

例

(3) \mathbf{R} の閉区間 $[a, b]$ 上で定義された実数値連続関数全体の集合 $C[a, b]$ において、可算とスカラー倍演算を

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(cf)(x) = cf(x)$

と定めると、 $C[a, b]$ はこれらの演算に関して線形空間をなす
可算が結合則を満たすことは次のようにして確かめられる

任意の $f, g, h \in C[a, b]$ と $x \in [a, b]$ に対して

$$\begin{aligned} ((f + g) + h)(x) &= (f + g)(x) + h(x) \\ &= (f(x) + g(x)) + h(x) \\ &= f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &= f(x) + (g + h)(x) \\ &= (f + (g + h))(x) \end{aligned}$$

よって $(f + g) + h = f + (g + h)$

3.1 ノルム空間

定義 3.1

- X : 実線形空間
- $\|\bullet\|: X \rightarrow \mathbf{R}$

このとき $\|\bullet\|$ が X 上のノルム
 \Leftrightarrow 任意の $x, y \in X, a \in \mathbf{R}$ に対して

- (a) $\|x\| \geq 0$ かつ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (非負性)
- (b) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (三角不等式)
- (c) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (同次性)

また、ノルムが定義された実線形空間をノルム空間という

注 「 X はノルム空間」と言ったり、どのノルムを考えるのか明示したいときは「 $(X, \|\bullet\|)$ はノルム空間」と言ったりする

例

(1) $\|\bullet\|_2: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ を $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}$ (ただし $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$) と定めると $\|\bullet\|_2$

は \mathbf{R}^N 上のノルム

(2) $\|\bullet\|_1: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ を $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_N|$ と定めると $\|\bullet\|_1$ は \mathbf{R}^N 上のノルム

(3) $\|\bullet\|_\infty: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ を $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |x_i|$ と定めると $\|\bullet\|_\infty$ は \mathbf{R}^N 上のノルム

- (4) $1 \leq p$ とする。
 $\|\bullet\|_p: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ を
 $\|\mathbf{x}\|_p = \left(|x_1|^p + \cdots + |x_N|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ と定めると
 $\|\bullet\|_p$ は \mathbf{R}^N 上のノルム

注 ノルム空間 $(X, \|\bullet\|)$ に対して、 $d: X^2 \rightarrow \mathbf{R}$ を $d(x, y) = \|x - y\|$ と定めると d は X 上の距離関数

証明 cf.p16 $x, y, z \in X$ を任意に取る。

(D₁) $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ (ノルムの非負性より)

$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$ (ノルムの非負性より)

(D₂) $d(y, x) = \|y - x\| = \|(x - y)\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1| \|x - y\| = d(x, y)$

(D₃) $d(x, z) + d(z, y) = \|x - z\| + \|z - y\| \geq \|(x - z) + (z - y)\| = \|x - y\| = d(x, y)$

注 X が実線形空間をなし、 d が X 上の距離であるとき $\|\bullet\|: X \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$\|\mathbf{x}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{0})$$

と定義する。

このとき、 d が次の条件を満たすならば $\|\bullet\|$ は X 上のノルムになる
 任意の $x, y, z \in X$ と $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して

1.

性質 3.1 $(X, \|\bullet\|)$: ノルム空間

任意の $x, y \in X$ に対して

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

証明

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

よって $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|$$

よって $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$

定義 3.2

X : ノルム空間

$(x_n)_{n=1}^\infty$: X の点列

$x \in X$

このとき、 $(x_n)_{n=1}^\infty$ が収束 $\Leftrightarrow \|x_n - x\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)

定義 3.3 (写像の連続) (cf. 定義 2.8 p39)

注意 1 ノルムは連続

⊙ X の点列 $(x_n)_{n=1}^\infty$ と $x \in X$ について $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) であるとき、

$$0 \leq \|x_n\| - \|x\| \leq \|x_n - x\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

定義 3.4

X : 実線形空間

$\|\bullet\|_a, \|\bullet\|_b$ X 上のノルム

$\|\bullet\|_a$ と $\|\bullet\|_b$ が等価

\Leftrightarrow 任意の $x \in X$ に対して、

$$M_1 \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq M_2 \|x\|_a$$

をみたす $M_1, M_2 > 0$ が存在

注意 2 (a) (b) ノルムが等価であるという関係は同値関係:

X 上の任意の $\|\bullet\|_a, \|\bullet\|_b, \|\bullet\|_c$ に対して、

反射律 $\|\bullet\|_a$ と $\|\bullet\|_b$ は等価

対象律 $\|\bullet\|_a$ と $\|\bullet\|_b$ が等価 $\Leftrightarrow \|\bullet\|_b$ と $\|\bullet\|_a$ は等価

