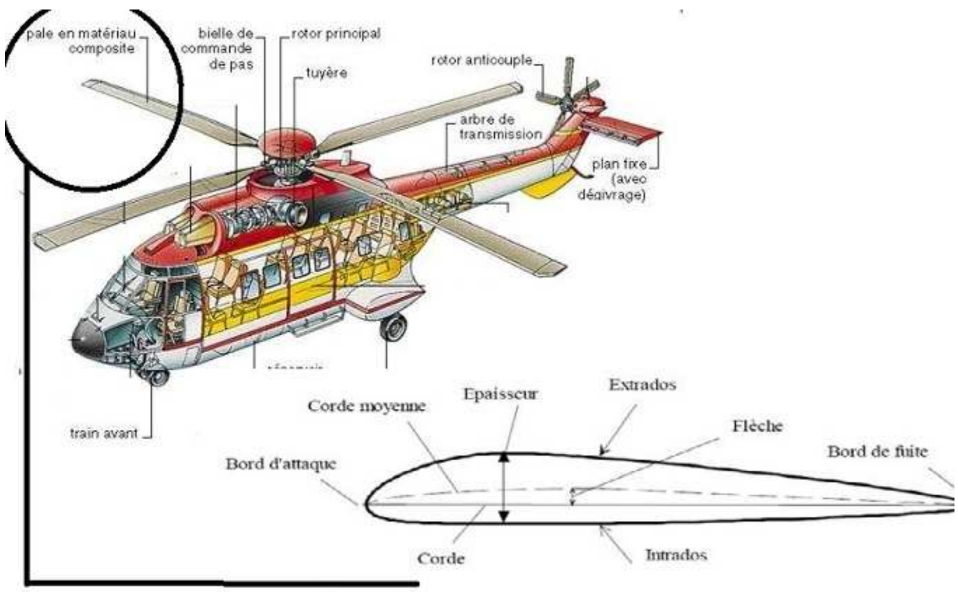
Analyse et modélisation numérique
Examen Final, 23 février 2017 (2h)



Termes techniques reliés au profil de pale

- Exercice 1.

  Dans le cadre d'une conception d'un hélicoptère sans pilote, nous avons besoin d'étudier la résistance de matériaux et d'utiliser la modélisation numérique pour concevoir une pale. Lors de l'étude analytique le type de fluide était défini avec un calcul des forces de traînée et de portance suite à des dimensions données (longueur L, corde C et épaisseur t). En se basant sur des choix préliminaires des matériaux et sur une forme simplifiée, un calcul de la résistance des structures est effectuées (contraintes et déformations).

  1-1 Quelle est le rôle de l'étude analytique ?

1-2 Quelles sont les étapes de la modélisation pour ce cas de conception de pale?

1-3 Comment les simulations numériques peuvent nous aider pour cette conception.

- Exercice 2.

On veut calculer une approximation numérique de la solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+u(x,t)=0 \qquad 0<x<1 \quad 0<t \quad u(x,0)=4\,x\,(1-x) \quad u(0,t)=0 \quad u(1,t)=1$$

La solution exacte de cette équation s'écrit

$$u(x,t)=\begin{cases} 4\,(x-t)\,(1-x+t)\,e^{-t} & \text{pour } x\geq t \\ 0 & \text{pour } x<t \end{cases}$$

2-1 Discrétiser l'intervalle spatial $[0,1]$, sur la droite (x_i,t), prenez la valeur $u(x_i,t)$ pour la fonction cherchée.

2-2 Rassembler les n fonctions inconnues $u_i(t)$ dans un vecteur $U(t)$. Par la discrétisation spatiale, transformer l'équation aux dérivées partielles en un système différentiel linéaire:

$$\frac{dU}{dt}(t)=c\,A_n\,U(t)+F \quad U(0)=U_0 \tag{1}$$

donner la forme de: $U(t)$, A_n, F et c.

2-3 En utilisant le schéma d'Euler avec un pas en temps τ, donner le schéma numérique associé (en (x_i,t_l))
ici on forme les temps discrets $t_l=l\,\tau$ pour $l=0,1,2,\ldots$

2-4 Déduire la condition de stabilité.

2-5 En utilisant le schéma de Crank-Nicolson donner le schéma numérique associé (en $(x_i,t_{l+1/2})$).
Nous rappelons que:

$$\frac{dU}{dt}(t_{l+1/2})=\frac{U(t_{l+1})-U(t_l)}{\tau}+\mathrm{O}(\tau^2)$$

Pour toute fonction (deux fois différentiable) $z(t)$ la formule de Taylor nous indique que

$$z(t_{l+1/2})=\frac{z(t_{l+1})+z(t_l)}{2}+\mathrm{O}(\tau^2)$$

2-6 Que peut-on dire, en comparant les deux formes de discrétisation temporelles?

2-7 Donner une approximation, en utilisant le schéma d'Euler, pour $u(0.25, 0.02)$, $u(0.50, 0.02)$ et $u(0.75, 0.02)$ et (mêmes pas de discrétisation, $h = 0.25$, $\tau = 0.02$).

2-8 Calculez les erreurs effectives.

2-10 Donner la forme matricielle, en utilisant le schéma de Crank-Nicolson , pour l'approximation de $u(0.25, 0.02)$, $u(0.50, 0.02)$ et $u(0.75, 0.02)$.

2-11 Peut-on utiliser la méthode de Gradient pour résoudre ce système linéaire?

2-12 Donner la matrice d'itération de Jacobi pour résoudre le système précédent. Que peut-on dire sur la convergence?