アルゴリズム論 1

第 9 回: Turing 機械と計算可能な関数 (1)

関川 浩

2016/06/15

第 8 回から第 10 回の目標

計算可能性について, 正確な定義を与え, 基本的な性質を考察

- 第 8 回: 帰納的関数を導入
- 第 9 回: Turing 機械を導入し, 計算可能な関数を定義
帰納的関数は計算可能であることを証明
- 第 10 回: 計算可能な関数は帰納的であることを証明
万能 Turing 機械の紹介
Church の提唱の紹介

1. 基本的な定義
    - Turing 機械の構造, 動作
    - 様相
    - 符号化
    - 計算可能性
    - $S(x)$ を計算する TM
2. Turing 機械の結合
    - 単純な TM
    - TM の結合
    - 基本的 TM
    - 初期関数を計算する TM
3. 帰納的関数の計算可能性
    - 合成関数の計算可能性
    - 原始帰納によって定義される関数の計算可能性
    - μ 作用素によって定義される関数の計算可能性
    - 帰納的関数の計算可能性

1. 基本的な定義
2. Turing 機械の結合
3. 帰納的関数の計算可能性

Turing 機械とは

- A. M. Turing が計算の定式化のために考案した思考上の計算機械
- 能力のもっとも高いオートマトンと考えることができる

Turing の 1936 年の論文

人間の行う計算という知的行為を分析し, 単純な基本動作に帰着させ, アルゴリズムの定式化を行った

- 種々の関数が Turing 機械で計算可能なことを示した
- 計算不可能な関数の例を与えた
- 万能 Turing 機械の概念を導入した
  $\Longrightarrow$ ノイマン型計算機の理論的なモデルとなった

Turing 機械の構造, 動作 (1/2)

- テープ (左右両側に無限に延び, マス目に分割)

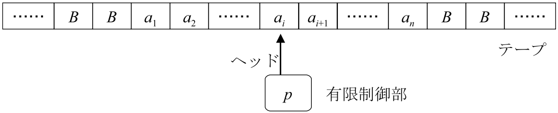
  各マス目: 一個の記号を書き込める
何も書き込まれていないマス目には空白記号 B が
書き込まれているとみなす

- ヘッド

  テープ上の一つのマス目に置かれ, そのマス目の記号の
読み書き, 左右に高々一コマの移動が可能

- 有限制御部

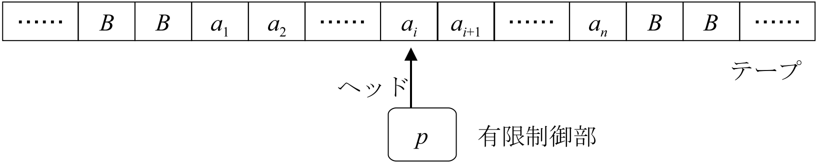
  ヘッドの動作を現在の状態とヘッドが読み取った記号の組に
基づいて決定し, 同時に次状態の決定も行う



Turing 機械の構造, 動作 (2/2)

Turing 機械の基本動作は, p, a, b, m, q の五つで記述可能

- p: 現在の状態
- a: ヘッドが置かれているマス目に書かれている記号
- b: そのマス目に a の代わりに書き込む記号
- m: ヘッドの移動方法 (R, L, N)
- q: 次状態



Turing 機械の定義

定義 1 (Turing 機械 (TM))

TM: $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$

- K, Σ, F: 空ではない有限集合, $F \subset K$
- 状態: K の要素
  記号: Σ の要素
  初期状態: K のある要素 q_0
  受理状態: F の要素
  空白記号: Σ のある要素 B
- $\delta : (K \setminus F) \times \Sigma \to K \times \Sigma \times \{R, L, N\}$: 状態遷移関数 (一般には部分関数)

$Q = \{pabmq \mid \delta(p, a) = (q, b, m)\}$ の要素を TM の五つ組という

注意

以後, TM を (K, Σ, Q, q_0, F) で与える

様相 (1/2)

