アルゴリズム論 2

第 8 回: Arrangement (2)

関川 浩

2016/11/02

概要

- Arrangement の概要 (前回)
- Arrangement の応用 (今回)
- Arrangement の構成 (次回)

1. 双対性
   - 双対変換の定義
   - 双対変換の性質
2. 双対性を通した arrangement の応用
   - 点の配置
   - 貫通直線
   - 凸包
   - 点集合の分割

双対変換の定義

$\mathcal{H} \overset{\text{def}}{=} \{\pi \mid \pi$ は $\mathbb{R}^d$ 内の垂直ではない超平面 $\}$

(π が垂直 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ π は x_d 軸と平行な直線を含む)

定義 1 (双対変換)

双対変換 $\mathcal{D}\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathcal{H}$, $\mathcal{D}\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ (逆変換も同じ記号)

- 点 $P(p_1, \ldots, p_d) \in \mathbb{R}^d$ に対し

$$\mathcal{D}(P) \subset \mathbb{R}^d\text{: 超平面 } x_d = 2p_1x_1 + \cdots + 2p_{d-1}x_{d-1} - p_d$$

- 超平面 $\pi \subset \mathbb{R}^d$: $x_d = \eta_1x_1 + \cdots + \eta_{d-1}x_{d-1} + \eta_d$ に対し

$$\mathcal{D}(\pi) = \left(\frac{\eta_1}{2}, \ldots, \frac{\eta_{d-1}}{2}, -\eta_d\right) \in \mathbb{R}^d$$

注意

- $\mathcal{D}(\mathcal{D}(P)) = P$, $\mathcal{D}(\mathcal{D}(\pi)) = \pi$
- 係数の 2 や 1/2 は応用 (Voronoi 図など) を考慮

双対変換の性質 (1/5)

命題 1

P: $\mathbb{R}^d$ 内の点
π: $\mathbb{R}^d$ 内の垂直ではない超平面

(1) 接続関係の保存

$$P \in \pi \iff \mathcal{D}(\pi) \in \mathcal{D}(P)$$

(2) 順序の保存

点 P が超平面 π の上 (下) にある

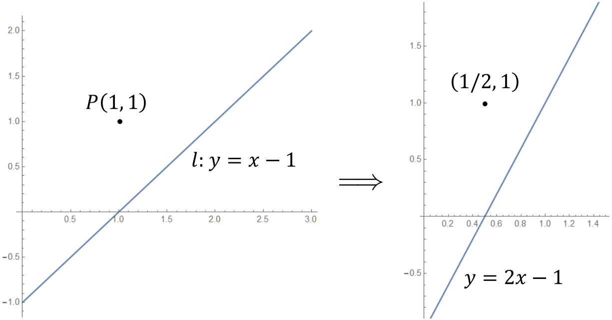
$\iff$ 点 $\mathcal{D}(\pi)$ が超平面 $\mathcal{D}(P)$ の上 (下) にある

例

$\mathbb{R}^2$ 内の直線 l 上の 3 点は以下のものに対応

- l が y 軸と平行ではないとき, 1 点で交わる $\mathbb{R}^2$ 内の 3 直線
- l が y 軸と平行なとき, $\mathbb{R}^2$ 内の平行な 3 直線

双対変換の性質 (2/5)



(左) $P(1,1)$ と l: $y = x - 1$

(右) $\mathcal{D}(P)$: $y = 2x - 1$ と $\mathcal{D}(l)$: $(1/2, 1)$

双対変換の性質 (3/5)

証明

$(p_1, \ldots, p_d)$: P の座標
$x_d = \eta_1 x_1 + \cdots + \eta_{d-1} x_{d-1} + \eta_d$: π の方程式, とする

