Relatório de Modelo para o Brilho de Vênus

João Pedro de Freitas — *jpfreitas2001@usp.br*
Amanda Costa — *amanda.cs@usp.br*
Juan Nogueira — *juan.nog@usp.br*
Maria Rita Xavier — *mrxavier74@usp.br*
Samuel Garcez — *samueltgarcez@usp.br*

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo

O relatório objetiva discutir e desenvolver um modelo matemático que forneça relações geométricas entre Sol, Vênus, Terra e o brilho de Vênus visto a partir da perspectiva terrestre.

1. INTRODUÇÃO

A capacidade de prever os movimentos e características dos astros sempre fascinaram a humanidade. Além da beleza visível (para os corpos celestes que conseguimos ver), uma outra se esconde na possibilidade de transformar o estudo dessas variações físicas em um estudo matemático e a precisão deste último em descrevê-las. Neste relatório, trataremos da variação do brilho de Vênus visto da Terra ao longo de suas órbitas, como determiná-lo, assim como determinar também a distância entre os dois planetas e o ângulo Vênus-Sol-Terra que o maximizam, através de uma abordagem matemática, ou seja, desenvolveremos um modelo.

No decorrer de sua órbita, Vênus exibe fase, isto é, a quantidade de área iluminada em relação a quantidade observável, e essa será a chave para resolver o nosso problema, pois o brilho ($\boldsymbol{b}$) pode ser expresso por $\boldsymbol{b = k\frac{p}{r^2}}$, sendo $\boldsymbol{p}$ a fase e $\boldsymbol{r}$ a distância Terra-Vênus, como veremos adiante. Ao longo do texto, relacionaremos essas e outras medidas na busca por expressões que nos tragam as respostas que procuramos.

2. HIPÓTESES

Como todo modelo matemático, esse adotará hipóteses e suposições que diminuem parte da complexidade do seu respectivo tema, objetivando dar ênfase a certos comportamentos de interesse e suas implicações. Suporemos, aqui, que:

(i) As órbitas da Terra e de Vênus são circulares, justificada pela baixíssima excentricidade das reais órbitas elípticas: 0.017 e 0.007, respectivamente.

(ii) As órbitas dos dois planetas são coplanares.

(iii) A intensidade do brilho é diretamente proporcional à área iluminada vista da Terra, em relação à área observada a partir da mesma.

3. O MODELO

Supõe-se que o brilho ($\boldsymbol{b}$) é proporcional à área observada iluminada (já visto).

Definimos "p", que indica a "fase", como a fração da área do disco virado pra Terra que está sendo iluminada pelo sol, sendo $\mathbf{0} \leq p \leq \mathbf{1}$.

Baseando-se em argumentos da ótica geométrica, afirma-se:

(i) O comprimento aparente de um objeto é inversamente proporcional à distância do objeto ao observador.

(ii) A área do círculo é proporcional ao quadrado do comprimento do seu diâmetro.

Então, a área aparente será inversamente proporcional ao quadrado da distância.

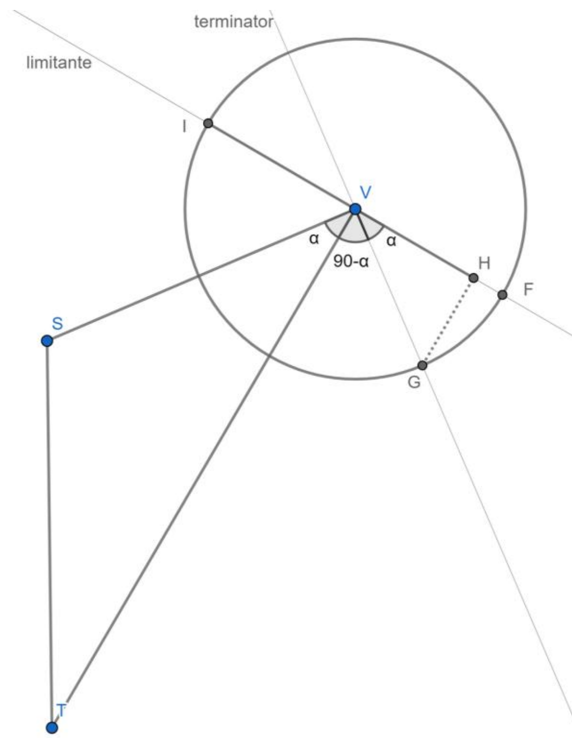
Assim, é possível sintetizar $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{k}\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{r}^2}$, em que $\boldsymbol{k}$ é uma constante de proporcionalidade e $\boldsymbol{r}$, a distância de Vênus ao Sol.

