Tutorat 03

Analysis I

Panajiotis Christoforidis

1 Aufgabe

a

$M := \{x \in \mathbb{R} | x > 0, x^2 < 2\}$

Behauptung (1.1): M hat Supremum in $\mathbb{R}$

Beweis. Folgendes gilt:

- Es ist $0 < 1 \leq 1 \cdot 1 \leq 1^2 < 2 \Rightarrow 1 \in M$
- betrachte $x \in \mathbb{R}$ mit $x \leq 10 \Rightarrow x^2 \leq x \cdot 10 \leq 10 \cdot 10 = 100 > 2$
  Also $M \subset (-\infty, 100)$ nach oben beschränkt.

$\Rightarrow M$ besitzt ein Supremum in $\mathbb{R}$. ■

b

Behauptung (1.2): Es gilt $s^2 = 2$ $\qquad s^2 = 2$

Beweis. Aus dem Anordnungsaxiom folgt, dass genau einer der Folgenden Fälle gelten muss:

(1) $s^2 < 2$

(2) $s^2 > 2$

(3) $s^2 = 2$

Wenn (1), (2) falsch gilt also (3)
Angenommen $s^2 < 2$:

$\epsilon := \dfrac{s^2 - 2}{4s} > 0$ da $s = sup(M)$ex. $x \in M$

$$
\begin{aligned}
x^2 &> (s - \epsilon)^2 \\
&= s^2 - 2 \cdot \epsilon \cdot s + \epsilon^2 \\
&\overset{\epsilon > 0}{>} s^2 - 2 \cdot \epsilon \cdot s \\
&= s^2 - 2 \cdot s \cdot \frac{s^2 - 2}{4 \cdot s} = \frac{2 \cdot s^2 - s^2 + 2}{2} = \frac{s^2}{s} + 1 > 1 + 1 = 2
\end{aligned}
$$

$\lightning$ zu $x \in M \Rightarrow x^2 < 2$

Angeonommen $s^2 > 2$:

$$\begin{aligned}
\delta := \frac{2-s^2}{2s+2} &> 0 \\
(s+\delta)^2 &= s^2 + 2\cdot\delta\cdot s + \delta^2 \\
&= s^2 + (2\cdot s + \delta)\cdot\delta \\
&\overset{\delta<2}{<} s^2 + (2s+2)\cdot\delta \\
&= s^2 + (2s+2)\cdot\frac{2-s^2}{2s+2} < 2
\end{aligned}$$

$\lightning$ zu s ist obere Schranke, da $s+\delta \in M$

$\blacksquare$

c

$N := \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x, x^2 < 2\}$

Behauptung (1.3): N hat obere Schranke in $\mathbb{Q}$ aber kein Supremum in $\mathbb{Q}$

Beweis. obere Schranke: analog zu (1.1).
Angenommen sup N existiert in $\mathbb{Q}$
wie in (1.2) folgt $(supN)^2 = 2$
$\big($*Hinweis:* Habe $n \in \mathbb{N}$ und ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $n = q^2$. Dann ist q schon aus $\mathbb{N}\big)$

Da $1^2 = 1, 2^2 = 4$ kann das Supremum, das nach dem Hinweis ebenso aus $\mathbb{N}$sein muss, nicht existieren. $\blacksquare$

d

Behauptung (1.4): $x^2 = 2$ hat in $\mathbb{R}^+$genau eine Lösung und diese ist in $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

Beweis. Nach (1.1) gilt, dass die Gleichung $x^2 = 2$ eine Lösung in $\mathbb{R}^+$hat, da nach (1.1) $1 < \sup(M) < 10$ gilt.
Sei $y \in \mathbb{R}^+$ eine weitere Lösung dieser Gleichung.

Dann:
$x^2 - y^2 = 0$
$\Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 0$
$\Leftrightarrow x = y \vee x = -y$

Im ersten Fall: klar
Im zweiten Fall: x und y können nicht beide in $\mathbb{R}^+$liegen.

(i) $\forall x \in N x \leq s$ da $N \subseteq M$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in N x > s - \varepsilon$, wegen des Vollständigkeitsaxioms.

$\overset{(i)}{\Rightarrow} \sup(N) \leq \sup(N)$ (1)
$\overset{(ii)}{\Rightarrow} \sup(M) \leq \sup(M)$ (2)
$\overset{(1),(2)}{\Rightarrow} \sup(N) = \sup(M) \in \mathbb{R}^+$
nach (1.3): $\sup(M) \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sup(N) \notin \mathbb{Q}$
$\Rightarrow \sup(M) \notin \mathbb{Q} \overset{\text{in } \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} \sup(M) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ■

2 Aufgabe

Behauptung (2.1): $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right)^2 \leq \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2\right)$

Beweis.

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right) \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Induktionsanfang:

$$\begin{aligned} n = 1 : \left(\sum_{k=1}^{1} a_k \cdot b_k\right)^2 &= (a_1 \cdot b_1)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{1} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{1} b_k^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 2 : \left(\sum_{k=1}^{2} a_k \cdot b_k\right)^2 &= a_1^2 \cdot b_1^2 + 2 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot a_2 \cdot b_2 + a_2^2 \cdot b_2^2 \\ &\overset{H(2)}{\leq} a_1^2 \cdot b_1^2 + a_1^2 \cdot b_2^2 + a_2^2 \cdot b_1^2 + a_2^2 \cdot b_2^2 \\ &= \sum_{k=1}^{2} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{2} b_k^2 \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung:

Für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

Induktionsschritt:

$$n \mapsto n+1$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k \cdot b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k + a_{n+1} \cdot b_{n+1} \overset{IV}{\leq} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{:=\alpha}\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{:=\beta} + a_{n+1} \cdot b_{n+1}$$

$$= \alpha\beta + a_{n+1} \cdot b_{n+1} \overset{H(2)}{\leq} \left(\alpha^2 + a_{n+1}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\beta^2 + b_{n+1}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

■

3 Aufgabe

Sei $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Behauptung (3.1): $\left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n}$

Beweis. Induktionsanfang:

$$n = 1 : \left(\frac{1}{b}\right)^1 = \frac{1}{b} = \frac{1}{b^1} \qquad \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung:

$$\text{Es gelte } \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n} \text{ für ein beliebiges aber festes } n \in \mathbb{N}.$$

Induktionsschritt:
$n \mapsto n+1$

(1) rekursive Definition der Potenz

(2) Assoziativität der Multiplikation

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{b}\right)^{n+1} &\overset{(1)}{=} \left(\frac{1}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{b}\right) \\
&\overset{IV}{=} \frac{1}{b^n} \cdot \left(\frac{1}{b}\right) \\
&\overset{(2)}{=} \frac{1}{b^n} \cdot \frac{1}{b} \\
&\overset{(1)}{=} \frac{1}{b^{n+1}}
\end{aligned}$$

■