アルゴリズム論 2

第 4 回: 低次元線形計画問題 (3)

関川 浩

2016/10/05

概要

ランダム化アルゴリズムについて説明

- アルゴリズムの過程で確率的な挙動を導入
- 最悪の場合ではなく平均的な計算量を評価できる
- 実装しやすい場合が多い
- 今回はランダム抽出を用いたアルゴリズムを紹介

1. アイディアと 2 次元の場合の例
   - アイディア
   - 2 次元の場合

2. d 次元の場合
   - d 次元の線形計画問題 (特殊形)
   - 制約数の評価
   - アルゴリズム
   - 計算量

アイディア

ランダム抽出のアイディア

- 問題の一部をランダム抽出して部分問題を作る

  $\Longrightarrow$ その部分問題は確率的に全体の性質を近似的に表現するだろう

  $\Longrightarrow$ 線形計画問題なら, 冗長な制約が発見できる

- トレードオフ:

部分問題のサイズ	近似度	計算時間
大	◯	×
小	×	◯

$\Longrightarrow$ バランスが重要

2 次元の場合 (1/6)

例: 2 次元の線形計画問題

n 不等式制約をもつ 2 次元の線形計画問題 (特殊形)

最小化: y

条件: $y \geq a_i x + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$

$L \leq x \leq M$

注意: 条件 $L \leq x \leq M$ があるので, 有界な最適解が必ず存在

2 次元の場合 (2/6)

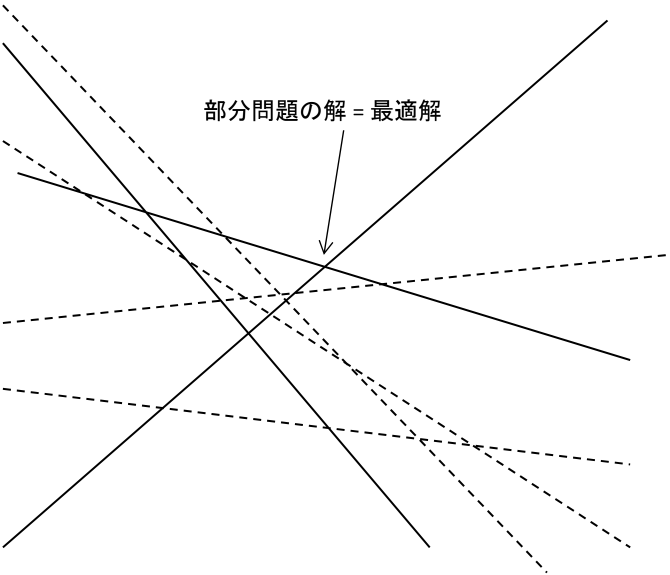
$S = \{y \geq a_i x + b_i \mid i = 1, \ \ldots, \ n\}$

以下では非退化の場合のみ考える

- $S \supset S_0$ $(\#S_0 = \sqrt{n})$ をランダムかつ独立にとる
- $S_0 \cup \{L \leq x \leq M\}$ に対して, 元と同じ目的関数の線形計画問題を解く

  最適解: (x_0, y_0)
- S_0 に入らない $(n - \sqrt{n})$ 個の制約が (x_0, y_0) でも成立なら, (x_0, y_0) は元の問題でも最適解

2 次元の場合 (3/6)



2 次元の場合 (4/6)

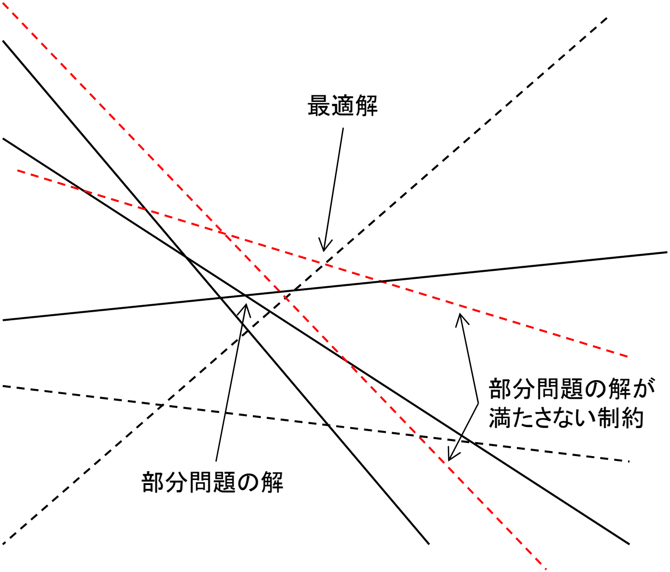
- (x_0, y_0) が元の問題の最適解ではない場合,

$$S_1 = \{a_i x + b_i \mid y_i < a_i x_0 + b_i\} \qquad ((x_0, y_0) \text{ で成立しない制約})$$