TM M において,

- $a_1a_2\ldots a_n$ が書かれているマス目以外はすべて空白記号 B,
- ヘッドは a_i の位置,
- 状態が p,

であることを $a_1\ldots a_{i-1}pa_i\ldots a_n$ と書き, M の様相と呼ぶ

定義 2

$M=(K,\Sigma,Q,q_0,F)$: TM

$\alpha=a_1\ldots a_{i-1}pa_i\ldots a_n$, β: M の様相

以下のいずれかが成立するとき, $\alpha\Rightarrow\beta$ と書く

(1) $\beta=a_1\ldots a_{i-1}qa_i'a_{i+1}\ldots a_n$ かつ $pa_ia_i'Nq\in Q$

(2) $\beta=a_1\ldots a_{i-1}a_i'qa_{i+1}\ldots a_n$ かつ $pa_ia_i'Rq\in Q$
($i=n$ のときは $\beta=a_1\ldots a_{i-1}a_i'qB$)

(3) $\beta=a_1\ldots a_{i-2}qa_{i-1}a_i'a_{i+1}\ldots a_n$ かつ $pa_ia_i'Lq\in Q$
($i=1$ のときは $\beta=qBa_1'a_2\ldots a_n$)

様相 (2/2)

定義 3

様相 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ $(r \geq 1)$ に対して, $\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha_r$ であるとき, $\alpha_1 \overset{*}{\Rightarrow} \alpha_r$ と書く

定義 4

様相 α に対して $\alpha \Rightarrow \beta$ となる様相 β が存在しないとき, TM は様相 α で停止しているという

定義 5

様相の列 $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ は, 各 i $(0 \leq i < r)$ に対して $\alpha_i \Rightarrow \alpha_{i+1}$ であり, $\alpha_r = uq_hv$ $(u, v \in \Sigma^*, q_h \in F)$ であるとき, α_0 に始まり α_r で終わる M による計算という

符号化

- TM に数値計算をさせるために, 数や数の組の符号化が必要
- $1 \in \Sigma$ として, 以下の符号化を考える
  - 数 x の符号化
    $$\overline{x} = 11\cdots 1 = 1^{x+1}$$
  - n 個の数の組 $(x_1, \ldots, x_n)$ の符号化
    $$\overline{(x_1, \ldots, x_n)} = \overline{x_1}B\overline{x_2}B\ldots B\overline{x_n}$$

例: $\overline{0} = 1, \quad \overline{2} = 111, \quad \overline{(1,0,2)} = 11B1B111$

計算可能性

定義 6 (計算可能性)

- 関数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ は, 以下の TM $M = (K, \Sigma, Q, q_0, F)$ が存在するとき, **部分的に計算可能**であるという
  - 任意の $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}(f)$ (f の定義域) に対して,
  $$\overline{(x_1, \ldots, x_n)} q_0 B \overset{*}{\Rightarrow} \overline{(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))} q_h B$$
  となる $q_h \in F$ が存在する
  - $(x_1, \ldots, x_n) \notin \mathcal{D}(f)$ であれば, $\overline{(x_1, \ldots, x_n)} q_0 B$ に始まる M による計算は存在しない
- この TM M は関数 f を**部分的に計算する**という
- 関数 f は全域的かつ部分的に計算可能であるとき, 単に**計算可能**であるといい, そのときの TM M は f を**計算する**という

$S(x)$ を計算する TM (1/2)

例: $S(x) = x + 1$ を計算する TM $M = (K, \Sigma, Q, q_0, F)$

$K = \{q_i \mid 0 \leq i \leq 8\}$,

$\Sigma = \{B, 1\}$, $\quad F = \{q_8\}$,

$$
\begin{aligned}
Q = \{&q_0BBLq_1, \\
&q_11BRq_2,\ q_1BBRq_6,\ q_211Rq_2,\ q_2BBRq_3, \\
&q_311Rq_3,\ q_3B1Lq_4,\ q_411Lq_4,\ q_4BBLq_5, \\
&q_511Lq_5,\ q_5B1Lq_1,\ q_611Rq_6,\ q_6BBRq_7, \\
&q_711Rq_7,\ q_7B1Rq_8\}
\end{aligned}
$$

