# アルゴリズム論 2
## 第 11 回: 三角形分割 (2)

関川 浩

2016/11/30

- 三角形分割の定義と性質 (前回)
- Voronoi 図と Delaunay 三角形分割の構成アルゴリズム (今回)
- Delaunay 三角形分割の性質 (次回)

1. Voronoi 図
   - Voronoi 図の定義
   - Delaunay 三角形分割
2. Voronoi 図構成アルゴリズム
   - 逐次添加法
   - 分割統治法
   - 幾何学的変換を用いる方法

1. Voronoi 図
2. Voronoi 図構成アルゴリズム

# Voronoi 図の定義

$A$, $B \in \mathbb{R}^2$ に対し $d(A, B)$ を $A$ と $B$ の Euclid 距離とする

## 定義 1 (Voronoi 図)

$P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^2$

- $V(P_i) \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{j \neq i} \{P \mid d(P, P_i) < d(P, P_j)\}$ を Voronoi 領域という
  点数を明示したいときは $V_n(P_i)$ と書く
  $P_i$ を $V(P_i)$ の母点という
- Voronoi 図: $V(P_i)$ による平面の分割
- Voronoi 辺: 二つの Voronoi 領域の周の共通部分
- Voronoi 点: Voronoi 領域の (周の) 頂点

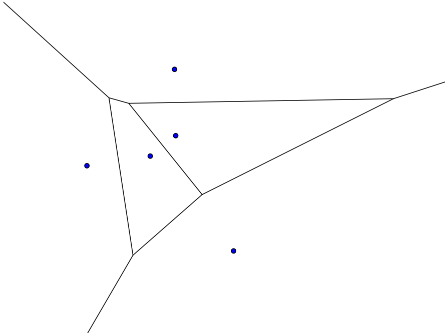
## 注意

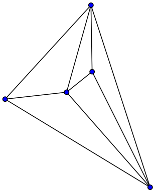
Voronoi 点は, そこで接している Voronoi 領域 (一般には 3 個) の母点から等距離の点

# Delaunay 三角形分割

## 定義 2 (Delaunay 三角形分割)

Delaunay 三角形分割:
次数が 4 以上の Voronoi 点がないとき, Voronoi 辺を共有する二つの母点を直線分で結んで得られる, 母点の集合の三角形分割





(左) Voronoi 図, (右) Delaunay 三角形分割

# Delaunay 三角形分割の性質

$P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^2$ の Delaunay 三角形分割の任意の三角形 $P_iP_jP_k$ を取る

$P_1, \ldots, P_n$ のうち, 三角形 $P_iP_jP_k$ の外接円内にある点は $P_i$, $P_j$, $P_k$ のみ

**証明**

$V(P_i)$, $V(P_j)$, $V(P_k)$ に共通な Voronoi 点を $P$ とする

- $P$ は三角形 $P_iP_jP_k$ の外心
- $P_1, \ldots, P_n$ のうち, $P$ から一番近い点は $P_i$, $P_j$, $P_k$ の三点

よって, 主張は成立

注意: Delaunay 三角形分割は, その他, いろいろな性質を持つが次回に

# Voronoi 図構成アルゴリズムの種類

Voronoi 図 (Delaunay 三角形分割) 構成アルゴリズム

### 逐次添加法

- 最悪 $O(n^2)$
- 必要な記憶領域: $O(n)$
- 4 分木 (各内部ノードが 4 個までの子ノードを持つ木構造のデータ構造) を用いた前処理で平均 $O(n)$ に

### 分割統治法

- 最悪 $O(n \log n)$
- 必要な記憶領域: $O(n)$

### 幾何学的変換を用いる方法

- 高い確率で $O(n \log n)$

# 逐次添加法のアルゴリズム (1/4)

## 逐次添加法のアルゴリズム (全体像)

入力: $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^2$
出力: 入力に対する Voronoi 図 $V_n$

(1) $P_1$ に対する Voronoi 図 $V_1$ を構成し $m = 1$ とおく
(2) $m = n$ なら $V_m$ を返して終了
(3) $V_m$ に一つの母点 $P_{m+1}$ を追加して $P_1, \ldots, P_{m+1}$ に対する Voronoi 図 $V_{m+1}$ を構成
(4) $m + 1$ を改めて $m$ として (2) へ

# 逐次添加法のアルゴリズム (2/4)

## (3) の詳細 (その 1)

### (3-1)

$P_1, \ldots, P_m$ の中で $P_{m+1}$ に一番近い点 $P_{i(1)}$ を求める

($\Longleftrightarrow P_{m+1} \in V_m(P_{i(1)})$ となる $P_{i(1)}$ を求める)

(a) $P_1, \ldots, P_m$ の中から任意に一点を取る ($P$ とする)

