

例

(3)  $\mathbf{R}$  の閉区間  $[a, b]$  上で定義された実数値連続関数全体の集合  $C[a, b]$  において、可算とスカラー倍演算を

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(cf)(x) = cf(x)$

と定めると、 $C[a, b]$  はこれらの演算に関して線形空間をなす  
可算が結合則を満たすことは次のようにして確かめられる

任意の  $f, g, h \in C[a, b]$  と  $x \in [a, b]$  に対して

$$\begin{aligned} ((f + g) + h)(x) &= (f + g)(x) + h(x) \\ &= (f(x) + g(x)) + h(x) \\ &= f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &= f(x) + (g + h)(x) \\ &= (f + (g + h))(x) \end{aligned}$$

よって  $(f + g) + h = f + (g + h)$

### 3.1 ノルム空間

#### 定義 3.1

- $X$ : 実線形空間
- $\|\bullet\|: X \rightarrow \mathbf{R}$

このとき  $\|\bullet\|$  が  $X$  上のノルム  
 $\Leftrightarrow$  任意の  $x, y \in X, a \in \mathbf{R}$  に対して

- (a)  $\|x\| \geq 0$  かつ  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (非負性)
- (b)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (三角不等式)
- (c)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  (同次性)

また、ノルムが定義された実線形空間をノルム空間という

注 「 $X$  はノルム空間」と言ったり、どのノルムを考えるのか明示したいときは「 $(X, \|\bullet\|)$  はノルム空間」と言ったりする

例

(1)  $\|\bullet\|_2: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  を  $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}$  (ただし  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$ ) と定めると  $\|\bullet\|_2$

は  $\mathbf{R}^N$  上のノルム

(2)  $\|\bullet\|_1: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  を  $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_N|$  と定めると  $\|\bullet\|_1$  は  $\mathbf{R}^N$  上のノルム

(3)  $\|\bullet\|_\infty: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  を  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |x_i|$  と定めると  $\|\bullet\|_\infty$  は  $\mathbf{R}^N$  上のノルム

- (4)  $1 \leq p$  とする。  
 $\|\bullet\|_p: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  を  
 $\|\mathbf{x}\|_p = \left( |x_1|^p + \cdots + |x_N|^p \right)^{\frac{1}{p}}$  と定めると  
 $\|\bullet\|_p$  は  $\mathbf{R}^N$  上のノルム

注 ノルム空間  $(X, \|\bullet\|)$  に対して、 $d: X^2 \rightarrow \mathbf{R}$  を  $d(x, y) = \|x - y\|$  と定めると  $d$  は  $X$  上の距離関数

証明 cf.p16  $x, y, z \in X$  を任意に取る。

(D<sub>1</sub>)  $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$  (ノルムの非負性より)

$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$  (ノルムの非負性より)

(D<sub>2</sub>)  $d(y, x) = \|y - x\| = \|(x - y)\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1| \|x - y\| = d(x, y)$

(D<sub>3</sub>)  $d(x, z) + d(z, y) = \|x - z\| + \|z - y\| \geq \|(x - z) + (z - y)\| = \|x - y\| = d(x, y)$

注  $X$  が実線形空間をなし、 $d$  が  $X$  上の距離であるとき  $\|\bullet\|: X \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$\|\mathbf{x}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{0})$$

と定義する。

このとき、 $d$  が次の条件を満たすならば  $\|\bullet\|$  は  $X$  上のノルムになる  
 任意の  $x, y, z \in X$  と  $\alpha \in \mathbf{R}$  に対して

1.

性質 3.1  $(X, \|\bullet\|)$ : ノルム空間

任意の  $x, y \in X$  に対して

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

証明

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

よって  $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|$$

よって  $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$

定義 3.2

$X$ : ノルム空間

$(x_n)_{n=1}^\infty$ :  $X$  の点列

$x \in X$

このとき、 $(x_n)_{n=1}^\infty$  が収束  $\Leftrightarrow \|x_n - x\| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ )

定義 3.3 (写像の連続) (cf. 定義 2.8 p39)

**注意 1** ノルムは連続

⊙  $X$  の点列  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  と  $x \in X$  について  $x_n \rightarrow x$  ( $n \rightarrow \infty$ ) であるとき、

$$0 \leq \|x_n\| - \|x\| \leq \|x_n - x\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

