アルゴリズム論 1
第 8 回
帰納的関数

関川 浩

2017/06/07

第 8 回から第 10 回の目標

計算可能性について, 正確な定義を与え, 基本的な性質を考察

- 第 8 回: 帰納的関数を導入
- 第 9 回: Turing 機械を導入し, 計算可能な関数を定義
  帰納的関数は計算可能であることを証明
- 第 10 回: 計算可能な関数は帰納的であることを証明
  万能 Turing 機械の紹介
  Church の提唱の紹介

今回の目標

- 原始帰納的関数, 帰納的関数, 部分帰納的関数を導入
- 原始帰納的ではない関数の具体例

原始帰納的関数

- 今までは, 文字列の生成, 受理を扱ってきた
- 文字列のほかの重要な対象として, 自然数がある
  $\Longrightarrow$ 自然数の関数, 集合, 述語を扱う

目標

計算可能性の正確な定義を与え, その基本的性質を考えること

以下, 自然数とは非負整数のことを指し, その全体を $\mathbb{N}$ で表す

数論的関数

定義 1 (部分関数, 全域的関数)

$f : A \longrightarrow B$: f の定義域は A の部分集合でもよい

- このことを強調するとき, f は部分関数という
- 定義域が A に一致しているとき, f は全域的関数という

定義 2 (数論的関数)

$f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ を数論的関数という (混乱の恐れがなければ単に関数という)

定義 3 (初期関数)

以下の数論的関数を初期関数という

(1) $Z(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0$

(2) $S(x) \stackrel{\text{def}}{=} x + 1 \quad$ (x' で表すこともある)

(3) $U_n^i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} x_i \quad (1 \leq i \leq n)$

原始帰納的関数

与えられた関数から新しい関数を作る操作を考える

定義 4 (合成, 原始帰納)

(i) r 変数関数 h と n 変数関数 $g_1, \ldots, g_r$ から n 変数関数 f を

$$f(x_1, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} h(g_1(x_1, \ldots x_n), \ldots, g_r(x_1, \ldots, x_n))$$

によって作る操作を**合成**という

(ii) n 変数関数 g と $(n+2)$ 変数関数 h から $(n+1)$ 変数関数 f を

$$f(x_1, \ldots, x_n, 0) \stackrel{\text{def}}{=} g(x_1, \ldots, x_n),$$

$$f(x_1, \ldots, x_n, y') \stackrel{\text{def}}{=} h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y))$$

によって作る操作を**原始帰納**という

定義 5 (原始帰納的関数)

初期関数に操作 (i), (ii) を有限回 (0 回も含む) 適用して得られる関数を**原始帰納的関数**という

原始帰納的関数の例 (1/3)

計算機で扱う関数は, ほとんど原始帰納的といってもよい

原始帰納的関数の例 (1/3)

- 初期関数 $Z(x)$, $S(x)$, $U_n^i(x_1, \ldots, x_n)$
- 定数関数 $C_n^k(x_1, \ldots, x_n) \stackrel{\mathrm{def}}{=} k \ (n \geq 1)$

$$C_n^k(x_1, \ldots, x_n) = \underbrace{S(S(\cdots S}_{k\ \text{個}}(Z(U_n^1(x_1, \ldots, x_n))) \cdots)) = k$$

より $C_n^k(x_1, \ldots, x_n)$ は原始帰納的

原始帰納的関数の例 (2/3)

- $x + y$

  $\mathit{plus}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x + y$ として

$$
\begin{aligned}
g(x) &\stackrel{\text{def}}{=} U_1^1(x) && (= x) \\
h(x, y, z) &\stackrel{\text{def}}{=} S(U_3^3(x, y, z)) && (= S(z) = z + 1)
\end{aligned}
$$

  とすると

$$
\begin{aligned}
\mathit{plus}(x, 0) &= g(x) && (= x) \\
\mathit{plus}(x, y') &= h(x, y, \mathit{plus}(x, y)) && (= x + y + 1)
\end{aligned}
$$

