アルゴリズム論 2

第 13 回: 幾何学的探索 (1)

関川 浩

2016/12/14

- ヒープ探索木と区分木 (今回)
- 点位置決定問題を解くアルゴリズム (次回)

1. 幾何的探索問題
    - 幾何的探索問題とは
    - 幾何的探索問題の分類
2. データ構造
    - ヒープ探索木
    - 区分木

幾何的探索問題とは (1/2)

幾何的探索問題: 計算幾何学における基本的かつ重要な問題の一つ

地理情報処理における例

- 対象としている地区の公共施設の列挙
- ある建物から一定距離内にある学校の列挙

一般の幾何探索問題

S (台集合): 空間上に与えられた対象 (点, 線分, 多角形など) の集合

質問対象 q に対してある条件を満たす S の要素を列挙する問題

幾何的探索問題とは (2/2)

点位置決定問題

G: 平面上に与えられた n 頂点, 辺が直線分の平面グラフ (領域分割)
質問点 q に対し, q の属する G の領域を答える問題

領域探索問題

S: n 点の集合
質問領域 R に対し, R に含まれる S の点をすべて列挙する問題

線分交叉問題

S: n 本の線分の集合
質問線分 l に対し, l と交わる S の線分をすべて列挙する問題

点包囲問題

S: n 個の多角形の集合
質問点 q に対し, q を含む S の多角形をすべて列挙する問題

幾何的探索問題の分類 (1/2)

質問の形態による分類: 一つの台集合に対する質問が

(1) 少数回
前処理なしがよい

(2) 繰り返し多数回
前処理を施して適当なデータ構造を作成するのがよい

(3) 一括して行われる
質問が一括して行われることを利用するとよい

ここでは (2) を扱う

幾何的探索問題の分類 (2/2)

別の分類: 台集合の更新が

- ない場合 (静的な場合)
- ある場合 (静的な場合)

静的な場合のアルゴリズム評価

- 一つの質問に答えるための探索時間
- 台集合 S を表すデータ構造に必要な記憶領域
- 前処理にかかる時間

動的な場合のアルゴリズム評価

- 前処理時間の代わりに更新にかかる時間

ヒープ探索木と区分木

ヒープ探索木

平面上の有限個の点に対し以下を行うためのデータ構造

- 点の挿入/削除
- x 軸上に一辺を持つ長方形に含まれる点集合の列挙

区分木

区間木 (数直線上の区間) を表現する木において, その頂点を表す区間の持つ情報を付加して得られる 2 分木

ヒープ探索木 (1/4)

ヒープ探索木

$T = \{P_1(x_1, y_1), \ldots, P_n(x_n, y_n)\} \subset \mathbb{R}^2$ に対するデータ構造

操作

- T への点の挿入, T からの点の削除
- x 軸上に一辺を持つ長方形に含まれる点集合の列挙

仮定

- x_i, $y_i \in \mathbb{N}$, $P_i \in [1, N] \times [1, N]$ $(N = O(n))$
- $i \neq j$ なら $P_i \neq P_j$

ヒープ探索木 (2/4)

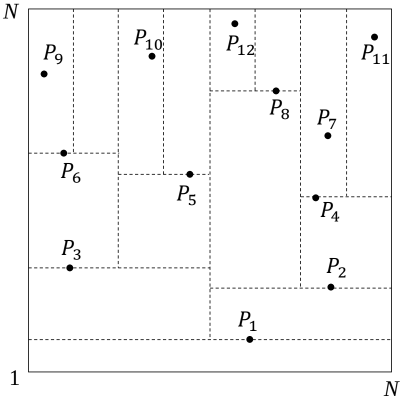
定義 1 (ヒープ探索木)

