

Tutorat 02
Analysis I
Panajiotis Christoforidis

1 Aufgabe 1

2 Aufgabe 2

a)

$$M \subseteq \mathbb{R}, M \neq \emptyset$$

Jedes $\varepsilon > 0$ ist obere Schranke von M . (*)

Behauptung (2.1): $\sup(M) \leq 0$

$$\sup(M) \leq 0$$

Beweis. Angenommen $\sup(M) > 0$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} \sup(M) \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{\sup(M)}{2} &\Rightarrow \sup(M) > \varepsilon \not\leq \sup(M) \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow \sup(M) \leq 0 \end{aligned}$$

■

b)

Seien $M, N \subseteq \mathbb{R}, M, N \neq \emptyset$

$$M + N := \{x + y \mid x \in M, y \in N\}$$

Behauptung (2.2): $\sup(M + N)$ existiert und $\sup(M + N) = \sup(M) + \sup(N)$

Beweis. Für alle $x \in M, y \in N$ $x \leq \sup(M), y \leq \sup(N)$

$$\Rightarrow \forall x \in M \quad x + y \leq \sup(M) + \sup(N) \quad \Rightarrow \sup(M + N) \leq \sup(M) + \sup(N) \quad (1)$$

Sei nun $y \in N$ fest:

$$\Rightarrow \forall x \in M \quad x + y \leq \sup(M + N)$$

$$\Rightarrow \sup(M + N) - y \text{ obere Schranke von } M$$

$$\Rightarrow \sup(M) \leq \sup(M + N) - y \quad (*)$$

(*) gilt für alle $y \in N$

$$\Rightarrow \forall y \in N \quad y \leq \sup(M + N) - \sup(M)$$

$$\Rightarrow \sup(M + N) - \sup(M) \text{ ist obere Schranke von } N$$

$$\Rightarrow \sup(N) \leq \sup(M + N) - \sup(M)$$

$$\Rightarrow \sup(N) + \sup(M) \leq \sup(M + N) \quad (2)$$

$$\stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} \sup(M + N) = \sup(M) + \sup(N)$$



3 Aufgabe 3

Behauptung (3.1): $d \in \mathbb{N}, \zeta \in \mathbb{Q}, d = \zeta^2, d = n^2$ für ein $n \in \mathbb{N}$

Beweis. o.B.d.A. $\zeta > 0, m, n$ kleinste natürlichen Zahlen, sodass $m \cdot \zeta \in \mathbb{N}, \zeta \leq n$

a)

Behauptung (3.2): Es gibt solche m, n

Beweis.

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{r}{s} \quad r, s \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow s \cdot \zeta \in \mathbb{N} &\Rightarrow \{k \in \mathbb{N} \mid k \cdot \zeta \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset \\ &\stackrel{4.7}{\Rightarrow} m \text{ existiert}\end{aligned}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned}\zeta &= 1 \cdot \zeta \leq s \cdot \zeta = r \in \mathbb{N} \Rightarrow \{k \in \mathbb{N} \mid k \cdot \zeta \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset \\ &\stackrel{4.7}{\Rightarrow} n \text{ existiert}\end{aligned}$$



Setze $p := m(\zeta - n + 1)$

b)

Behauptung (3.3): $p \in \mathbb{N}$ (1), $p \leq m$ (2)

Beweis. (i):

$$p = \underbrace{m \cdot \zeta}_{\in \mathbb{N}} - \underbrace{m \cdot n}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{m}_{\in \mathbb{N}} \Rightarrow p \in \mathbb{N}$$

(ii):

$$\begin{aligned}p &\leq m \\ \zeta - n &\leq 0 \\ p &= m \cdot \left(\underbrace{\zeta - n + 1}_{\leq 1} \right) \leq m \cdot 1 = m\end{aligned}$$



Behauptung (3.4): $p \cdot \zeta \in \mathbb{N}$ *Beweis.*

$$p \cdot \zeta = \underbrace{n \cdot \zeta}_{\in \mathbb{N}} - \underbrace{n \cdot m \cdot \zeta}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{m \cdot \zeta}_{\in \mathbb{N}}$$

$$\Rightarrow p \cdot \zeta \in \mathbb{N}$$

■

d)**Behauptung (3.5):** $p = m, \zeta = n$ *Beweis.* m kleinste natürliche Zahl sodass $m \cdot \zeta \in \mathbb{N}$

$$\stackrel{c)}{\Rightarrow} m \leq p \stackrel{b)}{\Rightarrow} p = m$$

$$\begin{aligned} m &= m \cdot \zeta - m \cdot n + m \\ \Leftrightarrow m \cdot (1 + n) &= m \cdot \zeta + m \\ \Leftrightarrow m + n \cdot m &= m \cdot \zeta + m \\ \Leftrightarrow m \cdot n &= m \cdot \zeta \\ \Leftrightarrow \zeta &= n \end{aligned}$$

■

■

4 Präsenzaufgabe

4.1 a)

$$\begin{aligned} I &= \mathbb{N}, M = \mathbb{R} \\ S &= \{M_k | k \in \mathbb{N}\} \\ M_k : &= \{i \in \mathbb{Z} | i \geq -k\} \end{aligned}$$

Bestimme $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k$ **Behauptung (4.1):** $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k = \mathbb{Z}$

Beweis. Mengengleichheit beweisen:

" \supseteq ":

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{Z} &\stackrel{\text{arch.Prinzip}}{\Rightarrow} \exists k_0 \in \mathbb{N} |n| < k_0 \\ \Rightarrow n \in M_{k_0} &\Rightarrow n \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k \end{aligned}$$

" \subseteq ":

$$\begin{aligned} n \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k \\ \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N} : n \in M_{k_0} &\stackrel{M_{k_0} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}}{\Rightarrow} n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k = \mathbb{Z} \quad \blacksquare$$

b)

$$\begin{aligned} I &= \mathbb{N}, M = \mathbb{R} \\ S &= \{M_k | k \in \mathbb{N}\} \\ M_k : &= \{\frac{1}{i} \in \mathbb{Z} | i \geq k\} \cup \{0\} \end{aligned}$$

Behauptung (4.2): $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} M_k = \{0\}$

Beweis. " \supseteq ": $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \subseteq M_k$

" \subseteq ": Angenommen es existiert $x > 0 : x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : x \in M_k \\ \stackrel{\text{arch.Prinzip}}{\Rightarrow} \exists k_0 \in \mathbb{N} \frac{1}{k_0} < x \Rightarrow \forall y \in M_{k_0} y < x \\ \Rightarrow x \notin M_{k_0} \quad \nexists x \in M_{k_0} \end{aligned} \quad \blacksquare$$