アルゴリズム論 2

第 2 回: 低次元線形計画問題 (1)

関川 浩

2016/09/21

概要

- 縮小法
- 縮小法を用いた線形計画法のアルゴリズム
(単体法, 内点法とは違ったアプローチ)

  今回は 2 次元に限って説明

1. 縮小法
   - 縮小法のパラダイム
   - 例: 中央値を求めるアルゴリズム

2. 2 次元の線形計画問題
   - 問題の変形
   - 凸関数
   - 有効な制約, 冗長な制約
   - max{ 複数の線形関数 } の性質
   - 計算量

1. 縮小法
2. 2 次元の線形計画問題

縮小法のパラダイム

縮小法

- 繰り返しの各段階で，一定の割合で問題を小さくしていく
- 問題サイズがある定数より小さくなれば直接解く

仮定

- 問題サイズの c (定数) 倍の時間で，問題サイズを α 倍 ($\alpha < 1$) にできる
- d: ある定数より小さな問題を直接解くコスト

サイズ n の問題に対する計算量は

$$d + cn + cn\alpha + cn\alpha^2 + \cdots = d + \frac{cn}{1-\alpha} = O(n)$$

で上から押えられる

例: 中央値を求めるアルゴリズム

問題

n 個の数値データ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ に対し，大きい方から $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ 番目のデータを求めよ (n が奇数のときは中央値になる)

より一般に:

問題

n 個の数値データ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ に対し，大きい方から k 番目のデータを求めよ

計算量

- データをソートしてから k 番目を求めると $O(n \log n)$
- 縮小法を使うと $O(n)$

k 番目を求めるアルゴリズム

1. $a_1, \ldots, a_n$ を 15 個ずつのグループに分割, 各グループごとにデータの中央値を求める
2. 1 で得られた $n/15$ 個の中央値にこのアルゴリズムを再帰的に適用し中央値の中央値 M を求める
3. $a_1, \ldots, a_n$ を三つの組 S, E, L に分割

$$S = \{a_i \mid a_i < M\}, \quad E = \{a_i \mid a_i = M\}, \quad L = \{a_i \mid a_i > M\}$$

4. $k \le |L|$ のとき, L の中で k 番目に大きいデータが答 (再帰的に求める)
5. $k > |L| + |E|$ のとき, S の中で $k - |L| - |E|$ 番目に大きいデータが答 (再帰的に求める)
6. 4, 5 以外の場合, M が答

計算量 (1/3)

$T(n)$: 前スライドのアルゴリズムにおいて数値を比較する回数

- 15 個のデータをソートする比較回数は定数 (42 回で十分)
- $(n/15)$ 個の中央値にアルゴリズムを再帰的に適用,
  中央値の中央値 M を求めるのに: $T(n/15)$
- 三つの組 S, E, L に分割: n 回の比較
- L に属するデータは高々 $11n/15$ 個 (次スライド. S も同じ)
  $\Longrightarrow$ L または S に再帰的に適用したとき: $T(11n/15)$

これから:

$$T(n) \leq \frac{14n}{5} + T\left(\frac{n}{15}\right) + n + T\left(\frac{11n}{15}\right)$$

これより $T(n) \leq 19n$ (次々スライド)

計算量 (2/3)

L に属するデータは高々 $\frac{11n}{15}$ 個 (S も同じ)

証明

- M 以下の中央値を持つグループは少なくとも $\frac{1}{2} \cdot \frac{n}{15} = \frac{n}{30}$ 個
- 中央値が M 以下のグループでは少なくとも 8 個のデータが M 以下
- よって, M 以下のデータは少なくとも $8 \cdot \frac{n}{30} = \frac{4n}{15}$ 個
- したがって, L に属するデータは高々 $n - \frac{4n}{15} = \frac{11n}{15}$ 個
- 「以下」を「以上」に変えれば同様にして S に属するデータは高々 $n - \frac{4n}{15} = \frac{11n}{15}$ 個 ■

計算量 (3/3)

$$T(n) \le \frac{14n}{5} + T\left(\frac{n}{15}\right) + n + T\left(\frac{11n}{15}\right) \implies T(n) \le 19n$$

証明

- $n = 1,\ 2,\ 3$ では成立
- $n\ (\ge 3)$ 以下で成立を仮定して $n+1$ のとき

$$\begin{aligned}
T(n+1) &\le \frac{14(n+1)}{5} + T\left(\frac{n+1}{15}\right) + n + 1 + T\left(\frac{11(n+1)}{15}\right) \\
&\le \frac{19(n+1)}{5} + \frac{19(n+1)}{15} + \frac{209(n+1)}{15} \\
&= 19(n+1)
\end{aligned}$$

