# アルゴリズム論 1
## 第 5 回: 文脈自由文法 (2)

関川 浩

2016/05/18

## 第 4 回から第 7 回の目標

# 第 4 回から第 7 回の目標

fa と正規表現: よくできたシステムだが能力が低い

より能力が高いシステムを導入する

- 文脈自由文法 (第 4, 5 回)
- プッシュダウンオートマトン (第 6, 7 回)

第 5 回の目標:

- 文脈自由文法の標準形の導入
- 文脈自由文法では生成できない言語の例

1. 文脈自由文法の標準形
   - Chomsky 標準形, Greibach 標準形
   - 単一規則の排除
   - Chomsky 標準形の存在
   - $A$ 生成規則
   - Greibach 標準形の存在
2. 文脈自由文法では生成できない言語
   - uvwxy 定理
   - 例題

1. 文脈自由文法の標準形
2. 文脈自由文法では生成できない言語

# 文脈自由文法の標準形

$G = (V, \Sigma, P, S)$: cfg
仮定: $\varepsilon \notin L(G)$ (一般性を大きく失う制限ではない)

**定義 (Chomsky 標準形)**

$G$ の生成規則が以下の形のみのとき, Chomsky 標準形という

$$A \to BC \ (B, C \in V), \qquad A \to a \ (a \in \Sigma)$$

**定義 (Greibach 標準形)**

$G$ の生成規則が以下の形のみのとき, Greibach 標準形という

$$A \to a\alpha \quad (a \in \Sigma,\ \alpha \in V^*)$$

**注意**

Greibach 標準形が長さ $n$ の列を導出 $\Rightarrow$ 規則の適用回数は $n$ 回

# Greibach 標準形の応用

cfg $P_1$ (Chomsky 標準形) と $P_2$ (Greibach 標準形) (開始記号 $S$)

$$P_1 = \{S \to AX,\ S \to CC,\ X \to SB,\ A \to 0,\ B \to 1,\ C \to 2\}$$
$$P_2 = \{S \to 0SB,\ S \to 2A,\ A \to 2,\ B \to 1\}$$

$\Longrightarrow$ 同じ言語 $L$ を生成

**問題**

$x = 00221 \in L$ か?

**解答**

$P_2$ を使えば簡単
$x \in L$ と仮定すると, $x$ の最左導出は以下しかあり得ない

$$S \Rightarrow 0SB \Rightarrow 00SBB \Rightarrow 002ABB \Rightarrow 0022BB \Rightarrow 00221B$$

$B$ が残るので $x$ は導出できない

# 単一規則の排除 (1/3)

## 定義 (単一規則)

単一規則: $A \to B$ ($A$, $B$ は変数) の形をした生成規則

## 補題 1

cfg $G$ に対し, $L(G') = L(G)$ かつ単一規則がない cfg $G'$ が存在

## 証明 (1/3)

$G = (V, \Sigma, P, S)$ とする. 以下の $P'$ は単一規則を含まない

$$\begin{aligned} P' = \{p \mid p \in P \text{ は単一ではない生成規則}\} \\ \cup \{A \to \alpha \mid G \text{ により } A \overset{*}{\Rightarrow} B \ (A,\ B \in V) \text{ かつ} \\ B \to \alpha \text{ は } P \text{ の単一ではない生成規則}\} \end{aligned}$$

$G' = (V, \Sigma, P', S)$ に対し, $L(G') = L(G)$ を示せばよい

注意 「$G$ により $A \overset{*}{\Rightarrow} B$」を調べる方法は, あとの例題 1 で説明

# 単一規則の排除 (2/3)

## 証明 (2/3)

(1) $L(G) \subseteq L(G')$

$x \in L(G)$ に対し, $G$ による最左導出を考える

$$S = \alpha_0 \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha_n = x$$

- $G$ の単一ではない生成規則により $\alpha_i \Rightarrow \alpha_{i+1}$ なら,
  $G'$ でも $\alpha_i \Rightarrow \alpha_{i+1}$
- 単一規則の適用後, 必ず単一ではない生成規則の適用あり
  (単一規則の右辺は変数なので)
  - (a) $\alpha_i \Rightarrow \alpha_{i+1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha_j$ はすべて $G$ の単一規則
  - (b) $\alpha_j \Rightarrow \alpha_{j+1}$ は $G$ の単一ではない生成規則