Como a distância entre o Sol e Vênus é muito grande em relação ao diâmetro desses astros, determina-se que os raios do sol chegam a Vênus paralelos, de modo que iluminam exatamente metade da superfície do planeta. A linha que divide o hemisfério iluminado do não iluminado é chamada "terminator" e ela é perpendicular ao segmento que liga Vênus ao Sol. Do planeta terra, essa terminator é vista como um arco de elipse (originada da projeção de uma circunferência por um plano não paralelo a ela).

Analogamente, a porção de Vênus observada da Terra é um hemisfério, cuja fronteira chamaremos de linha limitante.

3.1 Analisando a área de uma elipse

Ao observar o plano que contém o Sol e os planetas em questão, define-se $\boldsymbol{\alpha}$ como o ângulo $\boldsymbol{TVS}$ (entre a Terra e o Sol vistos de Vênus). Na Figura 1, $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{G}$ seriam pontos da superfície de Vênus:



(Figura 1)

Onde $\boldsymbol{G}$ está sobre a reta "terminator", de modo que o ângulo $\boldsymbol{GVS} = \boldsymbol{90^o}$.

Portanto, $\boldsymbol{GVT} = \boldsymbol{GVS} - \boldsymbol{TVS} = \mathbf{90} - \boldsymbol{\alpha}$.

Do mesmo modo, $\boldsymbol{F}$ está sobre a reta "limitante", então $\boldsymbol{FVT} = \boldsymbol{90^o}$

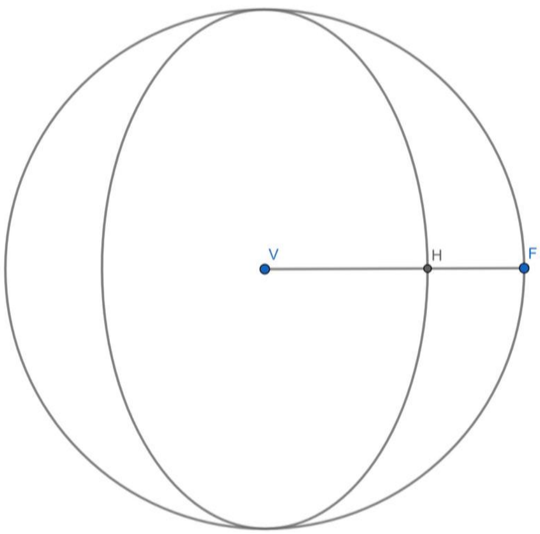
Logo, $\boldsymbol{FGV} = \boldsymbol{FVT} - \boldsymbol{GVT} = \mathbf{90} - (\mathbf{90} - \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}$.

Seja $\boldsymbol{H}$ a projeção de $\boldsymbol{G}$ sobre $\boldsymbol{VF}$. Temos que o segmento $\boldsymbol{VH}$ mede $\boldsymbol{VG}\ \cdot$

$cos\ (\alpha) = R \cdot cos\ (\alpha)$, sendo R o raio da circunferência.

A porção que é iluminada e que pode ser observada da Terra, isto é, a fase p de Vênus corresponde ao arco IG.

Agora, é assumida a perspectiva "da Terra", vista do plano perpendicular a VT que contém V, como é demonstrado na Figura 2:



(Figura 2)

Tem-se agora que a área de interesse pode ser calculada como a soma entre uma metade de círculo e outra metade de elipse. A área do círculo é conhecida como $\pi \cdot R^2$, sendo R o raio da circunferência, também, nesse caso. A área da elipse também é conhecida, e é dada por $\pi \cdot a \cdot b$, na qual a e b são as medidas dos semieixos da cônica. No nosso caso, o semieixo maior é igual ao raio R e o semieixo menor VH foi calculado anteriormente, sendo igual a $R \cdot cos\ (\alpha)$.

Assim, a área é apresentada na Equação 1:

$$S = \frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R^2 cos(\alpha)}{2} = \frac{\pi R^2}{2}[1 + cos\ (\alpha)]$$

(Equação 1)

Por fim, podemos calcular:

$$p = \frac{S}{\pi R^2} = \frac{(1+cos(\alpha))}{2}.$$

(Equação 2)

O leitor atento terá percebido que a geometria aqui desenvolvida se aplica às fases de Vênus em que o ângulo **α<90º**. O caso complementar, que alcança o mesmo da Equação 2, já se encontra exposto em WILDFOGEL (1984).

