アルゴリズム論 1

第 7 回: プッシュダウンオートマトン (2)

関川 浩

2016/06/01

第 4 回から第 7 回の目標

第 4 回から第 7 回の目標

正規表現と fa: よくできたシステムだが能力が低い

より能力が高いシステムを導入する

- 文脈自由文法 (第 4, 5 回)
- プッシュダウンオートマトン (第 6, 7 回)

第 7 回の目標:

- プッシュダウンオートマトンの設計 (前回からの続き)
- 文脈自由文法とプッシュダウンオートマトンの等価性

1. プッシュダウンオートマトンの設計 (前回からの続き)
   - 例題 3
   - pda による fa の模倣
   - 例題 4
2. 文脈自由文法とプッシュダウンオートマトンの等価性
   - cfg と pda の等価性の証明の方針
   - 例題 5
   - 状態数 1 の pda
   - cfg と pda の等価性

1. プッシュダウンオートマトンの設計 (前回からの続き)
2. 文脈自由文法とプッシュダウンオートマトンの等価性

例題 3 (1/6)

例題 3

$\{0^m 1^n \mid m, n \geq 1 \ (m \neq n)\}$ を認識する pda を構成せよ

解答 (1/5)

以下で言及しないパターンの場合は停止して非受理

たとえば:

- 入力記号列が ε の場合
- $m > n$ とゲスした場合の記号ゲスモードで 1 を読んだ場合
- $m < n$ とゲスした場合のポップモードで 0 を読んだ場合
- $\ldots$

例題 3 (2/6)

解答 (2/5)

最初に $m > n$ であるか $m < n$ であるかをゲス
($m = n$ の場合は非受理となるように設計)

(1) $m > n$ (0 の方が多い) とゲスした場合
スタックに触らず入力ヘッドを動かして (これで $m = n$ を排除) 記号ゲスモードに入る

- 記号ゲスモード
  現在読んでいる 0 が右端の 0 から n 番目か否かをゲス

  yes: スタックの Z_0 を 0 に書き換え 0 チェックモードへ移行
  no: 記号ゲスモードを続行

$$\boxed{0 \ldots\ldots 0\ \overbrace{0 \ldots\ldots 0}^{n\text{ 個}}\ \overbrace{1 \ldots\ldots 1}^{n\text{ 個}}}$$

右端の 0 から n 番目とゲス

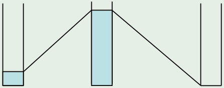
例題 3 (3/6)

解答 (3/5)

- 0 チェックモード
  0 を読めばそれをスタックにプッシュし現モードを続行
  1 を読めばポップして 1 チェックモードへ移行
- 1 チェックモード
  1 を読めばポップして現モードを続行

$$\boxed{0 \ldots\ldots 0\ \overbrace{0 \ldots\ldots 0}^{n\,\text{個}}\ \overbrace{1 \ldots\ldots 1}^{n\,\text{個}}}$$

スタック動作後ヘッド移動前
のスタックの状態



例題 3 (4/6)

解答 (4/5)

(2) $m < n$ (1 の方が多い) とゲスした場合
スタックの Z_0 を 0 に書き換え入力ヘッドを動かして
積み上げモードへ

- **積み上げモード**
  0 を読めばそれをスタックに積み上げ, 現モード続行

  1 を読めばスタックに触らず入力ヘッドを動かして
  (これで $m = n$ を排除) 記号ゲスモードへ

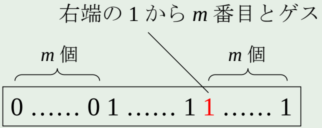
例題 3 (5/6)

解答 (5/5)

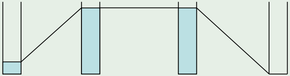
- 記号ゲスモード
  読んでいる 1 が右端の 1 から m 番目か否かをゲス

yes: その 1 からポップモードに入って，
1 を読むたびにスタックの記号をポップする

no: 記号ゲスモードを続行



スタック動作後ヘッド移動前
のスタックの状態



例題 3 (6/6)

注意

もし,

$\{0^m 1^n \mid m, n \geq 0 \ (m \neq n)\}$ を認識する pda を構成せよ

とすると,

- 0^m ($n = 0$ の場合)
- 1^n ($m = 0$ の場合)