$S(x)$ を計算する TM (2/2)

例: $S(2)$ の計算

$$
\begin{aligned}
\overline{2}q_0B = 111q_0B &\Rightarrow 11q_11B \Rightarrow 11Bq_2B \Rightarrow 11BBq_3B \\
&\Rightarrow 11Bq_4B1 \Rightarrow 11q_5BB1 \Rightarrow 1q_111B1 \\
&\overset{*}{\Rightarrow} q_1111B11 \\
&\overset{*}{\Rightarrow} q_1B111B111 \\
&\Rightarrow Bq_6111B111 \\
&\overset{*}{\Rightarrow} B111q_6B111 \\
&\Rightarrow B111Bq_7111 \\
&\overset{*}{\Rightarrow} B111B111q_7B \\
&\Rightarrow B111B1111q_8B = B\overline{2}B\overline{S(2)}q_8B
\end{aligned}
$$

単純な TM (1/2)

単純な関数を計算する TM でも相当複雑になる

$\Longrightarrow$ いくつかの単純な TM と,
それを結合して得られる基本的 TM を用意し,
それらを組み合わせて所望の TM を表現

以下, $\Sigma = \{B, 1\}$, とくに断らなければ, 初期状態は q_0, $F = \{q_h\}$

- **TM** B: ヘッドが置かれているマス目に B を書き込む

$$Q = \{q_0 1 B N q_h,\ q_0 B B N q_h\}$$

- **TM** 1: ヘッドが置かれているマス目に 1 を書き込む

$$Q = \{q_0 1 1 N q_h,\ q_0 B 1 N q_h\}$$

単純な TM (2/2)

- **TM** r: ヘッドを 1 コマ右へ移す

$$Q = \{q_0 11 R q_h,\ q_0 BBR q_h\}$$

- **TM** l: ヘッドを 1 コマ左へ移す

$$Q = \{q_0 11 L q_h,\ q_0 BBL q_h\}$$

- **TM** $\langle a \rangle$: 読み取った記号が a であるか否かを判定する
  a であれば q_h で停止し, a でなければ q_1 で停止する

$$Q = \{q_0 aaN q_h,\ q_0 bbN q_1\} \qquad (b \neq a)$$

TM の結合 (1/2)

定義 7

$M_i = (K_i, \Sigma, Q_i, q_0^i, F_i)$ ($i = 1,\ 2,\ K_1 \cap K_2 = \emptyset$): TM

M_1 の受理状態 $q \in F_1$ と M_2 の初期状態 $q_0^2 \in K_2$ を同一視して得られる TM $M_1 \xrightarrow{q} M_2$ を

$$(K_1 \cup K_2,\ \Sigma,\ Q,\ q_0^1,\ F_1 \cup F_2 \setminus \{q\}),$$

ただし,

$$Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{qaaNq_0^2 \mid a \in \Sigma\},$$

で定義し, q における M_1 と M_2 の**結合**とよぶ
($qaaNq_0^2$ が q と q_0^2 の同一視に対応)

$F_1 = \{q\}$ のときは, 単に $M_1 M_2$ と表す

TM の結合 (2/2)

M, M_1, M_2: TM

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "q"'] & M_1 \\ & M_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[loop right, "q"] \end{tikzcd}$$

M が $\langle a \rangle$ のときは,

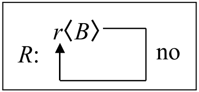
$$\begin{tikzcd} \langle a \rangle \arrow[r, "q_h"] \arrow[dr, "q_1"'] & M_1 \\ & M_2 \end{tikzcd} \quad \text{を} \quad \begin{tikzcd} \langle a \rangle \arrow[r, "\text{yes}"] \arrow[dr, "\text{no}"'] & M_1 \\ & M_2 \end{tikzcd}$$

と表す

基本的 TM (1/6)

- **TM** R: ヘッドの右側にある最初の B を探しそこで止まる.

