アルゴリズム論 1

第 4 回: 文脈自由文法 (1)

関川 浩

2016/05/11

第 4 回から第 7 回の目標

fa と正規表現: よくできたシステムだが能力が低い

より能力が高いシステムを導入する

- 文脈自由文法 (第 4, 5 回)
- プッシュダウンオートマトン (第 6, 7 回)

第 4 回の目標:

- 文脈自由文法の導入
- 文脈自由文法で生成される言語が正規言語を真に含むこと

1. 文脈自由文法
    - 文脈自由文法の重要性
    - 文脈自由文法の定義
    - 例題
    - 文脈自由言語の和集合
2. 文脈自由文法と正規言語
    - 正規言語と文脈自由言語の関係

1. 文脈自由文法
2. 文脈自由文法と正規言語

文脈自由文法の重要性 (1/2)

- 形式言語において, 文法の典型的クラス
- 表現できる言語の重要性:
  多くのプログラミング言語がこのクラス
- プッシュダウンオートマトンと言語の表現能力が等価

文脈自由文法の重要性 (2/2)

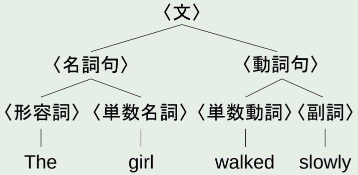
- 「文法」のイメージに合う

例

英文法における文の構造の解析

“The girl walked slowly.”

⟨文⟩	→	⟨名詞句⟩⟨動詞句⟩
⟨名詞句⟩	→	⟨冠詞⟩⟨単数名詞⟩
⟨動詞句⟩	→	⟨単数動詞⟩⟨副詞⟩
⟨形容詞⟩	→	The
⟨単数名詞⟩	→	girl
⟨単数動詞⟩	→	walked
⟨副詞⟩	→	slowly



文脈自由文法 (cfg) の定義

定義 (文脈自由文法 (cfg))

cfg (context-free grammar): $G = (V, \Sigma, P, S)$

- V, Σ, P: 空集合ではない有限集合, $V \cap \Sigma = \emptyset$
- 変数: V の要素. 大文字で表わすことが多い
  終端記号: Σ の要素. 小文字で表わすことが多い
- 生成規則: P の要素
  "$A \to \alpha$" の形 ($A \in V$, $\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$)
- 開始記号: 特別な変数 S

注意

"$A \to \alpha$" という生成規則は, A がどのような文脈に現れるかに無関係に A を α に置き換えることを許す
$\Longrightarrow$ 文脈自由という呼び名

cfg の例

例

$G_1 = (\{S\}, \{0,1\}, \{S \to \varepsilon, S \to 0S1\}, S)$ は cfg

「導出」という操作によって $x \in \{0,1\}^*$ を導く

$$S \Rightarrow 0S1 \Rightarrow 00S11 \Rightarrow 000S111 \Rightarrow 000111$$

G_1 が表現する言語:

導出により得られる $x \in \{0,1\}^*$ の全体 $= \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

注意

$\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ は正規言語ではない (第 3 回の定理 3)

一般に, 変数は複数, 各変数に適用可能な生成規則も複数

$\Longrightarrow$ 自由度が高く, 多くの列を導出することが可能

諸定義

$G = (V, \Sigma, P, S)$: cfg

- 列 $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$ が以下の条件を満たすとき,
  v は u から 1 ステップで導出されるといい, $u \Rightarrow v$ と書く
  条件: ある $\alpha, \gamma \in (V \cup \Sigma)^*$ と生成規則 $B \to \beta$ が存在して,
  $u = \alpha B \gamma$ かつ $v = \alpha \beta \gamma$
- $u_0 \Rightarrow u_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow u_n$ $(n \geq 0)$ のとき,
  u_n は u_0 から導出されるといい, $u_0 \overset{*}{\Rightarrow} u_n$ と書く
- $x \in \Sigma^*$ に対し,
  x が G によって生成される $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ x が S から導出される
- G が生成する言語 $L(G)$: G が生成する列の全体
- 文脈自由言語: cfg によって生成される言語

例題 1 (1/2)

例題 1

$\{0^m 1^n \mid m \neq n\}$ を生成する cfg を求めよ

解答

$G_2 = (\{S, S', A, B\}, \{0, 1\}, P, S)$, ただし,

$$\begin{aligned} P = \{&S \to AS',\ S \to S'B,\ S' \to \varepsilon,\ S' \to 0S'1, \\ &A \to 0A,\ A \to 0,\ B \to B1,\ B \to 1\} \end{aligned}$$

