Relatório de Modelo para Administração Sustentável

João Pedro de Freitas — *jpfreitas2001@usp.br*
Amanda Costa — *amanda.cs@usp.br*
Juan Nogueira — *juan.nog@usp.br*
Maria Rita Xavier — *mrxavier74@usp.br*
Samuel Garcez — *samueltgarcez@usp.br*

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo

O relatório objetiva discutir e desenvolver um modelo matemático que nos de o método mais eficiente de administrar a colheita e replantio periódicos de árvores, sob as condições da exploração sustentável e visando o maior retorno financeiro possível.

1. INTRODUÇÃO

Desde a colonização do país, há cerca de 500 anos, a flora brasileira é continuamente explorada de forma inconsequente na busca por lucro. O extrativismo vegetal irresponsável nas florestas, entretanto, provoca danos as suas biodiversidades (haja vista o risco de extinção do pau-brasil e a necessidade da criação de lei para sua proteção), bem como ao microclima regional e ao solo, seja através da lixiviação ou da perda de estabilidade do mesmo.

Nesse âmbito, a fim de minimizar os danos, uma alternativa é a exploração sustentável desses recursos. O presente texto discutirá um modelo matemático simplificado acerca da sua dinâmica e otimização.

Dividiremos as árvores de uma floresta em tamanhos (classes) conforme a tabela abaixo. Definiremos que para uma exploração ser sustentável, ela precisará manter a configuração das quantidades de árvores e seus respectivos tamanhos ao término de uma colheita iguais às do começo do processo de crescimento, fazendo uso do replantio de mudas e fechando assim um ciclo. Essa condição garantirá a exploração contínua e com impactos ambietais mínimos.

Classe	Intervalo de Altura
1(muda)	$[0, h_1)$
2	$[h_1, h_2)$
...	...
n - 1	$[h(n-2), h(n-1))$
n	$[h(n-1), \infty)$

Existem diversas formas de se fazer isso, como será mostrado. Aquela que particularmente receberá nossa atenção será a que maximiza o retorno econômico ao final de uma colheita, isto é, nos fornece o rendimento sustentável ótimo.

Como todo modelo matemático, esse adotará hipóteses, vistas a seguir, e suposições que diminuem parte da complexidade do seu respectivo tema, objetivando dar ênfase a certos comportamentos de interesse e suas implicações.

2. HIPÓTESES

O modelo a ser desenvolvido admite as seguintes hipóteses:

A) Com exceção da sua classe, todas as árvores são idênticas.

B) Nenhuma árvore morre, por quaisquer causas, durante o período de crescimento.

C) No período de crescimento, uma fração de cada uma das n árvores, com exceção da enésima, sobe para a classe seguinte (e somente para ela). Essa fração será expressa por g, chamado de parâmetro de crescimento e suposto constante.

D) Ao término de uma colheita, as árvores removidas só podem ser substituídas por mudas, que não possuem valor econômico algum.

E) Como não há razão para colher mudas e plantar mudas em seguida, elas não são colhidas.

Consideradas, é possível dar prosseguimento ao relatório.

3. O MODELO

3.1 Vetor Configuração e Vetor Colheita

Por haver uma informação para cada classe de cada uma das variáveis citadas acima, simplificamos o tratamento de dados utilizando matrizes. Dessa forma, trataremos a matriz de número de árvores de cada classe após a colheita por Vetor Configuração (**x**).

Seja $\boldsymbol{x_i}$ o número de árvores de $\boldsymbol{i}$-ésima classe que permanecerá **após** cada colheita.

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

(Matriz 1)

Matriz 1 é o vetor coluna de configuração constante ao fim de cada colheita.

No qual:

$\boldsymbol{x_1}$ – número de árvores com altura até h_1;

$\boldsymbol{x_2}$ – número de árvores com altura entre h_1 e h_2;

e assim por diante.

O número total de árvores primeiramente está fixo e é representado na Equação 1:

$$x_1 + x_n + \cdots + x_n = \boldsymbol{s}$$

(Equação 1)

Sendo $\boldsymbol{s}$ é o número pré determinado total de árvores após cada colheita.

Já a matriz que contém o número de árvores colhidas é representada pela Matriz 2 e será denotada por Vetor Colheita ($\boldsymbol{y}$).

Seja $\boldsymbol{y_i}$ o número de árvores que serão colhidas da $\boldsymbol{i}$-ésima classe.

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

(Matriz 2)

Esse é o vetor colheita constante.

Assim, o valor é representado através da Equação 2:

$$Total\ de\ \acute{a}rvores\ colhidas = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

(Equação 2)

A qual também é constante.

Esse número corresponde ao total de mudas replantadas após cada corte. Apenas podemos repor mudas, pois plantaremos as árvores. Tal que, se montarmos uma matriz com esses valores, seria algo como a Matriz 3:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

(Matriz 3)

E o número de árvores plantadas será $\boldsymbol{Ry}$, como representado na Matriz 4:

$$\boldsymbol{Ry} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 + \cdots + y_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(Matriz 4)

Repare que apenas a classe 1 recebe novas plantas.

