Tutorat 02

Analysis I

Panajiotis Christoforidis

1 Aufgabe 1

2 Aufgabe 2

a)

$M \subseteq \mathbb{R}, M \neq \emptyset$

Jedes $\varepsilon > 0$ ist obere Schranke von M. (*)

Behauptung (2.1): $sup(M) \leq 0$ $\qquad sup(M) \leq 0$

Beweis. Angenommen $\sup(M) > 0$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \sup(M) \leq \varepsilon \, \forall \varepsilon > 0$$

$$\overset{\varepsilon = \frac{\sup(M)}{2}}{\Rightarrow} \sup(M) > \varepsilon \lightning \sup(M) \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sup(M) \leq 0$$

■

b)

Seien $M, N \subseteq \mathbb{R}, M, N \neq \emptyset$
$M + N := \{x + y | \, x \in M, y \in N\}$

Behauptung (2.2): $\sup(M+N)$ existiert und $\sup(M+N) = \sup(M) + \sup(N)$

Beweis. Für alle $x \in M$, $y \in N$ $x \leq \sup(M)$, $y \leq \sup(N)$

$$\Rightarrow \forall x \in M x + y \leq \sup(M) + \sup(N) \qquad \Rightarrow \sup(M+N) \leq \sup(M) + \sup(N) \quad (1)$$

Sei nun $y \in N$ fest:

$\Rightarrow \forall x \in M x + y \leq \sup(M+N)$

$\Rightarrow \sup(M+N) - y$ obere Schranke von M

$\Rightarrow \sup(M) \leq \sup(M+N) - y \quad (*)$

$(*)$ gilt für alle $y \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \forall y \in N y \leq \sup(M+N) - \sup(M)$

$\Rightarrow \sup(M+N) - \sup(M)$ ist obere Schranke von N

$\Rightarrow \sup(N) \leq \sup(M+N) - \sup(M)$

$\Rightarrow \sup(N) + \sup(M) \leq \sup(M+N) \quad (2)$

$\overset{(1),(2)}{\Rightarrow} \sup(M+N) = \sup(M) + \sup(N)$

∎

3 Aufgabe 3

Behauptung (3.1): $d \in \mathbb{N}, \zeta \in \mathbb{Q}, d = \zeta^2, d = n^2$ für ein $n \in \mathbb{N}$

Beweis. o.B.d.A. $\zeta > 0, m, n$ kleinste natürlichen Zahlen, sodass $m \cdot \zeta \in \mathbb{N}, \zeta \leq n$

a)

Behauptung (3.2): Es gibt solche m, n

Beweis.

$$\begin{gathered}\zeta = \frac{r}{s} \quad r, s \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow s \cdot \zeta \in \mathbb{N} \Rightarrow \{k \in \mathbb{N} | \, k \cdot \zeta \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset \\ \overset{4.7}{\Rightarrow} m \text{ existiert} \\ \text{Außerdem:} \\ \zeta = 1 \cdot \zeta \leq s \cdot \zeta = r \in \mathbb{N} \Rightarrow \{k \in \mathbb{N} | \, k \cdot \zeta \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset \\ \overset{4.7}{\Rightarrow} n \text{ existiert}\end{gathered}$$

∎

Setze $p := m\,(\zeta - n + 1)$

b)

Behauptung (3.3): $p \in \mathbb{N} \quad (1), \, p \leq m \quad (2)$

Beweis. (i):

$$p = \underbrace{m \cdot \zeta}_{\in \mathbb{N}} - \underbrace{m \cdot n}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{m}_{\in \mathbb{N}} \Rightarrow p \in \mathbb{N}$$

(ii):

$$\begin{gathered}p \leq m \\ \zeta - n \leq 0 \\ p = m \cdot \left(\underbrace{\zeta - n + 1}_{\leq 1} \right) \leq m \cdot 1 = m\end{gathered}$$

∎

Behauptung (3.4): $p \cdot \zeta \in \mathbb{N}$

Beweis.

$$p \cdot \zeta = \underbrace{n \cdot \zeta}_{\in \mathbb{N}} - \underbrace{\underbrace{n \cdot m}_{\in \mathbb{N}} \cdot \zeta}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{m \cdot \zeta}_{\in \mathbb{N}}$$
$$\Rightarrow p \cdot \zeta \in \mathbb{N}$$

∎

d)

Behauptung (3.5): $p = m, \zeta = n$

Beweis. m kleinste natürliche Zahl sodass $m \cdot \zeta \in \mathbb{N}$

$\stackrel{c)}{\Rightarrow} m \leq p \stackrel{b)}{\Rightarrow} p = m$

$$\begin{aligned}
& m && = m \cdot \zeta - m \cdot n + m \\
\Leftrightarrow\ & m \cdot (1 + n) && = m \cdot \zeta + m \\
\Leftrightarrow\ & m + n \cdot m && = m \cdot \zeta + m \\
\Leftrightarrow\ & m \cdot n && = m \cdot \zeta \\
\Leftrightarrow\ & \zeta && = n
\end{aligned}$$

∎

∎

4 Präsenzaufgabe

4.1 a)

$$\begin{aligned}
I & = \mathbb{N},\, M = \mathbb{R} \\
S & = \{M_k | k \in \mathbb{N}\} \\
M_k : & = \{i \in \mathbb{Z} |\, i \geq -k\}
\end{aligned}$$

Bestimme $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} M_k$

Behauptung (4.1): $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} M_k = \mathbb{Z}$

Beweis. Mengengleichheit beweisen:
"$\supseteq$":
$n \in \mathbb{Z} \overset{arch.Prinzip}{\Rightarrow} \exists k_0 \in \mathbb{N}\, |n| < k_0$
$\Rightarrow n \in M_{k_0} \Rightarrow \quad n \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k$
"$\subseteq$":
$n \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k$
$\Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N} : n \in M_{k_0} \overset{M_{k_0} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}}{\Rightarrow} n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k = \mathbb{Z}$ ■

b)

$$\begin{aligned} I \quad &= \mathbb{N},\ M = \mathbb{R} \\ S \quad &= \{M_k | k \in \mathbb{N}\} \\ M_k : \quad &= \{\tfrac{1}{i} \in \mathbb{Z} |\, i \geq k\} \cup \{0\} \end{aligned}$$

Behauptung (4.2): $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} M_k = \{0\}$

Beweis. "$\supseteq$": $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \subseteq M_k$
"$\subseteq$": Angenommen es existiert $x > 0 : x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k$
$\Rightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N} : x \in M_k$
$\overset{arch.Prinzip}{\Rightarrow} \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \frac{1}{k_0} < x \Rightarrow \forall y \in M_{k_0} y < x$
$\Rightarrow \quad x \notin M_{k_0} \quad \lightning\, x \in M_{k_0}$

■