

ソフトウェア科学 2

第 4 章 偏微分方程式の数値解法

第 1 節

偏微分方程式

1 初めに

自然界に現れる非常に多くの現象は、微分方程式を使って表現される。独立変数が我々の生きている世界が 3 次元空間と時間を含めて 4 つの独立変数があり、自然に偏微分方程式が導かれる。

偏微分方程式を解析的に解くことは、線形偏微分方程式でも特別な場合を除いてはほとんど不可能である。方程式が非線形になれば解析的に解くことはまず絶望的である。

そこで、コンピュータを用いて数値的方法で偏微分方程式を解くことを試みる。しかし、コンピュータは基本的には加減乗除の演算しか出来ない。そのためには、連続な偏微分方程式を離散化しなければならない。そして、離散問題に変形して解くのであるから、コンピュータで得られる解は偏微分方程式の厳密な解ではなく近似解である

2 偏微分方程式の分類

簡単のため 2 変数かつ 2 階の線形偏微分方程式に付いて考える。偏微分方程式は一般に次の方程式で表される。

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + f = 0 \quad \cdots (1.2.1)$$

この 2 階線形偏微分方程式の主要部、すなわち 2 階の偏微分項の部分

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

の係数の判別式により、3 つのタイプに分類される。

(1) 双曲型 (hyperbolic)	$b^2 - ac > 0$	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	波動方程式
(2) 放物型 (parabolic)	$b^2 - ac = 0$	$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	熱伝導方程式
(3) 楕円型 (elliptic)	$b^2 - ac < 0$	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$	Laplace 方程式
		$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -f$	Poisson 方程式

これは、 $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ より、由来する。

3 微分と差分法

ある物理量が空間内に連続的に分布していて、数学的にいうと微分可能な連続関数 $f(x)$ で与えられているものとする。

3.1 導関数

微分係数は次のように定義されている。

Definition 3.1 (微分係数)

x を独立変数とする関数 $y = f(x)$ があって, $f(x)$ の定義されている x の範囲 (定義域) に点 $x = a$ が含まれているとする。このとき,

$$\ell = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \dots (1.3.1)$$

上記のような 極限値が存在するならば、その値 ℓ を「 $x = a$ における $f(x)$ の微分係数 (differential coefficient)」と定義し、これを $f'(a)$ で表記する。 $f'(a)$ が定義できるとき、 $f(x)$ は $x = a$ において「微分可能である」という。

今、 x のある値 x_0 における温度の微係数 $f'(x)$ を求める問題を考える。微分の定義に従えばこの微係数は次式 (1.3.2) で与えられる。関数 $f(x)$ の導関数を 3.2 に定義した

Definition 3.2 (導関数)

$f(x)$ の導関数とは次式 (1.3.2) によって定められる関数である

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \dots (1.3.2)$$

この時の近似図を次の図 3.1 で図示した。

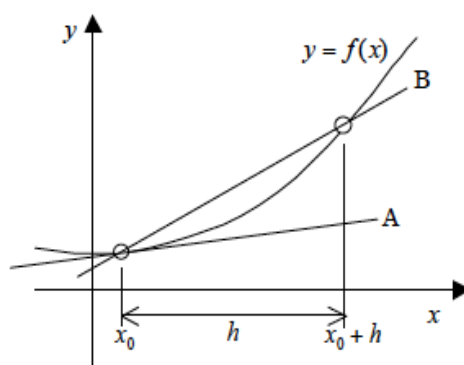


図 3.1 微係数と差分

式 (1.3.2) の近似式を次式 (1.3.3) で表した。

$$f'(x) \doteq \frac{F(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ここで、式 (1.3.3) の分子を前進差分、 Δx で割ったものを前進差分商と呼ぶ。つまり、式 (1.3.3) は、 $x = x_0$ における微係数をその近傍の関数値で近似したものである。多変数関数の微分についても同様にして、偏導関数が定義される。たとえば x, y を独立変数とする関数 $f(x, y)$ があって、 $f(x, y)$ の定義域内の各点 (x, y) で x にかんして偏微分可能であるならば、 $f_x(x, y)$ を x, y の関数と見なすことで x に関する偏導関数 (partial derivative) が定義される。

Definition 3.3 (偏導関数)

$f(x, y)$ の導関数とは次式 (1.3.3) によって定められる関数である

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad \dots (1.3.3)$$

もちろん、 y に関する偏微分係数や偏導関数は同様に定義できるし、3 変数以上の場合の偏導関数についても上記の考え方をそのまま拡張すればよい。

3.2 微分係数の近似

微分係数が上記のように定義??で定義されるとき、微分係数を差分商で置き換えるといい、次式 (1.3.4) で表す

$$f_x(x, y) \approx \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (\text{十分小さな } \Delta x \text{ に対して}) \quad \dots (1.3.4)$$

定義域内のすべての点上で定義されていた連続関数 $f(x, y)$ を、定義域内のとびとびの点上で定義された離散関数に置き換えることを言う。

3.3 差分法による近似の精度

差分法の定量的な性質 (特に差分法の精度) について議論するときは、テイラー展開 (Taylor expansion) を利用する。2 変数関数 $f(x, y)$ の場合、点 (a, b) を中心とするテイラー展開は次式 (1.3.5) で与えられる。

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a, b) \quad \dots (1.3.5)$$

今、式 (1.3.5) の $\Delta y = 0$ の場合を考えると次式 (1.3.7) で展開される

$$\begin{aligned} f(a + \Delta x, b) &= f(a, b) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2} \\ &\quad + \frac{\partial^3 f(a, b)}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^3}{6} \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad \dots (1.3.6)$$

これを、 $\partial f / \partial x$ について解けば、次式 (1.3.8) が得られる

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} &= \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x} - \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2} \\ &\quad - \frac{\partial^3 f(a, b)}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^3}{6} \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad \dots (1.3.7)$$

項数が増えていくと、離散化された値を $f(a + \Delta x, b + \Delta y)$ のように書くのは煩雑なので、今後は下付きの添え字 (subscript) を用いることにする。ある点 (x_0, y_0) を基準として各々の点に番号をふり、次のようにする

$$x_j = x_0 + j\Delta x \quad , \quad y_k = y_0 + k\Delta y \quad (j, k = 0, 1, 2, \dots) \quad \dots (1.3.8)$$

また、対応する関数値や微分係数を次のように書く

$$f(x_j, y_k) = f_{j,k} \quad , \quad \frac{\partial f(x_j, y_k)}{\partial x} = \frac{\partial f_{j,k}}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{j,k} \quad \dots (1.3.9)$$

この約束にしたがうと、式 (1.3.8) は次式 (1.3.10) と簡潔に表すことができる

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_j, y_k)}{\partial x} &= \frac{f_{j+1,k} - f_{j,k}}{\Delta x} - \frac{\partial^2 f_{j,k}}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x}{2} - \frac{\partial^3 f_{j,k}}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^2}{6} + \dots \\ &= \frac{f_{j+1,k} - f_{j,k}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \end{aligned} \quad \dots (1.3.10)$$

ここで、 $\mathcal{O}(\Delta x)$ は打ち切り誤差と呼ばれている。

3.4 前進差分・後退差分・中心差分

微分係数の定義から差分式 (1.3.4) を提案し、そのあとでテイラー展開を利用して誤差評価を行ったが、逆にテイラー展開で得られた $f(x, y)$ の級数式から新たに差分式を導出し、同時に誤差評価を行う。 $\Delta y = 0$ として、点 (x_j, y_k) のまわりで $f(x, y)$ をテイラー展開すると、 x_j の両隣の点 x_{j-1} 、 x_{j+1} における f の値は次式 (1.3.11) で表される。

$$\begin{aligned} f_{j \pm k} &= f_{j,k} \pm \frac{\partial f_{j,k}}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial^2 f_{j,k}}{\partial x^2} \cdot \frac{(\Delta x)^2}{2!} \pm \frac{\partial^3 f_{j,k}}{\partial x^3} \cdot \frac{(\Delta x)^3}{3!} \\ &\quad + \frac{\partial^4 f_{j,k}}{\partial x^4} \cdot \frac{(\Delta x)^4}{4!} \pm \frac{\partial^5 f_{j,k}}{\partial x^5} \cdot \frac{(\Delta x)^5}{5!} \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad \dots (1.3.11)$$

3.4.1 1階偏微分

式 (1.3.11) を利用して、1階偏微分項を求めると、以下の3種類の表現が得られる。

$$(1) \text{ 前進差分 (forward difference)} \quad \frac{\partial f(x_j, y_k)}{\partial x} = \frac{f_{j+1,k} - f_{j,k}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad \dots (1.3.12)$$

$$(2) \text{ 後退差分 (backward difference)} \quad \frac{\partial f(x_j, y_k)}{\partial x} = \frac{f_{j,k} - f_{j-1,k}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad \dots (1.3.13)$$

$$(3) \text{ 中心差分 (central difference)} \quad \frac{\partial f(x_j, y_k)}{\partial x} = \frac{f_{j+1,k} - f_{j-1,k}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad \dots (1.3.14)$$

また、計算領域の境界において、 $\partial f / \partial x$ を求める場合、上記式 (1.3.12)～式 (1.3.14) を適用しようとする領域外の関数値が必要になってしまう。そのような場合、境界における微分係数だけは別の差分式を使って計算することがある。以下の式 (1.3.15) と式 (1.3.16) つは、境界での扱いを考慮した片側差分近似である

$$\frac{\partial f(x_j, y)}{\partial x} = \frac{f_{j-2,k} - 4f_{j-1,k} + f_{j,k}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad \dots (1.3.15)$$

$$\frac{\partial f(x_j, y)}{\partial x} = \frac{-3f_{j,k} + 4f_{j+1,k} - f_{j+2,k}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad \dots (1.3.16)$$

