アルゴリズム論 1
第 5 回
文脈自由文法 (2)

関川 浩

2017/05/17

第 4 回から第 7 回の目標

正規表現と fa: よくできたシステムだが能力が低い

より能力が高いシステムを導入する

- 文脈自由文法 (第 4, 5 回)
- プッシュダウンオートマトン (第 6, 7 回)

第 5 回の目標:

- 文脈自由文法の標準形の導入
- 文脈自由文法では生成できない言語の例

1. 文脈自由文法の標準形
    - Chomsky 標準形, Greibach 標準形
    - 単一規則の排除
    - Chomsky 標準形の存在
    - A 生成規則
    - Greibach 標準形の存在
2. 文脈自由文法では生成できない言語
    - cfg の能力の限界
    - uvwxy 定理
    - 例題

文脈自由文法の標準形

この節の仮定

扱う文脈自由言語は ε を含まない (一般性を大きく失う制限ではない)
($\Longleftrightarrow$ 「$A \to \varepsilon$」の形の生成規則がない cfg で生成可能)

定義 1 (Chomsky 標準形)

G の生成規則が以下の形のみのとき, Chomsky 標準形という

$$A \to BC \ (B, C \in V), \qquad A \to a \ (a \in \Sigma)$$

定義 2 (Greibach 標準形)

G の生成規則が以下の形のみのとき, Greibach 標準形という

$$A \to a\alpha \quad (a \in \Sigma,\ \alpha \in V^*)$$

注意

Greibach 標準形が長さ n の列を導出 $\Longrightarrow$ 規則の適用回数は n 回

Greibach 標準形の応用

cfg P_1 (Chomsky 標準形) と P_2 (Greibach 標準形) (開始記号 S)

$$P_1 = \{S \to AX,\ S \to CC,\ X \to SB,\ A \to 0,\ B \to 1,\ C \to 2\}$$
$$P_2 = \{S \to 0SB,\ S \to 2A,\ A \to 2,\ B \to 1\}$$

$\Longrightarrow$ 同じ言語 L を生成

問題

$x = 00221 \in L$ か?

解答

P_2 を使えば簡単
$x \in L$ と仮定すると, x の最左導出は以下しかあり得ない

$$S \Rightarrow 0SB \Rightarrow 00SBB \Rightarrow 002ABB \Rightarrow 0022BB \Rightarrow 00221B$$

B が残るので x は導出できない

単一規則の排除 (1/3)

定義 3 (単一規則)

単一規則: $A \to B$ (A, B は変数) の形をした生成規則

補題 1

cfg G に対し, $L(G') = L(G)$ かつ単一規則がない cfg G' が存在

証明 (1/3)

$G = (V, \Sigma, P, S)$ とする. 以下の P' は単一規則を含まない

$$\begin{aligned} P' = \{p \mid p \in P & \text{ は単一ではない生成規則 } \} \\ \cup \{A \to \alpha \mid & \; G \text{ により } A \overset{*}{\Rightarrow} B \; (A,\, B \in V) \text{ かつ} \\ & \qquad B \to \alpha \text{ は } P \text{ の単一ではない生成規則 } \} \end{aligned}$$

$G' = (V, \Sigma, P', S)$ に対し, $L(G') = L(G)$ を示せばよい

注意 「G により $A \overset{*}{\Rightarrow} B$」を調べる方法は, あとの例題 1 で説明

単一規則の排除 (2/3)

証明 (2/3)

- $L(G) \subseteq L(G')$

  $x \in L(G)$ に対し, G による最左導出を考える

$$S = \alpha_0 \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha_n = x$$

G の単一ではない生成規則で $\alpha_i \Rightarrow \alpha_{i+1}$ なら, G' でも $\alpha_i \Rightarrow \alpha_{i+1}$

単一規則の適用後, 必ず単一ではない生成規則が適用される

(a) $\alpha_i \Rightarrow \alpha_{i+1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha_j$ はすべて G の単一規則

(b) $\alpha_j \Rightarrow \alpha_{j+1}$ は G の単一ではない生成規則

(a) において置き換えられる変数はすべて同じ位置

$\Longrightarrow$ P' のある一つの生成規則によって $\alpha_i \Rightarrow \alpha_{j+1}$

$\Longrightarrow$ G' でも $S \overset{*}{\Rightarrow} x$ となり $L(G) \subseteq L(G')$

