アルゴリズム論 1

第 11 回: 帰納的に可算な集合と決定問題

関川 浩

2016/06/29

第 11 回の目標

- 帰納的に可算な集合, 述語について考える
  $\Longrightarrow$ (原始) 帰納的な集合, 述語と同様, 重要な族
- 述語が成立するか否かを判定するアルゴリズムが存在するか否かを問う決定問題について考察

1. 帰納的に可算な集合と述語
   - 帰納的に可算な集合
   - 帰納的に可算な述語
   - 例
2. 決定問題
   - 述語に関する決定問題
   - 集合に関する決定問題
   - 非可解な決定問題の例
3. いくつかの基本的な定理
   - 対角線論法
   - 部分帰納的関数の Gödel 数
   - Post の対応問題と応用

帰納的に可算な集合

定義 1 (帰納的に可算な集合)

- 集合 $S \subseteq \mathbb{N}$ が帰納的に可算
  $\iff S = \emptyset$ あるいは, $f(\mathbb{N}) = \{f(0), f(1), \ldots\} = S$ となる帰納的関数 f が存在

  関数 f は S を枚挙するという

- 集合 $S \subseteq \mathbb{N}^n$ が帰納的に可算
  $\iff \{x \mid ((x)_0, (x)_1, \ldots, (x)_{n-1}) \in S\} \subseteq \mathbb{N}$ が帰納的に可算

  ($(x)_i$ は $x = 0, 1$ のとき 0, $x \geq 2$ のとき x の素因数分解における $i+1$ 番目の素数の巾

  $$\{x \mid ((x)_0, (x)_1, \ldots, (x)_{n-1}) \in S\} = \{2^{x_0} 3^{x_1} \ldots p_{n-1}^{x_{n-1}} \mid (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in S\}$$)

以下, $\mathbb{N}$ の部分集合だけを考える

定理 1 (1/2)

定理 1

帰納的集合は帰納的に可算

証明 (1/2)

$S \subseteq \mathbb{N}$: 空ではない帰納的集合 (空の場合は明らか)

- S が有限集合のとき

  $S = \{a_0, \ldots, a_n\}$ として

$$f(i) = \begin{cases} a_i, & 0 \leq i \leq n \text{ のとき} \\ a_0, & i > n \text{ のとき} \end{cases}$$

  と定義すると, f は帰納的かつ $f(\mathbb{N}) = S$

  $\Longrightarrow$ S は帰納的に可算

定理 1 (2/2)

証明 (2/2)

- S が無限集合のとき

  S の特徴関数を C_S として

$$f(0) = \mu y(C_s(y) = 0)$$
$$f(x') = \mu y(C_s(y) = 0 \land f(x) < y)$$

と定義すると, C_S は帰納的だから f は帰納的

$f(\mathbb{N}) = S$ だから, S は帰納的に可算 ■

定理 2 (1/3)

定理 2

集合 $S \subseteq \mathbb{N}$ は帰納的
$\iff$ S と S の補集合 $\overline{S} = \mathbb{N} \setminus S$ はともに帰納的に可算

“$\Longleftarrow$” が成り立つことは直観的には:

S と $\overline{S}$ の要素を枚挙する二つの TM を同時に動かす
$\Longrightarrow$ 任意の $x \in \mathbb{N}$ は有限時間内にいずれかの枚挙に登場
$\Longrightarrow$ $x \in S$ か否かを判定するアルゴリズムが存在
$\Longrightarrow$ S は帰納的

定理 2 (2/3)

証明 (1/2)

- S が帰納的であれば $\overline{S}$ も帰納的
  $\Longrightarrow$ 定理 1 より, S と $\overline{S}$ はともに帰納的に可算
- 逆に, S と $\overline{S}$ がともに帰納的に可算とする
  - $S = \emptyset$ あるいは $\overline{S} = \emptyset$ のとき, 明らかに S は帰納的
  - $S \neq \emptyset$ かつ $\overline{S} \neq \emptyset$ のとき

    f: S を枚挙する関数
    g: $\overline{S}$ を枚挙する関数

    $\Longrightarrow$ 述語 $(f(y) = x \vee g(y) = x)$ は帰納的かつ正則
    $\Longrightarrow$ 関数 $h(x) = \mu y(f(y) = x \vee g(y) = x)$ は帰納的

