6.5 Gilbert-Varshamov 限界

良い誤り訂正能力を維持しながら、伝達速度 $R = \frac{1}{n}\log_q M$ を最大化するために、与えられた q, n 及び t (または同値な d) に対して、可能な限り大きい値 $M =| C |$ となる符号を探すことは興味深い。$A_q(n,d)$ を任意の符号長 n、最小距離 d の q 元符号の符号語数の最大値と置く。ここで $d \leq n$ である。ハミングの球充填限界式 (定理 6.15) から $A_q(n,d)$ の上限は次のように与えられる。

$$A_q(n,d)\big(1 + \binom{n}{1}(q-1) + \binom{n}{2}(q-1)^2 + \cdots + \binom{n}{t}(q-1)^t\big) \leq q^n$$

ここで、定理 6.10 から $t = \lfloor (d-1)/2 \rfloor$ である。

例 6.20

$q = 2$ と $d = 3$ の場合、$t = 1$ で、例 6.16 で見たように、$A_2(n,3) \leq \lfloor 2^n/(n+1) \rfloor$ である。よって、$n = 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ に対して、$A_2(n,3) = 2, 3, 5, 9, 16, \ldots$ である。