代数学1 レポート

August 4, 2017

東京理科大学 理学部第一部 応用数学科 4年
学籍番号　1414059

瀧ヶ平 充

問題1

$f(X) = X^4 + 4X^3 - 4X^2 + X - 3$ に対して、

1. $f(X)$ のスツルム列を計算せよ。
2. $f(X)$ の $0 < X \leq 2$ における実根の個数を求めよ
3. $f(X)$ の $2 < X \leq 4$ における実根の個数を求めよ

解

$f_0(X) = f(X), f_1(X) = f_0'(X) = 4X^3 + 12X^2 - 8X + 1$ で、
$f_0(X) = \frac{1}{4}(X+1)f_1(X) - 5X^2 + \frac{11}{4}X - \frac{13}{4}$ より $f_2(X) = -5X^2 + \frac{11}{4}X - \frac{13}{4}$
$f_1(X) = -\frac{4}{5}(X + \frac{71}{5})f_2(X) - \frac{279}{100}X - \frac{823}{100}$ より $f_3(X) = -\frac{279}{100}X - \frac{823}{100}$
$f_2(X) = \frac{1}{279}(500X + \frac{488225}{279})f_3(X) - \frac{4271075}{77841}$ より $f_4(X) = -\frac{4271075}{77841}$
$f_0(0) < 0, f_1(0) > 0, f_2(0) < 0, f_3(0) < 0, f_4(0) < 0$ より $V(0) = 2$
$f_0(2) > 0, f_1(2) > 0, f_2(2) < 0, f_3(2) < 0, f_4(2) < 0$ より $V(2) = 1$
$f_0(4) > 0, f_1(4) > 0, f_2(4) < 0, f_3(4) < 0, f_4(4) < 0$ より $V(4) = 1$
よって $f(X)$ の $0 < X \leq 2$ における実根の個数は $V(0) - V(2) = 1$ 個
よって $f(X)$ の $2 < X \leq 4$ における実根の個数は $V(2) - V(4) = 0$ 個

問題2

(1)

2つの有理数 $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_1}{q_1}$ にたいして、有理数 $f_1(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_1}{q_1})$ を以下のように定義する。

$f_1(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_1}{q_1}) = \frac{p_1}{q_2} + \frac{p_2}{q_1}$

(2)

空でない整数の有限集合 $A = \{a_1, \ldots, a_m\} B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ にたいして、
整数の有限集合 $f_2(A, B)$ を以下のように定義する。

$f_2(A, B) = \{a_1 + b_1, \ldots, a_1 + b_n, a_2 + b_1, \ldots, a_2 + b_n, \ldots, a_m + b_1, \ldots, a_m + b_m\}$

(3)

空でない整数の有限集合 $A = \{a_1, a_2\} B = \{b_1, b_2\}$ にたいして、
整数の有限集合 $f_3(A, B)$ を以下のように定義する。

$f_3(A, B) = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2\}$

解

f_1 に対し、$f_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \neq f_1(\frac{2}{4}, \frac{1}{3}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$
これは、$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ に反するため、well-defined ではない。
f_2 に対し、A を異なる順序に入れ替えたの A' は $A \equiv A'$ で、任意の B に対して、$f_2(A, B) \equiv f_2(A', B)$ となり、B を異なる順序に入れ替えた B' を考えるときも同様のことが言える。
よって、f_2 は well-defined。
f_3 に対して、 $A = \{a_1, a_2\} \equiv \{a_2, a_1\}$ で、$A' = \{a_2, a_1\}$ とすると
$f_3(A, B) = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2\} \neq \{a_2 + b_1, a_1 + b_2\} = f_3(A', B)$ となり、$A \equiv A'$ に矛盾する。
よって f_3 は well-defined ではない。