(1)
$$\begin{aligned} P \in \pi &\iff p_d = \eta_1 p_1 + \cdots + \eta_{d-1} p_{d-1} + \eta_d \\ &\iff -\eta_d = 2p_1 \cdot (\eta_1/2) + \cdots + 2p_{d-1} \cdot (\eta_{d-1}/2) - p_d \\ &\iff \mathcal{D}(\pi) \in \mathcal{D}(P) \end{aligned}$$

(2) 点 P が超平面 π の上 (下) にある
$$\begin{aligned} &\iff p_d > (<)\ \eta_1 p_1 + \cdots + \eta_{d-1} p_{d-1} + \eta_d \\ &\iff -\eta_d > (<)\ 2p_1 \cdot (\eta_1/2) + \cdots + 2p_{d-1} \cdot (\eta_{d-1}/2) - p_d \end{aligned}$$
$\iff$ 点 $\mathcal{D}(\pi)$ が超平面 $\mathcal{D}(P)$ の上 (下) にある

■

双対変換の性質 (4/5)

定義 2 (π^+, π^-)

$\mathbb{R}^d$ 内の超平面 π: $x_d = \eta_1 x_1 + \cdots + \eta_{d-1} x_{d-1} + \eta_d$ に対し

$$\pi^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{(p_1, \ldots, p_d) \in \mathbb{R}^d \mid p_d > \eta_1 p_1 + \cdots + \eta_{d-1} p_{d-1} + \eta_d\}$$

$$\pi^- \stackrel{\text{def}}{=} \{(p_1, \ldots, p_d) \in \mathbb{R}^d \mid p_d < \eta_1 p_1 + \cdots + \eta_{d-1} p_{d-1} + \eta_d\}$$

補題 1 (1/2)

$S = \{P_1, \ldots, P_n\} \subset \mathbb{R}^d$: n 点の集合

$\mathcal{H} = \mathcal{D}(S)$

(1) 垂直ではない超平面 π が線形独立な $P_{i_1}, \ldots, P_{i_d}$ を含む
$\iff \mathcal{D}(\pi)$ が $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ の頂点

(2) 垂直ではない超平面 π にある S の点からなる affine 空間が k-flat
$\iff \mathcal{D}(\pi)$ が $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ の $(d-k-1)$-face に含まれる

双対変換の性質 (5/5)

補題 1 (2/2)

(3) 点 P が $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ のある cell の内部に含まれる

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{H}_a = \{\pi \in \mathcal{H} \mid P \in \pi^-\}$ として S の点がのっていない $\mathcal{D}(P)$ が S を $\mathcal{D}(\mathcal{H}_a)$ と $\mathcal{D}(\mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_a)$ に分ける
(このとき, P を含む cell は P を $\mathcal{D}(\mathcal{H}_a)$ と $\mathcal{D}(\mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_a)$ に分割するという)

(4) $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ 内の cells $c_1 \neq c_2$ が $\mathcal{H}$ の同じ分割を与える

$\Longleftrightarrow$ 任意の $\pi \in \mathcal{H}$ に対して $c_1 \subset \pi^+$ (π^-) かつ $c_2 \subset \pi^-$ (π^+)

(5) Arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ が単純

$\Longleftrightarrow$ S の k 個の点を含む垂直ではない $(k-1)$-flat がただ一つ存在し, S のどの $(d+1)$ 個の点も同一の超平面上にない
$(2 \leq k \leq d)$

双対性を通した arrangement の応用

平面上の点集合に関する問題

$\Downarrow$ 双対変換で点を直線に変換

直線の arrangement に関する問題

点集合のままではうまく解けない問題が簡単に解けることがある

そういった問題をいくつか紹介

- 点の配置
- 貫通直線
- 凸包
- 点集合の分割

点の配置 (1/7)

- $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^2$
- $l \subset \mathbb{R}^2$: 原点を通る直線
- Q_i: P_i を l に射影した点 $(i = 1, \ldots, n)$

原点を中心に l を反時計回りに回転させる

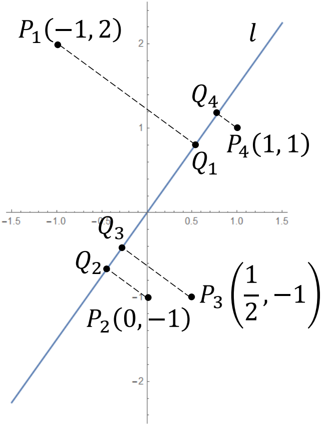
- y 軸と重なる状態からスタートし
- 再び y 軸に重なるまで π 回転

問題

このとき, Q_i は l 上, どのような順序で並ぶか?