Por fim, o número de mudas plantadas após cada colheita corresponde ao número de árvores total colhido.

3.2 Taxa efetiva

Analogamente, a taxa de variação do número de árvores de cada classe será tratada da seguinte maneira: $\boldsymbol{g_i}$ é a fração de árvores da classe i que após o período de crescimento passou à classe $i+1$. Por conseguinte, 1-$\boldsymbol{g_i}$ representará a fração da classe i que permanecerá na classe i após o período de crescimento. Também usaremos uma **Matriz de Crescimento (*G*),** representada pela Matriz 5 para podermos tratar dos dados propriamente.

Como n é a última classe, não é possível que árvores de n subam de classe, assim, a taxa efetiva não existe para n.

Portanto, a **taxa efetiva** é $\boldsymbol{g_i}$, tal que $\boldsymbol{i} = 1, 2, \ldots, n-1$.

Visto que 1 é a primeira classe, o número de árvores na primeira classe após o período de crescimento será o valor fixo $\mathbf{x_1}$ retirado o número de árvores de $\mathbf{x_1}$ que cresceu para a classe superior deste.

$$\boldsymbol{Número\ de\ árvores\ em\ i = 1}$$

$$\boldsymbol{após\ período\ de\ crescimento} = x_1 - x_1 . g_1$$

$$\boldsymbol{Número\ de\ árvores\ em\ i = 1}$$

$$\boldsymbol{após\ período\ de\ crescimento} = x_1(1 - g_1)$$

Portanto, o número de reposição de mudas será igual ao número de árvores da C_1 que cresceu para a classe superior. Dessa maneira,

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = x_1 . g_1$$

(Equação 3)

Usaremos o resultado da Equação 3 posteriormente.

De acordo, temos a matriz de crescimento $n_x n$:

$$G = \begin{bmatrix} 1-g_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ g_1 & 1-g_2 & 0 & \dots & . & . \\ 0 & g_2 & 1-g_3 & \ddots & . & . \\ 0 & 0 & g_3 & \ddots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-g_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

(Matriz 5)

3.3 Retorno Total

O retorno financeiro, essencialmente, é o valor total em dinheiro obtido a partir da venda das árvores que foram colhidas.

O valor de cada árvore vendida por classe pode ser denotado por **P**.

$$\boldsymbol{P} = p_1, p_2, \ldots, p_n$$

Ou

$$\boldsymbol{P} = [\, p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_n \,]$$

Portanto, o RET será a soma dos produtos entre o preço $\boldsymbol{p_i}$ e o número de árvores colhidas $\boldsymbol{y_i}$ de cada classe $\boldsymbol{i}$:

$$\text{RET} = \boldsymbol{Py}$$

(Equação 4)

$$\text{RET} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{p}_i \mathrm{y}_i$$

(Equação 5)

Ou

$$\textbf{RET} = [\, \boldsymbol{p_1} \quad \boldsymbol{p_2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{p_n} \,] \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{y_1} \\ \boldsymbol{y_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y_n} \end{bmatrix}$$

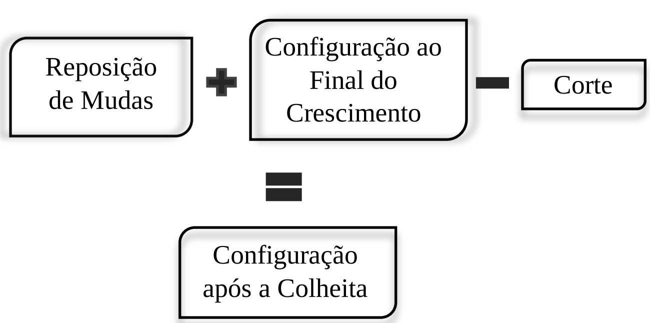
(Equação 6)

3.4 Configuração da política de colheita sustentável

As condições de política de colheita sustentável estabelecem:

- O número de árvores de cada classe deve permanecer fixo no momento imediatamente antes do período de crescimento e após a colheita, anualmente.

- Não é economicamente proveitoso cortar mudas, portanto o y da primeira classe será igual a zero.



(Diagrama 1)

Utilizando uma equação para descrever o sistema de colheita sustentável obtemos o a Equação 7

$$\boldsymbol{Ry} + \boldsymbol{Gx} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$$

(Equação 7)

Dado que o RET existe em função de y (Equações 4, 5 e 6), podemos substituir o valor de y nas Equações 6 e 7.

$$\textbf{RET} = [\, \boldsymbol{p_1} \quad \boldsymbol{p_2} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \boldsymbol{p_n} \,] \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{y_1} \\ \boldsymbol{y_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y_n} \end{bmatrix}$$

(Equação 6)

$$\boldsymbol{Ry} + \boldsymbol{Gx} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$$

(Equação 7)

Temos da Equação 7:

$$\boldsymbol{Ry} + \boldsymbol{Gx} - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

(Equação 8)

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R})\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{G} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{x}$$

(Equação 9)