定理 2 (3/3)

証明 (1/2)

すると

$$x \in S \iff f(h(x)) = x$$

かつ, 述語 $f(h(x)) = x$ は帰納的

よって, S の特徴関数は

$$C_S(x) = \begin{cases} 0, & f(h(x)) = x \text{ のとき} \\ 1, & \text{そうではないとき} \end{cases}$$

と表されるので帰納的

$\Longrightarrow$ S は帰納的 ■

定理 3 (1/2)

定理 3

S は帰納的に可算
$\iff$ 適当な帰納的述語 $P(x,y)$ に対して $S=\{x \mid (\exists y)P(x,y)\}$

証明 (1/2)

S: 帰納的に可算とする

- $S=\emptyset$ のとき
$$P(x,y) \longleftrightarrow x+y+1<x+y$$
とすると $P(x,y)$ は帰納的, かつ, $\{x \mid (\exists y)P(x,y)\}=\emptyset=S$
- $S\neq\emptyset$ のとき, S を枚挙する帰納的関数 f に対して
$$P(x,y) \longleftrightarrow f(y)=x$$
とすれば $P(x,y)$ は帰納的, かつ, $\{x \mid (\exists y)P(x,y)\}=S$

定理 3 (2/2)

証明 (2/2)

ある帰納的述語 $P(x,y)$ に対し $S=\{x \mid (\exists y)P(x,y)\}$ とする

- $S=\emptyset$ の場合は成立 (空集合は帰納的に可算)
- $S\neq\emptyset$ の場合

$$f(y)\stackrel{\text{def}}{=}\begin{cases}(y)_0, & P((y)_0,(y)_1) \text{ のとき}\\ x_0, & \text{そうではないとき}\end{cases}$$

ただし, x_0 は S の一つの要素

すると, f は帰納的, かつ

$$\begin{aligned} a\in S &\iff \text{ある } b \text{ に対して } P(a,b) \text{ が成立}\\ &\iff y=2^a3^b \text{ とすれば } P((y)_0,(y)_1) \text{ が成立}\\ &\iff f(y)=(y)_0=a\end{aligned}$$

よって, f は S を枚挙する関数であり, S は帰納的に可算 ■

帰納的に可算な述語 (1/2)

定理 3 より, 述語が帰納的に可算であることを以下のように定義するのは自然

定義 2 (帰納的に可算な述語)

述語 $P(x_1, \ldots, x_n)$ は, 帰納的述語 $Q(x_1, \ldots, x_n, y)$ が存在して

$$P(x_1, \ldots, x_n) \longleftrightarrow (\exists y) Q(x_1, \ldots, x_n, y)$$

であるとき, 帰納的に可算であるという

帰納的に可算な述語 (2/2)

定理 4

集合 S が帰納的に可算
$\iff$ ある k が存在して, $S = \{x \mid (\exists y) T_1(k, x, y)\}$

証明

定理 3 と枚挙定理 (前回) による ■

系 1

集合 S が帰納的に可算
$\Leftrightarrow$ ある原始帰納的述語 $P(x, y)$ が存在して $S = \{x \mid (\exists y) P(x, y)\}$

定理 4 から, 定理 3 の証明後半で使った, S を枚挙するための関数は原始帰納的

$\Longrightarrow$ 空ではない帰納的に可算な集合は, 原始帰納的関数によって枚挙できる

帰納的に可算ではない集合

定理 5

$S = \{x \mid (\forall y)\neg T_1(x, x, y)\}$ は帰納的に可算ではない

証明

S が帰納的に可算であると仮定

定理 4 より，ある数 k に対して $S = \{x \mid (\exists y)T_1(k, x, y)\}$

$$\implies (\forall y)\neg T_1(x, x, y) \longleftrightarrow (\exists y)T_1(k, x, y)$$

