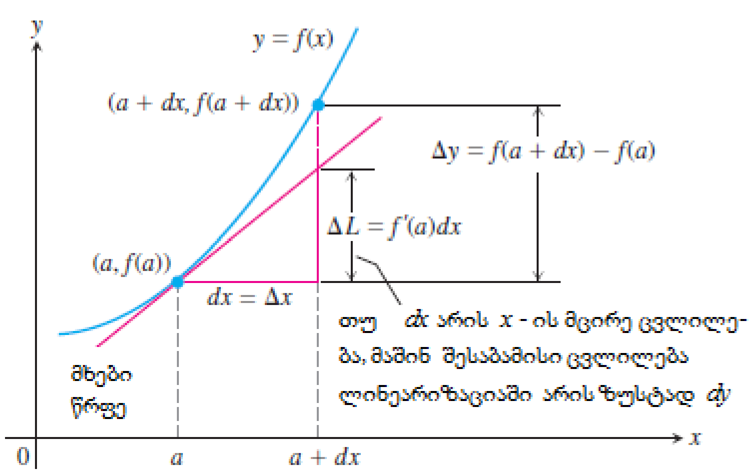
(ა) ვიპოვოთ dy , თუ $y = x^5 + 37$.
(ბ) ვიპოვოთ dy -ის მნიშვნელობა, როცა $x = 1$ და $dx = 0.2$.

ამოხსნა.

(ა) $dy = (5x^4 + 37x)dx$

(ბ) $dy = (5 \cdot 1^4 + 37)0.2 = 8.4$.

დიფერენციალის გეომეტრიული შინაარსი ფიგურა 3.54-ზეა ნაჩვენები.



ფიგურა 3.54

ვთქვათ $x = a$ და განვსაზღვროთ $dx = \Delta x$. მაშინ $y = f(x)$ -ის შესაბამისი ცვლილეება $\Delta y = f(a+dx) - f(a)$. შესაბამისი ცვლილება L მხები წრფისთვის იქნება

$$\Delta L = L(a+dx) - L(a) = \underbrace{f(a) + f'(a)[(a+dx) - a]}_{L(a+dx)} - \underbrace{f(a)}_{L(a)} = f'(a)\,dx$$

მაშასადამე, f -ის გაწრფივებაში ცვლილება ზუსტად ემთხვევა dy -ის მნიშვნელობას, როცა $x = a$ და $dx = \Delta x$.

თუ $dx \neq 0$, მაშინ dy დიფერენციალის განაყოფი dx დიფერენციალზე $f'(x)$ წარმოებულის ტოლია, რადგან

$$dy \div dx = \frac{f'(x)\,dx}{dx}\; f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

ჩვენ ზოგჯერ $dy = f'(x)\,dx$ -ის ნაცვლად ჩავწერთ

$$df = f'(x)\,dx$$

და df -ს ვუწოდებთ f ფუნქციის დიფერენციალს.

მაგალითად, თუ $f(x) = 3x^2 - 6$ მაშინ $df = d(3x^2 - 6) = 6x\,dx$.

გაწარმოების ყოველ ფორმულას, მაგალითად

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \qquad \text{ან} \qquad \frac{d(\sin u)}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

აქვს შესაბამისი დიფერენციალური ფორმა

$$d(u+v) = du + dv \qquad \text{ან} \qquad d(\sin u) = \cos u\,du.$$

შეფასება დიფერენციალის გამოყენებით

ვთქვათ ვიცით $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა a წერტილში და გვსურს შევაფასოთ, როგორ შეიცვლება ეს სიდიდე მახლობელ $a + dx$ წერტილში გადასვლით. თუ $dx = \Delta x$ მცირეა, მაშინ როგორც ფიგურა 3.54-დან ჩანს, Δy მიახლოებით dy -ის ტოლი იქნება. რადგან

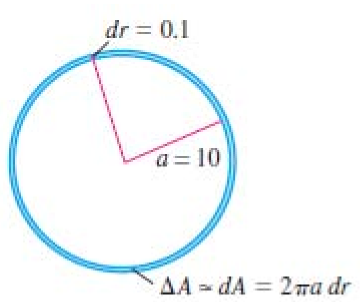
$$f(a+dx) = f(a) + \Delta y,$$

დიფერენციალური მიახლოება გვაძლევს

$$f(a+dx) \approx f(a)+dy, \qquad \text{სადაც} \quad dx=\Delta x.$$

მაშასადამე, $\Delta y \approx dy$ მიახლოება შეგვიძლია გამოვიყენოთ $f(a+dx)$ -ს შესაფასებლად, როცა $f(a)$ ცნობილია და dx მცირეა.

მაგალითი 6. წრეწირის რადიუსი r იზრდება $a=10$ მ-დან 10.1 მ- მდე (ფიგურა 3.55). წრის A ფართობის ზრდის შესაფასებლად გამოვიყენოთ dA . შევაფასოთ გაფართოებული წრის ფართობი და შევადაროთ უშუალო გამოთვლით მიღებულ ზუსტ ფართობს.



ფიგურა 3.55

ამოხსნა. რადგან $A=\pi r^2$, ამიტომ შეფასებული ნაზრდია

$$dA = A'(a)dr = 2\pi a(10)(0.1) = 2\pi \text{ მ}^2.$$

რადგან $A(r+\Delta r) \approx A(r)+dA$, გვექნება

$$A(10+0.1) \approx A(10)+2\pi = \pi(10)^2+2\pi = 102\pi.$$

10.1 მ რადიუსიანი წრის ფართობი $\approx 102\pi$ მ^2.

ზუსტი ფართობია $A(10.1)=\pi(10.1)^2 = 102.01\pi$ მ^2.

ცდომილობაა 0.01π მ^2.

სავარჯიშოები 3.11

1--5 სავარჯიშოებში იპოვეთ $f(x)$ ფუნქციის $L(x)$ გაწრფივება $x=a$ წერტილში

1. $f(x) = x^3 - 2x + 3, \quad a = 2$
2. $f(x) = \sqrt{x^2+9}, \quad a = -4$
3. $f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad a = 1$
4. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a = -8$
5. $f(x) = \tan x, \quad a = \pi$

7--14 სავარჯიშოებში შეარჩიეთ x_0-ის მახლობელი ისეთი მთელი a, რომლისთვისაც იოლად გამოითვლება მოცემული ფუნქცია და მისი წარმოებული. შემდეგ იპოვეთ მოცემული ფუნქციის გაწრფივება ამ წერტილში.

7. $f(x) = x^2 + 2x, \quad x_0 = 0.1$

8. $f(x) = x^{-1}, \quad x_0 = 0.9$

9. $f(x) = 2x^2 + 3x - 3, \quad x_0 = -0.9$

10. $f(x) = 1 + x, \quad x_0 = 8.1$

11. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 8.5$

12. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}, \quad x_0 = 1.3$

13. $f(x) = e^{-x}, \quad x_0 = -0.1$

14. $f(x) = \sin^{-1} x, \quad x_0 = \pi/12$

19--38 სავარჯიშოებში იპოვეთ dy.

19. $y = x^3 - 3\sqrt{x}$

20. $y = x\sqrt{1 - x^2}$

21. $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$

22. $y = \dfrac{2\sqrt{x}}{3(1 + \sqrt{x})}$

23. $2y^{3/2} + xy - x = 0$

24. $xy^2 - 4x^{3/2} - y = 0$

25. $y = \sin(5\sqrt{x})$

26. $y = \cos(x^2)$

27. $y = 4\tan(x^3/3)$

28. $y = \sec(x^2 - 1)$

29. $y = 3\csc(1 - 2\sqrt{x})$

30. $y = 2\cot\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

31. $y = e^{\sqrt{x}}$

32. $y = xe^{-x}$

33. $y = \ln(1 + x^2)$

34. $y = \ln\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}\right)$

35. $y = \tan^{-1}(e^{x^2})$

36. $y = \cot^{-1}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) + \cos^{-1} 2x$

37. $y = \sec^{-1}(e^{-x})$

38. $y = e^{\tan^{-1}\sqrt{x^2+1}}$

64 **(ა)** ვთქვათ $Q(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2$ წარმოადგენს $f(x)$ -ის კვადრატულ აპროქსიმაციას $x = a$ წერტილში და სრულდება თვისებები:

i) $Q(a) = f(a)$ **ii)** $Q'(a) = f'(a)$ **iii)** $Q''(a) = f''(a)$.

განსაზღვრეთ b_0, b_1, b_2 კოეფიციენტები.

(ბ) იპოვეთ კვადრატული აპროქსიმაცია $f(x) = 1/(1-x)$ ფუნქციისათვის $x = 0$ წერტილში

4

წარმოებულთა გამოყენება

ამ თავში წარმოებულებს გამოვიყენებთ ფუნქციათა ექსტრემალური მნიშვნელობების საპოვნელად, გრაფიკების ფორმის განსაზღვრისა და ანალიზისთვის, აგრეთვე იმ შუალედების დასადგენად, რომლებიც ფუნქციის ნულებს შეიცავენ. შემოვიტანთ წარმოებულის მიხედვით ფუნქციის აღდგენის იდეას, რომელიც გზას ხსნის ინტეგრალური აღრიცხვისაკენ მომდევნო თავში.

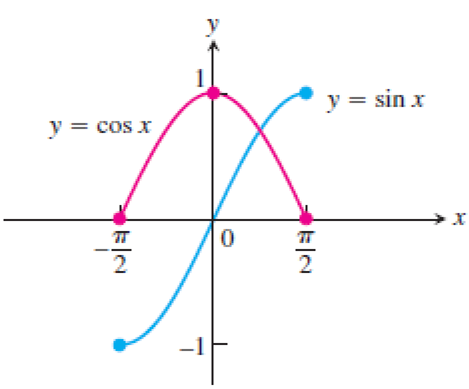
4.1 ფუნქციათა ექსტრემალური მნიშვნელობები

განსაზღვრება. ვთქვათ f ფუნქციის განსაზღვრის არეა D. მაშინ f-ს აქვს **გლობალური მაქსიმუმი** D-ზე c წერტილში თუ

$$f(x) \le f(c) \quad \forall x \in D$$

და **გლობალური მინიმუმი** D-ზე c წერტილში თუ

$$f(x) \ge f(c) \quad \forall x \in D.$$



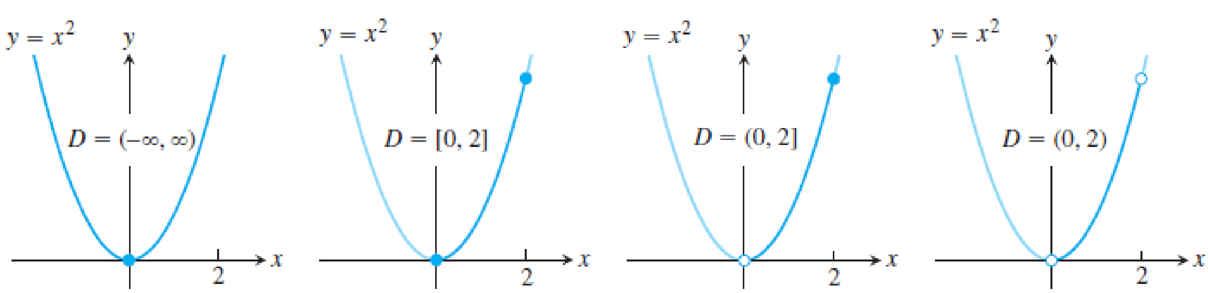
ფიგურა 4.1

მაგალითად, ჩაკეტილ $[-\pi/2, \pi/2]$ ინტერვალზე $f = \cos x$ ფუნქციის გლობალური მაქსიმუმია 1 (აღწევს ერთხელ) და გლობალური მინიმუმია 0 (აღწევს ორჯერ). იმავე ინტერვალზე $g(x) = \sin x$ ფუნქციის გლობალური მაქსიმუმია 1, ხოლო გლობალური მინიმუმი არის -1 (ფიგურა 4.1).

მაქსიმალურ და მინიმალურ მნიშვნელობებს **ექსტრემალური მნიშვნელობები** ეწოდება, წერტილებს კი, რომლებშის ეს მნიშვნელობები მიიღწევა -- **ექსტრემუმის წერტილები.** ერთი და იგივე ფორმულებით განსაზღვრულ ფუნქციებს განსხვავებული ექსტრემუმები შეიძლება ჰქონდეთ , დამოკიდებული მათი განსაზღვრის არეებზე. ეს კარგად გამოჩნდება მომდევნო მაგალითში .

მაგალითი 1. ფიგურა 4.2-ზე ნაჩვენებია ფუნქციათა ექსტრემუმები. შევნიშნოთ, რომ ფუნქცია შეიძლება არ ჰქონდეს მაქსიმუმი ან მინიმუმი, თუ განსაზღვრის არე შემოსაზღვრული არაა, ან არ შეიცავს ინტერვალის ბოლოებს.

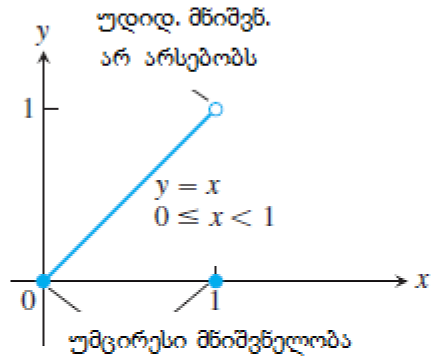
ფუნქციის წესი		**განსაზღვრის არე** D	**გლობალური ექსტრემუმი** D**-ზე**
(ა)	$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	გლობალ. max არ აქვს გლობალ. min =0, $x=0$-ზე
(ბ)	$y = x^2$	$[0, 2]$	გლობალ. max =4, $x=2$-ზე გლობალ. min =0, $x=0$-ზე
(გ)	$y = x^2$	$(0, 2]$	გლობალ. max =4, $x=2$-ზე გლობალ. min არ აქვს
(დ)	$y = x^2$	$(0, 2)$	ექსტრემუმები არ აქვს



(ა) (ბ) (გ) (დ)

ფიგურა 4.2

თეორემა 1. თუ f უწყვეტია ჩაკეტილ $[a,b]$ ინტერვალზე, მაშინ იგი ამ შუალედზე მიაღწევს გლობალურ მაქსიმუმს და გლობალურ მინიმუმს. ესე იგი არსებობს $x_1, x_2 \in [a,b]$ ისეთი , რომ $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ ყოველი სხვა x -სთვის $[a,b]$-დან.



ფიგურა 4.4

თეორემა 1-ის მოთხოვნები, რომ ინტერვალი ჩაკეტილი და სასრული იყოს, აგრეთვე ფუნქციის უწყვეტობა, არსებითია.

ფიგურა 4.4 უჩვენებს, უწყვეტობის მოთხოვნის გამოტოვება რომ არ შეიძლება.

ვთქვათ მოცემულია D არეზე განსაზღვრული ფუნქცია.

განსაზღვრება. f ფუნქციას აქვს **ლოკალური მაქსიმუმი** c წერტილში, თუ $f(x) \le f(c)$ ყველა x-სათვის c წერტილის შემცველი რაიმე ღია ინტერვალიდან. ანალოგიურად, f ფუნქციას აქვს **ლოკალური მინიმუმი** c წერტილში, თუ $f(x) \ge f(c)$ ყველა x-სათვის c წერტილის შემცველი რაიმე ღია ინტერვალიდან.

თუ f -ის განსაზღვრის არე ჩაკეტილი $[a, b]$ ინტერვალია, მაშინ f -ს აქვს ლოკალური მაქსიმუმი (მინიმუმი) $x = a$ ბოლოში, თუ $f(x) \le f(a)$ ($f(x) \ge f(a)$) ყოველი x -სთვის ნახევრადღია $[a, a+\delta), \delta > 0$ ინტერვალიდან. ასეთივე განსაზღვრება გვაქვს მეორე ბოლოსთვის.

თეორემა 2 (ფერმა). თუ f ფუნქცია განსაზღვრის არის შიგა c წერტილში ღებულობს უდიდეს ან უმცირეს მნიშვნელობას და წარმოებადია ამ წერტილში, მაშინ

$$f'(c) = 0.$$

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისთვის ვიგულისხმოთ, რომ f ფუნქციას c წერტილში აქვს უდიდესი მნიშვნელობა. მაშინ c-სთან საკმარისად ახლო მდებარე ყველა x წერტილი-სთვის ადგილი აქვს უტოლობას $f(x) - f(c) \le 0$. რადგან c განსაზღვრის არის შიგა წერტილია, ამიტომ არსებობს ორმხრივი ზღვარი

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

ეს ნიშნავს, რომ არსებობს მარცხენა და მარჯვენა ზღვრები და ორივე $f'(c)$ -ს ტოლია.

$$f'(c)=\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\le 0\,,\quad \text{რადგან}\quad x-c>0 \quad \text{და}\quad f(x)\le f(c)\,;$$

$$f'(c)=\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\ge 0\,,\quad \text{რადგან}\quad x-c<0 \quad \text{და}\quad f(x)\le f(c)\,.$$

ამ უტოლობებიდან გამომდინარეობს $f'(c)=0$, რ.დ.გ.

წერტილები, რომლებშიც ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს ექსტრემალური მნიშვნელობა (ლოკალური ან გლობალური), შემდეგია:

1. განსაზღვრის არის შიგა წერტილები, რომლებშიც $f'=0$,

2. შიგა წერტილები, რომლებშიც წარმოებული არ არსებობს,

3. განსაზღვრის არის ბოლო წერტილები.

განსაზღვრება. f ფუნქციის განსაზღვრის არის შიგა წერტილს, რომელშიც f' ნულის ტოლია ან არ არსებობს, **კრიტიკული წერტილი** ეწოდება.

მაშასადამე, ფუნქციას ექსტრემალური მნიშვნელობა შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ კრიტიკულ წერტილში ან განსაზღვრის არის ბოლოებში.

სასრულ ჩაკეტილ ინტერვალზე უწყვეტი ფუნქციის გლობალური ექსტრემუმების მოძებნა

1. გამოვთვალოთ f ყველა კრიტიკულ წერტილში და შუალედის ბოლოებზე.

2. შევარჩიოთ ამ რიცხვებიდან უდიდესი და უმცირესი.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $f(x)=x^2$ ფუნქციის აბსოლუტური მაქსიმუმი და მინიმუმი [-2, 1] შუალედზე.

ამოხსნა. ფუნქცია წარმოებადია განსაზღვრის არეზე და $f'(x)=2x=0 \;\Rightarrow$ კრიტიკული წერტილია მხოლოდ $x=0$.

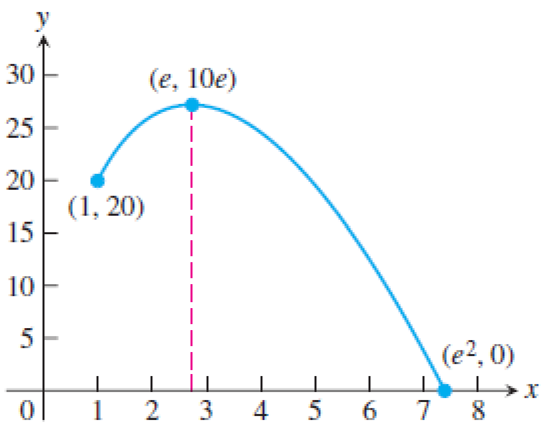
მნიშვნელობა კრიტიკულ წერტილში: $f(0)=0$

მნიშვნელობები ბოლოებზე: $f(-2)=4,\quad f(1)=1$.

ამრიგად, ფუნქციას აქვს 4-ის ტოლი აბსოლუტური მაქსიმუმი $x=-2$ წერტილში და 0-ის ტოლი აბსოლუტური მინიმალური მნიშვნელობა $x=0$ -ზე.

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $f(x)=10x(2-\ln x)$ ფუნქციის აბსოლუტური მაქსიმუმი და მინიმუმი $[1, e^2]$ ინტერვალზე.

ამოხსნა. ფიგურა 4.8 გვკარნახობს, რომ აბსოლუტური მაქსიმუმია $x=3$ -ის მახლობლობაში, 0-ის ტოლი აბსოლუტური მინიმუმი კი $x=e^2$ წერტილში. დავასაბუთოთ ეს . გავაწარმოოთ ფუნქცია $f'(x)=10(2-\ln x)-10x\left(\dfrac{1}{x}\right)=10(1-\ln x)$.



ფიგურა 4.8

$f'(x)=0 \Rightarrow \ln x=1$, $x=e$ განსაზღვრის არეშია, კრიტიკული წერტილია.

$f(e)=10e\approx 27.2$, $f(1)=10(2-\ln 1)=20$,

$f(e^2)=10e^2(2-2\ln e)=0$.

ამრიგად, ფუნქციას 27.2-ის ტოლი აბსოლუტური მაქსიმუმი აქვს $x=e$ წერტილში, 0-ის ტოლი აბსოლუტური მინიმუმი კი $x=e^2$ წერტილში.

მაგალითი 4. ვიპოვოთ $f(x)=x^{2/3}$ ფუნქციის აბსოლუტური მაქსიმუმი და აბსოლუ-ტური მინიმუმი [-2, 3] ინტერვალზე.

ამოხსნა. გავაწარმოოთ: $f'(x)=\dfrac{2}{3}x^{-1/3}=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. წარმოებული ნული არ ხდება, მაგრამ განსაზღვრული არაა $x=0$ -ზე და ესაა ერთადერთი კრიტიკული წერტილი.

გამოვთვალოთ: $f(0)=0$,

$$f(-2)=(-2)^{2/3}=\sqrt[3]{4}\;\; f(-2)=(-2)^{2/3}=\sqrt[3]{4} \;,$$

$$f(3)=(3)^{2/3}=\sqrt[3]{9}\approx 2.08 \,.$$

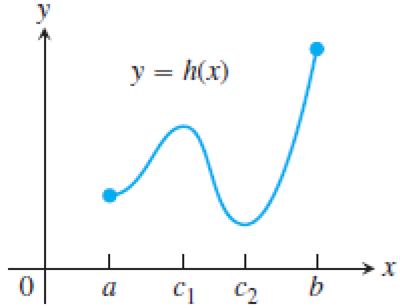
ამრიგად, აბსოლუტური მაქსიმუმი 2.08 მიიღწევა $x=3$ წერტილში;

აბსოლუტური მინიმუმია 0, მიიღწევა $x=0$ წერტილში

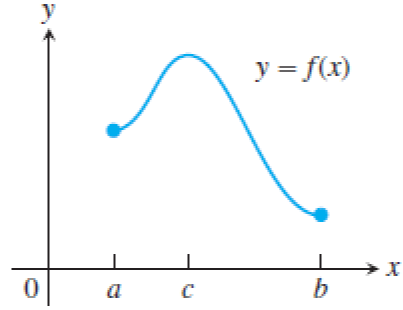
სავარჯიშოები 4.1

1--6 სავარჯიშოებში მოცემული ნახაზის მიხედვით განსაზღვრეთ, რომელ ფუნქციას აქვს აბსოლუტური ექსტრემუმი $[a, b]$ შუალედზე. შემდეგ ახსენით, ეთანხმება თუ არა პასუხი თეორემა 1-ს .

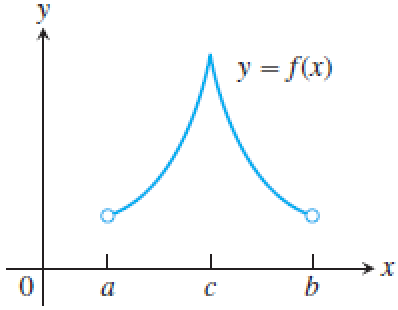
1.



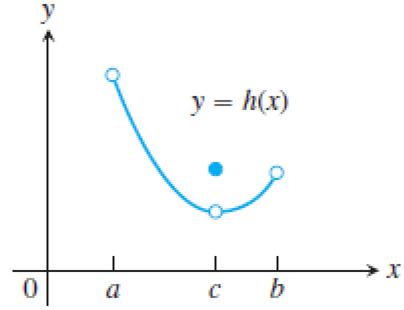
2.



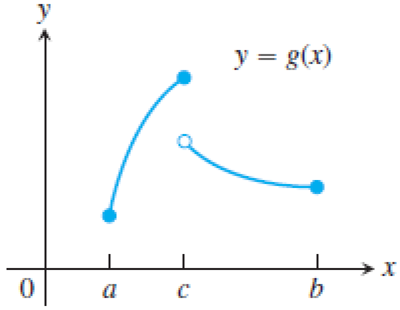
3.



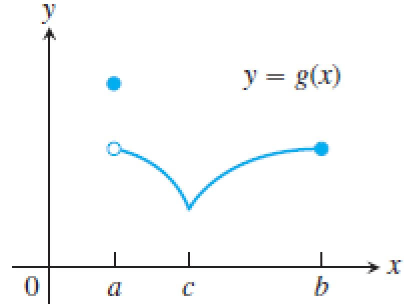
4.



5.



6.



53--68 სავარჯიშოებში იპოვეთ ფუნქციების ექსტრემალური სიდიდეები(აბსოლუტური და ლოკალური); მიუთითეთ, რომელ წერტილში მიიღწევიან ისინი.