  よって, *plus* は原始帰納的

原始帰納的関数の例 (3/3)

以下の関数は原始帰納的 (証明は省略)

原始帰納的関数の例 (3/3)

- $x \cdot y$
- x^y
- $x!$
- 自然数上での減算 $x \dot{-} y \stackrel{\text{def}}{=} \max(0, x - y)$
- $|x - y|$
- x の符号 $\mathit{sg}(x)$

$$\mathit{sg}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ のとき} \\ 1, & x > 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

原始帰納的関数の性質 (1/4)

命題 1

関数 $f(x_1,\dots,x_n,y)$ が原始帰納的であれば,

$$
\begin{aligned}
g(x_1,\dots,x_n,z) &\overset{\text{def}}{=} \sum_{y<z} f(x_1,\dots,x_n,y) \\
&= f(x_1,\dots,x_n,0)+\cdots+f(x_1,\dots,x_n,z-1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h(x_1,\dots,x_n,z) &\overset{\text{def}}{=} \prod_{y<z} f(x_1,\dots,x_n,y) \\
&= f(x_1,\dots,x_n,0)\times\cdots\times f(x_1,\dots,x_n,z-1)
\end{aligned}
$$

はともに原始帰納的. ただし

$$
\sum_{y<0} f(x_1,\dots,x_n,y) \overset{\text{def}}{=} 0, \qquad \prod_{y<0} f(x_1,\dots,x_n,y) \overset{\text{def}}{=} 1
$$

原始帰納的関数の性質 (2/4)

証明

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, z, w) \overset{\text{def}}{=} f(x_1, \ldots, x_n, z) + w,$$
$$\psi(x_1, \ldots, x_n, z, w) \overset{\text{def}}{=} f(x_1, \ldots, x_n, z) \cdot w$$

とすると

$$\begin{aligned} g(x_1, \ldots, x_n, 0) &= 0, \\ g(x_1, \ldots, x_n, z') &= g(x_1, \ldots, x_n, z) + f(x_1, \ldots, x_n, z) \\ &= \varphi(x_1, \ldots, x_n, z, g(x_1, \ldots, x_n, z)), \\ h(x_1, \ldots, x_n, 0) &= 1, \\ h(x_1, \ldots, x_n, z') &= h(x_1, \ldots, x_n, z) \cdot f(x_1, \ldots, x_n, z) \\ &= \psi(x_1, \ldots, x_n, z, h(x_1, \ldots, x_n, z)) \end{aligned}$$

と書けるから, g, h は原始帰納的 ■

原始帰納的関数の性質 (3/4)

注意

以下, $x_1, \ldots, x_n$ を $\mathbf{x}$ で表す

命題 2

関数 $f(\mathbf{x}, y)$ が原始帰納的であれば, 以下もすべて原始帰納的

$$\sum_{y \le z} f(\mathbf{x}, y), \quad \sum_{u < y < v} f(\mathbf{x}, y), \quad \sum_{u \le y \le v} f(\mathbf{x}, y),$$

$$\prod_{y \le z} f(\mathbf{x}, y), \quad \prod_{u < y < v} f(\mathbf{x}, y), \quad \prod_{u \le y \le v} f(\mathbf{x}, y)$$

原始帰納的関数の性質 (4/4)

証明

$$\sum_{y \le z} f(\mathbf{x}, y) = \sum_{y < z'} f(\mathbf{x}, y),$$

$$\sum_{u<y<v} f(\mathbf{x}, y) = \sum_{y < v \dot{-} u'} f(\mathbf{x}, y + u')$$

より，$f(\mathbf{x}, y)$ が原始帰納的なら $\sum_{y \le z} f(\mathbf{x}, y)$, $\sum_{u<y<v} f(\mathbf{x}, y)$ も原始帰納的

