任意衍射屏的菲涅尔衍射-原理&源码

物理科学与技术学院　2018 级物理一班　陈家麟

实验目的

1. 熟悉 MATLAB 的使用及一些算法；
2. 加深对仿真模拟计算的理解，了解失真及其解决方法；
3. 通过仿真模拟软件模拟任意衍射屏的菲涅尔衍射，获取直观感受，加深对光的衍射现象和理论的理解，培养学习光学兴趣。

版本更迭&实现原理

1. V 0.1：最开始的时候我采用的最朴素的方法来实现——将衍射屏和接收屏分别网格化，写了两个循环语句和一个矩阵点乘来实现模拟基尔霍夫衍射积分式（离散化，有点像半波带法的思想），从而实现衍射的模拟。但是这个有个问题，我拿我的计算机算一个方孔的衍射，时间大概要 2 分钟——这实在太慢了。
2. V 0.2：经过逛论坛（小木虫）、查文献等方式，我发现了菲涅尔衍射相当于对衍射屏做二维傅里叶变换，按照网上提供的算法改进程序，较快较成功的模拟出了一定距离处的方孔衍射图样（波长 600nm,衍射距离 z=10000000mm 处符合的较好），但是一旦距离过小或者过大，就会严重失真。
3. V 0.3：本次版本更新没有解决失真问题，主要是增加对图像的处理操作，实现了任意衍射屏的模拟，使得本仿真模拟软件更加具有趣味性。
4. V 0.4：本次版本更新依旧没解决失真问题，看了很多文献，照着做了很多次实验，但是效果依旧不明显，初步估计是采样率问题，但是调参调了半天还是没有找到合适的，打算先放一放。本次主要增加了可视化界面，使得本仿真模拟软件的操作更加友好；将 MATLAB 源码编译成为可执行文件，可以推广使用。
5. V 0.5：本次版本更新似乎解决了失真问题，果然是采样率问题。按照参考文献 1，设立了“判据”，在不同条件下使用不同的算法来模拟：在抽样间隔 $\Delta x \geq \frac{\lambda z}{L}$ 时，采用 TF 算法（菲涅尔传递函数算法）；在抽样间隔 $\Delta x \leq \frac{\lambda z}{L}$ 时，采用 IR 算法（菲涅尔脉冲响应算法）。
6. V 0.6：本版本主要增加了以下几个方面的功能：
   a. 添加了屏幕尺寸控制的功能；
   b. 实现了编辑框精确设置参数值，更方便用本软件去验证一些东西；
   c. V 0.5 版本发现过近的时候仿真模拟会出错，经过和老师的交流，网上查阅文献等方式，发现应该是过近的时候傍轴近似失效，故增加了菲涅尔衍射建议距离和夫琅禾费衍射建议距离，以来指导参数的调整。

理论基础&主要算法

【菲涅尔衍射理论】

菲涅尔衍射公式

$$U(x,y)=\frac{1}{i\lambda z}\iint U_0(x_0,y_0)e^{ikr}dx_0dy_0$$
$$=\frac{1}{i\lambda z}e^{ikz}\iint U_0(x_0,y_0)e^{i\frac{k}{2z}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]}dx_0dy_0......(1)$$

这是一个线性空不变系统，若令

$$h(x,y;x_0,y_0)=\frac{1}{i\lambda z}e^{ikz}e^{i\frac{k}{2z}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]}dx_0dy_0=h(x-x_0,y-y_0)......(2)$$

则原积分可以表述成为：

$$U(x,y)=\iint U_0(x_0,y_0)h(x,y;x_0,y_0)dx_0dy_0......(3)$$

即观察平面的卷积积分表达式可以进一步写成：

$$U(x,y)=\iint U_0(x_0,y_0)h(x,y;x_0,y_0)dx_0dy_0$$
$$=U_0(x_0,y_0)*h(x,y)......(4)$$

其中，$U_0(x_0,y_0)$ 为衍射屏的透过率函数，$h(x,y)$ 为脉冲相应函数：

$$h(x,y)=\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}......(5)$$

【实现算法】

1. IR(Fresnel Impulse Response)算法

根据公式（4），接受面的菲涅尔衍射场可以表示为两个傅里叶变化乘积的逆变换形式，即

$$U(x,y)=F^{-1}\{F\{\mathrm{U}_0(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0)\}\mathrm{F}\{\mathrm{h(x,y)}\}\}$$