推移律 $\|\bullet\|_a$ と $\|\bullet\|_b$ が等価かつ $\|\bullet\|_b$ と $\|\bullet\|_c$ が等価 $\Rightarrow \|\bullet\|_a$ と $\|\bullet\|_c$ は等価

(c) 点列 $x_n \in X$ と $x \in X$ に対して X 上のノルム $\|\bullet\|_a$ と $\|\bullet\|_b$ が等価ならば $(x_n)_{n=1}^\infty$ が $\|\bullet\|_b$ の意味で x に収束することは $(x_n)_{n=1}^\infty$ が $\|\bullet\|_a$ の意味で x に収束することと同値である。

定理 3.1 X を有限次元ベクトル空間とする。

このとき、 X 上の全てのノルムは等価

証明 (a) $\dim X = N$ として X の基底の 1 つを $\{u_1, u_2, \dots, u_N\}$ とする。

このとき $x \in X$ に対して $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$

ただし $x = x_1 u_1 + \dots + x_N u_N$ と定義すると

$\|\bullet\|_2: X \rightarrow \mathbf{R}$ は X 上のノルム

(b) X 上の任意のノルムを $J(\bullet)$ とする

(i) 任意の $x \in X$ に対して

$x = x_1 u_1 + \dots + x_N u_N$ とすると

$$J(x) = J(x_1 u_1 + \dots + x_N u_N)$$

$$\leq J(x_1 u_1) + \dots + J(x_N u_N)$$

$$= |x_1| J(u_1) + \dots + |x_N| J(u_N)$$

$$\leq \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_N|^2} \sqrt{J(u_1)^2 + \dots + J(u_N)^2}$$

従って $M_2 = \sqrt{J(u_1)^2 + \dots + J(u_N)^2}$ とおくと

$$J(x) \leq M_2 \|x\|_2 \text{ が成り立つ}$$

(ii) 任意の $x, y \in X$ に対して

$$0 \leq |J(x) - J(y)|$$

$$\leq J(x - y)$$

$$\leq M_2 \|x - y\|_2$$

よって $x \rightarrow y \Rightarrow J(x) \rightarrow J(y)$ であるので

$J: X \rightarrow \mathbf{R}$ はノルム空間 $(X, \|\bullet\|_2)$ 上の連続関数

ここで、 $\tilde{J}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を

$\tilde{J}(x_1, \dots, x_N) = J(x_1 u_1 + \dots + x_N u_N)$ と定義すると \tilde{J} は (\mathbf{R}^N, d_2) 上の連続関数

(iii) $S = \{x \in X \mid \|x\|_2 = 1\}$

$\tilde{S} = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbf{R}^N \mid \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2} = 1\}$ とすると

\tilde{S} は (\mathbf{R}^N, d_2) における有界閉集合であるので、定理 2.3 (b) (Heine-Borel の被覆定理) よりコンパクト集合。

よって定理 2.5 より、 \tilde{J} は \tilde{S} 上で最小値 M_1 をもつ、従って J は S 上で最小値 M_1 を持つ。
 $x \in S$ のとき、 $x \neq 0$ であるので $J(x) > 0$ よって $M_1 > 0$

以上から

- $x \neq 0$ のとき

$$M_1 \leq J\left(\frac{1}{\|x\|_2}x\right) = \frac{1}{\|x\|_2}x$$

$$\text{従って } M_1 \|x\|_2 \leq J(x)$$

- $x = 0$ のとき

$$M_1 \|x\|_2 = 0 = J(x)$$

定義 3.5 X : ノルム空間

(a) 部分空間 $M \subset X$ が閉集合であるとき、これを閉部分空間であるという。

– 部分空間 $M \subset X \Rightarrow \bar{M}$ (閉包) は閉部分空間

– $\forall S \subseteq X, \text{span}(S)$ は閉部分空間

(b) $v \in X$

M : X の閉部分空間

このとき $V = v + M \stackrel{\text{def.}}{=} \{v + m \mid m \in M\}$ を線形多様体という

(c) $C \subseteq X$ に対して、

C が凸集合 $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in C, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in C$

性質 3.2 X をノルム空間とする

(a) $v_0 \in X$

M : X の閉部分空間

$V = v_0 + M$ (線形多様体)

このとき $\forall v \in V, V = v + M$

線形多様体は閉凸集合。

(b) M_α : X の閉部分空間 ($\alpha \in \mathcal{M}$)

$M = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{M}} M_\alpha (\neq \emptyset) \Rightarrow M$ は閉部分空間

C_α : X の凸部分集合 ($\alpha \in \mathcal{M}$)

$C = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{M}} C_\alpha (\neq \emptyset) \Rightarrow C$ は閉凸集合