  TM r と $\langle B\rangle$ を用いて右図のように表される



  r と $\langle B\rangle$ に対する五つ組の集合

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{q_0BBRq_h,\ q_011Rq_h\}, \\ Q_2 &= \{p_0BBNp_h,\ p_011Np_1\} \end{aligned}$$

  を用いて, まず TM $r\langle B\rangle$ に対する五つ組の集合

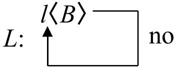
$$Q_3 = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_hBBNp_0,\ q_h11Np_0\}$$

  を求め, これに p_111Nq_0 を追加したものが R の五つ組

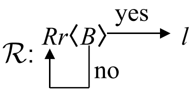
$$R = (\{q_0, q_h, p_0, p_h\}, \{B, 1\}, Q_3 \cup \{p_111Nq_0\}, q_0, \{p_h\}\ )$$

基本的 TM (2/6)

- **TM** L: ヘッドの左側にある最初の B を探しそこで止まる



- **TM** $\mathcal{R}$: ヘッドの右側にある最初の連続した空白 BB を探し, その左側の B の位置で止まる



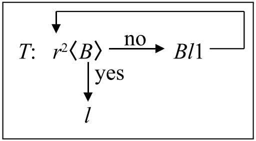
基本的 TM (3/6)

- **TM** T: 1 の連続した (1 個でも可) かたまり W を 1 コマずつ左へ移す

$$Bq_0{\sim}BWB \overset{*}{\Rightarrow} {\sim}Wq_hBB$$

ただし, $\sim$ は任意の記号

状態が問題にならない場合は, ヘッドの位置のみを下線で示す



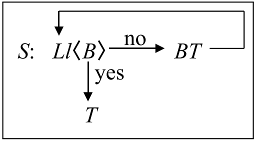
計算例:
$$\begin{aligned}
\underline{\sim}B11B &\overset{*}{\Rightarrow} {\sim}B\underline{1}1B && (r^2\langle B\rangle)\\
&\overset{*}{\Rightarrow} {\sim}\underline{1}B1B && (Bl1)\\
&\overset{*}{\Rightarrow} {\sim}1B\underline{1}B && (r^2\langle B\rangle)\\
&\overset{*}{\Rightarrow} {\sim}1\underline{1}BB && (Bl1)\\
&\overset{*}{\Rightarrow} {\sim}11B\underline{B} && (r^2\langle B\rangle)\\
&\Rightarrow {\sim}11\underline{B}B && (l)
\end{aligned}$$

基本的 TM (4/6)

- **TM** S: 1 のかたまり W_1, W_2 に対して, 以下の処理をする

$$BW_1BW_2\underline{B} \overset{*}{\Rightarrow} BW_2\underline{B}\ldots B$$

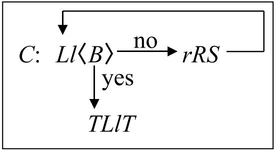
(W_1 の 1 は B に書き換え)



計算例:
$$\begin{aligned}
B11B111\underline{B} &\overset{*}{\Rightarrow} B1\underline{1}B111B && (Ll\langle B\rangle)\\
&\overset{*}{\Rightarrow} B1B111\underline{B}B && (BT)\\
&\overset{*}{\Rightarrow} B\underline{1}B111BB && (Ll\langle B\rangle)\\
&\overset{*}{\Rightarrow} BB111\underline{B}BB && (BT)\\
&\overset{*}{\Rightarrow} \underline{B}B111BBB && (Ll\langle B\rangle)\\
&\overset{*}{\Rightarrow} B111\underline{B}BBB && (\mathrm{T})
\end{aligned}$$

基本的 TM (5/6)

- **TM** C: 1 のかたまり W_1, W_2, $\ldots$, W_n, W に対して, 以下の処理をする

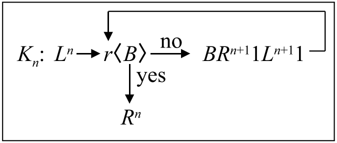


$$\sim BBW_1BW_2B\ldots BW_nBW\underline{B} \overset{*}{\Rightarrow} \sim W\underline{B}B\ldots B$$

