# Proof of Linearity of Hadamard Code given by Sylvester Matrices

Mitsuru Takigahira

# 証明

数学的帰納法で示す。
$n = 2^m$ のとき

- Sylvester Matrix を $S^m$
- $S^m$ から生成される Hadamard Code を $C_m$
- $C_m$ の各成分を $\mathbf{u}_1^m, \bar{\mathbf{u}}_1^m, \ldots, \mathbf{u}_{2^m}^m, \bar{\mathbf{u}}_{2^m}^m$

と表記することにする

# 証明 (1/3)

### $m = 0$ のとき

$S^m = (1)$ or $(-)$ より、$C_0 = \{(1)\,(0)\}$
よって、$C_0$ は $(1)$ を基底として線形になり、$C_0$ は線形符号。

### 帰納法の仮定

$m = k \geq 0$ のとき $C_m$ が線形になると仮定する。
このとき $C_m$ は $2^{k+1}$ 個の符号 $\{\mathbf{u}_1^k, \bar{\mathbf{u}}_1^k, \ldots, \mathbf{u}_{2^m}^k, \bar{\mathbf{u}}_{2^m}^k\}$ を持ち、
これらは $k+1$ 個の基底 $\{\mathbf{e}_1^k, \ldots, \mathbf{e}_{k+1}^k\}$ のもと線形である。

# 証明 (2/3)

## $S^{k+1}$ から作られる符号の線形性

補題 6.24 より $S^{k+1} = \begin{pmatrix} S^k & S^k \\ S^k & -S^k \end{pmatrix}$ なので、$C_{k+1}$ に含まれる符号は
$1 \leq i \leq 2^k$ に対して、 $(\mathbf{u}_i^k, \mathbf{u}_i^k), (\bar{\mathbf{u}}_i^k, \bar{\mathbf{u}}_i^k), (\mathbf{u}_i^k, \bar{\mathbf{u}}_i^k), (\bar{\mathbf{u}}_i^k, \mathbf{u}_i^k)$ の形になる。
帰納法の仮定から、
$0 \leq i \leq 2^k$ のとき $\mathbf{u}_i^k, \bar{\mathbf{u}}_i^k$ は $\mathbf{e}_1^k, \ldots, \mathbf{e}_{k+1}^k$ の線型結合で表せるので、
$1 \leq i \leq k+1$ のもと $\mathbf{e}_i^{k+1} = (\mathbf{e}_i^k, \mathbf{e}_i^k)$ とおけば、
$(\mathbf{u}_i^k, \mathbf{u}_i^k), (\bar{\mathbf{u}}_i^k, \bar{\mathbf{u}}_i^k)$ の形の符号は $\mathbf{e}_1^{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_{k+1}^{k+1}$ の線型結合で表せる。

# 証明 (3/3)

### $S^{k+1}$ から作られる符号の線形性

更に、$C_k$ は線形符号なので、$\mathbf{0} = (0 \ldots 0)$ を含むため、
$C_{k+1}$ は $(\mathbf{0}, \bar{\mathbf{0}}) = (0 \ldots 01 \ldots 1)$ を含み、これは $(\mathbf{u}_i^k, \mathbf{u}_i^k), (\bar{\mathbf{u}}_i^k, \bar{\mathbf{u}}_i^k)$ の形ではない。
$\mathbf{e}_{k+2}^{k+1} = (0 \ldots 01 \ldots 1)$ とおくと、$1 \leq i \leq 2^k$ に対し
$\mathbf{e}_{k+2}^{k+1} + (\bar{\mathbf{u}}_i^k, \bar{\mathbf{u}}_i^k) = (\bar{\mathbf{u}}_i^k, \mathbf{u}_i^k)$ かつ $\mathbf{e}_{k+2}^{k+1} + (\mathbf{u}_i^k, \mathbf{u}_i^k) = (\mathbf{u}_i^k, \bar{\mathbf{u}}_i^k)$
よって、$C_k$ が線形のとき $C_{k+1}$ は $\mathbf{e}_1^{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_{k+2}^{k+1}$ を基底として線形となる。

以上から、数学的帰納法により、Sylvester Matrix から作られる Hadamard Code は線形であることが示された。