■

2 次元の線形計画問題

n 不等式制約をもつ 2 次元の一般の線形計画問題

最小化: $c_1x_1 + c_2x_2$
条件: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq a_{i0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$

以下の形のみを考える

n 不等式制約をもつ 2 次元の線形計画問題 (特殊形)

最小化: y
条件: $y \geq a_i x + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$

特殊形に対する線形時間アルゴリズムがあれば一般形についてもそう

問題の変形

再掲: n 不等式制約をもつ 2 次元の線形計画問題 (特殊形)

最小化: y
条件: $y \geq a_i x + b_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$

これは以下と等価

関数の最小値

$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{a_i x + b_i \mid i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ の最小値を求めよ

- 縮小法を利用, 冗長な関数を削除していく
- $O(n)$ 時間で一定の割合が削除できればよい

凸関数 (1/3)

定義 (凸)

- 関数 $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ が凸とは, 任意の $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $(x_1 \neq x_2)$, λ $(0 < \lambda < 1)$ に対して以下が成り立つこと

$$g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda g(x_1) + (1-\lambda)g(x_2) \qquad (*)$$

- 関数 $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ が狭義凸とは, $(*)$ でつねに “$<$” が成り立つこと

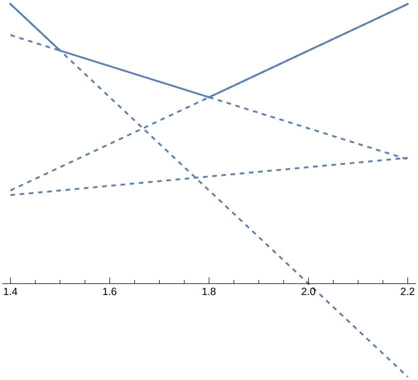
凸関数の性質

- 凸関数は連続
- 凸関数が極小値を持てばそれは最小値
- 狭義凸関数は高々一つの最小値を持つ

凸関数 (2/3)

$g_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$: 凸関数

- $g'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{g_i(x) \mid i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k\}$ は凸関数
- $g'(x)$ の最小値は g_i のうち高々二つで決まる



凸関数 (3/3)

仮定

凸関数 $g(x)$ は $x = x^*$ において最小値を取る

このとき, 任意の $c \in \mathbb{R}$ について十分小さな $\varepsilon > 0$ に対し,

- $g(c+\varepsilon) < g(c)$ なら $c \leq x^*$
- $g(c-\varepsilon) < g(c)$ なら $c \geq x^*$
- $g(c-\varepsilon) \geq g(c)$ かつ $g(c+\varepsilon) \geq g(c)$ なら $g(c) = g(x^*)$

有効な制約, 冗長な制約 (1/2)

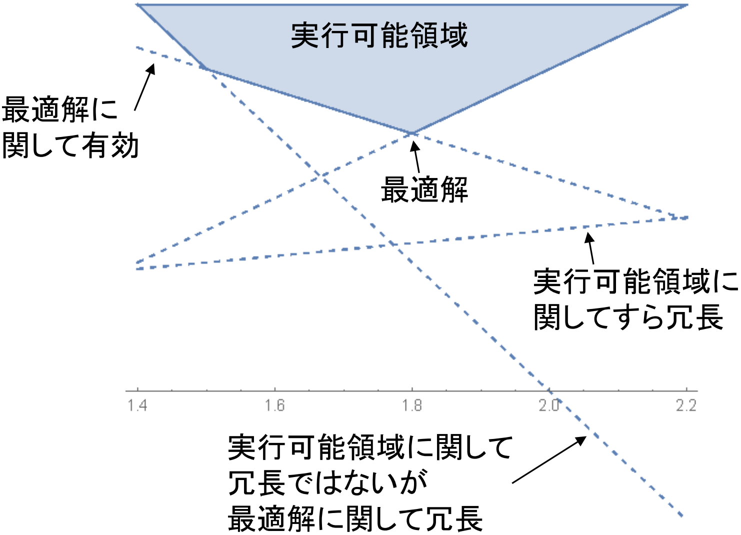
定義 (最適解で有効な関数, 冗長な関数)

x^*: 最適解 ($\overset{\text{def}}{\iff} g'(x^*)$ が最小値)