4. BRILHO DE VÊNUS E O “r”

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo SVT, apresentado na Figura 1, tem-se o mostrado na Equação 3:

$$ST^2 = TV^2 + VS^2 - 2 \cdot TV \cdot VS \cdot cos\ (\alpha)$$

$$D^2 = r^2 + d^2 - 2 \cdot d \cdot r \cdot cos\ (\alpha)$$

$$cos\ (\alpha) = \frac{r^2 + d^2 - D^2}{2 \cdot d \cdot r}$$

(Equação 3)

Com isso,

$$p = \frac{(1 + cos\ (\alpha))}{2}$$

$$p = \frac{1}{2}(1 + \frac{r^2 + d^2 - D^2}{2 \cdot d \cdot r})$$

$$p = \frac{1}{2} + \frac{r^2 + d^2 - D^2}{4 \cdot d \cdot r}$$

$$p = \frac{r^2 + d^2 + 2 \cdot d \cdot r - D^2}{4 \cdot d \cdot r}$$

(Equação 4)

Dessa forma, é possível usar o resultado na Equação 3, obtendo, assim, a função $b(r)$, a qual exibe o brilho tendo como único argumento a distância entre a Terra e Vênus.

$$b(r) = k\frac{\frac{r^2 + d^2 + 2 \cdot d \cdot r - D^2}{4 \cdot d \cdot r}}{r^2}$$

$$b(r) = k\frac{r^2 + d^2 + 2\cdot d\cdot r - D^2}{4\cdot d\cdot r^3}$$

(Equação 5)

4.1 Valor de "r" para o brilho máximo

Para obter o brilho máximo de Vênus a partir de r, tem-se que:

$$b'(r) = -\frac{k}{4\cdot d\cdot r^4}(r^2 + 3d^2 + 4\cdot d\cdot r - 3D^2)$$

$$b'\mathrm{r} = 0$$

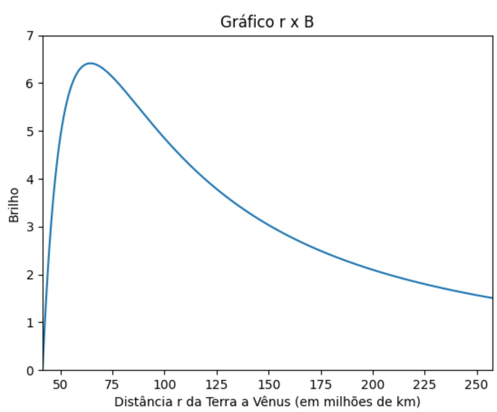
$$(r^2 + 3d^2 + 4\cdot d\cdot r - 3D^2) = 0$$

$$[r^2 + 4\cdot d\cdot r + (d^2 - D^2)] = 0$$

$$r = -2d + \sqrt{d^2 + 3D^2}$$

(Equação 6)

Por igualar a derivada a 0, é garantido que r é abscissa de um ponto crítico da função B. Sabemos que é o caso de máximo através do gráfico r x B, desenvolvido computacionalmente, e que é demonstrado na Figura 3:



(Figura 3)

Vale ressaltar que, para obtenção do gráfico da Figura 3, supôs-se que $D = 14{,}95\cdot 10^7\ km$ e $d = 10{,}81\cdot 10^7\ km$, obtendo a distância que maximiza o brilho a partir desses valores como sendo $r = 6{,}44\cdot 10^7\ km$, tal como a Equação 6 mostraria.

4.2 Condições de existência

Observe que o valor de r encontrado acima é válido somente se obedece à desigualdade triangular, isto é, devemos verificar que $D - d \leq r \leq D + d$. Vamos separar em duas desigualdades e analisar quais condições são necessárias para que ambas sejam satisfeitas.