(b) $V_m(P)$ と隣り合う $V_m(P_i)$ で $d(P_{m+1}, P_i) < d(P_{m+1}, P)$ となるものを探す

なければ $P_{i(1)} = P$ として (3-1) 終了

(c) $P_i$ を改めて $P$ として (b) へ

# 逐次添加法のアルゴリズム (3/4)

## (3) の詳細 (その 2)

### (3-2)

Voronoi 図を更新する

(a) $j = 1$ とする

(b) $\overline{P_{i(j)}P_{m+1}}$ の垂直二等分線と $V_m(P_{i(j)})$ の辺との交点の一方を $Q_j$ とする

$Q_j$ がのっている辺で $V_m(P_{i(j)})$ と隣接する Voronoi 領域の母点を $P_{i(j+1)}$ とする

(c) $P_{i(j+1)} = P_{i(1)}$ なら
- $V_m$ の辺のうち多角形 $P_{i(1)} \ldots P_{i(j)}$ 内にある部分を消去し
- $V_{m+1}(P_{m+1}) =$ (多角形 $P_{i(1)} \ldots P_{i(j)}$) を追加したものを $V_{m+1}$ として (3-2) 終了

(d) $j + 1$ を改めて $j$ として (b) へ

# 逐次添加法のアルゴリズム (4/4)

## 注意

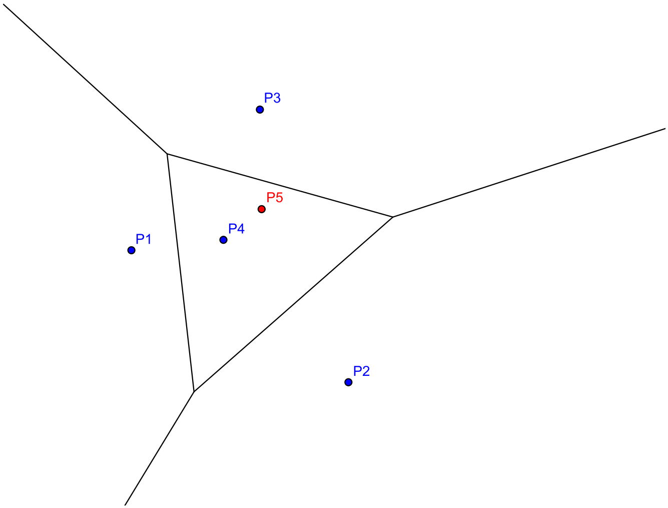
完全なアルゴリズムとするには以下のような場合への対応が必要

- $P_{m+1} \notin \mathrm{CH}(\{P_1, \ldots, P_m\})$ となる場合
  ($\Longleftrightarrow V_{m+1}(P_{m+1})$ が非有界となる場合)
- $Q_j$ が Voronoi 点に一致する場合

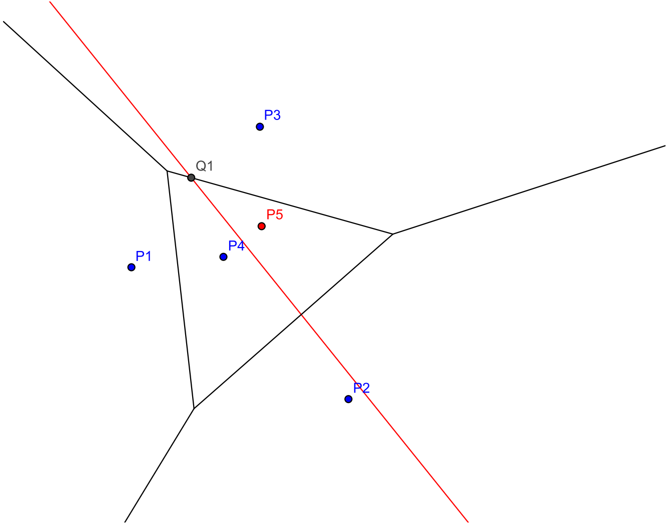
誤差の影響

(3-2) (c)「$P_{i(j+1)} = P_{i(1)}$」が成立すべきところで, 計算誤差があると不成立の恐れ (無限ループの恐れ)

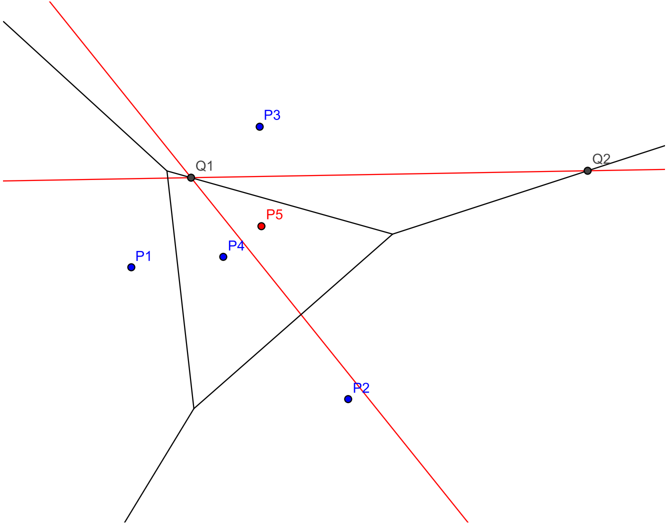
# 逐次添加法の例 (1/5)



