アルゴリズム論 2

第 12 回: 三角形分割 (3)

関川 浩

2016/12/07

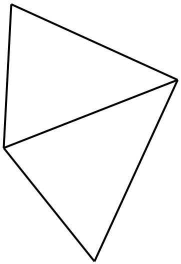
- 三角形分割の定義と性質 (前々回)
- Voronoi 図と Delaunay 三角形分割の構成アルゴリズム (前回)
- Delaunay 三角形分割の性質 (今回)

1. 対角変形可能性
   - 凸四角形の三角形分割
   - 対角変形
2. Delaunay 三角形分割と最適化問題
   - 最小角最大
   - 最大外接円最小
   - 最小包囲円
   - 最小木

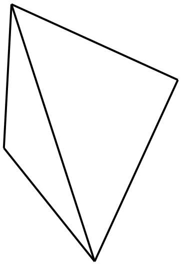
凸四角形の三角形分割

4 頂点が同一円周上にはない凸四角形の三角形分割

- 対角の和が π を越える二頂点を結ぶ線分を二つの三角形の共通辺
  $\Longrightarrow$ Delaunay 三角形分割
- そうではない
  $\Longrightarrow$ 非 Delaunay 三角形分割



Delaunay 三角形分割



非 Delaunay 三角形分割

対角変形 (1/5)

定義 1

- 対角変形
  凸四角形の二つの三角形分割の一方から他方へ変える操作
- Delaunay 対角変形
  Delaunay ではない三角形分割から Delaunay 三角形分割に移る対角変形
- 非 Delaunay 辺
  Delaunay 対角変形で消滅する対角線

対角変形 (2/5)

補題 1

三角形分割が Delaunay 三角形分割
$\Longleftrightarrow$ 三角形分割が非 Delaunay 辺を持たない

証明 (1/2)

$\Rightarrow$) 非 Delaunay 辺があれば, 三角形分割の中の三角形で, その外接円が他の点を含むものが存在
$\Longrightarrow$ Delaunay 三角形分割ではない

対角変形 (3/5)

証明 (2/2)

$\Leftarrow$) 非 Delaunay 辺を持たない三角形分割に対して, 各頂点 $P_i(x_i, y_i)$ を放物曲面 $z = x^2 + y^2$ に持ち上げた点 $P_i'(x_i, y_i, x_i^2 + y_i^2)$ を考える

各三角形も対応して持ち上げると曲面 (三角形の貼り合わせ) が構成されるので, その曲面を $z = f(x, y)$ とする

この $f(x, y)$ は凸関数となるので (証明略), $z = f(x, y)$ は P_i' の凸包の下側境界と一致

$\Longrightarrow$ 元の三角形分割が Delaunay 三角形分割 ∎

対角変形 (4/5)

非 Delaunay 辺があれば, Delaunay 対角変形により局所的には
(その凸四角形では) 非 Delaunay 辺を解消可能

$\Longrightarrow$ これを繰り返せば Delaunay 三角形分割に到達

補題 2

Delaunay 対角変形の回数は $\binom{n}{2} - (2n-3)$ で押さえられる

証明

(補題 1 の証明の省略部分より) 一度 Delaunay 対角変形で消えた辺は,
Delaunay 対角変形する限り, 以後, 二度と現われない

- 非 Delaunay 辺は高々 $\binom{n}{2}$
- Delaunay 三角形分割の辺数は少なくとも $2n-3$ ■

対角変形 (5/5)

定理 1

平面上の一般の位置にある n 点に対し，任意の三角形分割から始めて高々 $\left(\dfrac{n^2}{2}-\dfrac{5n}{2}+3\right)$ 回の Delaunay 対角変形を繰り返すと Delaunay 三角形分割が得られる

- 三角形分割だけなら $O(n\log n)$ もあれば構成可能
- それを出発点とすれば $O(n^2)$ の Delaunay 三角形分割アルゴリズムが得られる

注意

- $O(n^2)$ なので，一般には Voronoi 図経由の $O(n\log n)$ には劣る
- 出発の三角形分割として Delaunay 三角形分割に近いものが簡単に構成できれば有用なアルゴリズムとなり得る

