

例

(3) \mathbf{R} の閉区間 $[a, b]$ 上で定義された実数値連続関数全体の集合 $C[a, b]$ において、可算とスカラー倍演算を

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(cf)(x) = cf(x)$

と定めると、 $C[a, b]$ はこれらの演算に関して線形空間をなす
可算が結合則を満たすことは次のようにして確かめられる

任意の $f, g, h \in C[a, b]$ と $x \in [a, b]$ に対して

$$\begin{aligned} ((f + g) + h)(x) &= (f + g)(x) + h(x) \\ &= (f(x) + g(x)) + h(x) \\ &= f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &= f(x) + (g + h)(x) \\ &= (f + (g + h))(x) \end{aligned}$$

よって $(f + g) + h = f + (g + h)$

3.1 ノルム空間

定義 3.1

- X : 実線形空間
- $\|\bullet\|: X \rightarrow \mathbf{R}$

このとき $\|\bullet\|$ が X 上のノルム
 \Leftrightarrow 任意の $x, y \in X, a \in \mathbf{R}$ に対して

- (a) $\|x\| \geq 0$ かつ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (非負性)
- (b) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (三角不等式)
- (c) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (同次性)

また、ノルムが定義された実線形空間をノルム空間という

注 「 X はノルム空間」と言ったり、どのノルムを考えるのか明示したいときは「 $(X, \|\bullet\|)$ はノルム空間」と言ったりする

例

(1) $\|\bullet\|_2: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ を $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}$ (ただし $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$) と定めると $\|\bullet\|_2$

は \mathbf{R}^N 上のノルム

(2) $\|\bullet\|_1: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ を $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_N|$ と定めると $\|\bullet\|_1$ は \mathbf{R}^N 上のノルム

(3) $\|\bullet\|_\infty: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ を $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |x_i|$ と定めると $\|\bullet\|_\infty$ は \mathbf{R}^N 上のノルム

- (4) $1 \leq p$ とする。
 $\|\bullet\|_p: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ を
 $\|\mathbf{x}\|_p = \left(|x_1|^p + \cdots + |x_N|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ と定めると
 $\|\bullet\|_p$ は \mathbf{R}^N 上のノルム

注 ノルム空間 $(X, \|\bullet\|)$ に対して、 $d: X^2 \rightarrow \mathbf{R}$ を $d(x, y) = \|x - y\|$ と定めると d は X 上の距離関数

証明 cf.p16 $x, y, z \in X$ を任意に取る。

(D₁) $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ (ノルムの非負性より)

$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$ (ノルムの非負性より)

(D₂) $d(y, x) = \|y - x\| = \|(x - y)\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1| \|x - y\| = d(x, y)$

(D₃) $d(x, z) + d(z, y) = \|x - z\| + \|z - y\| \geq \|(x - z) + (z - y)\| = \|x - y\| = d(x, y)$

注 X が実線形空間をなし、 d が X 上の距離であるとき $\|\bullet\|: X \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$\|\mathbf{x}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{0})$$

と定義する。

このとき、 d が次の条件を満たすならば $\|\bullet\|$ は X 上のノルムになる
 任意の $x, y, z \in X$ と $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して

1.

性質 3.1 $(X, \|\bullet\|)$: ノルム空間

任意の $x, y \in X$ に対して

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

証明

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

よって $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|$$

よって $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$

定義 3.2

X : ノルム空間

$(x_n)_{n=1}^\infty$: X の点列

$x \in X$

このとき、 $(x_n)_{n=1}^\infty$ が収束 $\Leftrightarrow \|x_n - x\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)

定義 3.3 (写像の連続) (cf. 定義 2.8 p39)

注意 1 ノルムは連続

⊙ X の点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ と $x \in X$ について $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) であるとき、

$$0 \leq \|x_n\| - \|x\| \leq \|x_n - x\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

定義 3.4

X : 実線形空間

$\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ X 上のノルム

$\|\cdot\|_a$ と $\|\cdot\|_b$ が等価

\Leftrightarrow 任意の $x \in X$ に対して、

$$M_1 \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq M_2 \|x\|_a$$

をみたす $M_1, M_2 > 0$ が存在

注意 2 (a) (b) ノルムが等価であるという関係は同値関係:

X 上の任意の $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b, \|\cdot\|_c$ に対して、

反射律 $\|\cdot\|_a$ と $\|\cdot\|_b$ は等価

対象律 $\|\cdot\|_a$ と $\|\cdot\|_b$ が等価 $\Leftrightarrow \|\cdot\|_b$ と $\|\cdot\|_a$ は等価

推移律 $\|\cdot\|_a$ と $\|\cdot\|_b$ が等価かつ $\|\cdot\|_b$ と $\|\cdot\|_c$ が等価 $\Rightarrow \|\cdot\|_a$ と $\|\cdot\|_c$ は等価

(c) 点列 $x_n \in X$ と $x \in X$ に対して X 上のノルム $\|\cdot\|_a$ と $\|\cdot\|_b$ が等価ならば $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ が $\|\cdot\|_b$ の意味で x に収束することは $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ が $\|\cdot\|_a$ の意味で x に収束することと同値である。