アルゴリズム論 2
第 6 回: 凸包 (2)

関川 浩

2016/10/19

1. 2 次元の凸包構成
   - 分割統治法
   - 分割統治法と線形計画法の組合せ

2. 補足: 3 次元以上の凸包構成

分割統治法の考え方

分割統治法

- 問題を，ほぼ等しい大きさの二つの部分問題に分割し
- 各部分問題を再帰的に解いた後
- 二つの解を組み合わせて元の問題の解を得る方法

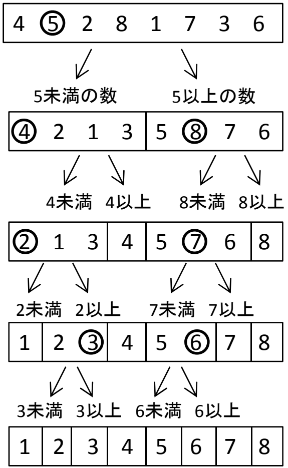
例: クイックソート，マージソート

凸包構成問題の場合:

問題の分割 $\Longleftrightarrow$ 入力される点集合の分割

クイックソート

与えられた列をある値 (pivot) を境に二つに分け,
それぞれを再帰的にソートした結果をつなぎ合わせる



例: Pivot として, 列の最初の二つのうち大きい方を取る場合

注: Pivot として列の先頭を取ると, それが最小値だった場合, 無限ループとなる

マージソート

再帰呼出しからソート済みリストが戻ってきたあとでリストを併合
(クイックソートは振り分け処理をしてから再帰呼出し)

入力: 4 6 3 8 5 7 1 2

4 6 3 8 | 5 7 1 2

4 6 | 3 8 | 5 7 | 1 2

4 | 6 | 8 | 3 | 5 | 7 | 2 | 1

4 6 | 3 8 | 5 7 | 1 2

3 4 6 8 | 1 2 5 7

ソート結果: 1 2 3 4 5 6 7 8

分割統治法による 2 次元の凸包構成 (1/6)

$S \subset \mathbb{R}^2$: 有限個の点の集合

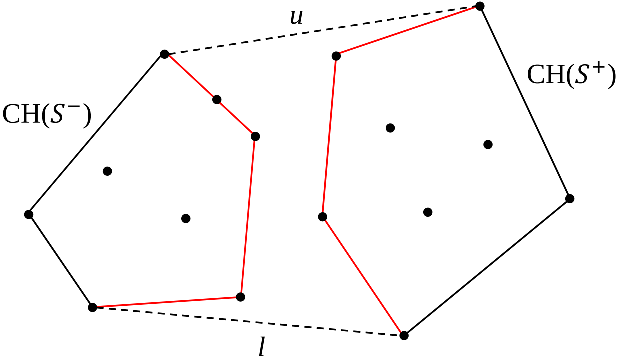
$L(S)$: $\mathrm{CH}(S)$ の頂点のリスト (反時計回り)

アルゴリズムの概略

1. 以下の 2 条件を満たすよう, S を $S = S^- \cup S^+$ ($S^- \cap S^+ = \emptyset$) と分割し, $L(S^-)$ と $L(S^+)$ を求める
   - $(x_1, y_1) \in S^-$, $(x_2, y_2) \in S^+ \implies x_1 < x_2$
   - $\#S^- \approx \#S^+$
2. $L(S^-)$ と $L(S^+)$ から $L(S)$ を求める
   (1) $\mathrm{CH}(S^-)$ と $\mathrm{CH}(S^+)$ の 2 本の共通外接線 l, u を求める
   (u は S の上側, l は S の下側)
   (2) $L(S^-)$, $L(S^+)$ から不要な頂点を除き $L(S)$ を求める

注: Step 1 の 1 番目の条件より $\mathrm{CH}(S^-) \cap \mathrm{CH}(S^+) = \emptyset$

分割統治法による 2 次元の凸包構成 (2/6)



共通外接線 l, u

分割統治法による 2 次元の凸包構成 (3/6)