  (a) において置き換えられる変数はすべて同じ位置
  $\Longrightarrow$ $P'$ のある一つの生成規則によって $\alpha_i \Rightarrow \alpha_{j+1}$
  $\Longrightarrow$ $G'$ でも $S \overset{*}{\Rightarrow} x$ となり $L(G) \subseteq L(G')$

# 単一規則の排除 (3/3)

**証明 (3/3)**

(2) $L(G') \subseteq L(G)$
$A \to \alpha$ が $P'$ に属すなら, $G$ により $A \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$
よって, $G'$ により $S \overset{*}{\Rightarrow} x \in \Sigma^*$ なら, $G$ によっても $S \overset{*}{\Rightarrow} x$
よって, $L(G') \subseteq L(G)$ ■

# Chomsky 標準形の存在 (1/2)

**定理 1**

$L$ が文脈自由言語なら, Chomsky 標準形である cfg で $L$ を生成するものが存在

**証明 (1/2)**

$G = (V, \Sigma, P, S)$: $L = L(G)$ となる cfg, $P$ は単一規則を含まない
$A \to \alpha \in P$ に対し, $|\alpha| = 1$ なら $\alpha \in \Sigma$

よって, $|\alpha| \geq 2$ となる生成規則を考える
$G_1 = (V \cup \{X_t \mid t \in \Sigma\}, \Sigma, P_1, S)$, ただし $P_1$ は以下の通り

- $P$ に $X_t \to t$ $(t \in \Sigma)$ を追加
- $P$ の $A \to \alpha$ $(|\alpha| \geq 2)$ は, $\alpha$ 中の終端記号を, 対応する変数 $X_t$ で置き換え

例: 生成規則 $A \to aABb$ は $A \to X_a A B X_b$ に置き換え

# Chomsky 標準形の存在 (2/2)

## 証明 (2/2)

$P_1$ に属する生成規則は以下のいずれか

(a) 右辺が終端記号
(b) 右辺は変数のみからなり，長さが 2
(c) 右辺は変数のみからなり，長さが 3 以上

$A \to B_1 \dots B_n$ ($n \geq 3$) に対し，新しい変数 $Y_1, \dots, Y_{n-2}$ を導入

以下の置き換えをすれば Chomsky 標準形になる

$$A \to B_1 Y_1,$$
$$Y_1 \to B_2 Y_2, \quad Y_2 \to B_3 Y_3, \quad \dots, \quad Y_{n-3} \to B_{n-2} Y_{n-2},$$
$$Y_{n-2} \to B_{n-1} B_n$$

■

# 例題 1 (1/4)

## 例題 1

以下の生成規則で与えられる cfg $G$ を Chomsky 標準形に直せ (開始記号は $A$)

$$A \to B, \quad A \to C, \quad B \to D, \quad D \to E, \quad E \to B, \quad C \to F,$$
$$B \to b, \quad E \to ADa, \quad C \to ABB$$

## 解答 (1/4)

与えられた生成規則のうち単一規則ではないものは,

$$B \to b, \quad E \to ADa, \quad C \to ABB$$

# 例題 1 (2/4)

## 解答 (2/4)

まず, 単一規則を排除し, 新しい規則を追加 (補題 1) するため,
各変数 $X$ に対し $X \overset{*}{\Rightarrow} Y$ となる変数 $Y$ をすべて求める

1. $X$ に番号 0 をつけ, $i = 0$ として 2 へ
2. 番号 $i$ がついている変数から,
   - 1 ステップで導出でき, かつ,
   - まだ番号のついていない変数,

   があれば, そういうすべての変数に番号 $i + 1$ をつけ 3 へ
   そういう変数がなければ終了. 番号のついている変数が答え
3. $i$ を 1 増やして 2 へ

# 例題 1 (3/4)

## 解答 (3/4)

- $A$ からはすべての変数に到達できることが分かる．
  よって，
  $$A \to b, \quad A \to ABB, \quad A \to ADa$$
  が追加される規則
- $B$ からは $B$, $D$, $E$ に到達可能なので，
  $$B \to b, \quad B \to ADa$$
  が追加される規則
- ...

