アルゴリズム論 2

第 10 回: 三角形分割 (1)

関川 浩

2016/11/16

- 三角形分割の定義と性質 (今回)
- Voronoi 図と Delaunay 三角形分割の構成アルゴリズム (次回)
- Delaunay 三角形分割の性質 (次々回)

1. 三角形分割の定義
    - 三角形分割の概要
    - 三角形分割の定義
2. 三角形分割の性質
    - 三角形分割の個数 (1)
    - 三角形分割の個数 (2)

1. 三角形分割の定義
2. 三角形分割の性質

三角形分割の概要

点集合 S の三角形分割とは

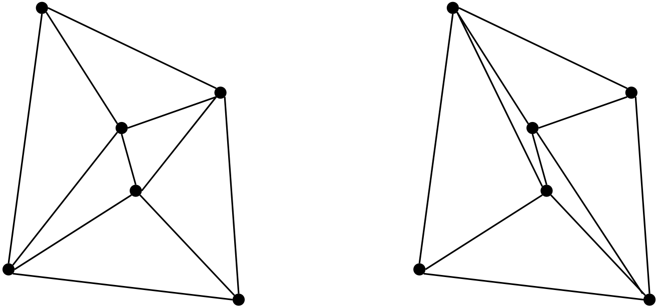
- 2 次元のとき, S の凸包を 2-単体 (三角形) に
- 3 次元のとき, S の凸包を 3-単体 (四面体) に
- n 次元のとき, S の凸包を n-単体に

分割すること

重要性

- 凸包と並んで基本的な幾何構造, 理論的に重要
- 応用面でも重要
  - CG におけるメッシュ生成
  - 偏微分方程式の数値計算における有限要素解析
  - $\ldots$

三角形分割の例



三角形分割の例

三角形分割の定義

定義 1 (三角形分割)

$S = \{P_1, \ldots, P_n\} \subset \mathbb{R}^d$: n 点からなる集合

$\mathrm{CH}(S)$: S の凸包

$\tau = \{S_1, \ldots, S_m\}$ (S_1, …, $S_m \subset S$) が $\mathrm{CH}(S)$ の三角形分割

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} S_i = S$
- $\mathrm{CH}(S_i)$ は d 次元, $\#S_i = d + 1$
- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{CH}(S_i) = \mathrm{CH}(S)$
- $i \neq j \Longrightarrow \mathrm{CH}(S_i) \cap \mathrm{CH}(S_j) = \emptyset$
  または $\mathrm{CH}(S_i)$ と $\mathrm{CH}(S_j)$ に共有される面

三角分割の基本性質

補題 1

$S \subset \mathbb{R}^2$: 一般の位置にある n 点の集合 $(n \geq 3)$

$\#\mathrm{CH}(S) = h$ $(3 \leq h \leq n)$

このとき, S の任意の三角形分割において

- 三角形の個数は $2n - 2 - h$
- 辺の本数は $3n - 3 - h$

三角分割の基本性質

証明

三角形分割において, 辺の数を m, 三角形の数を f とする

Euler の多面体公式 (の平面版) より

$$n - m + f = 1 \qquad (*)$$

各三角形に 3 辺, 凸包内部の $(m-h)$ 辺は二重に数えているから

$$m = 3f - (m-h) \qquad (\#)$$

(∗), (#) より

$$f = 2n - 2 - h, \qquad m = 3n - 3 - h$$

■

よい三角形分割

どのような三角形分割がよいのか?

$\Longrightarrow$ 各三角形が正三角形に近いとよい

- 最大角が最小
- 最小角が最大
- 辺長和が最小

次回以降扱う Delaunay 三角形は

- 最小角が最大
- ほかにも最適性をもつ

三角形分割の個数 (1) 凸多角形の頂点の場合 (1/5)

補題 1 より, 三角形分割の個数は $\binom{\binom{n}{2}}{3n-3-h}$ を越えない

$$\binom{\binom{n}{2}}{3n-3-h} < \binom{n^2}{3n} < (n^2)^{3n} = n^{6n} = 2^{6n\log n}$$

最右辺は $2^{O(n\log n)}$

以下, 三角形分割の個数は $O(2^{O(n)})$ であることを示す

- 最初に, S が凸多角形の頂点の集合に一致する場合
- 次に, S が一般の場合

三角形分割の個数 (1) 凸多角形の頂点の場合 (2/5)

定理 1

凸 n 角形の三角形分割の個数を t_n とすると

$$t_n = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}$$

注意

- $C_n = t_{n+1}$ は Catalan 数と呼ばれ, 組合せ論によく登場
  たとえば: n 組のカッコを正しく配置する方法の数
- $t_n < \dfrac{1}{n-1} \cdot 4^{n-2} = O(4^n/n)$