他も同様 ■

注意

定義にまで戻った証明を補遺 1 に示す

原始帰納的集合

定義 6 (原始帰納的集合)

- 集合 $S \subseteq \mathbb{N}^n$ に対し

$$C_S(x_1, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & (x_1, \ldots, x_n) \in S \text{ のとき} \\ 1, & (x_1, \ldots, x_n) \notin S \text{ のとき} \end{cases}$$

  を S の特徴関数という
- C_S が原始帰納的であるとき, S は原始帰納的集合であるという

原始帰納的集合の性質

命題 3

集合 S, $R \subseteq \mathbb{N}^n$ が原始帰納的であれば, 以下も原始帰納的

$$\overline{S} = \mathbb{N}^n \setminus S, \qquad S \cup R, \qquad S \cap R$$

証明

$$\begin{aligned} C_{\overline{S}}(\mathbf{x}) &= 1 \dot{-} C_S(\mathbf{x}), \\ C_{S \cup R}(\mathbf{x}) &= C_S(\mathbf{x}) \cdot C_R(\mathbf{x}), \\ C_{S \cap R}(\mathbf{x}) &= C_S(\mathbf{x}) + C_R(\mathbf{x}) \dot{-} C_S(\mathbf{x}) \cdot C_R(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

より $C_{\overline{S}}$, $C_{S \cup R}$, $C_{S \cap R}$ は原始帰納的関数

よって, $\overline{S}$, $S \cup R$, $S \cap R$ は原始帰納的集合 ■

述語

- 述語とは, $\mathbb{N}^n$ から { 真, 偽 } への関数のこと

例: "$x > y + 5$" は述語

- 述語を結合するために, 論理記号

$\neg$ (否定), $\vee$ (または), $\wedge$ (かつ), $\rightarrow$ (ならば), $\leftrightarrow$ (同等)

を用い, 必要に応じてカッコも用いる

定義 7 (原始帰納的述語)

- 述語 $P(\mathbf{x})$ に対し

$$C_P(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & P(\mathbf{x}) \text{ のとき} \\ 1, & \neg P(\mathbf{x}) \text{ のとき} \end{cases}$$

を述語 P の特徴関数という

- C_P が原始帰納的であるとき, P は原始帰納的述語であるという

原始帰納的述語の性質 (1/5)

命題 4

$P(x_1, \ldots, x_r)$: 原始帰納的述語
$h_1, \ldots, h_r$: n 変数の原始帰納的関数

このとき, $P(h_1(\mathbf{x}), \ldots, h_r(\mathbf{x}))$ は原始帰納的

証明

P の特徴関数 $C_P(x_1, \ldots, x_r)$ および $h_1, \ldots, h_r$ は原始帰納的なので

$$C_P(h_1(\mathbf{x}), \ldots, h_r(\mathbf{x})) \tag{1}$$

も原始帰納的

関数 (1) は述語 $P(h_1(\mathbf{x}), \ldots, h_r(\mathbf{x}))$ の特徴関数 ■

原始帰納的述語の性質 (2/5)

命題 5

$g_1, \ldots, g_{m+1}$: n 変数の原始帰納的関数

$P_1, \ldots, P_m$: n 変数の原始帰納的述語で, 各 $\mathbf{x}$ に対して高々 1 個の $P_i(\mathbf{x})$ が真になるもの

このとき, 以下の場合分けによって定義される関数 f は原始帰納的

$$f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} g_1(\mathbf{x}), & P_1(\mathbf{x}) \text{ のとき} \\ \vdots & \\ g_m(\mathbf{x}), & P_m(\mathbf{x}) \text{ のとき} \\ g_{m+1}(\mathbf{x}), & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

原始帰納的述語の性質 (3/5)