3.4.2 2階偏微分

式 (1.3.11) を利用して、2階偏微分項を求めると、以下の表現が得られる。

$$\frac{\partial^2 f(x_j, y_k)}{\partial x^2} = \frac{f_{j-1,k} - 2f_{j,k} + f_{j+1,k}}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad \dots (1.3.17)$$

4 固有値の存在範囲

行列の固有値が含まれない複素平面内の領域の定理を「排除定理」と呼ばれる。排除定理から逆にすべての固有値が含まれる領域がわかるので、排除定理がすべての固有値が含まれる領域を示す形で述べられることもある。排除定理 4.1 は次で示す

Theorem 4.1 (排除定理)

行列ノルムがベクトルのノルムからつぎのように定義されたとする。

$$\|A\| = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \quad \mathbf{x} \in \mathbf{C}^n, A \in \mathbf{C}^{n \times n}, n \in \mathbf{I} \quad \dots (1.4.1)$$

このとき、行列 A のすべての固有値 λ は次式を満たす。

$$|\lambda| \leq \|A\| \quad \dots (1.4.2)$$

[証明]

\mathbf{x} が行列 A の固有値 λ に対する固有ベクトルであるとする次式 (3.2.2) で表せる。

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad \dots (1.4.3)$$

式 (3.2.2) の両辺をノルムを取り整理すると次式 (3.2.3) が得られる

$$\|A\| \|\mathbf{x}\| \geq \|A\mathbf{x}\| = \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\| \quad \dots (1.4.4)$$

よって、行列 A のすべての固有値 λ は次式 (3.2.4) を満足する

$$|\lambda| \leq \|A\| \quad \dots (1.4.5)$$

■

Theorem 4.2 (ゲルシュゴリン (Gerschgorin) の定理)

行列 A の固有値は複素 λ 平面の中のつぎの集合の中に存在する。

$$K = \bigcup_{i=1}^n \left\{ \mu \in \mathbf{C} \mid |\mu - a_{ii}| \leq \sum_{k=1, k \neq i}^n |a_{ik}| \right\} \quad \dots (1.4.6)$$

右辺の和集合の中の各集合は中心を a_{ii} とする半径 r の複素平面内の閉円板である。

$$r = \sum_{K=1, K \neq i}^n |a_{ik}| \quad \dots (1.4.7)$$

[証明]

\boldsymbol{x} が行列 A の固有値 λ に対する固有ベクトルであるとする。いま、任意の行列 $B \in \mathbf{C}^{n \times n}$ を選び、 λ は行列 B の固有値で無いとする。式 (3.2.2) より式 (3.2.7) が得られる

$$(A - B)\boldsymbol{x} = (\lambda I - B)\boldsymbol{x} \quad \dots (1.4.8)$$

λ が行列 B の固有値でないことから、 $(\lambda I - B)^{-1}$ が存在する。式 (3.2.7) の両辺に $(\lambda I - B)^{-1}$ を左辺から作用させると式 (3.2.8) が得られる。

$$\boldsymbol{x} = (\lambda I - B)^{-1} (A - B) \boldsymbol{x} \quad \dots (1.4.9)$$

式 (3.2.8) の両辺をノルムを取ると次式 (3.2.9) が得られる

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}\| &= \|(\lambda I - B)^{-1} (A - B) \boldsymbol{x}\| \\ \|\boldsymbol{x}\| &\leq \|(\lambda I - B)^{-1} (A - B)\| \|\boldsymbol{x}\| \\ \|(\lambda I - B)^{-1} (A - B)\| &\geq 1 \end{aligned} \quad \dots (1.4.10)$$

ここで、特に、行列 A の対角成分以外をすべて零とした行列を A_D とし、 $B = A_D$ の場合を考える。ノルムとして最大値ノルムを考えると上式 (3.2.9) は次式 (3.2.10) となる。

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - B)^{-1} (A - B)\|_{\infty} &= \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |(\lambda_i - a_{D_{i,k}}) (a_{i,k} - a_{D_{i,k}})| \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{|\lambda_i - a_{ii}|} \sum_{k=1, k \neq i}^n |a_{ik}| \geq 1 \end{aligned} \quad \dots (1.4.11)$$

これらより、ある j が存在して、次式 (3.2.11) が成立する。

$$|\lambda - a_{jj}| \leq \sum_{k=1, k \neq j}^n |a_{jk}| \quad \dots (1.4.12)$$

■

第2節

Poisson 方程式・Laplace 方程式

1 連続問題

Ω を平面上の有界領域、その境界 Γ (あるいは $\partial\Omega$) は区分的に滑らかであるとする。

Ω で定義された関数 $f = f(x, y)$ が与えられたときに、次の定義を満たす Ω で定義された関数 $u(x, y)$ を求める問題を考える。

Definition 1.4 (ポアソン方程式)

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f & (x, y) \in \Omega \\ u = 0 & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad \dots (2.1.1)$$

この作用素 (Δ) をラプラス (Laplace) の作用素という。式 (2.1.1) の第1式をポアソン方程式といい、作用素 L を次のようにおけば、ポアソン方程式は次式 (2.1.2) で表される。

$$\begin{aligned} L &= -\Delta \\ Lu &= f \end{aligned} \quad \dots (2.1.2)$$

領域の内部 Ω では偏微分方程式 (式 (2.1.1) の第1式) を見たし、境界 $\partial\Omega$ で境界条件 (式 (2.1.1) の第2式) を満たす関数 u を求めることが与えられた問題を連続問題と呼ばれている。

例題

(1) 膜の釣り合い問題

$\partial\Omega$ で表される枠に張った膜が外力 f と釣り合いの状態であるとき、膜に垂直な方向の変位 u を求める問題

(2) 流体問題

断面が Ω である一様な管の両端に圧力差 f があるとき、管の中を流れる流体の Ω に垂直な方向の流速成分 u を求める問題

(3) 伝熱問題

領域 Ω に熱源 f が分布しており、境界 $\partial\Omega$ で一定温度であるとき、領域内の温度 u を求める問題

ポアソン方程式の未知関数 u は独立変数 (x, y) の関数であり、 (x, y) は領域 Ω とその周囲 $\partial\Omega$ の任意の点を連続的に変わり得るため、この意味で問題 (式 (2.1.1)) は連続問題である。

2 離散問題

ポアソン方程式を差分法を用いて解く。

図 2.1 には、領域 Ω の格子間隔 (x 軸方向 $\Delta x > 0$ および y 方向 $\Delta y > 0$) の格子で覆った図である。ここで、図内の \circ は領域の内部点、 \bullet は境界点である。

$$x = i \Delta x, \quad y = j \Delta y \quad (i, j \in \mathbf{I}) \quad \dots (2.2.1)$$

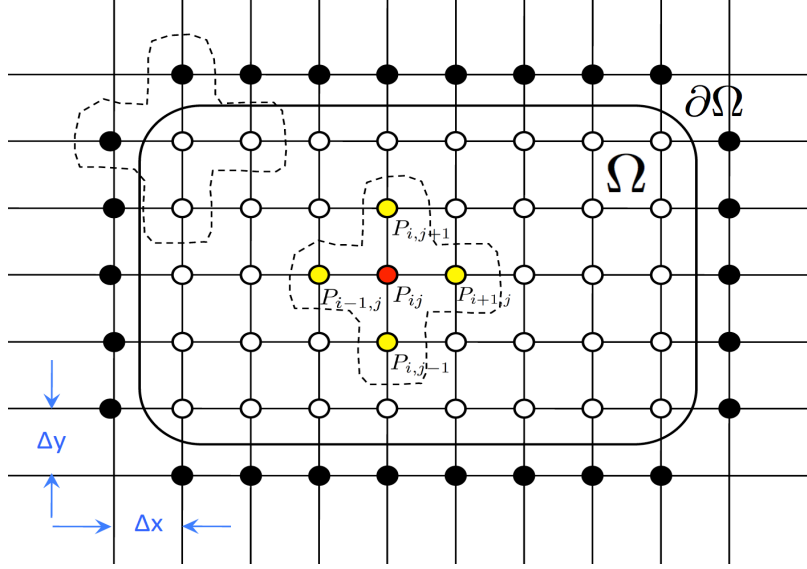


図 2.1 領域のメッシュ

x 軸、 y 軸に平行な直線の交点 $(i \Delta x, j \Delta y)$ を格子点と言い、 $P_{ij} \equiv (i \Delta x, j \Delta y)$ で表す。

Definition 2.5 (格子点集合)

格子点集合 Ω_h を次式 (2.2.2) で定義する。

$$\Omega_h = \{P_{ij} \in \Omega \mid i, j \in \mathbf{Z}\} \quad \dots (2.2.2)$$

P_{ij} の隣接点は 4 つあり $P_{i-1,j}$, $P_{i+1,j}$, $P_{i,j-1}$, $P_{i,j+1}$ である。

また、境界格子点集合 $\partial\Omega_h$ を次のように定義する

Definition 2.6 (格子点集合)

境界格子点集合 Ω_h を次式 (2.2.3) で定義する。

$$\Gamma_h \equiv \partial\Omega_h = \{P_{ij} \notin \Omega \mid i, j \in \mathbf{Z}\}, \text{ 少なくとも 1 つの隣接点が } \Omega_h \text{ に属す} \quad \dots (2.2.3)$$