(c) 略

(d) X の部分空間 M の閉包 \bar{M} は部分空間になる。また、凸集合 $C \subset X$ の閉包 \bar{C} も凸集合になる。

定理 3.2 X : ノルム空間, M : X の有限次元部分空間 $\Rightarrow M$ は閉集合

3.2 内積空間

定義 3.6 実 (または複素) 線形空間 X において次の (I-a) から (I-c) を満たす写像

$$\langle \bullet, \bullet \rangle : X^2 \rightarrow \mathbf{R} \text{ (または } \mathbf{C} \text{)}$$

を X 上の内積といい、また、 $x, y \in X$ に対して $\langle x, y \rangle$ を x と y の内積という。このとき X を内積空間という

$$\forall x, y, z \in X \text{ と } \alpha, \beta \in \mathbf{R} \text{ (または } \mathbf{C} \text{)}$$

(I-a) 対称性 (またはエルミート性): $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

(I-b) 非負性: $\langle x, x \rangle \geq 0$
 $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(I-c) 線形性: $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$

さらに、 $x, y \in X$ に対して

$$x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$$

を x と y が直交するといい。
そして $\emptyset \neq S \subseteq X$ に対して

$$S^\perp = \{x \in X \mid \forall y \in S, x \perp y\}$$

と表すことにする

注意 $\forall x, y \in X$ に対して

$$x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$$

注意 $\forall x \in X$ に対して

$$\langle x, \rangle = 0, \therefore x \perp 0$$

注意 $\forall S \subseteq X (S \neq \emptyset)$ に対して、 S^\perp は X の部分空間

例 \mathbf{R}^n において

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

(ただし $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$)

は \mathbf{R}^n 上の内積を定める。

例 $M_{m,n}$ ($m \times n$ の実行列全体において)

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} = \text{tr}({}^t B A)$$

(ただし $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m,n}$) は m, n 上の内積を定める。(Hilbert-Schmidt 内積)

例 $C[0, 1] = (\text{閉区間 } [0, 1] (\subseteq \mathbf{R}) \text{ 上の実数値連続関数全体の集合})$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

は $C[0, 1]$ 上の内積を定める

性質 3.3 $(X, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ を内積空間とする。

このとき、写像 $\| \bullet \|: X \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

と定義すると、 $\| \bullet \|$ は X 上のノルムとなる。

このノルムを内積から誘導されたノルムといい、次が成立

任意の $x, y \in X$ に対して

(a) (Cauchy-Schwarz の不等式) $|\langle x, y \rangle| \leq \| x \| \| y \|$ 等号成立 $\Leftrightarrow x, y$ が線形従属

(b) $\| x \| = \sup_{\| u \| = 1} |\langle x, u \rangle| = \max_{\| u \| = 1} |\langle x, u \rangle|$

(c) (三角不等式) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ 等号成立 $\Leftrightarrow x, y$ の一方が他方の非負実数倍

補題 3.1 $(X, \langle \bullet, \bullet \rangle)$: 内積空間

(a) 内積の連続性

$(x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty$: X の点列

$x, y \in X$ このとき

$$x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \Rightarrow \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$$

(b) $S \subset X$ に対して

$$S^\perp = \{x \in X \mid x \perp y \ \forall y \in S\} \text{ は閉部分空間}$$

性質 3.3 (a) 内積空間 X において

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2)$$

ただし $\| \bullet \|$ は内積から誘導されたノルム

Jordan-Neumann の定理

(1) 実ノルム空間 $(X, \| \bullet \|)$ において中線定理が成立しているならば

$\langle \bullet, \bullet \rangle: X \rightarrow \mathbf{R}$ を $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2)$ で定義すると

$(X, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ は実内積空間となり、 $\| \bullet \|$ はこの内積から誘導されたノルムとなる

定理 3.3

- (1) 実ノルム空間 $(X, \|\bullet\|)$ が中線定理を満たすとき、
 $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$
により写像 $\langle \bullet, \bullet \rangle : X^2 \rightarrow \mathbf{R}$ を定義すると
 $\langle \bullet, \bullet \rangle$ は X 上の内積であり、 $\|\bullet\|$ は $\langle \bullet, \bullet \rangle$ から誘導されたノルムである。
- (2) 複素ノルム空間 $(X, \|\bullet\|)$ のノルム $\|\bullet\|$ が中線定理を満たすとき
 $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$
を定義すると $\langle \bullet, \bullet \rangle$ は内積の公理を満たし、 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \forall x \in X$ を満たす

補題 3.2 連続関数 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ が

$f(s+t) = f(s) + f(t) \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$
をみたすとき f は定数 $c \in \mathbf{R}$ を用いて
 $f(t) = ct \quad (t \in \mathbf{R})$
と表せる

