アルゴリズム論 2

第 9 回: Arrangement (3)

関川 浩

2016/11/09

- Arrangement の概要 (前々回)
- Arrangement の応用 (前回)
- Arrangement の構成 (今回)

1. 2 次元の場合
   - 逐次添加による zone の構成法
   - 直線の zone 定理
   - Arrangement を構成する計算量
2. 高次元の場合
   - 超平面の zone 定理
   - Zone の facet の数
   - Arrangement を構成する計算量

1. 2 次元の場合
2. 高次元の場合

逐次添加による zone の構成法 (1/4)

$L = \{l_1, \ldots, l_n\}$: $\mathbb{R}^2$ 内の n 本の直線の集合

- $L_1 = \{l_1\}$
  $L_k = L_{k-1} \cup \{l_k\}$ $(k = 2, \ldots, n)$
- L_1 の arrangement から始めて一本ずつ直線を追加し arrangement を更新

Arrangement を表現するデータ構造

- 各頂点に, その頂点に接続する 4 辺を反時計回りの順で記憶
- 各辺に, その辺を含む直線と, その辺の両端点の頂点を記憶

逐次添加による zone の構成法 (2/4)

$\mathcal{A}(L_{k-1})$ から $\mathcal{A}(L_k)$ を構成するアルゴリズム

(1) $x = -\infty$ で l_k のすぐ上にある直線を l とする
l に含まれる一番左の辺を e とし, $v = -\infty$ とする

(2) e の下に接続している $\mathcal{A}(L_{k-1})$ の面の境界を以下のようにたどる

- e と l_k の交点がなければ, v と反対側の e の頂点を改めて v とし,
  v において e の次 (反時計回りで) の辺を改めて e とし, (2) の先頭へ
- e と l_k が交点を持てば, その交点により e, l_k を分割

  v において e の次 (反時計回りで) の辺を改めて e とし, (2) の先頭へ

(3) 以下, すでに arrangement に存在していた $(k-1)$ 本の直線すべてと
l_k が交わるまで続ける

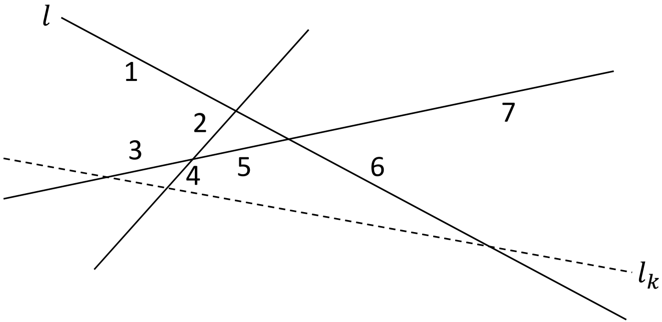
逐次添加による zone の構成法 (3/4)

注意

- このアルゴリズムにより
  - l_k 上に現われるすべての頂点
  - それにより分割される $\mathcal{A}(L_{k-1})$ のすべての辺

  を列挙可能 (どのタイミングで何を記憶するかは省略した)
- その手間: l_k と交わる面の, 境界上でたとる辺の数に比例

逐次添加による zone の構成法 (4/4)



Arrangement への直線 l_k の追加

Zone とその組合せ複雑度

定義 (直線の zone)

$l_1, \ldots, l_k \subset \mathbb{R}^2$: 直線

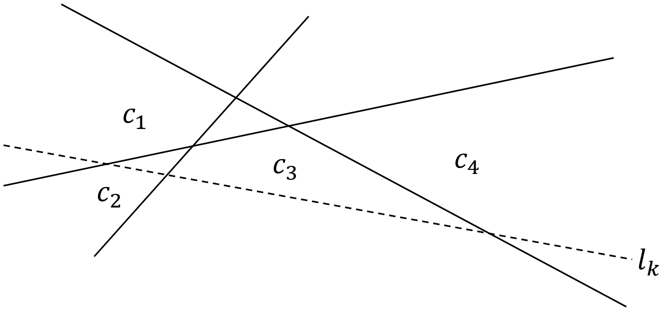
$$\{C \in \mathcal{A}(\{l_1, \ldots, l_{k-1}\}) \mid C \text{ は cell かつ } C \cap l_k \neq \emptyset\}$$

を l_k の zone という

定義 (直線の zone の組合せ複雑度)

- Zone の i 次元の組合せ複雑度: Zone の各 cell の i-face の数の総和
- 単に組合せ複雑度といったら各次元の複雑度の最大値

Zone の例



Zone の例

直線の Zone 定理 (1/3)

定理 1 (直線の zone 定理)

$l_1, \ldots, l_n \subset \mathbb{R}^2$: 直線
$\mathcal{A}(\{l_1, \ldots, l_n\})$ において, 各 l_i の zone の組合せ的複雑度は $O(n)$

証明 (1/2)