I) $r \geq D - d$:

$$D > d \Rightarrow \exists q > 0\ tal\ que\ D = d + q$$

$$\Rightarrow D^2 = d^2 + 2dq + q^2$$

$$\Rightarrow 3D^2 = 3d^2 + 6dq + 3q^2$$

$$\Rightarrow d^2 + 3D^2 = 4d^2 + 4dq + q^2 + 2dq + 2q^2$$

$$\Rightarrow d^2 + 3D^2 = (2d + q)^2 + 2dq + 2q^2$$

$$\Rightarrow d^2 + 3D^2 > (2d + q)^2$$

$$\Rightarrow r = -2d + \sqrt{d^2 + 3D^2} > -2d + \sqrt{(2d + q)^2}$$

$$\Rightarrow r > -2d + 2d + q = q$$

$$\Rightarrow r > D - d$$

Logo, a condição $D > d$ é necessária e suficiente para a primeira desigualdade.

II) $r \leq D + d$:

$$r \leq D + d \Leftrightarrow \frac{r}{d} \leq \frac{D}{d} + 1$$

$$\frac{r}{d} = -2 + \sqrt{\frac{d^2}{d^2} + \frac{3D^2}{d^2}}$$

Tomando $\frac{D}{d} = f$:

$$\frac{r}{d} = -2 + \sqrt{1 + 3f^2} \leq f + 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + 3f^2} \leq f + 3$$

$$\Rightarrow 1 + 3f^2 \leq f^2 + 6f + 9$$

$$\Rightarrow f^2 - 3f - 4 \leq 0$$

A expressão do segundo grau tem concavidade para cima e raízes -1 e 4. Porém, $f < 0 \Rightarrow \frac{D}{d} < 0$ exige que D e d tenham sinais opostos, o que não faz sentido já que ambos representam uma distância positiva. Logo, $0 < \frac{D}{d} \leq 4$ é condição necessária e suficiente.

No caso de Terra e Vênus, $D = 14{,}95 \times 10^7$ e $d = 10{,}81 \times 10^7$ são tais que satisfazem ambas as condições. Portanto, o r da equação 6 é válido.

4.3 Algoritmo que determina o brilho máximo de Vênus

O programa completo pode ser visualizado em <https://github.com/Mysfer/Modelagem-Matematica/blob/b7af86c4cf495adb435bfec86e8cd3e638656c0e/Projeto-2/algoritmo.py>. Porém, a seguir, detalharemos melhor cada código aplicado.

A priori, são definidas as variáveis globais, usadas em qualquer função do código, inclusive na função main (), a qual o usuário terá acesso.

```python

def main():
    # Legenda do Menu
    print("Menu\n0 - Sair\n1 - Calcular o brilho em função de uma distancia em km pertencente ao intervalo [4.14 * 10^7 , 25.76 * 10^7] q

    # Aqui sera usado um lupe infinito para que o usuário possa usar o código diversas vezes sem precisar executar novamente
    while True:
        menu = int(input("Digte uma opção: "))
        if menu == 1:
            # Tratamento de dados para que o usuário só possa digitar um valor no intervalo
            while True:
                # A distância será multiplicada por 10^7 para facilitar o usuário a digitar no intervalo desejado
                r = float(input("Digite uma distância em km (ela vai ser multiplicada por 10^7): "))
                r = r * (10**7)
                if(r >= (D-d) and r <= (D+d)):
                        break
                print("Valores fora do intervalo, tente outro valor!")

            print("O brilho sera: ", (b(r) / maxb()) * 100, "% do bilho máximo")

        elif menu == 2:
            print("O brilho sera máximo na distancia r =", maxr());
        elif menu == 3:
            print("O briho será máximo quando p =", pmax())
        elif menu == 4:
            theta = float(input("Digite o valor de θ em graus: "))
            print("O brilho será: ", (btheta(theta) / maxb()) * 100, "% do brilho máximo")
        elif menu == 5:
            print("O brilho será máximo quando θ =", maxtheta(),"Radianos")
            graph()
        elif menu == 0:
            break
        else:
            print("Opção inválida! ")
```

(Figura 4)

Além disso, para simplificar os códigos aplicados nesse programa, foram utilizadas as bibliotecas math, que contém funções e constantes matemáticas, numpy, a qual possui funções matemáticas úteis e funciona com vetores multidimensionais, e matplotlib, responsável por criar e imprimir gráficos.

```python
# importar as bibliotecas
import math # Funções matemáticas
import matplotlib as mpl # Biblioteca que permite a impressão de gráficos
import numpy as np # Biblioteca que ajuda a trabalhar com grandes vetores
from matplotlib import pyplot as plt
```

(Figura 5)

Feito isso, é possível definir as funções. A primeira, ***b(r)***, calcula o brilho a partir da distância $\boldsymbol{r}$ através de um valor numérico. No entanto, para o usuário, é retornado o valor em porcentagem do brilho máximo. Optamos por essa abordagem porque o modelo não especifica a unidade de medida e a escala de ***b.***

```python
# função que encontra o brilho em função de r
def b(r):
    B = k * (2*d*r + r**2 + d**2 - D**2) / (4 * d * r**3)

    return B
```

(Figura 6)

Em seguida, é definida a função ***maxr()*** que calcula a distância $\boldsymbol{r}$ quando o brilho de Vênus é máximo.