3.5 O Problema

Encontrar os valores positivos de x que maximizem o retorno financeiro RET.

$$RET = [\, p_1 \quad p_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad p_n \,] \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

(Equação 10)

Para isso, temos de colocar RET em função das variáveis x.

$$RET = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdot & \cdot & \cdot & p_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ x_1.g_1 - x_2 . g_2 \\ x_2.g_2 - x_3 . g_3 \\ \cdot \\ \vdots \\ x_{n-1}.g_{n-1} \end{bmatrix}$$

(Equação 18)

$$RET = p_2\ (x_1.g_1 - x_2\ .g_2)$$
$$+\ p_3\ (x_2.g_2 - x_3\ .g_3)$$
$$+\cdots+\ p_n\ (x_{n-1}.g_{n-1})$$

(Equação 11)

$$RET = x_1.g_1\ .p_2$$
$$+x_2.g_2(p_3 - p_2)$$
$$+\ x_3\ .g_3(p_4 - p_3)$$
$$+\cdots+\ x_{n-1}.g_{n-1}(p_n - p_{n-1})$$

(Equação 12)

Admite-se todos os $x_i \geq 0$, pois não se pode haver um número negativo de árvores, e todos os $y_i \geq 0$, pois não se pode colher um número negativo de árvores. Assim, obtém-se o sistema abaixo da equação que define a política sustentável:

$$y_2 +\ y_3 + \cdots + y_n = x_1.g_1$$
$$x_1.g_1 \geq x_2\ .g_2$$
$$x_1.g_1 \geq\ x_2.g_2 \geq x_3\ .g_3\ \geq \cdots \geq\ x_n.g_n\ \geq 0$$

(Equação 13)

Deve-se lembrar da condição de política de colheita sustentável, como demonstrado na Equação 14:

$$x_1 +\ x_2 + \cdots + x_n = s$$

(Equação 14)

As equações acima são as que determinam a política de colheita sustentável.

3.6 Rendimento Sustentável Ótimo

O Rendimento Sustentável Ótimo é obtido a partir da imposição de que se deve colher de apenas uma das classes. Ou seja, há apenas um $y_i \neq 0$. A tal classe dá-se o índice k.

Portanto, o número de árvores colhidas será $\boldsymbol{y_k}$.

Como todos os $y_i = 0$, a Equação 15 é alterada e todos os $x_i g_i,\ i \neq k$, são iguais.

$$x_1.g_1 =\ x_2.g_2 = x_3\ .g_3 =$$
$$\cdots =\ x_{k-1}.g_{k-1}$$

(Equação 15)

Dado que, tal qual na Equação 13:

$$y_1 +\ y_2 + \cdots + y_k + \cdots + y_n = x_1.g_1$$

(Equação 13)

As classes com $i < k$, que mesmo que não sejam colhidas, crescerão para a classe k e por isso não podem ser iguais a zero. Assim, haverá retorno econômico sem perdas:

$$y_k = x_1.g_1 =\ x_2.g_2 = \cdots =\ x_{k-1}.g_{k-1}$$

(Equação 17)

Como todas as árvores da classe k serão colhidas, o número de árvores de k, assim como as árvores das classes de $i > k$, funcionam de maneira diferente, como descrito abaixo.

Atribuindo a $\boldsymbol{y_n} = 0$, podemos fazer o caminho inverso e encontrar $\mathbf{x_i}$, tal que $i \geq k$:

$$y_n = 0 \Rightarrow x_{n-1}g_{n-1} = 0 \Rightarrow x_{n-1} = 0$$

$$y_{n-1} = 0 \Rightarrow$$

$$x_{n-2}g_{n-2} - x_{n-1}g_{n-1} = 0$$

$$\Rightarrow x_{n-2}g_{n-2} = 0$$

$$\Rightarrow x_{n-2} = 0$$

$$\vdots$$

$$y_{k+1} = 0$$

$$\Rightarrow x_k g_k - x_{k+1}g_{k+1} = 0$$

$$\Rightarrow x_k g_k = 0$$

$$\Rightarrow x_k = 0$$

(Equação 18)

Repare que apenas não fica definido x_n. De fato, este pode assumir qualquer valor natural sem perda da condição de sustentabilidade: essas árvores nem subirão de classe, nem serão colhidas. No entanto, não faz sentido supor que o produtor manterá na floresta árvores improdutivas, e portanto definimos $x_n = 0$.

$$x_k = x_{k+1} = \ldots = x_{n-1} = x_n = 0$$

$$y_k = x_1 . g_1$$

(Equação 19)

Assim, o Retorno Financeiro Total poderá ser dado em função de **x_i** e, posteriormente, em função de **s**.

$$RET* \quad = p_k . x_1 . g_1$$

(Equação 20)

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1}}{x_1} = \frac{s}{x_1}$$

$$x_1 = \frac{s}{\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1}}{x_1}}$$

$$x_1 = \frac{s}{1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_1} + \cdots + \frac{x_{k-1}}{x_1}}$$

(Equação 21)

Mas $\frac{x_2}{x1} = \frac{g_1}{g_2}$ e assim também para todos os $x_i, i < k$.