も受理しなければいけないので, 複雑になる

pda による fa の模倣

pda: fa に補助記憶装置を追加したもの $\Longrightarrow$ fa を模倣できる

- 受理条件に注意
  入力を読み終わったときにちょうどスタックが空
  しかし, 今読んでいる記号がテープの右端か否かは不明
- 解決策: ゲスを利用

  M: 与えられた dfa
  T: M を模倣する pda

  T はスタックには触らず, M の状態遷移を模倣しながら,
  現在の記号がテープの右端か否かをゲス

  yes: その記号を読んだ行先が M の受理状態なら Z_0 をポップ
  no: 模倣を続行

注: pda が決定性なら fa を模倣できない (ゲスが使えない)
$\Longrightarrow$ pda は決定性と非決定性で言語を認識する能力が異なる

例題 4 (1/7)

例題 4

$L = \{x \mid x \in \{a,b\}\{a,b\}^*$ かつ $x = yy$ と書けない $\}$ を認識する pda M を構成せよ

注: $\{a,b\}^* \setminus L = \{zz \mid z \in \{a,b\}^*\}$ は文脈自由言語ではない
(第 5 回の例題 3)

解答 (1/5)

$x \in L \iff x$ は以下のいずれかの条件を満たす

(i) $|x|$ は奇数

(ii) $|x|$ は偶数で, $x = a_1 \ldots a_n a_{n+1} \ldots a_{2n}$ としたとき
ある i に対して $a_i \neq a_{n+i}$

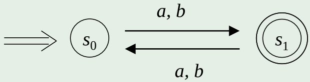
(ii) の異なる記号を d_1, d_2 とする

例題 4 (2/7)

解答 (2/5)

M は最初に条件 (i), (ii) のどちらが満たされるかゲスする

(1) 条件 (i) を満たすとゲスした場合
奇数チェックモードに入る
$|x|$ が奇数か否かは fa でチェック可能なので, それを模倣



例題 4 (3/7)

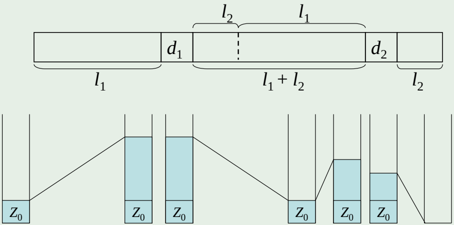
解答 (3/5)

(2) 条件 (ii) を満たすとゲスした場合 (1/3)

- d_1 ゲスモード
  M は現在の記号が d_1 かどうかをゲス

  no: 1 個の記号をプッシュしてこのモードを続行

  yes: その記号が a か b かを有限状態を利用して記憶し, スタックには触らず d_2 ゲスモードへ



スタック動作後
ヘッド移動前の
スタックの状態

例題 4 (4/7)

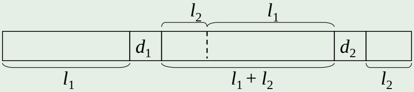
解答 (4/5)

(2) 条件 (ii) を満たすとゲスした場合 (2/3)

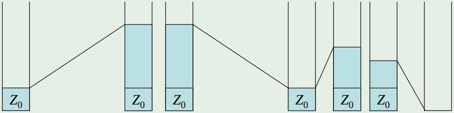
- d_2 ゲスモード
  記号を一つずつポップしながら入力記号を読み飛ばす
  Z_0 が現れたら, d_1 のときと同様に d_2 をゲス

  no: 1 個の記号をプッシュしてこのモードを続行

  yes: 記憶している d_1 の値と違っていればスタックの記号を一つポップして排出モードへ
  同じなら停止して非受理



スタック動作後
ヘッド移動前の
スタックの状態



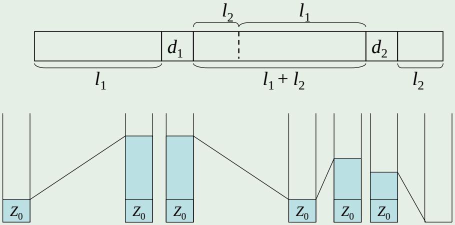
例題 4 (5/7)

解答 (5/5)

(2) 条件 (ii) を満たすとゲスした場合 (3/3)

- 排出モード
  記号を一つ読むごとにスタックの記号を一つポップ

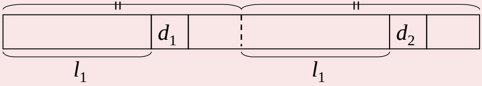
スタック動作後
ヘッド移動前の
スタックの状態



例題 4 (6/7)

