アルゴリズム論 2

第 3 回: 低次元線形計画問題 (2)

関川 浩

2016/09/28

概要

- 3 次元線形計画問題に対する縮小法
- 4 次元以上の場合の問題点 (解決策は次回)

1. 3 次元の線形計画問題
    - 問題の変形
    - 最適解と直線の位置関係
    - 冗長な制約
    - アルゴリズムの概略
    - 計算量
2. 4 次元以上の場合
    - 方針
    - 計算量

3 次元の線形計画問題

2 次元のときと同様, 以下の形のみを考える

n 不等式制約をもつ 3 次元の線形計画問題 (特殊形)

最小化: z

条件: $z \geq a_i x + b_i y + c_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$

これは以下と等価

関数の最小値

以下の関数の最小値を求めよ

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{a_i x + b_i y + c_i \mid i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$$

凸関数

$f(x,y)$ は凸関数

すなわち, $\forall(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ $((x_1,y_1)\neq(x_2,y_2))$, $0<\forall\lambda<1$ に対して

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)\leq\lambda f(x_1,y_1)+(1-\lambda)f(x_2,y_2) \tag{$*$}$$

注: 凸関数 $g\colon\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ が狭義凸 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $(*)$ でつねに "$<$" が成立

凸関数の性質

- 凸関数は連続
- 凸関数が極小値を持てばそれは最小値
- 狭義凸関数は高々一つの最小値を持つ

多次元縮小法

(x^*, y^*): 最適解 ($f(x,y)$ の最小値を与える点)

多次元縮小法の流れ

1. $\mathbb{R}^2$ 内の直線 l に関し (x^*, y^*) が l のどちら側にあるかを判定
   ($O(n)$ で可能)
   (2 次元の場合の, $c \in \mathbb{R}$ と最適解の大小判定に相当)
2. 以下のような二直線 l', l'' を求める ($O(n)$ で可能)
   l', l'' から決まる四領域のどこに (x^*, y^*) があるかを判定することにより, 元の問題の, 少なくとも $n/16$ 個の冗長な条件が判明

注意: ステップ 1 で 2 次元の結果を利用

最適解と直線の位置関係 (1/5)

テスト: xy 平面内の直線に対し，そのどちら側に最適解があるかを判定

1. 定義域を直線に制限した 2 次元線形計画問題を解く
   $\iff f(x, y)$ を直線上で最小化 (f は 1 変数関数になる)
2. ステップ 1 の結果を利用

ステップ 1 には前回の結果が利用可能

補題 1

xy 平面内の任意の直線上での $f(x, y)$ の最適解 $(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$ は $O(n)$ 時間で求められる

最適解と直線の位置関係 (2/5)

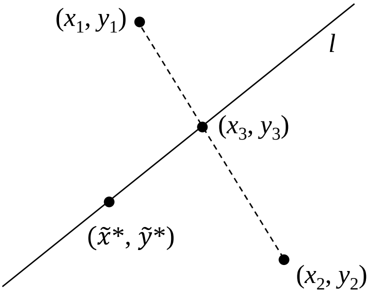
$l \subset \mathbb{R}^2$: 任意の直線
$(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$: 直線 l 上での $f(x, y)$ の最適解

f は凸だから $f(x, y) < f(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$ となる (x, y) は

- まったく存在しないか ($(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$ が $\mathbb{R}^2$ 全体の最適解のとき)
- l の片側にのみ存在

(下図) もし $f(x_1, y_1) < f(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$ かつ $f(x_2, y_2) < f(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$

$\Longrightarrow f(x_3, y_3) \leq \max\{f(x_1, y_1), f(x_2, y_2)\} < f(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$: 矛盾



最適解と直線の位置関係 (3/5)

$\tilde{z}^*$: 直線 l 上での $f(x,y)$ の最小値
z^*: $\mathbb{R}^2$ 全体での $f(x,y)$ の最小値

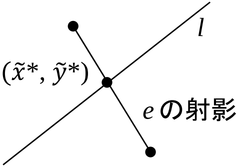
- 最適解 $(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$ が一意で $(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*, \tilde{z}^*)$ が $z = f(x,y)$ の辺 e 上 (ただし頂点以外) に存在するとき

$\exists i, j$ s.t. $e \subset \pi_i \cap \pi_j$, ただし,

$$\pi_i : z = a_i x + b_i y + c_i, \qquad \pi_j : z = a_j x + b_j y + c_j$$

e の射影上, $f(x,y)$ が減少する方向を求める

- $f(x,y)$ が減少する方向に最適解が存在
- $f(x,y)$ が一定なら $(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$ は全体の最適解



最適解と直線の位置関係 (4/5)

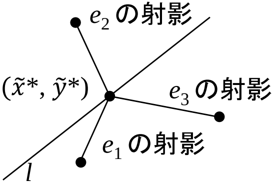
- 最適解 $(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$ が一意で $(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*, \tilde{z}^*)$ が $z = f(x, y)$ の頂点 (三辺 e_1, e_2, e_3 の交点) のとき

  $\exists i$, j, k s.t. $e_1 \subset \pi_i \cap \pi_j$, $e_2 \subset \pi_i \cap \pi_k$, $e_3 \subset \pi_j \cap \pi_k$, ただし,

$$\begin{aligned} \pi_i &: z = a_i x + b_i y + c_i, \\ \pi_j &: z = a_j x + b_j y + c_j \\ \pi_k &: z = a_k x + b_k y + c_k \end{aligned}$$

  e_1, e_2, e_3 の射影上, $f(x, y)$ が減少する方向を求める

- $f(x, y)$ が減少する方向があれば, そちら側に最適解が存在
- そうでなければ $(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$ は全体の最適解