差分法では、格子集合 $\Omega_h \cup \Gamma_h$ 上でのみ定義された関数 u_h を考える。

$$v(x + \Delta x, y) = v(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} (\Delta x)^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} (\Delta x)^4 + \dots \quad (2.2.4)$$

$$v(x - \Delta x, y) = v(x, y) - \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} (\Delta x)^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} (\Delta x)^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} (\Delta x)^4 - \dots \quad (2.2.5)$$

上式の式 (2.2.4) と式 (2.2.5) を加えると次式が得られる

$$v(x + \Delta x, y) + v(x - \Delta x, y) = 2v(x, y) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \frac{1}{12} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} (\Delta x)^4 + \dots \quad \dots (2.2.6)$$

よって、

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{v_{i-1,j} - 2v_{i,j} + v_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^2 \quad \dots (2.2.7)$$

変数 y について同様にすると次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{v_{i,j-1} - 2v_{i,j} + v_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} + \mathcal{O}(\Delta y)^2 \quad \dots (2.2.8)$$

Poisson 方程式より

$$Lv = -f \quad \longrightarrow \quad -\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = f$$

差分作用素 L_h を次式で定義する

Definition 2.7 (差分作用素)

$$(L_h v)(P_{ij}) = -\left\{ \frac{v_{i-1,j} - 2v_{i,j} + v_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{v_{i,j-1} - 2v_{i,j} + v_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} \right\} \quad \dots (2.2.9)$$

ここに、 $v_{ij} \equiv v(P_{ij})$ と略記する。

以上より、連続問題のポアソン方程式 (2.1.1) を次式 (2.2.10) で示す式に置き換えた離散問題となる。

$$\begin{cases} (L_h u_h)(P_{i,j}) = f(P_{i,j}) & P_{i,j} \in \Omega_h \\ u_h(P_{i,j}) = 0 & (x, y) \in \partial\Omega_h \end{cases} \quad \dots (2.2.10)$$

この離散問題は、求めるべき未知関数 u_h が離散個の点 (格子点) でのみ定義されているため、偏微分方程式 (2.1.1) に対して、式 (2.2.10) を差分方程式という。

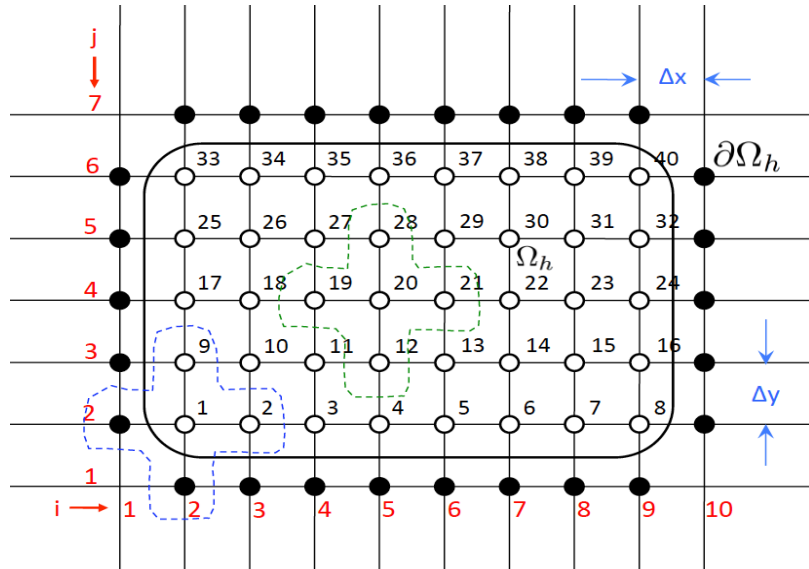


図 2.2 メッシュ点の番号

格子点集合 Ω_h の要素数を N とする。そして、その格子点集合の要素 $P_{i,j}$ に一連の番号 $1, 2, 3, \dots, N$ を付ける (図 2.2 参照)。そしてその要素を Q_j ($1, 2, \dots, N$) とする。(図 2.2 では $N = 40$ 、で $P_{5,4} \equiv Q_{20}$ となる)

差分方程式 (2.2.10) は未知数 $u_h(P_{i,j})$ に関する N 元連立一次方程式に帰着される。 $(A \mathbf{u} = \mathbf{f})$

† 内点

$$(L_h u_h)(P_{5,4}) = -\left\{ \frac{u_{4,4} - 2u_{5,4} + u_{6,4}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{5,3} - 2u_{5,4} + u_{5,5}}{(\Delta y)^2} \right\} = f_{5,4}$$

$$(L_h u_h)(Q_{20}) = -\left\{ \frac{u_{19} - 2u_{20} + u_{21}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{12} - 2u_{20} + u_{28}}{(\Delta y)^2} \right\} = f_{20}$$

十境界点に面した点

$$(L_h u_h) (P_{2,2}) = - \left\{ \frac{u_{1,2} - 2 u_{2,2} + u_{3,2}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{2,1} - 2 u_{2,2} + u_{2,3}}{(\Delta y)^2} \right\} = f_{5,4}$$

$$(L_h u_h)(Q_1) = - \left\{ \frac{u_\phi - 2u_1 + u_2}{(\Delta x)^2} + \frac{u_\phi - 2u_1 + u_9}{(\Delta y)^2} \right\} = f_1$$

$$(L_h u_h)(Q_1) = - \left\{ \frac{-2u_1 + u_2}{(\Delta x)^2} + \frac{-2v_1 + u_9}{(\Delta y)^2} \right\} = f_1$$

u_ϕ は境界点 (境界条件で $u(1, 2) = 0$, $u(2, 1) = 0$) で境界条件の数値を用いる。

ここで、便宜上 $\Delta x = \Delta y = h$ とする。

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & & & & & \\ & -1 & 4 & -1 & & & & & & \\ & & -1 & 4 & -1 & & & & & \\ & & & -1 & 4 & -1 & & & & \\ & & & & -1 & 4 & -1 & & & \\ & & & & & -1 & 4 & -1 & & \\ & & & & & & -1 & 4 & -1 & \\ -1 & & & & & & & -1 & 4 & -1 \\ & -1 & & & & & & & -1 & 4 \\ & & -1 & & & & & & & -1 \\ & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & & & & & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{39} \\ u_{40} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \\ f_{10} \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{39} \\ f_{40} \end{bmatrix}$$

この係数行列 A は対称行列で体格成分はすべて正、さらに $|a_{k,k}| \geq \sum_{k+\ell} |a_{k,\ell}|$ で広義の対角優位行列であるので、Gerschgorin の定理より行列 A の固有値は非負である。また、行列 A は正則行列なので固有値はすべて正である。つまり、行列 A は正定値行列である。また、行列 A は疎である。行列 A の各行の非零要素は領域 Ω の次元によるが、2次元の場合は高々5 (1次元では3、3次元では7) である。格子点の幅 $(\Delta x, \Delta y)$ を小さくすると、格子点の個数 N は $\mathcal{O}(\Delta x^{-2})$ と $\mathcal{O}(\Delta y^{-2})$ で大きくなるが、行列の性質は変わらない。このため、こ

これらの性質の特徴を生かした連立一次方程式の解法が必要となる。スカラーコンピュータでは S.O.R. 法が適しているが、並列計算可能な行列のためヤコビ法が適している。

3 収束性

差分法により離散化された離散問題式 (2.2.10) の解が連続問題式 (2.1.1) の解に格子間隔 ($\Delta x, \Delta y$ あるいは h) をゼロに近づけたとき収束するかを示さなければならない。

閉集合を \mathcal{K} とし、 \mathcal{K} は領域 Ω を含み ($\mathcal{K} \supset \Omega$) かつ全ての $h < 1$ に対して $\Omega_h \cup \Gamma$ を含んでいるとする。また、領域 \mathcal{K} で k 回連続微分可能な関数の全体を $\mathbf{C}^k(\mathcal{K})$ とする。 $v \in \mathbf{C}^k(\mathcal{K})$ なる関数とするとき次式が示される

$$M_k(v; \mathcal{K}) = \begin{cases} M_{0,0}(v; \mathcal{K}) & (k = 0) \\ M_{k,0}(v; \mathcal{K}) & (k \geq 1) \end{cases} \quad \dots (2.3.1)$$

ただし、

$$M_{\ell,m}(v; \mathcal{K}) = \max \left\{ \left| \frac{\partial^{\ell+m} v(x, y)}{\partial x^\ell \partial y^m} \right| \right\} \quad (x, y) \in \mathcal{K} \quad \dots (2.3.2)$$

Lamma 3.1

$k = 1, 2$ とし、 v を $\mathbf{C}^{k+2}(\mathcal{K})$ の関数とする。そのとき次式 (2.3.3) が成立する

$$\max \{ |(L_h v - L v)(P_{i,j})| \} \leq \frac{2h^k}{(k+2)!} M_{k+2}(v; \mathcal{K}) \quad P_{i,j} \in \Omega_h \quad \dots (2.3.3)$$

[証明]

$k = 2$ とすると $v(x+h, y)$ と $v(x-h, y)$ を $v(x, y)$ つまり $P_{i,j}$ の点で Taylor 展開する

$$\begin{cases} v(x+h, y) = v(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} h^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} h^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} h^4 + \dots \\ v(x-h, y) = v(x, y) - \frac{\partial v}{\partial x} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} h^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} h^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} h^4 + \dots \end{cases} \quad \dots (2.3.4)$$

