アルゴリズム論 2
第 7 回: Arrangement (1)

関川 浩

2016/10/26

概要

- Arrangement の概要 (今回)
- Arrangement の応用 (次回)
- Arrangement の構成 (次々回)

1. Arrangement の定義
   - Arrangement の概観
   - 用語の定義
2. Arrangement の性質
   - 組み合せ複雑度
   - Face の数, 接続数
   - Face の数, 接続数のオーダ

Arrangement の概観 (1/2)

点の集合に関する問題

$\Updownarrow$ 点と超平面の双対性 (次回説明) から表裏一体

平面上の直線の集合, その高次元への拡張である超平面の集合に関する問題

- 点の問題を (あえて難しそうな) 超平面の問題に変換することで (逆に) 解きやすくなることがある
- Arrangement: 超平面の集合を計算機で扱うための概念の一つ

Arrangement の概観 (2/2)

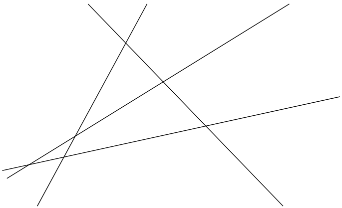
例: 2 次元の arrangement

$\mathbb{R}^2$ 内の直線 $l_1, \ldots, l_n$ $(n < \infty)$ によって $\mathbb{R}^2$ が分割される

この分割を Arrangement (後に高次元の場合にも定義) といい,

- その分割を構成する要素 (点, 線分, 面. まとめて face という) の接続関係
- 各 face が最初に与えられたどの直線に含まれているか

などの情報で記述できる



k-flat

定義 1 (k-flat)

$(k+1)$ 個の一次独立な点 $P_1, \ldots, P_{k+1} \in \mathbb{R}^d$

$(\iff O$ を原点として $\overrightarrow{OP_1}, \ldots, \overrightarrow{OP_{k+1}}$ が一次独立$)$

で張られる affine 空間

$$\{\lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \cdots + \lambda_{k+1} \overrightarrow{OP_{k+1}} \mid \lambda_1 + \cdots + \lambda_{k+1} = 1 \ (\lambda_i \in \mathbb{R})\}$$

を k-flat という

(-1)-flat: 空集合 (便宜上)

0-flat: 点

1-flat: 直線

2-flat: 平面

$(d-1)$-flat: 超平面

d-flat: $\mathbb{R}^d$ 自身

垂直

定義 2 (垂直)

k-flat f が垂直 $\iff$ 直交座標 $x_1, \dots, x_d$ を用いたとき k-flat f が x_d 軸に平行な直線を含む

π: 垂直ではない $\mathbb{R}^d$ の超平面

- 以下の条件を満たす $\eta_1, \dots, \eta_d \in \mathbb{R}$ が一意に存在

$$\pi = \{(x_1, \dots, x_d) \mid x_d = \eta_1 x_1 + \cdots + \eta_{d-1} x_{d-1} + \eta_d\}$$

- 点 $P = (p_1, \dots, p_d)$ に対し,

$$p_d \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} \eta_1 p_1 + \cdots + \eta_{d-1} p_{d-1} \iff P \text{ は } \pi \begin{cases} \text{より上にある} \\ \text{にのっている} \\ \text{より下にある} \end{cases}$$

π^+: π より上にある点の集合
π^-: π より下にある点の集合

符号ベクトル

$H = \{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$: $\mathbb{R}^d$ 内の超平面の集合, どの π_i も垂直ではない

- 点 P に対し $v_i(P) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & (P \in \pi_i^+) \\ 0 & (P \in \pi_i) \\ -1 & (P \in \pi_i^-) \end{cases}$
- $u(P) \overset{\text{def}}{=} (v_1(P), \ldots, v_n(P))$: P の符号ベクトル
- 点 P と Q が同値 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} u(P) = u(Q)$

定義 3 (Face)

上記同値関係による各同値類を arrangement $\mathcal{A}(H)$ (これ自体の定義は後述の定義 7) の face という

f を face としたとき, $P \in f$ をとって

- $u(f) \overset{\text{def}}{=} (v_1(P), \ldots, v_n(P))$: f の符号ベクトル
  (P の取り方に依存しない)

次元, 部分 face, 接続

定義 4 (Face の次元)

Face f の次元が k

$\Longleftrightarrow$ f はある k-flat に含まれるが, どんな $(k-1)$-flat にも含まれない

定義 5 (部分 face)

Face f が face g の部分 face $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} (f \text{ の次元}) = (g \text{ の次元}) - 1 \\ f \text{ は } g \text{ の境界に含まれている} \end{cases}$

