例

(3) $\mathbf{R}$ の閉区間 $[a,b]$ 上で定義された実数値連続関数全体の集合 $C[a,b]$ において、可算とスカラー倍演算を

- $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
- $(cf)(x)=cf(x)$

と定めると、$C[a,b]$ はこれらの演算に関して線形空間をなす
可算が結合則を満たすことは次のようにして確かめられる
任意の $f,g,h\in C[a,b]$ と $x\in[a,b]$ に対して
$\big((f+g)+h\big)(x)=(f+g)(x)+h(x)$
$=\big(f(x)+g(x)\big)+h(x)$
$=f(x)+\big(g(x)+h(x)\big)$
$=f(x)+(g+h)(x)$
$=\big(f+(g+h)\big)(x)$
よって $(f+g)+h=f+(g+h)$

3.1 ノルム空間

定義 3.1

- X: 実線形空間
- $\|\bullet\|: X\to\mathbf{R}$

このとき $\|\bullet\|$ が X 上のノルム
$\Leftrightarrow$ 任意の $x,y\in X, a\in\mathbf{R}$ に対して

(a) $\|x\|\geq 0$ かつ $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$ (非負性)

(b) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ (三角不等式)

(c) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$ (同次性)

また、ノルムが定義された実線形空間を**ノルム空間**という

注 「X はノルム空間」と言ったり、どのノルムを考えるのか明示したいときは「$(X,\|\bullet\|)$ はノルム空間」と言ったりする

例

(1) $\|\bullet\|_2: \mathbf{R}^N\to\mathbf{R}$ を $\|\mathbf{x}\|_2=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_N^2}$ (ただし $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_N\end{pmatrix}$) と定めると $\|\bullet\|_2$ は $\mathbf{R}^N$ 上のノルム

(2) $\|\bullet\|_1: \mathbf{R}^N\to\mathbf{R}$ を $\|\mathbf{x}\|_1=|x_1|+\cdots|x_N|$ と定めると $\|\bullet\|_1$ は $\mathbf{R}^N$ 上のノルム

(3) $\|\bullet\|_\infty: \mathbf{R}^N\to\mathbf{R}$ を $\|\mathbf{x}\|_\infty=\max_{1\leq i\leq N}|x_i|$ と定めると $\|\bullet\|_\infty$ は $\mathbf{R}^N$ 上のノルム

(4) $1 \leq p$ とする。
$\| \bullet \|_p$: $\mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ を
$\| \mathbf{x} \|_p = \left(| x_1 |^p + \cdots + | x_N |^p \right)^{\frac{1}{p}}$ と定めると
$\| \bullet \|_p$ は $\mathbf{R}^N$ 上のノルム

注　ノルム空間 $(X, \| \bullet \|)$ に対して、$d : X^2 \to \mathbf{R}$ を $d(x, y) = \| x - y \|$ と定めると d は X 上の距離関数

証明 cf.p16　$x, y, z \in X$ を任意に取る。

(D_1) $d(x, y) = \| x - y \| \geq 0$ (ノルムの非負性より)
$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \| x - y \| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$ (ノルムの非負性より)

(D_2) $d(y, x) = \| y - x \| = \| -(x - y) \| = \| (-1)(x - y) \| = | -1 | \| x - y \| = d(x, y)$

(D_3) $d(x, z) + d(z, y) = \| x - z \| + \| z - y \| \geq \| (x - z) + (z - y) \| = \| x - y \| = d(x, y)$

注　X が実線形空間をなし、d が X 上の距離であるとき $\| \bullet \|: X \to \mathbf{R}$ を

$$\| \mathbf{x} \| = d(\mathbf{x}, \mathbf{0})$$

と定義する。
　このとき、d が次の条件を満たすならば $\| \bullet \|$ は X 上のノルムになる
任意の $x, y, z \in X$ と $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して

1.

性質 3.1　$(X, \| \bullet \|)$: ノルム空間
任意の $x, y \in X$ に対して

$$| \| x \| - \| y \| | \leq \| x - y \|$$

証明

$$\| x \| = \| x - y + y \| \leq \| x - y \| + \| y \|$$

よって $\| x \| - \| y \| \leq \| x - y \|$

$$\| y \| = \| y - x + x \| \leq \| y - x \| + \| x \|$$

よって $\| y \| - \| x \| \leq \| y - x \|$

定義 3.2
X: ノルム空間
$(x_n)_{n=1}^{\infty}$: X の点列
$x \in X$
このとき、$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ が収束 $\Leftrightarrow \| x_n - x \| \to 0$ $(n \to 0)$

定義 3.3 (写像の連続)　(cf. 定義 2.8 p39)

注意 1　ノルムは連続
$\because$ X の点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ と $x \in X$ について $x_n \to x$ $(x \to \infty)$ であるとき、

$$0 \leq \mid \parallel x_n \parallel - \parallel x \parallel \mid \leq \parallel x_n - x \parallel \to 0 \ (n \to \infty)$$

定義 3.4
　X: 実線形空間
$\parallel \bullet \parallel_a, \parallel \bullet \parallel_b$ X 上のノルム
　　$\parallel \bullet \parallel_a$ と $\parallel \bullet \parallel_b$ が等価
$\Leftrightarrow$ 任意の $x \in X$ に s 対して、

$$M_1 \parallel x \parallel_a \leq \parallel x \parallel_b \leq M_2 \parallel x \parallel_a$$

をみたす $M_1, M_2 > 0$ が存在

注意 2　(a) (b) ノルムが等価であるという関係は同値関係:
X 上の任意の $\parallel \bullet \parallel_a, \parallel \bullet \parallel_b, \parallel \bullet \parallel_c$ に対して、