三角形分割の個数 (1) 凸多角形の頂点の場合 (3/5)

証明 (1/3)

$P_1, \ldots, P_n$: 凸 n 角形の頂点 (反時計回り)

任意の三角形分割において P_1P_n を一辺とする三角形 $P_1P_iP_n$ が存在

- $i = 2$ (あるいは $n-1$) である三角形分割の数は 凸 $(n-1)$ 角形 $P_2P_3\ldots P_n$ (あるいは $P_1P_2\ldots P_{n-1}$) の 三角形分割の個数 t_{n-1} に等しい
- $i \neq 2, n-1$ のとき, 凸 n 角形は,
  - 三角形 $P_1P_iP_n$
  - 凸 i 角形 $P_1P_2\ldots P_i$
  - 凸 $(n-i+1)$ 角形 $P_iP_{i+1}\ldots P_n$

  に分割され, 各 i に対し三角形分割の個数は t_it_{n-i+1}

三角形分割の個数 (1) 凸多角形の頂点の場合 (4/5)

証明 (2/3)

よって, 以下の漸化式が成立 ($t_2 = 1$ とする)

$$t_n = t_{n-1} + \sum_{i=3}^{n-2} t_i t_{n-i+1} + t_{n-1} = \sum_{i=2}^{n-1} t_i t_{n-i+1}$$

この漸化式を母関数 $T(x) = \sum_{i=2}^{\infty} t_i x^i$ を用いて解く

$T(x)^2$ の $(n+1)$ 次の項は $n+1 \geq 4$ のとき $\sum_{i=2}^{n-1} t_i t_{n-i+1}$

$\implies T(x)^2 = T(x)x - t_2 x^3$

$t_2 = 1$ より, $T(x)^2 - T(x)x + x^3 = 0$

三角形分割の個数 (1) 凸多角形の頂点の場合 (5/5)

証明 (3/3)

$T(x)^2 - T(x)x + x^3 = 0$ より $T(x) = x \cdot \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$

ここで,

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-4x} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)(1/2-1)\dots(1/2-n+1)}{n!}(-4x)^n \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{n!} 2^n x^n \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n
\end{aligned}$$

したがって, $t_n = \dfrac{1}{n-1}\dbinom{2n-4}{n-2}$ ■

グラフの交叉数

定義 2 (グラフの交叉数)

- $G = (V, E)$: 単純グラフ (loop も多重辺もないグラフ)

  G に対し，その交叉数 $g(G)$:

  辺の交叉の数を最小にするよう，G を平面に埋め込んだときの辺の交叉の数

- $g(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{g(G) \mid \#V = n,\ \#E = m\}$

注意: $g(G) = 0 \iff G$ は平面グラフ

三角形分割の個数 (2) 一般の場合 (1/11)

補題 2

$m \geq 4n$ のとき $g(n,m) = \Omega\left(\dfrac{m^3}{n^2}\right)$

証明 (1/6)

n 点の単純平面グラフの持ちうる最大の辺数は $3n-6$

よって, $m > 3n-6$ のとき, どのような埋め込みでも, 少なくとも $(m-3n+6)$ 個の交叉を生じるから

$$g(n,m) \geq m-3n+6$$

三角形分割の個数 (2) 一般の場合 (2/11)

証明 (2/6)

以下, $m \geq 4n$ のとき

$$g(n,m) > \frac{3}{64}\binom{n}{4}\frac{m^3}{\binom{n}{2}^3} \qquad (\dagger)$$

を n, m に関する帰納法で示す

- $4n \leq m \leq \binom{n}{2}$ より $n \leq 0$ または $n \geq 9$

  $n = 9$ のとき $4n \leq m \leq \binom{n}{2}$ を満たす m は 36 のみ

  $3n - 6 < 4n \leq m$ だから $g(n,m) \geq m - 3n + 6$

  $\Longrightarrow g(9,36) \geq 15 > \dfrac{189}{32}$ (= 式 (†) の右辺の値)

三角形分割の個数 (2) 一般の場合 (3/11)

証明 (3/6)

- $4n \leq m \leq 5n$ の場合

$$\frac{3}{64}\binom{n}{4}\frac{m^3}{\binom{n}{2}^3} < \frac{m^3}{64n^2}$$

なので，$\dfrac{m^3}{64n^2} \leq m - 3n$ を示せばよい

$m = 4n + k \ (0 \leq k \leq n)$ とおくと

$$\begin{aligned} m^3 - 64n^2(m - 3n) &= (-16n^2 + 12nk + k^2)k \\ &\leq -3n^2k \leq 0 \end{aligned}$$

より，$\dfrac{m^3}{64n^2} \leq m - 3n$

三角形分割の個数 (2) 一般の場合 (4/11)

証明 (4/6)