注意 (1/2)

(ii) の場合に, d_1 をゲスしたあと, 中央右隣をゲスする方法 (「自然」な方法) ではうまくいかない



- 両方のゲスが当たったときは問題ない
- 中央右隣のゲスがはずれた場合, たとえば,

$$abaaaabaaa$$

で左から 2 番目 (b) を d_1 とゲス 5 番目 (a) を中央右隣とゲスした場合, 受理してしまう (6 番目 (a) が d_2)

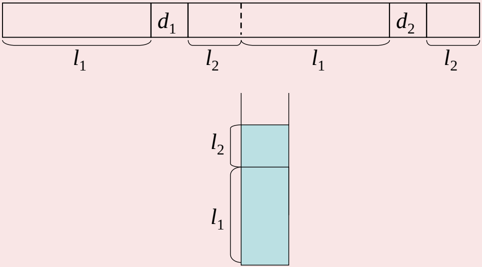
例題 4 (7/7)

注意 (2/2)

中央右隣のゲスがはずれたことが確認できれば問題ない

$\Longrightarrow$ 中央左隣までの記号数をスタックに蓄える必要がある

$\Longrightarrow$ l_1 の情報が取り出せなくなってしまう



1. プッシュダウンオートマトンの設計 (前回からの続き)
2. 文脈自由文法とプッシュダウンオートマトンの等価性

cfg と pda の等価性の証明の方針

- pda の重要性: cfg との等価性
  受理条件や非決定性も cfg に合わせるため
- cfg と pda の等価性の証明
  1. pda の有限状態は一つで十分であることを示す
     アイディア: スタック記号に有限状態の情報を載せる
  2. 1 状態の pda は cfg とほとんど同じ

例題 5 (1/3)

例題 5

$\{xx^{\mathrm{R}} \mid x \in \{a,b\}\{a,b\}^*\}$ を認識する 1 状態の pda を構成せよ

解答 (1/2)

前回は, 二個の状態 s_0 と s_1 を使用して, 積み上げモードとチェックモードを区別
今回は, スタックの先頭記号で区別

- 積み上げモード: A', B' (先頭より下は A, B)
- チェックモード: A, B

例題 5 (2/3)

解答 (2/2)

- 状態遷移関数:

$$
\begin{aligned}
&\delta(s_0, a, Z_0) = \{(s_0, A')\}, && \delta(s_0, b, Z_0) = \{(s_0, B')\},\\
&\delta(s_0, a, A') = \{(s_0, A'A), (s_0, \varepsilon)\}, && \delta(s_0, b, A') = \{(s_0, B'A)\},\\
&\delta(s_0, a, B') = \{(s_0, A'B)\}, && \delta(s_0, b, B') = \{(s_0, B'B), (s_0, \varepsilon)\},\\
&\delta(s_0, a, A) = \{(s_0, \varepsilon)\}, && \delta(s_0, b, B) = \{(s_0, \varepsilon)\}
\end{aligned}
$$

上記に現れないものは $\emptyset$

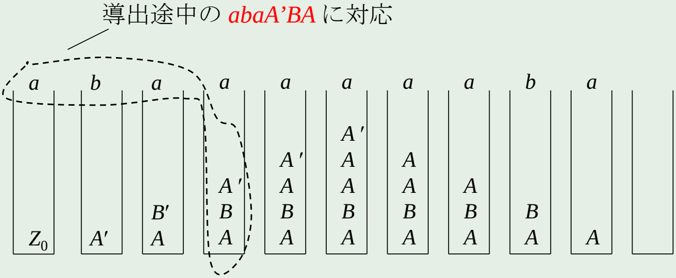
- 1 状態になると, cfg とほとんど同じ
対応: $(s_0, \alpha) \in \delta(s_0, c, D) \iff D \to c\alpha$

$$
\begin{aligned}
&Z_0 \to aA', && Z_0 \to bB',\\
&A' \to aA'A,\ A' \to a, && A' \to bB'A,\\
&B' \to aA'B, && B' \to bB'B,\ B' \to b,\\
&A \to a, && B \to b
\end{aligned}
$$

例題 5 (3/3)