53. $y = 2x^2 - 8x + 9$

54. $y = x^3 - 2x + 4$

55. $y = x^3 + x^2 - 8x + 5$

56. $y = x^3(x - 5)^2$

57. $y = \sqrt{x^2 - 1}$

58. $y = x - 4\sqrt{x}$

59. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1 - x^2}}$

60. $y = \sqrt{3 + 2x - x^2}$

61. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

62. $y = \dfrac{x + 1}{x^2 + 2x + 2}$

63. $y = e^x + e^{-x}$

64. $y = e^x - e^{-x}$

65. $y = x \ln x$

66. $y = x^2 \ln x$

67. $y = \cos^{-1}(x^2)$

68. $y = \sin^{-1}(e^x)$

69--76 სავარჯიშოებში თითოეული ფუნქციისათვის იპოვეთ კრიტიკული წერტილები, განსაზღვრის არის ბოლოები და ექსტრემალური მნიშვნელობები (აბსოლუტური და ლოკალური).

69. $y = x^{2/3}(x + 2)$

70. $y = x^{2/3}(x^2 - 4)$

71. $y = x\sqrt{4 - x^2}$

72. $y = x^2\sqrt{3 - x}$

73. $y = \begin{cases} 4 - 2x, & x \le 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$

74. $y = \begin{cases} 3 - x, & x < 0 \\ 3 + 2x - x^2, & x \ge 0 \end{cases}$

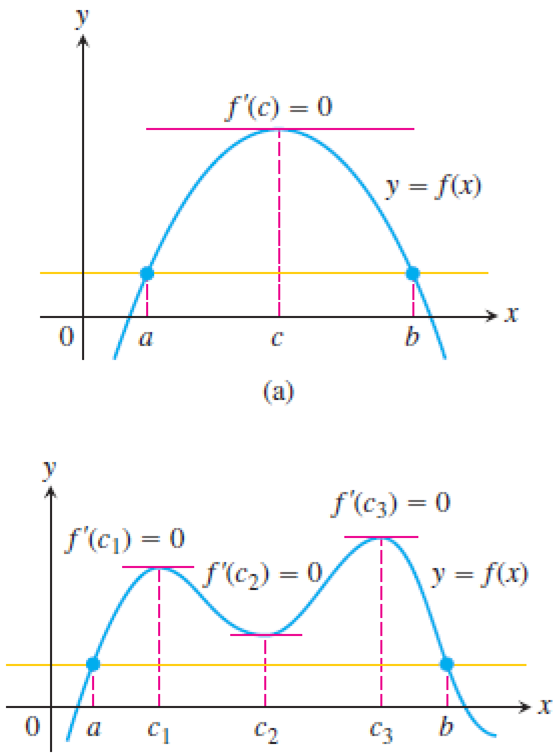
75. $y = \begin{cases} -x^2 - 2x + 4, & x \le 1 \\ -x^2 + 6x - 4, & x > 1 \end{cases}$

76. $y = \begin{cases} -\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{15}{4}, & x \le 1 \\ x^3 - 6x^2 + 8x, & x > 1 \end{cases}$

4.2 საშუალო მნიშვნელობის თეორემა

ჩვენ ვიცით, რომ მუდმივი ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია. მაგრამ ხომ არ არსებობს სხვა, უფრო რთული ფუნქცია, რომლის წარმოებულიც ყოველთვის ნული იქნება? თუ ორ ფუნქციას იდენტური წარმოებულები აქვთ ინტერვალზე, რა კავშირია მათ შორის?

ჩვენ ვუპასუხებთ ამ და სხვა შეკითხვებზე ამ თავში საშუალო მნიშვნელობის თეორემის გამოყენებით. თავდაპირველად კი მოვიყვანოთ კერძო შემთხვევა, რომელიც როლის



ფიგურა 4.10

თეორემის სახელითაა ცნობილი, და რომელიც გამოიყენება საშუალო მნიშვნელობის თეორემის დასამტკიცებლად.

როგორც გრაფიკიდან ჩანს, თუ დიფერენცირებადი ფუნქცია ორ განსხვავებულ წერტილში კვეთს ჰორიზონტალურ წრფეს, მაშინ მათ შორის არსებობს გრაფიკზე ერთი წერტილი მაინც, რომელშიც გავლებული მხები ჰორიზონტალურია და წარმოებული ნულია (ფიგურა 4.10).

ჩამოვაყალიბოთ ეს წინადადება თეორემის სახით და დავამტკიცოთ.

თეორემა 3 (როლი). თუ $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი f ფუნქცია წარმოებადია (a,b) ინტერვალში და, ამასთანავე $f(a)=f(b)$, მაშინ ამ ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი c წერტილი, რომ $f'(c)=0$.

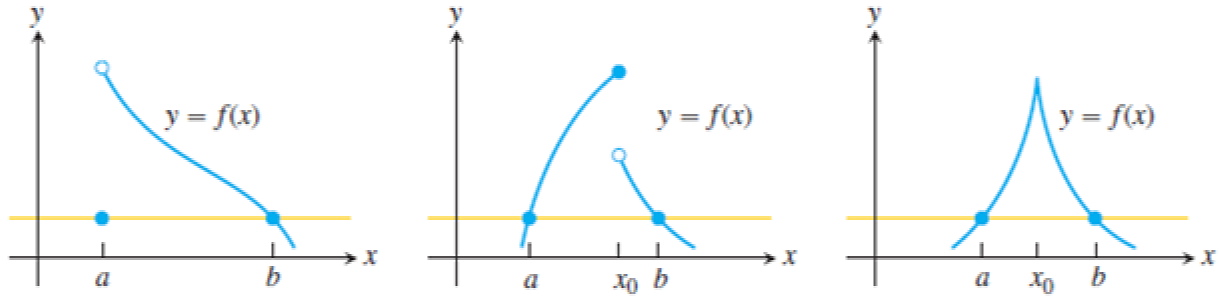
დამტკიცება.

1. f უწყვეტია $[a,b]$ $\Rightarrow$ არსებობს $M=\max f(x)$, $m=\min f(x)$;

2. თუ $M=m$, მაშინ f მუდმივია და მისი წარმოებული ნებისმიერ წერტილში ნულია. ამ შემთხვევაში c წერტილად შეიძლება ავიღოთ (a,b) ინტერვალის ნებისმიერი წერტილი;

3. თუ $M \neq m$, მაშინ M, m ორივე მნიშვნელობა ვერ მიიღწევა შუალედის ბოლოებზე, რადგან $f(a)=f(b)$ და $M \neq m$. მაშასადამე, ერთ-ერთი მაინც შუალედის შიგნით მიიღწევა და სწორედ ეს წერტილი იქნება c. $\Rightarrow$ ფერმას თეორემით $f'(c)=0$. რ.დ.გ.

თეორემა 3-ის პირობები არსებითია. თუკი ისინი დაირღვევა ერთ წერტილში მაინც, შეიძლება გრაფიკს ჰორიზონტალური მხები აღარ ჰქონდეს (ფიგურა 4.11)



(ა) წყვეტილია სეგმენტის ბოლოზე

(ბ) წყვეტილია სეგმენტის შიგა წერტილში

(გ) უწყვეტია სეგმენტზე, არაა წარმოებადი ერთ წერტილში

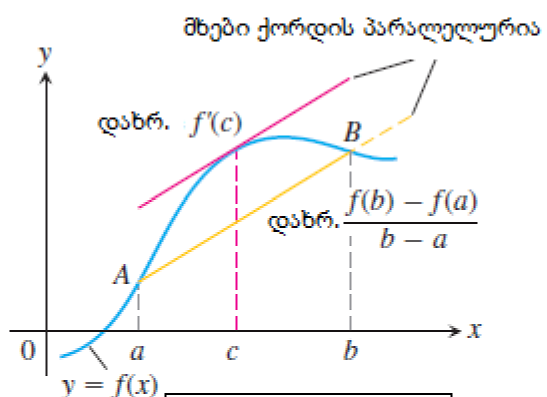
ფიგურა 4.11

მაგალითი 1. ვაჩვენოთ, რომ $x^3+3x+1=0$ განტოლებას აქვს ზუსტად ერთი ნამდვილი ამონახსნი.

ამოხსნა. განვსაზღვროთ უწყვეტი ფუნქცია

$$f(x)=x^3+3x+1.$$

რადგან $f(-1)=-3$ და $f(0)=1$, ამიტომ კოშის (საშუალედო მნიშვნელობის) თეორემის თანახმად f-ის გრაფიკი x-ღერძს გადაკვეთს (-1, 0) ინტერვალის რომელიღაც წერტილში. ორი ფესვი ($x=a$ და $x=b$) რომ ჰქონდეს, მაშინ $f(a)=f(b)=0$ და როლის თეორემის ძალით f' ნული გახდება (a,b)-ს რომელიმე წერტილზე. ეს კი შეუძლებელია, რადგან $f'(x)=3x^2+3>0$. ე.ი. განტოლებას მხოლოდ ერთი ფესვი აქვს.



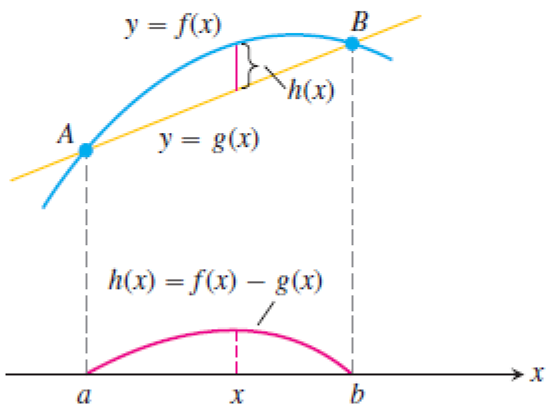
ფიგურა 4.13

საშუალო მნიშვნელობის თეორემა პირველად ლაგრანჟის მიერ იყო ჩამოყალიბებული და წარმოადგენს როლის თეორემის "დახრილ" ვერსიას (ფიგურა 4.13). ეს თეორემა ასაბუთებს, რომ არსებობს წერტილი. რომელშიც გავლებული მხები AB ქორდის პარალელურია.

თეორემა 4_(ლაგრანჟი)_(საშუალო მნიშვნელობის თეორემა)

თუ $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი f ფუნქცია წარმოებადია (a,b) ინტერვალში, მაშინ ამ ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი c წერტილი, რომ

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c). \qquad (1)$$



ფიგურა 4.15

დამტკიცება. $A(a, f(a))$ და $B(b, f(b))$

წერტილებზე გავლებული მკვეთი წრფის განტოლებაა (ფიგურა 4.15)

$$g(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

აღვნიშნოთ

$$h(x)=f(x)-g(x)=f(x)-f(a)-$$

$$-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a). \qquad (2)$$

h ფუნქცია აკმაყოფილებს როლის თეორემის ყველა პირობას: უწყვეტია $[a,b]$-ზე, წარმოებადია (a,b) -ზე, ამასთან $h(a)=h(b)=0$. მაშასადამე, $h'(c)=0$ რომელიღაც $c\in(a,b)$ წერტილში. ეს ის წერტილია, რომელსაც (1) ტოლობაში ვეძებთ.

გავაწარმოოთ (2) ტოლობა x -ით და ჩავსვათ $x=c$:

$$h'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \text{ საიდანაც } \quad f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \quad \text{რ.დ.გ.}$$

ფიზიკური ინტერპრეტაცია

ჩვენ შეგვიძლია მოვიაზროთ $(f(b)-f(a))/(b-a)$ რიცხვი, როგორც f -ის საშუალო ცვლილება $[a,b]$- ზე, ხოლო $f'(c)$ როგორც მყისიერი ცვლილება. ლაგრანჟის თეორემა ამბობს, რომ რომელიღაც შიგა წერტილში მყისიერი ცვლილება ტოლი იქნება მთელს ინტერვალზე საშუალო ცვლილებისა.

მაგალითი 3. ავტომრბოლელმა სტარტის შემდეგ დაიწყო სიჩქარის ზრდა და 8 წმ-ს შემდეგ 352 მ ჰქონდა გავლილი. მისი საშუალო სიჩქარე 8 წამიან ინტერვალში იქნება 352/8= 44 მ/წმ. საშუალო მნიშვნელობის (ლაგრანჟის) თეორემა ამბობს, რომ სტარტის დაწყებიდან რომელიღაც მომენტში სპიდომეტრი უჩვენებდა ზუსტად 158.4 კმ/სთ (44 მ/წმ) სიჩქარეს.

შედეგი 1. თუ $f'(x)=0$ ღია (a,b) ინტერვალის x ყოველ წერტილში, მაშინ $f(x)$ მუდმივია ამ შუალედზე.

დამტკიცება. ვთქვათ x_1, x_2 ორი განსხვავებული წერტილია (a,b) -ზე. ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ, რომ $f(x_1)=f(x_2)$. f ფუნქცია აკმაყოფილებს საშუალო მნიშვნელობის თეორემის პირობებს, ამიტომ არსებობს ისეთი $c\in(x_1,x_2)$ წერტილი, რომ

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c).$$

$f'(x)=0$ პირობის ძალით მიიღება $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=0$, საიდანაც

$f(x_2)-f(x_1)=0$, $f(x_2)=f(x_1)$ რ.დ.გ.

შედეგი 2. თუ $f'(x)=g'(x)$ ღია (a,b) ინტერვალის x ყოველ წერტილში, მაშინ $f(x)-g(x)$ მუდმივია ამ შუალედზე.

შედეგი 1 და შედეგი 2 მართებულია უსასრულო შუალედებისთვისაც

სავარჯიშოები 4.2

1--8 სავარჯიშოებში იპოვეთ c-ს მნიშვნელობა ან მნიშვნელობები, რომლებიც დააკმაყოფილებენ $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ ტოლობას.

1. $f(x)=x^2+2x-1,\quad [0,1]$

2. $f(x)=x^{2/3},\quad [0,1]$

3. $f(x)=x+\dfrac{1}{x},\quad \left[\dfrac{1}{2},2\right]$

4. $f(x)=\sqrt{x-1},\quad [1,3]$

5. $f(x)=\sin^{-1}x,\quad [-1,1]$

6. $f(x)=\ln(x-1),\quad [2,4]$

7. $f(x)=x^3-x^2,\quad [-1,2]$

8. $g(x)=\begin{cases} x^3, & -2\le x\le 0\\ x^2, & 0<x\le 2\end{cases}$

9--14 სავარჯიშოებში რომელი ფუნქცია აკმაყოფილებს საშუალო მნიშვნელობის თეორემის პირობებს და რომელი არა? პასუხი დაასაბუთეთ.

9. $f(x) = x^{2/3}, \quad [-1, 8]$

10. $f(x) = x^{4/5}, \quad [0, 1]$

11. $f(x) = \sqrt{x(1-x)}, \quad [0, 1]$

12. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

13. $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & -2 \le x \le -1 \\ 2x^2 - 3x - 3, & -1 < x \le 0 \end{cases}$

14. $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & 0 \le x \le 2 \\ 6x - x^2 - 7, & 2 < x \le 3 \end{cases}$

21--28 სავარჯიშოებში აჩვენეთ, რომ ფუნქციას მხოლოდ ერთი ნული აქვს მითითებულ შუალედზე.

21. $f(x) = x^4 + 3x + 1, \quad [-2, -1]$

22. $f(x) = x^3 + \dfrac{4}{x^2} + 7, \quad (-\infty, 0)$

23. $g(t) = \sqrt{t} + \sqrt{1+t} - 4, \quad (0, \infty)$

24. $g(t) = \dfrac{1}{1-t} + \sqrt{1+t} - 3.1, \quad (-1, 1)$

25. $r(\theta) = \theta + \sin^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right) - 8, \quad (-\infty, \infty)$

26. $r(\theta) = 2\theta - \cos^2\theta + \sqrt{2}, \quad (-\infty, \infty)$

27. $r(\theta) = \sec\theta - \dfrac{1}{\theta^3} + 5, \quad (0, \pi/2)$

28. $r(\theta) = \tan\theta - \cot\theta - \theta, \quad (0, \pi/2)$

33--34 სავარჯიშოებში მოცემული წარმოებულის მიხედვით იპოვეთ ყველა შესაძლო ფუნქცია.

33. ა) $y' = x$ ბ) $y' = x^2$ გ) $y' = x^3$

34. ა) $y' = 2x$ ბ) $y' = 2x - 1$ გ) $y' = 3x^2 + 2x - 1$

43-46 სავარჯიშოებში მოცემულია საკოორდნატო წრფის გასწვრივ მოძრავი სხეულის სიჩქარე $v = ds/dt$ და საწყისი მდებარეობა (პოზიცია). იპოვეთ სხეულის მდებარეობა დროის t მომენტში

43. $v = 9.8t + 5, \quad s(0) = 10$

44. $v = 32t - 2, \quad s(0.5) = 4$

45. $v = \sin \pi t, \quad s(0) = 0$

46. $v = \dfrac{2}{\pi} \cos \dfrac{2t}{\pi}, \quad s(\pi^2) = 1$

47--50 სავარჯიშოებში მოცემულია საკოორდნატო წრფის გასწვრივ მოძრავი სხეულის აჩქარება $a = d^2s/dt^2$, საწყისი სიჩქარე და საწყისი მდებარეობა (პოზიცია). იპოვეთ სხეულის მდებარეობა დროის t მომენტში

47. $a = e^t, \quad v(0) = 20, \quad s(0) = 5$

48. $a = 9.8, \quad v(0) = -3, \quad s(0) = 0$

49. $a = -4 \sin 2t, \quad v(0) = 2, \quad s(0) = -3$

50. $a = \dfrac{9}{\pi^2} \cos \dfrac{3t}{\pi}, \quad v(0) = 0, \quad s(0) = -1$

4.3 მონოტონური ფუნქციები და პირველი წარმოებულის ტესტი

საშუალო მნიშვნელობის თეორემის კიდევ ერთ შედეგს წარმოადგენს ფუნქციათა ზრდადობისა და კლებადობის თვისების დაკავშირება წარმოებულის ნიშანთან.

ფუნქციას **მონოტონური** ეწოდება რაიმე შუალედზე, თუ ის კლებადია ან ზრდადი ამ ინტერვალზე.

შედეგი 3. ვთქვათ $[a,b]$ შუალედზე უწყვეტი f ფუნქცია და წარმოებადია (a,b)-ზე.

თუ $f'(x) > 0$ ყოველ $x \in (a,b)$ წერტილში, მაშინ f ზრდადია $[a,b]$-ზე.

თუ $f'(x) < 0$ ყოველ $x \in (a,b)$ წერტილში, მაშინ f კლებადია $[a,b]$-ზე.

დამტკიცება. ვთქვათ x_1 და x_2 ორი წერტილია $[a,b]$-ზე და $x_1 < x_2$. გამოვიყენოთ საშუალო მნიშვნელობის თეორემა [x_1, x_2] სეგმენტისთვის:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad c \in (x_1, x_2).$$

ამ ტოლობაში მარჯვენა მხარის ნიშანი იგივეა, რაც $f'(c)$ -ს ნიშანი. ამიტომ

$f(x_2) > f(x_1)$ თუ f' დადებითია, $f(x_2) < f(x_1)$ თუ f' უარყოფითია. რ.დ.გ.

შედეგი 3 სამართლიანია უსასრულო შუალედებისთვისაც.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $f(x) = x^3 - 12x - 5$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილები და ზრდადობა-კლებადობის შუალედები.

ამოხსნა. $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x-2)(x+2)$.

კრიტიკული წერტილებია $x = -2$ და $x = 2$. ეს წერტილები ფუნქციის განსაზღვრის არეს ყოფს არაგადამფარავ $(-\infty, -2)$, (-2,2) და $(2, \infty)$ ღია ინტერვალებად, რომლებშიც წარმოებული ინარჩუნებს დადებით ან უარყოფით ნიშანს. ამ ნიშნის დასადგენად გამოვთვალოთ წარმოებული თითოეული ინტერვალის შიგა წერტილში. თავმოყრილი შედეგები ასე გამოიყურება:

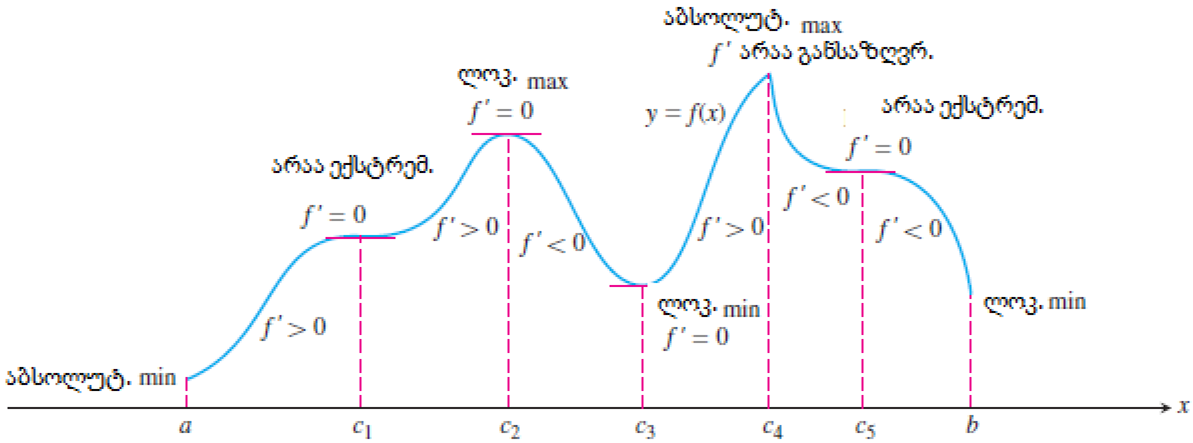
ინტერვალი	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
გამოთვლილი f'	$f'(-3) = 15$	$f'(0) = -12$	$f'(3) = 15$
f' -ის ნიშანი	$+$	$-$	$+$
f -ის ქცევა	ზრდადი	კლებადი	ზრდადი

ცხრილში ინტერვალებისთვის ჩვენ გამოვიყენეთ მკაცრი მეტობის ან ნაკლებობის ნიშნები. შეიძლებოდა აგრეთვე "$\le$" ან "$\ge$" არამკაცრი მეტ-ნაკლებობის ნიშნების გამოყენებაც, რადგან არ ვსაუბრობთ ფუნქციის ზრდადობაზე ან კლებადობაზე ცალკეულ წერტილებში.

პირველი წარმოებულის ტესტი ლოკალური ექსტრემუმებისთვის

ფიგურა 4.21-ზე, f -ის მინიმუმის წერტილის უშუალოდ მარცხნივ $f' > 0$, მარჯვნივ კი $f' < 0$. (თუ წერტილი შუალედის ბოლოა, მაშინ მისგან მხოლოდ ერთი მხარე განიხილება .) მაშასადამე, მინიმუმის წერტილის მარცხნივ ფუნქცია კლებადია, მარჯვნივ კი დადებითი. ანალოგიურად, f -ის მაქსიმუმის წერტილიდან უშუალოდ მარცხნივ $f' > 0$, უშუალოდ

მარჯვნივ კი $f' < 0$. ესე იგი, მაქსიმუმის წერტილის მარცხნივ ფუნქცია ზრდადია, მარჯვნივ კი კლებადი. ამრიგად, ლოკალური ექსტრემუმის წერტილში წარმოებული ნიშანს იცვლის.



ფიგურა 4.21

პირველი წარმოებულის ტესტი ლოკალური ექსტრემუმისთვის

ვთქვათ c არის უწყვეტი f ფუნქციის კრიტიკული წერტილი და f წარმოებადია c წერტილის შემცველ რაიმე ინტერვალზე, გარდა შესაძლოა თვით ამ წერტილისა. თუ c წერტილის მახლობლობაში

1) $\left.\begin{array}{l} f' > 0,\ x < c \\ f' < 0,\ x > c \end{array}\right\}$, მაშინ ფუნქციას c წერტილში აქვს მაქსიმუმი ;

2) $\left.\begin{array}{l} f' < 0,\ x < c \\ f' > 0,\ x > c \end{array}\right\}$, მაშინ ფუნქციას c წერტილში აქვს მინიმუმი ;

3) f' ნიშანს არ იცვლის, მაშინ c წერტილში ექსტრემუმი არა გვაქვს.

დამტკიცება. 1)პირობის თანახმად, არსებობს c-ს შემცველი ისეთი ინტრევალი (a,b), რომ

$f' > 0$ თუ ზრდადია $\Rightarrow f(c) > f(x)$ როცა $a < x < c$,

$f' < 0 \Rightarrow f$ კლებადია $\Rightarrow f(c) > f(x)$ როცა $c < x < b$.

ამრიგად, $f(c) > f(x)$, როცა $a < x < b$, ე.ი. c ლოკალური მაქსიმუმის წერტილია.

ნაწილი 2) და 3) ანალოგიურად მტკიცდება.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $f(x)=x^{4/3}-4x^{1/3}$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილები. დავადგინოთ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები. ვიპოვოთ ლოკალური და გლობალური ექსტრემალური მნიშვნელობები.