$$x_1 = \frac{s}{1 + \frac{g_1}{g_2} + \frac{g_1}{g_3} + \cdots + \frac{g_1}{g_{k-1}}}$$

(Equação 22)

Ao colocar o resultado da Equação 29 na equação de *RET**, teremos:

$$RET* \quad = p_k . \left(\frac{s}{1 + \frac{g_1}{g_2} + \frac{g_1}{g_3} + \cdots + \frac{g_1}{g_{k-1}}} \right) . g_1$$

(Equação 23)

Portanto a equação final de *RET** em função de G é resumida a seguir:

$$\boldsymbol{RET*} \quad = \boldsymbol{p_k} . \left(\frac{\boldsymbol{s}}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_3} + \cdots + \frac{1}{g_{k-1}}} \right)$$

(Equação 24)

- **S é constante para qualquer k de um conjunto, portanto, não há necessidade de conhecer os vetores x e y para determinar o maior retorno, uma vez que este é proporcional a s. Portanto, o resultado será dado em termos de $\boldsymbol{s, p_k}$ e $\boldsymbol{g_i}$.**
- **Assim, as restrições deste modelo são de que ao menos um $\boldsymbol{x_i \neq 0}$ e ao menos um $\boldsymbol{g_i \neq 0}$ para que $\boldsymbol{s \neq 0}$ e ao menos um $\boldsymbol{p_i \neq 0}$, para que $\boldsymbol{RET \neq 0}$.**

4. Equações que definem uma colheita sustentável e as

condições que $\boldsymbol{x}$ deve satisfazer.

As equações que definem a colheita sustentável, estabelecidas por uma colheita feita periodicamente de número constante de árvores, deixando ao fim de cada colheita uma configuração fixa descrita por um vetor x de n coordenadas.

Assim, x é constante e, portanto, a somatória das coordenadas do vetor também é fixa. Portanto, a primeira equação que define uma colheita sustentável é a função vetorial:

$$f: \boldsymbol{R^n} \rightarrow \boldsymbol{R}, f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

(Equação 25)

Ou seja, a Equação 1:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \boldsymbol{s}$$

(Equação 1)

Essa equação impõe que, se ao menos um x_i for diferente de zero, s não será nulo.

Com relação a mudas, não há retorno em colhê-las. Portanto, o número de árvores colhidas da classe 1 será sempre igual a zero.

A segunda equação que determina a política de colheita sustentável é baseada no fato de que necessariamente $y_i \geq 0$. Ou seja, as árvores colhidas de uma classe são positivas, ou pode ser nenhuma.

$$x_1.g_1 \geq x_2.g_2 \geq x_3.g_3 \geq \cdots \geq x_n.g_n \geq 0$$

Desta maneira, obtemos que, para qualquer $i<n$, a condição abaixo se verifica.

$$x_i.g_i \geq x_n.g_n \geq 0$$

Obs.: A partir da introdução do Retorno Ótimo, o resultado acima será dividido para dois grupos: o grupo de classes *de* $i<k$ e o grupo de classes com $i \geq k$.

Portanto, para x_i, a única restrição específica é de que ao menos um $x_i \neq 0$.

4.1 Aplicando *y* em função de *x*

As condições de colheita sustentável impõem, basicamente, que o número de árvores nas classes deve ser igual às mudas plantadas, somada à taxa de transição das árvores entre classes e retiradas as árvores colhidas. Isso pode ser verificado através da Equação 7:

$$\boldsymbol{Ry} + \boldsymbol{Gx} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$$

(Equação 7)

Que leva à simplificação abaixo, tal qual a Equação 9:

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R})\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{G} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{x}$$

(Equação 9)

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -g_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ g_1 & -g_2 & 0 & \cdots & . & . \\ 0 & g_2 & -g_3 & \ddots & . & . \\ 0 & 0 & g_3 & \ddots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

(Equação 26)

Obtemos o sistema de equações:

$$y_2 + y_3 + \cdots + y_n = x_1.g_1$$

$$y_2 = x_1.g_1 - x_2.g_2$$

$$y_3 = x_2.g_2 - x_3.g_3$$

...

$$y_n = x_{n-1}.g_{n-1}$$

(Equações 27)

Portanto, baseando-se na política de colheita sustentável, é possível estabelecer a relação entre $\boldsymbol{y_i}$ e $\boldsymbol{x_i}$.

$$\boldsymbol{y_i} = \boldsymbol{x_{i-1}}.\boldsymbol{g_{i-1}} - \boldsymbol{x_i}.\boldsymbol{g_i}, \quad \boldsymbol{se\ i} = [\mathbf{2}, \boldsymbol{n} - \mathbf{1}]$$

$$\boldsymbol{y_i} = \boldsymbol{x_{i-1}}.\boldsymbol{g_{i-1}}, \quad \boldsymbol{se\ i = n}$$

$$\boldsymbol{y_i} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{se\ i} = \mathbf{1}$$

(Equações 28)

5. Definição do algoritmo capaz de encontrar um ótimo retorno sustentável

O algoritmo que encontra o retorno sustentável ótimo foi obtido em 3 etapas.