その後，単一規則を除く

# 例題 1 (4/4)

## 解答 (4/4)

最終的には生成規則は以下の通り

$$
\begin{array}{lllll}
A \to b, & A \to AY_1, & Y_1 \to DX_a, & A \to AY_2, & Y_2 \to BB, \\
B \to b, & B \to AY_3, & Y_3 \to DX_a, & & \\
D \to b, & D \to AY_4, & Y_4 \to DX_a, & & \\
E \to b, & E \to AY_5, & Y_5 \to DX_a, & C \to AY_6, & Y_6 \to BB, \\
X_a \to a, & X_b \to b & & &
\end{array}
$$

# 補題 2 (1/2)

## 定義 ($A$ 生成規則)

$A$ 生成規則: 左辺が変数 $A$ である生成規則

## 補題 2

$G = (V, \Sigma, P, S)$: cfg
$A \to \alpha_1 B \alpha_2$: $P$ に属する生成規則

- $\{B \to \beta_i \mid i = 1,\ 2, \ldots,\ r\}$: すべての $B$ 生成規則の集合
- $P' = (P \setminus \{A \to \alpha_1 B \alpha_2\}) \cup \{A \to \alpha_1 \beta_i \alpha_2 \mid i = 1,\ 2, \ldots\ , r\}$

$G' = (V, \Sigma, P', S)$ とすると, $L(G) = L(G')$

## 証明 (1/2)

- $L(G') \subseteq L(G)$
  $G'$ による導出中に $A \Rightarrow \alpha_1 \beta_i \alpha_2$ というステップがあれば,
  $G$ では $A \Rightarrow \alpha_1 B \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \beta_i \alpha_2$ とすればよい

# 補題 2 (2/2)

## 証明 (2/2)

- $L(G) \subseteq L(G')$
  $A \to \alpha_1 B \alpha_2$: $G$ にあって $G'$ にはない唯一の生成規則

  $A \to \alpha_1 B \alpha_2$ が $G$ による導出に出現
  $\Longrightarrow$ 変数 $B$ は, $B \to \beta_i$ によっていつか書き換えられる

  導出結果は生成規則の適用順によらないから,

  $$A \Rightarrow \alpha_1 B \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \beta_i \alpha_2$$

  としてよい
  これは, $G'$ で $A \Rightarrow \alpha_1 \beta_i \alpha_2$ に置き換えが可能 ■

# $A \to A\alpha$ の除去 (1/3)

**補題 3**

$G = (V, \Sigma, P, S)$: cfg

- $A \to A\alpha_i$ $(i = 1, \ldots, r)$: $A$ が右辺の左端にある $A$ 生成規則
- $A \to \beta_i$ $(i = 1, \ldots, s)$: 残りの $A$ 生成規則
- $P'$: $P$ の $A$ 生成規則を以下で置き換えたもの ($Z$: 新しい変数)

$$\begin{array}{ll} A \to \beta_i,\ A \to \beta_i Z & (i = 1, \ldots, s) \\ Z \to \alpha_i,\ Z \to \alpha_i Z & (i = 1, \ldots, r) \end{array}$$

$G' = (V \cup \{Z\}, \Sigma, P', S)$ とすると, $L(G') = L(G)$

# $A \to A\alpha$ の除去 (2/3)

## 証明 (1/2)

(1) $L(G) \subseteq L(G')$

$x \in L(G)$ とする

$G$ における $x$ の最左導出中の, $P \setminus P'$ に属する生成規則による導出

$$\begin{aligned}\gamma_1 A \gamma_2 &\Rightarrow \gamma_1 A \alpha_{j_1} \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 A \alpha_{j_2} \alpha_{j_1} \gamma_2 \Rightarrow \cdots \\ &\Rightarrow \gamma_1 A \alpha_{j_p} \ldots \alpha_{j_1} \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 \beta_i \alpha_{j_p} \ldots \alpha_{j_1} \gamma_2\end{aligned}$$

は, $G'$ においては以下で導出できる

$$\begin{aligned}\gamma_1 A \gamma_2 &\Rightarrow \gamma_1 \beta_i Z \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 \beta_i \alpha_{j_p} Z \gamma_2 \Rightarrow \cdots \\ &\Rightarrow \gamma_1 \beta_i \alpha_{j_p} \ldots \alpha_{j_2} Z \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 \beta_i \alpha_{j_p} \ldots \alpha_{j_1} \gamma_2\end{aligned}$$