単一規則の排除 (3/3)

証明 (3/3)

- $L(G') \subseteq L(G)$

  $A \to \alpha$ が P' に属すなら, G により $A \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$

  $\Longrightarrow$ G' により $S \overset{*}{\Rightarrow} x \in \Sigma^*$ なら, G によっても $S \overset{*}{\Rightarrow} x$

  $\Longrightarrow$ $L(G') \subseteq L(G)$ ■

Chomsky 標準形の存在 (1/2)

定理 1

L が文脈自由言語なら, L を生成する, Chomsky 標準形である cfg が存在

証明 (1/2)

$G = (V, \Sigma, P, S)$: $L = L(G)$ となる cfg. P は単一規則を含まない

$G_1 = (V \cup \{X_t \mid t \in \Sigma\},\ \Sigma,\ P_1,\ S)$, ただし, P_1 は以下の通り

- P に $X_t \to t$ $(t \in \Sigma)$ を追加
- P の $A \to \alpha$ $(|\alpha| \geq 2)$ は, α 中の $t \in \Sigma$ を変数 X_t で置き換え

例: $A \to aABb$ は $A \to X_a ABX_b$ に置き換え

注意

$(A \to \alpha) \in P$ に対し, $|\alpha| = 1$ なら $\alpha \in \Sigma$ (P には単一規則がないから)

Chomsky 標準形の存在 (2/2)

証明 (2/2)

P_1 に属する生成規則は以下のいずれか

(a) 右辺は終端記号 1 個
(b) 右辺は変数のみからなり, 長さが 2
(c) 右辺は変数のみからなり, 長さが 3 以上

$A \to B_1 \dots B_n$ $(n \geq 3)$ に対し, 新しい変数 $Y_1, \dots, Y_{n-2}$ を導入

以下の置き換えをすれば Chomsky 標準形になる

$$
\begin{aligned}
& A \to B_1 Y_1, \\
& Y_1 \to B_2 Y_2, \quad Y_2 \to B_3 Y_3, \quad \dots, \quad Y_{n-3} \to B_{n-2} Y_{n-2}, \\
& Y_{n-2} \to B_{n-1} B_n
\end{aligned}
$$

■

例題 1 (1/4)

例題 1

以下の生成規則で与えられる cfg G を Chomsky 標準形に直せ
(開始記号は A)

$$A \to B, \quad A \to C, \quad B \to D, \quad D \to E, \quad E \to B, \quad C \to F,$$
$$B \to b, \quad E \to ADa, \quad C \to ABB$$

注意

左辺が F の生成規則はないから，実は F と $C \to F$ は不要

解答 (1/4)

与えられた生成規則のうち単一規則ではないものは，

$$B \to b, \quad E \to ADa, \quad C \to ABB$$

例題 1 (2/4)

解答 (2/4)

まず, 単一規則を排除し, 新しい規則を追加 (補題 1) するため,
各変数 X に対し $X \overset{*}{\Rightarrow} Y$ となる変数 Y をすべて求める

(1) X に番号 0 をつけ, $i = 0$ として (2) へ

(2) 以下の条件を満たす変数を探す

番号 i がついている変数から

- 1 ステップで導出でき
- まだ番号のついていない変数

あれば, そういうすべての変数に番号 $i + 1$ をつけ (3) へ

なければ終了. 番号のついている変数が答

(3) i を 1 増やして (2) へ

例題 1 (3/4)

解答 (3/4)

- A からはすべての変数に到達できることが分かるので

  $$A \to b, \quad A \to ABB, \quad A \to ADa$$

  が追加される規則

- B からは B, D, E に到達可能なので

  $$B \to b, \quad B \to ADa$$

  が追加される規則

- $\ldots$

その後, 単一規則を除く

例題 1 (4/4)

解答 (4/4)

最終的には生成規則は以下の通り

$$
\begin{array}{lllll}
A \to b, & A \to AY_1, & Y_1 \to DX_a, & A \to AY_2, & Y_2 \to BB, \\
B \to b, & B \to AY_3, & Y_3 \to DX_a, & & \\
D \to b, & D \to AY_4, & Y_4 \to DX_a, & & \\
E \to b, & E \to AY_5, & Y_5 \to DX_a, & C \to AY_6, & Y_6 \to BB, \\
X_a \to a, & X_b \to b & & &
\end{array}
$$