其中，$F\{\}$ 表示傅里叶变换，$F^{-1}\{\}$ 表示其逆变换。

2. TF(Fresnel Transfer Function)算法

菲涅尔衍射的卷积积分表达式表明：若把菲涅尔衍射看作是一个系统，那么这是一个线性空不变系统，因此这个衍射过程存在一个相应的传递函数：

$$H(f_x,f_y)=e^{ikz\sqrt{1-(\lambda f_x)^2-(\lambda f_y)^2}}=e^{ikz}e^{-i\pi\lambda z(f_x{}^2+f_y{}^2)}$$

观察平面的菲涅尔衍射场可以表示为

$$U(x,y)=F^{-1}\{F\{U_0(x_0,y_0)\}H(f_x,f_y)\}$$

【抽样定理】

在进行模拟/数字信号的转换过程中，当采样频率 $f_{s\max}$ 大于信号中最高频率 $f_{\max}$ 的 2 倍时($f_{s\max} > 2f_{\max}$)，采样之后的数字信号完整地保留了原始信号中的信息，一般实际应用中保证采样频率为信号最高频率的 2.56 ~ 4 倍；采样定理又称奈奎斯特定理。

对于 IR 算法，考虑菲涅尔传递函数的傅里叶变换式的离散抽样，根据奎斯特定理可以得到，

$$\Delta x_0^{\ 2} \le \frac{\lambda d}{N_x}, \Delta y_0^{\ 2} \le \frac{\lambda d}{N_y}$$

即在满足上述采样条件的情况下，用 IR 算法计算衍射场会比较准确。

对于上述条件不满足的情况，我们采用 TF 算法（在别的文献中又称此算法为角谱重建算法）来计算。

软件源码

限于篇幅，本部分仅介绍 calculate 这个函数（精简版，删了调试用的语句），这是本软件的精髓。

```
function calculate(handles) %传入的参数为handles是为了方便滑动条/编辑框变动时能统一处理，下面设置的global变量也是为了方便统一处理。
    global I; %透射率函数（这是个矩阵，每个元素有0和1两种状态，1代表光能通过）
    global G; %接收屏光强
    N=512; %采样率设计
    L=get(handles.slider3,'Value'); %获取slider3的值赋予L，屏幕线度
    set(handles.edit3,'String',num2str(L)); %同步设置标签3，即屏幕线度
    lamda_o=get(handles.slider2,'Value'); %获取slider2的值赋予lamda_o，波长（单位：nm）
    set(handles.edit2,'String',num2str(lamda_o)); %同步设置标签2，即波长
    lamda=lamda_o/1e6; %将波长单位化成mm
    k=2*pi/lamda; %波矢
    z=get(handles.slider1,'Value'); %获取slider1的值赋予z，衍射距离
    set(handles.edit1,'String',num2str(z)); %同步设置标签2，即衍射距离
    dx=L/N;
    dxx=lamda*z/N;
    if (dx^2<dxx) %判据
    %T-FFT/IR算法
        [x,y]=meshgrid(linspace(-L/2,L/2,N)); %网格化，生成空间坐标
        h=exp((1j*k*(x.^2+y.^2))/(2*z));
        H=fft2(fftshift(h))*dx.^2;
        B=fft2(fftshift(I));
        G=(exp(1j*k*z)/(1j*lamda*z))*ifftshift(ifft2(H.*B));
```

```
else
    fx=-1/(2*dx):1/L:1/(2*dx)-1/L;
    [FX,FY]=meshgrid(fx,fx); %网格化，生成频域坐标
    %D-FFT/TF算法
    h=exp(-1j*pi*lamda*z*(FX.^2+FY.^2))*exp(1j*k*z);
    H=fftshift(h);
    B=fft2(fftshift(I));
    G=ifftshift(ifft2(H.*B));
end
axes(handles.axes2);
imshow(log(1+abs(G)),[]); %log（…）是为了让图像（明暗条纹）更加明显
title('衍射图样');
clear;
```

参考资料

[1]佚名.菲涅尔衍射数字仿真与实验[EB/OL]. https://wenku.baidu.com/view/180c36bbcc175527062208b4.html. 2015-12-09/2019-6-17.
[2]佚名.菲涅尔衍射常用计算方法的研究[EB/OL]. https://wenku.baidu.com/view/3b6826b571fe910ef12df83d.html. 2014-01-09/2019-6-17.
[3]崔文乐,韩利琪,霍晓敏,杨丽君,张素恒.菲涅尔衍射积分的单次傅里叶变换算法[J].大学物理,2019,38(2):9-16.
[4]钟锡华.现代光学基础（第二版）[M].北京:北京大学出版社,2018:61-89.
[5]赵凯华.新概念物理教程.光学[M].北京:高等教育出版社,2004:163-189.