例

(3)　$\mathbf{R}$ の閉区間 $[a,b]$ 上で定義された実数値連続関数全体の集合 $C[a,b]$ において、可算とスカラー倍演算を

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(cf)(x) = cf(x)$

と定めると、$C[a,b]$ はこれらの演算に関して線形空間をなす
可算が結合則を満たすことは次のようにして確かめられる
任意の $f, g, h \in C[a,b]$ と $x \in [a,b]$ に対して
$\big((f+g)+h\big)(x) = (f+g)(x) + h(x)$
$= \big(f(x) + g(x)\big) + h(x)$
$= f(x) + \big(g(x) + h(x)\big)$
$= f(x) + (g+h)(x)$
$= \big(f + (g+h)\big)(x)$
　よって $(f+g)+h = f+(g+h)$

3.1　ノルム空間

定義 3.1

- X: 実線形空間
- $\| \bullet \|$: $X \to \mathbf{R}$

　このとき $\| \bullet \|$ が X 上のノルム
$\Leftrightarrow$ 任意の $x, y \in X, a \in \mathbf{R}$ に対して

(a) $\| x \| \geq 0$ かつ $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (非負性)

(b) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (三角不等式)

(c) $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$ (同次性)

　また、ノルムが定義された実線形空間を**ノルム空間**という

　注　「X はノルム空間」と言ったり、どのノルムを考えるのか明示したいときは「$(X, \| \bullet \|)$ はノルム空間」と言ったりする

　例

(1) $\| \bullet \|_2$: $\mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ を $\| \mathbf{x} \|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}$ (ただし $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$) と定めると $\| \bullet \|_2$ は $\mathbf{R}^N$ 上のノルム

(2) $\| \bullet \|_1$: $\mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ を $\| \mathbf{x} \|_1 = | x_1 | + \cdots | x_N |$ と定めると $\| \bullet \|_1$ は $\mathbf{R}^N$ 上のノルム

(3) $\| \bullet \|_\infty$: $\mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ を $\| \mathbf{x} \|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} | x_i |$ と定めると $\| \bullet \|_\infty$ は $\mathbf{R}^N$ 上のノルム

(4) $1 \leq p$ とする。
$\| \bullet \|_p \colon \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ を
$\| \mathbf{x} \|_p = \left(| x_1 |^p + \cdots + | x_N |^p \right)^{\frac{1}{p}}$ と定めると
$\| \bullet \|_p$ は $\mathbf{R}^N$ 上のノルム

注　ノルム空間 $(X, \| \bullet \|)$ に対して、$d : X^2 \to \mathbf{R}$ を $d(x,y) = \| x - y \|$ と定めると d は X 上の距離関数

証明 cf.p16　$x, y, z \in X$ を任意に取る。

(D_1) $d(x,y) = \| x - y \| \geq 0$ (ノルムの非負性より)
$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \| x - y \| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$ (ノルムの非負性より)

(D_2) $d(y,x) = \| y - x \| = \| -(x-y) \| = \| (-1)(x-y) \| = | -1 | \| x - y \| = d(x,y)$

(D_3) $d(x,z) + d(z,y) = \| x - z \| + \| z - y \| \geq \| (x-z) + (z-y) \| = \| x - y \| = d(x,y)$

注　X が実線形空間をなし、d が X 上の距離であるとき $\| \bullet \| \colon X \to \mathbf{R}$ を

$$\| \mathbf{x} \| = d(\mathbf{x}, \mathbf{0})$$

と定義する。
　このとき、d が次の条件を満たすならば $\| \bullet \|$ は X 上のノルムになる
任意の $x, y, z \in X$ と $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して

1.

性質 3.1　$(X, \| \bullet \|)$: ノルム空間
任意の $x, y \in X$ に対して

$$| \| x \| - \| y \| | \leq \| x - y \|$$

証明

$$\| x \| = \| x - y + y \| \leq \| x - y \| + \| y \|$$

よって $\| x \| - \| y \| \leq \| x - y \|$

$$\| y \| = \| y - x + x \| \leq \| y - x \| + \| x \|$$

よって $\| y \| - \| x \| \leq \| y - x \|$

定義 3.2
　X: ノルム空間
$(x_n)_{n=1}^{\infty}$: X の点列
$x \in X$
このとき、$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ が収束 $\Leftrightarrow \| x_n - x \| \to 0$ $(n \to 0)$

定義 3.3 (写像の連続)　(cf. 定義 2.8 p39)