上式 (2.3.3) の 2 つの式を加え整理すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \left| \frac{v(x-h, y) - 2v(x, y) + v(x+h, y)}{h^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right| &\leq \frac{1}{12} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} h^2 \\ &= \frac{1}{12} M_{4,0}(v) h^2 \quad \dots (2.3.5) \end{aligned}$$

同様に、 $v(x, y+h)$ と $v(x, y-h)$ を $v(x, y)$ つまり $P_{i,j}$ の点で Taylor 展開して、2 式を加えて整理すると次式 (2.3.7) が得られる

$$\begin{aligned} \left| \frac{v(x, y-h) - 2v(x, y) + v(x, y+h)}{h^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right| &\leq \frac{1}{12} \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} h^2 \\ &= \frac{1}{12} M_{0,4}(v) h^2 \quad \dots (2.3.6) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{cases} L_h v_h(P_{i,j}) = \frac{v(x-h, y) - 2v(x, y) + v(x+h, y)}{h^2} \\ \quad + \frac{v(x, y-h) - 2v(x, y) + v(x, y+h)}{h^2} \\ L v(P_{i,j}) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{cases} \quad \dots (2.3.7)$$

より、式 (2.3.6) と式 (2.3.7) から次式 (2.3.8) が得られる

$$\begin{aligned} |L_h v_h(P_{i,j}) - L v(P_{i,j})| &\leq \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} \right) \\ &= \frac{h^2}{12} (M_{4,0}(v; \mathcal{K}) + M_{0,4}(v; \mathcal{K})) \end{aligned} \quad \dots (2.3.8)$$

同様にすると、 $k = 1$ の時も同じように次式 (2.3.9) が得られる。

$$\begin{aligned} |L_h v_h(P_{i,j}) - L v(P_{i,j})| &\leq \frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) \\ &= \frac{h^2}{3} (M_{3,0}(v; \mathcal{K}) + M_{0,3}(v; \mathcal{K})) \end{aligned} \quad \dots (2.3.9)$$

■

上記の補助定理 (Lemma 3.1) により差分作用素 L_h は微分作用素 L を近似している。このことは、 L_h は適合性の条件 を満足しているという。

Lamma 3.2

格子点 $\Omega_h \cup \Gamma_h$ 上で定義された関数 v が次式 (2.3.10) を満足しているとき

$$\begin{cases} L_h v \geq 0 & (P_{i,j} \in \Omega_h) \\ v \geq 0 & (P_{i,j} \in \Gamma_h) \end{cases} \quad \dots (2.3.10)$$

このとき、次式 (2.3.11) が成立する

$$v \geq 0 \quad (P_{i,j} \in \Omega_h \cup \Gamma_h) \quad \dots (2.3.11)$$

[証明]

$\alpha = \min\{v_{i,j}\} \quad P_{i,j} \in \Omega_h \cup \Gamma_h$ とおく

今、 $\alpha < 0$ と仮定し ($v_{i,j} \geq 0$ の矛盾をいう)

最小値 α になる格子点を $P_{k,\ell}$ とする。 $\alpha < 0$ より式の $v \geq 0 \quad (P_{i,j} \in \Gamma)$ には存在せず、 $P_{k,\ell} \in \Omega_h \cup \Gamma_h$ より、 $P_{k,\ell} \in \Omega_h$ でなければならない。差分方程式 (2.1.1) と式 (2.3.10) より

$$L_h v \geq 0 \quad \text{式 (2.3.10) より} \quad L_h v_k(P_{i,j}) \geq 0 \quad \dots (2.3.12)$$

$$L_h v_h(P_{k,\ell}) = -\frac{v_{k-1,\ell} + v_{k+1,\ell} + v_{k,\ell-1} + v_{k,\ell+1} - 4v_{k,\ell}}{4} \geq 0 \quad \dots (2.3.13)$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha = v_{k,\ell} &\geq \frac{1}{4} (v_{k-1,\ell} + v_{k+1,\ell} + v_{k,\ell-1} + v_{k,\ell+1}) \\ &\geq \frac{1}{4} (\alpha + \alpha + \alpha + \alpha) = \alpha \end{aligned} \quad \dots (2.3.14)$$

このことは、 $P_{k,\ell}$ の隣接格子点の値はすべて α に等しくならなければならない。

同様にすると、少なくとも 1 つの隣接点が境界点になっている場合もこの境界点は α でなければならない。これは式 (2.3.10) の $v \geq 0$ ($P_{i,j} \in \Gamma_h$) に矛盾する。

よって、 $\alpha \geq 0$ でなければならない。 ■

境界条件式 (2.2.10) を一般化した離散問題式 (2.3.15) を考える。

$$\begin{cases} (L_h u_h)(P_{i,j}) = f(P_{i,j}) & (P_{i,j} \in \Omega_h) \\ u_h(P_{i,j}) = g(P_{i,j}) & (P_{i,j} \in \Gamma_h) \end{cases} \quad \dots (2.3.15)$$

ただし、 f, g はそれぞれ Ω_h, Γ_h 上で与えられた格子点上の関数である。

Lamma 3.3

離散問題式 (2.3.15) の解 u_h は一意に存在して次式 (2.3.16) が成立する。

$$\begin{aligned} \max \{|u_h| \mid P_{i,j} \in \Omega_h \cup \Gamma_h\} \\ \leq c \max \{\max \{|f| \mid P_{i,j} \in \Omega_h\}, \max \{|g| \mid P_{i,j} \in \Gamma_h\}\} \end{aligned} \quad \dots (2.3.16)$$

ただし、 c は正定数とする

[証明]

一般化された離散問題式 (2.3.15) も同様に連立一次方程式に帰着されるので、一意可解性のため $f = g = 0$ ならば $u_h = 0$ となることを示せばよい。

今、 $f = g = 0$ とする。補助定理 3.2 より $u_h \geq 0$ より $-u_h$ に関する方程式を与える $-u_h \geq 0$ となり、 $u_h = 0$ が決まる。??

$$\phi(x, y) \triangleq a - \frac{1}{4} (x^2 + y^2) \quad \dots (2.3.17)$$

を $\phi \geq 1$ ($P_{i,j} \in \Gamma_h, 0 < h < 1$) となるように正定数 a を選ぶ。

関数 ϕ は $L_h \phi = 1$ ($P_{i,j} \in \Omega_h$) の性質を持っている。

格子点関数 v_h を次式で定義する。

$$v_h \triangleq c_1 \phi - u_h \quad \dots (2.3.18)$$

ただし、

$$c_1 = \max \{\max \{|f|\}, \max \{|g|\}\} \quad \dots (2.3.19)$$

である。

ϕ と c_1 との選び方から

● 領域 Ω_h 上で

$$\begin{aligned} L_h v_h &= c_1 L_h \phi - L_h u_h \quad (\because \text{式 (2.3.19)}) \\ &= c_1 - f \quad (\because L_h \phi = 1, \text{式 (2.3.15)}) \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad \dots (2.3.20)$$

• 境界 Γ_h 上で

$$\begin{aligned} v_h &= c_1 \phi - u_h \\ &\geq c_1 - g \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad \dots (2.3.21)$$

補助定理 3.2 より、

$$\begin{aligned} v_h &\geq 0 \quad \text{となり} \\ u_h &\leq c_1 \phi \\ &\leq c_1 M_0(\phi) \end{aligned} \quad \dots (2.3.22)$$

となる。

同様にすると

$$\begin{aligned} v_h &= c_1 \phi + u_h \quad \text{より} \quad -u_h \leq c_1 M_0(\phi) \quad \text{となる} \\ c &= M_0(\phi) \quad \text{とおくと、式 (2.3.16) が成立する。} \end{aligned} \quad \dots (2.3.23)$$

■

この補助定理 3.3 から、離散問題 (式 (2.3.15)) の解 u_h は f, g の定数倍で評価出来ることがわかる。このとき離散問題 (式 (2.3.15)) は 安定性 の条件を満たすという。適合性と安定性の条件が満たされると 収束性 を示すことができる。

Theorem 3.3

連続問題 (式 (2.1.1)) の解 u が $\mathbf{C}^3\mathcal{O}$ に属すならば、次式 (2.3.24) が成立する

$$\max \{|u - u_h|\} \leq c \cdot h \cdot \max \{M_3(u; \mathcal{K}), M_1(u; \mathcal{K})\} \quad P_{i,j} \in \Omega_h \cup \Gamma_h \quad \dots (2.3.24)$$

また、 $u \in \mathbf{C}^4(\Omega)$ であり $\Gamma_h \subset \Gamma$ ならば次式が成立する。

$$\max \{|u - u_h|\} \leq c \cdot h^2 \cdot \max \{M_4(u; \mathcal{K}), M_1(u; \mathcal{K})\} \quad P_{i,j} \in \Omega_h \cup \Gamma_h \quad \dots (2.3.25)$$

ただし、 u_h は離散問題 (式 (2.2.10)) の解、 c は正定数である

[証明]

$u \in \mathbf{C}^3(\mathcal{K})$ とする。そして、 $v_h \triangleq u - u_h$ とする。

補助定理 3.1 より、領域 Ω_h 上で、式 $\{(L_h u_h)(P_{i,j}) = f(P_{i,j})\}$ から

$$\begin{aligned} |L_h v_h| &= |L_h u - L_h u_h| \\ &= |L_h u - f| \\ &= |L_h u - L u| \\ &\leq \frac{1}{3} M_3(u) h \quad (\text{補助定理 3.1 より}) \end{aligned} \quad \dots (2.3.26)$$