証明

述語 $P_i(\mathbf{x})$ の特徴関数を $h_i(\mathbf{x})$ とすると

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) =& g_1(\mathbf{x}) \cdot (1 \dot{-} h_1(\mathbf{x})) \\ & + \cdots \\ & + g_m(\mathbf{x}) \cdot (1 \dot{-} h_m(\mathbf{x})) \\ & + g_{m+1}(\mathbf{x}) \cdot \prod_{i=1}^{m} h_i(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

g_i, h_i は原始帰納的だから, f も原始帰納的 ■

原始帰納的述語の性質 (4/5)

命題 6

$P(\mathbf{x})$, $Q(\mathbf{x})$ が原始帰納的述語なら，以下の述語も原始帰納的

$$\neg P(\mathbf{x}), \qquad P(\mathbf{x}) \vee Q(\mathbf{x}), \qquad P(\mathbf{x}) \wedge Q(\mathbf{x}),$$
$$P(\mathbf{x}) \rightarrow Q(\mathbf{x}), \qquad P(\mathbf{x}) \leftrightarrow Q(\mathbf{x})$$

証明

$\neg$, $\vee$, $\wedge$ については命題 3 と同様

残りについては

$$P \rightarrow Q \iff \neg P \vee Q,$$
$$P \leftrightarrow Q \iff (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

より成り立つ ■

原始帰納的述語の性質 (5/5)

命題 7

$P(\mathbf{x}, y)$ が原始帰納的述語なら，以下で定義される述語も原始帰納的

$$(\exists y)_{<z} P(\mathbf{x}, y) \iff P(\mathbf{x}, 0) \vee \cdots \vee P(\mathbf{x}, z-1),$$
$$(\forall y)_{<z} P(\mathbf{x}, y) \iff P(\mathbf{x}, 0) \wedge \cdots \wedge P(\mathbf{x}, z-1)$$

証明

上の二つの述語の特徴関数を g, h とすれば

$$g(\mathbf{x}, z) = \prod_{y<z} C_P(\mathbf{x}, y), \qquad h(\mathbf{x}, z) = \mathit{sg}\left(\sum_{y<z} C_P(\mathbf{x}, y)\right)$$

これらは命題 1 より原始帰納的 ■

原始帰納的述語と関数の例 (その 1) (1/2)

原始帰納的述語と関数の例 (その 1) (1/2)

- 述語 $x = y$ (特徴関数が $sg(|x-y|)$ だから)
- 述語 $x < y$ ($x < y \iff (\exists z)_{<y}(x + z' = y)$ だから)
- 述語 $x \leq y$ ($x \leq y \iff (x < y) \vee (x = y)$ だから)
- 関数 $\max(x, y)$

$$\max(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & x \geq y \text{ のとき} \\ y, & x < y \text{ のとき} \end{cases}$$

- 関数 $\min(x, y)$

原始帰納的述語と関数の例 (その 1) (2/2)

原始帰納的述語と関数の例 (その 1) (2/2)

- $\max(x_1, \ldots, x_n)$
  $(\max(x_1, \ldots, x_n) = \max(\cdots \max(\max(x_1, x_2), x_3) \ldots, x_n)$ だから)
- 述語 $x \mid y$ (x は y を割り切る)
  ($x \mid y \iff (\exists z)_{\leq y}(xz = y)$ だから)
- 述語 $Pr(x)$ (x は素数である)
  ($Pr(x) \iff (x > 1) \wedge \neg(\exists y)_{<x}((y \mid x) \wedge (y > 1))$ だから)

有界 μ 作用素

定義 8 (有界 μ 作用素)

述語 $P(\mathbf{x}, y)$ に対し $(\mu y)_{<z} P(\mathbf{x}, y)$ を以下の $(n+1)$ 変数関数として定義

$$(\mu y)_{<z} P(\mathbf{x}, y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \min\{y \mid y < z \wedge P(\mathbf{x}, y)\}, & (\exists y)_{<z} P(\mathbf{x}, y) \text{ のとき} \\ z, & \neg(\exists y)_{<z} P(\mathbf{x}, y) \text{ のとき} \end{cases}$$