最小角最大

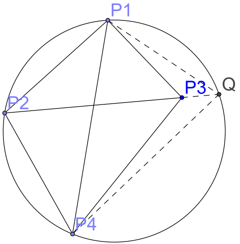
補題 3

凸四角形で Delaunay 対角変形したとき，三角形分割に現れる三角形の最小角の値は非減少

証明 (1/2)

図で P_1P_4 は非 Delaunay 辺

$\theta_{ijk} \stackrel{\text{def}}{=} \angle P_iP_jP_k$



最小角最大

証明 (2/2)

$\theta_{314} < \angle QP_1P_4 = \theta_{324} < \theta_{124}, \qquad \theta_{142} = \angle P_1QP_2 < \theta_{132} < \theta_{134}$

よって, 辺 P_1P_4 を用いた三角形分割の最小角は

$$\min\{\theta_{124}, \theta_{142}, \theta_{214}, \theta_{134}, \theta_{314}, \theta_{341}\} = \min\{\theta_{214}, \theta_{142}, \theta_{314}, \theta_{341}\}$$

また, $\theta_{214} < \theta_{213}$, $\theta_{241} < \theta_{243}$ が成立

辺 P_2P_3 を用いた三角形分割の最小角は

$$\begin{aligned} &\min\{\theta_{123}, \theta_{132}, \theta_{213}, \theta_{234}, \theta_{243}, \theta_{324}\} \\ &\quad \geq \min\{\theta_{123}, \theta_{132}, \theta_{214}, \theta_{234}, \theta_{241}, \theta_{324}\} \end{aligned}$$

ここで, $\theta_{214} < \theta_{234}$, $\theta_{241} = \theta_{142} < \theta_{132}$, $\theta_{314} < \theta_{324}$, $\theta_{341} < \theta_{123}$

よって, Delaunay 対角変形によって最小角は非減少 ■

最小角最大 (1/3)

定理 2

Delaunay 三角形分割は, すべての三角形分割の中で, 三角形分割に現れる三角形の角度の最小値が最大

証明

すべての三角形分割の中で, 三角形分割に現れる三角形の角度の最小値が最大になるものを取る

そこから Delaunay 対角変形を繰り返して Delaunay 三角形分割に移るとき, 補題 3 より最小角は非減少 ■

最小角最大 (2/3)

定義 2 (辞書式順序)

$(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し,

$$a_i = b_i \ (i = 1, \ \ldots, \ j-1), \qquad a_j < b_j$$

のとき, $(a_1, \ldots, a_n) < (b_1, \ldots, b_n)$ と定義 ($>$ も同様)

- 一般の位置にある点集合 (有限集合) では, 任意の三角形分割は同じ個数の三角形を持つ (第 10 回 補題 1)
- 今, 二つの三角形分割 τ_1, τ_2 が t 個の角を持つとして, その角度を小さい順に並べたベクトル

$$(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_t^i) \quad (i = 1, \ 2; \ \alpha_1^i \leq \cdots \leq \alpha_t^i)$$

を考え, そのベクトル間に辞書式順序で大小を定義

最小角最大 (3/3)

定理 3

Delaunay 三角形分割は, 三角形分割の三角形の角度すべてを小さい順に並べたベクトルの辞書式順序に関して最大

証明

三角形分割を一つ取り, Delaunay 対角変形を繰り返す
$\Longrightarrow$ Delaunay 三角形分割が得られる

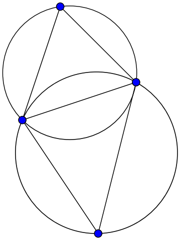
Delaunay 対角変形により最小角は減少しない
$\Longrightarrow$ 辞書式順序で小さくならない ■

最大外接円最小 (1/3)