$H = \{l_1, \ldots, l_n\}$,

$b \subset \mathbb{R}^2$: 直線, $b \neq l_i$ $(i = 1, \ldots\ n)$ とする

$\mathcal{A}(H \cup \{b\})$: 単純かつ b は水平としてよい

主張: b の zone に含まれる cell の辺の数は高々 $6n$

どの l_i も b と平行ではないから, zone の辺 e に対して, それを含む直線を l_j とすると

$b \cap l_j$ が着目している cell c の左 (右) $\Longleftrightarrow$ e が c の左 (右) 支持辺

直線の zone 定理 (2/3)

証明 (2/2)

主張: 左支持辺の数は高々 $3n$

H に含まれる直線の数 n についての帰納法

- $n = 0$ ($H = \emptyset$) のときは明らかに成立
- $n = k - 1$ のとき成立を仮定して $n = k$ のとき

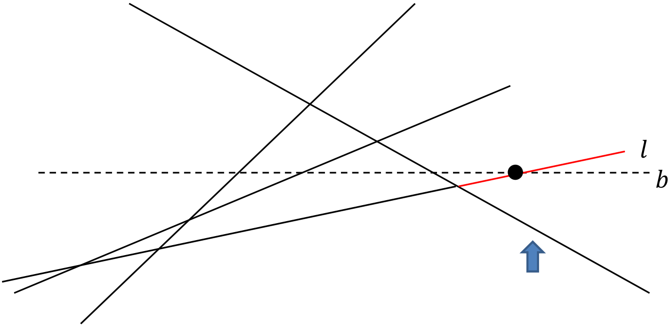
  $l \in H$: b との交点がもっとも右の直線
  $H \setminus \{l\}$ の zone の左支持辺の総数は高々 $3n - 3$

  これに l を加えると

  (1) H における b の zone のもっとも右の cell の l に含まれる辺
  (2) (1) の辺と接続する高々 2 辺

  の分だけ左支持辺が増えるので, このときも成立 ■

直線の zone 定理 (3/3)



l を加えた図

Arrangement を構成する計算量

n 本の直線の arrangement 中, 着目している 1 直線と交わる cell を囲む辺の数の総和は zone 定理より $O(n)$

$\Longrightarrow$ $k-1$ 本の直線の arrangement に k 本目の直線を加える手間は $O(k)$

$\Longrightarrow$ 逐次添加法により n 本の直線の arrangement 全体を構成する手間は $O(n^2)$

1 2 次元の場合

2 高次元の場合

超平面の zone 定理

定義 (超平面の zone)

$\pi_1, \ldots, \pi_k \subset \mathbb{R}^d$: 超平面

$$\{C \in \mathcal{A}(\{\pi_1, \ldots, \pi_{k-1}\}) \mid C \text{ は cell かつ } C \cap \pi_k \neq \emptyset\}$$

を π_k の zone という

定理 2 (超平面の zone 定理)

$\pi_1, \ldots, \pi_n \subset \mathbb{R}^d$: 超平面
$\{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ の arrangement において, 各 π_i の zone の組合せ的複雑度は $O(n^{d-1})$

注意

3 次元以上のとき, cell の境界の辺を時計回りの順に一列に並べることができない $\Longrightarrow$ 2 次元の場合とは証明法が異なる

Zone の facet の数 (1/9)

注意

以下では zone の facet ($d-1$-face) の数についてのみ議論

- i-face ($1 \le i \le d-2$) についても同様
- 0-face は $1, \ldots, (d-1)$-faces の結果と Euler の関係式から

$H = \{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ ($\pi_i \subset \mathbb{R}^d$ は超平面)

$(f, c) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathcal{A}(H)$ の $(d-1)$-face f と, π の zone の cell c が接続

定義

- $z(H, \pi)$: 接続関係 (f, c) の総数
- $z(H, \pi; \pi_i)$: $z(H, \pi)$ で数える接続関係 (f, c) の中で $f \in \pi_i \in H$ であるものの数

したがって, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} z(H, \pi; \pi_i) = z(H, \pi)$

Zone の facet の数 (2/9)

ある超平面 $\pi_i \in H$ に対して以下を考える

- $\mathcal{A}(H \setminus \{\pi_i\})$
- $H/\pi_i = \{\pi_j \cap \pi_i \mid \pi_j \in H \setminus \{\pi_i\}\}$ としたとき, $\mathcal{A}(H/\pi_i)$ と, その $\pi \cap \pi_i$ に関する zone

補題 1

$$z(H, \pi) - z(H, \pi; \pi_i) \leq z(H \setminus \{\pi_i\}, \pi) + z(H/\pi_i, \pi \cap \pi_i)$$

Zone の facet の数 (3/9)

証明

左辺: 以下の条件を満たす f, c についての接続関係 (f, c) の総数

- f: $\mathcal{A}(H)$ の π に関する zone の $(d-1)$-face で π_i に含まれないもの
- c: Zone の cell