反射律 $\parallel \bullet \parallel_a$ と $\parallel \bullet \parallel_b$ は等価

対象律 $\parallel \bullet \parallel_a$ と $\parallel \bullet \parallel_b$ が等価 $\Leftrightarrow$ $\parallel \bullet \parallel_b$ と $\parallel \bullet \parallel_a$ は等価

推移律 $\parallel \bullet \parallel_a$ と $\parallel \bullet \parallel_b$ が等価かつ $\parallel \bullet \parallel_b$ と $\parallel \bullet \parallel_c$ が等価 $\Rightarrow$ $\parallel \bullet \parallel_a$ と $\parallel \bullet \parallel_c$ は等価

(c) 点列 $x_n \in X$ と $x \in X$ に対して X 上のノルム $\parallel \bullet \parallel_a$ と $\parallel \bullet \parallel_b$ が等価ならば
$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ が $\parallel \bullet \parallel_b$ の意味で x に収束することは $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ が $\parallel \bullet \parallel_a$ の意味で x に収束することと同値である。

定理 3.1　X を有限次元ベクトル空間とする。
このとき、X 上の全てのノルムは等価

証明　(a) $\dim X = N$ として X の基底の 1 つを $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ とする。
このとき $x \in X$ に対して $\parallel x \parallel_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$
ただし $x = x_1 u_1 + \cdots + x_N u_n$ と定義すると
$\parallel \bullet \parallel_2$: $X \to \mathbf{R}$ は X 上のノルム
　　(b) X 上の任意のノルムを $J(\bullet)$ とする
　　(i) 任意の $x \in X$ に対して
$x = x_1 u_1 + \cdots + x_N u_N$ とすると
$J(x) = J(x_1 u_1 + \cdots + x_N u_N)$
$\leq J(X_1 u_1) + \cdots + J(x_N u_N)$
$= \mid x_1 \mid J(u_1) + \cdots + \mid x_n \mid J(u_N)$
$\leq \sqrt{\mid x_1 \mid^2 + \cdots + \mid x_N \mid^2} \sqrt{J(u_1)^2 + \cdots + J(u_N)^2}$
従って $M_2 = \sqrt{J(u_1)^2 + \cdots + J(u_N)^2}$ とおくと
$J(x) \leq M_2 \parallel x \parallel_2$ が成り立つ
　　(ii) 任意の $x, y \in X$ に対して
$0 \leq \mid J(x) - J(y) \mid$
$\leq J(x - y)$
$\leq M_2 \parallel x - y \parallel_2$
よって $x \to y \Rightarrow J(x) \to J(y)$ であるので

$J: X \to \mathbf{R}$ はノルム空間 $(X, \| \bullet \|_2)$ 上の連続関数
ここで、$\tilde{J}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を
$\tilde{J}(x_1, \ldots, x_N) = J(x_1 u_1 + \cdots + x_N u_N)$ と定義すると $\tilde{J}$ は $(\mathbf{R}^N, d_2)$ 上の連続関数
(iii) $S = \{x \in X \mid \| x \|_2 = 1\}$
$\tilde{S} = \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbf{R}^N \mid \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2} = 1\}$ とすると
$\tilde{S}$ は $(\mathbf{R}^N, d_2)$ における有界閉集合であるので、定理 2.3 (b) (Heine-Borel の被覆定理) よりコンパクト集合。
よって定理 2.5 より、$\tilde{J}$ は $\tilde{S}$ 上で最小値 M_1 をもつ、従って J は S 上で最小値 M_1 を持つ。
$x \in S$ のとき、$x \neq 0$ であるので $J(x) > 0$ よって $M_1 > 0$
以上から

- $x \neq 0$ のとき
  $M_1 \leq J(\frac{1}{\|x\|_2} x) = \frac{1}{\|x\|_2} x$
  従って $M_1 \| x \|_2 \leq J(x)$
- $x = 0$ のとき
  $M_1 \| x \|_2 = 0 = J(x)$

定義 3.5　X: ノルム空間

(a) 部分空間 $M \subset X$ が閉集合であるとき、これを閉部分空間であるという。
  - 部分空間 $M \subset X \Rightarrow \bar{M}$ (閉包) は閉部分空間
  - $^\forall S \subseteq X$, span(S) は閉部分空間

(b) $v \in X$
M: X の閉部分空間
このとき $V = v + M \overset{\text{def.}}{=} \{v + m \mid m \in M\}$ を線形多様体という

(c) $C \subseteq X$ に対して、
C が凸集合 $\Leftrightarrow {}^\forall x_1, x_2 \in C, {}^\forall \lambda \in [0,1],\ \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in C$

性質 3.2　X をノルム空間とする

(a) $v_0 \in X$
M: X の閉部分空間
$V = v_0 + M$ (線形多様体)
このとき $^\forall v \in V,\ V = v + M$
線形多様体は閉凸集合。

(b) M_α: X の閉部分空間 $(\alpha \in \mathcal{M})$
$M = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{M}} M_\alpha (\neq \emptyset) \Rightarrow M$ は閉部分空間
C_α: X の凸部分集合 $(\alpha \in \mathcal{M})$
$C = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{M}} C_\alpha (\neq \emptyset) \Rightarrow C$ は閉凸集合

(c) 略

(d) X の部分空間 M の閉包 $\bar{M}$ は部分空間になる。また、凸集合 $C \subset X$ の閉包 $\bar{C}$ も凸集合になる。

定理 3.2　X: ノルム空間, M: X の有限次元部分空間 $\Rightarrow M$ は閉集合