補題 2 (1/2)

定義 4 (A 生成規則)

A 生成規則: 左辺が変数 A である生成規則

補題 2

$G = (V, \Sigma, P, S)$: cfg
$A \to \alpha_1 B \alpha_2$: P に属する生成規則

- $\{B \to \beta_i \mid i = 1,\ 2, \ldots,\ r\}$: すべての B 生成規則の集合
- $P' = (P \setminus \{A \to \alpha_1 B \alpha_2\}) \cup \{A \to \alpha_1 \beta_i \alpha_2 \mid i = 1,\ 2, \ldots\ , r\}$

$G' = (V, \Sigma, P', S)$ とすると, $L(G) = L(G')$

証明 (1/2)

- $L(G') \subseteq L(G)$

  G' による導出中に $A \Rightarrow \alpha_1 \beta_i \alpha_2$ というステップがあれば,
  G では $A \Rightarrow \alpha_1 B \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \beta_i \alpha_2$ とすればよい

補題 2 (2/2)

証明 (2/2)

- $L(G) \subseteq L(G')$
  $A \to \alpha_1 B \alpha_2$: G にあって G' にはない唯一の生成規則

  $A \to \alpha_1 B \alpha_2$ が G による導出に出現
  $\Longrightarrow$ 変数 B は, $B \to \beta_i$ によっていつかは書き換え

  導出結果は生成規則の適用順によらないから

  $$A \Rightarrow \alpha_1 B \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \beta_i \alpha_2$$

  としてよい
  これは, G' で $A \Rightarrow \alpha_1 \beta_i \alpha_2$ に置き換えが可能 ■

$A \to A\alpha$ の除去 (1/3)

補題 3

$G = (V, \Sigma, P, S)$: cfg

(1) $(A \to A\alpha_i) \in P$ $(i = 1, \ldots, r)$: A が右辺の左端にある A 生成規則

(2) $(A \to \beta_j) \in P$ $(j = 1, \ldots, s)$: 残りの A 生成規則

P': P から (1) を削除し, 以下を追加したもの (Z: 新しい変数)

$$\begin{array}{ll} Z \to \alpha_i,\ Z \to \alpha_i Z & (i = 1,\ \ldots,\ r) \\ A \to \beta_j Z & (j = 1,\ \ldots,\ s) \end{array}$$

$G' = (V \cup \{Z\}, \Sigma, P', S)$ とすると, $L(G') = L(G)$

$A \to A\alpha$ の除去 (2/3)

証明 (1/2)

- $L(G) \subseteq L(G')$

  $x \in L(G)$ とする

  G における x の最左導出中, $P \setminus P'$ に属する生成規則が現れる導出

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 A \gamma_2 &\Rightarrow \gamma_1 A \alpha_{j_1} \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 A \alpha_{j_2} \alpha_{j_1} \gamma_2 \Rightarrow \cdots \\
&\Rightarrow \gamma_1 A \alpha_{j_p} \ldots \alpha_{j_1} \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 \beta_i \alpha_{j_p} \ldots \alpha_{j_1} \gamma_2
\end{aligned}
$$

  は, G' においては以下で導出できる

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 A \gamma_2 &\Rightarrow \gamma_1 \beta_i Z \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 \beta_i \alpha_{j_p} Z \gamma_2 \Rightarrow \cdots \\
&\Rightarrow \gamma_1 \beta_i \alpha_{j_p} \ldots \alpha_{j_2} Z \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 \beta_i \alpha_{j_p} \ldots \alpha_{j_1} \gamma_2
\end{aligned}
$$

  よって, $x \in L(G')$, すなわち, $L(G) \subseteq L(G')$

$A \to A\alpha$ の除去 (3/3)

証明 (2/2)

- $L(G') \subseteq L(G)$

  $x \in L(G')$ とし, G' における x の最左導出を考える

  - $P' \setminus P$ に属する生成規則 (Z を含む生成規則) の適用があれば, 以後, 生成規則の適用順を変更, Z を左辺に持つものを優先
  - G' において, Z が現れてから消えるまでの部分

$$\begin{aligned}\gamma_1 A \gamma_2 &\Rightarrow \gamma_1 \beta_i Z \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 \beta_i \alpha_{j_p} Z \gamma_2 \Rightarrow \cdots \\ &\Rightarrow \gamma_1 \beta_i \alpha_{j_p} \ldots \alpha_{j_2} Z \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 \beta_i \alpha_{j_p} \ldots \alpha_{j_1} \gamma_2\end{aligned}$$