- いつ点の順序が変化するか
- 現れる順序は全部で何通りか (一般に $n!$ より少ない)

点の配置 (2/7)



点 P_1, P_2, P_3, P_4 の直線 l への射影

点の配置 (3/7)

例

$P_1 = (-1, 2)$, $P_2 = (0, -1)$, $P_3 = (1/2, -1)$, $P_4 = (1, 1)$

順序変化の様子 (添字のみ記述)

$$
\begin{array}{cccccccccc}
3 & 2 & 4 & 1 & & & & & \\
3 & 4 & 2 & 1 & & & & & \\
4 & 3 & 2 & 1 & & & & & \\
4 & 3 & 1 & 2 & & & & & \\
4 & 1 & 3 & 2 & & & & & \\
1 & 4 & 3 & 2 & & & & & \\
1 & 4 & 2 & 3 & = & 3 & 2 & 4 & 1
\end{array}
$$

- 点 Q_i と Q_j の順序が変わる $\Longleftrightarrow$ 直線 l と Q_iQ_j が直交
- 3 点以上が同一直線上になければ, 現れる順序は $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 通り

点の配置 (4/7)

P_i: (p_{i1}, p_{i2}) ($i \neq j$ のとき $p_{i1} \neq p_{j1}$ を仮定)

直線 $P_iP_j \overset{\mathcal{D}}{\longleftrightarrow} \mathcal{D}(P_i)$ と $\mathcal{D}(P_j)$ の交点

直線 P_iP_j: $y = a_{ij}x + b_{ij}$ とすると

$$p_{i2} = a_{ij}p_{i1} + b_{ij} \text{ かつ } p_{j2} = a_{ij}p_{j1} + b_{ij}$$

$\mathcal{D}(P_i) : y = 2p_{i1}x - p_{i2}$, $\mathcal{D}(P_j) : y = 2p_{j1}x - p_{j2}$ より

$$\mathcal{D}(P_i) \text{ と } \mathcal{D}(P_j) \text{ の交点: } (a_{ij}/2, -b_{ij}) = \mathcal{D}(P_iP_j)$$

点の配置 (5/7)

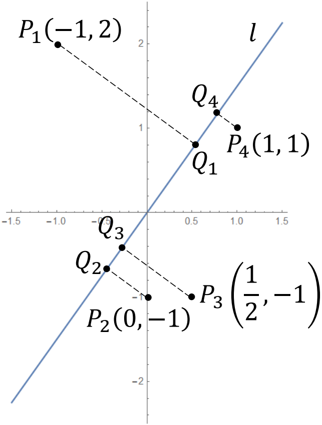
$S = \{P_1, \ldots, P_n\}$ とする

$\mathcal{D}(S) = \{\mathcal{D}(P_1), \ldots, \mathcal{D}(P_n)\}$ の arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{D}(S))$ は, 単純なら $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 個の交点をもつ

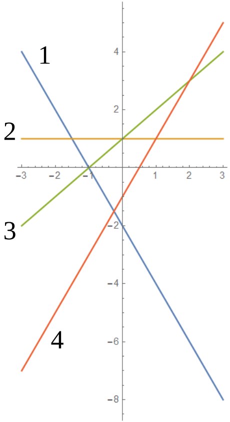
以下の二つは一致

- $\mathcal{A}(\mathcal{D}(S))$ において直線 $x = a$ と交わる $\mathcal{D}(P_i)$ の順番
- S を直線 $y = (-a/2)x$ 上に射影して得られる点の順序