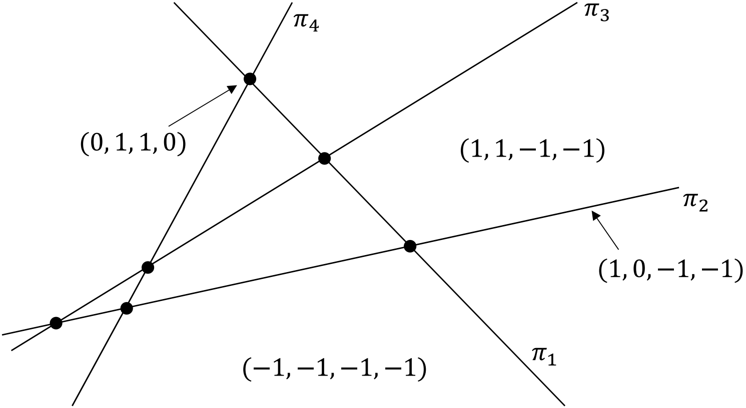
注意: f が g の部分 face なら $v_i(f) = v_i(g)$ あるいは 0

定義 6 (接続)

Face f と face g が接続

$\Longleftrightarrow$ f が g の部分 face, あるいは g が f の部分 face

2 次元の例



符号ベクトルなど (2 次元の場合)

Arrangement

定義 7 (Arrangement)

H: $\mathbb{R}^d$ 内の n 個の超平面の集合

H の arrangement $\mathcal{A}(H)$: 以下の情報を合わせたもの

- Face の集合とその接続関係
- 各 face に対し, それを含む超平面

Face の次元を明記したいとき, k 次元の face を k-face と書く

0-face: 頂点

1-face: 辺

$(d-1)$-face: facet

d-face: cell

Arrangement の単純性

定義 8 (Arrangement の単純性)

- $\mathbb{R}^d$ 内の n 個 $(n \geq d)$ の超平面の arrangement $\mathcal{A}(H)$ が単純
  $\Longleftrightarrow$ H に属する任意の d 個の超平面は 1 点で交わり,
  どの $(d+1)$ 個の超平面も交点をもたない
- $\mathbb{R}^d$ 内の n 個 $(n \leq d-1)$ の超平面の arrangement $\mathcal{A}(H)$ が単純
  $\Longleftrightarrow$ n 個の超平面の交点が $(d-n)$-flat

注意

$\mathcal{A}(H)$: 単純な arrangement

- f が $\mathcal{A}(H)$ の k-face
  $\Longrightarrow$ 符号ベクトル $u(f)$ のちょうど $d-k$ 個の成分が 0
- f が g の部分 face
  $\Longleftrightarrow$ $\exists j$ $(1 \leq j \leq n)$ s.t. $v_j(f) = 0 \neq v_j(g)$ かつ $v_i(f) = v_i(g)$ $(i \neq j)$

組み合せ複雑度

超平面によって分割された空間の組み合せ複雑度

- 各次元の face の数はどれくらいか
- どのような分割のとき face の数が最大になるか
- $\ldots$

H: $\mathbb{R}^d$ 内の n 個の超平面の集合

$f_k(H)$: $\mathcal{A}(H)$ の k-face の数 $(0 \leq k \leq d)$

$i_k(H)$: $\mathcal{A}(H)$ の k-face と $(k+1)$-face の間の接続関係の数 $(0 \leq k \leq d-1)$

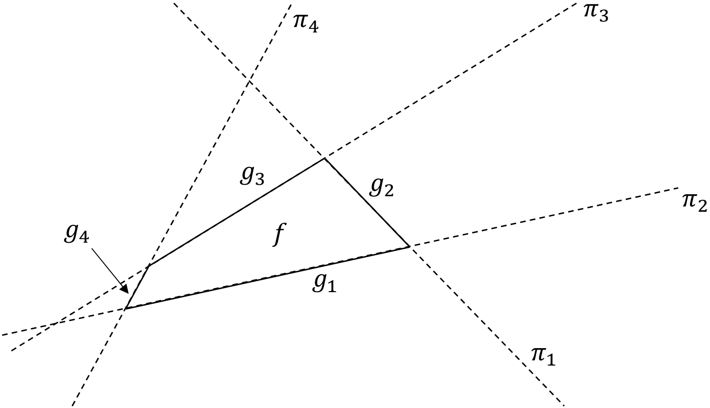
G が $\mathbb{R}^d$ 内の n 個の超平面の集合すべてをわたるとき

$$f_k^{(d)}(n) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{f_k(G)\}, \qquad i_k^{(d)}(n) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i_k(G)\}$$

問題

$f_k(H)$, $i_k(H)$, $f_k^{(d)}(n)$, $f_k^{(d)}(n)$ はどれくらいになるか

例: 接続関係の数



2-face f に接続しているのは 1-faces g_1, g_2, g_3, g_4

Face の数, 接続数 (1/11)