Step 2 (1) の詳細: l の求め方

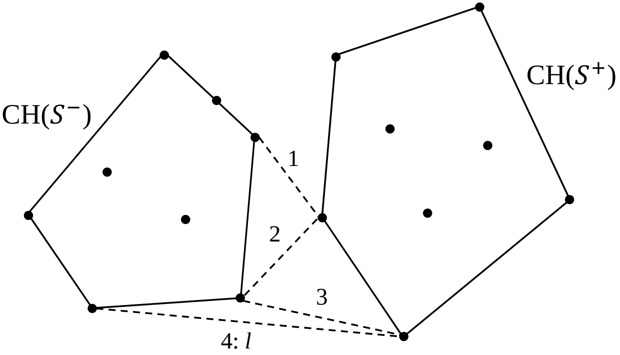
$P^- \in L(S^-)$: x 座標が最大の点 (の中で y 座標が最小の点)

$P^+ \in L(S^+)$: x 座標が最小の点 (の中で y 座標が最小の点)

1. 直線 P^-P^+ が $\mathrm{CH}(S^-)$ と下側で接していれば Step 2 へ
   そうでなければ, 下側で接するまで P^- を $L(S^-)$ の中で時計回りに更新し Step 2 へ
2. 直線 P^-P^+ が $\mathrm{CH}(S^+)$ と下側で接していれば終了
   そうでなければ, 下側で接するまで P^+ を $L(S^+)$ の中で反時計回りに更新し Step 1 へ

注意: u の求め方も同様

分割統治法による 2 次元の凸包構成 (4/6)



P^-, P^+ の更新

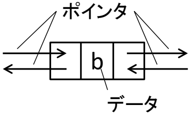
分割統治法による 2 次元の凸包構成 (5/6)

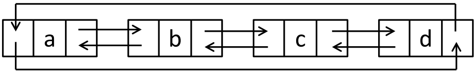
Step 2 (2) の詳細

- 双方向環状リストを利用
- l が直線 $P_l^- P_l^+$, u が直線 $P_u^- P_u^+$ のとき

$$
\begin{aligned}
L(S^-) &= [\ \boxed{\quad 1 \quad},\ P_l^-,\ \boxed{\quad 2 \quad},\ P_u^-,\ \boxed{\quad 3 \quad}\ ] \\
L(S^+) &= [\ \boxed{\quad 4 \quad},\ P_l^+,\ \boxed{\quad 5 \quad},\ P_u^+,\ \boxed{\quad 6 \quad}\ ] \\
L(S) &= [\ \boxed{\quad 1 \quad},\ P_l^-,\ P_l^+,\ \boxed{\quad 5 \quad},\ P_u^+,\ P_u^-,\ \boxed{\quad 3 \quad}\ ]
\end{aligned}
$$

$\boxed{\quad 1 \quad}$ など: 0 個以上の頂点の列





双方向環状リスト

分割統治法による 2 次元の凸包構成 (6/6)

- l, u の計算: $O(n)$
- 不要部分削除: $O(n)$

$\Longrightarrow$ $L(S^-)$, $L(S^+)$ から $L(S)$ を求めるのは $O(n)$ で可能

$T(n)$: $L(S)$ を求める計算量
$\Longrightarrow$ ある定数 C が存在して $T(n) \leq 2T(n/2) + Cn$

証明

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq 2T(n/2) + Cn \\
&\leq 2(2T(n/4) + C(n/2)) + Cn = 4T(n/4) + 2Cn \\
&\leq 4(2T(n/8) + C(n/4)) + 2Cn = 8T(n/8) + 3Cn \\
&\quad \vdots \\
&\leq nT(1) + (\log n)Cn = O(n \log n)
\end{aligned}
$$

■

線形計画法の利用 (1/3)

$P_i(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ $(i = 1, \ldots, n)$: 入力点
x': $\min\{x_1, \ldots, x_n\} \leq x' \leq \max\{x_1, \ldots, x_n\}$ を満たす実数

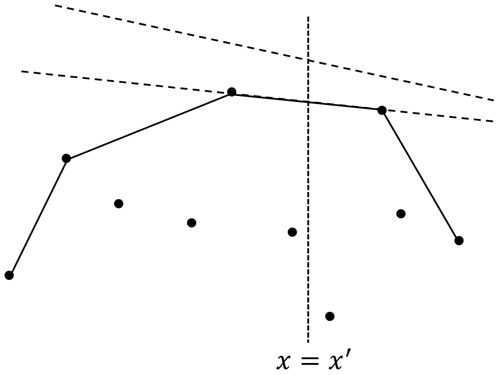
以下の線形計画問題を考える (変数は a と b)