- $m \geq 5n$ の場合

  $G = (V, E)$: $g(n, m)$ を達成しているグラフ

  $G(v) = (V \setminus \{v\}, E(v))$: G から $v \in V$ を除いたグラフ

  G の平面埋め込みには $g(G)$ 個の交叉がある

  $\Longrightarrow$ 一つの交叉に関係する頂点 v は 4 個

  そういう v に対しては $g(G(v)) \leq g(G) - 1$

  交叉に関る頂点は G 全体で延べ $4g(G)$ 個

$$\sum_{v \in V} g(G(v)) \leq ng(G) - 4g(G) = (n-4)g(G)$$

$$\#E(v) \geq m - (n-1) \geq 4n + 1$$

三角形分割の個数 (2) 一般の場合 (5/11)

証明 (5/6)

$\#E(v) > 4n$ だから帰納法の仮定より

$$g(G(v)) \geq \frac{3}{64} \binom{n-1}{4} \frac{(\#E(v))^3}{\binom{n-1}{2}^3}$$

$a_1, \ldots, a_n > 0$ のとき以下の不等式が成立

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^3 \right)^{1/3} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

この不等式と $\sum_{v \in V} \#E(v) = (n-2)m$ より

$$\sum_{i=1}^{n} (\#E(v))^3 \geq n \left(\frac{(n-2)m}{n} \right)^3$$

三角形分割の個数 (2) 一般の場合 (6/11)

証明 (6/6)

以上より,

$$g(G) \geq \frac{1}{n-4} \sum_{v \in V} g(G(v))$$
$$\geq \frac{1}{n-4} \cdot \frac{3}{64} \binom{n-1}{4} n \left(\frac{(n-2)m}{n} \right)^3 \frac{1}{\binom{n-1}{2}^3}$$
$$= \frac{3}{64} \binom{n}{4} \frac{m^3}{\binom{n}{2}^3}$$

■

三角形分割の個数 (2) 一般の場合 (7/11)

定理 2

n 点の単純グラフの平面への任意の埋め込みで $2^{O(n)}$ 個の辺交叉なしの全域部分グラフが存在

証明 (1/4)

$F(m)$: n 点, m 辺のグラフの, 交叉なし埋め込み可能な
全域部分グラフの最大数

交叉数が少なくとも $\dfrac{m^3}{cn^2}$ となるよう, 十分大きな定数 c をとり

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{x}{n}\right)^{-cn^2/x}$$

三角形分割の個数 (2) 一般の場合 (8/11)

証明 (2/4)

$m \le cn$ のとき, c は十分大に取るから, n 点 m 辺のグラフとして平面グラフが存在

$\Longrightarrow F(m) = 2^m = 2^{O(n)}$

以下, $m > cn$ のとき $C = (2c)^{c+1}$ として $F(m) < C^n f(m)$ であることを帰納法で示す

- $cn < m < 2cn$ の場合,

$$F(m) < 2^{2cn} < (2c)^{cn} = C^n (2c)^{-n} < C^n \left(\frac{m}{n}\right)^{-\frac{cn^2}{m}} = C^n f(m)$$

三角形分割の個数 (2) 一般の場合 (9/11)

証明 (3/4)

- $m \geq 2cn$ の場合

  $m' \leq m-1$ に対しては $F(m') < C^n f(m')$ が成立と仮定

  $m \geq 2cn$ の場合, 少なくとも $\dfrac{2m^2}{cn^2}$ の交叉を持つ辺が存在

  その辺を使う部分グラフと使わない部分グラフに着目することにより

$$F(m) \leq F(m-1) + F\left(m - \frac{2m^2}{cn^2}\right)$$

三角形分割の個数 (2) 一般の場合 (10/11)

証明 (4/4)

このとき, $2cn \le m \le n^2/2$ だから

$$m - \frac{2m^2}{cn^2} > 2cn - \frac{n^2}{2c} = 2cn\left(1 - \frac{n}{4c^2}\right) > cn$$

より, $F(m-1)$ と $F\left(m - \frac{2m^2}{cn^2}\right)$ に帰納法の仮定が使えて

$$\begin{aligned} F(m) &\le F(m-1) + F\left(m - \frac{2m^2}{cn^2}\right) \\ &< C^n f(m-1) + C^n f\left(m - \frac{2m^2}{cn^2}\right) < C^n f(m) \end{aligned}$$

ここで最後の式では以下を利用

$$f(x-1) + f\left(x - \frac{2m^2}{cn^2}\right) < f(x) \qquad (x \ge e^2 n)$$

■

三角形分割の個数 (2) 一般の場合 (11/11)

系 1

平面上の n 点の三角形分割の個数は $2^{O(n)}$ でおさえられる

証明

n 点の三角形分割が

- 平面グラフであること
- 辺の交叉がないこと

から明らか ■