例

(3)　$\mathbf{R}$ の閉区間 $[a,b]$ 上で定義された実数値連続関数全体の集合 $C[a,b]$ において、可算とスカラー倍演算を

- $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
- $(cf)(x)=cf(x)$

と定めると、$C[a,b]$ はこれらの演算に関して線形空間をなす
可算が結合則を満たすことは次のようにして確かめられる
任意の $f,g,h \in C[a,b]$ と $x \in [a,b]$ に対して
$\big((f+g)+h\big)(x)=(f+g)(x)+h(x)$
$=\big(f(x)+g(x)\big)+h(x)$
$=f(x)+\big(g(x)+h(x)\big)$
$=f(x)+(g+h)(x)$
$=\big(f+(g+h)\big)(x)$
　よって $(f+g)+h=f+(g+h)$

3.1　ノルム空間

定義 3.1

- X: 実線形空間
- $\| \bullet \|$: $X \to \mathbf{R}$

　このとき $\| \bullet \|$ が X 上のノルム
$\Leftrightarrow$ 任意の $x,y \in X, a \in \mathbf{R}$ に対して

(a) $\| x \| \geq 0$ かつ $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x=0$ (非負性)

(b) $\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (三角不等式)

(c) $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$ (同次性)

　また、ノルムが定義された実線形空間を**ノルム空間**という

　注　「X はノルム空間」と言ったり、どのノルムを考えるのか明示したいときは「$(X, \| \bullet \|)$ はノルム空間」と言ったりする

　例

(1) $\| \bullet \|_2$: $\mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ を $\| \mathbf{x} \|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}$ (ただし $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$) と定めると $\| \bullet \|_2$ は $\mathbf{R}^N$ 上のノルム

(2) $\| \bullet \|_1$: $\mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ を $\| \mathbf{x} \|_1 = | x_1 | + \cdots | x_N |$ と定めると $\| \bullet \|_1$ は $\mathbf{R}^N$ 上のノルム

(3) $\| \bullet \|_\infty$: $\mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ を $\| \mathbf{x} \|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} | x_i |$ と定めると $\| \bullet \|_\infty$ は $\mathbf{R}^N$ 上のノルム

(4) $1 \leq p$ とする。
$\| \bullet \|_p$: $\mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ を
$\| \mathbf{x} \|_p = \left(| x_1 |^p + \cdots + | x_N |^p \right)^{\frac{1}{p}}$ と定めると
$\| \bullet \|_p$ は $\mathbf{R}^N$ 上のノルム

注　ノルム空間 $(X, \| \bullet \|)$ に対して、$d : X^2 \to \mathbf{R}$ を $d(x,y) = \| x - y \|$ と定めると d は X 上の距離関数

証明 cf.p16　$x, y, z \in X$ を任意に取る。

(D_1) $d(x,y) = \| x - y \| \geq 0$ (ノルムの非負性より)
$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \| x - y \| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$ (ノルムの非負性より)

(D_2) $d(y,x) = \| y - x \| = \| -(x-y) \| = \| (-1)(x-y) \| = | -1 | \| x - y \| = d(x,y)$

(D_3) $d(x,z) + d(z,y) = \| x - z \| + \| z - y \| \geq \| (x-z) + (z-y) \| = \| x - y \| = d(x,y)$