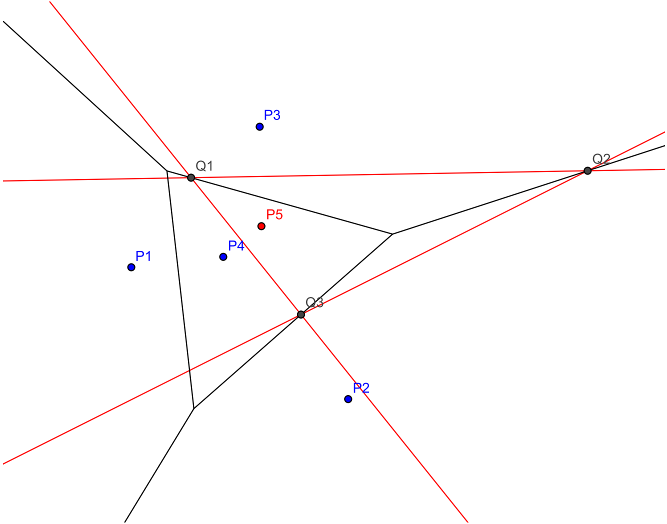
# 逐次添加法の例 (2/5)



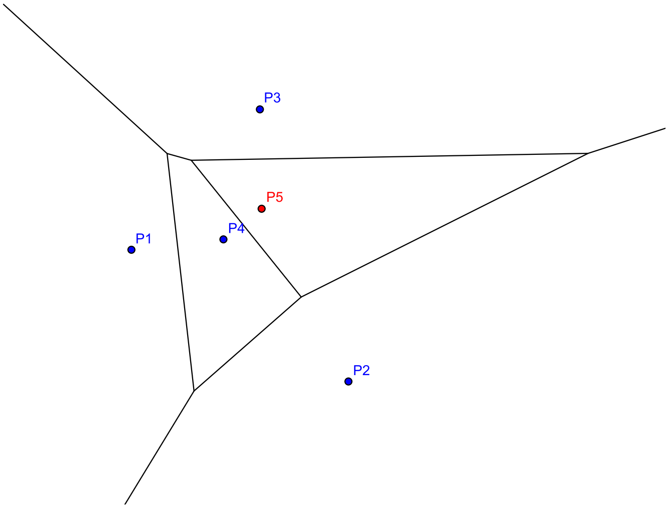
# 逐次添加法の例 (3/5)



# 逐次添加法の例 (4/5)



# 逐次添加法の例 (5/5)



# 分割統治法

## 分割統治法

$S \subset \mathbb{R}^2$: $n$ 個の母点の集合

以下を再帰的に繰り返す

- $S$ を $x$ 座標の大小でほぼ同じ大きさの集合 $S_1$ と $S_2$ に分割
- それぞれ別の Voronoi 図 $V(S_1)$, $V(S_2)$ を構成
- $V(S_1)$ と $V(S_2)$ を合併して全体の Voronoi 図を構成

## 注意

実際に $O(n \log n)$ で計算するアルゴリズムを構成するには, さまざまな注意が必要 (省略)

# 幾何学的変換を用いる方法 (1/2)

Delaunay 三角形分割の構成は凸包構成に帰着可能

以下の補題が成立

**補題 1**

点 $P_i(x_i, y_i)$ $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ に対して, 点 $P_4$ が点 $P_1$, $P_2$, $P_3$ の外接円の内側, 境界上, 外側にあることと,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 & 1 \\ x_2 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 & 1 \\ x_3 & y_3 & x_3^2 + y_3^2 & 1 \\ x_4 & y_4 & x_4^2 + y_4^2 & 1 \end{vmatrix}$$

が正, 0, 負であることは同値

# 幾何学的変換を用いる方法 (2/2)

以下の対応を考える

$$\mathbb{R}^2 \ni P_i(x_i, y_i) \longmapsto P_i'(x_i, y_i, x_i^2 + y_i^2) \in \mathbb{R}^3 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

補題 1 を利用すると以下がいえる

**補題 2**

$P_1', \ldots, P_n'$ の凸包の $z$ 軸に関する下側境界を $(x, y)$ 平面に正射影したものは $P_1, \ldots, P_n$ の Delaunay 三角形分割になる

$\Longrightarrow$ Delaunay 三角形分割の構成が 3 次元の凸包構成に帰着