Na primeira etapa, o grupo buscou compreender matematicamente o que era requerido, lançando mão de manipulações algébricas simples. Sabemos que o retorno é dado por $RET = \sum_{i=2}^{n} p_i y_i$.

No caso, usando o resultado da Programação Linear que nos é dado, sabemos que no retorno sustentável ótimo haverá apenas uma entrada y_k , com $2 \leq k \leq n$, de forma que temos $RET^* = p_k y_k$, para algum k entre 2 e n.

É ainda necessário colocar y_k em função das variáveis conhecidas, o que já foi feito no presente relatório.

Temos, portanto,

$$RET^* = p_k y_k$$

$$= p_k \cdot \left(\frac{s}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_3} + \cdots + \frac{1}{g_{k-1}}} \right)$$

$$= \frac{p_k\, s}{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{g_i}}$$

(Equações 29)

Sendo assim, nosso algoritmo deverá ser capaz de encontrar $argmax(RET^*(k))$, em que k varia de 2 a n, e calcular $RET^*(argmax(RET^*(k)))$.

Na segunda etapa, pensamos conceitualmente em um algoritmo capaz de realizar o cálculo desejado. Para tanto, o algoritmo definiria duas variáveis auxiliares: uma que seria o maior valor RET^* conhecido e outra que seria o argumento aplicado nesse valor. Nosso programa deveria, então, a cada nova classe i, testar a condição se $RET^*(i)$ ser maior que a primeira variável auxiliar (por sua vez, igual ao maior valor RET^* até então) e, caso positivo, redefinir as duas variáveis auxiliares, a primeira como igual a $RET^*(i)$, a segunda como igual a i. O processo se repetiria para todo i de 2 a n, encerrando todas as classes.

Por fim, utilizamos a linguagem Octave para construir de fato o programa. Repare que o retorno obtido depende das entradas do número de árvores s e dos preços p e taxa g de cada classe. O código completo pode ser encontrado na seção de anexo deste relatório ou no link https://github.com/Mysfer/Modelagem-Matematica/tree/main/Projeto-1.

6. Expressão de um Retorno Ótimo

Como visto acima no presente relatório, sendo k o índice da árvore que é colhida, a expressão do retorno é dada por:

$$RET^{*} = p_k \cdot \left(\frac{s}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_3} + \cdots + \frac{1}{g_{k-1}}} \right)$$

(Equação 30)

7. Exemplo Prático

7.1 Classe que fornece um retorno sustentável ótimo

Desenvolvemos e formalizamos, até aqui, condições e métodos para encontrar o retorno sustentável ótimo. Agora os aplicaremos, de acordo com o caso abaixo.

Uma floresta de pinheiros da Escócia (chamadas de "Scots Pine") tem um período de crescimento de seis anos, a seguinte matriz de crescimento foi determinada, de acordo com Usher (1966):

$$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} .28 \\ .31 \\ .25 \\ .23 \\ .37 \end{bmatrix}$$

(Matriz 6)

Suponhamos que os preços das árvores nas 5 classes são $\boldsymbol{p_2}$ = R$ 50, $\boldsymbol{p_3}$ = R$ 100, $\boldsymbol{p_4}$ = R$ 150, $\boldsymbol{p_5}$ = R$ 200, $\boldsymbol{p_6}$ = R$ 250 e que **a colheita obedece às condições da exploração sustentável, vista anteriormente.** Com esses dados, é possível encontrar o retorno sustentável ótimo através do programa desenvolvido. Aplicando-os (os respectivos $\boldsymbol{g}$ e $\boldsymbol{p}$, junto de $\boldsymbol{n}$) e supondo $\boldsymbol{s}$ = 1, encontram-se os seguintes valores:

Classe (i)	Retorno Sustentável Ótimo (RET*$_k$)
2	50*1 / 0.28^{-1} = 14
3	100*1 / ($0.28^{-1} + 0.31^{-1}$) = 14.7118644068
4	150*1 / ($0.28^{-1} + 0.31^{-1} + 0.25^{-1}$) = 13.8924455826
5	200*1 / ($0.28^{-1} + 0.31^{-1} + 0.25^{-1} + 0.23^{-1}$) = 13.2056251571
6	250*1 / ($0.28^{-1} + 0.31^{-1} + 0.25^{-1} + 0.23^{-1} + 0.37^{-1}$) =14.007357035

(Tabela 1)

Sendo $RET^*_3 > RET^*_6 > RET^*_2 > RET^*_4 > RET^*_5$, o programa concluirá e retornará através do algoritmo visto anteriormente que a classe a ser retirada por completo (que nos dará o retorno ótimo) é a 3ª e que o respectivo retorno ótimo será aproximadamente R$ 14.71, junto a um gráfico ilustrativo. Lembremos que esse valor deve ser multiplicado por $\boldsymbol{s}$, inicialmente suposto igual a 1.

```
Digite a quantidade de classes: 6
Digite o valor de p2: 50
Digite o valor de p3: 100
Digite o valor de p4: 150
Digite o valor de p5: 200
Digite o valor de p6: 250
Digite o valor de g1: 0.28
Digite o valor de g2: 0.31
Digite o valor de g3: 0.25
Digite o valor de g4: 0.23
Digite o valor de g5: 0.37
A maior valor  é de 14.71 e é da classe 3>>
>> |
```