  は, G においては以下で導出可能

$$\begin{aligned}\gamma_1 A \gamma_2 &\Rightarrow \gamma_1 A \alpha_{j_1} \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 A \alpha_{j_2} \alpha_{j_1} \gamma_2 \Rightarrow \cdots \\ &\Rightarrow \gamma_1 A \alpha_{j_p} \ldots \alpha_{j_1} \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 \beta_i \alpha_{j_p} \ldots \alpha_{j_1} \gamma_2\end{aligned}$$

  よって, $x \in L(G)$, すなわち, $L(G') \subseteq L(G)$ ■

Greibach 標準形の存在 (1/5)

定理 2

L が文脈自由言語なら, L を生成する, Greibach 標準形である cfg が存在

証明 (1/5)

$G = (\{A_1, \ldots, A_m\}, \Sigma, P, A_1)$: L を生成する Chomsky 標準形

(1) 生成規則を修正して, 以下の二条件を満たすようにする

- ($\sharp$) $A_i \to A_j\gamma$ なら $i < j$
- ($\flat$) 生成規則の右辺は高々 1 個の終端記号のあとに 0 個以上の変数の列

Chomsky 標準形は ($\flat$) を満たすことに注意

Greibach 標準形の存在 (2/5)

証明 (2/5)

(1) の続き

i が小さい方から順に生成規則を修正していく

- $i = 1$ のとき
  $A_1 \to A_1\gamma$ という生成規則が存在すれば, 補題 3 を適用して
  (新しく導入する変数を Z_1 とする), ($\sharp$), ($\flat$) を満たすようにできる

Greibach 標準形の存在 (3/5)

証明 (3/5)

(1) の続き

- $i \leq k$ で ($\sharp$), ($\flat$) を満たすとして, $i = k+1$ のとき
  - $A_{k+1} \to A_j\gamma$ $(k+1 > j)$ には補題 2 を適用
    (A_{k+1} 生成規則は変更していないので, γ は一つの変数)

    $\{A_j \to \beta_{jp}\}$: A_j 生成規則の全体

    $A_{k+1} \to A_j\gamma$ を削除し $A_{k+1} \to \beta_{jp}\gamma$ を追加
    (β_{jp} は ($\flat$) を満たすので, $\beta_{jp}\gamma$ もそう)

    β_{jp} の左端が A_q なら, 帰納法の仮定より, $q > j$
    $\Longrightarrow$ 有限ステップで $A_{k+1} \to A_l\gamma$ $(k+1 \leq l)$ の形に
  - $A_{k+1} \to A_{k+1}\gamma$ には補題 3 を適用 (新しい変数を Z_{k+1})

Greibach 標準形の存在 (4/5)

証明 (4/5)

(2) 条件 ($\sharp$), ($\flat$) を満たすようになると, 生成規則は以下の形のみ

(a) $A_k \to A_l\gamma$, $\quad k < l$, $\gamma \in (V \cup \{Z_1, \ldots, Z_m\})^*$

(b) $A_k \to \alpha\gamma$, $\quad \alpha \in \Sigma$, $\gamma \in (V \cup \{Z_1, \ldots, Z_m\})^*$

(c) $Z_k \to \gamma$, $\quad \gamma \in (V \cup \{Z_1, \ldots, Z_m\})^*$

(a), (b) の場合:

- $k = m$ のときは, 右辺の左端は終端記号
- $k = m - 1$ のときは, 右辺の左端は終端記号か A_m

  $\Longrightarrow$ A_m のときは補題 2 を適用して, 右辺が終端記号で始まるものに置き換え可能. ($\flat$) も満たす
- $k = m - 2, \ldots, k = 1$ も同様にすれば, A_i 生成規則はすべて (b) の形にできる

Greibach 標準形の存在 (5/5)

証明 (5/5)

(2) の続き

(c) の Z_i 生成規則の場合:

(∗) Z_i 生成規則の右辺の左端が A_j の場合
補題 2 を適用して A_j を置き換え, 右辺の左端を終端記号に

(†) Z_i 生成規則の右辺の左端が Z_j の場合
補題 2 を適用して Z_j を置き換え

左端の置き換えを繰り返す
$\Longrightarrow$ いつか必ず A_l が左端に現れるので, (∗) に帰着
(Z_k は変数の列にのみ置き換わるから)

■

1. 文脈自由文法の標準形
2. 文脈自由文法では生成できない言語

cfg の能力の限界

cfg は正規表現や fa より真に能力が高い

しかし, cfg でも生成できない言語が存在

- fa では認識できない言語の存在証明
  記憶が有限という性質を利用
- cfg では生成できない言語の存在証明
  複数の繰り返し構造を関連づける能力には制限があることを利用

注意

fa では, 複数の繰り返し構造に関連をつけることができない

例: $\{0^n1^n \mid n \geq 0\}$ は正規言語ではない (fa では認識できない)

この節の仮定

この節の仮定

扱う文脈自由言語の生成規則は以下の 2 条件を満たす

- 右辺が ε の生成規則は, あるとすれば「$S \to \varepsilon$」のみ (S は開始記号)
- 「$S \to \varepsilon$」があるとき, S が右辺に現れる生成規則なし

命題 1

任意の文脈自由言語は上記 2 条件を満たす cfg で生成可能

証明

文脈自由言語についての 5 ページの主張

ε を含まない $\iff$ 「$A \to \varepsilon$」の形の生成規則がない cfg で生成可能

から明らか ■

uvwxy 定理 (1/3)

定理 3 (uvwxy 定理)

L: 文脈自由言語, 無限集合

L によって決まる定数 K が存在して, $|z| \geq K$ である任意の列 $z \in L$ に対し, 以下の 4 条件を満たす列 u, v, w, x, y が存在

- $z = uvwxy$
- 任意の $i \geq 0$ に対して $uv^iwx^iy \in L$
- $vx \neq \varepsilon$
- $|vwx| \leq K$

注意

- u, v, w, x, y は L の元でなくてもよい
- 定理 3 は, 挿入定理, 反復定理, ポンプ定理 (補題) などともいう

uvwxy 定理 (2/3)

証明 (1/2)

$L = L(G)$ となる cfg $G = (V, \Sigma, P, S)$ を取る

$r = \max\{|\alpha| \mid (A \to \alpha) \in P\}$ ($= G$ の導出木の枝分れの最大数)

$\Longrightarrow$ 根から葉までの最長のパス (枝をたどる経路) の長さが m である導出木は, 高々 r^m 個の葉しかもたない

$K = r^{|V|+2}$ とおき, $|z| \geq K$ を満たす $z \in L$ を取る

- $S \overset{*}{\Rightarrow} z$: 対応する導出木 T の頂点数が最少となる導出
- γ: T の最長のパスの一つ

$$(T \text{ の葉の数}) \geq |z| \geq K > r^{|V|+1}$$

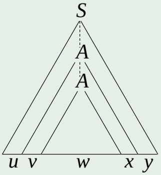
$\Longrightarrow$ γ の長さは $|V| + 2$ 以上

$\Longrightarrow$ γ の経路上, 葉から $|V| + 2$ 個目の頂点までに二回以上現れる $A \in V$ が存在

uvwxy 定理 (3/3)

証明 (2/2)

- A を根とする小さい方の部分木 T_1: $A \overset{*}{\Rightarrow} w$
- A を根とする大きい方の部分木 T_2: $A \overset{*}{\Rightarrow} vwx$

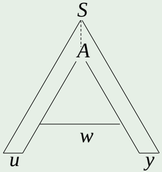


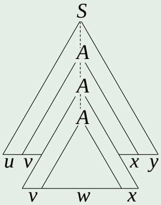
右図の通り $z = uvwxy$ と分解

- T_2 を T_1 で置き換え $\Longleftrightarrow$ $\boxed{S \overset{*}{\Rightarrow} uwy}$
- T_1 を T_2 で $i-1$ 回 $(i \geq 1)$ 置き換え $\Longleftrightarrow$ $\boxed{S \overset{*}{\Rightarrow} uv^iwx^iy}$

$v = x = \varepsilon$ なら, $S \overset{*}{\Rightarrow} uwy = z$ の導出木の頂点数は T の頂点数より少 $\Longrightarrow$ 矛盾