### 定義 3.4

$X$ : 実線形空間

$\|\bullet\|_a, \|\bullet\|_b$   $X$  上のノルム

$\|\bullet\|_a$  と  $\|\bullet\|_b$  が等価

$\Leftrightarrow$  任意の  $x \in X$  に対して、

$$M_1 \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq M_2 \|x\|_a$$

をみたす  $M_1, M_2 > 0$  が存在

**注意 2** (a) (b) ノルムが等価であるという関係は同値関係:

$X$  上の任意の  $\|\bullet\|_a, \|\bullet\|_b, \|\bullet\|_c$  に対して、

反射律  $\|\bullet\|_a$  と  $\|\bullet\|_b$  は等価

対象律  $\|\bullet\|_a$  と  $\|\bullet\|_b$  が等価  $\Leftrightarrow \|\bullet\|_b$  と  $\|\bullet\|_a$  は等価

推移律  $\|\bullet\|_a$  と  $\|\bullet\|_b$  が等価かつ  $\|\bullet\|_b$  と  $\|\bullet\|_c$  が等価  $\Rightarrow \|\bullet\|_a$  と  $\|\bullet\|_c$  は等価

(c) 点列  $x_n \in X$  と  $x \in X$  に対して  $X$  上のノルム  $\|\bullet\|_a$  と  $\|\bullet\|_b$  が等価ならば  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  が  $\|\bullet\|_b$  の意味で  $x$  に収束することは  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  が  $\|\bullet\|_a$  の意味で  $x$  に収束することと同値である。

**定理 3.1**  $X$  を有限次元ベクトル空間とする。

このとき、 $X$  上の全てのノルムは等価

**証明** (a)  $\dim X = N$  として  $X$  の基底の 1 つを  $\{u_1, u_2, \dots, u_N\}$  とする。

このとき  $x \in X$  に対して  $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$

ただし  $x = x_1 u_1 + \dots + x_N u_N$  と定義すると

$\|\bullet\|_2: X \rightarrow \mathbf{R}$  は  $X$  上のノルム

(b)  $X$  上の任意のノルムを  $J(\bullet)$  とする

(i) 任意の  $x \in X$  に対して

$x = x_1 u_1 + \dots + x_N u_N$  とすると

$$J(x) = J(x_1 u_1 + \dots + x_N u_N)$$

$$\leq J(x_1 u_1) + \dots + J(x_N u_N)$$

$$= |x_1| J(u_1) + \dots + |x_N| J(u_N)$$

$$\leq \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_N|^2} \sqrt{J(u_1)^2 + \dots + J(u_N)^2}$$

従って  $M_2 = \sqrt{J(u_1)^2 + \dots + J(u_N)^2}$  とおくと

$$J(x) \leq M_2 \|x\|_2 \text{ が成り立つ}$$

(ii) 任意の  $x, y \in X$  に対して

$$0 \leq |J(x) - J(y)|$$

$$\leq J(x - y)$$

$$\leq M_2 \|x - y\|_2$$

よって  $x \rightarrow y \Rightarrow J(x) \rightarrow J(y)$  であるので

$J: X \rightarrow \mathbf{R}$  はノルム空間  $(X, \|\bullet\|_2)$  上の連続関数

ここで、 $\tilde{J}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  を

$\tilde{J}(x_1, \dots, x_N) = J(x_1 u_1 + \dots + x_N u_N)$  と定義すると  $\tilde{J}$  は  $(\mathbf{R}^N, d_2)$  上の連続関数

(iii)  $S = \{x \in X \mid \|x\|_2 = 1\}$

$\tilde{S} = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbf{R}^N \mid \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2} = 1\}$  とすると

$\tilde{S}$  は  $(\mathbf{R}^N, d_2)$  における有界閉集合であるので、定理 2.3 (b) (Heine-Borel の被覆定理) よりコンパクト集合。

よって定理 2.5 より、 $\tilde{J}$  は  $\tilde{S}$  上で最小値  $M_1$  をもつ、従って  $J$  は  $S$  上で最小値  $M_1$  を持つ。  
 $x \in S$  のとき、 $x \neq 0$  であるので  $J(x) > 0$  よって  $M_1 > 0$

以上から

- $x \neq 0$  のとき

$$M_1 \leq J\left(\frac{1}{\|x\|_2}x\right) = \frac{1}{\|x\|_2}x$$

$$\text{従って } M_1 \|x\|_2 \leq J(x)$$

- $x = 0$  のとき

$$M_1 \|x\|_2 = 0 = J(x)$$

**定義 3.5**  $X$ : ノルム空間

(a) 部分空間  $M \subset X$  が閉集合であるとき、これを閉部分空間であるという。

– 部分空間  $M \subset X \Rightarrow \bar{M}$  (閉包) は閉部分空間

–  $\forall S \subseteq X, \text{span}(S)$  は閉部分空間

(b)  $v \in X$

$M$ :  $X$  の閉部分空間

このとき  $V = v + M \stackrel{\text{def.}}{=} \{v + m \mid m \in M\}$  を線形多様体という

(c)  $C \subseteq X$  に対して、

$C$  が凸集合  $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in C, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in C$