よって, $x \in L(G')$, すなわち, $L(G) \subseteq L(G')$

# $A \to A\alpha$ の除去 (3/3)

## 証明 (2/2)

(2) $L(G') \subseteq L(G)$
$x \in L(G')$ とし, $G'$ における $x$ の最左導出を考える

- $P' \setminus P$ に属する生成規則 ($Z$ を含む生成規則) の適用があれば, 以後, 生成規則の適用順を変更, $Z$ を左辺に持つものを優先
- $G'$ において, $Z$ が現れてから消えるまでの部分

$$\gamma_1 A \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 \beta_i Z \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 \beta_i \alpha_{j_p} Z \gamma_2 \Rightarrow \cdots$$
$$\Rightarrow \gamma_1 \beta_i \alpha_{j_p} \ldots \alpha_{j_2} Z \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 \beta_i \alpha_{j_p} \ldots \alpha_{j_1} \gamma_2$$

は, $G$ においては以下で導出できる

$$\gamma_1 A \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 A \alpha_{j_1} \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 A \alpha_{j_2} \alpha_{j_1} \gamma_2 \Rightarrow \cdots$$
$$\Rightarrow \gamma_1 A \alpha_{j_p} \ldots \alpha_{j_1} \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 \beta_i \alpha_{j_p} \ldots \alpha_{j_1} \gamma_2$$

よって, $x \in L(G)$, すなわち, $L(G') \subseteq L(G)$ ■

# Greibach 標準形の存在 (1/5)

**定理 2**

$L$ が文脈自由言語なら, Greibach 標準形である cfg で $L$ を生成するものが存在

**証明 (1/5)**

$G = (\{A_1, \ldots, A_m\}, \Sigma, P, A_1)$: $L$ を生成する Chomsky 標準形

(1) 生成規則を修正して, 以下の二条件を満たすようにする

(♯) $A_i \to A_j\gamma$ が生成規則なら $i < j$.

(♭) すべての生成規則の右辺は高々 1 個の終端記号のあとに 0 個以上の変数の列

Chomsky 標準形は (♭) を満たすことに注意

# Greibach 標準形の存在 (2/5)

## 証明 (2/5)

(1) の続き

$i$ が小さい方から順に生成規則を修正していく

- $i = 1$ のとき
  $A_1 \to A_1\gamma$ という生成規則が存在すれば, 補題 3 を適用して (新しく導入する変数を $Z_1$ とする), (♯), (♭) を満たすようにできる

# Greibach 標準形の存在 (3/5)

## 証明 (3/5)

### (1) の続き

- $i \leq k$ で (♯), (♭) を満たすとして, $i = k+1$ のとき
  - $A_{k+1} \to A_j\gamma$ $(k+1 > j)$ には補題 2 を適用
    ($A_{k+1}$ 生成規則は変更していないので, $\gamma$ は一つの変数)

    $\{A_j \to \beta_{jp}\}$: $A_j$ 生成規則の全体
    $A_{k+1} \to A_j\gamma$ を取り除き, $A_{k+1} \to \beta_{jp}\gamma$ を付け加える
    ($\beta_{jp}$ は (♭) を満たすので, $\beta_{jp}\gamma$ もそう)

    $\beta_{jp}$ の左端が $A_q$ なら, 帰納法の仮定より, $q > j$
    $\Longrightarrow$ 有限ステップで $A_{k+1} \to A_l\gamma$ $(k+1 \leq l)$ の形にできる
  - $A_{k+1} \to A_{k+1}\gamma$ には補題 3 を適用 (新しい変数を $Z_{k+1}$)

# Greibach 標準形の存在 (4/5)

## 証明 (4/5)

(2) 条件 (♯), (♭) を満たすようになると, 生成規則は以下の形のみ

(a) $A_k \to A_l\gamma$, $\quad k < l$, $\gamma \in (V \cup \{Z_1, \ldots, Z_m\})^*$

(b) $A_k \to \alpha\gamma$, $\quad \alpha \in \Sigma$, $\gamma \in (V \cup \{Z_1, \ldots, Z_m\})^*$

(c) $Z_k \to \gamma$, $\quad \gamma \in (V \cup \{Z_1, \ldots, Z_m\})^*$

(a), (b) の場合:

- $k = m$ のときは, 右辺の左端は終端記号
- $k = m - 1$ のときは, 右辺の左端は終端記号か $A_m$

  $\Longrightarrow$ $A_m$ のときは補題 2 を適用して, 右辺が終端記号で始まるものに置き換え可能. (♭) も満たす
- $k = m - 2, \ldots, k = 1$ も同様にすれば, $A_i$ 生成規則はすべて (b) の形にできる