2 分木, 各頂点が $[1, N] \times [1, N]$ の部分領域に対応

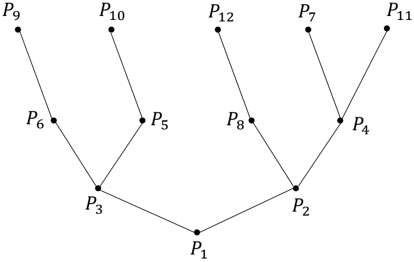
- 木の根は全体の領域 $[1, N] \times [1, N]$
- 木の頂点 v に対応する領域の
  - x 座標の区間 $[i, j]$
  - 内部にある点のうち, 最小の y 座標を持つ点 (x_v, y_v)

  $\Longrightarrow$ 頂点 v の
  左の子: $[i, \lfloor (i+j)/2 \rfloor] \times [y_v + 1, N]$ に対応
  右の子: $[\lfloor (i+j)/2 \rfloor + 1, j] \times [y_v + 1, N]$ に対応
- T の点を含まない領域を持つ頂点が葉

長方形に含まれる点の列挙 (3/4)



ヒープ探索木による平面の分割



ヒープ探索木

ヒープ探索木 (4/4)

ヒープ探索木の各頂点に記憶している T の点について,

- y 座標についてはヒープ (順位付きキュー)
- 部分領域は x 方向に関して自然な対称順

注: 対称順とは, 2 分木で,

$$\left(\begin{array}{c}\text{根の左の子を根とする}\\ \text{部分木の任意の頂点}\end{array}\right) < \text{根} < \left(\begin{array}{c}\text{根の右の子を根とする}\\ \text{部分木の任意の頂点}\end{array}\right)$$

から再帰的に決まる順序

$\Longrightarrow$ 2 分探索木とヒープとの組み合わせ

- 木の深さ: $O(\log N)$
- 挿入, 削除の手間: $O(\log N)$

長方形に含まれる点の列挙 (1/4)

問題

- $T \subset \mathbb{R}^2$: 点集合
- R: x 軸上に一辺をもつ長方形

が与えられたとき, R に含まれる T の点を列挙せよ

長方形 R に含まれる T の点が k 個なら列挙の手間は $O(\log N + k)$

長方形に含まれる点の列挙 (2/4)

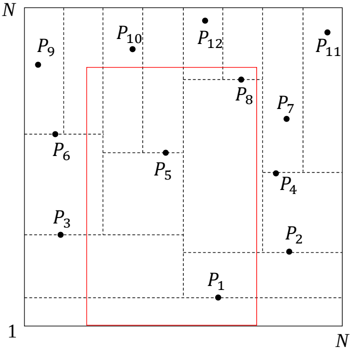
アルゴリズム

- 根から深さ優先探索でヒープ探索木を探索
- 頂点に記憶している T の点が長方形 R 内にあるか調べ, あれば報告
- 頂点に対応する $[1,N] \times [1,N]$ の部分領域と R の共通部分がなくなったら, 先の探索を中止しバックトラック
(そこから先の頂点には R に含まれる点は記憶されていない)

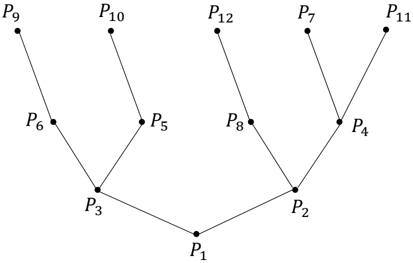
- 長方形 R の左右の辺で切られた木の部分の深さ分 $O(\log N)$
- R の上辺で切られた領域の, そこまでで列挙した分 $O(k)$

全体として R 内の T の点を $O(\log N + k)$ で列挙可能

長方形に含まれる点の列挙 (3/4)