点の配置 (6/7)



$\Longrightarrow$



(左) 元の点集合

(右) 元の点集合と双対な直線の arrangement

点の配置 (7/7)

直線 l を y 軸と重なる状態から再び y 軸と重なるまで原点中心に反時計回りに回転
$\iff y = (-a/2)x$ の a が ∞ から $-\infty$ まで減少

双対変換した先では:

- $\mathcal{D}(P)$ の交点を $x = a$ が通過するとき順序が変化
- Arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{D}(S))$ 上の交点は高々 $n(n-1)/2$ 個
- 交点が $n(n-1)/2$ 個 $\iff$ Arrangement が単純

よって, 順序が一番変わるのは:

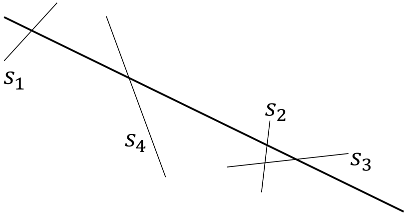
Arrangement が単純, その交点の x 座標がすべて異なるとき
$\iff S$ の二点を結ぶ直線の傾きがすべて異なるとき

貫通直線 (1/4)

問題 (貫通直線)

$s_1, \ldots, s_n \subset \mathbb{R}^2$: 線分

- $s_1, \ldots, s_n$ のすべてと交叉する直線が引けるか?
- 引けるなら, そのような直線 (貫通直線という) を 1 本求めよ



貫通直線

貫通直線 (2/4)

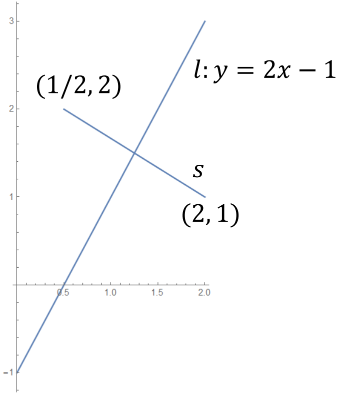
- y 軸に平行な直線はないものとする
(もしあれば, 原点中心に全体をわずかに回転すればよい)
- 線分 s_i の端点を $A_i(a_{i1}, a_{i2})$, $B_i(b_{i1}, b_{i2})$ とする $(a_{i1} < b_{i1})$
$\Longrightarrow$ 直線 $\mathcal{D}(A_i)$ の傾きは直線 $\mathcal{D}(B_i)$ の傾きより小さい
- 直線 $\mathcal{D}(A_i)$ を, $\mathcal{D}(A_i) \cap \mathcal{D}(B_i)$ を中心として反時計回りに回転すると, 直線 $\mathcal{D}(A_i)$ が通過する楔型の領域 W_i ができる
- $P \in W_i \iff$ 直線 $\mathcal{D}(P)$ は s_i と交わる

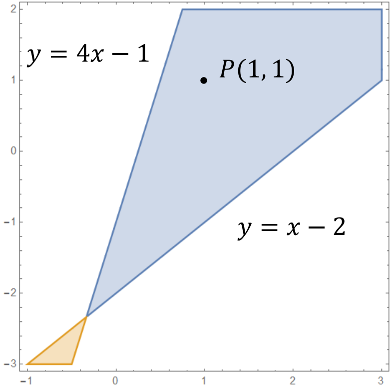
したがって,

$s_1, \ldots, s_n$ すべてと交叉する直線が存在 $\iff W_1 \cap \cdots \cap W_n \neq \emptyset$

$W_1 \cap \cdots \cap W_n$ の計算は (分割統治法により) $O(n \log n)$ で可能

貫通直線 (3/4)





(左) 線分 s と直線 l (右図点 $P(1, 1)$ の双対)