ამოხსნა.

$$f'(x)=\frac{4}{3}x^{1/3}-\frac{4}{3}x^{-2/3}=\frac{4}{3}x^{-2/3}(x-1)=\frac{4(x-1)}{3x^{2/3}}$$

წარმოებული ნულის ტოლია $x=1$-ზე და არ არსებობს $x=0$ წერტილში. მაშასადამე, მხოლოდ ეს ორი წერტილია კრიტიკული. განსაზღვრის არე კრიტიკული წერტილებით სამ ინტერვალად დაიყო. შევამოწმოთ ამ ინტერვალებში წარმოებულის ნიშანი და შესაბამისად ფუნქციის ზრდადობა კლებადობა.

ინტერვალი	$x<0$	$0<x<1$	$x>1$
f'-ის ნიშანი	$-$	$-$	$+$
f-ის ქცევა	კლებადია	კლებადია	ზრდადია

ფუნქციას ლოკალური მინიმუმი აქვს $x=1$ წერტილში, $f(1)=1$. ეს მნიშვნელობა იმავე დროს არის გლობალური მინიმუმიც.

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $f(x)=(x^2-3)e^x$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილები. დავადგინოთ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები. ვიპოვოთ ლოკალური და გლობალური ექსტრემალური მნიშვნელობები.

ამოხსნა.

$$f'(x)=(x^2-3)\cdot\frac{d}{dx}e^x+\frac{d}{dx}(x^2-3)\cdot e^x=(x^2-3)e^x+2xe^x=(x^2+2x-3)e^x.$$

წარმოებული ნული ხდება, როცა $x^2+2x-3=0$. ფესვები $x=-3$ და $x=1$ კრიტიკული წერტილებია.

ინტერვალი	$x<-3$	$-3<x<1$	$1<x$
f'-ის ნიშანი	$+$	$-$	$+$
f-ის ქცევა	ზრდადია	კლებადია	ზრდადია

ცხრილიდან ჩანს, რომ ფუნქციას ლოკალური მაქსიმუმი აქვს $x=-3$ წერტილში (≈ 0.299),

ლოკალური მინიმუმი ($\approx$-5.44) კი $x=1$ წერტილში. ეს მნიშვნელობა იმავდროულად გლობალური მინიმუმია, რადგან $f(x)>0$, როცა $|x|>3$. ფუნქცია ზრდადია $(-\infty,-3)\cup(1,\infty)$ სიმრავლეზე, კლებადია (-3, 1) ინტერვალზე

სავარჯიშოები 4.3

1--9 სავარჯიშოებში უპასუხეთ შეკითხვებზე იმ f ფუნქციის შესახებ, რომლის წარმოებულიცაა მოცემული.

ა) იპოვეთ f -ის კრიტიკული წერტილები ;

ბ) იპოვეთ f -ის ზრდადობის და კლებადობის შუალედები;

გ) რომელ წერტილებში აქვს f ფუნქციას ლოკალური მაქსიმუმი ან მინიმუმი ?

1. $f'(x) = x(x-1)$ **2.** $f'(x) = (x-1)(x+2)$

3. $f'(x) = (x-1)^2(x+2)$ **4.** $f'(x) = (x-1)^2(x+2)^2$

5. $f'(x) = (x-1)e^{-x}$

6. $f'(x) = (x-7)(x+1)(x+5)$

7. $f'(x) = \dfrac{x^2(x-1)}{x+2}, \quad x \neq -2$

8. $f'(x) = \dfrac{(x-2)(x+4)}{(x+1)(x-3)}, \quad x \neq -1, 3$

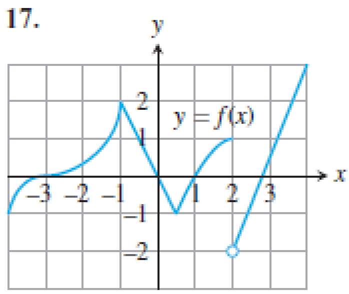
9. $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}, \quad x \neq 0$ **10.** $f'(x) = 3 - \dfrac{6}{\sqrt{x}}, \quad x \neq 0$

17--44 სავარჯიშოებში:

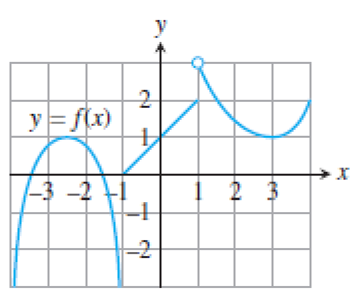
ა) იპოვეთ ინტერვალები, რომლებშიც ფუნქცია ზრდადია ან კლებადია;

ბ) ამოიცანი ფუნქციის ლოკალური და გლობალური ეხტრემუმები. დაასახელეთ ექსტრემუმის წერტილებიც.

17.



18.



19. $g(t) = -t^2 - 3t + 3$ **20.** $g(t) = -3t^2 + 9t + 5$

21. $h(x) = -x^3 + 2x^2$ **22.** $h(x) = 2x^3 - 18x$

23. $f(\theta) = 3\theta^2 - 4\theta^3$

24. $f(\theta) = 6\theta - \theta^3$

25. $f(r) = 3r^3 + 16r$

26. $h(r) = (r + 7)^3$

27. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

28. $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

29. $H(t) = \frac{3}{2}t^4 - t^6$

30. $K(t) = 15t^3 - t^5$

31. $f(x) = x - 6\sqrt{x - 1}$

32. $g(x) = 4\sqrt{x} - x^2 + 3$

33. $g(x) = x\sqrt{8 - x^2}$

34. $g(x) = x^2\sqrt{5 - x}$

35. $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}, \quad x \neq 2$

36. $f(x) = \frac{x^3}{3x^2 + 1}$

37. $f(x) = x^{1/3}(x + 8)$

38. $g(x) = x^{2/3}(x + 5)$

39. $h(x) = x^{1/3}(x^2 - 4)$

40. $k(x) = x^{2/3}(x^2 - 4)$

41. $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

42. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

43. $f(x) = x \ln x$

44. $f(x) = x^2 \ln x$

45--60 სავარჯიშოებში:

ა) იპოვეთ ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმები დასახელებულ არეში.

ბ) მათგან რომელი ექსტრემალური მნიშვნელობაა გლობალური?

45. $f(x) = 2x - x^2, \quad -\infty < x \leq 2$

46. $f(x) = (x + 1)^2, \quad -\infty < x \leq 0$

47. $g(x) = x^2 - 4x + 4, \quad 1 \leq x < \infty$

48. $g(x) = -x^2 - 6x - 9, \quad -4 \leq x < \infty$

49. $f(t) = 12t - t^3, \quad -3 \leq t < \infty$

50. $f(t) = t^3 - 3t^2, \quad -\infty < t \leq 3$

51. $h(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x, \quad 0 \leq x < \infty$

52. $k(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \quad -\infty < x \leq 0$

53. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, \quad -5 \leq x \leq 5$

54. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}, \quad 3 \leq x < \infty$

55. $g(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 1}, \quad 0 \leq x < 1$

56. $g(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}, \quad -2 < x \leq 1$

57. $f(x) = \sin 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi$

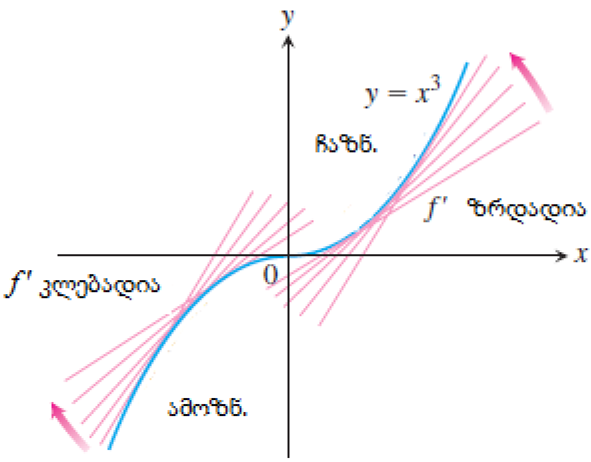
58. $f(x) = \sin x - \cos x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

59. $f(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

60. $f(x) = -2x + \tan x, \quad \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

4.4 ჩაზნექილობა და ამოზნექილობა. გრაფიკის აგება

ჩვენ ვნახეთ, როგორ გვკარნახობს პირველი წარმოებული, სადაა ფუნქცია ზრდადი ან კლებადი და გვაქვს თუ არა ლოკალური მაქსიმუმი ან მინიმუმი კრიტიკულ წერტილებში . ამ სექციაში ვნახავთ, რომ მეორე წარმოებული გვაძლევს ინფორმაციას წარმოებადი ფუნქციის გრაფიკის ჩაზნექილობა-ამოზნექილობაზე. თუ მოვიშველიებთ აგრეთვე ჩვენს ცოდნას ფუნქციათა ასიმპტოტიკურ ყოფაქცევაზე და სიმეტრიაზე, ჩვენ შევძლებთ დავხაზოთ ფუნქციის ზუსტი გრაფიკი .



ფიგურა 4.24

ამოზნექილობები და ჩაზნექილობები

როგორც ფიგურა 4.24-ზე ვხედავთ, $f(x) = x^3$ ფუნქცია ზრდადია, მაგრამ ეს ერთნაირად არ ხდება $(-\infty, 0)$ და $(0, \infty)$ შუალედებზე.

როცა სათავეს ვუახლოვდებით მარცხნიდან, გრაფიკი ყოველთვის მხების ქვეშ აღმოჩნდება, x-ღერძის მიმართ მხების დახრის კუთხე კი კლებულობს (ე.ი. f' კლებულობს). თუ გავაგრძელებთ მოძრაობას სათავიდან მარჯვნივ, გრაფიკი ყოველთვის მხების ზევითაა, x -ღერძის მიმართ მხების დახრის კუთხე კი იზრდება (ე.ი. f' იზრდება).

ვიტყვით, რომ $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი **ამოზნექილია** (**ჩაზნექილია**) $M(x_0, f(x_0))$ **წერტილში**, თუ ამ წერტილის შემცველ რაიმე ღია ინტერვალზე ფუნქციის გრაფიკი მდებარეობს M -ზე გავლებული მხების ქვემოთ (ზემოთ).

ვიტყვით, რომ ფუნქცია **ამოზნექილია (ჩაზნექილია) შუალედზე,** თუ იგი ამოზნექილია (ჩაზნექილია) ამ შუალედის ყოველ წერტილზე.

წარმოებულების ენაზე ჩაზნექილობა და ამოზნექილობა ასე განისაზღვრება.

განსაზღვრება. f ამოზნექილია (ჩაზნექილია) ღია I ინტერვალზე, თუ f' განსაზღვრულია და კლებადია (ზრდადია) I -ზე.

თუ $y = f(x)$ ფუნქციას აქვს მეორე წარმოებული, მაშინ $f'' > 0$ შემთხვევაში f' ზრდადია, $f'' < 0$ შემთხვევაში კი f' კლებადია.

მეორე წარმოებულის ტესტი ჩაზნექილობა-ამოზნექილობაზე

ვთქვათ $y = f(x)$ ფუნქცია ორჯერ წარმოებადია I ინტერვალზე.

1. თუ I ინტერვალზე $f'' > 0$, მაშინ f-ის გრაფიკი ჩაზნექილია I-ზე.
2. თუ I ინტერვალზე $f'' < 0$, მაშინ f-ის გრაფიკი ამოზნექილია I-ზე.

მაგალითი 1.

ა) $y = x^3$ მრუდი ამოზნექილია $(-\infty, 0)$ შუალედზე, რადგან $y'' = 6x < 0$ და ჩაზნექილია $(0, \infty)$ შუალედზე, რადგან $y'' = 6x > 0$.

ბ) $y = x^2$ მრუდი ჩაზნექილია $(-\infty, \infty)$ შუალედზე, რადგან $y'' = 2$ ყოველთვის დადებითია.

განსაზღვრება. წერტილს, რომელშიც არსებობს ფუნქციის გრაფიკის მხები და რომელშიც ჩაზნექილობა იცვლება, **გადაღუნვის წერტილი** ეწოდება.

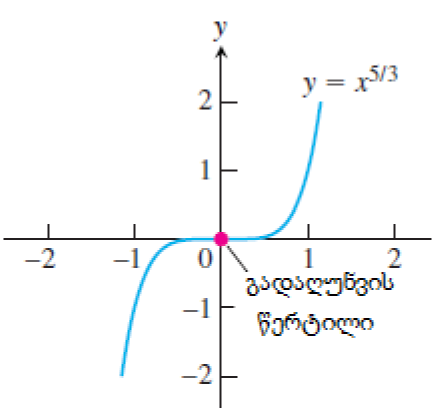
$y = x^3$ მრუდისთვის კოორდინატთა სათავე გადაღუნვის წერტილია.

თუ $(c, f(c))$ გადაღუნვის წერტილია, მაშინ ან $f''(c) = 0$, ან $f''(c)$ არ არსებობს.

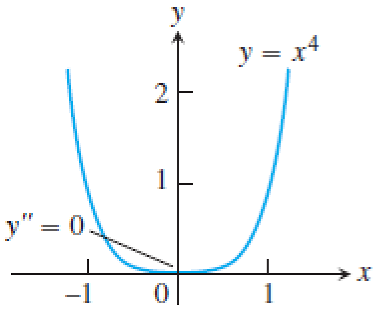
მაგალითი 3. $f(x) = x^{5/3}$ ფუნქციის გრაფიკს კოორდინატთა სათავეში ჰორიზონტალური მხები აქვს, რადგან $f'(x) = (5/3)x^{2/3} = 0$ როცა $x = 0$. თუმცა მეორე წარმოებული

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{5}{3}x^{2/3}\right) = \frac{10}{9}x^{-1/3}$$

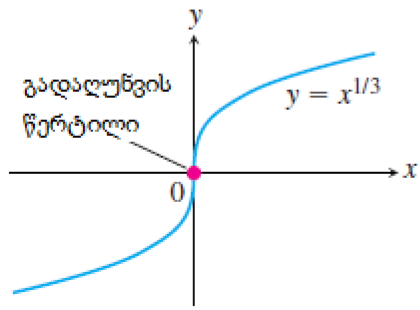
არ არსებობს $x = 0$ წერტილში. მიუხედავად ამისა, $f''(x) < 0$ როცა $x < 0$ და $f''(x) > 0$ როცა $x > 0$, ასე რომ მეორე წარმოებული ნიშანს იცვლის $x = 0$-ზე და კოორდინატთა სათავე გადაღუნვის წერტილია. გრაფიკი ფიგურა 4.27-ზე არის ნაჩვენები.



ფიგურა 4.27



ფიგურა 4.28



ფიგურა 4.29

მაგალითი 4. $y=x^4$ მრუდისთვის კოორდინატთა სათავე გადაღუნვის წერტილს არ წარმოადგენს (ფიგურა 4.28). მართალია $x=0$-ზე $y''=12x^2$ ნულის ტოლია, მაგრამ ის ნიშანს არ იცვლის.

მაგალითი 5. $y=x^{1/3}$ მრუდისთვის კოორდინატთა სათავე გადაღუნვის წერტილია, რადგან მისი მეორე წარმოებული

$$y''=\frac{d^2}{dx^2}\left(x^{1/3}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^{-2/3}\right)=-\frac{2}{9}x^{-5/3}$$

დადებითია როცა $x<0$ და უარყოფითია, როცა $x>0$. თუმცა არც პირველი და არც მეორე წარმოებული $x=0$-ზე არ არსებობს. ამ წერტილში მრუდს ვერტიკალური მხები აქვს (ფიგურა 4.29).

მაგალითი 6. ჰორიზონტალური საკოორდინატო წრფის გასწვრივ მოძრავი ნაწილაკის გადაადგილების ფუნქციაა

$$s(t)=2t^3-14t^2+22t-5,\quad t\ge 0.$$

ვიპოვოთ სიჩქარე და აჩქარება და აღვწეროთ ნაწილაკის მოძრაობა.

ამოხსნა. სიჩქარეა

$$v(t)=s'(t)=6t^2-28t+22=2(t-1)(3t-11).$$

აჩქარებაა

$$a(t)=v'(t)=s''(t)=12t-28=4(3t-7).$$

როცა $s(t)$ ფუნქცია იზრდება, ნაწილაკი გადაადგილდება მარჯვნივ; როცა $s(t)$ მცირდება, ნაწილაკი გადაადგილდება მარცხნივ.

შევნიშნოთ, რომ პირველი წარმოებული ($v=s'$) ნული ხდება $t=1$ და $t=11/3$ კრიტიკულ წერტილებში

ინტერვალი	$0<t<1$	$1<t<11/3$	$11/3<t$
$v=s'$ -ის ნიშანი	+	−	+
s -ის ქცევა	ზრდადია	კლებადია	ზრდადია
მოძრ. მიმართულ.	მარჯვნივ	მარცხნივ	მარჯვნივ

ნაწილაკი მარჯვნივ მოძრაობს $[0, 1)$ და $(11/3, \infty)$ დროის მონაკვეთებში, მარცხნივ კი $(1, 11/3)$ შუალედში. ის მყისიერად ჩერდება $t=1$ და $t=11/3$ მომენტში. აჩქარება ნულის ტოლია, როცა $t=7/3$.

ინტერვალი	$0<t<7/3$	$7/3<t$
$a=s''$ -ის ნიშანი	−	+
s -ის გრაფიკი	ამოზნექილია	ჩაზნექილია

ნაწილაკი იწყებს მოძრაობას მარჯვნივ და თანდათან ანელებს სიჩქარეს. $t=1$ მომენტში სიჩქარე მყისიერად ნულდება და ნაწილაკი იწყებს მარცხნივ მოძრაობას (ეს ხდება დროის $[0, 7/3)$ შუალედში მარცხნივ მიმართული აჩქარების გავლენით). $t=7/3$ მომენტიდან აჩქარება მარცხენა მიმართულებას მარჯვენათი იცვლის, მაგრამ ნაწილაკი კვლავ მარცხნივ აგრძელებს მოძრაობას, ვიდრე არ შეჩერდება მარჯვენა აჩქარების გავლენით. $t=11/3$ მომენტიდან ნაწილაკი კვლავ იცვლის მიმართულებას: გადაადგილდება მარჯვნივ, საითაც მიმართულია აჩქარება.

თეორემა 5._ მეორე წარმოებულის ტესტი ლოკალური ექსტრემუმებისათვის

ვთაქვათ f'' უწყვეტია $x=c$ -ს შემცველ ღია ინტერვალზე.

1. თუ $f'(c)=0$ და $f''(c)<0$, მაშინ f -ს აქვს ლოკალური მაქსიმუმი $x=c$ -ში.

2. თუ $f'(c)=0$ და $f''(c)>0$, მაშინ f -ს აქვს ლოკალური მაინიმუმი $x=c$ -ში.

3. თუ $f'(c)=0$ და $f''(c)=0$, მაშინ ტესტი არ მოქმედებს --ფუნქციას $x=c$ წერტილში შეიძლება ჰქონდეს ლოკალური მაქსიმუმი, მინიმუმი ან არცერთი .

დამტკიცება. (1). თუ $f''(c)<0$, მაშინ f''-ის უწყვეტობის გამო $f''(x)<0$ რაიმე ღია, c -ს შემცველ I ინტერვალზე. მაშასადამე f' კლებადია I -ზე. რადგან $f'(c)=0$, ამიტომ f' -ის ნიშანი დადებითიდან უარყოფითზე იცვლება c -ზე გავლისას. პირველი წარმოებულის ტესტის თანახმად ეს ნიშნავს, რომ c ყოფილა ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი.

ასევე მტკიცდება პუნქტი **(2)** .

პუნქტი **(3)** -სთვის განვიხილოთ სამი ფუნქცია $y=x^4$, $y=-x^4$ და $y=x^3$. თითოეული მათ-განისათვის პირველი და მეორე წარმოებულები ნულის ტოლია $x=0$ -ზე. ამ ფუნქციებიდან პირველს აქვს ლოკალური მინიმუმი, მეორეს ლოკალური მაქსიმუმი. $y=x^3$ კი ზრდადია $x=0$ -ის შემცველ ნებისმიერ ღია ინტერვალზე , არც მინიმუმი და არც მაქციმუმი არ აქვს ამ წერტილში.

მაგალითი 7. ავაგოთ

$$f(x)=x^4-4x^3+10$$

ფუნქციის გრაფიკი შემდეგი სქემის მიხედვით.

(ა) განვსაზღვროთ ექსტრემუმის წერტილები.

(ბ) ვიპოვოთ ზრდადობის და კლბადობის შუალედები.

(გ) ვიპოვოთ ამოზნექილობა-ჩაზნექილობის შუალედები.

(დ) დავადგინოთ გრაფიკის ზოგადი ფორმა.

(ე) ავაგოთ სპეციფიკური წერტილები: ლოკალური მაქსიმუმის და მინიმუმის, გადაღუნვის და ღერძებთან კვეთის. შემდეგ ავაგოთ გრაფიკი.

ამოხსნა. f ფუნქცია უწყვეტია, რადგან $f'(x)=4x^3-12x^2$ არსებობს. f -ის განსაზღვრის არეა $(-\infty,\infty)$ ინტერვალი. f' -ის განსაზღვრის არეა $(-\infty,\infty)$, ამიტომ კრიტიკული წერტილები მხოლოდ f' -ის ნულებია.

$$f'(x)=4x^2(x-3) \Rightarrow \text{ კრიტიკული წერტილებია } x=0 \text{ და } x=3.$$

ინტერვალი	$x<0$	$0<x<3$	$3<x$
f' **-ის ნიშანი**	$-$	$-$	$+$
f **-ის ქცევა**	კლებადია	კლებადია	ზრდადია

(ა) $x=0$ -ში ექსტრემუმი არ გვაქვს. $x=3$ -ში გვაქვს ლოკალური მინიმუმი.

(ბ) ფუნქცია კლებადია $(-\infty,0]$ და $[0,3]$ შუალედებზე, ზრდადია $[3,\infty)$ -ზე.

(გ) $f''=12x^2-24x=12x(x-2)$ ნული ხდება $x=0$ და $x=2$ -ზე.

ინტერვალი	$x<0$	$0<x<2$	$2<x$
f''-ის ნიშანი	+	−	+
f -ის ქცევა	ჩაზნექილია	ამოზნექილია	ჩაზნექილია

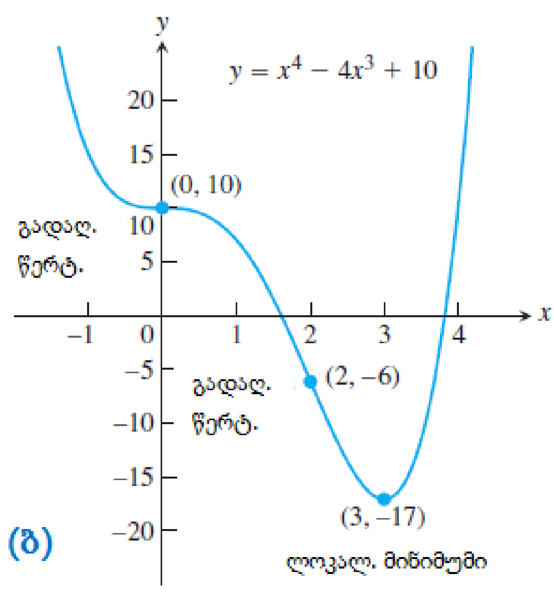
f ჩაზნექილია $(-\infty,0)$ და $(2,\infty)$ ინტერვალებზე; ამოზნექილია $(0, 2)$ -ზე.

(დ) გავაერთიანოთ ორივე ცხრილის შედეგები:

$x<0$	$0<x<2$	$2<x<3$	$3<x$
კლებადი ჩაზნექილია	კლებადი ამოზნექილია	კლებადი ჩაზნექილია	ზრდადი ჩაზნექილია

ავაგოთ გრაფიკის ზოგადი ფორმა (ფიგურა 4.30 ა).

(ე) ავაგოთ ღერძებთან კვეთის წერტილები (შეძლებისდაგვარად), აგრეთვე წერტიები, რომლებშიც f' და f'' ნულდება. მოვნიშნოთ ლოკალური ექსტრემუმების და გადაღუნვის წერტილები. გრაფიკის ზოგადი ფორმის მიხედვით ავაგოთ მრუდი. თუ საჭიროა, ავაგოთ ცალკეული წერტილებიც. f -ის გრაფიკი ფიგურა 4.30 ბ -ზეა ნაჩვენები.



ფიგურა 4.30

$y = f(x)$ **ფუნქციის გრაფიკის აგების მეთოდიკა**

1. დავაგინოთ f -ის განსაზღვრის არე და შესაძლო სიმეტრიები.

2. ვიპოვოთ y' და y'' წარმოებულები.

3. ვიპოვოთ f -ის კრიტიკული წერტილები. დავადგინოთ ფუნქციის ქცევა ამ წერტილებში.

4. ვიპოვოთ ზრდადობის და კლებადობის შუალედები.