$x = k$ とおくと，

$$\begin{aligned}\neg(\exists y)T_1(k, k, y) &\longleftrightarrow (\forall y)\neg T_1(k, k, y)\\ &\longleftrightarrow (\exists y)T_1(k, k, y)\end{aligned}$$

となり矛盾 ■

帰納的に可算だが帰納的ではない集合

定理 6

帰納的に可算であるが，帰納的ではない集合が存在する

証明

$S = \{x \mid (\exists y) T_1(x, x, y)\}$ は帰納的に可算

S が帰納的と仮定すると，定理 2 より S の補集合

$$\{x \mid \neg(\exists y) T_1(x, x, y)\} = \{x \mid (\forall y) \neg T_1(x, x, y)\}$$

は帰納的に可算となり，定理 5 に反する ■

定理 5, 6 の述語版

系 2

(1) 述語 $(\forall y)\neg T_1(x,x,y)$ は帰納的に可算ではない

(2) 述語 $(\exists y)T_1(x,x,y)$ は帰納的に可算だが, 帰納的ではない

証明

定理 5, 6 のいい換え ■

注意

(2) より, 以下の関数 $\varphi(x)$ は計算可能ではないことが分かる

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & (\exists y)T_1(x,x,y) \text{ のとき} \\ 1, & \text{そうではないとき} \end{cases}$$

1. 帰納的に可算な集合と述語
2. 決定問題
3. いくつかの基本的な定理

述語に関する決定問題

- 自然数上の述語 $P(x_1, \ldots, x_n)$ が与えられているとき,

  任意の $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して $P(x_1, \ldots, x_n)$ が成立するか否かを決定するアルゴリズムを作れ

  という問題を述語 $P(x_1, \ldots, x_n)$ に関する決定問題という

  アルゴリズムが作れれば, Church の提唱により P は帰納的

- そこで, 述語 $P(x_1, \ldots, x_n)$ に関する決定問題は

  - P が帰納的であるとき帰納的に可解である
  - P が帰納的ではないとき帰納的に非可解である

  という

集合に関する決定問題

- 集合 $S \subseteq \mathbb{N}^n$ に関する決定問題は以下で定義

> 任意の $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して $(x_1, \ldots, x_n) \in S$ であるか否かを決定するアルゴリズムを作れ

- S の特徴関数 C_S を考えれば

$$(x_1, \ldots, x_n) \in S \iff C_S(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

であり, 述語 P に対して

$$\begin{aligned} &P(x_1, \ldots, x_n) \text{ が成立} \\ &\quad \iff (x_1, \ldots, x_n) \in \{(x_1, \ldots, x_n) \mid P(x_1, \ldots, x_n)\} \end{aligned}$$

なので, 集合, 述語に関する決定問題は本質的に同じ

非可解な決定問題の例

集合や述語は，自然数の世界以外でも考えられる

Gödel 数化により自然数の世界に移すことができるが，
元の世界で考えるときには

- 決定のためのアルゴリズムが作れるとき，決定可能または可解である
- アルゴリズムが存在しないとき，決定不能または非可解である

という

非可解な決定問題の例として，TM の停止問題を取り上げる

停止問題 I

定理 7

以下の決定問題 (停止問題 I) は非可解

任意に与えられた TM $M = (K, \Sigma, Q, q_0, q_h)$ に対し，
様相 $\overline{x} q_0 B$ に始まり，様相 $w q_h B$ ($w \in \Sigma^*$) に終る，
M による計算が存在するか否かを決定するアルゴリズム
を作れ

証明

この決定問題は，対象を Gödel 数化すると，述語 $(\exists y) T_1(z, x, y)$
に関する決定問題となる

これが可解であると仮定すると，述語 $(\exists y) T_1(z, x, y)$ は帰納的
$\Longrightarrow$ 述語 $(\exists y) T_1(x, x, y)$ も帰納的となり，系 2 に矛盾 ■