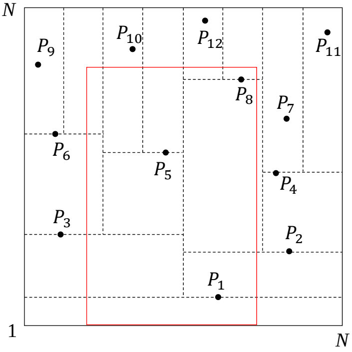


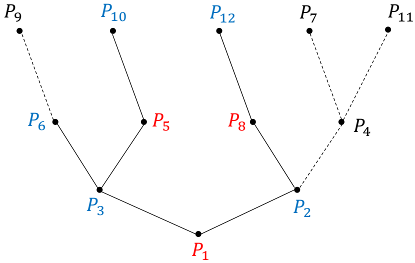
ヒープ探索木による平面の分割



ヒープ探索木

長方形に含まれる点の列挙 (4/4)





ヒープ探索木による平面の分割　　　長方形に関する領域探索

区間木 (1/2)

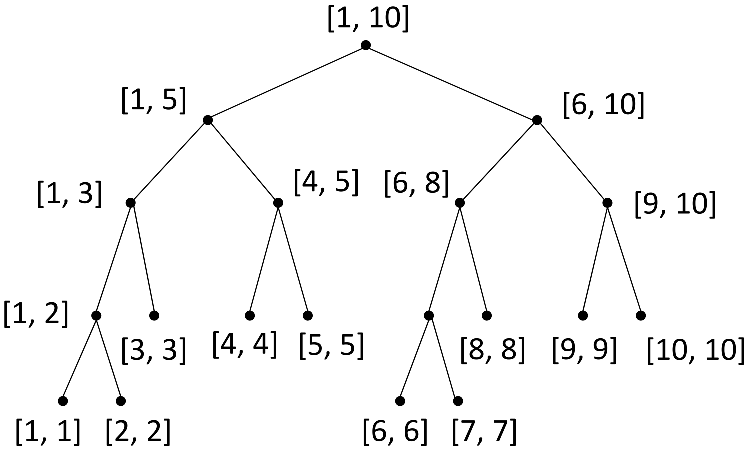
$$L \stackrel{\text{def}}{=} \{[i,j] \mid i,\ j \in \mathbb{N},\ 1 \le i \le j \le N\}$$

定義 2 (区間木)

$[i,j] \in L$ に対して区間木 $I(i,j)$ を以下のように定義 (2 分木の一種)

- 木の根 v は区間 $I(v) = [i,j]$ に対応
- $i < j$ のとき
  左の子が根の部分木 $\longleftrightarrow$ 区間木 $I(i, \lfloor (i+j)/2 \rfloor)$
  右の子が根の部分木 $\longleftrightarrow$ 区間木 $I(\lfloor (i+j)/2 \rfloor + 1, j)$
- $i = j$ のとき
  左右の子の部分木は空

区間木 (2/2)



区分木 (1/6)

定義 3 (区分木)

区間木に対して，その頂点の表す区間の持つ情報を加えて構成された木

区分木の例 (1/2)

L の要素であるいくつかの区間と一つの整数が与えられたとき，その整数を含む区間を列挙する問題に対するデータ構造

$I = [i, j] \in L$: 与えられた区間

区間木 $I(1, N)$ に対応して，区間 I は再帰的に分割される

- $[1, N] \subset I$ のとき
  I はそれ以上分割されない

区分木 (2/6)

区分木の例 (2/2)

- $j \leq \lfloor (1+N)/2 \rfloor$ のとき
  I は区間木 $I(1, \lfloor (1+N)/2 \rfloor)$ に対応して分割
- $i > \lfloor (1+N)/2 \rfloor$ のとき
  I は区間木 $I(\lfloor (1+N)/2 \rfloor + 1, N)$ に対応して分割
- $i \leq \lfloor (1+N)/2 \rfloor < j$ のとき
  I はまず
  $$I_1 = [i, \lfloor (1+N)/2 \rfloor], \qquad I_2 = [\lfloor (1+N)/2 \rfloor + 1, j],$$
  に分割, さらに,
  - I_1 は区間木 $I(1, \lfloor (1+N)/2 \rfloor)$ に対応して
  - I_2 は区間木 $I(\lfloor (1+N)/2 \rfloor + 1, N)$ に対応して

