例

(3)　$\mathbf{R}$ の閉区間 $[a,b]$ 上で定義された実数値連続関数全体の集合 $C[a,b]$ において、可算とスカラー倍演算を

- $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
- $(cf)(x)=cf(x)$

と定めると、$C[a,b]$ はこれらの演算に関して線形空間をなす
可算が結合則を満たすことは次のようにして確かめられる
任意の $f,g,h\in C[a,b]$ と $x\in[a,b]$ に対して
$\big((f+g)+h\big)(x)=(f+g)(x)+h(x)$
$=\big(f(x)+g(x)\big)+h(x)$
$=f(x)+\big(g(x)+h(x)\big)$
$=f(x)+(g+h)(x)$
$=\big(f+(g+h)\big)(x)$
　よって $(f+g)+h=f+(g+h)$

3.1　ノルム空間

定義 3.1

- X: 実線形空間
- $\|\bullet\|$: $X\to\mathbf{R}$

　このとき $\|\bullet\|$ が X 上のノルム
$\Leftrightarrow$ 任意の $x,y\in X, a\in\mathbf{R}$ に対して

(a) $\|x\|\geq 0$ かつ $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$ (非負性)

(b) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ (三角不等式)

(c) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$ (同次性)

　また、ノルムが定義された実線形空間を**ノルム空間**という

　注　「X はノルム空間」と言ったり、どのノルムを考えるのか明示したいときは「$(X,\|\bullet\|)$ はノルム空間」と言ったりする

　例

(1) $\|\bullet\|_2$: $\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}$ を $\|\mathbf{x}\|_2=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_N^2}$ (ただし $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_N\end{pmatrix}$) と定めると $\|\bullet\|_2$ は $\mathbf{R}^N$ 上のノルム

(2) $\|\bullet\|_1$: $\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}$ を $\|\mathbf{x}\|_1=|x_1|+\cdots|x_N|$ と定めると $\|\bullet\|_1$ は $\mathbf{R}^N$ 上のノルム

(3) $\|\bullet\|_\infty$: $\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}$ を $\|\mathbf{x}\|_\infty=\max_{1\leq i\leq N}|x_i|$ と定めると $\|\bullet\|_\infty$ は $\mathbf{R}^N$ 上のノルム

(4) $1 \leq p$ とする。
$\| \bullet \|_p : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ を
$\| \mathbf{x} \|_p = \left(| x_1 |^p + \cdots + | x_N |^p \right)^{\frac{1}{p}}$ と定めると
$\| \bullet \|_p$ は $\mathbf{R}^N$ 上のノルム

注　ノルム空間 $(X, \| \bullet \|)$ に対して、$d : X^2 \to \mathbf{R}$ を $d(x, y) = \| x - y \|$ と定めると d は X 上の距離関数

証明 cf.p16　$x, y, z \in X$ を任意に取る。

(D_1) $d(x, y) = \| x - y \| \geq 0$ (ノルムの非負性より)
$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \| x - y \| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$ (ノルムの非負性より)

(D_2) $d(y, x) = \| y - x \| = \| -(x - y) \| = \| (-1)(x - y) \| = | -1 | \| x - y \| = d(x, y)$

(D_3) $d(x, z) + d(z, y) = \| x - z \| + \| z - y \| \geq \| (x - z) + (z - y) \| = \| x - y \| = d(x, y)$

注　X が実線形空間をなし、d が X 上の距離であるとき $\| \bullet \| : X \to \mathbf{R}$ を

$$\| \mathbf{x} \| = d(\mathbf{x}, \mathbf{0})$$

と定義する。
　このとき、d が次の条件を満たすならば $\| \bullet \|$ は X 上のノルムになる
任意の $x, y, z \in X$ と $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して

1.

性質 3.1　$(X, \| \bullet \|)$: ノルム空間
任意の $x, y \in X$ に対して

$$| \| x \| - \| y \| | \leq \| x - y \|$$

証明

$$\| x \| = \| x - y + y \| \leq \| x - y \| + \| y \|$$

よって $\| x \| - \| y \| \leq \| x - y \|$

$$\| y \| = \| y - x + x \| \leq \| y - x \| + \| x \|$$

よって $\| y \| - \| x \| \leq \| y - x \|$

定義 3.2
　X: ノルム空間
$(x_n)_{n=1}^{\infty}$: X の点列
$x \in X$
このとき、$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ が収束 $\Leftrightarrow \| x_n - x \| \to 0 \ (n \to 0)$

定義 3.3 (写像の連続)　(cf. 定義 2.8 p39)