これの右辺でのカウントを見る

場合分け

(1) c が π_i と接続しない場合

(2) c が π_i と接続, かつ, f が π_i と接続しない場合

(3) c が π_i と接続, かつ, f が π_i と接続する場合

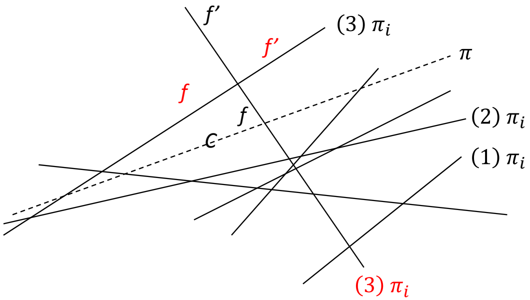
Zone の facet の数 (4/9)

証明

(1) c が π_i と接続しない場合

(f, c) は $\mathcal{A}(H \setminus \{\pi_i\})$ の π に関する zone での接続関係

$\Longrightarrow z(H \setminus \{\pi_i\}, \pi)$ でそのまま数えられる



場合分け

Zone の facet の数 (5/9)

証明

(2) c が π_i と接続, かつ, f が π_i と接続しない場合

- f は $\mathcal{A}(H \setminus \{\pi_i\})$ の π に関する zone にそのまま出現
- c に対応する cell c' は, π_i により切断されていた部分を加えたもの

$(f, c) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathcal{A}(H \setminus \{\pi_i\})$ の π に関する zone の (f', c)

$\Longrightarrow z(H \setminus \{\pi_i\}, \pi)$ で正しく数えられる

π_i により切断されていた c' の一部で zone に含まれない cell の $(d-1)$-face で π_i に接続しないもの

- 右辺では $z(H \setminus \{\pi_i\}, \pi)$ で数えられる
- 左辺では数えられない

$\Longrightarrow$ 右辺の方が真に大

Zone の facet の数 (6/9)

証明

(3) c が π_i と接続, かつ, f が π_i と接続する場合

π_i に関して f と反対側に f と同じ超平面に含まれる $(d-1)$-face f' が存在

$\mathcal{A}(H \setminus \{\pi_i\})$ では $f \cup f'$ が一つの $(d-1)$-face

- f' が $\mathcal{A}(H)$ で zone に現れないとき, 両辺で 1 ずつカウント
- f' も $\mathcal{A}(H)$ で zone に現れるとき,
  - 左辺では 2 回数えられるのに対し,
  - 右辺の $z(H \setminus \{\pi_i\}, \pi)$ では 1 回しか数えられない

  しかし, この場合, $z(H/\pi_i, \pi \cap \pi_i)$ で f と f' の境界の $(d-2)$-face を 1 回数える

$\Longrightarrow$ いずれにしても, この部分に関して左辺と右辺は等しい

以上より成立 ■

Zone の facet の数 (7/9)

補題 2

H: $\mathbb{R}^d$ における n 個の超平面の集合

$z(n,d)$: 超平面 π に関する $z(H,\pi)$ の最大値

このとき以下が成立

$$(n-1)z(n,d) \leq n(z(n-1,d)+z(n-1,d-1)) \qquad (*)$$

Zone の facet の数 (8/9)

証明

補題 1 の式

$$z(H,\pi) - z(H,\pi;\pi_i) \leq z(H \setminus \{\pi_i\}, \pi) + z(H/\pi_i, \pi \cap \pi_i)$$

を, $\pi_i \in H$ に関して和をとる

$$\begin{aligned}(n-1)z(H,\pi) &= \sum_{i=1}^{n}(z(H,\pi) - z(H,\pi;\pi_i)) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}(z(H \setminus \{\pi_i\}, \pi) + z(H/\pi_i, \pi \cap \pi_i))\end{aligned}$$

この不等式は任意の H, π について成立するから

$$(n-1)z(n,d) \leq n(z(n-1,d) + z(n-1,d-1)) \qquad \blacksquare$$

Zone の facet の数 (9/9)

補題 3

$z(n, d) = O(n^{d-1})$

証明

- $d = 2$ のとき, 直線のときの議論より $z(n, 2) \leq 6n$
- $d \geq 3$ とし $d - 1$ のとき成立と仮定
  補題 2 の式 $(*)$ を用いて $z(n, d)$ を展開
  $$z(n, d) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n}{n-i} z(n-i, d-1) + nz(1, d)$$
  $z(1, d) = 2$ と帰納法の仮定から
  $$z(n, d) \leq \sum_{i=1}^{n-1} 6n(n-i)^{d-3} + 2n \leq 6n^{d-1}$$
  となり成立 ■

Arrangement を構成する計算量

n 本の超平面の arrangement 中, 着目している 1 超平面と交わる cell を囲む $(d-1)$-face の数の総和は zone 定理より $O(n^{d-1})$

$\Longrightarrow$ $k-1$ 個の超平面の arrangement に k 個目の超平面を加える手間は $O(k^{d-1})$

$\Longrightarrow$ 逐次添加法により n 個の超平面の arrangement 全体を構成する手間は $O(n^d)$