計算例:
$$\begin{aligned}
\sim BB11B1B111\underline{B} &\overset{*}{\Rightarrow} \sim BB11B\underline{1}B111B && (Ll\langle B\rangle)\\
&\overset{*}{\Rightarrow} \sim BB11B111\underline{B}BB && (rRS)\\
&\overset{*}{\Rightarrow} \sim BB1\underline{1}B111BBB && (Ll\langle B\rangle)\\
&\overset{*}{\Rightarrow} \sim BB111\underline{B}BBBBB && (rRS)\\
&\overset{*}{\Rightarrow} \sim \underline{B}B111BBBBBB && (Ll\langle B\rangle)\\
&\overset{*}{\Rightarrow} \sim 111\underline{B}BBBBBBB && (TLlT)
\end{aligned}$$

基本的 TM (6/6)

- **TM** K_n: n 個の 1 のかたまり $W_1, W_2, \ldots, W_n$ に対して，以下の処理をする



$$\begin{aligned} &BW_1BW_2B\ldots BW_n\underline{B} \\ &\quad\overset{*}{\Rightarrow} BW_1BW_2B\ldots BW_nBW_1\underline{B} \end{aligned}$$

計算例:
$$\begin{aligned} B11B111\underline{B} &\overset{*}{\Rightarrow} B\underline{1}1B111B && (L^2r\langle B\rangle) \\ &\overset{*}{\Rightarrow} BB1B111B\underline{1} && (BR^31) \\ &\overset{*}{\Rightarrow} B\underline{1}1B111B1 && (L^31) \\ &\overset{*}{\Rightarrow} B1\underline{B}B111B1 && (r\langle B\rangle B) \\ &\overset{*}{\Rightarrow} B1\underline{1}B111B11 && (R^31L^31) \\ &\overset{*}{\Rightarrow} B11\underline{B}111B11 && (r\langle B\rangle) \\ &\overset{*}{\Rightarrow} B11B111B11\underline{B} && (R^2) \end{aligned}$$

初期関数を計算する TM

例 1

初期関数 $Z(x)$, $S(x)$, $U_n^i(x_1,\ldots,x_n)$ を計算する TM は, それぞれ,

$$r1r, \qquad K_1 1r, \qquad K_{n-i+1}$$

と書ける

$r1r$: $\quad \overline{x}\underline{B} \Rightarrow \overline{x}B\underline{B} \Rightarrow \overline{x}B\underline{1} \Rightarrow \overline{x}B1\underline{B} = \overline{x}B\overline{0}\underline{B} = \overline{x}B\overline{Z(x)}\underline{B}$

$K_1 1r$: $\quad \overline{x}\underline{B} \overset{*}{\Rightarrow} \overline{x}B\overline{x}\underline{B} \Rightarrow \overline{x}B\overline{x}\underline{1} \Rightarrow \overline{x}B\overline{x}1\underline{B} = \overline{x}B\overline{x+1}\underline{B} = \overline{x}B\overline{S(x)}\underline{B}$

K_{n-i+1}: $\quad \overline{(x_1,\ldots,x_n)}\underline{B} = \overline{x_1}B\overline{x_2}B\ldots\overline{x_n}\underline{B} \overset{*}{\Rightarrow} \overline{x_1}B\overline{x_2}B\ldots\overline{x_n}B\overline{x_i}\underline{B}$
$\quad = \overline{(x_1,\ldots,x_n)}B\overline{x_i}\underline{B} = \overline{(x_1,\ldots,x_n)}B\overline{U_n^i(x_1,\ldots,x_n)}\underline{B}$

1. 基本的な定義
2. Turing 機械の結合
3. 帰納的関数の計算可能性

帰納的関数の計算可能性の証明手順

帰納的という概念と計算可能という概念は同等

第一段階: 帰納的関数は計算可能であることを以下の手順で示す

1. 初期関数は計算可能 (補題 1)
2. 計算可能である関数の合成は計算可能 (補題 2)
3. 計算可能である関数から原始帰納によって定義される関数は計算可能 (補題 3)
4. 計算可能かつ正則な関数から μ 作用素によって定義される関数は計算可能 (補題 4)

