Relatório de Modelo Insumo-Produto de Leontief

Amanda Costa amanda.cs@usp.br
João Pedro de Freitas jpfreitas2001@usp.br
Juan Nogueira juan.nog@usp.br
Maria Rita Xavier mrxavier74@usp.br
Octavio Augusto Potalej oapotalej@usp.br
Samuel Garcez samueltgarcez@usp.br

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo

O relatório objetiva discutir e desenvolver o modelo matemático proposto por Leontief e que permite, através de equações matriciais, a obtenção de importantes parâmetros que descrevem a relação entre os setores industriais de uma economia.

1 Introdução

Quando temos nosso primeiro contato com a economia enquanto ciência, usualmente não encontramos fórmulas complicadas, raciocínios lógicos extensos ou ferramentas além da matemática básica. No entanto, ao nos aprofundarmos no tema, percebemos que ela é uma ciência tão matemática quanto humana. A modelagem, e com ela os métodos matemáticos, trazem resultados e implicações que de outra forma seriam pouco óbvios.

Há diversas formas de se estudar uma economia sob essa perspectiva. Uma delas, em especial, é fazendo uso do modelo desenvolvido pelo economista Wassily Leontief, que lhe garantiu o prêmio Nobel de 1973 e será o foco deste relatório. Esse consiste em, após dividir a economia em setores produtivos que interagem entre si, equacionar as relações intersetoriais em conjunto com quanto e para quem flui o que é produzido, como veremos a seguir. A esse modelo matemático, que faz forte uso da teoria de matrizes, deu-se o nome de modelo input-output (em português, insumo-produto) [1]

Ao longo do percurso deste texto o desenvolveremos, além de mostrar suas aplicações com exemplos e casos factuais, com a ajuda de recursos da computação que tornam essa tarefa viável. Para começar, esclareçamos seu funcionamento.

2 O Modelo

2.1 A tabela Insumo-Produto

A tabela de insumo-produto é a base para o modelo de Leontief. Esta se baseia na distribuição de insumos e demandas entre setores produtivos e não produtivos, sendo estas as duas categorias de setores da economia. Os mesmos n setores que produzem também compram insumos e produtos de outros setores n para suprir a demanda por um produto ou serviço. Os setores que não produzem apenas consomem. As colunas comportam o quanto se é consumido de um setor i por um setor j. A matriz de insumo produto pode ser escrita como:

Setores	1	2	...	j	demanda	produção
1	z_{11}	z_{12}	...	z_{1n}	d_1	x_1
2	z_{21}	z_{22}	...	z_{2n}	d_2	x_2
$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
n	z_{n1}	z_{n2}	...	z_{nn}	d_n	x_n

Na qual:

z_{ij} denomina a produção intermediária ou as vendas intersetoriais do setor i para o setor j;

d_i é a demanda final anual do setor não produtivo por produtos do setor i;

x_i é o total da demanda pelos produtos ou serviços produzidos pelo setor i, de maneira que:

$$x_i = z_{i1} + z_{i2} + z_{i3} + ... + z_{ij} + d_i.$$

A coluna $\boldsymbol{z}_j$ tem um papel importante, pois denomina o consumo de um setor j, tal que:

$$\boldsymbol{z}_j = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ zn \end{bmatrix}$$

No qual cada linha corresponde ao setor do qual foi comprado tal valor de venda de z_j.

2.2 O modelo de Leontief

Leontief propôs uma relação entre a demanda final, as vendas intersetoriais e a produção, de maneira que a produção supra as demandas intersetoriais e a demanda final (neste caso, a demanda imposta por um setor ou conjunto de setores que não produzem).

