Determinant, inproduct, inverse- en transponeerde matrix

Determinant
De determinant weergeeft de opppervakte/volume van een matrix. Het wordt geschreven als Det(A) en dit is het product van alle eigenwaarden matrix.

Inproduct
Het inproduct wordt gebruikt om de gewogen som van een vector te berekenen. Dit zegt iets ovde de hoek die twee vectoren met elkaar te maken hebben.

Voorbeeld:

(3 6) * (4 1) = (3 * 4) + (6 * 1) = 18

Transponeerde matrix
Dit is de gespiegelde versie van de normale matrix rond de diagonaal. Rijen en kolommen worden dus verwisseld.

Voorbeeld:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Inverse matrix

Een inverse matrix is de matrix die opgeteld is met de normale matrix uitkomt op:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Niet ieder matrix heeft een inverse matrix. Het heeft het alleen als de determinant ongelijk is aan 0.

Opdrachten

Inproduct (opdracht 6)

Les 1

Manhatten

1. $|-3--2| = 1$ > $1+9 = 10$
   $|4--5| = 9$

2. $|-2-3| = 5$ > $5+9 = 10$
   $|7--2| = 9$

Euclidisch

1. $|-3--2|^2 = 1$ > $\sqrt{81+1} = \sqrt{82} = 9{,}06$
   $|4--5|^2 = 81$

2. $|-2-3|^2 = 25$ > $\sqrt{25+81} = \sqrt{106} = 10{,}3$
   $|7--2|^2 = 81$

Vectoren

1. $\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\6\end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\5\end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\cdot 2\\3\cdot 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$
5. $2 \cdot \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$

Inproduct

6. $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} = 2\cdot 5 + 4\cdot 2 = 10 + 8 = 18$

Determinant, inverse en transponeed

Inverse

g. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 26 - 0 + 0 = 26$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Transponeer

$$= \begin{pmatrix} 26 & 0 & -13 \\ -12 & 6 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 26 & -12 & 4 \\ 0 & 6 & -2 \\ -13 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Deel door D

$$= \begin{pmatrix} 26 & -12 & 4 \\ 0 & 6 & -2 \\ -13 & 4 & 3 \end{pmatrix} / 26 = \begin{pmatrix} 1 & -12/26 & 4/26 \\ 0 & 6/26 & -2/26 \\ -13/26 & 4/26 & 3/26 \end{pmatrix}$$

$1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{-13}{26}$ $\quad 1 \cdot \frac{-12}{26} + 2 \cdot 6/26 + 0 \cdot 4/26$ $\quad 1 \cdot 4/26 + 2 \cdot \frac{-2}{26} + 0$

$1 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{-13}{26}$ $\quad 1 \cdot \frac{-12}{26} + 5 \cdot 6/26 + 2 \cdot 4/26$ $\quad 1 \cdot 4/26 + 5 \cdot {-2}/26 + 2 \cdot \frac{3}{26}$

$3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 6 \cdot \frac{-13}{26}$ $\quad 3 \cdot \frac{-12}{26} + 2 \cdot 6/26 + 6 \cdot 4/26$ $\quad 3 \cdot 4/26 + 2 \cdot {-2}/26 + 6 \cdot \frac{3}{26}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det A = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -4 - 3 + 8$$
$$= 1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{Transponeer}} \begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Delen door det A

$$= \begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} / 1 = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$2\cdot-2+3\cdot\overset{-1}{\cancel{5}}+4\cdot2$ $2\cdot5+3\cdot2+4\cdot-4$ $2\cdot-2+3\cdot0+4\cdot1$

$1\cdot-2+2\cdot-1+2\cdot2$ $1\cdot5+2\cdot2+2\cdot-4$ $1\cdot-2+2\cdot0+2\cdot1$

$0\cdot-2+2\cdot-1+1\cdot2$ $0\cdot5+2\cdot2+1\cdot-4$ $0\cdot-2+2\cdot0+1\cdot1$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 5 - 10 = 5$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 5 & -10 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Transponeer}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & -1 \\ -10 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Delen door D

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & -1 \\ -10 & 1 & 3 \end{pmatrix} / 5 = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & -2/5 \\ 1 & -2/5 & -1/5 \\ -2 & 1/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot -2 & 1 \cdot 1/5 + 1 \cdot -2/5 + 1 \cdot 1/5 & 1 \cdot -2/5 + 1 \cdot -1/5 + 1 \cdot 3/5 \\ 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot -2 & 1 \cdot 1/5 + 4 \cdot -2/5 + 2 \cdot 1/5 & 1 \cdot -2/5 + 4 \cdot -1/5 + 2 \cdot 3/5 \\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot -2 & 3 \cdot 1/5 + 2 \cdot -2/5 + 1 \cdot 1/5 & 3 \cdot -2/5 + 2 \cdot -1/5 + 1 \cdot 3/5 \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$