**性質 3.2**  $X$  をノルム空間とする

(a)  $v_0 \in X$

$M$ :  $X$  の閉部分空間

$V = v_0 + M$  (線形多様体)

このとき  $\forall v \in V, V = v + M$

線形多様体は閉凸集合。

(b)  $M_\alpha$ :  $X$  の閉部分空間 ( $\alpha \in \mathcal{M}$ )

$M = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{M}} M_\alpha (\neq \emptyset) \Rightarrow M$  は閉部分空間

$C_\alpha$ :  $X$  の凸部分集合 ( $\alpha \in \mathcal{M}$ )

$C = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{M}} C_\alpha (\neq \emptyset) \Rightarrow C$  は閉凸集合

(c) 略

(d)  $X$  の部分空間  $M$  の閉包  $\bar{M}$  は部分空間になる。また、凸集合  $C \subset X$  の閉包  $\bar{C}$  も凸集合になる。

定理 3.2  $X$ : ノルム空間,  $M$ :  $X$  の有限次元部分空間  $\Rightarrow M$  は閉集合

### 3.2 内積空間

定義 3.6 実 (または複素) 線形空間  $X$  において次の (I-a) から (I-c) を満たす写像

$$\langle \bullet, \bullet \rangle : X^2 \rightarrow \mathbf{R} \text{ (または } \mathbf{C} \text{)}$$

を  $X$  上の内積といい、また、 $x, y \in X$  に対して  $\langle x, y \rangle$  を  $x$  と  $y$  の内積という。このとき  $X$  を内積空間という

$$\forall x, y, z \in X \text{ と } \alpha, \beta \in \mathbf{R} \text{ (または } \mathbf{C} \text{)}$$

(I-a) 対称性 (またはエルミート性):  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

(I-b) 非負性:  $\langle x, x \rangle \geq 0$   
 $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(I-c) 線形性:  $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$

さらに、 $x, y \in X$  に対して

$$x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$$

を  $x$  と  $y$  が直交するといい。  
そして  $\emptyset \neq S \subseteq X$  に対して

$$S^\perp = \{x \in X \mid \forall y \in S, x \perp y\}$$

と表すことにする

注意  $\forall x, y \in X$  に対して

$$x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$$

注意  $\forall x \in X$  に対して

$$\langle x, \rangle = 0, \therefore x \perp 0$$

注意  $\forall S \subseteq X (S \neq \emptyset)$  に対して、 $S^\perp$  は  $X$  の部分空間

例  $\mathbf{R}^n$  において

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

(ただし  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$ )

は  $\mathbf{R}^n$  上の内積を定める。

例  $M_{m,n}$  ( $m \times n$  の実行列全体において)

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} = \text{tr}({}^t B A)$$

(ただし  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m,n}$ ) は  $m, n$  上の内積を定める。(Hilbert-Schmidt 内積)

例  $C[0, 1] = (\text{閉区間 } [0, 1] (\subseteq \mathbf{R}) \text{ 上の実数値連続関数全体の集合})$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

は  $C[0, 1]$  上の内積を定める

性質 3.3  $(X, \langle \bullet, \bullet \rangle)$  を内積空間とする。

このとき、写像  $\| \bullet \|: X \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

と定義すると、 $\| \bullet \|$  は  $X$  上のノルムとなる。

このノルムを内積から誘導されたノルムといい、次が成立

任意の  $x, y \in X$  に対して

(a) (Cauchy-Schwarz の不等式)  $|\langle x, y \rangle| \leq \| x \| \| y \|$  等号成立  $\Leftrightarrow x, y$  が線形従属

(b)  $\| x \| = \sup_{\| u \| = 1} |\langle x, u \rangle| = \max_{\| u \| = 1} |\langle x, u \rangle|$

(c) (三角不等式)  $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$  等号成立  $\Leftrightarrow x, y$  の一方が他方の非負実数倍

補題 3.1  $(X, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ : 内積空間

(a) 内積の連続性

$(x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty$ :  $X$  の点列

$x, y \in X$  このとき

$$x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \Rightarrow \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$$

(b)  $S \subset X$  に対して

$$S^\perp = \{x \in X \mid x \perp y \ \forall y \in S\} \text{ は閉部分空間}$$

性質 3.3 (a) 内積空間  $X$  において

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2)$$

ただし  $\| \bullet \|$  は内積から誘導されたノルム

Jordan-Neumann の定理

(1) 実ノルム空間  $(X, \| \bullet \|)$  において中線定理が成立しているならば

$\langle \bullet, \bullet \rangle: X \rightarrow \mathbf{R}$  を  $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2)$  で定義すると