Assim:

Produção = Demandas intersetoriais + Demanda Final

$$x = Z + d$$

Supondo x como um vetor, torna-se o vetor produção. Portanto, cada elemento do vetor produção é a soma das demandas intermediárias (z_{ij}) e da demanda final (d_i) de um setor i.

$$\boldsymbol{x}_i = \begin{bmatrix} z_{i1} & z_{i2} & \dots & z_{in} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_i \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Z} + \boldsymbol{d}$$

Assim como o vetor $\boldsymbol{x}$, o vetor $\boldsymbol{d}$ tem suas componentes $d_i \in R$. Este é um vetor definido.

2.2.1 A hipótese fundamental do modelo de Leontief

A hipótese fundamental de Leontief é a proposição de que a razão entre o valor dos insumos por unidade de valor produzido de cada setor é constante. A isso dá-se o nome de vetor consumo $\boldsymbol{C}$. Sendo os insumos por unidade os valores de z_{ij} e x_i valor produzido de cada setor.

$$\boldsymbol{c}_i = z_{ij}/x_i = \begin{bmatrix} z_{1j}/x_1 & z_{2j}/x_2 & \dots & z_{nn}/x_{i=n} \end{bmatrix}$$

E, portanto,

$$z_{ij} = \boldsymbol{c}_i \cdot x_i = \boldsymbol{Cx}.$$

Pelo que vimos anteriormente, vem::

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d} = \boldsymbol{Z}$$

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d} = \boldsymbol{Cx}$$

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{d}$$

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C})^{-1}$$

Chegamos assim à matriz dos coeficientes de insumo, ou Matriz de Leontief:

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C})^{-1}$$

Obs: O sistema aberto de Leontief considera a demanda final como sendo exógena ao sistema, enquanto que no sistema fechado esta é considerada endógena. Se $d_i = d_i$, $1 \leq i \leq n$, a solução admite $x_i = x_i$, $1 \leq i \leq n$.

Chamando-a de $\boldsymbol{L}$ para facilitar o entendimento de seu significado, ficamos com:

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C})^{-1} = \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1j} & \dots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2j} & \dots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nj} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

Em que $\boldsymbol{I}$ é a matriz identidade de ordem n. Os elementos de $\boldsymbol{L}$, l_{ij} denominam a produção do setor i para atender a demanda final monetária do setor j.

Portanto, $\boldsymbol{L}$ tem de existir e, além disso, $l_{ij} \geq 0$ para que $\boldsymbol{C}$ seja produtiva, por definição.

2.2.2 Teorema da Matriz de Consumo Produtiva ou Rentável

Uma matriz de consumo é produtiva se, e somente se, existir um vetor produção $\boldsymbol{x}$ que satisfaz $x_i \geq c_{ij}x_i$ ($x_i \geq 0$) para todo i. A inversa também é verdadeira: "Se $\boldsymbol{C}$ é uma matriz $n \times n$ com coeficientes reais não negativos tal que

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij} < 1$$

valha para todo $i, j = 1, 2, ..., n$. Então a matriz $(I - C)$ é inversível e os coeficientes da sua inversa são não negativos". Portanto, se o vetor demanda for positivo, a produção também será positiva. O sistema é rentável e equilibrado por definição, se estas condições forem satisfeitas. Com isso, obtemos também a seguinte relação:

$$c_{1j} + c_{2j} + \ldots + c_{nn} \leq 1$$

2.2.3 Pergunta: Explique por que os coeficientes da Matriz de Leontief admitem uma interpretação econômica.

A Matriz Inversa de Leontief apresenta os coeficientes (multiplicadores econômicos) que medem os sucessivos efeitos sobre a economia em decorrência do aumento da demanda de um ramo de atividade econômica. Em outras palavras, se um aumento na produção de um setor j requer inicialmente uma demanda maior para ser realizado, o consumo intermediário é, por sua vez, produzido por outros setores através de uma maior produção proporcional ao aumento da produção no setor j, e assim por diante. É o que é conhecido como efeito de transbordamento* que surge entre os vários ramos de atividade de uma economia.