5. ვიპოვოთ გადაღუნვის წერტილები (თუ არსებობს) და განვსაზღვროთ ამოზნექილობა- ჩაზნექილობა.

6. განვსაზღვროთ ასიმპტოტები (თუ არსებობს).

7. ავაგოთ პუნქტ 3-5 -ში ნაპოვნი წერტილები, აგრეთვე შეძლებისდაგვარად ღერძებთან კვეთები. ავაგოთ გრაფიკი

მაგალითი 9. ავაგოთ $f(x) = \dfrac{x^2+4}{2x}$ ფუნქციის გრაფიკი.

1. f განსაზღვრის არეა $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. ღერძებთან კვეთა არ გვაქვს. რადგან $f(-x) = -f(x)$, ფუნქცია კენტია და გრაფიკი კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიულია.

2. $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x} \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{x^2-4}{2x^2}$;

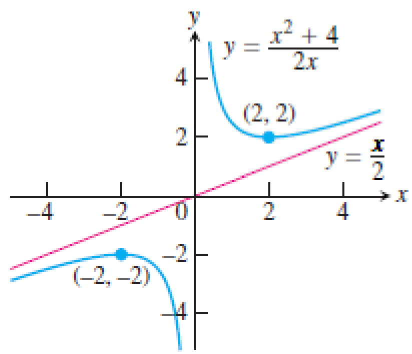
$f''(x) = \dfrac{4}{x^3}$ (არსებობს ყველგან f -ის განსაზღვრის არეში).

3. კრიტიკული წერტილებია $x=-2$ და $x=2$ (როცა $f'(x)=0$). რადგან $f''(-2)<0$ და $f''(2)>0$, ამიტომ ლოკალური მაქსიმუმი გვაქვს $x=-2$ -ზე, $f(-2)=-2$;

ლოკალური მინიმუმი გვაქვს $x=2$ -ზე, $f(2)=2$.

4. $(-\infty, -2)$ ინტერვალზე წარმოებული f' დადებითია, რადგან $x^2-4>0$, ასე რომ გრფიკი ზრდადია; $(-2, 0)$ ინტერვალზე წარმოებული უარყოფითია და გრაფიკი კლებადია. ასევე, გრაფიკი კლებადია $(0, 2)$ -ზე და ზრდადია $(2, \infty)$ -ზე.

5. გადაღუნვის წერტილები არ აქვს, რადგან $f''(x)<0$ თუ $x<0$; $f''(x)>0$ თუ $x>0$. f'' არსებობს f -ის განსაზღვრის არეზე ყველგან და განსხვავებული ნულისგან. გრაფიკი ამოზნექილია $(-\infty,0)$ ინტერვალზე და ჩაზნექილია $(0,\infty)$ ინტერვალზე.



ფიგურა 4.32

6. $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right) = +\infty$ და

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right) = -\infty$,

ამიტომ y -ღერძი ვერტიკალური ასიმპტოტია. გარდა ამისა, როცა $x\to-\infty$ ან $x\to\infty$, მაშინ f -ის გრაფიკი უახლოვდება $y = x/2$ წრფეს. მაშასადამე , $y = x/2$ არის დახრილი ასიმპტოტი.

7. გრაფიკი წარმოდგენილია ფიგურა 4.32-ზე.

სავარჯიშოები 4.4

13--58 სავარჯიშოებში გამოიკვლიეთ ფუნქცია და ააგეთ გრაფიკი

13. $y = -2x^3 + 6x^2 - 3$ **14.** $y = 1 - 9x - 6x^2 - x^3$

15. $y = (x-2)^3 + 1$

16. $y = 1 - (x+1)^3$

17. $y = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$

18. $y = -x^4 + 6x^2 - 4 = x^2(6 - x^2) - 4$

19. $y = 4x^3 - x^4 = x^3(4 - x)$

20. $y = x^4 + 2x^3 = x^3(x + 2)$

21. $y = x^5 - 5x^4 = x^4(x - 5)$

22. $y = x\left(\frac{x}{2} - 5\right)^4$

23. $y = x + \sin x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

24. $y = x - \sin x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

25. $y = \sqrt{3}x - 2\cos x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

26. $y = \frac{4}{3}x - \tan x, \quad \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

27. $y = \sin x \cos x, \quad 0 \le x \le \pi$

28. $y = \cos x + \sqrt{3}\sin x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

29. $y = x^{1/5}$ **30.** $y = x^{2/5}$

31. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

32. $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2x+1}$

33. $y=2x-3x^{2/3}$

34. $y=5x^{2/5}-2x$

35. $y=x^{2/3}\left(\dfrac{5}{2}-x\right)$

36. $y=x^{2/3}(x-5)$

37. $y=x\sqrt{8-x^2}$

38. $y=(2-x^2)^{3/2}$

39. $y=\sqrt{16-x^2}$

40. $y=x^2+\dfrac{2}{x}$

41. $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$

42. $y=\sqrt[3]{x^3+1}$

43. $y=\dfrac{8x}{x^2+4}$

44. $y=\dfrac{5}{x^4+5}$

45. $y=|x^2-1|$

46. $y=|x^2-2x|$

47. $y=\sqrt{|x|}=\begin{cases}\sqrt{-x}, & x<0\\ \sqrt{x}, & x\geq 0\end{cases}$

48. $y=\sqrt{|x-4|}$

49. $y=xe^{1/x}$

50. $y=\dfrac{e^x}{x}$

51. $y=\ln(3-x^2)$

52. $y=x(\ln x)^2$

53. $y=e^x-2e^{-x}-3x$

54. $y=xe^{-x}$

55. $y=\ln(\cos x)$

56. $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

57. $y=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

58. $y=\dfrac{e^x}{1+e^x}$

91--100 სავარჯიშოებში ააგეთ რაციონალური ფუნქციის გრაფიკი.

91. $y=-\dfrac{x^2-2}{x^2-1}$

92. $y=\dfrac{x^2-4}{x^2-2}$

93. $y=\dfrac{x^2}{x+1}$

94. $y=-\dfrac{x^2-4}{x+1}$

95. $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$

96. $y=-\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$

97. $y=\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2+x-2}$

98. $y=\dfrac{x^3+x-2}{x-x^2}$

99. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$

100. $y=\dfrac{x-1}{x^2(x-2)}$

104. ააგეთ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი შემდეგი მონაცემებით:

$f(-2)=8,$ $\quad f'(2)=f'(-2)=0,$

$f(0)=4,$ $\quad f'(x)<0$ თუ $|x|<2,$

$f(2)=0,$ $\quad f''(x)<0$ თუ $x<0,$

$f'(x)>0$ თუ $|x|>2,$ $\quad f''(x)>0$ თუ $x>0.$

105. ააგეთ $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი შემდეგი მონაცემებით:

x	y	წარმოებულები
$x < 2$		$y' < 0,\ y'' > 0$
2	1	$y' = 0,\ y'' > 0$
$2 < x < 4$		$y' > 0,\ y'' > 0$
4	4	$y' > 0,\ y'' = 0$
$4 < x < 6$		$y' > 0,\ y'' < 0$
6	7	$y' = 0,\ y'' < 0$
$x > 6$		$y' < 0,\ y'' < 0$

112. ვთქვათ, $y = f(x)$ ფუნქციის წარმოებულია

$$y' = (x-1)^2(x-2)(x-4).$$

იპოვეთ ლოკალური მაქსიმუმის, ლოკალური მინიმუმის და გადაღუნვის წერტილების აბსცისები.

4.5 განუსაზღვრელობები და ლოპიტალის წესი

ვიტყვით, რომ ორი ფუნქციის შეფარდება $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ წარმოადგენს $\dfrac{0}{0}$ სახის განუზღვრელობას როცა $x \to c$, თუ $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$. ამ ტიპის ზღვრის გამოთვლას განუსაზღვრელობის გახსნა ეწოდება.

თეორემა 6_ ლოპიტალის წესი. ვთქვათ f და g დიფერენცირებადი ფუნქციებია $x = a$-ს შემცველ I ღია ინტერვალზე. ვთქვათ $f(a) = g(a) = 0$ და $g'(x) \neq 0$ I-ზე, თუ $x \neq a$. მაშინ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

იმ პირობით, რომ ტოლობის მარჯვენა მხარეში ზღვარი არსებობს.

მაგალითი 1. შემდეგი ზღვრები შეიცავენ 0/0 სახის განუსაზღვრელობებს, ამიტომ გამოვიყენებთ ლოპიტალის წესს. ზოგიერთ შემთხვევაში წესი განმეორებითაც შეიძლება იქნეს გამოყენებული.

(ა) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sin x}{1}=\left.\dfrac{3-\sin x}{1}\right|_{x=0}=2$

(ბ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1}=\dfrac{1}{2}$

(გ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1-x/2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1/2)(1+x)^{-1/2}-1/2}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-(1/4)(1+x)^{-3/2}}{2}=-\dfrac{1}{8}$

(დ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{6}=\dfrac{1}{6}$

ლოპიტალის წესის გამოყენება შეიძლება ცალმხრივი ზღვრების შემთხვევაშიც.

მაგალითი 3.

(ა) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos x}{2x}=\infty$

(ბ) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cos x}{2x}=-\infty$.

∞/∞, $\infty\cdot 0$, $\infty-\infty$ სახის განუსაზღვრელობები

მაგალითი 4. ვიპოვოთ ∞/∞ სახის ზღვრები.

(ბ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{1/\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$

(გ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{2}=\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{2}=\infty$.

მაგალითი 5. ვიპოვოთ $\infty\cdot 0$ სახის ზღვრები.

(ა) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{h\to 0^+}\left(\dfrac{1}{h}\sin h\right)=\lim\limits_{h\to 0^+}\left(\dfrac{\sin h}{h}\right)=1$ (გამოვიყენეთ აღნიშვნა $h=1/x$).

(ბ) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{1/\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1/x}{-1/2x^{3/2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-2\sqrt{x})=0$ (აქ ჯერ $\infty\cdot 0$ მივიყვანეთ ∞/∞ სახეზე)

მაგალითი 6. ვიპოვოთ $\infty-\infty$ სახის ზღვარი $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

ამოხსნა. თუ $x\to 0^-$, მაშინ $\sin x\to 0^-$ და $\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\to -\infty-(-\infty)=-\infty+\infty$.

ასევე, თუ $x\to 0^+$, მაშინ $\sin x\to 0^+$ და $\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\to \infty-\infty$.

ცალმხრივმა ზღვრებმა შედეგი ვერ მოგვცა. გამოსავალი რომ ვიპოვოთ, ჯერ შევასრულოთ გამოკლება $\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}$.

ახლა გამოვიყენოთ ლოპიტალის წესი

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

განუსაზღვრელი ხარისხები

იმ ზღვრების გამოთვლა, რომლებშიც გვხვდება 1^∞, 0^0 და ∞^0 სახის განუსაზღვრელობები, შეიძლება ხელმისაწვდომი გავხადოთ გალოგარითმების და ლოპიტალის წესის ერთობლივი გამოყენებით. ამასთან, დაგვჭირდება შემდეგი დებულება.

> თუ $\lim_{x\to a} f(x)=L$, მაშინ
>
> $$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} e^{\ln f(x)}=e^L.$$
>
> აქ a შეიძლება იყოს რიცხვი ან უსასრულობა.

მაგალითი 7. ლოპიტალის წესის გამოყენებით ვაჩვენოთ, რომ $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x}=e$.

ამოხსნა. გვაქვს 1^∞ სახის განუსაზღვრელობა. აღვნიშნოთ $f(x)=(1+x)^{1/x}$ და გამოვთვალოთ $\lim_{x\to 0^+}\ln f(x)$. რადგან

$$\ln f(x)=\ln(1+x)^{1/x}=\frac{1}{x}\ln(1+x),$$

ლოპიტალის წესით მივიღებთ

$$\lim_{x\to 0^+}\ln f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{1+x}}{1}=1.$$

ამრიგად $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x}=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^{\ln f(x)}=e^1=e$.

მაგალითი 8. ვიპოვოთ $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$.

ამოხსნა. გვაქვს ∞^0 სახის განუსაზღვრელობა. აღვნიშნოთ $f(x)=x^{1/x}$ და ვიპოვოთ $\lim_{x\to\infty}\ln f(x)$. რადგან

$$\ln f(x)=\ln x^{1/x}=\frac{\ln x}{x},$$

ლოპიტალის წესით მივიღებთ

$$\lim_{x\to\infty}\ln f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=\frac{0}{1}=0.$$

ამრიგად $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} e^{\ln f(x)}=e^0=1$.

სავარჯიშოები 4.5

1--6 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ ზღვარი ლოპიტალის წესით. შემდეგ იგივე ზღვარი გამოთვალეთ თავი 2-ში ნასწავლი მეთოდით.

1. $\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^2-4}$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$
3. $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x}{7x^2+1}$
4. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{4x^3-x-3}$
5. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$
6. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x}{x^3+x+1}$

7--40 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ ზღვარი ლოპიტალის წესის გამოყენებით

7. $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$
8. $\lim_{x\to -5}\frac{x^2-25}{x+5}$
9. $\lim_{t\to -3}\frac{t^3-4t+15}{t^2-t-12}$
10. $\lim_{t\to 1}\frac{3t^3-3}{4t^3-t-3}$
11. $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x}{7x^3+3}$
12. $\lim_{x\to\infty}\frac{x-8x^2}{12x^2+5x}$

13. $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t^2}{t}$

14. $\lim_{t\to 0} \frac{\sin 5t}{2t}$

15. $\lim_{x\to 0} \frac{8x^2}{\cos x - 1}$

16. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

17. $\lim_{\theta\to \pi/2} \frac{2\theta - \pi}{\cos(2\pi - \theta)}$

18. $\lim_{\theta\to -\pi/3} \frac{3\theta + \pi}{\sin(\theta + (\pi/3))}$

19. $\lim_{\theta\to \pi/2} \frac{1 - \sin\theta}{1 + \cos 2\theta}$

20. $\lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{\ln x - \sin \pi x}$

21. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\ln(\sec x)}$

22. $\lim_{x\to \pi/2} \frac{\ln(\csc x)}{(x - (\pi/2))^2}$

23. $\lim_{t\to 0} \frac{t(1 - \cos t)}{t - \sin t}$

24. $\lim_{t\to 0} \frac{t \sin t}{1 - \cos t}$

25. $\lim_{x\to (\pi/2)^-} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sec x$

26. $\lim_{x\to (\pi/2)^-} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x$

27. $\lim_{\theta\to 0} \frac{3^{\sin\theta} - 1}{\theta}$

28. $\lim_{\theta\to 0} \frac{(1/2)^{\theta} - 1}{\theta}$

29. $\lim_{x\to 0} \frac{x2^x}{2^x - 1}$

30. $\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 1}{2^x - 1}$

31. $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln(x + 1)}{\log_2 x}$

32. $\lim_{x\to \infty} \frac{\log_2 x}{\log_3 (x + 3)}$

33. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^2 + 2x)}{\ln x}$

34. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(e^x - 1)}{\ln x}$

35. $\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{5y + 25} - 5}{y}$

36. $\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{ay + a^2} - a}{y}, \quad a > 0$

37. $\lim_{x\to \infty} (\ln 2x - \ln(x + 1))$

38. $\lim_{x\to 0^+} (\ln x - \ln \sin x)$

39. $\lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)^2}{\ln(\sin x)}$

40. $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{3x + 1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

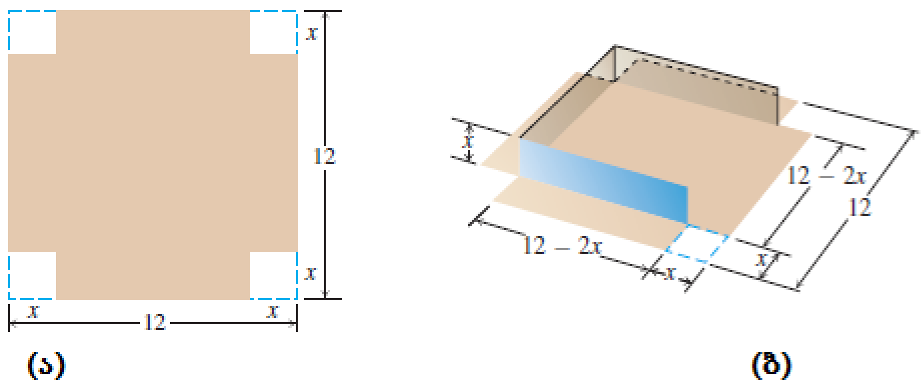
79. იპოვეთ c -ს მნიშვნელობა, როლმლისთვისაც

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{9x - 3\sin 3x}{5x^3}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

ფუნქცია უწყვეტი გახდება $x = 0$ წეტილში.

4.6 გამოყენებითი ოპტიმიზაცია

მაგალითი 1. 12 დმ-იანი გვერდის მქონე კვადრატული ფორმის თუნუქის ფურცლიდან საჭიროა თავღია ყუთის დამზადება. ამისათვის ოთხივე წვეროსთან ჩამოჭრიან მცირე კვადრატებს და გვერდებს ზევით გადაღუნავენ (ფიგურა 4.35). რა ზომის უნდა იყოს ჩამოჭრილი კვადრატების გვერდი , რომ ყუთის მოცულობა უდიდესი გამოვიდეს?



ფიგურა 4.35

ამოხსნა. ვთქვათ, ჩამოჭრილი მცირე კვადრატის გვერდია x დმ. მაშინ ყუთის მოცულობა იქნება

$$V(x) = x(12-2x)^2 = 144 - 48x^2 + 4x^3 , \qquad 0 < x < 6 .$$

გავაწარმოოთ ეს ფუნქცია და ვიპოვოთ კრიტიკული წერტილები:

$$V' = 144 - 96x + 12x^2 = 12(12 - 8x + x^2) = 12(x-2)(x-6) .$$

კრიტიკული წერტილებია $x = 2$ და $x = 6$. მათგან მხოლოდ $x = 2$ ეკუთვნის ფუნქციის განსაზღვრის არეს და ამ წერტილში V -ს აქვს უდიდესი მნიშვნელობა $V(2) = 128$.

ამრიგად, ჩამოჭრილი კვადრატის გვერდი უნდა იყოს 2 დმ.

ამოცანა 2. რა უმცირესი რაოდენობის მასალაა საჭირო 1ლ მოცულობის ცილინდრული ქილის დასამზადებლად? (ფიგურა 4.37)

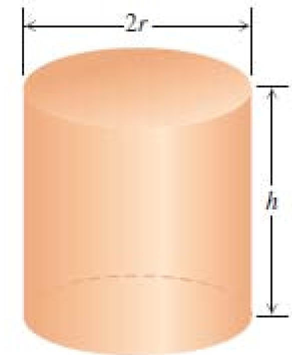
ამოხსნა. თუ r და h სანტიმეტრებშია გაზომილი, მაშინ ქილის მოცულობაა

$$\pi r^2 h = 1000 . \qquad (*)$$

ზედაპირის ფართობია $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

როგორ გავიგოთ ფრაზა "უმცირესი რაოდენობის მასალა"? პირველი მიახლოებისთვის ჩვენ უგულვებელვყოფთ თუნუქის ფურცლის სისქეს და დამზადებისას წარმოშობილ ნარჩენებს.

(*) ტოლობიდან ამოვხსნათ h და წარმოვადგინოთ ზედაპირის ფართობი, როგორც ერთი ცვლადის ფუნქცია:



ფიგურა 4.37

$$h=\frac{1000}{\pi r^2};\qquad A=2\pi r^2+2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right)=2\pi r^2+\frac{2000}{r}.$$

ვიპოვოთ კრიტიკული წერტილები:

$$\frac{dA}{dr}=4\pi r-\frac{2000}{r^2};$$

$$4\pi r-\frac{2000}{r^2}\quad\Rightarrow\quad 4\pi r^3=2000\ ;$$

$$r=\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\approx 5.42.$$

რა ხდება , როცა $r=\sqrt[3]{500/\pi}$?

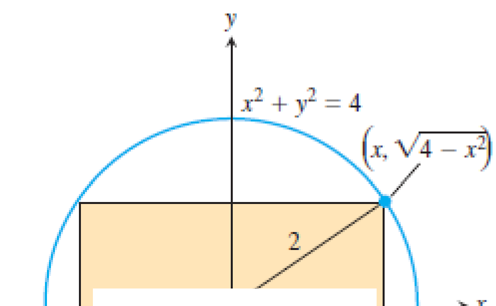
მეორე წარმოებული $\frac{dA}{dr}=4\pi+\frac{4000}{r^3}>0$, ამიტომ კრიტიკულ წერტილში მინიმუმი გვაქვს. შესაბამისი h-ის მნიშვნელობაა

$$h=\frac{1000}{\pi r^2}=2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}=2r\ .$$

ამრიგად, უმცირესი დანახარჯი გვექნება, თუ სიმაღლეს ფუძის რადიუსზე ორჯერ მეტს ავიღებთ, ანუ $r\approx 5.42$ სმ და $h\approx 10.84$ სმ.

მაგალითი 3. მართკუთხედი ჩახაზულია 2 სმ რადიუსიან ნახევარწრეში. რა უდიდესი ფართობი შეიძლება ჰქონდეს მართკუთხედს და როგორია მისი განზომილებები?

ამოხსნა. ვთქვათ $(x,\sqrt{4-x^2})$ არის წრეწირის რკალზე მდებარე მართკუთხედის წვერო (ფიგურა 4.9).



ფიგურა 4.9

ამ მართკუთხედის სიგრძეა $2x$, სიმაღლეა $\sqrt{4-x^2}$, ფართობია

$$A(x)=2x\sqrt{4-x^2},\qquad 0<x<2\ .$$

ვიპოვოთ წარმოებულის ნულები:

$$\frac{dA}{dx}=\frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}+2\sqrt{4-x^2}\ ;$$

$$\frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}+2\sqrt{4-x^2}=0;$$

$$-2x^2+2(4-x^2)=0;$$

$$x^2=2;\qquad x=\pm\sqrt{2}\ .$$

ამ ორი ფესვიდან მხოლოდ $x=\sqrt{2}$ ეკუთვნის ფუნქციის განსაზღვრის არეს და ამ წერტილში გვაქვს მაქსიმუმი

$$A(\sqrt{2})=2\sqrt{2}\sqrt{4-2}=4.$$

ამრიგად, მაქსიმალური ფართობი 4 მიიღწევა , როცა მართკუთხედის სიმაღლეა $\sqrt{4-x^2}=\sqrt{2}$, სიგრძე კი $2x=2\sqrt{2}$.

სავარჯიშოები 4.6

3. ფიგურა (I)-ზე ნაჩვენებია მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედში ჩახაზული მართკუთხედი. სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 2-ის ტოლია.

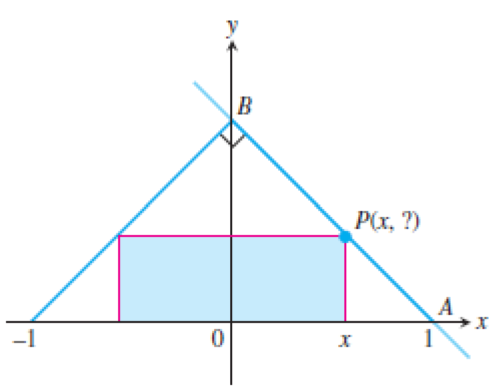
ა) P წერტილის y კოორდინატი გამოსახეთ x-ით (მითითება: დაწერეთ AB წრფის განტოლება.

ბ) მართკუთხედის ფართობი გამოსახეთ x-ით.

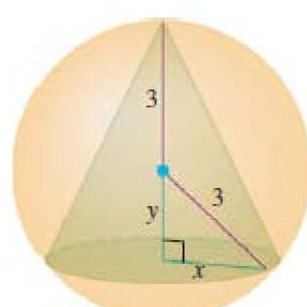
გ) რა უდიდესი ფართობი შეიძლება ჰქონდეს მართკუთხედს და როგორია მისი განზომილებები?

5. მართკუთხედის ფუძე x-ღერძზეა, ზედა ორი წვერო კი $y=12-x^2$ პარაბოლაზე ძევს. რა უდიდესი ფართობი შეიძლება ჰქონდეს მართკუთხედს და როგორია მისი განზომილებები?

12. იპოვეთ უდიდესი მართი წრიული კონუსის მოცულობა , რომელიც 3-ის ტოლ რადიუ-სიან სფეროშია ჩახაზული (ფიგურა **(II)**).



ფიგურა (I)



ფიგურა (II)

4.8 პირველადი ფუნქციები

განსაზღვრება. $F(x)$ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$-ის პირველადი ფუნქცია I ინტერვალზე, თუ ამ ინტერვალის ყოველ წერტილში $F(x)$ წარმოებადია და $F'(x) = f(x)$.

მაგალითი 1. მოცემული ფუნქციებიდან თითოეულისათვის ვიპოვოთ პირველადი ფუნქცია.

(ა) $f(x) = 2x$ (ბ) $g(x) = \cos x$ (გ) $h(x) = \dfrac{1}{x} + 2e^{2x}$.