(右) 線分 s の両端点の双対による楔型と点 P

貫通直線 (4/4)

参考: 貫通直線と関連した問題で, 以下が成立

定理

S: $\mathbb{R}^2$ 内の y 軸に平行な線分の有限集合

以下の二条件は同値

- 任意の $s_1, s_2, s_3 \in S$ に対して s_1, s_2, s_3 すべてと交叉する直線が存在
- S に属するすべての線分と交叉する直線が存在

凸包 (1/2)

$S = \{P_1, \ldots, P_n\} \subset \mathbb{R}^2$

> S の凸包 $\overset{\text{対応}}{\longleftrightarrow}$ $\mathcal{A}(\mathcal{D}(S))$ の上側 envelope と下側 envelope

上 (下) 側 envelope:

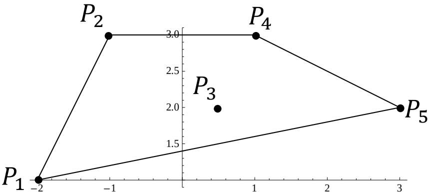
x 座標を固定したとき, 最大値 (最小値) を取る直線からなる折れ線関数 $f_M(x)$ ($f_m(x)$)

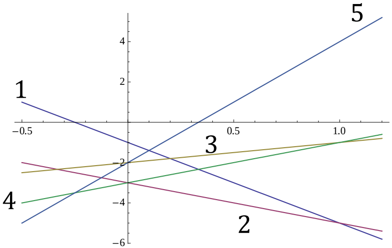
$$f_M(a) = \begin{pmatrix} \text{直線 } x = a \text{ と } \mathcal{D}(P_i)\ (i = 1, \ldots, n) \text{ の} \\ \text{交点の } y \text{ 座標の中で最大の値} \end{pmatrix}$$

$$f_m(a) = \begin{pmatrix} \text{直線 } x = a \text{ と } \mathcal{D}(P_i)\ (i = 1, \ldots, n) \text{ の} \\ \text{交点の } y \text{ 座標の中で最小の値} \end{pmatrix}$$

> Envelope 上の点 $\longleftrightarrow$ 凸包の支持直線
>
> Envelope の頂点 $\longleftrightarrow$ 凸包の頂点 (2 本の支持直線の交点)

凸包 (2/2)





(左) 入力点の集合 S と凸包

(右) Arrangement $\mathcal{D}(S)$

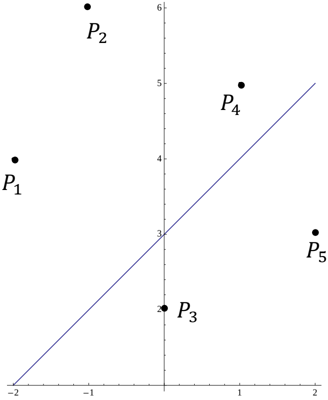
点集合の分割 (1/2)

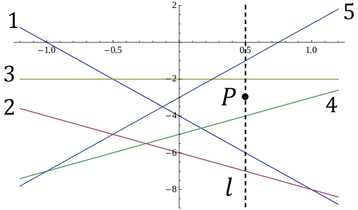
S: $\mathbb{R}^2$ 内の点の有限集合

Arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{D}(S))$ の, ある cell に含まれる点 P に対して
P を通り y 軸に平行な直線 l を引く

点 P より上で l が k 本の arrangement の直線と交わる
$\iff$ Arrangement の直線中, 点 P より上にあるものは k 本
$\iff$ 元の平面で S 中の k 点より上に直線 $\mathcal{D}(P)$, S 中の $(n-k)$ 点より下に直線 $\mathcal{D}(P)$ が存在

$\Longrightarrow$ S を k 個と $(n-k)$ 個に分ける直線が得られる





(左) 点集合 S と直線 $\mathcal{D}(P)$

(右) $\mathcal{D}(S)$, 点 P, および点 P を通る y 軸と平行な直線 l