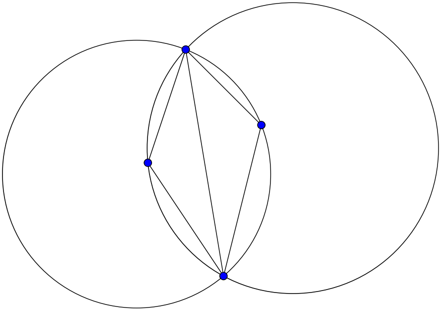
補題 4

凸四角形において Delaunay 対角変形したとき, 以下が成立

- 外接円の半径の最大値は減少
- 外接円の面積の和は減少



Delaunay 三角形分割



非 Delaunay 三角形分割

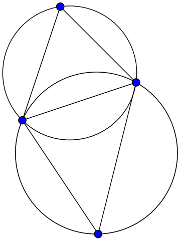
最大外接円最小 (2/3)

証明

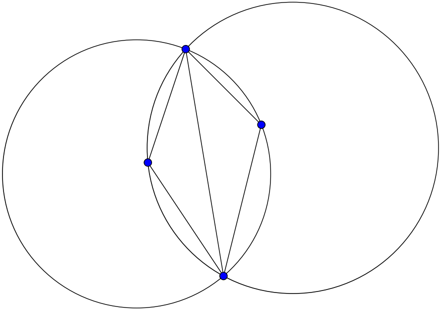
凸四角形の二つの三角形分割のうち

- Delaunay 三角形分割の方の三角形二つの外接円を C_1, C_2
- 非 Delaunay 三角形分割の方の三角形二つの外接円を C_3, C_4

とすると, $C_1 \cup C_2 \subset C_3 \cup C_4$ が成り立つから主張は成立 ■



Delaunay 三角形分割



非 Delaunay 三角形分割

最大外接円最小 (3/3)

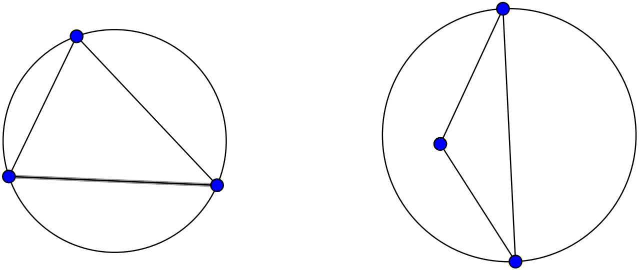
定理 4

三角形分割の各三角形の半径を大きい順に並べたベクトルについて，
Delaunay 三角形分割は，このベクトルを辞書式順序で最小化

最小包囲円

三角形の最小包囲円 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ その三角形を含む最小の円

- 鋭角三角形の最小包囲円は外接円
- 鈍角三角形の最小包囲円は最長辺を直径とする円



定理 5

Delaunay 三角形分割は，三角形分割の三角形の最小包囲円の大きさの最大値を最小にする

最小木 (1/2)

定義 3 (Euclid 距離での最小木)

$T = \{\{P_1, \ldots, P_n\}, E\}$ が P_1, ..., $P_n \in \mathbb{R}^2$ の Euclid 距離での最小木

$\overset{\text{def}}{\iff}$ T は木, かつ, 任意の木 $T' = \{\{P_1, \ldots, P_n\}, E'\}$ に対し,

$$\sum_{\{P,Q\} \in E} d(P,Q) \leq \sum_{\{P,Q\} \in E'} d(P,Q)$$

命題 1

P_1, ..., $P_n \in \mathbb{R}^2$ の Euclid 距離での最小木は Delaunay 三角形分割の部分グラフ

最小木 (2/2)

アルゴリズム (Euclid 距離での最小木の構成)

- $P_1, \ldots, P_n$ の Delaunay 三角形分割を求める
- Delaunay 三角形分割を無向グラフと見て, Kruskal のアルゴリズムで最小木を構成

計算量

- Delaunay 三角形分割構成の計算量は $O(n \log n)$, 辺数は $O(n)$
- 辺数が e のとき Kruskal のアルゴリズムの計算量は $O(e \log e)$

$\Longrightarrow$ 上記アルゴリズムの計算量: $O(n \log n)$

注意

前処理なしで完全グラフに Prim のアルゴリズムを適用すると $O(n^2)$
(グラフの頂点数が n のとき, Prim のアルゴリズムの計算量: $O(n^2)$)