初期関数の計算可能性

補題 1

初期関数は計算可能

証明

例 1 より, $Z(x)$, $S(x)$, $U_n^i(x_1, \ldots, x_n)$ を計算する TM は, それぞれ, $r1r$, $K_1 1r$, K_{n-i+1} ■

合成関数の計算可能性 (1/3)

補題 2

関数 $g(y_1, \ldots, y_r)$, $h_1(x_1, \ldots, x_n)$, ..., $h_r(x_1, \ldots, x_n)$ が計算可能であれば, 合成関数

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_r(x_1, \ldots, x_n))$$

も計算可能

証明 (1/2)

関数 g, h_1, ..., h_r を計算する TM をそれぞれ G, H_1, ..., H_r とすると, 関数 f を計算する TM は以下の通り

$$r1rK^n_{n+1}L^nlB\mathcal{R}H_1K^n_{n+1}H_2\ldots K^n_{n+1}H_rK_{r+(r-1)n}K_{r+(r-2)n}\ldots K_rGC$$

合成関数の計算可能性 (2/3)

証明 (2/2)

実際, $(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{x}$ とすると,

$$
\begin{aligned}
B\overline{\mathbf{x}}\underline{B} &\overset{*}{\Rightarrow} B\overline{\mathbf{x}}B1\underline{B} && (r1r) \\
&\overset{*}{\Rightarrow} B\overline{\mathbf{x}}B1B\overline{\mathbf{x}}\underline{B} && (K^n_{n+1}) \\
&\overset{*}{\Rightarrow} B\overline{\mathbf{x}}B1\underline{B}\overline{\mathbf{x}}B && (L^n) \\
&\overset{*}{\Rightarrow} B\overline{\mathbf{x}}B\underline{B}B\overline{\mathbf{x}}B && (lB) \\
&\overset{*}{\Rightarrow} B\overline{\mathbf{x}}BBB\overline{\mathbf{x}}\underline{B} && (\mathcal{R}) \\
&\overset{*}{\Rightarrow} B\overline{\mathbf{x}}BBB\overline{\mathbf{x}}B\overline{h_1}\underline{B} && (H_1) \\
&\overset{*}{\Rightarrow} B\overline{\mathbf{x}}BBB\overline{\mathbf{x}}B\overline{h_1}B\overline{\mathbf{x}}\underline{B} && (K^n_{n+1}) \\
&\overset{*}{\Rightarrow} B\overline{\mathbf{x}}BBB\overline{\mathbf{x}}B\overline{h_1}B\overline{\mathbf{x}}B\overline{h_2}\ldots B\overline{\mathbf{x}}B\overline{h_r}\underline{B} && (H_2K^n_{n+1}H_3\ldots K^n_{n+1}H_r) \\
&\overset{*}{\Rightarrow} B\overline{\mathbf{x}}BBB\overline{\mathbf{x}}B\overline{h_1}B\overline{\mathbf{x}}\ldots B\overline{h_r}B\overline{h_1}B\overline{h_2}\ldots B\overline{h_r}\underline{B} && (K_{r+(r-1)n}\ldots K_r) \\
&\overset{*}{\Rightarrow} B\overline{\mathbf{x}}BBB\overline{\mathbf{x}}B\overline{h_1}B\overline{\mathbf{x}}\ldots B\overline{h_r}B\overline{h_1}B\overline{h_2}\ldots B\overline{h_r}B\overline{f}\underline{B} && (G) \\
&\overset{*}{\Rightarrow} B\overline{\mathbf{x}}B\overline{f}\underline{B} && (C)
\end{aligned}
$$

■

合成関数の計算可能性 (3/3)

系 1

補題 2 において g, h_1, ..., h_r が部分的に計算可能であれば,
f も部分的に計算可能

証明

ある $(x_1, \ldots, x_n)$ に対して $(x_1, \ldots, x_n) \notin \mathcal{D}(h_i)$ であれば,
任意の数 y および H_i の受理状態 q_h に対して,

$$B\overline{(x_1, \ldots, x_n)}q_0B \overset{*}{\Rightarrow} B\overline{(x_1, \ldots, x_n)}B\overline{y}q_hB$$