- 最適解で有効な関数 $\overset{\text{def}}{\iff} (x^*, g'(x^*))$ を通る関数
- 最適解で冗長な関数 $\overset{\text{def}}{\iff}$ 最適解で有効な関数以外の関数

- 有効な関数は複数あり得るが, 最適解を決めるのはそのうちの高々二つ
- 冗長な関数を除いても最適解は不変

有効な制約, 冗長な制約 (2/2)



$\max\{a_i x + b_i \mid i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ の性質 (1/4)

$f(x) = \max\{a_i x + b_i \mid i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ について以下が成立

1. $f(x)$ は凸関数
2. $f(x)$ が $x = x^*$ (具体的な値は不要) で最小値を取ると仮定

   $\forall c \in \mathbb{R}$ に対し $c \le x^*$ か $c \ge x^*$ かを $O(n)$ 時間で決定可能
   (最適解が一意でなくても (区間でも) 成立)

3. 以下の c を $O(n)$ 時間で決定可能

   $c \le x^*$ か $c \ge x^*$ かを決定することにより, 元の線形計画問題の, 少なくとも $n/4$ 個の冗長な制約が判明

   $\Longrightarrow$ 再帰的に適用, 線形計画問題のサイズを定数個 (2, 3 個) まで落とし, 直接解く (定数時間)

$\max\{a_i x + b_i \mid i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ の性質 (2/4)

2. $\forall c \in \mathbb{R}$ に対し $c \le x^*$ か $c \ge x^*$ かを $O(n)$ 時間で決定可能

注意: $\min f(x) = -\infty \implies a_i$ がすべて等しい ($O(n)$ 時間で確認可能)

以下, $\min f(x) \neq -\infty$ とする

- $I = \{i \mid a_i c + b_i = f(c)\}$ を求める
  $\iff \max_j\{a_j c + b_j\} = a_i c + b_i$ を満たす i をすべて求める
  ($O(n)$ 時間で可能)
- $a^+ = \max\{a_i \mid i \in I\}$, $a^- = \min\{a_i \mid i \in I\}$ を計算
  ($O(n)$ 時間で可能)

$$a^+ > 0 \Longrightarrow x^* \le c$$
$$a^- < 0 \Longrightarrow x^* \ge c$$
$$a^- \le 0 \le a^+ \Longrightarrow c \text{ は最適解}$$

$\max\{a_i x + b_i \mid i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ の性質 (3/4)

二つの異なる制約 $y \geq a_i x + b_i,\ y \geq a_j x + b_j$ を考察

- $a_i = a_j$ の場合

  $b_i < b_j \implies$ 任意の x に対し $a_i x + b_i < a_j x + b_j$
  $\implies a_i x + b_i$ が冗長

  $b_i \geq b_j \implies$ 任意の x に対し $a_i x + b_i \geq a_j x + b_j$
  $\implies a_j x + b_j$ が冗長

- $a_i \neq a_j$ の場合, 必要なら番号を付けかえ $a_i > a_j$ とする
  $a_i c_{ij} + b_i = a_j c_{ij} + b_j$ を満たす c_{ij} をとる

  $c_{ij} > x^* \implies a_i x^* + b_i < a_j x^* + b_j \implies y \geq a_i x^* + b_i$ が冗長
  $c_{ij} < x^* \implies a_i x^* + b_i > a_j x^* + b_j \implies y \geq a_j x^* + b_j$ が冗長

$\max\{a_i x + b_i \mid i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ の性質 (4/4)

n 個の制約から $n/2$ 個の異なる対 $\{(i, j)\}$ を作る

- $a_i = a_j$ となる対
  二つの制約のうち冗長な一つを削除 ($O(n)$ で可能)
- $a_i \neq a_j$ となる対
  c_{ij} を計算, c_{ij} の中央値 c' を求め, x^* が c' のどちら側かテスト (すべて $O(n)$ で可能)
  - c' が最適解なら終了
  - そうでなければ,

    $x^* < c' \Longrightarrow c' \leq c_{ij}$ となる (i, j) ($n/2$ 個以上) について $x^* < c_{ij}$

    $x^* > c' \Longrightarrow c' \geq c_{ij}$ となる (i, j) ($n/2$ 個以上) について $x^* > c_{ij}$

    いずれの場合も添字 i あるいは j の制約を削除可能 ($O(n)$ で可能)

$\Longrightarrow$ 少なくとも制約の $1/4$ は $O(n)$ 時間で削除可能

計算量

定理 1

線形不等式制約が n 個の 2 次元線形計画問題は, 縮小法を用いて $O(n)$ 時間で解ける