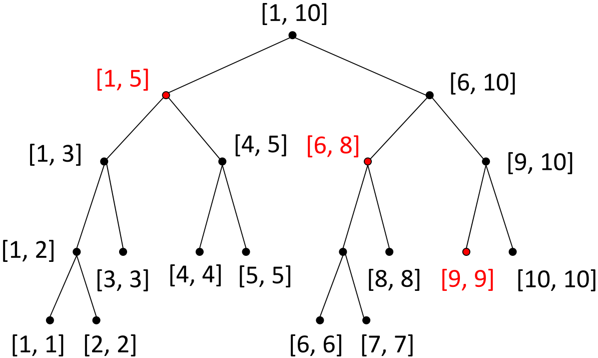
  分割

$\Longrightarrow$ 区間 I は $O(\log N)$ の区間に分割

区分木 (3/6)

例: $N = 10$ のとき

$$I = [1,9] \longrightarrow \{[1,5],\ [6,9]\},$$
$$[6,9] \longrightarrow \{[6,8],\ [9,9]\}$$



区分木 (4/6)

$I_1, \ldots, I_m \in L$

定義 4 (区分木)

区分木 $T(1,N)$: 区間木 $I(1,N)$ の各頂点に $\{I_1, \ldots, I_m\}$ の部分集合を割り当てる

- 区間 I_i: 区間木 $I(1,N)$ に対応して $I_{i,1}, \ldots, I_{i,j}$ と分割
  $\Longrightarrow$ 区間 $I_{i,k}$ $(k = 1, \ldots, j)$ に対応する区間木の頂点に I_i を記憶

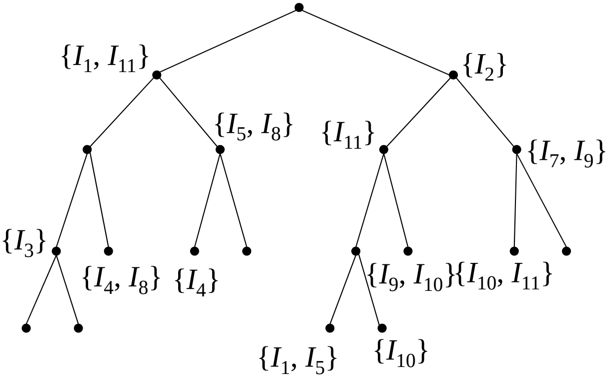
このように区間木に，その区間に付随するデータを加えて得られた木 $S(1,N)$ を区分木という

- 区間 $I_1, \ldots, I_m$ $(I_i \in L)$ に対する区分木 $S(1,N)$ は $O(N + m \log N)$ 時間で構成可
- 区間の挿入/削除は $O(\log N)$

区分木 (5/6)

例

$I_1 = [1,6]$, $I_2 = [6,10]$, $I_3 = [1,2]$, $I_4 = [3,4]$, $I_5 = [4,6]$,
$I_6 = [6,7]$, $I_7 = [9,10]$, $I_8 = [3,5]$, $I_9 = [8,10]$, $I_{10} = [7,9]$,
$I_{11} = [1,9]$



区分木 (6/6)

$q \in \mathbb{Z}$ に対し $I_1, \ldots, I_m \in L$ のうち q を含む区間の列挙

$O(\log N + k)$ で可能, ただし, k は q を含む区間の数

区分木 $S(1, N)$ の頂点 v に付随する区間に q が含まれていると仮定
(v の左右の子のうち一方に付随する区間は q を含む)

$\Longrightarrow$ $S(1, N)$ の根から葉にいたる道で, その道上の頂点はすべて q を含むものが存在

$\Longrightarrow$ q を含む区間の列挙は, この道上に付随する区間を列挙すればよい

手間: 道上の頂点は $O(\log N)$, q を含む区間の数が k なら $O(\log N + k)$

4 分木, 8 分木

区間木の高次元版: CG などで利用

- 4 分木: 区間木の 2 次元版
- 8 分木: 区間木の 3 次元版