3 Uma economia de 3 setores

Uma dada economia dividida em três setores, manufatura, agricultura e serviços, possui a seguinte Matriz de Consumo ($\boldsymbol{C}$):

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0.10 & 0.60 & 0.60 \\ 0.30 & 0.20 & 0 \\ 0.30 & 0.10 & 0.10 \end{bmatrix}$$

Ao interpretar cada coeficiente, tem-se que para cada unidade produzida, a manufatura requer 0.10 unidades de outras companhias do mesmo setor, 0.30 unidades da agricultura e 0.30 unidades de serviços. Para cada unidade produzida, a agricultura usa 0.20 unidades da sua própria produção, 0.60 unidades da manufatura e 0.10 unidades de serviços. Para cada unidade produzida, o setor de serviços consome 0.10 unidades dele mesmo, 0.60 unidades da manufatura, mas nenhum produto agrícola.

*Efeito de transbordamento: efeitos econômicos dos quais as causas são, à primeira vista, não-relacionadas com os eventos afetados.

3.1 Matriz de Consumo e demandas intermediárias

Nessa economia de três setores, supõe-se que a parte da agricultura planeja executar uma produção de 100 unidades. Para isso, é necessário que os coeficientes de insumo da matriz de consumo relacionados à agricultura sejam multiplicados 100 vezes. Dessa forma, obtém-se o seguinte vetor:

$$\boldsymbol{Z}_j = \begin{bmatrix} 60 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Assim, tem-se determinada a demanda intermediária de produção da agricultura.

3.2 Matriz de Leontief

De acordo com o artigo fornecido para o desenvolvimento deste modelo, a matriz input-output pode ser obtida através da equação

$$\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C})^{-1}$$

como demonstrado no tópico 2.2.

Dessa forma, ao aplicar as matrizes, obtém-se a Matriz de Leontief da economia tratada como:

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 20/9 & 50/27 & 40/27 \\ 5/6 & 35/18 & 05/9 \\ 5/6 & 5/6 & 5/3 \end{bmatrix}$$

Ao se basear em Guilhoto (2004) [2], infere-se que cada coeficiente da Matriz de Leontief, da economia em questão, mostra que, caso corra um aumento da demanda por produtos de algum dos setores j, o impacto inicial corresponderá ao aumento da produção deste setor. Então, para aumentar essa produção, o setor j demanda mais insumos dos demais setores, com o fim de atender a demanda colunar j.

3.3 Demanda final

Para determinar o nível de produção dos setores de uma economia, utiliza-se a seguinte fórmula:

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{d}$$

Dessa forma, determina-se uma demanda final ($\boldsymbol{d}$) de 18 unidades a ser atentida pela agricultura e nenhuma para os demais setores.

Com isso, obtém-se o seguinte vetor de nível de produção:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 33,33 \\ 35 \\ 15 \end{bmatrix}$$

sendo $\boldsymbol{x}$ a variável que representa o vetor nível de produção.

A relação entre o vetor nível de produção e a Matriz de Leontief da economia em questão é estabelecida através da demanda de 18 unidades. Essa relação ocorre porque o valor da demanda final corresponde à variação entre o valor estabelecido no input-output e a quantia final, após a multiplicação das 18 unidades demandadas.

4 Uma economia de 7 setores

4.1 Uma real aplicação

Passaremos, agora, para uma aplicação real do modelo desenvolvido. Com os dados de insumo-produto da economia norte-americana de 1958, disponíveis na edição de abril de 1965 da revista Scientific American, podemos agrupar os dados de 81 setores em apenas 7 setores abrangentes, para construir a seguinte matriz de consumo:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} .1588 & .0064 & .0025 & .0304 & .0014 & .0083 & .1594 \\ .0057 & .2645 & .0436 & .0099 & .0083 & .0201 & .3413 \\ .0264 & .1506 & .3557 & .0139 & .0142 & .0070 & .0236 \\ .3299 & .0565 & .0495 & .3636 & .0204 & .0483 & .0649 \\ .0089 & .0081 & .0333 & .0295 & .3412 & .0237 & .0020 \\ .1190 & .0901 & .0996 & .1260 & .1722 & .2368 & .3369 \\ .0063 & .0126 & .0196 & .0098 & .0064 & .0132 & .0012 \end{bmatrix}$$