補題 1

H: $\mathbb{R}^d$ 内の, 1 点のみで交わる d 個の垂直ではない超平面の集合

$0 \leq k \leq d$ に対して

(1) $\binom{d}{d-k} 2^k$ 個の k-face が $\mathcal{A}(H)$ に存在

(2) $\mathcal{A}(H)$ の各 cell は $\binom{d}{d-k}$ 個の k-face を境界にもつ

例: 2 次元の場合

平面上の平行ではない 2 直線 ($\Longleftrightarrow$ 1 点でのみ交わる 2 直線) は

- 平面を 1 つの頂点, 4 つの辺, 4 つの領域に分割
- 各領域の境界は 2 本の辺と 1 個の頂点を含む

k	0	1	2
$\binom{d}{d-k} 2^k$	1	4	4
$\binom{d}{d-k}$	1	2	1

Face の数, 接続数 (2/11)

証明

(1) $H = \{\pi_1, \ldots, \pi_d\}$, $H_i = \{\pi_1, \ldots, \pi_i\}$ $(i = 1, \ldots, d)$ とする

π_i は $\mathcal{A}(H_{i-1})$ の各 face f を $f \cap \pi_i^+$, $f \cap \pi_i$, $f \cap \pi_i^-$ に分割

$\Longrightarrow$ $u \in \{1, 0, -1\}^d$ に対して, $u(g) = u$ となる $\mathcal{A}(H)$ 内の face g が存在

u がちょうど $(d-k)$ 個の 0 を含めば f は k-face

$\{1, 0, -1\}^d$ の内, ちょうど $(d-k)$ 個の 0 を含む列が $\binom{d}{d-k}2^k$ 個存在するから (1) は成立

(2) Face f が cell g の境界に属する $\Longleftrightarrow$ 「$v_i(f) \neq v_i(g) \Longrightarrow v_i(f) = 0$」

よって, 各 cell は $\binom{d}{d-k}$ 個の k-face を境界にもつ $(k = 0, \ldots, d)$ ■

Face の数, 接続数 (3/11)

補題 2

H: $\mathbb{R}^d$ 内の n 個の超平面の集合

$\mathcal{A}(H)$ が単純なとき,

(1) k $(0 \le k \le d)$ に対して

$$f_k(H) = \sum_{i=0}^{k} \binom{d-i}{k-i} \binom{n}{d-i}$$

(2) k $(0 \le k \le d-1)$ に対して

$$i_k(H) = 2(d-k) f_k(H)$$

Face の数, 接続数 (4/11)

証明 (1/7)

(2) $k = 0, \ldots, d-1$ に対し, 単純な arrangement の k-face は $2(d-k)$ 個の $(k+1)$-face に接続 (符号ベクトルを考えよ)
$\Longrightarrow$ 主張は成立

(1) $n \leq d$ の場合, $\{+1, 0, -1\}^n$ と $\mathcal{A}(H)$ の face の間に 1 対 1 対応が存在するから

$$f_k(H) = \binom{n}{d-k} \cdot 2^{n-d+k}$$

一方,

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{d-i}{k-i} \binom{n}{d-i} = \binom{n}{d-k} \cdot 2^{n-d+k}$$

が成立するので, $n \leq d$ の場合は成立

Face の数, 接続数 (5/11)

証明 (2/7)

$n > d$ の場合, 次元に関する帰納法による

$d = 1$ のとき

$$f_0^{(d)}(n) = f_0^{(1)}(n) = n, \qquad f_1^{(d)}(n) = f_1^{(1)}(n) = n + 1$$

一方, $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{d-i}{k-i}\binom{n}{d-i} = \sum_{i=0}^{k} \binom{1-i}{k-i}\binom{n}{1-i}$ は

- $k = 0$ のとき $\displaystyle\binom{1}{0}\binom{n}{1} = n$
- $k = 1$ のとき $\displaystyle\binom{n}{1} + \binom{n}{0} = n + 1$

$\Longrightarrow$ $d = 1$ のときは成立

Face の数, 接続数 (6/11)

証明 (3/7)

$d \geq 2$ で $d-1$ まで成立を仮定して d のとき

H: $\mathbb{R}^d$ 内の n 個の超平面の集合, $\mathcal{A}(H)$ は単純

- 任意の d 個の超平面は $\mathcal{A}(H)$ の頂点を定義

  $\Longrightarrow f_0(H) = \binom{n}{d}$ が成立

  $\sum_{i=0}^{k} \binom{d-i}{k-i}\binom{n}{d-i}$ において $k=0$ とすると $\binom{d-1}{0}\binom{n}{d} = \binom{n}{d}$