(Figura 1)

7.2 Quantidade de árvores colhidas

Das Equações 31, 26 e 27, ainda supondo $\boldsymbol{s}$ = 1, vem:

$$\boldsymbol{RET} *= \frac{p_k \cdot s}{g_1^{-1} + g_2^{-1} + \cdots + g_{k-1}^{-1}} = p_k \cdot y_k = RET$$

$$y_k = \frac{s}{g_1^{-1} + g_2^{-1} + \cdots + g_{k-1}^{-1}}$$

(Equação 31)

Torna-se mais fácil, a partir disso, escrever um código que realize esse cálculo e dê o valor de $\boldsymbol{y_3}$ em função de $\boldsymbol{s}$.

```
Serão retiradas 0.147119 * s árvores por ciclo.
>> |
```

(Figura 2)

Com a margem de erro que o teor de y (inteiro) impõe, **o número de árvores colhidas será aproximadamente 0.147119s**. De fato, verificamos que $y_3 = \frac{s}{g_1^{-1}+g_2^{-1}} = \frac{s}{0{,}28^{-1}+0{,}31^{-1}} \Rightarrow y_3 = 0.147118644068s$ (que é possível arredondar para 0.147119s).

7.3 Admitindo que o retorno sustentável ótimo ocorra em uma classe distinta da estabelecida

Supondo que a classe que desempenhe um ótimo retorno sustentável seja a 5ª, deseja-se que a sentença *RET*₅* > *RET*₃* seja verdadeira, tal que:

$$RET*(5) = \frac{p_1 \cdot s}{g_1^{-1}+g_2^{-1}+g_3^{-1}+g_4^{-1}} > \frac{p_3 \cdot s}{g_1^{-1}+g_2^{-1}}$$

$$= RET*(3)$$

(Equação 32)

$$p_5 > p_3 \frac{g_1^{-1}+g_2^{-1}+g_3^{-1}+g_4^{-1}}{g_1^{-1}+g_2^{-1}}$$

(Equação 33)

No caso, esta sentença também pode ser resolvida através de um código simples:

```
Para p5 ser maior retorno sustentavel, temos  p5 > 222.81
```

(Figura 3)

Realmente, verificamos que $\frac{p_5}{15.1450611} > 14.7118644068 \Rightarrow p_5 > 22281208533590126$, número que arredondado para um valor que faça sentido no contexto, nos informa que a quinta classe será a que buscamos anteriormente **somente se p_5 for maior que R$ 222.81.**

7.4 Retorno sustentável ótimo em uma variável qualquer

Para que qualquer classe tenha retorno sustentável ótimo, é necessário que se igualem $RET^*_2 = RET^*_3 = RET^*_4 = RET^*_5 = RET^*_6$. Tomamos a classe 2 como referência, de modo que temos um problema similar ao do tópico anterior para resolver, porém em caso de igualdade. Assim,

$$RET_i = RET_2$$

$$\Rightarrow p_i \cdot \left(\frac{s}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \cdots + \frac{1}{g_{i-1}}} \right)$$

$$= p_2 \cdot \left(\frac{s}{\frac{1}{g_1}} \right)$$

(Equação 34)

Em suma:

$$p_i = p_2 \,.\, t_i$$

(Equação 35)

Logo, para obter retorno ótimo em qualquer classe, deve-se impor a relação de proporcionalidade, isto é, $p_2 : p_3 : p_4 : p_5 : p_6 = 1 : t_3 : t_4 : t_5 : t_6$.

Por fim, os valores de t_i foram obtidos computacionalmente em de maneira similar à vista no tópico anterior, apenas normalizando o preço $p_2 = 1$. O código do programa pode ser encontrado em seção anexa ou em https://github.com/Mysfer/Modelagem-Matematica/tree/main/Projeto-1.

Resultado encontrado:
$p_2 : p_3 : p_4 : p_5 : p_6 = 1 : 1{,}9 : 3 : 4{,}24 : 5.$

```
Digite a quantidade de classes: 6
Digite o valor de g1: 0.28
Digite o valor de g2: 0.31
Digite o valor de g3: 0.25
Digite o valor de g4: 0.23
Digite o valor de g5: 0.37
         0
    1.0000
    1.9032
    3.0232
    4.2406
    4.9974
>> |
```

(Figura 4)

(legenda:) print dos comandos e saída do programa

7.5 Otimalidade das Equações

Para testarmos a otimalidade das equações, primeiro precisamos assumir um valor conveniente para s, que nesse exemplo, usaremos s = 190. Então, sabendo o retorno sustentável de cada classe, multiplicamos cada um por s para sabermos o retorno de cada uma:

Classe (i)	Retorno (aprox. e em R$)
2	14 x 190 = 2,660
3	14.7118644068 x 190 = 2,795.25
4	13.8924455826 x 190 = 2,639.56
5	13.2056251571 x 190 = 2,509.07
6	14.007357035 x 190 = 2,661.40

(Tabela 2)

Analisando os resultados, confirmamos que a classe com maior retorno sustentável será a classe 3.