境界 Γ_h 上で $|v_h| \leq M_1(u)h$ ただし、 Γ 上で $u = 0$ とする

また、補助定理 3.3 より式 (2.3.24) が成立する。

同様にすると、式 (2.3.24) が成立する。 ■

実際の問題では、 x 方向、 y 方向の間隔を一般化して Δx および Δy とし、 $\Delta x \neq \Delta y$ とすると以下の式 (2.3.27) となる。

$$(L_h v)(P_{i,j}) = - \left\{ \frac{v_{i-1,j} - 2v_{i,j} + v_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{v_{i,j-1} - 2v_{i,j} + v_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} \right\} \quad \dots (2.3.27)$$

定理 3.3 で示したのは、格子点上のみの評価である。 u_h を補間した関数に対して Ω の評価が出来る
いま、双一次補間 を考える。

Definition 3.8 (双一次補間関数) —

格子点関数 u_h の双一次補間関数 $\Pi_h u_h$ は次で定義される。

$$\begin{aligned} \Pi_h u_h(P_{i,j}) = & u_h(P_{i,j}) \left(i + 1 - \frac{x}{\Delta x} \right) \left(j + 1 - \frac{y}{\Delta y} \right) \\ & - u_h(P_{i+1,j}) \left(i - \frac{x}{\Delta x} \right) \left(j + 1 - \frac{y}{\Delta y} \right) \\ & - u_h(P_{i,j+1}) \left(i + 1 - \frac{x}{\Delta x} \right) \left(j - \frac{y}{\Delta y} \right) \\ & + u_h(P_{i+1,j+1}) \left(i - \frac{x}{\Delta x} \right) \left(j - \frac{y}{\Delta y} \right) \quad \dots (2.3.28) \end{aligned}$$

$$\text{ただし、} \quad i h \leq x \leq (i+1) h, j h \leq y \leq (j+1) h$$

明らかに、 $\Pi_h u_h \in \mathbf{C}(\Omega)$ である。

この補間の性質を考える。

$\mathbf{C}([0, 1] \times [0, 1])$ の関数 $v(\xi, \eta)$ に対して双一次補間を次式 (2.3.29) で考える

$$\begin{aligned} (\Pi v)(\xi, \eta) = & v(0, 0) (1 - \xi) (1 - \eta) \\ & + v(1, 0) \xi (1 - \eta) + v(0, 1) (1 - \xi) \eta \\ & + v(1, 1) \xi \eta \quad \dots (2.3.29) \end{aligned}$$

Lamma 3.4 (補助定理 4) —

$v \in \mathbf{C}^2([0, 1] \times [0, 1])$ ならば次式 (2.3.30) が言える。

$$\max \{ |\Pi v - v|, (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \} \leq \frac{1}{8} M_2(v) | [0, 1] \times [0, 1] | \quad \dots (2.3.30)$$

[証明]

$\Pi 1 = 1$ であるので、

$$\begin{aligned}
(\Pi v - v)(\xi, \eta) &= \{v(0, 0) - v(\xi, \eta)\} (1 - \xi) (1 - \eta) \\
&\quad + \{v(1, 0) - v(\xi, \eta)\} \xi (1 - \eta) \\
&\quad + \{v(0, 1) - v(\xi, \eta)\} (1 - \xi) \eta \\
&\quad + \{v(1, 1) - v(\xi, \eta)\} \xi \eta \quad \dots \quad (2.3.31)
\end{aligned}$$

ここで、式 (2.3.31) の左辺第 1 項は次式 (2.3.32) で表される。

$$(1 - \xi) (1 - \eta) \int_0^1 \left\{ -\xi \frac{\partial v}{\partial \xi}(-\xi s + \xi, -\eta s + \eta) - \eta \frac{\partial v}{\partial \eta}(-\xi s + \xi, -\eta s + \eta) \right\} ds \quad ((2.3.32))$$

同様にすると、式 (2.3.31) の左辺第 2 項は次式 (2.3.33) で表される。

$$\begin{aligned}
\xi (1 - \eta) \int_0^1 \left[\xi \left\{ \frac{\partial v}{\partial \xi}(-\xi s + \xi, -\eta s + \eta) - \frac{\partial v}{\partial \xi}(-\xi s + \xi, -\eta s + \eta) \right\} \right. \\
\left. - \eta \frac{\partial v}{\partial \eta}(-\xi s + \xi, -\eta s + \eta) \right] ds \quad \dots \quad (2.3.33)
\end{aligned}$$

上式の式 (2.3.32) と式 (2.3.33) の $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ に着いて現すと次式 (2.3.35) が得られる

$$\begin{aligned}
&\xi (1 - \xi) (1 - \eta) \int_0^1 \left\{ \frac{\partial v}{\partial \xi}((1 - \xi) s + \xi, -\eta s + \eta) - \frac{\partial v}{\partial \xi}(-\xi s + \xi, -\eta s + \eta) \right\} ds \\
&= \xi (1 - \xi) (1 - \eta) \int_0^1 s ds \int_0^1 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}((t - \xi) s + \xi, -\eta s + \eta) dt \\
&\leq \frac{1}{8} (1 - \eta) M_{2,0}(v) \quad \dots \quad (2.3.34)
\end{aligned}$$

同様にすると、補助定理 3.4 が得られる ■

Lamma 3.5

定理 3.3 の条件下において、次式が成立する。

$$\begin{cases} \max \{|u - \Pi_h u_h| | (x, y) \in \Omega\} & \leq c h \{ \max\{M_3(u; \mathcal{K}), M_1(u; \mathcal{K})\} + h M_2(u; \mathcal{K}) \} \\ \max \{|u - \Pi_h u_h| | (x, y) \in \Omega\} & \leq c h \{M_4(u; \mathcal{K}) + M_2(u; \mathcal{K})\} \end{cases} \quad \dots \quad (2.3.35)$$

[証明]

$$|u - \Pi_h u_h| \leq |u - \Pi_h u| + |\Pi(u - u_h)| \quad \dots \quad (2.3.36)$$

○ 式 (2.3.36) の右辺第 1 項の評価：補助定理 3.4 より

$$v(\xi, \eta) = u(i h + \xi h, j + h + \eta h) \quad \dots \quad (2.3.37)$$

とおくと次式が得られる

$$v(\xi, \eta) = u(i h + \xi h, j + h + \eta h) \quad \dots \quad (2.3.38)$$

$$[i, (i+1)h] \times [jh, (j+1)h] \text{ で } \Pi_h u = \Pi v$$

$$M_2(v) = h^2 M_2(u) \text{ より 3.5 の第 2 式の条件が評価できる} \quad \dots (2.3.39)$$

○ 式 (2.3.36) の右辺第 1 項の評価：補助定理 3.3 より、3.5 の第 1 式の条件が評価できる

■

4 Laplace 方程式の厳密解

楕円型の偏微分方程式の一番シンプルな方程式は、Poissonn 方程式 (2.1.1) の $f = 0$ の場合である。

(Laplace 方程式)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \dots (2.4.1)$$

$$\text{境界条件} \begin{cases} u = g(x) & (y = 1) \\ u = 0 & (y = 0, x = 0, x = 1) \end{cases} \quad \dots (2.4.2)$$

‡ 変数分離法を用いて解く

$$u(x, y) = X(x) Y(y) \text{ と仮定する。} \quad \dots (2.4.3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = Y \frac{d^2 u}{dx^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X \frac{d^2 u}{dy^2} \end{cases} \quad \text{となり、これらを式 (2.4.1) に代入すると}$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = 0$$

$$\therefore \frac{1}{X} \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 u}{dy^2} = -\mu^2 \quad \dots (2.4.4)$$

ここで $\mu > 0$ で μ を変数分離定数という。

式 (2.4.4) より次式 (2.4.5) が得られる。

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} - \mu^2 X = 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + \mu^2 Y = 0 \end{cases} \quad \dots (2.4.5)$$

2階線形常微分方程式 (2.4.6) の解法

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \mu^2 X = 0 \quad \dots (2.4.6)$$

今、常微分方程式 (2.4.6) の解を次式 (2.4.7) とおく

$$X = e^{\lambda x} \quad \dots (2.4.7)$$

式 (2.4.7) を微分すると次式 (2.4.8) が得られる

$$\begin{cases} \frac{dX}{dx} = \lambda e^{\lambda x} \\ \frac{d^2 X}{dx^2} = \lambda^2 e^{\lambda x} \end{cases} \quad \dots (2.4.8)$$

式 (2.4.7) と式 (2.4.8) を微分方程式 (2.4.6) に代入すると次式 (2.4.9) が得られる

$$\begin{aligned} \lambda^2 e^{\lambda x} - \mu^2 e^{\lambda x} &= 0 \\ e^{\lambda x} (\lambda^2 - \mu^2) &= 0 \end{aligned} \quad \dots (2.4.9)$$

$$e^{\lambda x} \neq 0 \text{ より}$$

$$\lambda^2 - \mu^2 = (\lambda + \mu)(\lambda - \mu) = 0$$

$$\therefore \lambda \pm \mu \quad \dots (2.4.10)$$

よって、解 X は次式 (2.4.11) で表される

$$X = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x} \quad \dots (2.4.11)$$

同様に次式 (2.4.12) について解を求める

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \mu^2 Y = 0 \quad \dots (2.4.12)$$

$$Y = C_3 e^{i\mu y} + C_4 e^{-i\mu y} \quad \dots (2.4.13)$$

$u = X(x)Y(y)$ より、式 (2.4.1) の解 $u(x, y)$ は次式 (2.4.14) で表される。

$$u(x, y) = (C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}) (C_3 e^{i\mu y} + C_4 e^{-i\mu y}) \quad \dots (2.4.14)$$