この $(\mu y)_{<z}$ を有界 μ 作用素という

有界 μ 作用素の性質

命題 8

$P(\mathbf{x}, y)$ が原始帰納的述語であれば, 関数 $(\mu y)_{<z} P(\mathbf{x}, y)$ は原始帰納的

証明

$f(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{s \leq t} C_P(\mathbf{x}, s)$ を考える

$\mathbf{x}$ を固定し, $C_P(\mathbf{x}, t) = 0$ となる最小の t をとると

$$f(\mathbf{x}, s) = \begin{cases} 1, & s < t \text{ のとき} \\ 0, & s \geq t \text{ のとき} \end{cases}$$

よって

$$(\mu y)_{<z} P(\mathbf{x}, y) = \sum_{t<z} f(\mathbf{x}, t) = \sum_{t<z} \prod_{s \leq t} C_P(\mathbf{x}, s)$$

となり, 原始帰納的 ■

原始帰納的述語と関数の例 (その 2)

原始帰納的述語と関数の例 (その 2)

- 関数 x/y (x を y で割ったときの商) は原始帰納的 ($x/y = (\mu z)_{<x}(yz' > x)$ だから)
- $(n+1)$ 番目の素数を表す関数 p_n は以下で定義できるから原始帰納的

$$p_0 \stackrel{\text{def}}{=} 2$$

$$p_{n'} \stackrel{\text{def}}{=} (\mu x)_{<p_n!+2}(x > p_n \wedge Pr(x))$$

注意

- 任意の整数 $a \geq 1$ に対し, a より大きく $a! + 1$ 以下の素数が存在
- $a! + 1$ は $2a$ で置き換え可能 (Bertrand の仮説. 証明されている)

帰納的関数と部分帰納的関数

原始帰納的関数の族: 定義の簡潔さからは想像できないほど大きい

しかし, 実際に計算できる関数をすべて含んでいるわけではない

$\Longrightarrow$ 操作 (i) (合成), (ii) (原始帰納) に新しく以下の (iii) を加え, 帰納的関数の族に拡大

帰納的関数の族が実際に計算できる関数族に一致

μ 作用素

定義 9 (μ 作用素)

述語 $P(\mathbf{x}, y)$ に対し $\mu y P(\mathbf{x}, y)$ を以下の n 変数関数として定義

$$\mu y P(\mathbf{x}, y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \min\{y \mid P(\mathbf{x}, y)\}, & (\exists y) P(\mathbf{x}, y) \text{ のとき} \\ \text{無定義}, & \neg(\exists y) P(\mathbf{x}, y) \text{ のとき} \end{cases}$$

この μ を μ 作用素という

注意

$\mu y P(\mathbf{x}, y)$ は全域的とは限らない

正則性

定義 10 (正則性)

- 述語 $P(\mathbf{x}, y)$ が正則
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $\mathbf{x}$ に対して $P(\mathbf{x}, y)$ を真とする y が存在
- 関数 $g(\mathbf{x}, y)$ が正則
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $\mathbf{x}$ に対して $g(\mathbf{x}, y) = 0$ となる y が存在

新しい関数 $f(\mathbf{x})$ を作る第三の操作:

(iii) 関数 $g(\mathbf{x}, y)$ に対し, $f(\mathbf{x}) \overset{\text{def}}{=} \mu y(g(\mathbf{x}, y) = 0)$

(iii′) 正則関数 $g(\mathbf{x}, y)$ に対し, $f(\mathbf{x}) \overset{\text{def}}{=} \mu y(g(\mathbf{x}, y) = 0)$

注意

(iii) の f は全域的とは限らないが, (iii′) の f は全域的

部分帰納的関数, 帰納的関数

定義 11 (部分帰納的関数, 帰納的関数)

- 初期関数 Z, S, U_n^i に操作 (i), (ii), (iii) を有限回 (0 回も含む) 適用して得られる関数を部分帰納的関数という
- 初期関数 Z, S, U_n^i に操作 (i), (ii), (iii′) を有限回 (0 回も含む) 適用して得られる関数を帰納的関数という