停止問題 II

定理 8

以下の問題 (停止問題 II) を非可解にする TM が存在

TM $M = (K, \Sigma, Q, q_0, q_h)$ を固定する

このとき, 任意の自然数 x に対し, 様相 $\overline{x} q_0 B$ に始まり, 様相 $w q_h B$ $(w \in \Sigma^*)$ に終る, M による計算が存在するか否かを決定するアルゴリズムを作れ

証明

M: 述語 $T_1(x, x, y)$ の特徴関数 $C_{T_1}(x, x, y)$ を計算する TM

M_0: M を用いて作った, 関数 $\mu y(C_{T_1}(x, x, y) = 0)$ を部分的に計算する TM (第 8 回の系 3)

M_0 に対する停止問題は, 述語 $(\exists y) T_1(x, x, y)$ に関する決定問題と等価になるので, 非可解 ■

停止問題 I, II の解釈

- 停止問題 I の非可解性
  プログラムとそれが使うデータを任意に与えたとき,
  計算機がいつかは停止するか否かを決定するプログラムは
  書けない
- 停止問題 II の非可解性
  以下の性質を持つプログラム P が存在する

  > 入力データを任意に与えたとき, P が停止するか否かを
  > 決定するプログラムは書けない

いずれも Turing による 1936 年の結果 (電子計算機が登場する前)

対角線論法 (1/4)

「$Tm(x) \longleftrightarrow x$ は TM の Gödel 数である」は原始帰納的

$\Longrightarrow$ TM の全体を $M_0, M_1, \ldots, M_n, \ldots$ と枚挙するような TM が存在

$$\varphi(m) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & M_m \text{ が入力 } m \text{ に対して停止するとき} \\ 0, & \text{そうではないとき} \end{cases}$$

定理 9

関数 $\varphi(m)$ は計算可能ではない

対角線論法 (2/4)

証明 (1/2)

$\varphi(m)$ が計算可能と仮定し, $\varphi(m)$ を計算する TM を M とする

M を使って

$$\Phi(m) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \varphi(m) = 0 \text{ のとき} \\ \text{無定義}, & \varphi(m) = 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

を部分的に計算する TM M' を以下のように作ることができる

- $\varphi(m) = 0$ ならば, 出力 0 を 1 に書き換えて停止
- $\varphi(m) = 1$ ならば, テープ上の 11 $(= \bar{1})$ 間の往復を永久に繰り返す

$$\begin{tikzcd} Ml^2\langle B\rangle \arrow[r, "\text{no}"] \arrow[d, "\text{yes}"'] & rl \arrow[loop right] \\ r^2 1 r & \end{tikzcd}$$

対角線論法 (3/4)

証明 (2/2)

この M' も枚挙の中に出現する
よって，ある k が存在して，$M' = M_k$

$$\begin{aligned}\Phi(k) = 1 &\iff \varphi(k) = 0\\ &\iff M_k \text{ は入力 } k \text{ に対して停止しない}\\ &\iff M' \text{ は入力 } k \text{ に対して停止しない}\\ &\iff \Phi(k) \text{ は無定義}\end{aligned}$$

これは矛盾 ■

対角線論法 (4/4)

系 3

以下の関数 $\varphi(x, y)$ は計算可能ではない

$$\varphi(m, n) = \begin{cases} 1, & M_m \text{ が入力 } n \text{ に対して停止するとき} \\ 0, & \text{そうではないとき} \end{cases}$$

証明

$\varphi(m, n)$ が計算可能と仮定すると, $\varphi(m, m) = \varphi(m)$ より
$\varphi(m)$ も計算可能となり, 定理 9 に矛盾 ■

注意

- 定理 9 と系 3 は, TM の停止性の非可解性を主張した定理 7, 8 のいい換え
- 対角線論法の名前は Cantor の対角線論法に由来

  定理 9 の証明中の Φ の定義にその本質が現れている

部分帰納的関数の Gödel 数

$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$: 部分帰納的関数

- Kleene の標準形定理により, 以下を満たす k が存在

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \cong U(\mu y T_n(k, x_1, \ldots, x_n, y))$$

  この k を φ の Gödel 数とよぶこともある
  (本来は φ を部分的に計算する TM の Gödel 数)