ამოხსნა. ჩვენ ასე ვიწყებთ ფიქრს: რომელ ფუნქციას ვიცნობთ, რომლის წარმოებული მოცემული ფუნქცია იქნება?

(ა) $F(x) = x^2$ (ბ) $G(x) = \sin x$ (გ) $H(x) = \ln|x| + e^{2x}$.

ყოველი პასუხი შეგვიძლია შევამოწმოთ გაწარმოებით.

მაგრამ ეს პასუხები ერთადერთი არაა. მაგალითად, $2x$ -ის პირველადი იქნება $x^2 + 1$ ფუნქციაც.

საშუალო მნიშვნელობის თეორემის შედეგი 2 (სექცია 4.2) მიგვანიშნებს, რომ მოცემული ფუნქციის ორი პირველადი ერთმანეთისგან მუდმივი შესაკრებითაა განსხვავებული.

თეორემა 8. თუ F წარმოადგენს f -ის პირველად ფუნქციას I ინტერვა-ლზე, მაშინ $F(x) + C$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, აგრეთვე წარმოადგენს f -ის პირველად ფუნქციას I -ზე.

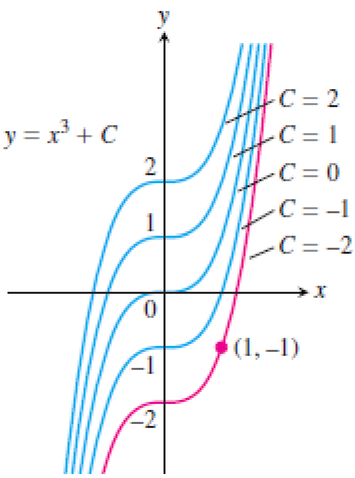
მაგალითი 2. ვიპოვოთ $f(x) = 3x^2$ ფუნქციის პირველადი, რომელიც დააკმაყოფილებს $F(1) = -1$ პირობას.

ამოხსნა. მოცემული ფუნქციის ზოგადი პირველადი ფუნქციაა $F(x) = x^3 + C$. მასში $x = 1$ -ის ჩასმით მივიღებთ

$$F(1) = (1)^3 + C = 1 + C.$$

პირობის თანახმად $F(1) = -1$. ამიტომ $C = -2$. მაშასადამე $F(x) = x^3 - 2$ არის საძიებელი პირველადი ფუნქცია. შევნიშნოთ, რომ ეს კონკრეტული პირველადი შერჩეულია ყველა პირველადების $y = x^3 + C$ ოჯახიდან (ფიგურა 4.51).

ცხრილ 4.2-ში მოყვანილი პირველადი ფუნქციების ფორმულები წარმოადგენენ უკვე ნაცნობი გაწარმოების ფორმულების თვალსაჩინო შედეგს.



ფიგურა 4.51

ცხრილი 4.2. პირველადი ფუნქციები. $k \neq 0$ მუდმივია

	ფუნქცია	ზოგადი პირველადი
1.	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \quad n \neq -1$
2.	$\sin kx$	$-\frac{1}{k}\cos kx + C$
3.	$\cos kx$	$\frac{1}{k}\sin kx + C$
4.	$\sec^2 kx$	$\frac{1}{k}\tan kx + C$
5.	$\csc^2 kx$	$-\frac{1}{k}\cot kx + C$
6.	$\sec kx \tan kx$	$\frac{1}{k}\sec kx + C$
7.	$\csc kx \cot kx$	$-\frac{1}{k}\csc kx + C$
8.	e^{kx}	$\frac{1}{k}e^{kx} + C$
9.	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C, \quad x \neq 0$
10.	$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2x^2}}$	$\frac{1}{k}\sin^{-1} kx + C$
11.	$\frac{1}{1 + k^2x^2}$	$\frac{1}{k}\tan^{-1} kx + C$
12.	$\frac{1}{x\sqrt{k^2x^2 - 1}}$	$\sec^{-1} kx + C, \quad kx > 1$
13.	a^{kx}	$\left(\frac{1}{k \ln a}\right)a^{kx} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1$

მაგალითი 3. . მოცემული ფუნქციებიდან თითოეულისათვის ვიპოვოთ ზოგადი პირველადი ფუნქცია.

(ა) $f(x) = x^5$ (ბ) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (გ) $h(x) = \sin 2x$

(დ) $i(x) = \cos\dfrac{x}{2}$ (ე) $j(x) = e^{-3x}$ (ვ) $k(x) = 2^x$.

ამოხსნა. გამოვიყენებთ ცხრილი 4.2-ის ფორმულებს.

(ა) $F(x) = \dfrac{x^6}{6} + C$ (ფორმულა 1, $n = 5$)

(ბ) $g(x) = x^{-1/2}$, ამიტომ

$$G(x) = \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C$$ (ფორმულა 1, $n = -1/2$)

(გ) $H(x) = \dfrac{-\cos 2x}{2} + C$ (ფორმულა 2, $k = 2$)

(დ) $I(x) = \dfrac{\sin(x/2)}{1/2} + C = 2\sin\dfrac{x}{2} + C$ (ფორმულა 3, $k = 1/2$)

(ე) $J(x) = -\dfrac{1}{3}e^{-3x} + C$ (ფორმულა 8, $k = -3$)

(ვ) $K(x) = \left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)2^x + C$ (ფორმულა 13, $a = 2$, $k = 1$)

პირველადი ფუნქციის მოძებნის ოპერაცია წრფივია. ჩვენ შეგვიძლია შევკრიბოთ ან გამოვაკლოთ პირველადი ფუნქციები და გავამრავლოთ მუდმივზე.

ცხრილი 4.3	პირველადის მოძებნის წრფივობის წესები	
	ფუნქცია	ზოგადი პირველადი
1. მუდმივზე გამრავლ. წესი	$k\,f(x)$	$k\,F(x) + C$, k მუდმივია
2. უარყოფითობის წესი	$-f(x)$	$-F(x) + C$
3. ჯამის და სხვაობის წესი	$f(x) \pm g(x)$	$F(x) \pm G(x) + C$

მაგალითი 4. იპოვეთ

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + \sin 2x$$

ფუნქციის ზოგადი პირველადი .

ამოხსნა. ჩვენ გვაქვს $f(x) = 3g(x) + h(x)$, სადაც g და h მაგალით 3-ში განხილული ფუნქციებია. თუ გამოვიყენებთ მაგალითი 3-ის (ბ), (გ) შედეგებს, მივიღებთ

$$F(x) = 3G(x) + H(x) + C = 6\sqrt{x} - \frac{1}{2}\cos 2x + C.$$

საწყისი მნიშვნელობათა ამოცანები და დიფერენციალური განტოლებები

პირველად ფუნქციებს მნიშვნელოვანი ადგილი უკავიათ მათემატიკასა და მის გამოყენებე-ბში.

$f(x)$ ფუნქციისათვის პირველადის მოძებნა იგივე ამოცანაა, რაც ისეთი $y(x)$ ფუნქციის მოძებნა, რომელიც დააკმაყოფილებს

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

განტოლებას. ასეთ განტოლებას **დიფერენციალური განტოლება** ეწოდება. დიფერენციალუ-რი განტოლების ამონახსნებიდან ერთი რომელიმე კონკრეტულის გამოსარჩევად წინასწარ აფიქსირებენ საწყის პირობას

$$y(x_0) = y_0.$$

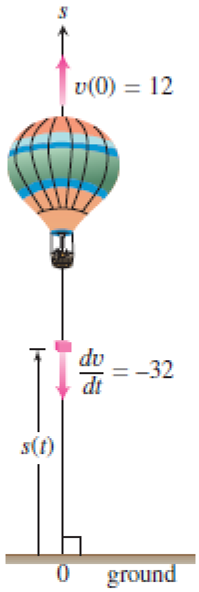
დიფერენციალური განტოლებისა და საწყისი პირობის ერთობლიობას ეწოდება **საწყისი ამოცანა დიფერენციალური განტოლებისათვის.**

$f(x)$ ფუნქციის ზოგადი პირველადი ფუნქცია $F(x) + C$ არის $dy/dx = f(x)$ დიფერენციალური განტოლების $y = F(x) + C$ **ზოგად ამონახსნი.** თუ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნიდან საწყისი პირობის გათვალისწინებით შევარჩევთ ერთ კონკრეტულ ამონახსნს, მას **კერძო ამონახსნი** ეწოდება.

მაგალითი 5. 12 ფტ/წმ სიჩქარით ზევით მიმავალი ჰაერბურთიდან, როცა ის მიწის ზედაპირიდან 80 ფუტის სიმაღლეზე იყო, პაკეტი გადმოაგდეს. რა დრო დასჭირდება პაკეტს დედამიწამდე მისაღწევად?

ამოხსნა.

ვთქვათ $v(t)$ არის პაკეტის სიჩქარე დროის t მომენტში, ხოლო $s(t)$ მისი დაშორებაა დედამიწის ზედაპირიდან. გრავიტაციის აჩქარება დედამიწის ზედაპირის მახლობლობაში არის 32 ფტ/წმ ^{2} . იმ შეთანხმებით, რომ პაკეტზე სხვა ძალები არ მოქმედებს, გვექნება



ფიგურა 4.52

$$\frac{dv}{dt} = -32$$ (უარყოფითი, რადგან გრავიტაცია მოქმედებს s-ის კლების მიმართულებით)

ამრიგად, მივიღეთ საწყისი ამოცანა (ფიგ. 4.52):

დიფერენციალური განტოლება: $\frac{dv}{dt} = -32$

საწყისი პირობა: $v(0) = 12$.

ეს პაკეტის მოძრაობის მათემატიკური მოდელია. დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნია -32-ის პირველადი:

$$v = -32t + C .$$

ვიპოვოთ C :

$$12 = -32(0) + C \ ; \qquad C = 12 .$$

საწყისი ამოცანის ამონახსნია

$$v = -32t + 12 .$$

რადგან სიჩქარე არის სიმაღლის წარმოებული, ხოლო პაკეტის სიმაღლე $t=0$ მომენტში არის 80 ფუტი, კვლავ გვექნება სხვა საწყისი ამოცანა:

დიფერენციალური განტოლება: $\frac{ds}{dt} = -32t + 12$

საწყისი პირობა: $s(0) = 80$.

1. *ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლება:* (ვიპოვოთ $-32t + 12$ -ის პირველადი)

$$s = -16t^2 + 12t + C .$$

2. *გამოვთვალოთ* C :

$$80 = -16(0)^2 + 12(0) + C \ ; \quad C = 80.$$

პაკეტის დაშორება მიწის ზედაპირიდან დროის t მომენტში არის

$$s(t) = -16t^2 + 12t + 80 .$$

იმის დასადგენად, რა დრო დასჭირდა პაკეტს დედამიწის ზედაპირამდე მისაღწევად, საჭიროა $s(t)$ გავუტოლოთ 0-ს და ამოვხსნათ მიღებული განტოლება t-ს მიმართ:

$$-16t^2 + 12t + 80 = 0 \ ; \qquad 4t^2 - 3t - 20 = 0 \ ;$$

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{329}}{8} \ ; \quad t_1 \approx -1.89 , \qquad t_2 \approx 2.64 .$$

პაკეტი მიწაზე დაეცემა გადმოგდებიდან 2.64 წამის შემდეგ (უარყოფით ფესვს ფიზიკური შინაარსი არ აქვს).

განსაზღვრება. f ფუნქციის ყველა პირველადის ერთობლიობას ეწოდება **განუსაზღვრელი ინტეგრალი** f ფუნქციიდან x -ის მიმართ და აღინიშნება

$$\int f(x)dx$$

სიმბოლოთი. ამ გამოსახულებაში $\int$ სიმბოლოს ინტგრალის ნიშანი ეწოდება, $f(x)$ -ს ინტეგრალქვეშა ფუნქცია, x ინტეგრების ცვლადია, $f(x)dx$ კი ინტეგრალქვეშა გამოსახულებაა.

ინტეგრალის ნიშნის გამოყენებით მაგალითი 1-ის ამონახსნები ასე ჩაიწერება:

$$\int 2xdx = x^2 + C,$$

$$\int \cos xdx = \sin x^2 + C\ ,$$

$$\int\left(\frac{1}{x} + 2e^{2x}\right)dx = \ln|x| + C.$$

მაგალითი 6. გამოვთვალოთ

$$\int (x^2 - 2x + 5)dx.$$

ამოხსნა. თუ მივხვდებით, რომ $(x^3/3) - x^2 + 5x$ წარმოადგენს $x^2 - 2x + 5$ -ის პირველადს, ინტეგრალი გამოთვლილი გვექნება:

$$\int (x^2 - 2x + 5)dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C. \qquad (*)$$

თუ უცბათ ვერ მივხვდებით, წევრ-წევრად შეგვიძლია გამოვთვალოთ ჯამის, სხვაობის და მუდმივზე გამრავლების წესების გამოყენებით:

$$\int (x^2 - 2x + 5)dx = \int x^2 dx - \int 2xdx + \int 5dx =$$

$$= \int x^2 dx - 2\int xdx + 5\int 1dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) - 2\left(\frac{x^2}{2} + C_2\right) + 5(x + C_3).$$

თუ შემოვიღებთ ახალ ნებისმიერ მუდმივს $C = C_1 - 2C_2 + 5C_3$, კვლავ მივიღებთ (*) ტოლობას. უფრო იოლი იქნება, თუ წევრ-წევრად ინტეგრალების მოძებნის შემდეგ სულ ბოლოს დავწერთ ერთ ნებისმიერ მუდმივს.

სავარჯიშოები 4.8

1--10 სავარჯიშოებში მოძებნეთ პირველადი ფუნქცია. პასუხი შემოწმეთ გაწარმოებით.

1. a. $2x$ b. x^2 c. $x^2 - 2x + 1$
2. a. $6x$ b. x^7 c. $x^7 - 6x + 8$
3. a. $-3x^{-4}$ b. x^{-4} c. $x^{-4} + 2x + 3$
4. a. $2x^{-3}$ b. $\frac{x^{-3}}{2} + x^2$ c. $-x^{-3} + x - 1$
5. a. $\frac{1}{x^2}$ b. $\frac{5}{x^2}$ c. $2 - \frac{5}{x^2}$
6. a. $-\frac{2}{x^3}$ b. $\frac{1}{2x^3}$ c. $x^3 - \frac{1}{x^3}$
7. a. $\frac{3}{2}\sqrt{x}$ b. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ c. $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$
8. a. $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$ b. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$ c. $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
9. a. $\frac{2}{3}x^{-1/3}$ b. $\frac{1}{3}x^{-2/3}$ c. $-\frac{1}{3}x^{-4/3}$
10. a. $\frac{1}{2}x^{-1/2}$ b. $-\frac{1}{2}x^{-3/2}$ c. $-\frac{3}{2}x^{-5/2}$

25--64 სავარჯიშოებში იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი. პასუხი შეამოწმეთ გაწარმოებით

25. $\int (x + 1)\, dx$
26. $\int (5 - 6x)\, dx$
27. $\int \left(3t^2 + \frac{t}{2}\right) dt$
28. $\int \left(\frac{t^2}{2} + 4t^3\right) dt$
29. $\int (2x^3 - 5x + 7)\, dx$
30. $\int (1 - x^2 - 3x^5)\, dx$
31. $\int \left(\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}\right) dx$
32. $\int \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{x^3} + 2x\right) dx$
33. $\int x^{-1/3}\, dx$
34. $\int x^{-5/4}\, dx$
35. $\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right) dx$
36. $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$
37. $\int \left(8y - \frac{2}{y^{1/4}}\right) dy$
38. $\int \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{y^{5/4}}\right) dy$
39. $\int 2x(1 - x^{-3})\, dx$
40. $\int x^{-3}(x + 1)\, dx$
41. $\int \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2}\, dt$
42. $\int \frac{4 + \sqrt{t}}{t^3}\, dt$

43. $\int (-2\cos t)\, dt$

44. $\int (-5\sin t)\, dt$

45. $\int 7\sin\frac{\theta}{3}\, d\theta$

46. $\int 3\cos 5\theta\, d\theta$

47. $\int (-3\csc^2 x)\, dx$

48. $\int \left(-\frac{\sec^2 x}{3}\right) dx$

49. $\int \frac{\csc\theta\cot\theta}{2}\, d\theta$

50. $\int \frac{2}{5}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

51. $\int (e^{3x} + 5e^{-x})\, dx$

52. $\int (2e^{x} - 3e^{-2x})\, dx$

53. $\int (e^{-x} + 4^{x})\, dx$

54. $\int (1.3)^{x}\, dx$

55. $\int (4\sec x\tan x - 2\sec^2 x)\, dx$

56. $\int \frac{1}{2}(\csc^2 x - \csc x\cot x)\, dx$

57. $\int (\sin 2x - \csc^2 x)\, dx$

58. $\int (2\cos 2x - 3\sin 3x)\, dx$

59. $\int \frac{1 + \cos 4t}{2}\, dt$

60. $\int \frac{1 - \cos 6t}{2}\, dt$

61. $\int \left(\frac{1}{x} - \frac{5}{x^2 + 1}\right) dx$

62. $\int \left(\frac{2}{\sqrt{1 - y^2}} - \frac{1}{y^{1/4}}\right) dy$

63. $\int 3x^{\sqrt{3}}\, dx$

64. $\int x^{\sqrt{2}-1}\, dx$

71--77 სავარჯიშოებში შეამოწმეთ პასუხი გაწარმოებით.

71. $\int (7x - 2)^3\, dx = \frac{(7x - 2)^4}{28} + C$

72. $\int (3x + 5)^{-2}\, dx = -\frac{(3x + 5)^{-1}}{3} + C$

73. $\int \sec^2(5x - 1)\, dx = \frac{1}{5}\tan(5x - 1) + C$

74. $\int \csc^2\left(\frac{x - 1}{3}\right) dx = -3\cot\left(\frac{x - 1}{3}\right) + C$

75. $\int \frac{1}{(x + 1)^2}\, dx = -\frac{1}{x + 1} + C$

76. $\int \frac{1}{(x + 1)^2}\, dx = \frac{x}{x + 1} + C$

77. $\int \frac{1}{x + 1}\, dx = \ln(x + 1) + C, \quad x > -1$

91--108 სავარჯიშოებში ამოხსენით საწყისი ამოცანა დიფერენციალური განტოლებებისთვის.

91. $\dfrac{dy}{dx} = 2x - 7, \quad y(2) = 0$

92. $\dfrac{dy}{dx} = 10 - x, \quad y(0) = -1$

93. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2} + x, \quad x > 0; \quad y(2) = 1$

94. $\dfrac{dy}{dx} = 9x^2 - 4x + 5, \quad y(-1) = 0$

95. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^{-2/3}, \quad y(-1) = -5$

96. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \quad y(4) = 0$

97. $\dfrac{ds}{dt} = 1 + \cos t, \quad s(0) = 4$

98. $\dfrac{ds}{dt} = \cos t + \sin t, \quad s(\pi) = 1$

99. $\dfrac{dr}{d\theta} = -\pi \sin \pi\theta, \quad r(0) = 0$

100. $\dfrac{dr}{d\theta} = \cos \pi\theta, \quad r(0) = 1$

101. $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{2} \sec t \tan t, \quad v(0) = 1$

102. $\dfrac{dv}{dt} = 8t + \csc^2 t, \quad v\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -7$

103. $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{3}{t\sqrt{t^2 - 1}}, \quad t > 1, v(2) = 0$

104. $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{8}{1 + t^2} + \sec^2 t, \quad v(0) = 1$

105. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2 - 6x; \quad y'(0) = 4, \quad y(0) = 1$

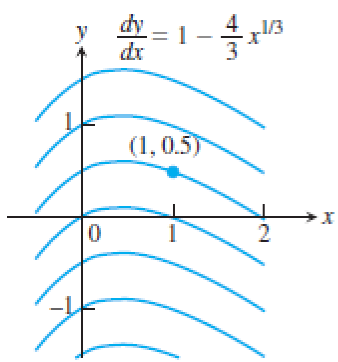
106. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0; \quad y'(0) = 2, \quad y(0) = 0$

107. $\dfrac{d^2r}{dt^2} = \dfrac{2}{t^3}; \quad \left.\dfrac{dr}{dt}\right|_{t=1} = 1, \quad r(1) = 1$

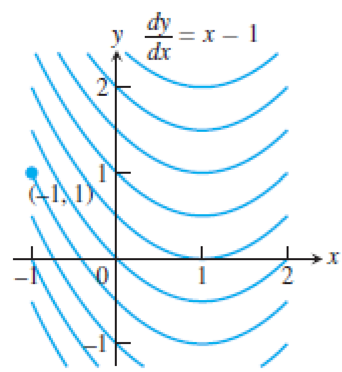
108. $\dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{3t}{8}; \quad \left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=4} = 3, \quad s(4) = 4$

115, 116 სავარჯიშოებში ნაჩვენებია დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნების (ინტეგრალური) წირები. იპოვეთ მონიშნულ წერტილზე გამავალი წირის განტოლება.

115.



116.



123. ნაწილაკი $a = d^2s/dt^2 = 15\sqrt{t} - (3/\sqrt{t})$ აჩქარებით გადაადგილდება საკოორდინატო ღერძის გასწვრივ , ამასთან შესრულებულია პირობები $ds/dt = 4$ და $s = 0$, როცა $t = 1$. იპოვეთ :

ა) $v = ds/dt$ სიჩქარე , გამოსახული t ცვლადით.

ბ) მდებარეობა s, გამოსახული t ცვლადით

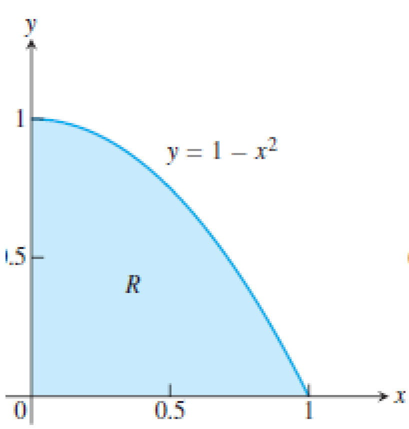
5

ინტეგრება

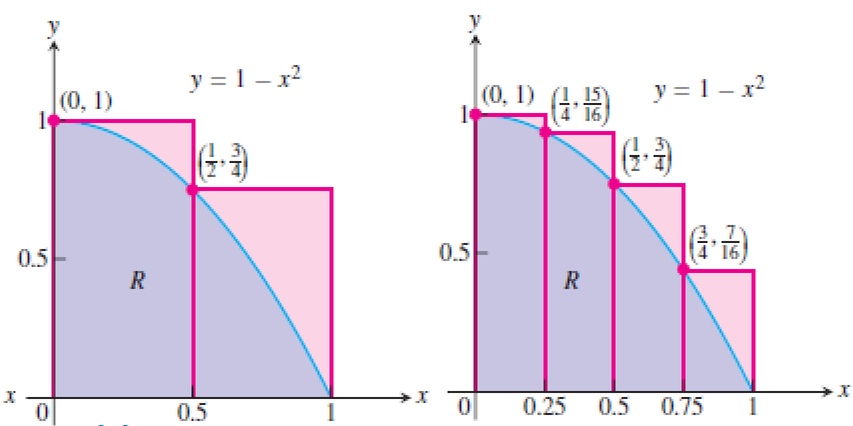
კლასიკური გეომეტრიის დიდ მიღწევას წარმოადგენდა ფართობების და მოცულობების გამოსათვლელი ფორმულების მიღება სამკუთხედებისთვის, სფეროებისა და კონუსებისთვის. ამ თავში განვავითარებთ მეთოდს, რომელიც საშუალებას იძლევა გამოითვალოს ფართობები და მოცულობები უფრო ზოგადი ფორმებისათვის. ეს მეთოდი, რომელსაც ინტეგრება ეწოდება, მრავალი პრაქტიკული ამოცანის გადაწყვეტის ინსტრუმენტს წარმოადგენს, რაზეც შემდეგ თავში ვისაუბრებთ. ამ თავში კი გავეცნობით ინტეგრალის ცონცეფციას და მის გამოყენებას მრუდწირული საზღვრის მქონე არეთა ფართობების გამოსათვლელად.

5.1 ფართობი და მისი შეფასება სასრული ჯამებით

ფიგურა 5.1-ზე გაფერადებულია R არე, რომელიც ძევს x-ღერძის ზემოთ და $y=1-x^2$ მრუდის ქვეშ, მარცხნიდან და მარჯვნიდან კი შემოსაზღვრულია $x=0$ და $x=1$ წრფეებით. როგორ ვიპოვოთ მისი ფართობი?



ფიგურა 5.1



(ა) (ბ)

ფიგურა 5.2

რადგან ჯერ არ გვაქვს მისი ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა, შევეცადოთ მიახლოე- ბით გამოთვლას. ფიგურა 5.2(ა) გვიჩვენებს ორ მართკუთხედს, რომლებიც ერთობლივად შეიცავენ R არეს.