# Greibach 標準形の存在 (5/5)

## 証明 (5/5)

(c) の $Z_i$ 生成規則の場合:

(∗) $Z_i$ 生成規則の右辺の左端が $A_j$ の場合
補題 2 を適用して $A_j$ を置き換え, 右辺の左端が終端記号とできる

(†) $Z_i$ 生成規則の右辺の左端が $Z_j$ の場合
補題 2 を適用して $Z_j$ を置き換える
左端の置き換えを繰り返すと, いつか必ず $A_l$ が左端に現れるので, (∗) に帰着
($Z_k$ は変数の列にのみ置き換わるから)

■

# 文脈自由文法では生成できない言語

cfg は fa や正規表現より真に能力が高い

しかし, cfg でも生成できない言語が存在する

- fa では認識できない言語の存在証明
  記憶が有限という性質を利用
- cfg では生成できない言語の存在証明
  複数の繰り返し構造に関連をつけられるが, その関連づけの能力には制限があること (例: 次ページの uvwxy 定理) を利用

**注意**

fa では, ある部分の繰り返しと他の部分の繰り返しの間に関連をつけることができない

例: $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ は正規言語ではない

# uvwxy 定理 (1/3)

**定理 3 (uvwxy 定理)**

$L$: 文脈自由言語, 無限集合
$L$ によって決まる定数 $K$ が存在して, $|z| \geq K$ である任意の列 $z \in L$ に対し, 以下の 4 条件を満たす列 $u$, $v$, $w$, $x$, $y$ が存在

- $z = uvwxy$
- 任意の $i \geq 0$ に対して $uv^iwx^iy \in L$
- $vx \neq \varepsilon$
- $|vwx| \leq K$

**注意**

定理 3 は, 挿入定理, 反復定理, ポンプ定理 (補題) などともいう

# uvwxy 定理 (2/3)

## 証明 (1/2)

$L = L(G)$ となる cfg $G = (V, \Sigma, P, S)$ を取る

$r$: $G$ の導出木の枝分かれの最大数 ($\geq 2$)
(生成規則の右辺の (変数の数) + (終端記号の数) の最大値)

注意: 根から葉までの最長のパス (枝をたどっていく経路) の長さが $m$ ($\geq 1$) である導出木は, 高々 $r^m$ 個の葉しかもたない

$K = r^{|V|+2}$ とおき, $|z| \geq K$ を満たす $z \in L$ を取る

$S \overset{*}{\Rightarrow} z$: 対応する導出木 $T$ の頂点数が最少となる導出

$\gamma$: $T$ の最長のパスの一つ

($T$ の葉の数) $\geq |z| \geq K > r^{|V|+1}$ より, $\gamma$ の長さは $|V| + 2$ 以上
$\Longrightarrow$ $\gamma$ が通る頂点に少なくとも二回現れる $A \in V$ が存在

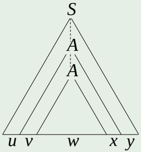
葉の方から $|V| + 2$ 個目の頂点までに $A$ が二回現れるとしてよい

# uvwxy 定理 (3/3)

## 証明 (2/2)

$z = uvwxy$ と分解する

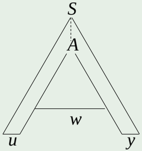
$A$ を根とする大きい方の部分木 $T_1$: $A \stackrel{*}{\Rightarrow} vwx$
$A$ を根とする小さい方の部分木 $T_2$: $A \stackrel{*}{\Rightarrow} w$

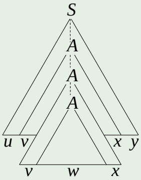



- $T_1$ を $T_2$ で置き換え $\iff$ $\boxed{S \stackrel{*}{\Rightarrow} uwy}$
- $T_2$ を $T_1$ で $i-1$ 回 $(i \geq 1)$ 置き換え $\iff$ $\boxed{S \stackrel{*}{\Rightarrow} uv^iwx^iy}$

$v = x = \varepsilon$ なら, $S \stackrel{*}{\Rightarrow} uwy = z$ に対応する導出木の頂点数は $T$ の頂点数より少なくなり矛盾