(Em unidades de milhão de dólares e onde c_1: produtos domésticos e pessoais não metálicos, c_2: produtos metálicos finais (como veículos motorizados), c_3: produtos básicos e mineração, c_4: produtos não metálicos básicos e agricultura, c_5: energia, c_6: serviços e c_7: produtos diversos).

Com o modelo desenvolvido e exemplificado, podemos responder a pergunta: quais devem ser os níveis de produção para satisfazer a demanda $\boldsymbol{d}$?

$$\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} 74000 \\ 56000 \\ 10500 \\ 25000 \\ 17500 \\ 196000 \\ 5000 \end{bmatrix}$$

Equacionando os dados do problema, temos, para os respectivos setores, a produção necessária:

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{d}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 99575.65 \\ 97703.02 \\ 51230.52 \\ 131569.92 \\ 49488.49 \\ 329554.45 \\ 13835.34 \end{bmatrix}$$

(Em unidades de milhão de dólares).

Como o computador nos informa de fato (pois inverter matrizes desta ordem se tornaria inviável senão por um), através do programa e algoritmo que não tardaremos a explicar:

```
Matriz com nível de produção em 1958:

[ 99575.6533976471 ]
[ 97703.0228634895 ]
[ 51230.5231663827 ]
[ 131569.9219287209 ]
[ 49488.4913723588 ]
[ 329554.4525699934 ]
[ 13835.3357150127 ]
```

Figura 1

4.2 Demanda de 1964

Agora, usando a mesma matriz de consumo C, podemos responder a pergunta: quais devem ser os níveis de produção para satisfazer a demanda $\boldsymbol{d}$ referente ao ano de 1964?

$$\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} 99640 \\ 75548 \\ 14444 \\ 33501 \\ 23527 \\ 163985 \\ 6526 \end{bmatrix}$$

Aplicando as mesmas equações que as usadas com a demanda anterior, temos que a produção necessária será:

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{d}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 146764.11 \\ 161659.38 \\ 80100 \\ 196087 \\ 70060.82 \\ 481194.63 \\ 78607.62 \end{bmatrix}$$

(Em unidades de milhão de dólares).

Com a nova demanda, o programa nos retornará:

```
Matriz com nível de produção em 1964:

[ 146764.1113633089 ]
[ 161659.3837427644 ]
[ 80100.032473108 ]
[ 196086.9946775265 ]
[ 70060.8183314758 ]
[ 481194.6349034496 ]
[ 78607.6228865712 ]
```

Figura 2

Do ponto de vista matemático, percebemos que com o aumento na demanda que ocorreu entre 1958 e 1964, temos também um aumento no nível de produção, assim como o esperado.

4.3 O programa

O cálculo da inversa de matriz, por se tratar de uma operação trabalhosa, foi realizado computacionalmente. O programa utilizado foi escrito fundamentado em uma classe principal, nomeada `Matrizes()`, onde todas as operações envolvendo matrizes são realizadas. Tendo os métodos em mãos, se faz prático calcular o necessário.

Destarte, se tendo definido que:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\operatorname{adj}\boldsymbol{A}}{\det \boldsymbol{A}}$$

O método `inversa` recebe como parâmetro a matriz a se fazer operações e em seu retorno calcula o produto do inverso da determinante da matriz (`determinanteLU()`) pela adjunta da matriz (`adjunta()`):

```
def inversa(self, matriz):
    return self.multiplicacaoNumeroReal(self.
        ↪ adjunta(matriz), 1/self.determinanteLU
        ↪ (matriz))
```

Faz-se interessante observar mais atentamente os métodos utilizados neste cálculo.