最適解と直線の位置関係 (5/5)

注意

- l 上の最適解が区間をなすときは, 区間の端点で上記を実行
- 直線上の最小値が $-\infty$ のときは全体の最小値も $-\infty$
- 退化している場合 (3 平面以上が直線を共有, 4 平面以上が点を共有) も対処可能 (詳細略)

以上をまとめて

補題 2

任意の直線 $l \subset (x, y)$ に対し, $f(x, y)$ の $\mathbb{R}^2$ での最小解が

l のどちら側にあるか, あるいは l 上にあるか

は $O(n)$ 時間で決定可能

冗長な制約 (1/2)

二つの異なる制約 $z \geq a_i x + b_i y + c_i$, $z \geq a_j x + b_j y + c_j$ を考察

$(a_i, b_i) = (a_j, b_j)$ の場合 (二平面が平行な場合)

- $c_i < c_j \implies$ 任意の (x, y) に対し
$$a_i x + b_i y + c_i < a_j x + b_j y + c_j$$
$\implies a_i x + b_i y + c_i$ が冗長

- $c_i \geq c_j \implies$ 任意の (x, y) に対し
$$a_i x + b_i y + c_i \geq a_j x + b_j y + c_j$$
$\implies a_j x + b_j y + c_j$ が冗長

冗長な制約 (2/2)

二つの異なる制約 $z \geq a_i x + b_i y + c_i$, $z \geq a_j x + b_j y + c_j$ を考察 (続)

$(a_i, b_i) \neq (a_j, b_j)$ の場合 (二平面が交線を持つ場合)

- 交線上で二制約の値は等しい
- 最適解が交線のどちら側か判定できれば一つの制約を削除可能 (最適解のある側で下側にくる制約が冗長)

  $\Longleftarrow$ さきほどのテストを利用

アルゴリズムの概略 (1/3)

n 個の制約を $n/2$ 個の対 $\{(i,j)\}$ に分ける

- $(a_i, b_i) = (a_j, b_j)$ (二制約が平行) なら一方は削除可能
- $(a_i, b_i) \neq (a_j, b_j)$ の場合 (二制約が交線を持つ場合)
  - 交線を (x, y) 平面に射影した直線を l_{ij} とし, l_{ij} の傾きの中央値 a_m を求める
  - l_{ij} に対し, 傾きが a_m より大きいものと, a_m 以下のものの対を作り, 各直線対の交点を計算
  - 交点を半分ずつに分ける傾き a_m の直線 l' を求める
    (交点を通る傾き a_m の直線の y 切片の中央値を求めればよいので $O(n)$ で可能)

アルゴリズムの概略 (2/3)

$(a_i, b_i) \neq (a_j, b_j)$ の場合 (二制約が交線を持つ場合) (続)

- l' に関して (x^*, y^*) がどちら側にあるか判定
  - (x^*, y^*) が l' 上なら終了
  - そうでなければ, l' に関して (x^*, y^*) と反対側にある交点を考え, それを半分ずつに分ける y 軸に平行な直線 l'' を求める
  - l'' に関して (x^*, y^*) がどちら側か判定

アルゴリズムの概略 (3/3)

$(a_i, b_i) \neq (a_j, b_j)$ の場合 (二制約が交線を持つ場合) (続)

- l', l'' により (x, y) 平面は四領域に分割
  四領域のうち (x^*, y^*) を含むものを R とし, R とは辺を共有しない領域を R' とする
- R' に交点を持つ直線対を考えると, 対の一方は R と共有点なし
  そのような直線を交線とする二制約の一方は冗長
  (R でつねにもう一方の制約より小だから)

以上は $O(n)$ で実行可能
$\Longrightarrow$ 少なくとも制約の 1/16 は $O(n)$ 時間で削除可能

注意

制約 2 個で交線 1 本, 交線 2 本で交点 1 個 $\Longrightarrow$ 制約 4 個で交点 1 個

計算量

定理 1

線形不等式制約が n 個の 3 次元線形計画問題は, 縮小法を用いて $O(n)$ 時間で解ける

1. 3 次元の線形計画問題
2. 4 次元以上の場合

4 次元以上の場合

d 次元 $(d \geq 4)$ の場合

方針

1. 定義域 $\mathbb{R}^{d-1}$ の中で超平面を考え，そのどちら側に最適解があるかを判定 ($O(n)$ で可能)
2. (1) を利用し，$O(n)$ 時間で一定割合の冗長な制約条件を発見

注意

- $\mathbb{R}^m$ 内の超平面: $a_1x_1 + \cdots + a_mx_m + b = 0$ で定義される図形
本質的に $\mathbb{R}^{m-1}$
- (1) で $(d-1)$ 次元の結果を利用

計算量

多次元縮小法の計算量

- $O(2^{2^d} n)$: n に関しては 1 次だが d に関しては二重指数
  $\Longrightarrow$ 実用上は d が小さいときしか使えない
- $O(3^{d^2} n)$ にできるが, 状況は大して変わらない

$\Longrightarrow$ ランダム化アルゴリズムを使って解決 (次回)