T_2 の最長パスの長さは高々 $|V| + 2$
$\Longrightarrow |vwx| \leq r^{|V|+2} = K$ ■





例題 2 (1/2)

例題 2

$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ は文脈自由言語ではないことを示せ

証明 (1/2)

L が文脈自由言語であると仮定

K: L に対する uvwxy 定理の定数

$a^K b^K c^K \in L$ を uvwxy 定理の 4 条件を満たすよう $uvwxy$ と分解

$\Longrightarrow vx \neq \varepsilon$ より $v \neq \varepsilon$ あるいは $x \neq \varepsilon$

$v \neq \varepsilon$ とする ($x \neq \varepsilon$ の場合も同様)

(1) $v = a^i b^j$ $(i, j \geq 1)$ の場合 ($v = b^i c^j$ $(i, j \geq 1)$ の場合も同様)

$uv^2wx^2y = a^K b^j a^i \cdots \notin L$ となり uvwxy 定理に矛盾

例題 2 (2/2)

証明 (2/2)

(2) $v = a^i$ の場合 ($v = b^i$, $v = c^i$ の場合も同様)

- $x = \varepsilon$ なら, $uv^2wx^2y = a^{K+i}b^Kc^K \notin L$
  一方, uvwxy 定理より $uv^2wx^2y \in L$ だから矛盾
- $x \neq \varepsilon$ なら, (1) より $x = a^j$, b^j, c^j のいずれか
  $\Longrightarrow$ b, c のどちらかは v にも x にも現れない
  よって, b, c のどちらかは $uvwxy$, uv^2wx^2y に同数出現
  a の個数は後者の方が多い $\Longrightarrow$ $uv^2wx^2y \notin L$
  一方, uvwxy 定理より $uv^2wx^2y \in L$ だから矛盾 ■

文脈自由言語の共通部分が文脈自由言語とならない例

- $L_1 = \{a^n b^n c^m \mid n,\ m \geq 1\}$, $L_2 = \{a^m b^n c^n \mid n,\ m \geq 1\}$ はいずれも文脈自由言語
  - L_1 を生成する生成規則 (開始記号は S)

$$S \to S_1C, \quad S_1 \to aS_1b, \quad S_1 \to ab, \quad C \to cC, \quad C \to c$$

  - L_2 を生成する生成規則 (開始記号は S)

$$S \to AS_2, \quad S_2 \to bS_2c, \quad S_2 \to bc, \quad A \to aA, \quad A \to a$$

- $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ は文脈自由言語ではない (例題 2)

例題 3 (1/2)

例題 3

$L = \{z^2 \mid z \in \{a,b\}^*\}$ は文脈自由言語ではないことを示せ

注意

$\{zz^{\mathrm{R}} \mid z \in \{a,b\}^*\}$ は文脈自由言語 (第 4 回の例題 2)

証明 (1/2)

L を文脈自由言語と仮定して矛盾を導く

$z' = a^K b^K a^K b^K \in L$ とする (K: L に対する uvwxy 定理の定数)

$\Longrightarrow$ uvwxy 定理 の 4 条件を満たす分解 $z' = uvwxy$ が存在

$|vwx| \leq K$ より, vwx は $a^K b^K$ あるいは $b^K a^K$ に入る

	vwx		
a^K	b^K	a^K	b^K

例題 3 (2/2)

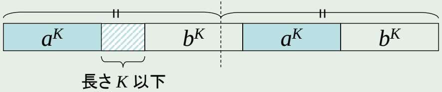
証明 (2/2)

$a^K b^K = pvwxq$ (あるいは $b^K a^K = pvwxq$) とする

注意: pv^2wx^2q の最初の K 個は a (b), 最後の K 個は b (a)

- vwx が最初の $a^K b^K$ に含まれる場合 (二番目の場合も同様)

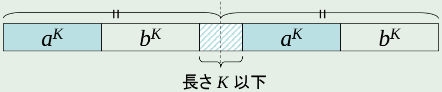
  $L \ni uv^2wx^2y = pv^2wx^2q \cdot a^K b^K$

  $=$ 

  $\notin L$

- vwx が $b^K a^K$ に含まれる場合

  $L \ni uv^2wx^2y = a^K \cdot pv^2wx^2q \cdot b^K$

  $=$ 

  $\notin L$

いずれも矛盾 ■