Analisando mais a fundo o problema, descobrimos que para obtermos o maior rendimento sustentável, precisamos ter uma configuração inicial que tenham arvores somente nas classes 1 até k-1. Desenvolvendo melhor, chegamos na seguinte equação para encontrarmos a configuração inicial:

$$x_i = \frac{s}{g_i} \times \frac{1}{g_1 + g_2 + \cdots + g_{k-1}}$$

(Equação 36)

Assumindo s = 190, temos:

Classe (i)	X_i
1	$x_i = (190 / 0.28) * (0.28^{-1} + 0.31^{-1})^{-1}$ = 99,8305084
2	$x_i = (190 / 0.31) * (0.28^{-1} + 0.31^{-1})^{-1}$ = 90,16949152

(Tabela 3)

Arredondando os resultados para um valor que faça sentido em nosso contexto, temos o vetor *x*:

$$x = \begin{bmatrix} 100 \\ 90 \end{bmatrix}$$

(Matriz 7)

Usando a Equação 31, utilizada para responder ao tópico 7.2, temos:

$$y = 0.147118644068 \times s$$

$$\therefore y = 27{,}95$$

(Equação 37)

Usando o algoritmo visto no tópico 5, após o programa mostrar a classe com maior retorno, ele calcula e retorna quantas árvores serão retiradas por ciclo:

```
## Algoritmo para calcular quantas arvores vão ser retiradas

## Somatoria dos inversos de g
sum = 0;

for i = 1:(k-1)
  sum += 1/g(i,1);
endfor

y = s/sum;

## Retorna quantas arvores serão retiradas por ciclo

fprintf("Serão retiradas %.2f árvores por ciclo.\n", y);
```

Figura 5: Linhas de código que calcula a quantidade de árvores retiradas por ciclo

Após isso, o programa calcula a configuração inicial usando a Equação 36:

```
## Algoritmo para calcular configuração inicial em função d
## Para retorno máximo sustentável, só havera arvores até k
x = [];

for i = 1:(k-1)
  aux = (s/g(i,1)) * (1/sum);
  x = [x; aux];
endfor

## Retorna a configuração inicial

fprintf("A configuração inicial será: \n");
disp(x);
```

Figura 6: Linhas de código que calculam a matriz 7

E então, para s = 190, o retorno será:

```
A maior valor  é de 2795.25 e é da classe 3
Serão retiradas 27.95 árvores por ciclo.
A configuração inicial será:
   99.831
   90.169
```

Figura 7: Saída do algoritmo para s = 190

Por fim, o programa irá retornar um gráfico de barras com rendimento sustentável de cada classe para o valor de s que informamos:

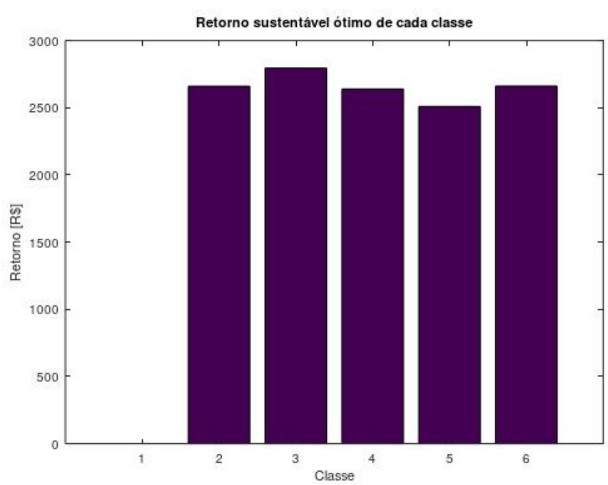


Figura 8: Gráfico com o retorno sustentável ótimo de cada classe

8. Análise crítica do modelo

Não estabelecemos, aqui, critérios para o arredondamento de preços, assim como não trabalhamos com quantidades inteiras de árvores, plantios e colheitas, o que na prática distorce o modelo, quanto menor for a amostra **s**. As hipóteses, ao mesmo passo em que possibilitam a formulação do modelo, trazem consigo uma margem de erro quando as comparamos com a realidade. Eventos aleatórios, a exemplo, podem ocorrer, como incêndios, de forma que árvores morram, o crescimento seja retardado e afins. As árvores, ademais, não são idênticas, o que implica leve diferença de precificação

Somados, esses e outros desvios do modelo representam um erro significativo se o compararmos ao cenário real, mas que não invalida ou compromete a análise dos comportamentos vistos durante este relatório e a aplicação dos resultados obtidos (se s não for demasiadamente pequeno). Tais desvios em modelagens matemáticas são inevitáveis. Mesmo assim, esses impasses podem ser minimizados.