Adicionalmente, com esses valores numéricos, o programa foi capaz de calcular a fase p quando o brilho é máximo (ver Figura 7), obtendo $p \approx 26{,}59\,\%$. O número é próximo dos 28% que Wildfogel (1984) apresenta no início do seu artigo. O próprio autor aponta que a diferença entre o modelo e a observação empírica se deve mais à hipótese de uniformidade do brilho no disco de Vênus do que às simplificações geométricas empregadas.

```
# função que encontra o r quando o brilho é máximo
def maxr():
    r = -2*d + math.sqrt(d**2 + 3 * (D**2))

    return r
```

(Figura 7)

Logo após, é implementada a função ***pmax()*** que procura define qual a fase de Vênus quando o seu brilho é máximo. Nela é usada a distância ***r*** como uma variável e, por isso, a fórmula que define a distância ***r*** quando o brilho venusiano é maior também é aplicada.

```
# função que p quando brilho for máximo
def pmax():

    r = maxr() # Pegando o valor máxido de r para usar na fórmula
    p = (r**2 + d**2 + 2*d*r - D**2) / (4 * d * r)

    return p
```

(Figura 8)

Em seguida, há a função ***maxtheta()*** que encontra o ângulo $\boldsymbol{\theta}$ quando o brilho venusiano é máximo. Novamente, a função que encontra a distância ***r*** quando o brilho é máximo.

```
# função que encontra o theta quando brilho é máximo
def maxtheta():
    r = maxr() # Pegando o valor máxido de r para usar na fórmula
    theta  = math.acos((d**2 + D**2 - r**2) / (2*d*D))
    return theta
```

(Figura 9)

Já a ***btheta(theta)***, encontra o brilho mais elevado com base no ângulo $\boldsymbol{\theta}$. Nela, o ângulo é convertido para rad, que por sua vez utiliza novamente a função usada para a distância ***r*** quando o brilho é máximo.

```
# Retorna o brilho em função do ângulo theta
def btheta(theta):
    theta = (theta * math.pi) / 180
    r = math.sqrt(D**2 + d**2 - 2 * D * d * math.cos(theta)) # converte o ang theta em uma distancia r por lei dos cossenos
    return b(r)
```

(Figura 10)

Por fim, é definida a função ***grahp2()***, a qual retorna o gráfico da Figura 11, que mostra a variação do brilho de acordo com o ângulo $\boldsymbol{\theta}$. Ademais, é mostrado abaixo o menu que aparece para o usuário do programa, de acordo com a opção de cada função que se deseja calcular.

```
Menu
0 - Sair
1 - Calcular o brilho em função da distância r entre a Terra e Vênus.
2 - Descobrir qual é a distância r quando o brilho é máximo e abrir o gráfico do brilho em função de r.
3 - Calcular o brilho em função do ângulo θ entre Terra, Sol e Vênus.
4 - Descobrir qual o ângulo θ quando brilho for máximo e abrir o gráfico do brilho em função de θ.
5 - Calcular p quando brilho é máximo.
```

(Figura 11)

5. VALOR DO ÂNGULO θ QUE MAXIMIZA O BRILHO DE VÊNUS

Deve-se calcular ***r(θ)***, sendo $\boldsymbol{\theta}$ o ângulo Vênus-Sol-Terra (***VST***). Para realizar o cálculo, basta aplicar a Lei dos Cossenos na Equação 7:

$$\boldsymbol{r^2 = d^2 + D^2 - 2 \cdot d \cdot D \cdot cos(\theta)}$$

$$\boldsymbol{r = \sqrt{d^2 + D^2 - 2 \cdot d \cdot D \cdot cos(\theta)}}$$

(Equação 7)

Quando o brilho é máximo, ocorre uma igualdade entre a Equação 7 e a Equação 6, expressa na Equação 8:

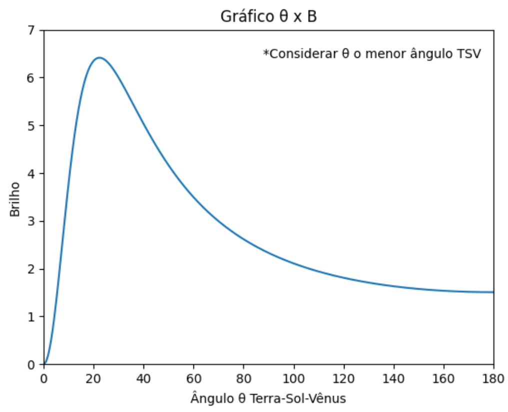
$$\boldsymbol{\sqrt{d^2 + D^2 - 2 \cdot d \cdot D \cdot cos(\theta)} = -2d + \sqrt{d^2 + 3D^2}}$$

$$\boldsymbol{cos\ (\theta)\ = \frac{d^2 + D^2 - r^2}{2 \cdot d \cdot D}}$$

$$\boldsymbol{\theta = \cos^{-1}\left(\frac{d^2 + D^2 - r^2}{2 \cdot d \cdot D}\right)}$$

(Equação 8)

Além disso, obteve-se o gráfico da Figura 12, a partir das funções paramétricas de θ (Equação 8) e B (Equação 5) no parâmetro r:



(Figura 12)

Para obtenção do gráfico da Figura 12, admitiu-se $\boldsymbol{D = 14,95 \cdot 10^7\ km}$ e $\boldsymbol{d = 10,81 \cdot 10^7\ km}$, que, por sua vez, nos informam que o ângulo a maximizar o brilho é o ângulo ***θ = 22,374794491825°*** (ou ***θ = 0,39051383334 rad***).

6. PREVISÃO PARA O PERÍODO DE BRILHO MÁXIMO DE VÊNUS

Podemos utilizar o modelo para fazer a seguinte previsão:

"A cada 584 dias, quando o ângulo **θ** é múltiplo de ***2π***, o evento denominado "conjunção inferior" ocorre. Ele diz respeito à quando Vênus está diretamente entre a Terra e o Sol. Quantos dias antes e depois desse evento Vênus estará com o brilho máximo?"

Para que isso ocorra, sabendo-se que a órbita é circular e, assim, a velocidade angular é constante, podemos utilizar a suposição vista anteriormente (***d*** = 10.81•10^7 km e ***D*** = 14.95•10^7 km) para encontrar o ângulo cujo cosseno maximiza o brilho numericamente.

$$\boldsymbol{\theta_M =}$$

$$\boldsymbol{\cos^{-1}\left[\frac{10,81^2 + 14,95^2 - \left(-2 \cdot 10,81 + \sqrt{10,81^2 + 3 \cdot 14,95^2}\right)^2}{2 \cdot 10,81 \cdot 14,95}\right]}$$

$$\boldsymbol{\therefore\ \theta_M =}$$

$$\boldsymbol{\cos^{-1}\left[\frac{10,81^2 + 14,95^2 - \left(-2 \cdot 10,81 + \sqrt{10,81^2 + 3 \cdot 14,95^2}\right)^2}{2 \cdot 10,81 \cdot 14,95}\right]}$$

$$\boldsymbol{\theta_M = 0,39051383334\ rad}$$

$$\boldsymbol{\theta_M \approx 0,39\ rad}$$

(Equação 9)

Em seguida, com uma simples regra de três, encontramos o valor aproximado em dias **(*t*)** de quando Vênus estará com o maior brilho após o acontecimento.

$$\boldsymbol{\frac{2\pi\ rad}{0,39\ rad} = \frac{584\ dias}{t}}$$

$$\boldsymbol{t = \frac{0,39 \cdot 584\ dias}{2\pi} = 36,2491 \ldots\ dias}$$

$$\boldsymbol{t \approx 36\ dias}$$

(Equação 10)

Sabe-se que $\boldsymbol{cos\,(z) = cos\,(2\pi \pm z)}$, assim, Vênus estará mais brilhante 36 dias depois e antes da conjunção inferior.

Acerca da precisão do resultado, lembremos que as distâncias Sol-Vênus e Sol-Terra estão levemente aproximadas, assim como o ângulo e o dia (esse último, de longe a aproximação mais relevante). Sendo mais precisos, deveríamos acrescentar um intervalo de aproximadamente 7h 7m 30s aos 36 dias.