$T_1$ の最長パスの長さは高々 $|V| + 2$
$\Longrightarrow |vwx| \leq r^{|V|+2} = K$ ■



# 例題 2 (1/2)

## 例題 2

$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ は文脈自由言語ではないことを示せ

## 証明 (1/2)

背理法による

$L$ が文脈自由言語であると仮定 $\Longrightarrow$ uvwxy 定理が成立
$K$: $L$ に対する定数

$a^K b^K c^K \in L$ を uvwxy 定理の条件を満たすよう $uvwxy$ と分解

$vx \neq \varepsilon$ なので, $v$, $x$ のうち, 少なくとも一方は $\varepsilon$ ではない
$\Longrightarrow$ $v \neq \varepsilon$ とする ($x \neq \varepsilon$ の場合も同様)

(1) $v = a^i b^j$ $(i, j \geq 1)$ の場合 ($v = b^i c^j$ $(i, j \geq 1)$ の場合も同様)
uvwxy 定理より $uv^2wx^2y \in L$
ところが, $uv^2wx^2y = a^K b^j a^i \cdots \notin L$ となり, 矛盾

# 例題 2 (2/2)

## 証明 (2/2)

(2) $v = a^i$ の場合 ($v = b^i$, $v = c^i$ の場合も同様)

- $x = \varepsilon$ なら, $uv^2wx^2y = a^{K+i}b^Kc^K \notin L$
  一方, uvwxy 定理より $uv^2wx^2y \in L$ だから矛盾
- $x \neq \varepsilon$ のとき
  (1) より, $x = a^j$, $b^j$, $c^j$ のいずれか
  $\Longrightarrow$ $b$, $c$ の少なくとも一方は $v$ にも $x$ にも現れない

  よって, $b$, $c$ の少なくとも一方は, $uvwxy$, $uv^2wx^2y$ の双方で現れる個数が同じ $a$ の個数は後者の方が多い
  $\Longrightarrow$ $uv^2wx^2y \notin L$

  一方, uvwxy 定理より $uv^2wx^2y \in L$ だから矛盾 ■

# 文脈自由言語の共通部分が文脈自由言語とならない例

- $L_1 = \{a^n b^n c^m \mid n,\ m \geq 1\}$, $L_2 = \{a^m b^n c^n \mid n,\ m \geq 1\}$ はいずれも文脈自由言語
  - $L_1$ を生成する生成規則
    $$S \to S_1C, \quad S_1 \to aS_1b, \quad S_1 \to ab, \quad C \to cC, \quad C \to c$$
  - $L_2$ を生成する生成規則
    $$S \to AS_2, \quad S_2 \to bS_2c, \quad S_2 \to bc, \quad A \to aA, \quad A \to a$$
- しかし, 例題 2 より, $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ は文脈自由言語ではない

# 例題 3 (1/2)

## 例題 3

$L = \{z^2 \mid z \in \{a,b\}^*\}$ は文脈自由言語ではないことを示せ.

## 注意

$\{zz^{\mathrm{R}} \mid z \in \{a,b\}^*\}$ は文脈自由言語 (第 4 回の例題 2)

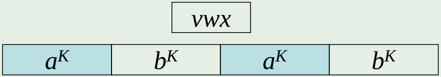
## 証明 (1/2)

$L$ を文脈自由言語と仮定して矛盾を導く

$z' = a^K b^K a^K b^K \in L$ とする ($K$: $L$ に対する uvwxy 定理の定数)

uvwxy 定理 の 4 条件を満たす分解 $z' = uvwxy$ が存在

$|vwx| \leq K$ より, $vwx$ は $a^K b^K$ あるいは $b^K a^K$ に入る



# 例題 3 (2/2)

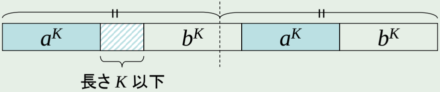
## 証明 (2/2)

$a^K b^K = pvwxq$ (あるいは $b^K a^K = pvwxq$) とする

注意: $pv^2wx^2q$ の最初の $K$ 個は $a$ ($b$), 最後の $K$ 個は $b$ ($a$)

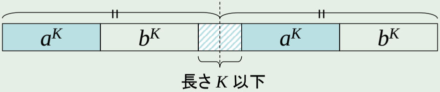
- $vwx$ が最初の $a^K b^K$ に含まれる場合 (二番目の場合も同様)

$$L \ni uv^2wx^2y = pv^2wx^2q \cdot a^K b^K$$

$=$  $\notin L$


- $vwx$ が $b^K a^K$ に含まれる場合

$$L \ni uv^2wx^2y = a^K \cdot pv^2wx^2q \cdot b^K$$

$=$  $\notin L$


いずれも矛盾 ■