となる計算は存在しない

$(y_1, \ldots, y_r) \notin \mathcal{D}(g)$ であれば, 任意の数 z および G の受理状態 p_h に対して,

$$B\overline{y_1}B \ldots B\overline{y_r}p_0B \overset{*}{\Rightarrow} B\overline{y_1}B \ldots B\overline{y_r}B\overline{z}p_hB$$

となる計算は存在しない ■

原始帰納によって定義される関数の計算可能性 (1/4)

補題 3

関数 $g(x_1, \ldots, x_n)$, $h(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ が計算可能であれば,
原始帰納

$$f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n),$$
$$f(x_1, \ldots, x_n, y') = h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y))$$

によって定義される関数 f も計算可能

系 2

補題 3 において g, h が部分的に計算可能であれば, f も部分的に計算可能

証明

系 1 と同様 ■

原始帰納によって定義される関数の計算可能性 (2/4)

補題 3 の証明 (1/3)

関数 g, h を計算する TM をそれぞれ G, H とする

f は以下の TM で計算可能

$$
\begin{tikzcd}
 & r1rK_2K^n_{n+3}L^{n+1}lB\mathcal{R}GK_{n+2}lBl\langle B\rangle \arrow[r, "\text{yes}"] \arrow[dl, "\text{no}"'] & C & \\
rK^n_{n+2}r \arrow[r] & 1rK_{n+3}HK_{n+4}lBl\langle B\rangle \arrow[ur, "\text{yes}"] \arrow[rr, "\text{no}"'] & & rK^{n+1}_{n+4} \arrow[ll, bend left]
\end{tikzcd}
$$

原始帰納によって定義される関数の計算可能性 (3/4)

補題 3 の証明 (2/3)

実際, $(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{x}$, $f(\mathbf{x}, y) = f_y$ とすると, f_y は以下のように計算される

- $y = 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
B\overline{\mathbf{x}}B\overline{0}\underline{B} &\overset{*}{\Rightarrow} B\overline{\mathbf{x}}B1BBB1B\overline{\mathbf{x}}\underline{B} && (r1rK_2K^n_{n+3}L^{n+1}lB\mathcal{R}) \\
&\overset{*}{\Rightarrow} B\overline{\mathbf{x}}B1BBB1B\overline{\mathbf{x}}B\overline{f_0}\underline{B} && (GK_{n+2}lBl\langle B\rangle) \\
&\overset{*}{\Rightarrow} B\overline{\mathbf{x}}B1B\overline{f_0}\underline{B} && (C)
\end{aligned}
$$

原始帰納によって定義される関数の計算可能性 (4/4)

補題 3 の証明 (3/3)

- $y > 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
& B\overline{\mathbf{x}}B\overline{y}\underline{B} \\
& \quad \overset{*}{\Rightarrow} B\overline{\mathbf{x}}B\overline{y}BBB\overline{y}B\overline{\mathbf{x}}B\overline{f_0}B\overline{y-1}B\overline{\mathbf{x}}B\overline{0}B\overline{f_0}\underline{B} \\
& \qquad (r1rK_2K_{n+3}^{n}L^{n+1}lB\mathcal{R}GK_{n+2}lBl\langle B\rangle rK_{n+2}^{n}r1rK_{n+3}) \\
& \quad \overset{*}{\Rightarrow} B\overline{\mathbf{x}}B\overline{y}BBB\overline{y}B\overline{\mathbf{x}}B\overline{f_0}B\overline{y-1}B\overline{\mathbf{x}}B\overline{0}B\overline{f_0}B\overline{f_1}\underline{B} \qquad (H) \\
& \quad \overset{*}{\Rightarrow} B\overline{\mathbf{x}}B\overline{y}BBB\overline{y}B\overline{\mathbf{x}}B\overline{f_0}B\overline{y-1}B\overline{\mathbf{x}}B\overline{0}B\overline{f_0}B\overline{f_1}B\overline{y-2}B\overline{\mathbf{x}} \\
& \qquad B\overline{1}B\overline{f_1}B\overline{f_2}B\ldots B\overline{y-y}B\overline{\mathbf{x}}B\overline{y-1}B\overline{f_{y-1}}B\overline{f_y}\underline{B} \\
& \qquad (K_{n+4}lBl\langle B\rangle rK_{n+4}^{n+1}1rK_{n+3}H\ldots K_{n+4}lBl\langle B\rangle rK_{n+4}^{n+1}1rK_{n+3}H) \\
& \quad \overset{*}{\Rightarrow} B\overline{\mathbf{x}}B\overline{y}B\overline{f_y}\underline{B} \qquad (K_{n+4}lBl\langle B\rangle C)
\end{aligned}
$$