注意 1　ノルムは連続
$\because$ X の点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ と $x \in X$ について $x_n \to x$ $(x \to \infty)$ であるとき、

$$0 \leq | \| x_n \| - \| x \| | \leq \| x_n - x \| \to 0 \ (n \to \infty)$$

定義 3.4
　X: 実線形空間
$\| \bullet \|_a, \| \bullet \|_b$ X 上のノルム
　　$\| \bullet \|_a$ と $\| \bullet \|_b$ が等価
$\Leftrightarrow$ 任意の $x \in X$ に s 対して、

$$M_1 \| x \|_a \leq \| x \|_b \leq M_2 \| x \|_a$$

をみたす $M_1, M_2 > 0$ が存在

注意 2　(a) (b) ノルムが等価であるという関係は同値関係:
X 上の任意の $\| \bullet \|_a, \| \bullet \|_b, \| \bullet \|_c$ に対して、

反射律 $\| \bullet \|_a$ と $\| \bullet \|_b$ は等価

対象律 $\| \bullet \|_a$ と $\| \bullet \|_b$ が等価 $\Leftrightarrow$ $\| \bullet \|_b$ と $\| \bullet \|_a$ は等価

推移律 $\| \bullet \|_a$ と $\| \bullet \|_b$ が等価かつ $\| \bullet \|_b$ と $\| \bullet \|_c$ が等価 $\Rightarrow$ $\| \bullet \|_a$ と $\| \bullet \|_c$ は等価

(c) 点列 $x_n \in X$ と $x \in X$ に対して X 上のノルム $\| \bullet \|_a$ と $\| \bullet \|_b$ が等価ならば
$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ が $\| \bullet \|_b$ の意味で x に収束することは $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ が $\| \bullet \|_a$ の意味で x に収束することと同値である。

定理 3.1　X を有限次元ベクトル空間とする。
このとき、X 上の全てのノルムは等価

証明　(a) $\dim X = N$ として X の基底の 1 つを $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ とする。
このとき $x \in X$ に対して $\| x \|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$
ただし $x = x_1 u_1 + \cdots + x_N u_n$ と定義すると
$\| \bullet \|_2$: $X \to \mathbf{R}$ は X 上のノルム
　　(b) X 上の任意のノルムを $J(\bullet)$ とする
　　(i) 任意の $x \in X$ に対して
$x = x_1 u_1 + \cdots + x_N u_N$ とすると
$J(x) = J(x_1 u_1 + \cdots + x_N u_N)$
$\leq J(X_1 u_1) + \cdots + J(x_N u_N)$
$= | x_1 | J(u_1) + \cdots + | x_n | J(u_N)$
$\leq \sqrt{| x_1 |^2 + \cdots + | x_N |^2} \sqrt{J(u_1)^2 + \cdots + J(u_N)^2}$
従って $M_2 = \sqrt{J(u_1)^2 + \cdots + J(u_N)^2}$ とおくと
$J(x) \leq M_2 \| x \|_2$ が成り立つ
　　(ii) 任意の $x, y \in X$ に対して
$0 \leq | J(x) - J(y) |$
$\leq J(x - y)$
$\leq M_2 \| x - y \|_2$
よって $x \to y \Rightarrow J(x) \to J(y)$ であるので

$J: X \to \mathbf{R}$ はノルム空間 $(X, \| \bullet \|_2)$ 上の連続関数
ここで、$\tilde{J}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を
$\tilde{J}(x_1, \ldots, x_N) = J(x_1 u_1 + \cdots + x_N u_N)$ と定義すると $\tilde{J}$ は $(\mathbf{R}^N, d_2)$ 上の連続関数

(iii) $S = \{x \in X \mid \| x \|_2 = 1\}$
$\tilde{S} = \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbf{R}^N \mid \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2} = 1\}$ とすると
$\tilde{S}$ は $(\mathbf{R}^N, d_2)$ における有界閉集合であるので、定理 2.3 (b) (Heine-Borel の被覆定理) より
コンパクト集合。
よって定理 2.5 より、$\tilde{J}$ は $\tilde{S}$ 上で最小値 M_1 をもつ、従って J は S 上で最小値 M_1 を持つ。
$x \in S$ のとき、$x \neq 0$ であるので $J(x) > 0$ よって $M_1 > 0$

以上から

- $x \neq 0$ のとき
  $M_1 \leq J(\frac{1}{\|x\|_2} x) = \frac{1}{\|x\|_2} x$
  従って $M_1 \| x \|_2 \leq J(x)$
- $x = 0$ のとき
  $M_1 \| x \|_2 = 0 = J(x)$

定義 3.5　X: ノルム空間

(a) 部分空間 $M \subset X$ が閉集合であるとき、これを閉部分空間であるという。

  – 部分空間 $M \subset X \Rightarrow \bar{M}$ (閉包) は閉部分空間
  – ${}^\forall S \subseteq X$, span(S) は閉部分空間