三角関数を用いて解を表すと次式 (2.4.15) となる

$$u(x, y) = (A \cos \mu x + B \sin \mu x) (C \cosh \mu y + D \sinh \mu y) \quad \dots (2.4.15)$$

第3節

熱伝導方程式

両端を 0°C にした長さ L の棒の熱拡散は次式 (3.0.1) で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \forall x, y \in Q = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq \tau\} \quad \dots (3.0.1) \\ \begin{cases} u(x, 0) = f(x) & \text{(Initial condition)} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{(Boundary condition)} \end{cases} \end{aligned}$$

1 現象のモデル化と微分方程式

自然界に起こるいろいろな事象をできるだけ数学的に取り扱うためには何らかのモデル化が必要である。もし、その事象が何らかの物理的な法則に基づくものであれば、一般的には独立変数として3次元空間座標と時間座標を考えた系において、ある物理的な考察をもとにモデル式を組み立てることになる。

その中に熱伝導の問題がある。熱が伝わる物質中の熱の流れをモデル化する際、次のような実験結果を用いることとする。

- (1) 熱は温度の高い方から低い方へ流れる
- (2) 熱がある面を通して伝わる量はその面積に比例し、また、法線方向の温度勾配に比例する（比例定数：熱伝導率 λ ）
- (3) 物体の温度が変化するとき、物体内部の熱量の増減は、物体の質量や温度変化に比例する（比例定数：定積比熱 c ）

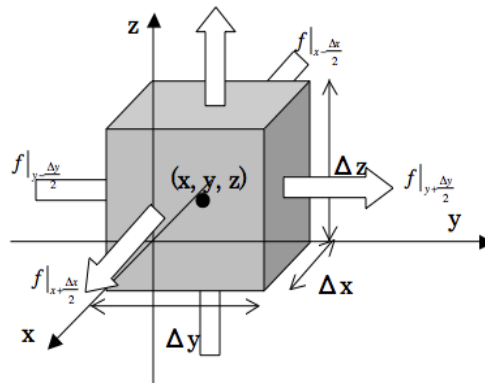


図 1.1 微小要素の界面における熱の流れ

以上のような仮定を用いて、図 1.1 のような3次元空間内の微小な直六面体要素 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ の熱の出入りを考える。この要素の中心点の座標を (x, y, z) とおく。

単位体積当たりの物質の質量 m は密度 ρ とすると、次式 (3.1.1) で表させる。

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \quad \dots (3.1.1)$$

上記の過程により、微小要素内で微小時間 Δt に温度変化 Δu が生じた時の要素内に蓄積される熱量は物質の比熱を c とすると、次式 (3.1.2) で表される

$$\Delta H = c \Delta m \Delta u = c \rho \Delta V = \rho c \Delta x \Delta y \Delta z \Delta u \quad \dots (3.1.2)$$

単位時間あたりに蓄積される熱量は次式 (3.1.3) で表される

$$\frac{\Delta H}{\Delta t} = \rho c \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\Delta u}{\Delta t} \quad \dots (3.1.3)$$

熱は面に対して垂直に出入りするため、図 1.1 に示した x 軸方向の垂直微小要素の $\Delta y \Delta z$ 平面を考える。 $x - \Delta x/2$ の位置の $\Delta y \Delta z$ 面から熱が流入し、 $x + \Delta x/2$ の位置の $\Delta y \Delta z$ 面から熱が流出するとすると、ニュートンの冷却の法則より、

$$q \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) = -\lambda \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial x} u \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \quad (\text{熱の流入}) \quad \dots (3.1.4)$$

$$q \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) = -\lambda \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial x} u \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \quad (\text{熱の流出}) \quad \dots (3.1.5)$$

同様に $\Delta z \Delta x$ 面および $\Delta x \Delta y$ 面について

$$q \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z \right) = -\lambda \Delta z \Delta x \frac{\partial}{\partial y} u \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z \right) \quad (\text{熱の流入}) \quad \dots (3.1.6)$$

$$q \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right) = -\lambda \Delta z \Delta x \frac{\partial}{\partial y} u \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right) \quad (\text{熱の流出}) \quad \dots (3.1.7)$$

$$q \left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2} \right) = -\lambda \Delta x \Delta y \frac{\partial}{\partial z} u \left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2} \right) \quad (\text{熱の流入}) \quad \dots (3.1.8)$$

$$q \left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2} \right) = -\lambda \Delta x \Delta y \frac{\partial}{\partial z} u \left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2} \right) \quad (\text{熱の流出}) \quad \dots (3.1.9)$$

微小体積に蓄積される熱量は

$$\begin{aligned} & q \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) - q \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \\ & + q \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right) - q \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z \right) \\ & + q \left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2} \right) - q \left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2} \right) \\ & = -\lambda \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial x} u \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) + \lambda \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial x} u \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \\ & - \lambda \Delta z \Delta x \frac{\partial}{\partial y} u \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right) + \lambda \Delta z \Delta x \frac{\partial}{\partial y} u \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z \right) \\ & - \lambda \Delta x \Delta y \frac{\partial}{\partial z} u \left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2} \right) + \lambda \Delta x \Delta y \frac{\partial}{\partial z} u \left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2} \right) \end{aligned}$$

式 (3.1.3) から、微小体積に蓄積される熱量は

$$\begin{aligned}\rho c \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\Delta u}{\Delta t} &= -\lambda \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{u\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - u\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)}{\Delta x} \right\} \cdot \Delta x \\ &\quad -\lambda \Delta z \Delta x \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{u\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) - u\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right)}{\Delta y} \right\} \cdot \Delta y \\ &\quad -\lambda \Delta x \Delta y \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{u\left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}\right) - u\left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2}\right)}{\Delta z} \right\} \cdot \Delta z \\ \rho c \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial u}{\partial t} &= -\lambda \Delta x \Delta y \Delta z \left\{ \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial z^2} \right\}\end{aligned}$$

ただし、 $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta z \rightarrow 0$ とする

以上より、3次元の熱伝導方程式は次式 (3.1.10) で表される

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} \quad \dots (3.1.10)$$

2 厳密解

この方程式の解 $u(x, t)$ を x だけの関数 $X(x)$ と t だけの関数 $T(t)$ を用いて次式と表す。

$$u(x, t) = X(x) T(t) \quad \dots (3.2.1)$$

式 (3.2.1) を式 (3.0.1) に代入し、整理すると次式 (3.2.2) が得られる。

$$\frac{T'}{\lambda T} = \frac{X''}{X} \quad \dots (3.2.2)$$

この式 (3.2.2) において、左辺は t だけの関数で、右辺は x だけの関数であるから、この値は定数になるはずである。それを μ と置く。すなわち次式 (3.2.3) となる

$$\frac{T'}{\lambda T} = \frac{X''}{X} = \mu \quad \dots (3.2.3)$$

変数を分離して表すと次式が得られる

$$T' - \mu \lambda T = 0 \quad \dots (3.2.4)$$

$$X'' - \mu X = 0 \quad \dots (3.2.5)$$

まず、式 (3.2.5) を X について解くと、それぞれの場合について次のような一般解を持つ

- $\mu > 0$ の場合

$$X(x) = c_1 \exp(-\sqrt{\mu} x) + c_2 \exp(\sqrt{\mu} x) \quad \dots (3.2.6)$$

- $\mu = 0$ の場合

$$X(x) = c_1 x + c_0 \quad \dots (3.2.7)$$

- $\mu < 0$ の場合

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\mu} x) + c_2 \sin(\sqrt{-\mu} x) \quad \dots (3.2.8)$$

これら三つの条件のうち、最初の二つ式 (3.2.6) と式 (3.2.7) に関しては、境界条件にあう解を選び出すと $X(x) = 0$ のみとなり、自明な解しか存在しないことがわかる。そこで三番目の条件式 (3.2.8) だけを考える。この場合、境界条件より次式 (3.2.9) が得られる。

$$c_1 = 0 \quad , \quad c_2 \sin(\sqrt{-\mu} L) = 0 \quad \dots (3.2.9)$$

これより、 $c_2 = 0$ の場合を除くと $\sin(\sqrt{-\mu} L) = 0$ となり、次式 (3.2.10) が得られる

$$\sqrt{-\mu} L = m \pi \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots (3.2.10)$$

したがって、境界条件に合う式 (3.2.8) の一般解は次式 (3.2.11) となる

$$X(x) = c_2 \sin\left(\frac{m \pi}{L} x\right) \quad \dots (3.2.11)$$

一方、式 (3.2.4) の $T(t)$ の方程式の一般解は次式 (3.2.12) となる

$$T(t) = d \exp(\lambda \mu t) \quad \dots (3.2.12)$$

これより、 $u(x, t)$ の一般解は、式 (3.2.1) から重ね合わせの原理より次式 (3.2.13) となる

$$u(x, t) = T(t) X(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \exp\left(-\frac{\lambda m^2 \pi^2}{L^2} t\right) \sin\left(\frac{m \pi}{L} x\right) \quad \dots (3.2.13)$$

ここで、区間 $[0, L]$ で与えられた関数 $f(x)$ は一般に、Fourier 級数に展開出来、初期条件 $u(x, 0) = f(x)$ より次式 (3.2.14) となる。

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin\left(\frac{m \pi}{L} x\right) \quad \dots (3.2.14)$$