Além disso, inferiu-se que o método de medição da altura das árvores poderia apresentar pouca eficácia, visto que seria impreciso e exigiria a execução de um minucioso monitoramento, como mostra Silva et al. (2017)[1]. Por isso, apresenta-se como alternativa a medição através do crescimento diamétrico das árvores, como inferido por Filho et al. (2010)[2], já que é uma alternativa mais efetiva para demonstrar o comportamento de florestas.

Via de regra, quanto maior a quantidade de dados os quais um modelo utiliza ou dispõe, maior também é a sua precisão ao acertar as previsões. O artigo de Silva (2018)[3], por exemplo, que possui objetivos diferentes, mas com preocupações ambientais semelhantes, além de usar uma programação linear mais específica (inteira), utiliza também dados como densidade de árvores e suas espécies, volumes de seus troncos e áreas dos locais analisados, dentre outros. Certamente seus resultados serão ainda mais satisfatórios.

9. Parâmetros do Modelo

Construímos um modelo capaz de informar a exata configuração de floresta sustentável que garante o maior retorno econômico possível, além de calcular o valor do retorno, a classe e a quantidade de árvores a serem colhidas. Como em nossa resposta x_i é uma fração de s (o total de árvores), os parâmetros envolvidos se resumem ao preço p_i e à taxa efetiva de crescimento g_i associados a cada classe.

9.1 Como os parâmetros podem ser estimados

Consideramos o preço uma variável exógena, isto é, que o produtor não tem poder de mercado para que sua oferta influencie no preço negociado – ou seja, ele está sujeito aos preços já vigentes no mercado. Dessa forma, ele pode estimar os preços de seus produtos observando os valores praticados na concorrência e em demais balcões de negócio.

É claro que entre a aferição dos preços e a venda de suas mercadorias há todo o tempo do ciclo de colheita, de tal modo que alguma oscilação no preço é esperada. Ainda assim, julgamos que a melhor estimativa para o preço futuro é o preço presente. O efeito da inflação pode ser desprezado, visto que a determinação da classe que gera retorno sustentável ótimo depende apenas de preços relativos, isto é, da razão entre os preços p_i.

Já para estimar g, vamos mostrar como se pode obter a taxa de crescimento relativa a cada uma das classes com as informações de apenas 1 ciclo de colheita.

Primeiramente, vamos estudar o que ocorre na classe n. No começo de um ciclo, existem x_n árvores dessa classe, que podem simplesmente ser contadas. Ao final do ciclo, vão existir $x_n + x_{n-1}g_{n-1} - y_n = x'_n$ árvores, que também podem ser contadas. Note que, com a exceção de g_{n-1}, todas as demais variáveis da equação acima são conhecidas, pois as y_n árvores colhidas da classe n e as x_{n-1} iniciais na classe $n-1$ também são obtidas por observação. Assim, podemos concluir:

$$g_{n-1} = \frac{x'_n - x_n + y_n}{x_{n-1}}$$

(Equação 38)

Na sequência, voltamo-nos para a classe $n-1$. De forma análoga, temos:

$$x'_{n-1} = x_{n-1} + x_{n-2}g_{n-2} - x_{n-1}g_{n-1} - y_{n-1}$$

(Equação 39)

De onde a única variável desconhecida é g_{n-2}. Logo, ela é obtida pela expressão:

$$g_{n-2} = \frac{x'_{n-1} - x_{n-1} + x_{n-1}g_{n-1} + y_{n-1}}{x_{n-2}}$$

(Equação 40)

Observe que, indutivamente, podemos usar os dados de uma classe i para obter g_{i-1} até esgotar todas as classes em:

$$g_1 = \frac{x'_2 - x_2 + x_2 g_2 + y_2}{x_1}$$

(Equação 41)

Assim calculando g.

Referências

GF SILVA, R MÔRA, RA CURTO - Nativa, Sinop, 2017 - periodicoscientificos.ufmt.br. Acesso em: 03 de maio de 2021.

FILHO, Afonso Figueiredo. Crescimento, Mortalidade, Ingresso E Distribuição Diamétrica Em Floresta Ombrófila Mista. Acesso em 04 de maio de 2021.

SILVA, Paulo Henrique da et al. Regime de corte seletivo ótimo em modelos de locação de pátios de estocagem de madeira: um estudo de caso na floresta amazônica. Acta Amaz. [online]. 2018, vol.48, n.1, pp.18-27. ISSN 1809-4392. https://doi.org/10.1590/1809-4392201603113. Acesso em: 03 de maio de 2021.

M.B. Usher, "A Mattrix Approach to the Management of Renewable Resources, with Special Reference to Selection Forest", Journal of Applied Ecology, Vol. 3, 1966, pág. 355-367

Anton & Rorres, *Álgebra Linear com Aplicações*, 10ª Edição

Pesquisa de Preços. Disponível em: https://www.stj.jus.br/static_files/STJ/Institucional/Controle%20interno/manual_orientacao_pesquisa_preco_2017.pdf. Acesso em 06 de Maio de 2021.