  $\Longrightarrow$ $k = 0$ の場合, 成立

- $k \geq 1$ の場合

  $\mathcal{A}(H)$ を走査する超平面 $h(t)$: $x_1 = t$ $(-\infty < t < \infty)$ を利用

  - H の超平面はすべて垂直ではなく
  - $\mathcal{A}(H)$ の任意の二頂点は異なる x_1 座標をもつ

  と仮定して一般性を失わない

Face の数, 接続数 (7/11)

証明 (4/7)

$\mathcal{A}(H)$ の $m = f_0(H)$ 個の頂点の x_1 座標を $t_1 < \cdots < t_m$ とする

- t より小さい x_1 座標をもつ頂点を $h(t)$ の後ろにあるといい
- t より大きい x_1 座標をもつ頂点を $h(t)$ の前にあるという

$\mathcal{A}_t(H) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{A}(H) \cap h(t)$

- $t \neq t_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ ならば $\mathcal{A}_t(H)$ は n 個の $(d-2)$-flat の $(d-1)$ 次元の単純な arrangement
- 帰納法の仮定から, $\mathcal{A}_t(H)$ は $k = 1, \ldots, d$ に対して

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{d-1-i}{k-1-i} \binom{n}{d-1-i}$$

個の $(k-1)$-face を含む ($t < t_1$, $t > t_m$ のときも成立)

Face の数, 接続数 (8/11)

証明 (5/7)

- $\mathcal{A}_t(H)$ の各 $(k-1)$-face は $\mathcal{A}(H)$ のある k-face に含まれる (一意に決まる)
- $\mathcal{A}(H)$ の各 k-face は, ある $0 \le a < b \le m+1$ に対して, 開区間 (t_a, t_b) 内で $h(t)$ と交わる ($t_0 = -\infty$, $t_{m+1} = \infty$ とする)

k-face f に対して

- x_1 座標が t_a (t_b) である頂点が存在するなら f の左端 (右端) の頂点と呼び
- $t \ge t_b$ ($t \le t_a$) なら f は $h(t)$ の後ろ (前) にあるという

Face の数, 接続数 (9/11)

証明 (6/7)

以下では, $k = 1, \ldots, d$ に対して t を動かしながら

$h(t)$ と交わる, または, $h(t)$ の後ろにある

$\mathcal{A}(H)$ の k-face の数を追跡する (補題 1 を利用)

- 最初, $h(t)$ の後ろには k-face はない
- $\mathcal{A}(H)$ の頂点を $h(t)$ が通るとき一つの cell が $h(t)$ の後ろへ
- 補題 1 より, ある cell の左端の頂点から右端の頂点まで t を動かす間に $h(t)$ の後ろになる k-face の数は $\binom{d}{d-k}$
- 全体を走査する間に $h(t)$ は $\binom{n}{d}$ 個の頂点を通り過ぎる
- これは, 最終的に $\binom{d}{d-k}\binom{n}{d}$ 個の k-face が $h(t)$ の後ろにあることを意味する
- 残りの k-face は $t > t_m$ のとき $h(t)$ と交わる

Face の数, 接続数 (10/11)

証明 (7/7)

したがって, $k = 1, \ldots, d$ に対して

$$
\begin{aligned}
f_k(H) &= \binom{d}{d-k}\binom{n}{d} + \sum_{i=0}^{k-1}\binom{d-1-i}{k-1-i}\binom{n}{d-1-i} \\
&= \binom{d}{k}\binom{n}{d} + \sum_{i=1}^{k}\binom{d-i}{k-i}\binom{n}{d-i} \\
&= \sum_{i=0}^{k}\binom{d-i}{k-i}\binom{n}{d-i}
\end{aligned}
$$

すなわち, d のときも成立 ■

Face の数, 接続数 (11/11)

定理 1

- $d \geq 1,\ n \geq 1$ に対し

$$f_k^{(d)}(n) = \sum_{i=0}^{k} \binom{d-i}{k-i} \binom{n}{d-i}$$

$$i_k^{(d)}(n) = 2(d-k) f_k^{(d)}(n)$$

- $\mathbb{R}^d$ 内の n 個の超平面の集合 H に対し

$$f_k(H) = f_k^{(d)}(n)\ (i_k(H) = i_k^{(d)}(n)) \iff \mathcal{A}(H) \text{ が単純}$$

補題 1 と同様に (あと少々の考察を加えて) 証明できる

Face の数, 接続数のオーダ

- $n = 2$ の場合

$$f_0^{(2)}(2) = \binom{n}{2}, \quad f_1^{(2)}(2) = 2\binom{n}{2} + 1, \quad f_2^{(2)}(2) = \binom{n}{2} + n + 1$$

- d を定数と考えれば

$$f_k^{(d)} = \Theta(n^d), \qquad i_k^{(d)} = \Theta(n^d)$$