帰納的集合や述語についても同様に定義

以下は定義より明らか

- 原始帰納的関数は帰納的, 帰納的関数は部分帰納的
- 命題 1〜8 で「原始帰納的」を「帰納的」で置き換えた命題が成立

Ackermann 関数 (1/3)

原始帰納的関数の族は実用的には十分豊か

しかし，この族に属さない関数も無数に存在

以下で具体例を一つ挙げる

定義 12 (Ackermann 関数)

以下で定義される $A(x,y)$ を Ackermann 関数 という

$$
\begin{aligned}
A(0,y) &= y+1 \\
A(x+1,0) &= A(x,1) \\
A(x+1,y+1) &= A(x,A(x+1,y))
\end{aligned}
$$

Ackermann 関数 (2/3)

Ackermann 関数は計算に手間のかかる関数としても知られている

例: $A(2,2)$ の計算

$$
\begin{aligned}
A(2,2) &= A(1,A(2,1)) \\
&= A(1,A(1,A(2,0))) \\
&= A(1,A(1,A(1,1))) \\
&= A(1,A(1,A(0,A(1,0)))) \\
&= A(1,A(1,A(0,A(0,1)))) \\
&= A(1,A(1,A(0,2))) \\
&= A(1,A(1,3)) \\
&= A(1,A(0,A(1,2))) \\
&= A(1,A(0,A(0,A(1,1)))) \\
&= A(1,A(0,A(0,A(0,A(1,0))))) \\
&= A(1,A(0,A(0,A(0,A(0,1))))) \\
&= A(1,A(0,A(0,A(0,2)))) \\
&= A(1,A(0,A(0,3))) \\
&= A(1,A(0,4))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= A(1,5) \\
&= A(0,A(1,4)) \\
&= A(0,A(0,A(1,3))) \\
&= A(0,A(0,A(0,A(1,2)))) \\
&= A(0,A(0,A(0,A(0,A(1,1))))) \\
&= A(0,A(0,A(0,A(0,A(0,A(1,0)))))) \\
&= A(0,A(0,A(0,A(0,A(0,A(0,1)))))) \\
&= A(0,A(0,A(0,A(0,A(0,2))))) \\
&= A(0,A(0,A(0,A(0,3)))) \\
&= A(0,A(0,A(0,4))) \\
&= A(0,A(0,5)) \\
&= A(0,6) \\
&= 7
\end{aligned}
$$

Ackermann 関数 (3/3)

定理 1

Ackermann 関数 $A(x, y)$ は原始帰納的ではない

証明

参考書として挙げた

有川節夫, 宮野悟: オートマトンと計算可能性, 培風館, 1986 年

などを参照

概略は補遺 2 に示す

注意

$A(x, y)$ は帰納的

命題 2 の詳しい証明 (1/3)

1.

$\sum_{y \leq z} f(\mathbf{x}, y)$ に対する証明

$\tilde{g}(\mathbf{x}, z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{y \leq z} f(\mathbf{x}, y)$ とする

命題 1 より $g(\mathbf{x}, z) = \sum_{y < z} f(\mathbf{x}, y)$ は原始帰納的で

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\mathbf{x}, z) &= g(\mathbf{x}, z') \\ &= g(U^1_{n+1}(\mathbf{x}, z), \ldots, U^n_{n+1}(\mathbf{x}, z), S(U^{n+1}_{n+1}(\mathbf{x}, z)))\end{aligned}$$

よって, $\sum_{y \leq z} f(\mathbf{x}, y)$ は原始帰納的 ■

命題 2 の詳しい証明 (2/3)

2. (1/2)

$\displaystyle\sum_{u<y<v} f(\mathbf{x}, y)$ に対する証明

$\displaystyle\sum_{u<y<v} f(\mathbf{x}, y) = \sum_{y<v \dot{-} u'} f(\mathbf{x}, y+u')$ を $\tilde{h}(\mathbf{x}, u, v)$ と書く