4.3.1 Determinante e Decomposição LU

Como anunciado pelo próprio nome, a determinante é calculada utilizando o algoritmo de decomposição-LU, ou seja, dada a matriz $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C})$ (dado, então, que $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{A}^{-1}$), tendo por exemplo que $\boldsymbol{A}_{3\times 3}$ se terá que:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{U} \therefore$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Tendo em vista que a determinante de uma matriz triangular é o produto de seus elementos diagonais, se terá que:

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{A}) &= \det(\boldsymbol{L}) \cdot \det(\boldsymbol{U}) \\ &= 1 \cdot \det(\boldsymbol{U}) \\ &= \prod_{i=1}^{3} u_{ii} \end{aligned}$$

O que diminui drasticamente o tempo levado para o cálculo da determinante em comparação com algoritmos como o de Laplace, que calcula determinantes utilizando matrizes inteiras. O método da determinante se dá da seguinte forma:

```
def determinanteLU(self, matriz):
    U = self.decomposicao(matriz)[1]
    det = 1
    for i in range(0, len(U)):
        det *= U[i][i]
    return det
```

Onde `decomposicao()` recebe a matriz e faz a decomposição em LU da mesma da seguinte forma:

```python
def decomposicao(self, matriz):
    tamanho = len(matriz)
    L = self.gerarIdentidade(tamanho)

    U = matriz.copy()
    for coluna in range(0, len(matriz)-1):
        for linha in range(coluna+1, len(matriz))
        ↪ :
            L[linha][coluna] = U[linha][coluna]/U
            ↪ [coluna][coluna]
            for c in range(coluna, len(matriz)):
                U[linha][c] -= L[linha][coluna]*U
                ↪ [coluna][c]
    return [L, U]
```

4.3.2 Adjunta e Cofatores

A adjunta de uma matriz é definida como a transposta de sua matriz de cofatores. Assim, se tendo definido que o cofator K_{ij} de um elemento a_{ij} é dado pela determinante da matriz $\boldsymbol{M}_{m\times n}$ onde $m \neq i$ e $n \neq j$ e tendo seu sinal regulado por $(-1)^{i+j}$, ou seja:

$$K_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det\left(\boldsymbol{M}_{m\times n}\right)$$

Se tem então que:

$$\operatorname{adj}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{i1} & \dots & K_{ij} \end{bmatrix}^t$$

O método `cofator()` recebe uma matriz e algum dado elemento `matriz[i][j]`, retornando seu cofator:

```python
def cofator(self, matriz, ponto):
    M = []
    for i in range(0, len(matriz)):
        l = []
        for j in range(0, len(matriz)):
            if i != ponto[0] and j != ponto[1]:
                l.append(matriz[i][j])
        if len(l) != 0: M.append(l)
    sinal = (-1)**(sum(ponto))
    return sinal*self.determinanteLU(M)
```

Por fim, o método `adjunta()` recebe uma matriz como parâmetro e para cada elemento calcula seu cofator, retornando a transposta da matriz de cofatores calculada.

```python
def adjunta(self, matriz):
    M = []
    for i in range(0, len(matriz)):
        l = []
        for j in range(0, len(matriz)):
            l.append(self.cofator(matriz, [i,j]))
        M.append(l)
    return self.transposta(M)
```

Outros métodos, como o próprio `transposta()`, se dão intuitivamente conforme suas próprias definições, apenas se utilizando do laço **`for`** para se percorrer matrizes. O código completo pode ser encontrado neste *repositório**.

