2章 終結式

定義 2.1

$f(X) = a_0X^m + a_1X^{m-1} + \cdots + a_m \; a_0 \neq 0 g(X) = b_0X^n + b_1X^{n-1} + \cdots b_n \; (b_0 \neq 0) \in K[X]$ に対して

$$\begin{pmatrix} a_0 & \cdots & 0 & b_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 & b_0 \\ a_m & 0 & 0 & b_n & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_m & 0 & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

を $f \times g$ のシルベスター行列と呼び、その行列式を f と g の終結式 (resultant) とよび、$R(f, g)$ で表す

証明　$f(X)$ と $g(X)$ が共通因子を持つ $\Leftrightarrow$
$^\exists h(X), t(X) \in K[X]$
$\deg h < \deg g$
$\deg t < \deg f$
$f(X)h(X) = g(X)t(X)$
$\Leftrightarrow$
$^\exists h(X) = C_0X^{n-1} + \cdots + C_{n-1} \neq 0$
$t(X) = d_0X^{m-1} + \cdots + d_{m-1} \neq 0$
$f(X)h(X) = g(X)t(X)$
$\Leftrightarrow$
$^\exists (C_0, \ldots, C_{n-1}, d_0, \ldots, d_{m-1}) \neq \vec{0}$ 共通因子を $s(X)$ とすると

$$\begin{array}{ll} a_0C_0 = b_0d_0 & X^{m+n-1}\text{の係数} \\ a_1C_0 + a_0C_1 = b_1d_0 & X^{m+n-2}\text{の係数} \\ a_2C_0 + a_1C_1 + a_0C_2 = b_2d_0 + b_1d_1 + b_0d_2 & X^{m+n-3}\text{の係数} \\ \vdots & \vdots \\ a_mC_{n-1} + a_{m-1}C_{n-1} = b_nd_{m-2} + b_{n-1}d_{m1} & X\text{ の係数} \\ a_mC_{n-1} = b_nd_{m-1} & X^0\text{の係数} \end{array}$$

定理 2.2

$R(f, g) \in \langle f(X), g(X) \rangle$
実は $R(f, g) = h(X)f(X) + t(X)g(X)$　$h(X), t(X)$ の係数は $a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_n$ の整式 (整数係数多項式)

証明　$R(f, g) = 0$ なら $h(X) = t(X) = 0$ とおけばよい
$R(f, g) \neq 0$ とする。

$$\begin{pmatrix} a_0 & \cdots & 0 & b_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 & b_0 \\ a_m & 0 & 0 & b_n & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_m & 0 & 0 & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ \vdots \\ C_{n-1} \\ d_0 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の解 $(C_0, \ldots, C_{n-1}, d_0, \ldots, d_{m-1})$ に対し、
$h'(X) = C_0 X^{n-1} + \cdots + C_{n-1}, t'(X) = d_0 X^{m-1} + \cdots + d_{m-1}$ とおくと
$h'(X)f(X) + t'(X)g(X) = 1$ がなりたつことにほかならない
$R(f,g) \neq 0$ なので、解はただひとつ存在して、それは Clamer の公式によって
$C_i = \frac{1}{R(f,g)}$
よって、各 C_j, d_j に $R(f,g)$ をかけたものは、$a_0, \ldots, a_m, b_0 \ldots, b_n$ の整式になる

よって $\begin{array}{l} h(X) = h'(X)R(f,g) \\ t(X) = t'(X)R(,f,g) \end{array}$ とおけばよい

定理 2.3 (拡張定理)

- K : 代数的閉体
- $I \subset K[X_1, \ldots, X_n]$: イデアル

$\mathbf{V}_k(I \cap K[X_1, \ldots, X_{n-1}]) \ni (C_1, \ldots, C_{n-1}) t_0(C_1, \ldots, C_{n-1}) \neq 0 \Rightarrow {}^{\exists}C_n \in K (C_1, \ldots, C_N) \in \mathbf{V}_k(I)$

例

$K = \mathbf{C}$ $X = X_1, Y = X_2, Z = X_3$
$I = \langle ZX - 1, X - Y \rangle \subset \mathbf{C}[X, Y, Z]$
$I \cap \mathbf{C}[Y, Z] = \langle X - Y \rangle$
$(C_1, C_2) \in \mathbf{V}_{\mathbf{C}}(I \cup \mathbf{C}[Y, Z]) = \mathbf{V}_{\mathbf{C}}(\langle X - Y \rangle) = \{(c, c) \mid \in \mathbf{C}\}$

証明　$I(C_1, \ldots, C_{n-1}) = \{f(C_1, \ldots, C_{n-1}, X_n) \in K[X_n] \mid f \in I\}$ とおく
明らかにこれは $K[X_n]$ のイデアル (I がイデアル $\Leftrightarrow$

1. $I \neq \emptyset$
2. $I \ni p, q \Rightarrow p + q \in I$
3. $I \ni p \Rightarrow {}^{\forall}h \in K[X_1, \ldots, X_n]$ $hp \in I$

)