注意 1　ノルムは連続
$\because$ X の点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ と $x \in X$ について $x_n \to x$ $(x \to \infty)$ であるとき、

$$0 \leq | \| x_n \| - \| x \| | \leq \| x_n - x \| \to 0 \ (n \to \infty)$$

定義 3.4
X: 実線形空間
$\| \bullet \|_a, \| \bullet \|_b$ X 上のノルム
$\| \bullet \|_a$ と $\| \bullet \|_b$ が等価
$\Leftrightarrow$ 任意の $x \in X$ にs対して、

$$M_1 \| x \|_a \leq \| x \|_b \leq M_2 \| x \|_a$$

をみたす $M_1, M_2 > 0$ が存在

注意 2　(a) (b) ノルムが等価であるという関係は同値関係:
X 上の任意の $\| \bullet \|_a, \| \bullet \|_b, \| \bullet \|_c$ に対して、

反射律 $\| \bullet \|_a$ と $\| \bullet \|_b$ は等価

対象律 $\| \bullet \|_a$ と $\| \bullet \|_b$ が等価 $\Leftrightarrow$ $\| \bullet \|_b$ と $\| \bullet \|_a$ は等価

推移律 $\| \bullet \|_a$ と $\| \bullet \|_b$ が等価かつ $\| \bullet \|_b$ と $\| \bullet \|_c$ が等価 $\Rightarrow$ $\| \bullet \|_a$ と $\| \bullet \|_c$ は等価

(c) 点列 $x_n \in X$ と $x \in X$ に対して X 上のノルム $\| \bullet \|_a$ と $\| \bullet \|_b$ が等価ならば
$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ が $\| \bullet \|_b$ の意味で x に収束することは $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ が $\| \bullet \|_a$ の意味で x に収束することと同値である。

定理 3.1　X を有限次元ベクトル空間とする。
このとき、X 上の全てのノルムは等価

証明　(a) $\dim X = N$ として X の基底の1つを $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ とする。
このとき $x \in X$ に対して $\| x \|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$
ただし $x = x_1 u_1 + \cdots + x_N u_n$ と定義すると
$\| \bullet \|_2$: $X \to \mathbf{R}$ は X 上のノルム
(b) X 上の任意のノルムを $J(\bullet)$ とする
(i) 任意の $x \in X$ に対して
$x = x_1 u_1 + \cdots + x_N u_N$ とすると
$J(x) = J(x_1 u_1 + \cdots + x_N u_N)$
$\leq J(X_1 u_1) + \cdots + J(x_N u_N)$
$= | x_1 | J(u_1) + \cdots + | x_n | J(u_N)$
$\leq \sqrt{| x_1 |^2 + \cdots + | x_N |^2} \sqrt{J(u_1)^2 + \cdots + J(u_N)^2}$
従って $M_2 = \sqrt{J(u_1)^2 + \cdots + J(u_N)^2}$ とおくと
$J(x) \leq M_2 \| x \|_2$ が成り立つ
(ii) 任意の $x, y \in X$ に対して
$0 \leq | J(x) - J(y) |$
$\leq J(x - y)$
$\leq M_2 \| x - y \|_2$
よって $x \to y \Rightarrow J(x) \to J(y)$ であるので

$J : X \to \mathbf{R}$ はノルム空間 $(X, \| \bullet \|_2)$ 上の連続関数
ここで、$\tilde{J} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を
$\tilde{J}(x_1, \ldots, x_N) = J(x_1 u_1 + \cdots + x_N u_N)$ と定義すると $\tilde{J}$ は $(\mathbf{R}^N, d_2)$ 上の連続関数

(iii) $S = \{x \in X \mid \| x \|_2 = 1\}$
$\tilde{S} = \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbf{R}^N \mid \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2} = 1\}$ とすると
$\tilde{S}$ は $(\mathbf{R}^N, d_2)$ における有界閉集合であるので、定理 2.3 (b) (Heine-Borel の被覆定理) より
コンパクト集合。
よって定理 2.5 より、$\tilde{J}$ は $\tilde{S}$ 上で最小値 M_1 をもつ、従って J は S 上で最小値 M_1 を持つ。
$x \in S$ のとき、$x \neq 0$ であるので $J(x) > 0$ よって $M_1 > 0$

以上から

- $x \neq 0$ のとき
  $M_1 \leq J(\frac{1}{\|x\|_2} x) = \frac{1}{\|x\|_2} x$
  従って $M_1 \| x \|_2 \leq J(x)$

- $x = 0$ のとき
  $M_1 \| x \|_2 = 0 = J(x)$