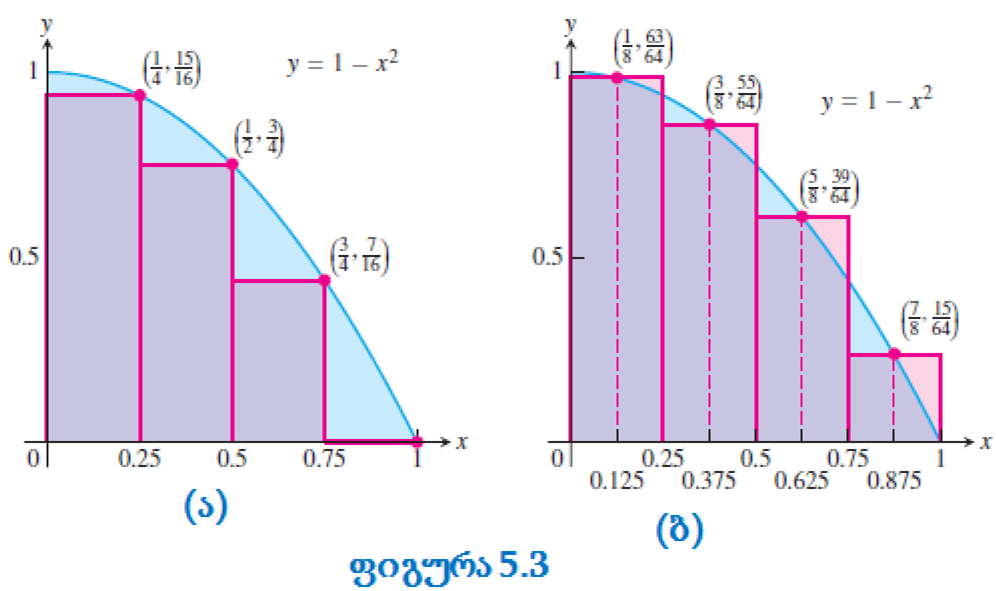
თითოეული მართკუთხედის სიგანე 1/2-ის ტოლია, სიმაღლეები კი 1 და 3/4 -ია. სიმაღლეებად აღებულია f -ის მაქსიმალური მნიშვნელობები, გამოთვლილი ფუძის ქვეინტერვალების მარცხენა ბოლოებზე. ვთქვათ, R არეს ზუსტი ფართობია A .
ფიგურა 5.2(ა) -ზე ნაჩვენები მართკუთხედების ჯამი მიახლოებით გვაძლევს ფართობის სიდიდეს:

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8} = 0.875 \ .$$

ცხადია, მიღებული მნიშვნელობა მეტია რეალურ ფართობზე. ჩვენ ვიტყვით, რომ 0.875 არის **ზედა ჯამი,** რადგან მართკუთხედების სიმაღლეებად აღებულია f -ის მაქსიმალური მნიშვ- ნელობები ქვეშუალედებზე. ფიგურა 5.2(ბ) -ზე, მიღებული შედეგის გასაუმჯობესებლად გამოყენებულია ოთხი მართკუთხედი, თითოეული 1/4-ის ტოლი ფუძით. ამ მართკუთხედების ერთობლიობა კვლავ ფარავს R არეს და გვაძლევს მიახლოებას (ნამეტით)

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{32} = 0.78125 \, .$$

ფიგურა 5.3(ა)-ზე ფართობის შესაფასებლად გამოყენებულია ჩახაზული მართკუთხედები.



ფიგურა 5.3

თითოეული მათგანის სიგანე 1/4-ის ტოლია, სიმაღლეები კი ფუძის ქვეშუალედებზე f -ის უმცირესი მნიშვნელობების ტოლია . მათი ფართობების შეკრებით მიღებულ სიდიდეს ვუწოდოთ **ქვედა ჯამი:**

$$A \approx \frac{15}{16}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{7}{16}\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{4}=\frac{17}{32}=0.53125 \ .$$

A სიდიდის ჭეშმარიტი მნიშვნელობა მოთავსებულია ქვედა და ზედა ჯამებს შორის:

$$0.53125 < A < 0.78125 \ .$$

სხვა შეფასება მიიღება, თუ გამოვიყენებთ მართკუთხედებს, რომელთა სიმაღლეები წარმოადგენს f -ის მნიშვნელობებს ფუძეთა შუა წერტილებში (ფიგურა 5.3 (ზ)). შეფასების ამ მეთოდს ეწოდება **შუა წერტილების წესი** ფართობის გამოსათვლელად. ცხადია, ეს მეთოდი უფრო ზუსტ შედეგს მოგვცემს:

$$A \approx \frac{63}{64}\cdot\frac{1}{4}+\frac{55}{64}\cdot\frac{1}{4}+\frac{39}{64}\cdot\frac{1}{4}+\frac{15}{64}\cdot\frac{1}{4}=\frac{172}{64}\cdot\frac{1}{4}=0.671875 .$$

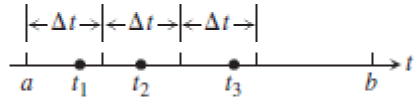
განხილული შემთხვევების ზოგადი სქემა ასეთია. $[a,b]$ ინტერვალს, რომელზედაც განსაზღვრულია f ფუნქცია, ვყოფთ ტოლი $\Delta x=(b-a)/n$ სიგრძის n ქვეინტერვალად და f -ის მნიშვნელობები გამოითვლება ქვეინტერვალთა რომელიღაც წერტილებში: პირველი ქვეინტერვალის c_1 წერტილში, მეორე ქვეინტერვალის c_2 წერტილში და ა.შ. შემდეგ ვადგენთ ასეთი ფორმის ჯამს

$$f(c_1)\Delta x+f(c_2)\Delta x+f(c_3)\Delta x+\cdots+f(c_n)\Delta x .$$

რაც უფრო ბევრ მრავალკუთხედს გამოვიყენებთ, ისე რომ მათი ფუძეები მცირდებოდეს, მით უფრო ზუსტად იქნება გამოთვლილი ფართობი .

ვთქვათ ცნობილია შოსეზე მიმართულების შეუცვლელად მოძრავი ავტომობილის სიჩქარის ფუნქცია $v(t)$. გვაინტერესებს რა მანძილს გაივლის ის დროის $t=a$ და $t=b$ მომენტებს შორის. თუ ჩვენ შევძლებთ გავიგოთ $v(t)$-ს პირველადი $F(t)$, გვეცოდინება ავტომობილის პოზიციის ფუნქცია $s(t)=F(t)+C$. გავლილი მანძილი იქნება $s(b)-s(a)=$ $=F(b)-F(a)$. მაგრამ თუ ჩვენ მხოლოდ სიჩქარის მონაცემები ვიცით სპიდომეტრიდან და არ გვაქვს სიჩქარის ფორმულა, როგორ გავიგებთ პირველად ფუნქციას და მაშასადამე გავლილ მანძილსაც?

მოვიქცეთ ფართობის მიახლოებითი გამოთვლის ანალოგიურად. $[a,b]$ დროის ინტერვალი დავყოთ ტოლი $\Delta t=(b-a)/n$ სიგრძის n ქვეინტერვალად .



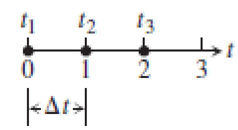
ვთქვათ, პირველი ქვეინტერვალის რაიმე t_1 მომენისათვის სპიდომეტრით გავიგეთ $v(t_1)$ სიდიდეს . თუ Δt საკმარისად მცირეა, სიჩქარე ამ უბანზე თითქმის მუდმივად შეიძლება

ჩვთვალოთ და ამ შუალედის სიგრძე $\approx v(t_1)\Delta t$. თუ t_2 არის დროის მომენტი მეორე ქვეშუალედიდან, მაშინ ანალოგიურად ამ შუალედის სიგრძე $\approx v(t_2)\Delta t$. მთლიანი დისტანციის სიგრძე კი იქნება

$$D \approx v(t_1)\Delta t + v(t_2)\Delta t + \cdots + v(t_n)\Delta t .$$

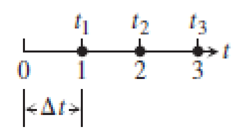
მაგალითი 2. ჰაერში გასროლილი ჭურვის სიჩქარის ფუნქციაა $f(t) = 160 - 9.8t$ მ/წმ. გამოვიყენოთ ახლახან აღწერილი შეჯამების მეთოდი იმის დასადგენად, რა მანძილს გაივლის ჭურვი პირველი 3 წამის განმავლობაში. შევადაროთ, რამდენად ახლოა მიღებული შედეგი ზუსტ 435.9 მ მნიშვნელობასთან.

ამოხსნა. შევარჩიოთ 1-ის ტოლი სიგრძის სამი ქვეინტერვალი.



ა) თუ ავიღებთ $t = 0,\ 1$ და 2 (ე.ი. ქვეშუალედთა მარცხენა ბოლოებს), მივიღებთ

$$D \approx f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + f(t_3)\Delta t =$$
$$= [160 - 9.8(0)](1) + [160 - 9.8(1)](1) + [160 - 9.8(2)](1) = 450.6$$



ბ) თუ ავიღებთ $t = 1,\ 2$ და 3 (ე.ი. ქვეშუალედთა მარჯვენა ბოლოებს), გვექნება

$$D \approx f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + f(t_3)\Delta t =$$
$$= [160 - 9.8(1)](1) + [160 - 9.8(2)](1) + [160 - 9.8(3)](1) = 421.2 .$$

როგორც ვხედავთ, ზუსტი მნიშვნელობა საკმაოდ ახლოა ზედა და ქვედა ჯამების საშუალო არითმეტიკულთან

სავარჯიშოები 5.1

1--4 სავარჯიშოებში ფუნქციის გრაფიკის ქვეშ მდგომი არეს ფართობის გამოსათვლელად გამოიყენეთ

ა) ქვედა ჯამები ტოლი სიგანის ორი მართკუთხედით;
ბ) ქვედა ჯამები ტოლი სიგანის ოთხი მართკუთხედით;
გ) ზედა ჯამები ტოლი სიგანის ორი მართკუთხედით;
დ) ზედა ჯამები ტოლი სიგანის ოთხი მართკუთხედით.

1. $f(x) = x^2$, $x = 0$ და $x = 1$ -ს შორის.

2. $f(x) = x^3$, $x = 0$ და $x = 1$ -ს შორის.

3. $f(x) = 1/x$, $x = 1$ და $x = 5$ -ს შორის.

4. $f(x) = 4 - x^2$, $x =$ -2 და $x = 2$ -ს შორის.

5--8 სავარჯიშოებში ფუნქციის გრაფიკის ქვეშ მდგომი არის ფართობის გამოსათვლელად გამოიყენეთ მართკუთხედები საშუალო წერტილების წესით, ჯერ ორი , შემდეგ კი ოთხი მართკუთხედით.

5. $f(x) = x^2$, $x = 0$ და $x = 1$ -ს შორის.

6. $f(x) = x^3$, $x = 0$ და $x = 1$ -ს შორის.

7. $f(x) = 1/x$, $x = 1$ და $x = 5$ -ს შორის.

8. $f(x) = 4 - x^2$, $x =$ -2 და $x = 2$ -ს შორის.

13. საგანი გადმოაგდეს ჰელიკოპტერიდან . საგნის სიჩქარე სულ უფრო მატულობს, მაგრამ ჰაერის ხახუნის გამო აჩქარება მცირდება. აჩქარება (ფტ/წმ ^{2}) გაზომილია გადმოგდებიდან 5 წამის განმავლობაში 1 წმ ბიჯით.

t	0	1	2	3	4	5
a	32.00	19.41	11.77	7.14	4.33	2.63

ა) იპოვეთ სიჩქარის ზედა შეფასება, როცა $t = 5$

ბ) იპოვეთ სიჩქარის ქვედა შეფასება, როცა $t = 5$

გ) იპოვეთ გავლილი დისტანციის ზედა შეფასება, როცა $t = 3$.

14. ობიექტი ზევით აისროლეს ზღვის დონიდან 400 ფტ/წმ სიჩქარით .

ა) იგულისხმეთ რომ გრავიტაცია სხეულზე მოქმედი ერთადერთი ძალაა და გამოთვალეთ სიჩქარის ზედა შეფასება 5 წამის გასვლისას. გრავიტაციული აჩქარება g=32 ფტ/წმ ^{2} .

ბ) იპოვეთ 5 წამის შემდეგ მიღწეული სიმაღლის ქვედა შეფასება.

5.2 სიგმა აღნიშვნა და სასრული ჯამების ზღვარი

სიგმა აღნიშვნა საშუალებას იძლევა კომპაქტური სახით ჩაიწეროს მრავალი წევრის შემცველი ჯამი

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \quad .$$

ბერძნული ასო (ასომთავრული "სიგმა") ფორმულაში იკითხება როგორც "ჯამი".

რომელ ასოს გამოვიყენებთ აჯამვის ინდექსად, მნიშვნელობა არა აქვს. მაგალითად,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \cdots$$

არაა აუცილებელი, აჯამვის ინდექსი იცვლებოდეს 1-დან დან დაწყებული.

მაგალითი 1

ჯამი სიგმა აღნიშვნით	ჯამი გაშლილი სახით, თითო შესაკრები k -ს ყოველი მნიშვნელობისთვის	ჯამის სიდიდე
$\sum_{k=1}^{5} k$	$1+2+3+4+5$	15
$\sum_{k=1}^{3} (-1)^k k$	$(-1)^1(1)+(-1)^2(2)+(-1)^3(3)$	$-1+2-3=-2$
$\sum_{k=1}^{2} \frac{k}{k+1}$	$\frac{1}{1+1}+\frac{2}{2+1}$	$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$
$\sum_{k=4}^{5} \frac{k^2}{k-1}$	$\frac{4^2}{4-1}+\frac{5^2}{5-1}$	$\frac{16}{3}+\frac{25}{4}=\frac{139}{12}$

მაგალითი 2. გამოვსახოთ სიგმა აღნიშვნით 1+3+5+7+9 ჯამი.

ამოხსნა. უფრო მარტივია, ჯამი იწყებოდეს $k=0$ ან $k=1$-ით, მაგრამ შეგვიძლია დავიწყოთ ნებისმიერი რიცხვიდანაც.

დაწყება $k=0$ *-ით:* $1+3+5+7+9=\sum_{k=0}^{4}(2k+1)$

დაწყება $k=1$ *-ით:* $1+3+5+7+9=\sum_{k=1}^{5}(2k-1)$

დაწყება $k=2$ *-ით:* $1+3+5+7+9=\sum_{k=2}^{6}(2k-3)$

დაწყება $k=-3$ *-ით:* $1+3+5+7+9=\sum_{k=-3}^{1}(2k+7)$

სასრული ჯამების ალგებრული წესები

1. ჯამის და სხვაობის წესი: $\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k \pm \sum_{k=1}^{n}b_k$

2. მუდმივი მამრავლის წესი: $\sum_{k=1}^{n}ca_k = c\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k$

3.მუდმივი სიდიდის წესი: $\sum_{k=1}^{n}c=c\cdot n$

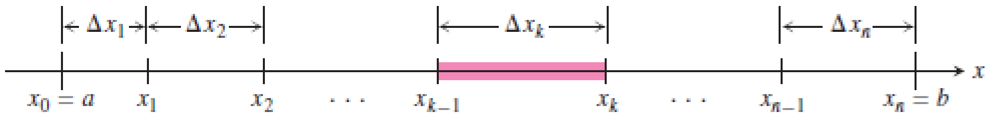
რიმანის ჯამები

ვთქვათ, $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულია რაიმე $f(x)$ ფუნქცია. $[a,b]$ სეგმენტზე განვიხილოთ წერტილები

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b\,.$$

ამ წერტილების $P=\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n\}$ სიმრავლეს $[a,b]$-ს **დანაწილება** ეწოდება.

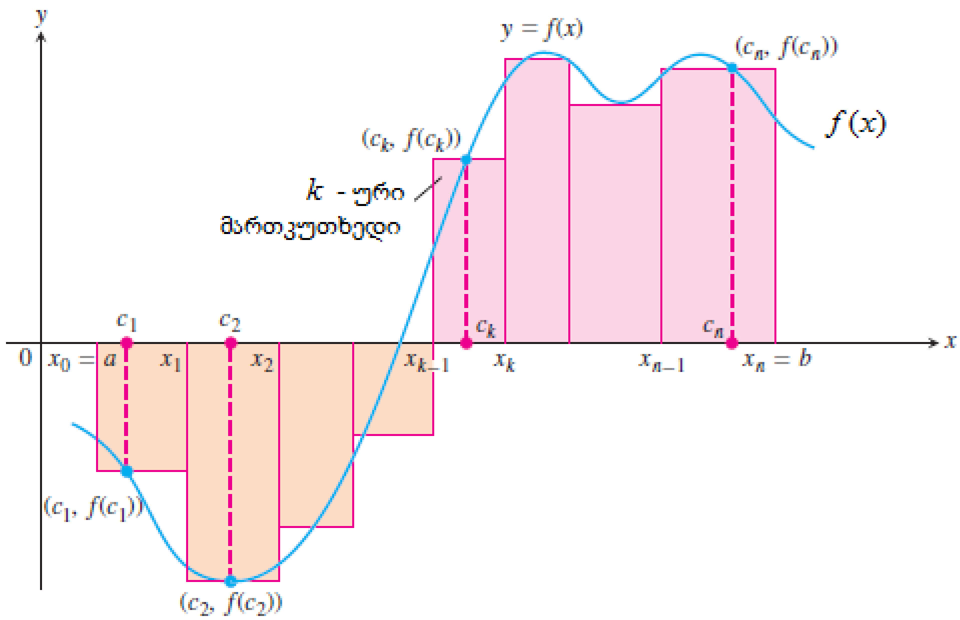
P დანაწილება $[a,b]$ სეგმენტს $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$ ჩაკეტილ n ქვეინტერვალად ყოფს. პირველი ქვეინტერვალია $[x_0,x_1]$, მეორე -- $[x_1,x_2]$ და ა.შ. k -ური -- $[x_{k-1},x_k]$, სადაც k იცვლება 1-დან n-მდე. k -ური ქვეინტერვალის სიგრძე აღვნიშნოთ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ სიმბოლოთი.



განვსაზღვროთ P **დანაწილების ნორმა**

$$\|P\|=\max_k \Delta x_k\ .$$

თითოეულ ქვეინტერვალზე შევარჩიოთ $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ წერტილი და აღვმართოთ მართკუთხედი გრაფიკის $(c_k, f(c_k))$ წერტილამდე x-ღერძის ზემოთ ან ქვემოთ იმის მიხედვით, დადებითია თუ უარყოფითი $f(c_k)$ (ფიგურა 5.9).



ფიგურა 5.9

თითოეულ ქვეინტერვალზე განვიხილოთ $f(c_k)\cdot\Delta x_k$ ნამრავლი, რომელიც შესაბამისი მართკუთხედის ფართობის ტოლია (თუ $f(c_k) > 0$) ან ნიშნით განსხვავდება მისგან (თუ $f(c_k) < 0$). ბოლოს, ყველა ამ ნამრავლის შეკრებით მივიღებთ

$$S_p = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k .$$

S_p ჯამს ეწოდება f ფუნქციის **რიმანის ჯამი** $[a,b]$ ინტერვალზე. ასეთი ჯამები უამრავია, დამოკიდებულია P დანაწილებაზე და ქვეინტერვალებზე c_k წერტილების შერჩევაზე.

სავარჯიშოები 5.2

1--6 სავარჯიშოებში ჩაწერეთ ჯამები სიგმა აღნიშვნის გარეშე, შემდეგ კი გამოთვალეთ .

1. $\sum_{k=1}^{2}\frac{6k}{k+1}$ **2.** $\sum_{k=1}^{3}\frac{k-1}{k}$ **3.** $\sum_{k=1}^{4}\cos k\pi$

4. $\sum_{k=1}^{5}\sin k\pi$ **5.** $\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+1}\sin\frac{\pi}{k}$ **6.** $\sum_{k=1}^{4}(-1)^{k}\cos k\pi$

9. რომელი ფორმულა არაა დანარჩენი ორის ეკვივალენტური?

a. $\sum_{k=2}^{4} \frac{(-1)^{k-1}}{k-1}$ b. $\sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^{k}}{k+1}$ c. $\sum_{k=-1}^{1} \frac{(-1)^{k}}{k+2}$

11--16 სავარჯიშოებში ჯამები ჩაწერეთ სიგმა აღნიშვნის გამოყენებით.

11. $1+2+3+4+5+6$ **12.** $1+4+9+16$ **13.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$

14. $2+4+6+8+10$ **15.** $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ **16.** $-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}-\frac{5}{5}$

33--36 სავარჯიშოებში დახაზეთ $f(x)$-ის გრაფიკი მითითებულ შუალედზე. დაანაწილეთ ინტერვალი ტოლი სიგრძის ოთხ ქვეინტერვალად. დაამატეთ ნახაზს რიმანის ჯამთან დაკავშირებული მართკუთხედები, სადაც c_k წერტილებად აიღეთ: (ა) მარცხენა ბოლოები , (ბ) მარჯვენა ბოლოები, (გ) შუაწერტილები (ვარიანტები დახაზეთ ცალკ-ცალკე).

33. $f(x) = x^2 - 1, \quad [0, 2]$ **34.** $f(x) = -x^2, \quad [0, 1]$

35. $f(x) = \sin x, \quad [-\pi, \pi]$ **36.** $f(x) = \sin x + 1, \quad [-\pi, \pi]$

5.3 განსაზღვრული ინტეგრალი

განსაზღვრება. ვთქვათ $f(x)$ განსაზღვრულია $[a,b]$ სეგმენტზე. J რიცხვს ეწოდება $S_p = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ რიმანის ჯამის ზღვარი, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ დანაწილებისთვის, $\|P\| < \delta$, და ნებისმიერი $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ წერტილებისათვის მართებულია უტოლობა $|S_p - J| < \varepsilon$.

განსაზღვრება. თუ არსებობს $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის რიმანის ჯამის ზღვარი $\lim_{\|P\|\to 0} S_p = J$, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება განსაზღვრული ინტეგრალი $f(x)$ ფუნქციიდან $[a,b]$ ინტერვალზე და აღინიშნება $\int_a^b f(x)\,dx$ სიმბოლოთი. იკითხება : " ინტეგრალი a-დან b-მდე ეფ იქს დე იქსი" . a და b რიცხვებს ეწოდებათ შესაბამისად ინტეგრების ქვედა და ზედა საზღვრები.

ჩაკეტილ $[a,b]$ ინტერვალზე განსაზღვრული ფუნქცია შეიძლება ინტეგრებადი არ იყოს ამ შუალედზე. მოვიყვანოთ ფუნქციის ინტეგრებადობის ზოგიერთი საკმარისი პირობა.

თეორემა1_ ინტეგრებადობა. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია ან უბან-უბან უწყვეტია $[a,b]$ ინტერვალზე, მაშინ განსაზღვრული ინტეგრალი $\int_a^b f(x)\,dx$ არსებობს და f ინტეგრებადია $[a,b]$-ზე.

მომდევნო თეორემაში წესების სახით ჩამოყალიბებულია ინტეგრალის თვისებები. ისინი წარმატებით გამოიყენება განსაზღვრული ინტეგრალების გამოთვლისას.

თეორემა 2. თუ f და g ინტეგრებადი ფუნქციებია ინტერვალზე, მაშინ განსაზღვრული ინტეგრალისათვის მართებულია ცხრილ 5.4-ში მოყვანილი წესები.

ცხრილი 5.4. განსაზღვრული ინტეგრალის უმარტივესი თვისებები

1. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ **2.** $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

3. $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ **4.** $\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

5. $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

6. თუ m და M წარმოადგენენ f ფუნქციის უმცირეს და უდიდეს მნიშვნელობებს $[a,b]$-ზე, მაშინ

$$m\cdot(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M\cdot(b-a)$$

7. თუ $f(x) \ge g(x)$, $x\in[a,b]$, მაშინ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$

თუ $f(x)\ge 0$, $x\in[a,b]$, მაშინ $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$

თვისება 6-ის დამტკიცება. $[a,b]$ შუალედის ნებისმიერი დანაწილებისთვის და ნებისმიერად შერჩეული c_k წერტილებისათვის გვაქვს

$$m\cdot(b-a)=m\cdot\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}m\Delta x_k\le\sum_{k=1}^{n}f(c_k)\Delta x_k\le\sum_{k=1}^{n}M\Delta x_k=M\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=M\cdot(b-a).$$

მაშასადამე, f -ის ნებისმიერი რიმანის ჯამი $[a,b]$ -ზე აკმაყოფილებს უტოლობას

$$m\cdot(b-a)\le\sum_{k=1}^{n}f(c_k)\Delta x_k\le M\cdot(b-a).$$

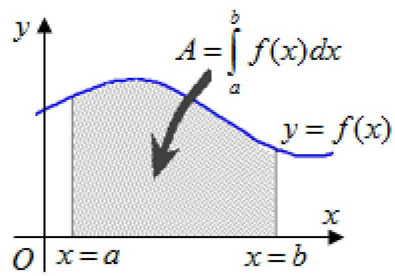
ამიტომ ინტეგრალი (რიმანის ჯამის ზღვარი) დააკმაყოფილებს უტოლობას. რ.დ.გ.