- $0^m 1^n$ $(m \neq n)$ が G_2 で生成されること
  - 0 の方が多い列 $0^{i+j}1^i$ $(j \geq 1)$ は以下の通り

$$S \Rightarrow AS' \overset{*}{\Rightarrow} A0^i S' 1^i \Rightarrow A0^i 1^i \overset{*}{\Rightarrow} 0^{j-1} A 0^i 1^i \Rightarrow 0^j 0^i 1^i$$

  - $0^i 1^{i+j}$ $(j \geq 1)$ も同様

例題 1 (2/2)

解答 (再掲)

$G_2 = (\{S, S', A, B\}, \{0, 1\}, P, S)$, ただし,

$$P = \{S \to AS',\ S \to S'B,\ S' \to \varepsilon,\ S' \to 0S'1,\\ A \to 0A,\ A \to 0,\ B \to B1,\ B \to 1\}$$

- $0^m 1^n$ $(m \neq n)$ のみが G_2 で生成されること

  最初に使える生成規則は $S \to AS'$, $S \to S'B$ のみ

  - $S \to AS'$
    $A \stackrel{*}{\Rightarrow} x \in \{0, 1\}^*$ なら, $x = 0^j$ $(j \geq 1)$
    $S' \stackrel{*}{\Rightarrow} y \in \{0, 1\}^*$ なら, $y = 0^i 1^i$ $(i \geq 0)$
    よって, $AS' \stackrel{*}{\Rightarrow} z \in \{0, 1\}^*$ なら, $z = 0^j 0^i 1^i$ $(j \geq 1,\ i \geq 0)$
  - $S \to S'B$ も同様

例題 2

例題 2

$G_3 = (\{S\}, \{0,1\}, P, S)$ が生成する言語は何か
ただし，$P = \{S \to \varepsilon, S \to 0S0, S \to 1S1\}$

解答

$L(G_3) = \{xx^{\mathrm{R}} \mid x \in \{0,1\}^*\}$

注意

$\{xx \mid x \in \{0,1\}^*\}$ は文脈自由言語ではない (次回示す)

例題 3 (1/2)

例題 3

$L = \{0,1\}^* \setminus \{xx^{\mathrm{R}} \mid x \in \{0,1\}^*\}$ を生成する文法を求めよ

解答 (1/2)

$x \in L \iff$ (a) または (b) が成立

(a) $|x|$ は奇数

(b) $x = \alpha 0 \beta 1 \alpha^{\mathrm{R}}$ または $x = \alpha 1 \beta 0 \alpha^{\mathrm{R}}$ $(\exists \alpha, \beta \in \{0,1\}^*)$

例題 3 (2/2)

解答 (2/2)

生成規則のみ示す (開始記号は S)

$$S \to S_1,\ S \to S_2,$$
$$S_1 \to 0,\ S_1 \to 1,\ S_1 \to 00S_1,\ S_1 \to 01S_1,\ S_1 \to 10S_1,\ S_1 \to 11S_1,$$
$$S_2 \to 0S_20,\ S_2 \to 1S_21,\ S_2 \to 0A1,\ S_2 \to 1A0,$$
$$A \to \varepsilon,\ A \to 0A,\ A \to 1A$$

- "$S_1 \overset{*}{\Rightarrow} x \in \Sigma^*$" $\iff$ x は条件 (a) を満たす
- "$S_2 \overset{*}{\Rightarrow} x \in \Sigma^*$" $\iff$ x は条件 (b) を満たす

$$S_2 \overset{*}{\Rightarrow} xS_2x^{\mathrm{R}} \Rightarrow \begin{cases} x0A1x^{\mathrm{R}} \\ x1A0x^{\mathrm{R}} \end{cases}$$

A からは任意の列が生成されることに注意

文脈自由言語の和集合

定理 1

L_1 と L_2 が文脈自由言語なら, $L_1 \cup L_2$ も文脈自由言語

証明

$G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1)$: L_1 を生成する cfg
$G_2 = (V_2, \Sigma, P_2, S_2)$: L_2 を生成する cfg

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$ と仮定してよい (必要なら変数を変更)

$G = (V, \Sigma, P, S)$ は $L_1 \cup L_2$ を生成する cfg

ただし,

- $V = V_1 \cup V_2 \cup \{S\}$ $(S \notin V_1 \cup V_2)$
- $P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\}$

■

定理 1 に関する注意

注意

- L_1, L_2 が正規言語のとき $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$ も正規言語 ($L_1 \cup L_2$ は第 1 回の定理 1, $L_1 \cap L_2$ は第 2 回の定理 1)
- L_1, L_2 が文脈自由言語のとき
  - $L_1 \cup L_2$ も文脈自由言語 (定理 1)
  - $L_1 \cap L_2$ は文脈自由言語になるとは限らない
    $\Longrightarrow$ 具体例を次回に

最左導出

定義 (最左導出)