注意

- S_1 は, 元の問題に対する最適解において有効な制約を少なくとも一つ含む
- S_1 の大きさの期待値は $O(\sqrt{n})$ (後述)

2 次元の場合 (5/6)



2 次元の場合 (6/6)

- S_0 とは別の $\sqrt{n}$ 個の制約の集合 S_2 ($\subset S$) を選ぶ
- $S_1 \cup S_2 \cup \{L \leq x \leq M\}$ について線形計画問題を解く
- この部分問題の最適解が満たさない制約からなる集合を S_3 とする
- $S_1 \cup S_3$ に以上を再帰的に適用

注意

- S_1 が小さくなる可能性があるので $S_1 \cup S_2$ を考える
- S_3 の大きさの期待値は $O(\sqrt{n})$
- $S_1 \cup S_3$ (大きさの期待値は $O(\sqrt{n})$) は全体の最適解で有効な制約のうち少なくとも二つを含む

  $\Longrightarrow$ 2 次元の場合はすべての有効な制約を含む

  $\Longrightarrow$ 元の問題が大きさ $O(\sqrt{n})$ の問題に帰着

これを d 次元に拡張したアルゴリズムは後述

d 次元の線形計画問題 (特殊形)

n 不等式制約をもつ d 次元の線形計画問題 (特殊形)

最小化: y

条件: $y \geq a_{i1}x_1 + \cdots + a_{i,d-1}x_{d-1} + b_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$

記号

- $S = \{y \geq a_{i1}x_1 + \cdots + a_{i,d-1}x_{d-1} + b_i \mid i = 1,\ \ldots,\ n\}$
- $i = 1, \ldots, n$ に対して

$$\pi_i : y = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{i,d-1}x_{d-1} + b_i \text{ (超平面)}$$

$$h_i^+ = \{(x_1, \ldots, x_{d-1}, y) \mid y \geq a_{i1}x_1 + \cdots + a_{i,d-1}x_{d-1} + b_i\}$$

制約数の評価 (1/9)

S_r: S から r 個の制約を一様かつ独立に選んだもの

S_r に対して y を最小にする部分線形計画問題を解く
最適解: $(x_{0,1}, \dots, x_{0,d-1}, y_0)$

S に属する制約のうち, 以下を満たすものの数を評価する
(部分問題の最適解が満たさない制約の数)

$$y_0 < a_{i1}x_{0,1} + \cdots + a_{i,d-1}x_{0,d-1} + b_i$$

制約数の評価 (2/9)

問題

与えられた δ $(0 < \delta < 1)$ に対し, 以下の条件を満たす $m(d, n, r, \delta)$ を評価せよ

条件: S_r 内の制約をすべて満たす任意の点 $(c_1, \ldots, c_d)$ に対し

$$c_d < a_{i,1}c_1 + \cdots + a_{i,d-1}c_{d-1}$$

となる S 内の制約が $m(d, n, r, \delta)$ 個以上ある確率は δ 以下

制約数の評価 (3/9)

補題 1

与えられた相異なる n 個の実数から r 個を一様かつ独立に選ぶ

$(-\infty, a]$ がこの r 個の実数をすべて含むとき, 元の n 個の実数のうち (a, ∞) に $m(1, n, r, \delta)$ 個以上の実数がある確率は δ 以下

ただし, $m(1, n, r, \delta) = \dfrac{n}{r} \log \dfrac{1}{\delta}$

証明 (1/3)

- $\dfrac{1}{r} \log \dfrac{1}{\delta} > 1$ のとき $m(1, n, r, \delta) > n$

  (a, ∞) に n 個より多くの実数が存在することはないから成立

制約数の評価 (4/9)

証明 (2/3)

- $\dfrac{1}{r}\log\dfrac{1}{\delta} \leq 1$ のとき

  n 個の実数を $a_1, \ldots, a_n$,
  その中から取る r 個の実数を $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$ とする

  a_i のうち $\max\{a_{i_j}\}$ より大きいものが m 個以上
  $\Longleftrightarrow$ a_i のうち小さい方から $n-m$ 個までの中からすべての a_{i_j} をとる

制約数の評価 (5/9)

証明 (3/3)

- $\frac{1}{r}\log\frac{1}{\delta} \leq 1$ のとき (続)

  a_i のうち小さい方から $n-m$ 個までの中から r 個の a_{i_j} をとる確率は

$$
\begin{aligned}
\binom{n-m}{r} \Big/ \binom{n}{r} &= \frac{(n-m)!}{r!(n-m-r)!} \cdot \frac{r!(n-r)!}{n!} \\
&= \frac{(n-m)(n-m-1)\ldots(n-m-r+1)}{n(n-1)\ldots(n-r+1)} \\
&= \left(1-\frac{m}{n}\right)\left(1-\frac{m}{n-1}\right)\ldots\left(1-\frac{m}{n-r+1}\right) \\
&\leq \left(1-\frac{m}{n}\right)^r = (1-1/r\cdot\log(1/\delta))^r \\
&\leq e^{-\log(1/\delta)} = \delta \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