განსაზღვრული ინტეგრალი, განუსაზღვრელი ინტეგრალისგან განსხვავებით, რიცხვია. მისი სიდიდე დამოკიდებულია ფუნქციაზე და საინტეგრო ინტერვალზე, მაგრამ არაა დამოკიდებული ინტეგრების ცვლადზე:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(u)\,du=\cdots$$

ფართობი არაუარყოფითი ფუნქციის გრაფიკის ქვეშ

ვთქვათ მოცემულია $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი არაუარყოფითი f ფუნქცია. განვიხილოთ ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=f(x)$ წირით, $x=a$, $x=b$ წრფეებით და Ox ღერძით. ასეთ ფიგურას **მრუდწირულ ი ტრაპეცია** ეწოდება.



იბადება კითხვა: რას ვუწოდოთ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი და როგორ გამოვთვა-ლოთ იგი?

> **განსაზღვრება.** თუ $y=f(x)$ არაუარყოფითი ინტეგრებადი ფუნქციაა ჩაკეტილ $[a,b]$ ინტერვალზე, მაშინ f -ის ქვეშ მდგომი მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი
>
> $$A=\int_a^b f(x)dx.$$

ახლა ჩვენ გვაქვს ფართობის მკაცრი განსაზღვრება არეებისთვის, რომლებიც უწყვეტ ფუნქცი-ათა გრაფიკებითაა შემოსაზღვრული. გამოვიყენოთ ეს განსაზღვრება მარტივი არეებისთვის, რომ შეგვეძლოს ახალი და ძველი განსაზღვრებების შეთანხმებულობის შემოწმება.

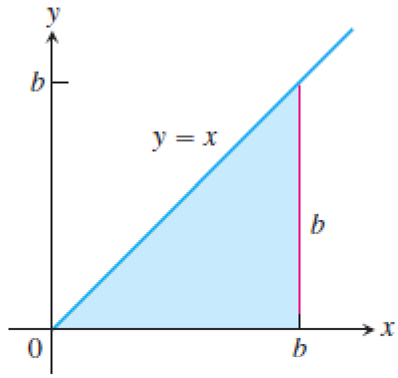
მაგალითი 4. გამოვთვალოთ $\int_0^b x dx$ და ვიპოვოთ ფართობი A, $y=x$ წრფის ქვეშ $[0,b]$ ინტერვალზე.

ამოხსნა. განსახილავი არე სამკუთხედია (ფიგურა 5.12). ფართობს გამოვთვლით ორი ხერხით.

(ა) განვიხილოთ $[0,b]$ ინტერვალის დანაწილება $P=\left\{0,\frac{b}{n},\frac{2b}{n},\frac{3b}{n},\dots,\frac{nb}{n}\right\}$ და ქვეინტერვალებზე შევარჩიოთ $c_k=\frac{kb}{n}$ წერტილები. მაშინ $\Delta x_k=\frac{b}{n}$ და

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{kb}{n}\cdot\frac{b}{n}=\frac{b^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{b^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=$$

$$=\frac{b^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$



ფიგურა 5.12

როცა $n\to\infty$ და $\|P\|\to 0$, ბოლო ტოლობის მარჯვენა მხარის ზღვარია $b^2/2$. ამიტომ

$$\int_0^b x\,dx=\frac{b^2}{2}.$$

(ბ) რადგან არაუარყოფითი ფუნქციის შემთხვევაში ფართობი განსაზღვრული ინტეგრალის ტოლია, ჩვენ ჯერ იოლად ვიგებთ სამკუთხედის ფართობს, რომლის ფუძეც და სიმაღლეც b-ს ტოლია: $A=(1/2)b\cdot b=b^2/2$. და კვლავ დავასკვნით $\int_0^b xdx=b^2/2$.

მაგალითი 4 შეიძლება განვაზოგადოთ ნებისმიერი ჩაკეტილი $[a,b]$ ინტერვალისათვის.

$$\int_a^b x\,dx=\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2},\quad a<b \qquad (1)$$

მართლაც,

$$\int_a^b x\,dx=\int_a^0 x\,dx+\int_0^b x\,dx=-\int_0^a x\,dx+\int_0^b x\,dx=-\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}.$$

რიმანის ჯამების გამოთვლის გზით ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი ტოლობები:

$$\int_a^b c\,dx=c(b-a),\quad c \text{ ნებისმიერი მუდმივია} \qquad (2)$$

$$\int_a^b x^2\,dx=\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3},\quad a<b \qquad (3)$$

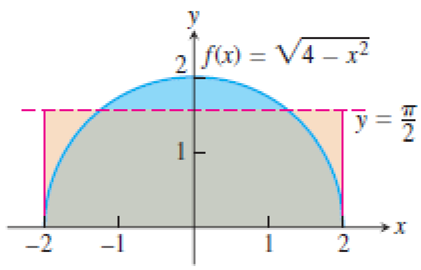
განსაზღვრება. თუ f ფუნქცია ინტეგრებადია $[a,b]$-ზე, მაშინ მისი **საშუალო მნიშვნელობა** $[a,b]$-ზე ეწოდება სიდიდეს

$$\text{საშ}(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\ .$$

მაგალითი 5. ვიპოვოთ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა -ზე.

ამოხსნა. ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს ზედა ნახევარწრეს, ცენტრით კოორდინატთა სათავეში და 2-ის ტოლი რადიუსით (ფიგურა 5.15). ნახევარწრის ფართობი გამოვთვალოთ გეომეტრიულად:

$$\text{ფართ.} = \frac{1}{2}\cdot\pi r^2 = \frac{1}{2}\cdot\pi(2)^2 = 2\pi\ .$$



ფიგურა 5.15

რადგან f არაუარყოფითია, ამიტომ

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = 2\pi\ .$$

მაშასადამე, საშუალო მნიშვნელობაა

$$\text{საშ}(f) = \frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}\ .$$

სავარჯიშოები 5.3

1--5 სავარჯიშოებში ზღვრები გამოსახეთ განსაზღვრული ინტეგრალებით.

1. $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2\,\Delta x_k$, სადაც P წარმოადგენს [0, 2]-ის დანაწილებას .

2. $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} 2c_k^3\,\Delta x_k$, სადაც P წარმოადგენს [-1, 0]-ის დანაწილებას .

3. $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} (c_k^2-3c_k)\,\Delta x_k$, სადაც P წარმოადგენს [-7, 5]-ის დანაწილებას .

4. $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{c_k}\right)\Delta x_k$, სადაც P წარმოადგენს [1, 4]-ის დანაწილებას .

5. $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1-c_k}\Delta x_k$, სადაც P წარმოადგენს [2, 3]-ის დანაწილებას .

9. ვთქვათ f და g ინტეგრებადი ფუნქციებია და

$$\int_1^2 f(x)\,dx = -4, \quad \int_1^5 f(x)\,dx = 6, \quad \int_1^5 g(x)\,dx = 8.$$

იპოვეთ

(ა) $\int_2^2 g(x)\,dx$ (ბ) $\int_5^1 g(x)\,dx$ (გ) $\int_1^2 3f(x)\,dx$

(დ) $\int_2^5 f(x)\,dx$ (ე) $\int_1^5 [f(x)-g(x)]\,dx$ (ვ) $\int_1^5 [4f(x)-g(x)]\,dx$

29--40 სავარჯიშოებში (1), (3) ფორმულების გამოყენებით გამოთვალეთ ინტეგრალები

29. $\int_1^{\sqrt{2}} x\,dx$ **30.** $\int_{0.5}^{2.5} x\,dx$ **31.** $\int_{\pi}^{2\pi} \theta\,d\theta$

32. $\int_{\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}} r\,dr$ **33.** $\int_0^{\sqrt[3]{7}} x^2\,dx$ **34.** $\int_0^{0.3} s^2\,ds$

35. $\int_0^{1/2} t^2\,dt$ **36.** $\int_0^{\pi/2} \theta^2\,d\theta$ **37.** $\int_a^{2a} x\,dx$

38. $\int_a^{\sqrt{3}a} x\,dx$ **39.** $\int_0^{\sqrt[3]{b}} x^2\,dx$ **40.** $\int_0^{3b} x^2\,dx$

41--50 სავარჯიშოებში გამოთვალეტ ინტეგრალები ცხრილი 5.4-ის და (1)-(3) ფორმულების გამოყენებით.

41. $\int_3^1 7\,dx$ **42.** $\int_0^2 5x\,dx$

43. $\int_0^2 (2t-3)\,dt$ **44.** $\int_0^{\sqrt{2}} \left(t-\sqrt{2}\right)dt$

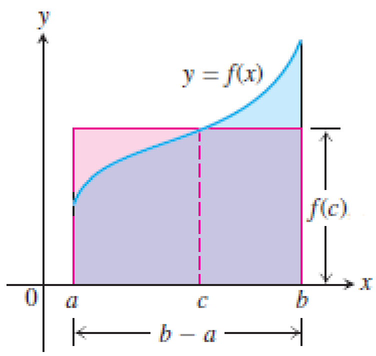
45. $\int_2^1 \left(1+\frac{z}{2}\right)dz$ **46.** $\int_3^0 (2z-3)\,dz$

47. $\int_1^2 3u^2\,du$ **48.** $\int_{1/2}^1 24u^2\,du$

49. $\int_0^2 (3x^2+x-5)\,dx$ **50.** $\int_1^0 (3x^2+x-5)\,dx$

5.4 კალკულუსის ძირითადი თეორემა

ამ სექციაში განვიხილავთ ინტეგრალური აღრიცხვის ძირითად თეორემას. ის აკავშირებს ინტეგრებას და გაწარმოებას, საშუალებას იძლევა გამოვთვალოთ ინტეგრალი საინტეგრო ფუნქციის პირველადის გამოყენებით , უფრო სწრაფად, ვიდრე რიმანის ჯამების ზღვრით. მანამდე კი წარმოვადგენთ საშუალო მნიშვნელობის თეორემის ინტეგრალურ ვერსიას, რომელიც ფუნდამენტური თეორემის დასამტკიცებლად გამოიყენება.



ფიგურა 5.16

ფიგურა 5.16 -ზე საშუალო მნიშვნელობის თეორემის გეომეტრიული ინტერპრეტაციაა ნაჩვენები :

არსებობს ისეთი $c \in [a,b]$ რიცხვი, რომ $f(x)$ -ის შესაბამისი მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი ზუსტად ტოლია $b-a$ სიგრძის ფუძის და $f(c)$ საშუალო სიმაღლის მართკუთხედის ფართობისა.

თეორემა 3_საშუალო მნიშვნელობის თეორემა განსაზღვრული ინტეგრალისთვის

თუ f უწყვეტია $[a,b]$-ზე, მაშინ რომელიღაც c წერტილში ამ შუალედიდან,

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx .$$

დამტკიცება. ცხრილი 5.4-ის წესი 6-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\min f \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \max f .$$

უწყვეტი ფუნქციებისათვის საშუალედო მნიშვნელობის თეორემის თანახმად (სექცია 2.5), f ღებულობს ყველა მნიშვნელობას $\min f$ და $\max f$ შორის. მაშასადამე $[a,b]$ შუალედის რომელიღაც c წერტილში ეს ფუნქცია $\left(1/(b-a)\right)\int_a^b f(x)dx$ მნიშვნელობასაც მიიღებს. რ.დ.გ.

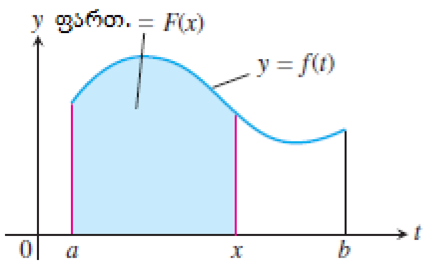
ფუნდამენტური თეორემა, ნაწილი 1

ამ თეორემაზე წარმოდგენის შესაქმნელად განვიხილოთ მისი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია.

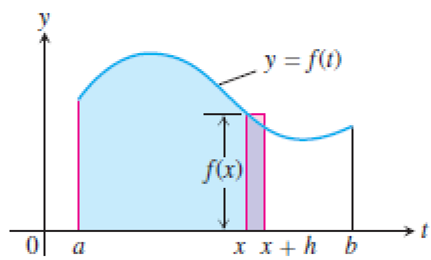
თუ $f(t)$ ინტეგრებადი ფუნქციაა სასრულ I ინტერვალზე, მაშინ ინტეგრალი რაიმე ფიქსირებული $a \in I$ - დან სხვა $x \in I$ რიცხვამდე განსაზღვრავს ახალ ფუნქციას

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad . \qquad (1)$$

მაგალითად, თუ f არაუარყოფითია და x ძევს a-ს მარჯვნივ, მაშინ $F(x)$ არის მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი a-დან x-მდე (ფიგურა 5.18).



ფიგურა 5.18



ფიგურა 5.19

დადებითი $f(x)$-სათვის $F(x+h)-F(x)$ ორი ფართობის სხვაობის ტოლია და ის წარმოადგენს მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს x-დან $x+h$-მდე (ფიგურა 5.19). თუ h მცირეა, ეს ფართობი მიახლოებით $f(x)$ სიმაღლისა და h სიგანის მართკუთხედის ფართობის ტოლია, როგორც ეს ფიგურა 5.19-დან ჩანს. ესე იგი,

$$F(x+h)-F(x) \approx hf(x).$$

ორივე მხარის h-ზე გაყოფით და $h \to 0$ ზღვარზე გადასვლით, გონივრულია მოველოდეთ

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x).$$

თეორემა 4_კალკულუსის უნდამენტური თეორემა, ნაწილი 1.

თუ f უწყვეტია $[a,b]$-ზე, მაშინ $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ უწყვეტია $[a,b]$-ზე, წარმოებადია (a,b)-ზე და მისი წარმოებულია $f(x)$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \quad . \qquad (2)$$

მაგალითი 2. ფუნდამენტური თეორემის გამოყენებით ვიპოვოთ dy/dx, თუ

(ა) $y=\int_a^x (t^3+1)dt$ (ბ) $y=\int_x^5 3t\sin t\,dt$

(გ) $y=\int_1^{x^2}\cos t\,dt$ (დ) $y=\int_{1+3x^2}^4 \frac{1}{2+e^t}dt$

ამოხსნა.

(ა) $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\int_a^x (t^3+1)dt=x^3+1$;

(ბ) $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\int_x^5 3t\sin t\,dt=\frac{d}{dx}\left(-\int_5^x 3t\sin t\,dt\right)=-\frac{d}{dx}\left(\int_5^x 3t\sin t\,dt\right)=-3x\sin x$;

(გ) ინტეგრების ზედა ზღვარი არის x^2 და არა x. რადგან y არის კომპოზიცია $y=\int_1^u \cos t\,dt$ და $u=x^2$ ორი ფუნქციისა, ამიტომ გამოვიყენებთ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესს

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\left(\frac{d}{du}\int_1^u \cos t\,dt\right)\cdot\frac{du}{dx}=\cos u\cdot\frac{du}{dx}=\cos(x^2)\cdot 2x=2x\cos x^2.$$

(დ) $\frac{d}{dx}\int_{1+3x^2}^4 \frac{1}{2+e^t}dt=-\frac{d}{dx}\left(\int_4^{1+3x^2}\frac{1}{2+e^t}dt\right)=-\frac{1}{2+e^{(1+3x^2)}}\frac{d}{dx}(1+3x^2)=-\frac{6x}{2+e^{(1+3x^2)}}$.

თეორემა 4-ის დამტკიცება. განსაზღვრების საფუძველზე, $F'(x)$ წარმოებულის გამოთვლა ნიშნავს გამოვთვალოთ $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ განაყოფის ზღვარი, როცა $h\to 0$.

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\right]=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

თეორემა 3-ის ძალით

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt=f(c),\quad x\le c\le x+h.$$

როცა $h\to 0$, მაშინ $c\to x$.

f ფუნქციის უწყვეტობის გამო $\lim_{h\to 0} f(c)=f(x)$ და მაშასადამე

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt=\lim_{h\to 0} f(c)=f(x).$$

თუ $x=a$ ან b, მაშინ შესაბამისად განიხილება ცალმხრივი ზღვრები $h\to 0^+$ ან $h\to 0^-$. ამიტომ სექცია 3.2-ის თეორემა 1-ის თანახმად $F(x)$ უწყვეტია $[a,b]$ შუალედზე. რ.დ.გ.

ფუნდამენტური თეორემა, ნაწილი 2 (გამოთვლის თეორემა)

თეორემის ეს ნაწლი აღწერს როგორ გამოვთვალოთ განსაზღვრული ინტეგრალი რიმანის ჯამის ზღვრარზე გადასვლის გარეშე.

> **თეორემა 4** (გაგრძელება) _ ფუნდამენტური თეორემა, ნაწილი 2
>
> თუ F არის $[a,b]$-ზე უწყვეტი f ფუნქციის რომელიმე პირველადი, მაშინ
>
> $$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a). \qquad (3)$$

დამტკიცება. რადგან $\int_a^x f(t)\,dt$ აგრეთვე წარმოადგენს $f(x)$-ის პირველადს, ამიტომ

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C, \quad x \in [a,b],$$

სადაც C რომელიღაც მუდმივია. აქედან $x = a$-ს ჩასმით გვაქვს

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C \quad \Rightarrow \quad C = -F(a).$$

მაშასადამე,

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

აქედან $x = b$-ს დაშვებით მიიღება დასამტკიცებელი ტოლობა.

(3) ფორმულის ჩასაწერად ხშირად იყენებენ აღნიშვნას $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$ (იკითხება :" ეფ იქსი ჩასმა ა-დან ბ-მდე"):

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x)\Big|_a^b.$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ განსაზღვრული ინტეგრალები .

(ა) $\int_0^\pi \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^\pi = \sin\pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0$

(ბ) $\int_{-\pi/4}^0 \sec x \tan x\,dx = \sec x\Big|_{-\pi/4}^0 = \sec 0 - \sec\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{2}$

(გ) $\int_1^4 \left(\dfrac{3}{2}\sqrt{x} - \dfrac{4}{x^2}\right)dx = \left[x^{3/2} + \dfrac{4}{x}\right]_1^4 = \left[(4)^{3/2} + \dfrac{4}{4}\right] - \left[(1)^{3/2} + \dfrac{4}{1}\right] = [8+1] - [5] = 4$

(დ) $\int_0^1 \dfrac{dx}{x+1} = \ln|x+1|\Big]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

(ე) $\int_0^1 \dfrac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1} x\Big]_0^1 = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 = \dfrac{\pi}{4} - 0 = \dfrac{\pi}{4}.$

ვთქვათ, $y = f(x)$ ფუნქცია $[a,b]$ შუალედში ღებულობს როგორც დადებით, ისე უარყოფით მნიშვნელობებს. თუ გვინდა ამ ფუნქციითა და Ox ღერძით შემოსაზღვრული არის საერთო ფართობი გავიგოთ, საჭიროა ჯერ $[a,b]$ დავყოთ ქვეინტერვალებად, რომლებშიც f ნიშანს ინარჩუნებს. წინააღმდეგ შემთხვევაში შეიძლება დადებითი და უარყოფითი ნიშნების მქონე ფართობებმა ერთმანეთი გააბათილოს. სწორი პასუხის მისაღებად საჭიროა ცალკეულ ქვეინტერვალებზე მიღებული შედეგების აბსოლუტური მნიშვნელობების შეკრება.

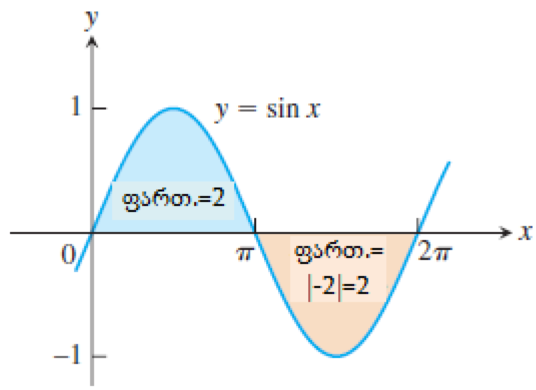
მაგალითი 7. ფიგურა 5.21-ზე $f(x) = \sin x$ -ის გრაფიკია ნაჩვენები $x = 0$ და $x = 2\pi$ -ს შორის. გამოვთვალოთ : (ა) განსაზღვრული ინტეგრალი $f(x)$ -დან $[0, 2\pi]$ - ზე.

(ბ) ფართობი $f(x)$ -ის გრაფიკსა და Ox ღერძს შორის $[0, 2\pi]$ -ზე.

ამოხსნა.

(ა) $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} =$

$= -\left[\cos 2\pi - \cos 0\right] = -[1-1] = 0$.



ფიგურა 5.21

(ბ) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\left[\cos \pi - \cos 0\right] = 2$,

$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} = -\left[\cos 2\pi - \cos \pi\right] = -2$

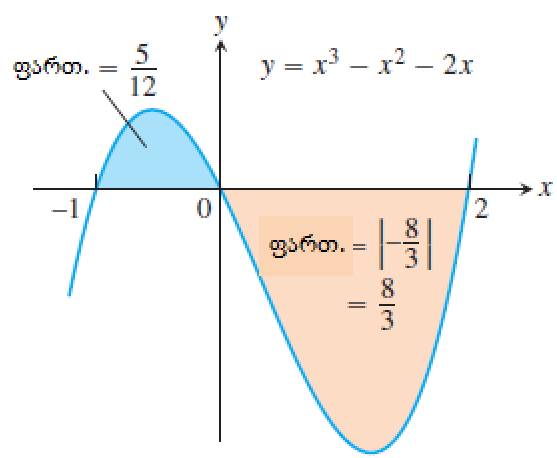
ფართ.= |2|+|-2|=4.

მაგალითი 8. ვიპოვოთ Ox ღერძითა და $f(x) = x^3 - x^2 - 2x, -1 \le x \le 2$ ფუნქციის გრაფიკით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

ამოხსნა. პირველ რიგში ვიპოვოთ f -ის ფესვები. რადგან

$$f = x(x^2 - x - 2) = x(x+1)(x-2),$$

ფუნქციის ნულებია $x = 0, -1$ და 2 (ფიგურა 5.22). ამ რიცხვებით განსაზღვრის არე ორ ქვეინტერვალად დაიყო: $[-1, 0]$, სადაც $f \ge 0$ და $[0, 2]$, სადაც $f \le 0$. ჩვენ ვაინტეგრებთ f -ს თითოეულ ქვეინტერვალზე და შევკრებთ მათ აბსოლუტურ მნიშვნელობებს.



ფიგურა 5.22

$$\int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} = 0 - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right] = \frac{5}{12},$$

$$\int_0^2 (x^3 - x^2 - 2x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = \left[4 - \frac{8}{3} - 4\right] - 0 = -\frac{8}{3}.$$

მთლიანი ფართობი $= \dfrac{5}{12} + \left|-\dfrac{8}{3}\right| = \dfrac{37}{12}.$

სავარჯიშოები 5.4

1--34 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ ინტეგრალები.

1. $\displaystyle\int_{-2}^{0} (2x + 5)\, dx$

2. $\displaystyle\int_{-3}^{4} \left(5 - \frac{x}{2}\right) dx$

3. $\displaystyle\int_{0}^{2} x(x - 3)\, dx$

4. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2 - 2x + 3)\, dx$

5. $\displaystyle\int_{0}^{4} \left(3x - \frac{x^3}{4}\right) dx$

6. $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x^3 - 2x + 3)\, dx$

7. $\displaystyle\int_{0}^{1} \left(x^2 + \sqrt{x}\right) dx$

8. $\displaystyle\int_{1}^{32} x^{-6/5}\, dx$

9. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/3} 2\sec^2 x\, dx$

10. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} (1 + \cos x)\, dx$

11. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc\theta \cot\theta\, d\theta$

12. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/3} 4\sec u \tan u\, du$

13. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{0} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt$

14. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1 - \cos 2t}{2}\, dt$

15. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \tan^2 x\, dx$

16. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/6} (\sec x + \tan x)^2\, dx$

17. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/8} \sin 2x\, dx$

18. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{-\pi/4} \left(4\sec^2 t + \frac{\pi}{t^2}\right) dt$

19. $\displaystyle\int_{1}^{-1} (r + 1)^2\, dr$

20. $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (t + 1)(t^2 + 4)\, dt$

21. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{1} \left(\frac{u^7}{2} - \frac{1}{u^5}\right) du$

22. $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{y^5 - 2y}{y^3}\, dy$

23. $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{s^2+\sqrt{s}}{s^2}\,ds$ **24.** $\int_1^{8} \frac{(x^{1/3}+1)(2-x^{2/3})}{x^{1/3}}\,dx$ **25.** $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin 2x}{2\sin x}\,dx$

26. $\int_0^{\pi/3} (\cos x+\sec x)^2\,dx$ **27.** $\int_{-4}^{4} |x|\,dx$ **28.** $\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\cos x+|\cos x)\,dx$

29. $\int_0^{\ln 2} e^{3x}\,dx$ **30.** $\int_1^2 \left(\frac{1}{x}-e^{-x}\right)dx$

31. $\int_0^{1/2} \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **32.** $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{1+4x^2}$

33. $\int_2^4 x^{\pi-1}\,dx$ **34.** $\int_{-1}^0 \pi^{x-1}\,dx$

45--56 სავარჯიშოებში იპოვეთ dy/dx.