$(X, \langle \bullet, \bullet \rangle)$  は実内積空間となり、 $\| \bullet \|$  はこの内積から誘導されたノルムとなる

### 定理 3.3

- (1) 実ノルム空間  $(X, \|\bullet\|)$  が中線定理を満たすとき、  
 $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$   
により写像  $\langle \bullet, \bullet \rangle : X^2 \rightarrow \mathbf{R}$  を定義すると  
 $\langle \bullet, \bullet \rangle$  は  $X$  上の内積であり、 $\|\bullet\|$  は  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  から誘導されたノルムである。
- (2) 複素ノルム空間  $(X, \|\bullet\|)$  のノルム  $\|\bullet\|$  が中線定理を満たすとき  
 $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$   
を定義すると  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  は内積の公理を満たし、 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \forall x \in X$  を満たす

### 補題 3.2 連続関数 $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ が

$$f(s+t) = f(s) + f(t) \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

をみたすとき  $f$  は定数  $c \in \mathbf{R}$  を用いて

$$f(t) = ct \quad (t \in \mathbf{R})$$

と表せる

### 定義 3.7

- (a)  $u \subseteq X$  について
- $u$  が直交系  $\Leftrightarrow 0 \notin u$  かつ  $x, y \in u, x \neq y \Rightarrow x \perp y$
  - $u$  が正規直交系  $\Leftrightarrow u$  は直交系かつ任意の  $x \in u$  に対して  $\|x\| = 1$
- (b)  $u \in X$  について
- $u$  が極大  $\Leftrightarrow$  順序集合  $(s^X, \subseteq)$  において、 $u$  は極大  
 $\Leftrightarrow u \subsetneq u'$  なる直交系  $u'$  が存在しない  
 $\Leftrightarrow$  任意の  $v \in X \setminus u$  に対して  $u \cup \{v\}$  は直交系でない

### 性質 3.4 $X$ を内積空間とする

- (a)  $v \subseteq X$  について  $v$  が直交系  $\Rightarrow v$  は線形独立
- (b) Gram-Schmidt の直交化法
- (c) Bessel の不等式  
正規直交系  $\{u_j\}_{j=1}^\infty$  が与えられるとき  
任意の  $x \in X$  に対して  $\sum_{j=1}^\infty |\langle x, u_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

## 3.3 ノルム空間の有界線形作用素

### 定義 3.8 $(X, \|\bullet\|_X), (Y, \|\bullet\|_Y)$ ノルム空間

- (a) 線形写像  $A : X \rightarrow Y$  について、  
 $A$  は有界  $\Leftrightarrow$  「任意の  $x \in X$  に対して  
 $\|A(x)\|_Y \leq K \|x\|_X$   
を満たすような  $K \geq 0$  が存在」  
有界な線形写像を 有界線形作用素という  
 $X$  から  $Y$  への有界線形作用素全体の集合を  
 $B(X, Y)$  と表す。特に  $B(X, X)$  は  $B(X)$  と表す

(b) 有界線形作用素  $A: X \rightarrow Y$  に対して

$$\begin{aligned}\|A\| &= \inf\{K \geq 0 \mid \|A(x)\|_Y \leq K \|x\|_X \quad \forall x \in X\} \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x \neq 0} \left\| \frac{1}{\|x\|_X} A(x) \right\|_Y = \sup_{x \neq 0} \left\| A\left(\frac{1}{\|x\|_X} x\right) \right\|_Y \\ &= \sup_{\|x\|_X=1} \|A(x)\|_Y = \sup_{x \leq 1} \|A(x)\|_Y\end{aligned}$$

を作用素ノルムと呼ぶ。

(c)  $X$  から  $\mathbf{R}$  への有界線形写像を有界線形汎関数という。

**例題 3.2**  $(X, \|\bullet\|_X), (Y, \|\bullet\|_Y), (Z, \|\bullet\|_Z)$ : ノルム空間

$A_1: Y \rightarrow Z$  有界線形作用素

$A_2: X \rightarrow Y$  有界線形作用素

このとき  $A_1, A_2$  の合成

$A_1 A_2(x): X \rightarrow Z$  は  $X$  から  $Z$  への有界線形作用素で

$$\|A_1 A_2\| \leq \|A_1\| \|A_2\|$$

(作用素ノルムの劣乗法性)

**定理 3.4**  $(X, \|\bullet\|_X), (Y, \|\bullet\|_Y)$ : ノルム空間

$A: X \rightarrow Y$ : 線形作用素

このとき、 $A$  は連続  $\Leftrightarrow A$  は有界

**定理 3.5** 有界線形写像の逆写像はまた線形写像となる