ここで、

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n \pi}{L} x\right) dx = \int_0^L \frac{1}{2} \left\{ -\cos\left(\frac{(m+n)\pi}{L} x\right) + \cos\left(\frac{(m-n)\pi}{L} x\right) \right\} dx \quad (3.2.15)$$

$m \neq n$ のとき

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n \pi}{L} x\right) dx = 0 \quad \dots (3.2.16)$$

$m = n$ のとき

$$\begin{aligned} \int_0^L \sin\left(\frac{m \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n \pi}{L} x\right) dx &= \int_0^L \frac{1}{2} \left[-\cos\left(\frac{(m+n)\pi}{L} x\right) + \cos\left(\frac{(m-n)\pi}{L} x\right) \right] dx \\ &= \int_0^L \frac{1}{2} \left[-\cos\left(\frac{2m\pi}{L} x + 1\right) \right] dx = \frac{L}{2} \quad \dots (3.2.17) \end{aligned}$$

従って、式 (3.2.14) の両辺に $\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ をかけて、 x に関して $[0, L]$ で積分すると

$$\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx \quad \dots (3.2.18)$$

$$\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \frac{L}{2} a_m \quad \dots (3.2.19)$$

従って、係数 a_m は次式 (3.2.20) となる

$$a_m = 2 \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) f(x) dx \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots (3.2.20)$$

3 数値解

式 (3.0.1) を差分近似するとき、式 (1.3.12) および式 (1.3.13) で示した時間に関しての偏導関数を差分、式 (1.3.17) で示した空間2階偏微分を差分近似する。ただし $\boxed{\text{関数 } u(x, t) = u(j \Delta x, n \Delta t) \equiv u_j^n}$ と表す。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \lambda \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2) & \text{(前進差分)} \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \lambda \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2) & \text{(後退差分)} \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{\Delta t} = \lambda \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2) & \text{(中心差分)} \end{array} \right. \quad \dots (3.3.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_j^{n+1} = \lambda \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{j-1}^n + \left\{ 1 - 2\lambda \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \right\} u_j^n + \lambda \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{j+1}^n & \text{(前進差分)} \\ -\lambda \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{j-1}^n + \left\{ 1 + 2\lambda \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \right\} u_j^n - \lambda \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{j+1}^n = u_j^{n-1} & \text{(後退差分)} \end{array} \right. \quad \dots (3.3.2)$$

3.1 陽的解法

式 (3.3.1) の前進差分を陽的解法と呼ばれ、打ち切り誤差は $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2)$ である。この方法の安定条件は $\lambda \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$ である。

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \lambda \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} \quad \dots (3.3.3)$$

上式 (3.3.3) を時間項で分離し整理すると次式 (3.3.4) になる

$$u_j^{n+1} = \lambda \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{j-1}^n + \left\{ 1 - 2\lambda \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \right\} u_j^n + \lambda \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{j+1}^n \quad \dots (3.3.4)$$

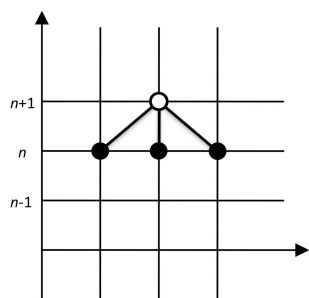


図 3.1 陽的解法メッシュ
○は未知数で、
●は既知数である。

式 (3.3.4) は単に代数方程式を計算するだけで解が得られる。

図 3.1 陽的解法メッシュ

3.2 Laasonen Method(陰伏的解法)

式 (3.3.1) の後退差分は陰伏的解法で、Laasonen Method と呼ばれて、1949 年に Laasonen によって提案された方法である。打ち切り誤差は $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2)$ である。この方法は無条件安定である

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \lambda \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} \quad \dots (3.3.5)$$

上式 (3.3.5) を時間項で分離し整理すると次式 (3.3.6) になる

$$-\lambda \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{j-1}^n + \left\{ 1 + 2\lambda \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \right\} u_j^n - \lambda \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{j+1}^n = u_j^{n-1} \quad \dots (3.3.6)$$

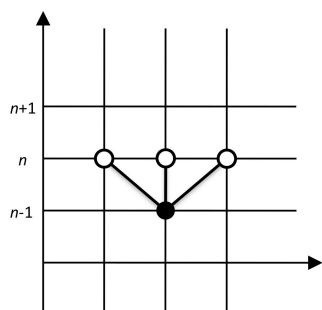


図 3.2 陰伏的解法メッシュ
○は未知数で、
●は既知数である。

式 (3.3.6) は単に連立方程式を解かないと解が得られない。

図 3.2 陰伏的解法メッシュ

3.3 Richardson Method(陰伏的解法)

式 (3.3.1) の中心差分を Richardson によって 1910 年に提案された。放物型方程式に対して時間と空間に 2 次制度を保つように提案されたが、全ての $\Delta x, \Delta t$ にたいして不安定なスキームであるため使い物にならない。

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{\Delta t} = \lambda \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} \quad \dots (3.3.7)$$

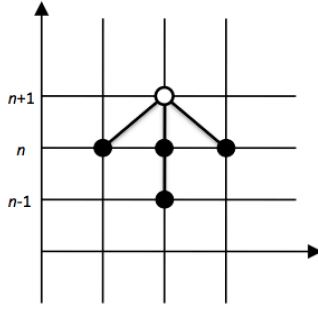


図 3.3 陽的解法メッシュ

図 3.3 には時間メッシュと空間メッシュの関係を示した。○は未知数で、●は既知数である。
式 (3.3.7) は単に連立方程式を解かないと解が得られない。

3.4 DuFort-Frankel Method <蛙跳び法 (Leapfrog 法)> (陽的解法)

上記の Richardson Method が不安定であるために、 u_j^n を時間平均表示 $(u_j^{n+1} - u_j^{n-1})/2$ で置き換えたことにより、スキームを無条件安定とすることが出来る。打ち切り誤差は $\mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2)$ である。

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{\Delta t} = \lambda \frac{u_{j-1}^n - u_j^{n+1} - u_j^{n-1} + u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} \quad \dots (3.3.8)$$

上式 (3.3.8) を時間項で分離し整理すると次式 (3.3.9) になる

$$\left(1 + \lambda \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) u_j^{n+1} = \lambda \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{j-1}^n + \lambda \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} u_j^{n-1} + \lambda \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{j+1}^n \quad \dots (3.3.9)$$

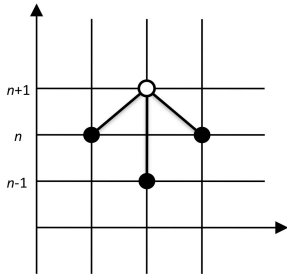


図 3.4 蛙跳び法

図 3.4 には時間メッシュと空間メッシュの関係を示した。○は未知数で、●は既知数である。
式 (3.3.9) は代数方程式であるため簡単に計算出来る。この差分法は陽的解法であるにもかかわらず無条件安定なスキームである

3.5 Crank-Nicolson Scheme(陰伏的解法)

式 (3.3.1) の前進差分と後退差分を組み合わせたスキームである。打ち切り誤差は $\mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2)$ である。この方法は無条件安定である。

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \lambda \frac{(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) + (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n)}{2(\Delta x)^2} \quad \dots (3.3.10)$$

上式 (3.3.10) を時間項で分離し整理すると次式 (3.3.11) になる

$$\begin{aligned}
 & -\lambda \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2} u_{j-1}^{n+1} + \left(1 + \lambda \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) u_j^{n+1} - \lambda \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2} u_{j+1}^{n+1} \\
 & = \lambda \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2} u_{j-1}^n + \left(1 - \lambda \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) u_j^n + \lambda \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2} u_{j+1}^n \quad \cdots (3.3.11)
 \end{aligned}$$

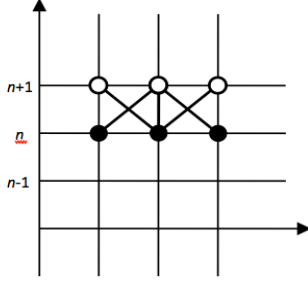


図 3.5 には時間メッシュと空間メッシュの関係を示した。○は未知数で、●は既知数である。

式 (3.3.11) は単に連立方程式を解かないと解が得られない。この差分法は陽的解法であるにもかかわらず無条件安定なスキームである

図 3.5 Crank-Nicolson 法

3.6 応用解法

上記の Crank-Nicolson Scheme を拡張した方法で、打ち切り誤差は $\mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2)$ である。この方法の安定性は条件 $(0 \leq \theta \leq 1)$ による。 $1 \geq \theta \geq 1/2$ の時は無条件安定である。 $0 \leq \theta < 1/2$ の時の安定条件は $\lambda \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$ である。

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \lambda \theta \left(\frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right) + \lambda (1 - \theta) \left(\frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} \right) \quad \cdots (3.3.12)$$

上式 (3.3.12) を時間項で分離し整理すると次式 (3.3.13) になる

$$\begin{aligned}
 & -\theta \lambda \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{j-1}^{n+1} + \left(1 + 2\theta \lambda \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) u_j^{n+1} - \theta \lambda \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{j+1}^{n+1} \\
 & = (1 - \theta) \lambda \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{j-1}^n + \left(1 - 2(1 - \theta) \lambda \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) u_j^n + (1 - \theta) \lambda \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{j+1}^n \quad \cdots (3.3.13)
 \end{aligned}$$

$\theta = 0$ の時は陽的解法、 $\theta = 1/2$ の時は Crank-Nicolson 法、 $\theta = 1$ の時は Laasonen 法である。