導出例:

$$
\begin{aligned}
&Z_0 \Rightarrow aA' \Rightarrow abB'A \Rightarrow abaA'BA \Rightarrow abaaA'ABA \\
&\Rightarrow abaaaA'AABA \Rightarrow abaaaaAABA \Rightarrow abaaaaaABA \\
&\Rightarrow abaaaaaaBA \Rightarrow abaaaaaabA \Rightarrow abaaaaaaba
\end{aligned}
$$



定理 1 (1/3)

定理 1

与えられた pda に対して, 同じ言語を認識する状態数 1 の pda が構成できる

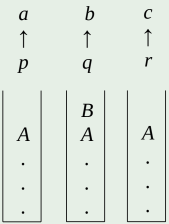
証明のアイディア (1/3)

スタック記号に情報を載せるアイディアのみ示す

M: 与えられた pda

M が入力記号 a, b, c を,

- 状態を p, q, r と推移しながら読み,
- その間にスタックに B をプッシュし直後にポップしたとする



定理 1 (2/3)

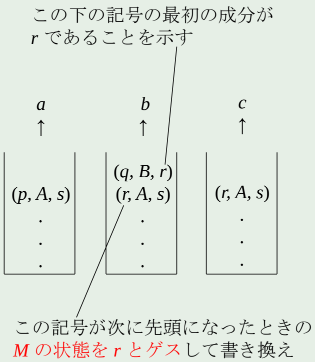
証明のアイディア (2/3)

M_s: M を模倣する 1 状態の pda

- スタック記号は (s_1, C, s_2)

  s_1, s_2: M の状態
  C: M のスタック記号

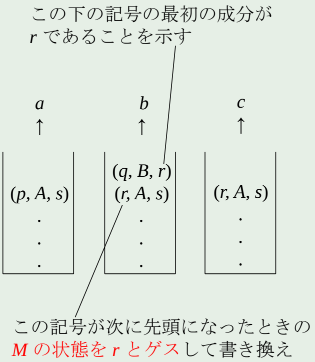
- M の状態が q で B をプッシュするときに, M_s では (q, B, r) をプッシュ
  同時に, それまでの先頭記号の第 1 成分を書き換え
  (この記号が次に先頭になったときの M の状態をゲス)



定理 1 (3/3)

証明のアイディア (3/3)

- 第 3 成分は，ゲスが正しかったか否かの判定に必要
  - 第 1, 2 成分と入力記号から次の状態を求めて第 3 成分と比較する
  - 第 3 成分がないと，ゲスの確認にポップが必要
    ポップすると，正解が不明に ■



cfg と pda の等価性 (1/2)

定理 2

cfg と pda は等価

証明 (1/2)

- pda M から cfg G を構成

  M を 1 状態の pda $M_1 = (\{s\}, \Sigma, \Gamma, \delta, s, Z_0)$ に直す
  $G = (\Gamma, \Sigma, P, Z_0)$, ただし,

$$P = \{A \to a\alpha \mid (s, \alpha) \in \delta(s, a, A)\}$$

  とすると, $x \in \Sigma^*$ に対して,

$$M \text{ が } x \text{ を受理} \iff M_1 \text{ が } x \text{ を受理} \iff x \in L(G)$$

cfg と pda の等価性 (2/2)

証明 (2/2)

- cfg G から pda M を構成

  G を Greibach 標準形 $G_1 = (V, \Sigma, P, S)$ に直す
  $M = (\{s\}, \Sigma, V, \delta, s, S)$, ただし,

$$(s, \alpha) \in \delta(s, a, A) \iff (A \to a\alpha) \in P$$

  とすると, $x \in \Sigma^*$ に対して,

$$x \in L(G) \iff M \text{ が } x \text{ を受理}$$

■

注意

注意

L_1, L_2 が Σ 上の正規言語のとき, 以下も正規言語

- $L_1 \cup L_2$ (第 1 回の定理 1)
- $L_1 \cap L_2$ (第 2 回の定理 1)
- $\Sigma^* \setminus L_1$ (第 2 回の定理 3)

L_1, L_2 が Σ 上の文脈自由言語のとき,

- $L_1 \cup L_2$ は文脈自由言語 (第 4 回の定理 1)

しかし, 以下は文脈自由言語とは限らない

- $L_1 \cap L_2$ (第 5 回 p. 33 の例)
- $\Sigma^* \setminus L_1$ (第 5 回の例題 3, 今回の例題 4, 定理 2)