■

μ 作用素によって定義される関数の計算可能性 (1/4)

補題 4

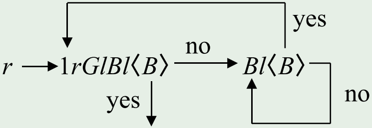
関数 $g(x_1, \ldots, x_n, y)$ が計算可能かつ正則であれば, μ 作用素によって定義される関数

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$$

も計算可能

証明 (1/3)

g を計算する TM を G とすれば, 関数 f は以下の TM によって計算可能

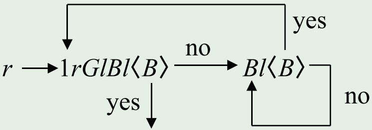


μ 作用素によって定義される関数の計算可能性 (2/4)

証明 (2/3)

$(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{x}$ とする

- $B\overline{\mathbf{x}}\underline{B} \overset{*}{\Rightarrow} B\overline{\mathbf{x}}B1B\overline{g(\mathbf{x},0)}\underline{B} \qquad (r1rG)$
- $lBl\langle B\rangle$ が yes $\Longleftrightarrow g(\mathbf{x},0) = 0$
  (このとき, 計算結果は $B\overline{\mathbf{x}}B1\underline{B} = B\overline{\mathbf{x}}B\overline{0}\underline{B}$)
- $Bl\langle B\rangle$ のループ: $\overline{g(\mathbf{x},0)}$ を消去 (1 を B に書き換え)
  ループを抜けると, $B\overline{\mathbf{x}}B1\underline{B}$
- $B\overline{\mathbf{x}}B1\underline{B} \overset{*}{\Rightarrow} B\overline{\mathbf{x}}B11B\overline{g(\mathbf{x},1)}\underline{B} \qquad (1rG)$



μ 作用素によって定義される関数の計算可能性 (3/4)

証明 (3/3)

(1) 与えられた $\mathbf{x}$ に対して, $y = 0, 1, 2, \ldots$ の順に G を用いて $g(\mathbf{x}, y)$ を計算

その値が 0 であれば停止し, 0 でなければその値を消去

(2) g は計算可能かつ正則

$\Longrightarrow$ 任意の $\mathbf{x}$ に対して (1) の過程は必ず終了し, $g(\mathbf{x}, y) = 0$ となる y が検出される

(3) 検出された y は $g(\mathbf{x}, y) = 0$ となる最小の y ■

μ 作用素によって定義される関数の計算可能性 (4/4)

系 3

補題 4 において, g が (部分的に) 計算可能であれば,
f は部分的に計算可能

証明

g が正則でないならば, ある $\mathbf{x}$ に対しては $g(\mathbf{x}, y) = 0$ となる y は存在しない

$\Longrightarrow$ 補題 4 の証明中の TM は, $y = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ に対して
前スライド (1) の過程を永久に繰り返して停止しない

g が全域的でないならば, $\mathbf{x} \notin \mathcal{D}(g)$ に対しては G による計算が停止しない ■

帰納的関数の計算可能性

定理 1

帰納的関数は計算可能

証明

補題 1, 2, 3, 4 による ■

系 4

部分帰納的関数は部分的に計算可能

証明

補題 1, 系 1, 2, 3 による ■