一番左の変数を常に置き換えるような導出を最左導出と呼ぶ

定理 2

文法 G によって, 終端記号のみからなる列 x が導出されるとき, x は最左導出によっても導出される

あとで導出木を用いて証明

例題 4 (1/2)

例題 4

以下の文法 G_4 が生成する言語は何か (開始記号は S)

$$S \to SS, \quad S \to \varepsilon, \quad S \to aB, \quad S \to bA,$$
$$A \to a, \quad A \to bAA, \quad B \to b, \quad B \to aBB$$

解答 (1/2)

$L(G_4) = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ 中の a, b の個数が等しい $\}$

(1) $x \in L(G_4)$ なら, x 中の a, b の個数が等しいこと

- 開始記号 S に対し, 以下の式の値は 0

  $\{(a$ の個数$)+(A$ の個数$)\}-\{(b$ の個数$)+(B$ の個数$)\}$ (#)

- すべての生成規則の適用前後で (#) の値は不変

$\Longrightarrow$ x 中の a, b の個数は等しい (x 中に A, B はない)

例題 4 (2/2)

解答 (2/2)

(2) x 中の a, b の個数が等しいなら, $x \in L(G_4)$ となること

1. $x = \varepsilon$ なら, x は $S \to \varepsilon$ で生成
2. $x \neq \varepsilon$ なら, x を左から見ていき, a, b の個数が等しくなったら区切りを入れて部分列に分ける
   例: $x = abbaabaababb$ なら $ab|ba|ab|aababb$
3. $S \to SS$ を複数回適用して, 部分列の数だけ S を並べる
4. a で始まる部分列: $S \to aB,\ B \to b,\ B \to aBB$ で最左導出
   ((B の個数) = (a の個数) − (b の個数))
   b で始まる部分列: $S \to bA,\ A \to a,\ A \to bAA$ で最左導出
   ((A の個数) = (b の個数) − (a の個数))

注意

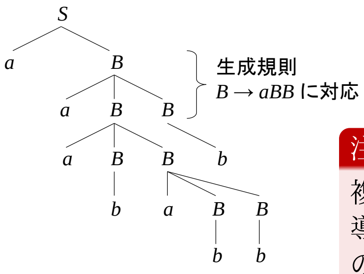
カッコ文は以下で生成される (a が左カッコ, b が右カッコ)

$$S \to SS, \quad S \to \varepsilon, \quad S \to aB, \quad B \to b, \quad B \to aBB$$

導出木

定義 (導出木)

cfg と，ある導出が与えられると決まる木で，
ある変数 (図では S) を根として，葉を左から右に読むと，
導出された列 (図では $aaababbb$) となるもの



注意

複数の生成規則が適用できるとき，
導出木には，どちらを先に適用したか
の情報なし
$\Longrightarrow$ 定理 2 の証明になっている

文脈自由文法と正規言語

文脈自由文法: 正規言語ではない言語を生成可能

例: $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

すべての正規言語は文脈自由言語か?

Yes なら「文脈自由言語が正規言語を真に含むこと」がいえる

正規言語と文脈自由言語の関係 (1/2)

定理 3

L が正規言語なら, L は文脈自由言語

証明

$(\{s_0, \ldots, s_n\}, \Sigma, \delta, s_0, F)$: L を認識する dfa

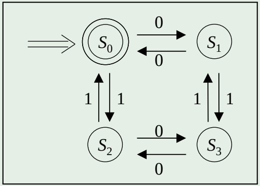
- $V = \{S_0, \ldots, S_n\}$
- $P = \{S_i \to aS_j \mid s_i$ から s_j へ a による遷移がある $\}$
  $\cup \{S_i \to \varepsilon \mid s_i \in F\}$

$\Longrightarrow$ cfg $G = (V, \Sigma, P, S_0)$ は L を生成 ■

正規言語と文脈自由言語の関係 (2/2)

例

cfg $G = (\{S_0, S_1, S_2, S_3\}, \{0, 1\}, P, S_0)$
が生成する言語は，
右図の fa M が認識する言語と一致



ただし，

$$\begin{aligned} P = \{S_0 \to \varepsilon,\ S_0 \to 0S_1,\ & S_0 \to 1S_2, \\ S_1 \to 0S_0,\ & S_1 \to 1S_3, \\ S_2 \to 0S_3,\ & S_2 \to 1S_0, \\ S_3 \to 0S_2,\ & S_3 \to 1S_1\} \end{aligned}$$

G による導出 $S_0 \Rightarrow 0S_1 \Rightarrow 01S_3 \Rightarrow 010S_2 \Rightarrow 0101S_0 \Rightarrow 0101$
$\overset{\text{対応}}{\Longleftrightarrow}$ M が 0101 を読んで s_0 から s_1, s_3, s_2, s_0 と遷移して受理