様々な情報量

エントロピー

得た情報の量 = 減った不確かさの量

定義

アルファベットx上に値をとる離散確率変数Xに対して

$$H(X) = -\sum \_x \in \chi p\_X(\chi) \log p\_X(x)$$

ただし

$$p\_X(x) = P(X = x)$$

logの底は2

例

$$P(X = 0) = 1/4 P(X = 1) = 1/2 P(X = 2) = 1/4 H(X) = -\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

エントロピーの性質

- 非負性

$$H(X) \geq 0 \because \; -p\log p \geq 0 (0 \leq p \leq 1)$$

さらに

$$H(X) = 0 \Leftrightarrow \; -p\_X(x)\log p\_X(x) = 0 \Leftrightarrow \text{すべての} x \in \chi \text{に対して} p\_X(x) = 0 \text{または} p\_X(x) = 1 \Leftrightarrow \text{ある} x \in \chi \text{に対して} p\_X(x) = 1$$

例

X が x 上の一様分布に従うとき

$$H(X) = -\sum \_x \in \chi \frac{1}{|x|}\log\frac{1}{|x} = |x| \times \frac{1}{x}\log|x| = log|x|$$

例

$$|x| = 2 \text{のとき、例えば} x = 0, 1 \text{のとき} p\_X(x) = \begin{cases} t & x = 0 \\ 1 - t & x = 1 \end{cases} (0 \leq t \leq 1) \text{のとき} H(X) = -t\log t - (1 - t)\log(1 - t) = h(t) \text{とおく} (2\text{値エントロピー関数})$$

注

$$H(X) = \sum \_x \in \chi p\_X(x)(-\log p\_X(x)) \qquad = E[-\log p\_X(X)]$$