最小化: b
条件: $y_i \leq a(x_i - x') + b \qquad (i = 1, \ldots, n)$

上記条件 $\iff$ すべての P_i が直線 $y = a(x - x') + b$ より下に存在

最適解 (a, b) に対応する直線 $y = a(x - x') + b$
$\iff$ $\{P_1, \ldots, P_n\}$ の凸包の, 直線 $x = x'$ と交わる辺のうち上側のもの

線形計画法の利用 (2/3)



線形計画問題と凸包

線形計画法の利用 (3/3)

計算量

- 前記線形計画問題は $O(n)$ で解ける
- 一つ線形計画問題を解くごとに凸包の辺が一つ求まる

$\Longrightarrow$ 凸包の頂点数 (= 辺数) が h なら, h 回線形計画問題を解けばよい

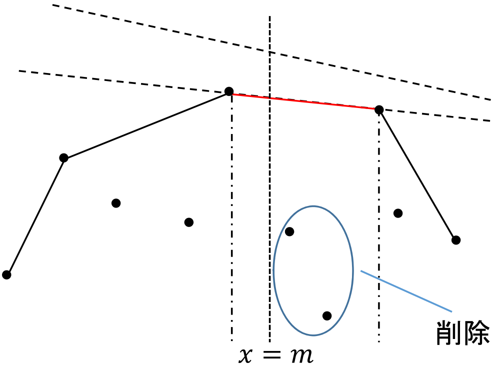
$\Longrightarrow$ 凸包構成の計算量: $O(nh)$

分割統治法と線形計画法の組合せ (1/4)

2 回目以降に解く線形計画問題の大きさを小さくする方法

1. $\#\{x_i \mid x_i < m\} \approx \#\{x_i \mid x_i > m\}$ となる $m\ (\neq x_i)$ を求める
2. 直線 $x = m$ と交わる凸包の辺のうち上側のものを求める
3. 上で求めた辺より下にある点を除き, 残りの点を, その辺より左の点と右の点に分け, それぞれの集合の凸包の上側の辺を再帰的に求める

分割統治法と線形計画法の組合せ (2/4)



分割統治法と線形計画法の組合せ (3/4)

計算量 (1/2)

このアルゴリズムの計算量を $T(n, h')$ とすると (h': 凸包の上側の辺数)

$$T(n, h') \leq \max_{h^- + h^+ = h'} \{T(n/2, h^-) + T(n/2, h^+)\} + C'n$$

ただし,

- h^- は凸包の上側の頂点で x_m より左にある点の数
- h^+ は凸包の上側の頂点で x_m より右にある点の数
- C': n, h' によらない定数

分割統治法と線形計画法の組合せ (4/4)

計算量 (2/2)

十分に大きな定数 C ($C' - C\log 2 \le 0$) を取り,
$m < n$ に対し $T(m,h) \le Cm\log h$ を仮定

$$
\begin{aligned}
T(n,h') &\le \max_{h^-+h^+=h'} \{T(n/2,h^-) + T(n/2,h^+)\} + C'n \\
&\le \max_{h^-+h^+=h'} \{C(n/2)\log h^- + C(n/2)\log h^+)\} + C'n \\
&= C(n/2) \max_{h^-+h^+=h'} \{\log(h^-h^+)\} + C'n \\
&= C(n/2)\log((h'/2)^2) + C'n \\
&= Cn(\log h' - \log 2) + C'n \\
&= Cn\log h' + (C' - C\log 2)n \\
&\le Cn\log h'
\end{aligned}
$$

よって, 全体として $O(n\log h)$, ただし h は凸包の頂点数

最悪の場合, $h = O(n)$ なので $O(n\log n)$

3 次元以上の凸包構成

- Graham のアルゴリズム (前回紹介) は 3 次元に拡張できない
- 分割統治法は 3 次元以上に拡張可能
  (共通接超平面の取り方に注意)
- 包装法 (前回紹介) は 3 次元以上に拡張可能
  (包装していく順番に注意)