(b) $v \in X$
  M: X の閉部分空間
  このとき $V = v + M \overset{\text{def.}}{=} \{v + m \mid m \in M\}$ を線形多様体という

(c) $C \subseteq X$ に対して、
  C が凸集合 $\Leftrightarrow {}^\forall x_1, x_2 \in C, {}^\forall \lambda \in [0,1],\ \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in C$

性質 3.2　X をノルム空間とする

(a) $v_0 \in X$
  M: X の閉部分空間
  $V = v_0 + M$ (線形多様体)
  このとき ${}^\forall v \in V,\ V = v + M$
  線形多様体は閉凸集合。

(b) M_α: X の閉部分空間 $(\alpha \in \mathcal{M})$
  $M = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{M}} M_\alpha (\neq \emptyset) \Rightarrow M$ は閉部分空間
  C_α: X の凸部分集合 $(\alpha \in \mathcal{M})$
  $C = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{M}} C_\alpha (\neq \emptyset) \Rightarrow C$ は閉凸集合

(c) 略

(d) X の部分空間 M の閉包 $\bar{M}$ は部分空間になる。また、凸集合 $C \subset X$ の閉包 $\bar{C}$ も凸集合になる。

定理 3.2　X: ノルム空間, M: X の有限次元部分空間 $\Rightarrow$ M は閉集合

3.2　内積空間

定義 3.6　実 (または複素) 線形空間 X において次の (I-a) から (I-c) を満たす写像

$$\langle \bullet, \bullet \rangle : X^2 \to \mathbf{R} \text{ (または } \mathbf{C}\text{)}$$

を X 上の内積といい、また、$x, y \in X$ に対して $\langle x, y \rangle$ を x と y の内積という。このとき X を内積空間という

　$^\forall x, y, z \in X$ と $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ (または $\mathbf{C}$)

(I-a) 対称性 (またはエルミート性): $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

(I-b) 非負性: $\langle x, x \rangle \geq 0$
　　$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(I-c) 線形性: $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$

　さらに、$x, y \in X$ に対して

$$x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$$

を x と y が直交するといい。
そして $\emptyset \neq S \subseteq X$ に対して

$$S^\perp = \{x \in X \mid {}^\forall y \in S, x \perp y\}$$

と表すことにする

　注意　$^\forall x, y \in X$ に対して

$$x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$$

　注意　$^\forall x \in X$ に対して

$$\langle x, \rangle = 0, \therefore x \perp 0$$

　注意　$^\forall S \subseteq X (S \neq \emptyset)$ に対して、$S^\perp$ は X の部分空間

　例　$\mathbf{R}^n$ において

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

(ただし $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$)
は $\mathbf{R}^n$ 上の内積を定める。

例　$M_{m,n}$ ($m \times n$ の実行列全体において)

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} = \mathrm{tr}({}^{t}BA)$$

(ただし $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m,n}$) は ${}_{m,n}$ 上の内積を定める。 (Hilbert-Schmidt 内積)

例　$C[0,1] =$ (閉区間 $[0,1](\subseteq \mathbf{R})$ 上の実数値連続関数全体の集合)

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{dx}$$

は $C[0,1]$ 上の内積を定める

性質 3.3　$(X, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ を内積空間とする。
このとき、写像 $\| \bullet \|: X \to \mathbf{R}$ を

$$\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

と定義すると、$\| \bullet \|$ は X 上のノルムとなる。
このノルムを内積から誘導されたノルムといい、次が成立
　任意の $x, y \in X$ に対して

(a) (Chauchy-Schwarz の不等式) $| \langle x, y \rangle | \leq \| x \| \| y \|$ 等号成立 $\Leftrightarrow x, y$ が線形従属

(b) $\| x \| = \sup_{\|u\|=1} | \langle x, u \rangle | = \max_{\|u\|=1} | \langle x, u \rangle |$

(c) (三角不等式) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ 等号成立 $\Leftrightarrow x, y$ の一方が他方の非負実数倍

補題 3.1　$(X, \langle \bullet, \bullet \rangle)$: 内積空間

(a) 内積の連続性
$(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}$: X の点列
$x, y \in X$ このとき
$x_n \to x, y_n \to y \Rightarrow \langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$

(b) $S \subset X$ に対して
$S^{\perp} = \{x \in X \mid x \perp y \ {}^{\forall}y \in S\}$ は閉部分空間

性質 3.3 (a)　内積空間 X において

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2)$$

ただし $\| \bullet \|$ は内積から誘導されたノルム

Jordan-Neumann の定理

(1) 実ノルム空間 $(X, \| \bullet \|)$ において中線定理がせいりつしているならば
$\langle \bullet, \bullet \rangle : X \to \mathbf{R}$ を $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2)$ で定義すると
$(X, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ は実内積空間となり、$\| \bullet \|$ はこの内積から誘導されたノルムとなる