4 熱伝導方程式の実装

4.1 例題一 1

両端を 0°C 初期値を $\phi(x) = x$ ($0 \leq x \leq 1/2$) で $\phi(x) = (1 - x)$ ($1/2 \leq x \leq 1$) とした棒の冷却問題を考える。
熱伝導方程式は次式 (3.4.1) で表される。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \dots (3.4.1)$$

$$\begin{cases} T(x, 0) = \phi(x) = 1000x^\circ\text{C} & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ T(x, 0) = \phi(x) = 1000(1 - x)^\circ\text{C} & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (\text{Initial condition})$$

$$\begin{cases} T(0, t) = 0^\circ\text{C} & (\text{Left side Boundary condition}) \\ T(1, t) = 0^\circ\text{C} & (\text{Right side Boundary condition}) \end{cases}$$

ここで、 $\alpha = \lambda/(\rho \cdot C_p)$ である。 λ は熱伝導率 [$\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$]、 ρ は密度 [Kg/m^3]、 C_p は定圧比熱 [$\text{J}/(\text{Kg} \cdot \text{K})$] であり、 α は温度伝達率 [m^2/s] である。また [W] = [J/s] で、 $[\text{J}] = [\text{Kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2]$ である。

4.1.1 Explicite Method(陽解法)

時間前進差分、空間中心差分を用いて熱伝導方程式 (3.4.1) を陽的差分等定式に表現すると次式 (3.4.2) が得られる。ただし、 $T(x, t) = T(i \Delta x, n \Delta t) \equiv T_i^n$ と表記する。

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \quad \dots (3.4.2)$$

T_i^{n+1} に付いて解くと

$$T_i^{n+1} = \gamma T_{i-1}^n + (1 - 2\gamma) T_i^n + \gamma T_{i+1}^n \quad \dots (3.4.3)$$

となる代数方程式で表される。ただし、 $\gamma = \alpha \Delta t / \Delta x^2$ である。

$$\begin{bmatrix} T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ \dots \\ T_{L-1}^{n+1} \\ T_L^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2\gamma & \gamma & 0 & \dots & 0 \\ \gamma & 1 - 2\gamma & \gamma & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \gamma & 1 - 2\gamma & \gamma \\ 0 & \dots & \dots & \gamma & 1 - 2\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^n \\ T_2^n \\ \dots \\ T_{L-1}^n \\ T_L^n \end{bmatrix} \quad \dots (3.4.4)$$

ここで、

$$\Theta = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \dots \\ T_{L-1} \\ T_L \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 - 2\gamma & \gamma & 0 & \dots & 0 \\ \gamma & 1 - 2\gamma & \gamma & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \gamma & 1 - 2\gamma & \gamma \\ 0 & \dots & \dots & \gamma & 1 - 2\gamma \end{bmatrix} \quad \dots (3.4.5)$$

と置くと、

$$\Theta^{n+1} = A \Theta^n$$

で表され、

$$\begin{aligned}
 \Theta^n &= A \Theta^{n-1} \\
 &= A^2 \Theta^{n-2} \\
 &\vdots \\
 &= A^{n-1} \Theta^1 \\
 &= A^n \Theta^0
 \end{aligned}
 \quad \dots (3.4.6)$$

安定条件は

$$\begin{aligned}
 \|\Theta^n\| &= \|A^n \Theta^0\| \\
 &\leq \|A^n\| \|\Theta^0\| \\
 &\leq \|A\|^n \|\Theta^0\|
 \end{aligned}
 \quad \dots (3.4.7)$$

となり、 $\|A\| \leq 1$ ならば安定である。つまり行列 A は収束行列 $\rho(A) \leq 1$ ならば安定である。

行列 A の ∞ ノルムは

$$\|A\|_{\infty} = \max_j \left(\sum_{i=1}^L |A_{ij}| \right) = |1 - 2\gamma| + 2\gamma$$

よって、安定条件は $\gamma \leq \frac{1}{2}$ つまり $\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$ となる。そのため、メッシュサイズ Δt と Δx を安定条件となるように決定しなければならない。

4.1.2 実装

熱伝達率 $0.0117m^2/sec$ の金の棒でのニュートン冷却の計算結果の図 fig:計算結果4-1 に示した。この時、空間メッシュサイズ $\Delta x = 1cm$ 、時間メッシュ $\Delta t = 0.001sec$

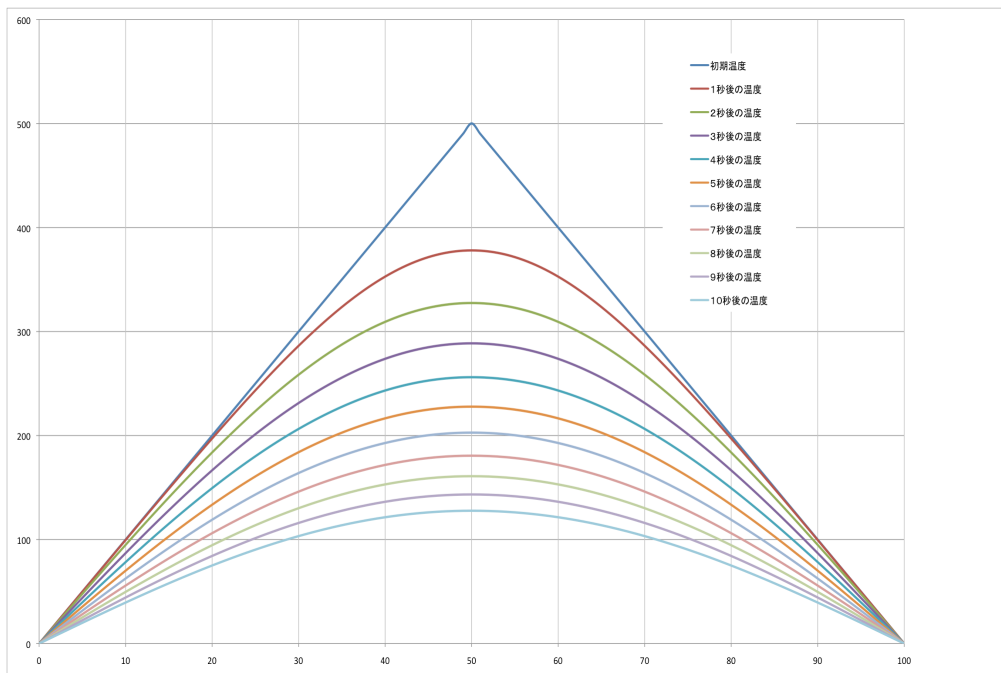


図 4.1 計算結果4-1

4.2 例題一2

左端を 500°C 、右端を断熱条件にした長さ L の棒の熱拡散は次式 (3.4.8) で表される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \dots (3.4.8)$$
$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) = 500^{\circ}\text{C} & \text{(Initial condition)} \\ u(0, t) = 0^{\circ}\text{C} & \text{(Left side Boundary condition)} \\ \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0 & \text{(Right side Boundary condition)} \end{cases}$$

4.2.1 Explicite Method

4.2.2 実装

熱伝達率 $0.0117\text{m}^2/\text{sec}$ の金の棒でのニュートン冷却の計算結果の図 fig:計算結果4-2 に示した。この時、空間メッシュサイズ $\Delta x = 1\text{cm}$ 、時間メッシュ $\Delta t = 0.001\text{sec}$

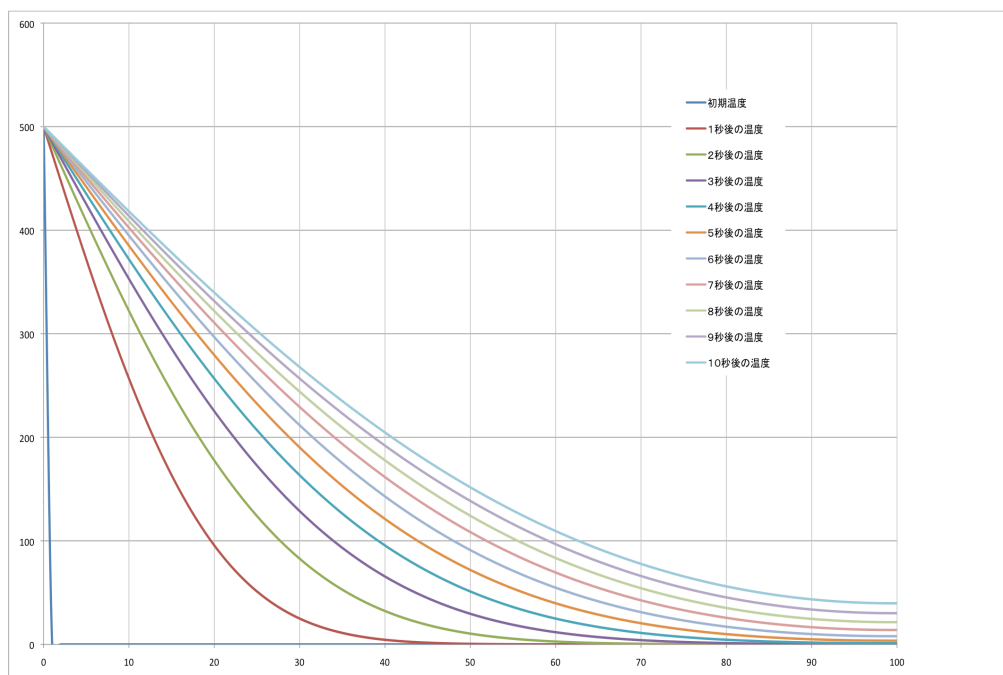


図 4.2 計算結果4-2