ケース 1
$I(C_1, \ldots, C_{n-1}) = \langle 0 \rangle$ C_n は任意にとれる

ケース 2
$I(C_1, \ldots, C_{n-1}) = \langle f(C_1, \ldots, C_{n-1}, X_n) \rangle$ $\deg f(C_1, \ldots, C_{n-1}, X_n) \geq 1$
K は代数的閉体なので ${}^{\exists}C_n \in K$ $f(C_1, \ldots, C_{n-1}, C_n) = 0$

ケース 3
$I(C_1, \ldots, C_{n-1}) = \langle f(C_1, \ldots, C_{n-1}, X_n) \rangle = \langle 1 \rangle$
$f(C_1, \ldots, C_{n-1}, X_n) = a$ は 0 でない定数

$$f = S_0(X_1, \ldots, X_{n-1})X_n^M + S_1(X_1, \ldots, X_{n-1})X_n^{M-1} + \cdots + S_M(X_1, \ldots, X_{n-1})$$

とすると

$$S_0(C_1, \ldots, C_{n-1}) = 0, \ldots, S_{M-1}(C_1, \ldots, C_{n-1}) = 0, S_M(C_1, \ldots, C_{n-1}) = a \neq 0$$

$$g = t_0(X_1, \ldots, X_{n-1})X_n^N + t_1(X_1, \ldots, X_{n-1})X_n^{N-1} + \cdots + t_N(X_1, \ldots, X_{n-1})$$

とする

$$R(g, f, X_n) \in I \cap K[X_1, \ldots, X_{n-1}] \ (\because \text{定理 } 2.2) \ f, g \in I$$

$$\det \begin{pmatrix} t_0 & & & s_0 & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ \vdots & & t_0 & \vdots & & s_0 \\ t_N & & & S_M & & \\ & & \vdots & & & \vdots \\ & & t_N & & S_m & \end{pmatrix} = h(X_1, \ldots, X_n)$$

矛盾、よってケース 3 はおこらない

3 章 Hilbert の零点定理

定理 3.1 (HIlbert の零点定理 弱系)

K: 代数的閉体
$I \subset K[X_1, \ldots, X_n]$: イデアル
$\mathbf{V}_K(I) = \emptyset \Rightarrow I \ni 1$ (どんな K に対しても常になりたつ)

Claim 1

$f'(Y_1, \ldots, Y_n, Y_{n+1}) =$
$f(Y_1 + a_1 Y_{n+1}, \ldots, Y_n + a_n Y_{n+1}, Y_{n+1}) = h(a_1, \ldots, a_n)Y_{n+1}^N + t$
$h(Y_1, \ldots, Y_n)$ は 0 でない n 変数多項式 t は Y_{n+1} に関して次数 N 未満の式と表される

Claim 2

$h(_1, \ldots, a_n) \neq 0$ なる $a_1, \ldots, a_n \in K$ が存在する

Claim 3

$I' = \{f(Y_1 + a_1 Y_{n+1}, \ldots, Y_n + a_n Y_{n+1}, Y_{n+1}) \mid f \in I\} \subset K[Y_1, \ldots, Y_{n+1}]$ とおくと I' はイデアルである

定理 3.2

K を無限体とするとき、
$f(X_1,\dots,X_n)\in K[X_1,\dots,X_n]$ が ${}^\forall c_1,\dots,c_n\in K\ f(c_1,\dots,c_n)=0\Rightarrow f(X)=0$

注意 1

K が有限体なら成り立たない

注意 2

K が代数的閉体なら K は無限体

定理 3.3 Hilbert の零点定理 (強形)

K: 代数的閉体 とするとき
$f_1(X_1,\dots,X_n),\dots,f_S(X_1,\dots,X_n),g(X_1,\dots,X_n)\in K[X_1,\dots,X_n]$ に対して
$g\in\mathbf{I}(\mathbf{V}_K(\{f_1,\dots,f_l\}))\Rightarrow {}^\exists m\in\mathbf{N}\ g^m\in\langle f_1,\dots,f_l\rangle$

これの意味

$\mathbf{V}_K$ は連立方程式 $\begin{cases} f_1=0 \\ \vdots \\ f_l=0 \end{cases}$ の K における解全体の集合
g が連立方程式のすべての解に対して 0 になるような g を m 乗した g^m がイデアル $\langle f_1,\dots,f_l\rangle$ に属する

注意　実は弱形は強形の特殊な場合である。
　強形を論理式のみで書くと
${}^\forall\bar{c}\in K^n\big(f_1(\bar{c})=0\wedge\cdots\wedge f_s(\bar{c})=0\rightarrow f(\bar{c})=0\big)\rightarrow {}^\exists m\in\mathbf{N}\ f^m\in\langle f_1,\dots,f_s\rangle$
$\Leftrightarrow$
$\neg{}^\forall\bar{c}\in K^n(\neg\big(f_1(\bar{c})=0\wedge\cdots\wedge f_s(\bar{c})=0\big))\vee{}^\exists m\in\mathbf{N}\ f^m\in\langle f_1,\dots,f_s\rangle$
$f(\bar{X})=1$ に対してももちろんなりたつ、
${}^\forall f_1,\dots,f_s\in K[\bar{X}]$
$\neg{}^\forall\bar{c}\in K^n\big(\neg(f_1(\bar{c})=0\wedge\cdots\wedge f_s(\bar{c})=0)\big)\vee{}^\exists m\in\mathbf{N}\ 1^m\langle f_1,\dots,f_s\rangle$