$F(\mathbf{x}, u, y) = f(\mathbf{x}, y+u')$ と置くと,

$$F(\mathbf{x}, u, y) = f(U^1_{n+2}(\mathbf{x}, u, y), \ldots, U^n_{n+2}(\mathbf{x}, u, y),\\ U^{n+1}_{n+2}(\mathbf{x}, u, y) + S(U^{n+2}_{n+2}(\mathbf{x}, u, y)))$$

より $F(\mathbf{x}, u, y)$ は原始帰納的

よって, 命題 1 より $G(\mathbf{x}, u, z) = \displaystyle\sum_{y<z} F(\mathbf{x}, u, y)$ は原始帰納的

2. (2/2)

また,

$$\begin{aligned}\tilde{h}(\mathbf{x}, u, v) &= \sum_{y < v \dot{-} u'} f(\mathbf{x}, y + u') \\ &= \sum_{y < v \dot{-} u'} F(\mathbf{x}, u, y) \\ &= G(\mathbf{x}, u, v \dot{-} u') \\ &= G(U^1_{n+2}(\mathbf{x}, u, v), \ldots, U^{n+1}_{n+2}(\mathbf{x}, u, v), \\ &\qquad U^{n+2}_{n+2}(\mathbf{x}, u, v) \dot{-} S(U^{n+1}_{n+2}(\mathbf{x}, u, v)))\end{aligned}$$

より $\tilde{h}(\mathbf{x}, u, v) = \sum_{u<y<v} f(\mathbf{x}, y)$ は原始帰納的 ■

定理 1 の証明の概略 (1/3)

補題 1

Ackermann 関数 $A(x,y)$ に対し, 以下が成り立つ

(1) $A(x+1,y) \geq y+2$

(2) $A(x,y) \geq y+1$

(3) $A(x,y) < A(x,y+1) \leq A(x+1,y)$

(4) 任意の c_1, c_2 に対して $A(c_1, A(c_2, x)) \leq A(c_3, x)$ となる c_3 が存在

証明の方針

(1), (2), (3) は帰納法

(4) は $c_3 \stackrel{\text{def}}{=} \max\{c_1+2, c_2+1\}$ とすればよい

定理 1 の証明の概略 (2/3)

定理 2

任意の原始帰納的関数 $f(\mathbf{x})$ に対して $f(\mathbf{x}) \le A(c, \max\{\mathbf{x}\})$ となる c が存在

証明の方針

1. 初期関数 Z, S, U に対して成立することを示す
2. $y_1, \ldots, x_r$ を $\mathbf{y}$ と略記

$$g(\mathbf{y}) \le A(c_0, \max(\mathbf{y})) h_i(\mathbf{x}) \le A(c_i, \max(\mathbf{x}))$$

   として合成 $g(h_1(\mathbf{x}), \ldots, h_r(\mathbf{x}))$ に対し成立することを示す
3. $g(\mathbf{x}) \le A(c_0, \max(\mathbf{x}))$, $h(\mathbf{x}, y, z) \le A(c_1, \max(\mathbf{x}, y, z))$ として g, h を用いた原始帰納

$$f(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}), \qquad f(\mathbf{x}, y') = h(\mathbf{x}, y, f(\mathbf{x}, y))$$

   によって定義される f に対し成立することを示す

定理 1 の証明の概略 (3/3)

定理 1 の証明

$A(x, y)$ が原始帰納的と仮定

$A(x, x)$ は 1 変数の原始帰納的関数となるので, 定理 2 より

$$A(x, x) \leq A(c, \max(x)) = A(c, x)$$

となる c が存在

ところが, $x = c + 1$ とおくと

$$A(c+1, c+1) \leq A(c, c+1)$$

となり, 補題 1 (3) に矛盾 ■