定義 3.7

- (a) $u \subseteq X$ について
- u が直交系 $\Leftrightarrow 0 \notin u$ かつ $x, y \in u, x \neq y \Rightarrow x \perp y$
 - u が正規直交系 $\Leftrightarrow u$ は直交系かつ任意の $x \in u$ に対して $\|x\| = 1$
- (b) $u \in X$ について
- u が極大 \Leftrightarrow 順序集合 (s^X, \subseteq) において、 u は極大
 $\Leftrightarrow u \subsetneq u'$ なる直交系 u' が存在しない
 \Leftrightarrow 任意の $v \in X \setminus u$ に対して $u \cup \{v\}$ は直交系でない

性質 3.4 X を内積空間とする

- (a) $v \subseteq X$ について v が直交系 $\Rightarrow v$ は線形独立
- (b) Gram-Schmidt の直交化法
- (c) Bessel の不等式
正規直交系 $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ が与えられるとき
任意の $x \in X$ に対して $\sum_{j=1}^\infty |\langle x, u_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

3.3 ノルム空間の有界線形作用素

定義 3.8 $(X, \|\bullet\|_X), (Y, \|\bullet\|_Y)$ ノルム空間

- (a) 線形写像 $A: X \rightarrow Y$ について、
 A は有界 \Leftrightarrow 「任意の $x \in X$ に対して
 $\|A(x)\|_Y \leq K \|x\|_X$
を満たすような $K \geq 0$ が存在」
有界な線形写像を 有界線形作用素という
 X から Y への有界線形作用素全体の集合を
 $B(X, Y)$ と表す。特に $B(X, X)$ は $B(X)$ と表す

(b) 有界線形作用素 $A: X \rightarrow Y$ に対して

$$\begin{aligned}\|A\| &= \inf\{K \geq 0 \mid \|A(x)\|_Y \leq K \|x\|_X \quad \forall x \in X\} \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x \neq 0} \left\| \frac{1}{\|x\|_X} A(x) \right\|_Y = \sup_{x \neq 0} \left\| A\left(\frac{1}{\|x\|_X} x\right) \right\|_Y \\ &= \sup_{\|x\|_X=1} \|A(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|A(x)\|_Y\end{aligned}$$

を作用素ノルムと呼ぶ。

(c) X から \mathbf{R} への有界線形写像を有界線形汎関数という。

例題 3.2 $(X, \|\bullet\|_X), (Y, \|\bullet\|_Y), (Z, \|\bullet\|_Z)$: ノルム空間

$A_1: Y \rightarrow Z$ 有界線形作用素

$A_2: X \rightarrow Y$ 有界線形作用素

このとき A_1, A_2 の合成

$A_1 A_2(x): X \rightarrow Z$ は X から Z への有界線形作用素で

$$\|A_1 A_2\| \leq \|A_1\| \|A_2\|$$

(作用素ノルムの劣乗法性)

定理 3.4 $(X, \|\bullet\|_X), (Y, \|\bullet\|_Y)$: ノルム空間

$A: X \rightarrow Y$: 線形作用素

このとき、 A は連続 $\Leftrightarrow A$ は有界

定理 3.5 有界線形写像の逆写像はまた線形写像となる

定理 3.6 $(X, \|\bullet\|_X), (Y, \|\bullet\|_Y)$: ノルム空間

$B(X, Y)$ X から Y への有界線形作用素全体の集合

このとき $A_1, A_2 \in B(X, Y)$, $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して

$A_1 + A_2, \alpha A_1$ を

$$(A_1 + A_2)(x) = A_1(x) + A_2(x)$$

$(\alpha A_1)(x) = \alpha(A_1(x))$ により定義される X から Y への写像とすると

$B(X, Y)$ はこれらの演算に関して線形空間をなし、作用素ノルム $\|\bullet\|$ は $B(X, Y)$ 上のノルムである

3.4 行列とベクトルのノルム

定理 3.7 $(A = a_{jk})$ $m \times n$ 行列

$X = \mathbf{R}^n, Y = \mathbf{R}^m$

ここで、写像 $T: X \rightarrow Y$ を $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$) と定めると、 T は線形となる

(a) ノルム空間 $(X, \|\bullet\|_2), (Y, \|\bullet\|_2)$ に対して T は有界

(b) X, Y に定義されるいかなるノルムに対しても T は有界

例題 3.3 $m \times n$ 行列 $A = (a_{jk})$ に対して、 A によって定義される \mathbf{R}^n から \mathbf{R}^m への線形作用素のノルムについて

(a) $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$ のノルムをともに $\|\bullet\|_1$ とするとき、

$$\|A\|_1 = \max_k \sum_{j=1}^m |a_{jk}|$$

(b) $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$ のノルムをともに $\|\bullet\|_\infty$ とするとき

$$\|A\|_\infty = \max_j \sum_{k=1}^n |a_{jk}|$$