- φ の Gödel 数は無数に存在
  (φ を部分的に計算する TM が無数にあるため)

- Gödel 数が k である n 変数の部分帰納的関数を $\varphi_k^{(n)}$ と書くことにする
  n を明示する必要がないときには単に φ_k と書く

部分帰納的関数の全域化 (1/2)

任意の部分帰納的関数 $f(x)$ に対して，全域的な帰納的関数 $g(x)$ が存在して

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \text{ が定義されているとき} \\ 0, & f(x) \text{ が定義されていないとき} \end{cases}$$

なら都合がよい ($g(x)$ を計算する TM は必ず停止するので)

しかし，このような全域化は一般には不可能

部分帰納的関数の全域化 (2/2)

定理 10

帰納的関数に全域化できないような部分帰納的関数が存在

証明

$f(x) = \varphi_x(x) + 1$ は部分帰納的

この関数の全域化は

$$g(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) + 1, & \varphi_x(x) \text{ が定義されているとき} \\ 0, & \varphi_x(x) \text{ が定義されていないとき} \end{cases}$$

$g(x)$ が帰納的であるとすると, $g = \varphi_k$ となる k が存在して

$$g(k) = \varphi_k(k) + 1 = g(k) + 1$$

となり矛盾 ($\varphi_k(k)$ は定義されていることに注意) ■

Post の対応問題 (1/3)

- Σ: 二個以上の記号を含むアルファベット
  $\alpha = x_1, x_2, \ldots, x_k$; $\beta = y_1, y_2, \ldots, y_k$ $(x_i, y_i \in \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\})$
- α, β に対して

$$x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n} = y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_n} \qquad (n \geq 1,\ 1 \leq i_j \leq k)$$

となる添字の列 $i_1, \ldots, i_n$ が存在するとき,
$P(\alpha, \beta)$ は 解を持つといい,
$i_1, \ldots, i_n$ または $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}$ を $P(\alpha, \beta)$ の解という

Post の対応問題

任意に与えた α, β に対し, $P(\alpha, \beta)$ が解を持つか否かを決定せよ

Post の対応問題 (2/3)

例

$\Sigma = \{a, b\}$ とする

- $\alpha = x_1, x_2, x_3$; $\beta = y_1, y_2, y_3$ を表 1 で与える

$$x_1x_2x_1x_3 = abbababba = y_1y_2y_1y_3$$

$\Longrightarrow P(\alpha, \beta)$ は解 1, 2, 1, 3 を持つ

- $\alpha = x_1, x_2, x_3$; $\beta = y_1, y_2, y_3$ を表 2 で与える

  この場合, $P(\alpha, \beta)$ は解を持たない

表 1

i	1	2	3
x_i	abb	ab	a
y_i	ab	bab	ba

表 2

i	1	2	3
x_i	ba	abb	bab
y_i	bab	bb	abb

Post の対応問題 (3/3)

定理 11 (Post (1946 年))

Post の対応問題は非可解

証明は略

定理 11 を用いると,
cfg に関する多くの決定問題の非可解性を証明できる

cfg に関する決定問題の例

定理 12

任意に与えられた二つの cfg G_1, G_2 に対して，
$L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$ であるか否かを決定する問題は非可解

略証

$|\Sigma| \geq 2$ として，c を Σ に含まれない記号とする
任意の $\alpha = x_1, \ldots, x_k$; $\beta = y_1, \ldots, y_k$ $(x_i, y_i \in \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\})$ に対し

$$L(G_1) = \{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n} c y_{i_n}^{\mathrm{R}} \ldots y_{i_2}^{\mathrm{R}} y_{i_1}^{\mathrm{R}}\}$$

となる cfg G_1 を作ることができる．同様に

$$L(G_2) = \{wcw^{\mathrm{R}} \mid w \in \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}\}$$

となる cfg G_2 を作ることもできる．ところが

$$L(G_1) \cap L(G_2) = \{wcw^{\mathrm{R}} \mid w \text{ は } P(\alpha, \beta) \text{ の解 }\}$$

だから，この問題は非可解 ■