Analysis II Tutorat 04

Panajiotis Christotoforidis

16. Mai 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Abgeschlossenheit Funktionen in metrischen Räumen

Behauptung (1.1): $A \subset M'$ abgeschlossen $\implies \quad f^-1(A) \subseteq M$ abgeschlossen

Beweis.

Sei f stetig , $f : X \to Y$ und $A \subseteq Y$ abgeschlossen.
Dann ist A^c offen und daher:
$f^{-1}(A^c) f^{-1}(A)^c$ offen. Also $f^{-1}(A)$ abgeschlossen
Sei nun $U \subseteq Y$ offen. Dann ist U^c abgeschlossen, also:
$f^{-1}(U^c) = f^{-1}(U)^c$ abgeschlossen, d.h. $f^{-1}(U)$ offen

■

2 C^1 Raum

Auf Blatt 14: $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{nx^2}{1+n|x|}$
Dann $f_n \in C^1$ und $f_n \to f$ mit $f(x) = |x|$. Aber $f \notin C^1$

$\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$

3 Zusammenhängende Mengen

$f : X \to Y$ stetig und surjektiv, X zusammenhängend, $f : M \to M'$

Behauptung (3.1): Y ist zusammenhängend.

Beweis. Annahme: es existieren offene Mengen $A_1, A_2 \subset M', A_1, A_2 \neq \emptyset, A_1 \cap A_2 = \emptyset, A_1 \cup A_2 = M'$
$f^{-1}(A_1)$ und $f^{-1}(A_2)$ offen
Es gilt (da f surjektiv): $f^{-1}(A_1) \neq \emptyset$ und $f^{-1}(A_2) \neq \emptyset$
Angenommen $x \in f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2) \to f(x) \in A_1 \wedge f(x) \in A_2 \quad \lightning A_1 \cap A_2 = \emptyset$
$\Rightarrow f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2) = \emptyset$
Sei $m \in M$ beliebig. $A_1 \cup A_2 = m'$
$\Rightarrow f(m) \in A_1 \to m \in f^{-1}(A_1)$ (1)
$\Rightarrow f(m) \in A_2 \to m \in f^{-1}(A_2)$ (2)
$\xRightarrow{(1),(2} f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2) = M$
$\Rightarrow M$ nicht zusammenhängend
$A_1, A_2 \in M'$ mit den geforderten Eigenschaften existiert nicht
$\Rightarrow M'$ zusammenhängend ■

4 Kontraktionen

i)

$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{1}{2}|x - y|$

ii)

$M = [1, \infty)$ ist vollständig.
$f : M \to M$, also hat f keinen Fixpunkt.
dann $f(x) = \sqrt{1 + x^2} > \sqrt{x^2} = x$
kann also nicht kontrahierend sein.

5 Banach'scher Fixpunktsatz

a)

Sei f kontrahierend, $x \neq y, c < 1$ Lipschitzkonstante.:

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq c$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = |f'(y)| \leq c < 1$$

Ist andererseits $f \in C^1, |f'(x)| < 1$ für $x \in [a,b]$ so ist $\sup\limits_{[a,b]} |f'(x)| = \max\limits_{[a,b]} |f'(x)| < 1$
Sind $x \neq y$ beliebig, so ist nach MWS:

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq \sup_{[a,b]} |f'(x)| < 1$$

b)

$f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}(\sin(x) + 1)$

i)

$f([0, \frac{\pi}{2}] \leq [0, \frac{\pi}{2}] \quad \checkmark$

ii)

$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ und $f \in C^1$ Wähle $x_0 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$, $d(x_n, x) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x_0, x_1) \leq 2^{-n}$
Mit $d(x_n, x) \leq \frac{1}{10} \Rightarrow n = 4$
$x_4 \approx 0,887$