Ademais, podemos extrair da previsão acima que Vênus terá seu brilho máximo, para esses valores de ***d*** e ***D***, sempre que ***θ = ± 0,3905... + 2Nπ rad*** for uma sentença verdadeira, sendo ***N*** um inteiro qualquer.

7. ANÁLISE CRÍTICA DO MODELO

Para efetuar o desenvolvimento do presente modelo, admitiram-se algumas irregularidades como forma de estabelecer padrões para representar de forma simplificada a variação do brilho de Vênus e os fatores geométricos que influenciam nisso. Dessa forma, considerou-se que a Terra e Vênus movem-se em órbitas circulares, uma vez que as excentricidades terrestre e venusiana possuem valores muito pequenos, além da diferença entre os eixos maiores e menores da Terra terem uma ótima aproximação de um círculo. Para mais, as órbitas dos planetas também são coplanares.

Sendo assim, infere-se que foi utilizada uma linha de raciocínio semelhante à do método de Eudoxo, ou seja, que apenas foram aplicadas técnicas geométricas para a definição do modelo matemático dos planetas. Como mostra Tossato (2011), através desse método, não são considerados fatores físicos para estimar a configuração do sistema solar, ou seja, que não levou-se em conta os materiais que constituem os planetas.

No entanto, o método geométrico de Eudoxo é inadequado para explicar a variação do brilho dos planetas. Dessa maneira, como mostrado por Faria (2014), infere-se também que o procedimento mais eficaz aplicado é o de Aristarco, uma vez que ele, além de estimar as condições da variação do brilho buscadas neste artigo, explica que astros como a Lua recebem luz do Sol, e que a visualização deles na Terra acontece devido a posição destes – ou seja, que a visualização terrestre da porção de um planeta acontece devido ao seu direcionamento para a Terra no momento visualizado. Sendo assim, buscou-se determinar com este a posição que Vênus tinha em relação a Terra no momento em que seu brilho era máximo.

Por fim, infere-se que métodos mais modernos e eficazes foram empregados, como os da Trigonometria, uma vez que recursos geométricos mais complexos e antigos foram empregados por Eudoxo e Aristarco.

8. CONCLUSÃO

A partir de ferramentas geométricas, trigonométricas, computacionais e aritméticas, objetivou-se desenvolver um modelo matemático que exponha o comportamento do brilho de Vênus bem como as condições que o maximizam.

No processo de desenvolvimento do modelo, determinou-se as condições de formação da área aparente de Vênus na Terra e, a partir disso, as fases de visualização dos planetas. Feito isso, indicou-se uma forma de encontrar o brilho de Vênus com base na distância entre ele e a Terra, e assim, achar o brilho máximo venusiano. Em seguida, estabeleceu-se uma função baseada no ângulo θ, posicionado entre Vênus-Sol-Terra, com o objetivo de, novamente, encontrar o brilho máximo de Vênus. Por fim, definiu-se o intervalo de tempo existente entre um período de exposição máxima venusiano e outro.

Sendo assim, infere-se que o objetivo inicial de execução desta dissertação foi concluído, uma vez que desenvolveu-se um modelo matemático que desse um tratamento geométrico ao brilho e aos fatores envolvidos nesse fenômeno, ademais demonstrando situações de ocorrência do brilho máximo de Vênus, a partir das ferramentas disponíveis para tal.

REFERÊNCIAS

FARIA, Rodrigo Cristino de. **Modelagem causal de astronomia antiga.** Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da USP, 2014. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/8/8133/tde-07052015-141417/publico/2014_RodrigoCristinoDeFaria_VOrig.pdf>. Acesso em 17 de Mai. De 2021.

TOSSATO, Claudemir Roque. **A astronomia e a cosmologia de J. Kepler.** Revista Primus Vitam, 2011. Disponível: <http://delphos-gp.com/primus_vitam/primus_2/Claudemir.pdf>. Acesso em 17 de Mai. De 2021.

Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 41, nº 2, e20180096 (2019) www.scielo.br/rbef DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2018-0096>.

JR., C. B. L.; FALSARELLA, N..; CORREA, O. S. **Observações Fotográficas do Efeito Schöter em Vênus na Elongação Vespertina de 1988.** Rede de Astronomia Observacional, 1991. Disponível em: < https://drive.google.com/drive/u/0/folders/113dHw0lU1d3PBTXZx8VObB9MAm8hyViC>. Acesso em 17 de Mai. De 2021.