*https://github.com/Mysfer/Modelagem-Matematica/blob/main/Projeto-3/matrizes.py

5 Uma economia de 12 setores

Podemos aplicar os conhecimentos aqui desenvolvidos para uma análise insumo-produto da economia brasileira. Para isso, buscamos na página do IBGE os dados das Contas Nacionais relativos às atividades de 12 setores da economia no ano de 2015. O arquivo fornecido pelo IBGE foi salvo com o nome "matriz.xls" no mesmo diretório onde se encontra o programa.

Na planilha, a tabela 14 exibe o equivalente à matriz $\boldsymbol{C}$ dos exemplos anteriores deste relatório. Sendo assim, colocamos o programa para importar os valores da planilha através do módulo *xlrd* em Python. Em seguida, o mesmo programa realiza as operações vistas na seção 4.3 e retorna ao usuário a matriz de Leontief. Abaixo, exibimos a referida matriz com os valores aproximados até a terceira casa decimal. Colocamos um fator $\frac{1}{1000}$ fora da matriz, a fim de ter melhor visualização:

$$\boldsymbol{L} = \frac{1}{1000} \times \begin{bmatrix} 1070 & 20 & 20 & 17 & 33 & 21 & 28 & 9 & 5 & 2 & 17 & 8 \\ 17 & 1068 & 67 & 31 & 29 & 6 & 15 & 5 & 2 & 2 & 7 & 4 \\ 338 & 228 & 1475 & 190 & 355 & 125 & 324 & 87 & 45 & 19 & 138 & 67 \\ 46 & 28 & 44 & 1391 & 16 & 33 & 23 & 20 & 12 & 3 & 32 & 2 \\ 3 & 17 & 5 & 22 & 1105 & 3 & 6 & 22 & 6 & 4 & 7 & 17 \\ 99 & 67 & 140 & 55 & 103 & 1049 & 90 & 47 & 19 & 6 & 54 & 27 \\ 53 & 123 & 103 & 50 & 46 & 71 & 1156 & 26 & 26 & 4 & 37 & 23 \\ 8 & 17 & 20 & 20 & 12 & 24 & 21 & 1150 & 59 & 5 & 53 & 28 \\ 33 & 42 & 45 & 46 & 33 & 39 & 47 & 48 & 1150 & 45 & 32 & 59 \\ 6 & 8 & 11 & 11 & 8 & 39 & 14 & 20 & 15 & 1004 & 23 & 8 \\ 43 & 145 & 112 & 108 & 68 & 115 & 110 & 197 & 145 & 17 & 1129 & 107 \\ 3 & 8 & 7 & 8 & 4 & 6 & 7 & 9 & 7 & 1 & 6 & 1005 \end{bmatrix}$$

Cada valor a_{ij} da matriz representa o aumento da produção do setor i necessário para atender a demanda adicional de 1000 unidades de valor do setor j. Assim, por exemplo, $a_{1,5} = 33$ significa que um aumento de \$1000 na demanda final do setor de Construção (5) produz uma demanda intermediária adicional de \$33 na Agricultura (1).

É interessante notar que todos os valores da diagonal são maiores do que 1000, o que é um resultado esperado, visto que, além de produzir o acréscimo da própria demanda final, o setor deverá abastecer o aumento das demandas intermediárias dos demais setores. Em particular, é notável o caso do setor de Indústrias de Transformação, dado em $a_{3,3} = 1475$ - significa que quando a demanda final aumenta em \$1000, deverá ser produzido \$475 em produto intermediário, além dos \$1000 finais.

O arquivo do IBGE apresenta também uma matriz de Leontief, disponível na tabela 15. Podemos observar que os valores são iguais até onde se pode observar (os valores do IBGE apresentam menos casas decimais do que os calculados em nosso programa). Ainda no programa, é feita uma verificação a qual indica a diferença média entre os valores calculado e exposto em planilha - 0.0%.

Referências

[1] C. Anton, Howard. Rorres, *Álgebra Linear com Aplicações*. bookman, 2012.

[2] J. J. M. Guilhoto, “Análise de insumo-produto: Teoria e fundamentos,” 2004.