制約数の評価 (6/9)

1. 相異なる $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ が与えられたとき, $a \in \mathbb{R}$ を取って
$$\#\{a_i \mid a_i < a\} = n - m, \qquad \#\{a_i \mid a_i > a\} = n$$
と分ける方法は, m を決めれば 1 通り

2. 相異なる超平面 $\pi_1, \ldots, \pi_n \subset \mathbb{R}^d$ が与えられたとき,
$P = (c_1, \ldots, c_d) \in \mathbb{R}^d$ を取って
$$\#\{i \mid P \notin h_i^+\} = n - m, \qquad \#\{i \mid P \in h_i^+\} = m$$
と分ける方法は高々 $\displaystyle\sum_{i=0}^{d} \binom{n}{d-i} \leq n^d$ 通り $(d \geq 2)$

注意

(2) の評価はアレンジメントの理論による
アレンジメントについては第 7–9 回で簡単に解説

制約数の評価 (7/9)

補題 2

与えられた相異なる n 個の超平面 $\pi_i \subset \mathbb{R}^d$ $(i = 1, \ldots, n)$ から
r 個の π_{i_j} $(j = 1, \ldots, r)$ を一様かつ独立に選ぶ
$\bigcap_{j=1}^{r} h_{i_j}^{+}$ に属する任意の点 P に対して

$$m(1, n, r, \delta) \leq \#\{i \mid P \in h_i^{+},\ i = 1,\ \ldots,\ n\}$$

となる確率は δ 以下
ただし, $m(1, n, r, \delta) = \frac{n}{r} \log \frac{1}{\delta} + \frac{dn}{r} \log n$

制約数の評価 (8/9)

証明

求める確率は $n^d\left(1-\dfrac{m}{n}\right)^r$ 以下

$m = m(1,n,r,\delta) = \dfrac{n}{r}\log\dfrac{1}{\delta} + \dfrac{dn}{r}\log n$ に対し

$$\begin{aligned} n^d(1-m/n)^r &= n^d\left(1-\frac{1}{r}\log\frac{1}{\delta}-\frac{d}{r}\log n\right)^r \\ &\le n^d e^{-\log n\frac{1}{\delta}-d\log n} = \delta \end{aligned}$$

■

制約数の評価 (9/9)

補題 3

n 制約 d 次元の線形計画問題で, n 個の制約の中から r 個をランダムかつ独立に復元抽出したとき

> n 制約のうち, r 個の制約の部分線形問題に対する最適解を満たさないものの個数が $(2dn\log n)/r$ 個以上

である確率は n^{-d} 以下

証明

補題 2 で $\delta = n^{-d}$ とおくと

$$\frac{n}{r}\log\frac{1}{\delta} + \frac{dn}{r}\log n = \frac{n}{r}\log n^d + \frac{dn}{r}\log n = \frac{2dn}{r}\log n$$

■

アルゴリズム

サンプルした問題のサイズ r と, 部分解を満たさない制約の数 $(dn/r)\log n$ をバランスさせるには $r = 2d\sqrt{n}$ がよい

ランダム抽出アルゴリズム

1. $S \supset S_0$ $(\#S_0 = 2d\sqrt{n})$ をランダムかつ独立にとる
   $i = 1$, $S' = S_0$ とおく
2. S' に対して, 元と同じ目的関数の線形計画問題を解く
   最適解: $P = (x_0, \ldots, x_{d-1}, y_0)$
3. $S \setminus S'$ のすべての制約が P でも成立なら, P は元の問題でも最適解なので終了
4. そうではない場合, $S'' = \{P$ で成立しない制約$\}$
5. 今までとは別の $2d\sqrt{n}$ 個の制約の集合をとり S' とする
   $S' \leftarrow S' \cup S''$ として $i = d$ なら (6) へ,
   そうでないなら $i \leftarrow i + 1$ として (2) へ
6. 以上を $S \leftarrow S'$ として再帰的に適用

計算量

$T(n)$: このアルゴリズムで d 次元 n 制約の問題を解く手間

サイズ n の問題に対し，十分高い確率で

- おおよそのサイズが高々 $3d\sqrt{n}\log n$ の部分問題を d 回解き
- 部分問題の最適解が他の制約を満たしているかどうかを 1 部分問題あたり $O(dn)$ の手間で調べる

ことになるので

$$T(n) = d \cdot T(3d\sqrt{n}\log n) + O(d^2 n)$$

よって，$d \ll n$ に対して $T(n)$ の主要部は $d^2 n$

定理 1

ランダム抽出により d 次元の線形計画問題は $O(d^2 n + t(d)\log n)$ の手間で解ける
ここで $t(d)$ は d に関して指数オーダの関数