45. $y=\int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$ **46.** $y=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt,\quad x>0$

47. $y=\int_{\sqrt{x}}^0 \sin(t^2)\,dt$ **48.** $y=x\int_2^{x^2} \sin(t^3)\,dt$

49. $y=\int_{-1}^x \frac{t^2}{t^2+4}\,dt-\int_3^x \frac{t^2}{t^2+4}\,dt$

50. $y=\left(\int_0^x (t^3+1)^{10}\,dt\right)^3$

51. $y=\int_0^{\sin x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\quad |x|<\frac{\pi}{2}$

52. $y=\int_{\tan x}^0 \frac{dt}{1+t^2}$ **53.** $y=\int_0^{e^{x^2}} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$

54. $y=\int_{2^x}^1 \sqrt[3]{t}\,dt$ **55.** $y=\int_0^{\sin^{-1}x} \cos t\,dt$

56. $y=\int_{-1}^{x^{1/\pi}} \sin^{-1} t\,dt$

57--60 სავარჯიშოებში იპოვეთ ფუნქციის გრაფიკითა და Ox ღერძით შემოსაზღვრული არის ფართობი .

57. $y = -x^2 - 2x, \quad -3 \le x \le 2$

58. $y = 3x^2 - 3, \quad -2 \le x \le 2$

59. $y = x^3 - 3x^2 + 2x, \quad 0 \le x \le 2$

60. $y = x^{1/3} - x, \quad -1 \le x \le 8$

5.5 განუსაზღვრელი ინტეგრალები და ჩასმის მეთოდი

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $\int (x^3+x)^5(3x^2+1)\,dx$.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ $u = x^3 + x$. მაშინ

$$du = \frac{du}{dx}dx = (3x^2+1)\,dx,$$

ამოხსნა. აღვნიშნოთ $u = x^3 + x$. მაშინ

$$du = \frac{du}{dx}dx = (3x^2+1)\,dx,$$

ამიტომ ჩასმით მივიღებთ

$$\int (x^3+x)^5(3x^2+1)\,dx = \int u^5\,du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{(x^3+x)^6}{6} + C.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $\int \sqrt{2x+1}\,dx$.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ $u = 2x+1$. მაშინ

$$du = \frac{du}{dx}dx = 2\,dx,$$

ამიტომ ჩასმით მივიღებთ

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{2x+1}\cdot 2dx = \frac{1}{2}\int u^{1/2}\cdot du = \frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C.$$

ეს მაგალითები წარმოადგენენ შემდეგი წესის კერძო შემთხვევებს.

თეორემა 6_ჩასმის ხერხი. თუ წარმოებადი $u = g(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა I და f უწყვეტია I-ზე, მაშინ

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

დამტკიცება. რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))\cdot g'(x) = f(g(x))\cdot g'(x),$$

მაშასადამე $F(g(x))$ არის $f(g(x))\cdot g'(x)$ -ის პირველადი. თუ მოვახდენთ $u = g(x)$ ჩასმას, გვექნება

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int \frac{d}{dx}F(g(x))\,dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u)\,du = \int f(u)\,du.$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $\int \sec^2(5t+1)\cdot 5\,dt$.

ამოხსნა. მოვახდინოთ ჩასმა $u = 5t+1$ და $du = 5dt$. მაშინ

$$\int \sec^2(5t+1)\cdot 5\,dt = \int \sec^2 u\,du = \tan u + C = \tan(5t+1) + C.$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ $\int \cos(7t+3)\,dt$.

ამოხსნა. მოვახდინოთ ჩასმა $u = 7t+1$ და $du = 7dt$. მაშინ

$$\int \cos(7t+3)\,dt = \frac{1}{7}\int \cos(7t+3)\cdot 7\,dt = \frac{1}{7}\int \cos u\,du = \frac{1}{7}\sin u + C = \frac{1}{7}\sin(7t+3) + C.$$

მაგალითი 5. ვიპოვოთ $\int x^2 e^{x^3}\,dx$.

ამოხსნა. მოვახდინოთ ჩასმა $u = x^3$ და $du = 3x^2 dx$. მაშინ

$$\int x^2 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3}\cdot 3x^2\,dx = \frac{1}{3}\int e^u\,du = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C.$$

მაგალითი 6. ვიპოვოთ (ა) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$; (ბ) $\int \sec x\,dx$.

ამოხსნა. (ა) ჯერ წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი გავამრავლოთ e^x -ზე და შემდეგ მოვახდინოთ ჩასმა $u = e^x$, $du = e^x\,dx$:

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{du}{u^2+1} = \tan^{-1} u + C = \tan^{-1}(e^x) + C.$$

(ბ) ჯერ გარდავქმნათ ასე

$$\int \sec x\,dx = \int \sec x\cdot\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x\tan x}{\sec x + \tan x}\,dx.$$

მოვახდინოთ ჩასმა $u = \tan x + \sec x$, $du = (\sec^2 x + \sec x\tan x)\,dx$:

$$\int \sec x\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sec u + \tan u| + C.$$

მაგალითი 7. ვიპოვოთ $\int x\sqrt{2x+1}\,dx$.

ამოხსნა. მოვახდინოთ ჩასმა $u = 2x+1$. მაშინ $du = 2dx$, $x = (u-1)/2$, $dx = (1/2)du$.

მივიღებთ

$$\int x\sqrt{2x+1}\,dx = \int \frac{u-1}{2}\sqrt{u}\cdot\frac{1}{2}du = \frac{1}{4}\int (u-1)u^{1/2}du = \frac{1}{4}\int (u^{3/2} - u^{1/2})du =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2}\right) + C = \frac{1}{10}(2x+1)^{5/2} - \frac{1}{6}(2x+1)^{3/2}.$$

მაგალითი 8. ვიპოვოთ $\int \frac{2z\,dz}{\sqrt[3]{z^2+1}}$.

ამოხსნა 1. მოვახდინოთ ჩასმა $u = z^2+1$.

$$\int \frac{2z\,dz}{\sqrt[3]{z^2+1}} = \int \frac{du}{u^{1/3}} = \int u^{-1/3}du = \frac{u^{2/3}}{2/3} + C = \frac{3}{2}(z^2+1)^{2/3} + C.$$

ამოხსნა 2. მოვახდინოთ ჩასმა $u = \sqrt[3]{z^2+1}$. მაშინ $u^3 = z^2+1$, $3u^2du = 2z\,dz$ და გვექნება

$$\int \frac{2z\,dz}{\sqrt[3]{z^2+1}} = \int \frac{3u^2\,du}{u} = 3\int u\,du = \frac{3}{2}u^2 + C = \frac{3}{2}(z^2+1)^{2/3} + C.$$

მაგალითი 9.

(ა) $\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + C = \frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4} + C$

(ბ) $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + C = \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + C$

სავარჯიშოები 5.5

1--14 სავარჯიშოებში გამოვთვალოთ ინტეგრალები მითითებული ჩასმის გამოყენებით.

1. $\int 2(2x+4)^5 dx,\ u=2x+4$

2. $\int 7\sqrt{7x-1}\,dx,\ u=7x-1$

3. $\int 2x(x^2+5)^{-4} dx,\ u=x^2+5$

4. $\int \frac{4x^3}{(x^4+1)^2} dx,\ u=x^4+1$

5. $\int (3x+2)(3x^2+4x)^4 dx,\ u=3x^2+4x$

6. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^{1/3}}{\sqrt{x}} dx,\ u=1+\sqrt{x}$

7. $\int \sin 3x\,dx, u=3x$

8. $\int x\sin(2x^2)\,dx,\ u=2x^2$

9. $\int \sec 2t \tan 2t\,dt, u=2t$

10. $\int \left(1-\cos\frac{t}{2}\right)^2 \sin\frac{t}{2}dt, u=1-\cos\frac{t}{2}$

11. $\int \frac{9r^2\,dr}{\sqrt{1-r^3}}, \quad u=1-r^3$

12. $\int 12(y^4+4y^2+1)^2(y^3+2y)\,dy, \quad u=y^4+4y^2+1$

13. $\int \sqrt{x}\sin^2(x^{3/2}-1)\,dx, \quad u=x^{3/2}-1$

14. $\int \frac{1}{x^2}\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)dx, \quad u=-\frac{1}{x}$

17--48 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ ინტეგრალები

17. $\int \sqrt{3-2s}\,ds$

18. $\int \frac{1}{\sqrt{5s+4}}\,ds$

19. $\int \theta\sqrt[4]{1-\theta^2}\,d\theta$

20. $\int 3y\sqrt{7-3y^2}\,dy$

21. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\,dx$

22. $\int \cos(3z+4)\,dz$

23. $\int \sec^2(3x+2)\,dx$

24. $\int \tan^2 x\sec^2 x\,dx$

25. $\int \sin^5\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}\,dx$

26. $\int \tan^7\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx$

27. $\int r^2\left(\frac{r^3}{18}-1\right)^5 dr$

28. $\int r^4\left(7-\frac{r^5}{10}\right)^3 dr$

29. $\int x^{1/2} \sin(x^{3/2} + 1)\, dx$

30. $\int \csc\left(\frac{v - \pi}{2}\right) \cot\left(\frac{v - \pi}{2}\right) dv$

31. $\int \frac{\sin(2t + 1)}{\cos^2(2t + 1)}\, dt$

32. $\int \frac{\sec z \tan z}{\sqrt{\sec z}}\, dz$

33. $\int \frac{1}{t^2} \cos\left(\frac{1}{t} - 1\right) dt$

34. $\int \frac{1}{\sqrt{t}} \cos(\sqrt{t} + 3)\, dt$

35. $\int \frac{1}{\theta^2} \sin\frac{1}{\theta} \cos\frac{1}{\theta}\, d\theta$

36. $\int \frac{\cos\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}\sin^2\sqrt{\theta}}\, d\theta$

37. $\int t^3(1 + t^4)^3\, dt$

38. $\int \sqrt{\frac{x - 1}{x^5}}\, dx$

39. $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{2 - \frac{1}{x}}\, dx$

40. $\int \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}}\, dx$

41. $\int \sqrt{\frac{x^3 - 3}{x^{11}}}\, dx$

42. $\int \sqrt{\frac{x^4}{x^3 - 1}}\, dx$

43. $\int x(x - 1)^{10}\, dx$

44. $\int x\sqrt{4 - x}\, dx$

45. $\int (x + 1)^2(1 - x)^5\, dx$

46. $\int (x + 5)(x - 5)^{1/3}\, dx$

47. $\int x^3\sqrt{x^2 + 1}\, dx$

48. $\int 3x^5\sqrt{x^3 + 1}\, dx$

71--76 სავარჯიშოებში ამოხსენით საწყის მნიშვნელობათა ამოცანები.

71. $\frac{ds}{dt} = 12t(3t^2 - 1)^3, \quad s(1) = 3$

72. $\frac{dy}{dx} = 4x(x^2 + 8)^{-1/3}, \quad y(0) = 0$

73. $\frac{ds}{dt} = 8\sin^2\left(t + \frac{\pi}{12}\right), \quad s(0) = 8$

74. $\frac{dr}{d\theta} = 3\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right), \quad r(0) = \frac{\pi}{8}$

75. $\frac{d^2s}{dt^2} = -4\sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right), \quad s'(0) = 100, \quad s(0) = 0$

76. $\frac{d^2y}{dx^2} = 4\sec^2 2x \tan 2x, \quad y'(0) = 4, \quad y(0) = -1$

5.6 ჩასმის ხერხი და ფართობი მრუდებს შორის

თეორემა 7_ჩასმა განსაზღვრულ ინტეგრალში. თუ $g'(x)$ უწყვეტია $[a,b]$-ზე და f უწყვეტია $g(x)=u$ -ს მნიშვნელობათა სიმრავლეზე, მაშინ

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du\,.$$

დამტკიცება. ვთქვათ F არის f -ის პირველადი. მაშინ

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx=F(g(x))\Big]_{x=a}^{x=b}=F(g(b))-F(g(a))=F(u)\Big]_{u=g(a)}^{u=g(b)}=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du\,.$$

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$.

ამოხსნა 1_(ინტეგრების საზღვრების შეცვლა ჩასმით). ვთქვათ $u=x^3+1,\quad du=3x^2dx$;

$$x=-1\Rightarrow\quad u=(-1)^3+1=0;$$

$$x=-1\Rightarrow\quad u=(1)^3+1=2.$$

ამიტომ

$$\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx=\int_0^2\sqrt{u}\,du=\frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_0^2=\frac{2}{3}[2^{3/2}-0^{3/2}]=\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

ამოხსნა 2_(პირველადის მოძებნა ჩასმით).

ვთქვათ, $u=x^3+1,\quad du=3x^2dx$

$$\int 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx=\int\sqrt{u}\,du=\frac{2}{3}u^{3/2}+C=\frac{2}{3}(x^3+1)^{3/2}+C;$$

$$\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx=\frac{2}{3}(x^3+1)^{3/2}\Big]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}\left[((1)^3+1)^{3/2}-((-1)^3+1)^{3/2}\right]=\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

მაგალითი 2. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\tan x\,dx=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\sin x}{\cos x}dx=$

$$=-\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2}\frac{du}{u}=$$

$$=\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2}\frac{du}{u}=-\ln|u|\Big]_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2}=0\ .$$

აღვნ. $u=\cos x,\quad du=-\sin x\,dx$

$$x=-\frac{\pi}{4}\Rightarrow u=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

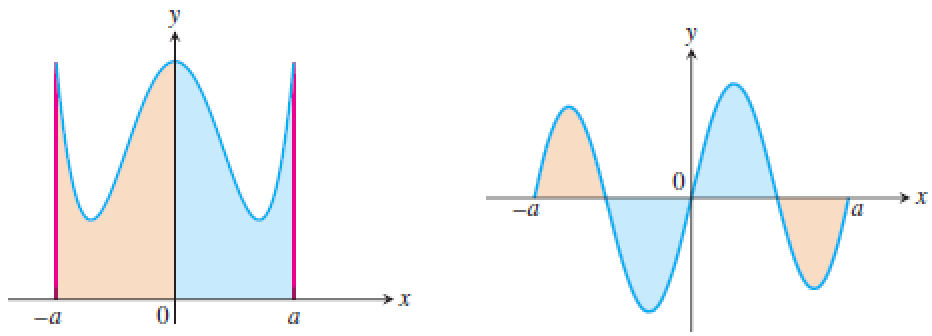
$$x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow u=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

თეორემა 8 ვთქვათ f უწყვეტია სიმეტრიულ $[-a,a]$ ინტერვალზე.

(ა) თუ f ლუწია, მაშინ $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

(ბ) თუ f კენტია, მაშინ $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

თეორემა 8-ის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია მოცემულია ფიგურა 5. 24-ზე.



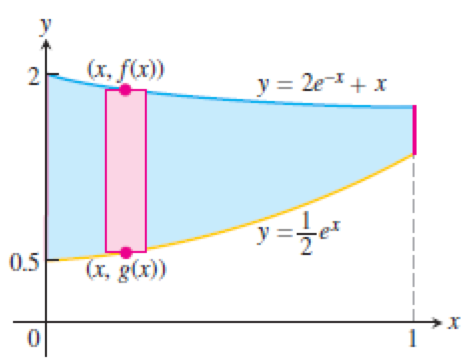
(ა) (ბ)

ფიგურა 5.24

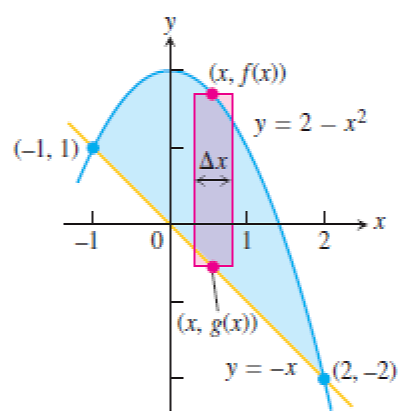
განსაზღვრება. თუ $f(x) \ge g(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია $[a,b]$ -ზე, მაშინ მათი გრაფიკებით a -დან b -მდე შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობია

$$A = \int_{a}^{b} [f(x) - g(x)]\,dx .$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც ზევიდან და ქვევიდან შემოსაზღვრულია $y = 2e^{-x} + x$ და $y = e^{x}/2$ მრუდებით, მარცხნიდან და მარჯვნიდან კი $x = 0$ -ით და $x = 1$ -ით (ფიგურა 5.28).



ფიგურა 5.28



ფიგურა 5.29

ამოხსნა .

$$A=\int_0^1\left[(2e^{-x}+x)-\frac{1}{2}e^x\right]dx=\left[-2e^{-x}+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}e^x\right]_0^1=$$

$$=\left(-2e^{-1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e\right)-\left(-2+0-\frac{1}{2}\right)=3-\frac{2}{e}-\frac{e}{2}\approx 0,9051.$$

მაგალითი 5. ვიპოვოთ $y=2-x^2$ პარაბოლით და $y=-x$ წრფით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

ამოხსნა. ჯერ ავაგოთ გრაფიკები (ფიგურა 5.29). ინტეგრების საზღვრები გრაფიკების თანაკვეთის აბსცისებია:

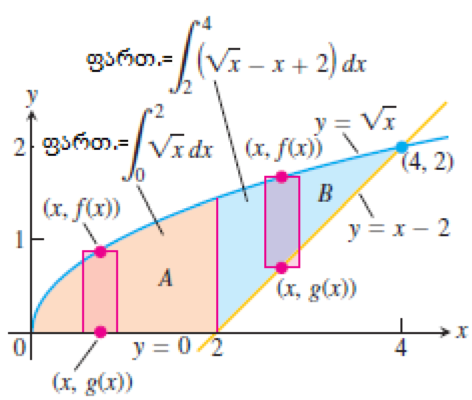
$2-x^2=-x;\quad x^2-x-2=0;\quad x=-1,\quad x=2$. ინტეგრების საზღვრებია $a=-1, b=2$.

$$A=\int_{-1}^2[(2-x^2)-(-x)]dx=\int_{-1}^2(2+x-x^2)dx=$$

$$=\left(4+\frac{4}{2}-\frac{8}{3}\right)-\left(-2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{2}.$$

მაგალითი 6. ვიპოვოთ პირველ კვადრანტში მოთავსებული იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც ზევიდან შემოსაზღვრულია $y=\sqrt{x}$ მრუდით, ქვევიდან კი x - ღერძით და $y=x-2$ წრფით.

ამოხსნა. ნახაზი (ფიგურა 5.30) გვიჩვენებს, რომ ქვედა საზღვარია $g(x)=0$, როცა $0\le x\le 2$ და $g(x)=x-2$, როცა $2\le x\le 4$ ($x=4$ მიღებულია $\sqrt{x}=x-2$ განტოლების ამოხსნით).



ფიგურა 5.30

ფიგურა, რომლის ფართობსაც ვეძებთ, დაიყო A და B ქვეარეებად.

როცა $0\le x\le 2$: $f(x)-g(x)=\sqrt{x}-0=\sqrt{x}$;

როცა $2 \le x \le 4$: $f(x) - g(x) = \sqrt{x} - (x-2) = \sqrt{x} - x + 2$.

მთლიანი ფართობი $= \int_0^2 \sqrt{x}\,dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^2 + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_2^4 = \frac{10}{3}$.

სავარჯიშოები 5.6

1--46 სავარჯიშოებში ჩასმის ხერხით (თეორემა 7) გამოთვალეთ ინტეგრალები.

1. a. $\int_0^3 \sqrt{y+1}\,dy$ b. $\int_{-1}^0 \sqrt{y+1}\,dy$
2. a. $\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr$ b. $\int_{-1}^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr$
3. a. $\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x\,dx$ b. $\int_{-\pi/4}^0 \tan x \sec^2 x\,dx$
4. a. $\int_0^{\pi} 3\cos^2 x \sin x\,dx$ b. $\int_{2\pi}^{3\pi} 3\cos^2 x \sin x\,dx$
5. a. $\int_0^1 t^3(1+t^4)^3\,dt$ b. $\int_{-1}^1 t^3(1+t^4)^3\,dt$
6. a. $\int_0^{\sqrt{7}} t(t^2+1)^{1/3}\,dt$ b. $\int_{-\sqrt{7}}^0 t(t^2+1)^{1/3}\,dt$
7. a. $\int_{-1}^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2}\,dr$ b. $\int_0^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2}\,dr$
8. a. $\int_0^1 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2}\,dv$ b. $\int_1^4 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2}\,dv$
9. a. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ b. $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$
10. a. $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}\,dx$ b. $\int_{-1}^0 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}\,dx$
11. a. $\int_0^{\pi/6} (1-\cos 3t)\sin 3t\,dt$ b. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} (1-\cos 3t)\sin 3t\,dt$
12. a. $\int_{-\pi/2}^0 \left(2+\tan\frac{t}{2}\right)\sec^2\frac{t}{2}\,dt$ b. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2+\tan\frac{t}{2}\right)\sec^2\frac{t}{2}\,dt$
13. a. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+3\sin z}}\,dz$ b. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+3\sin z}}\,dz$
14. a. $\int_{-\pi/2}^0 \frac{\sin w}{(3+2\cos w)^2}\,dw$ b. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin w}{(3+2\cos w)^2}\,dw$
15. $\int_0^1 \sqrt{t^5+2t}\,(5t^4+2)\,dt$
16. $\int_1^4 \frac{dy}{2\sqrt{y}\,(1+\sqrt{y})^2}$

17. $\int_0^{\pi/6} \cos^{-3} 2\theta \sin 2\theta \, d\theta$

18. $\int_\pi^{3\pi/2} \cot^5 \left(\frac{\theta}{6}\right) \sec^2 \left(\frac{\theta}{6}\right) d\theta$

19. $\int_0^\pi 5(5 - 4\cos t)^{1/4} \sin t \, dt$

20. $\int_0^{\pi/4} (1 - \sin 2t)^{3/2} \cos 2t \, dt$

21. $\int_0^1 (4y - y^2 + 4y^3 + 1)^{-2/3} (12y^2 - 2y + 4) \, dy$

22. $\int_0^1 (y^3 + 6y^2 - 12y + 9)^{-1/2} (y^2 + 4y - 4) \, dy$

23. $\int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sqrt{\theta} \cos^2 (\theta^{3/2}) \, d\theta$

24. $\int_{-1}^{-1/2} t^{-2} \sin^2 \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt$

25. $\int_0^{\pi/4} (1 + e^{\tan\theta}) \sec^2 \theta \, d\theta$

26. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 + e^{\cot\theta}) \csc^2 \theta \, d\theta$

27. $\int_0^\pi \frac{\sin t}{2 - \cos t} dt$

28. $\int_0^{\pi/3} \frac{4\sin\theta}{1 - 4\cos\theta} d\theta$

29. $\int_1^2 \frac{2\ln x}{x} dx$

30. $\int_2^4 \frac{dx}{x\ln x}$

31. $\int_2^4 \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

32. $\int_2^{16} \frac{dx}{2x\sqrt{\ln x}}$

33. $\int_0^{\pi/2} \tan\frac{x}{2} dx$

34. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot t \, dt$

35. $\int_{\pi/2}^\pi 2\cot\frac{\theta}{3} d\theta$

36. $\int_0^{\pi/12} 6\tan 3x \, dx$

37. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2\cos\theta \, d\theta}{1 + (\sin\theta)^2}$

38. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\csc^2 x \, dx}{1 + (\cot x)^2}$

39. $\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x \, dx}{1 + e^{2x}}$

40. $\int_1^{e^{\pi/4}} \frac{4 \, dt}{t(1 + \ln^2 t)}$

41. $\int_0^1 \frac{4 \, ds}{\sqrt{4 - s^2}}$

42. $\int_0^{3\sqrt{2}/4} \frac{ds}{\sqrt{9 - 4s^2}}$

43. $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{\sec^2(\sec^{-1} x) \, dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

44. $\int_{2/\sqrt{3}}^2 \frac{\cos(\sec^{-1} x) \, dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

45. $\int_{-1}^{-\sqrt{2}/2} \frac{dy}{y\sqrt{4y^2 - 1}}$

46. $\int_{-2/3}^{-\sqrt{2}/3} \frac{dy}{y\sqrt{9y^2 - 1}}$

63--70 სავარჯიშოებში გამოთვალეთ მრუდითა და წრფით შემოსაზღვრულ არეთა ფართობი.

63. $y = x^2 - 2$ და $y = 2$

64. $y = 2x - x^2$ და $y = -3$

65. $y = x^4$ და $y = 8x$

66. $y = x^2 - 2x$ და $y = x$

67. $y = x^2$ და $y = -x^2 + 4x$

68. $y = 7 - 2x^2$ და $y = x^2 + 4$

69. $y = x^4 - 4x^2 + 4$ და $y = x^2$

70. $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$ და $y = 0$