Tutorat 13

Analysis I

Panajiotis Christoforidis

1 Hölder'sche Ungleichung

$a < b \in \mathbb{R}, \quad f, g \in R([a,b]),\ p, q > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

a)

Behauptung (1.1): $|f|^p \in R([a,b])$

Beweis. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von gleichmäßig gegen f konvergenten Treppenfunkionen.
Sei $N \in \mathbb{N}$, sodass $N > p$.

$$\text{Zu } \mu := \frac{p}{N} \text{ betrachte } |f|^p = (|f|^\mu)^N$$

$$\text{Es ist } \mu < 1 \Longrightarrow \forall x \in [a,b] : ||f(x)|^\mu - |f_n(x)|^\mu \leq ||f(x)| - |f_n(x)||^\mu|$$
$$\Longrightarrow |||f|^\mu - |f_n|^\mu|| \leq |||f| - |f_n|||^\mu \xrightarrow{n\to\infty} 0^\mu = 0$$

.

$$|||f|^\mu - |f_n|^\mu|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Also konvergiert $(|f_n|^\mu)_n$ gleichmäßig gegen $|f|^\mu$. Da $N \in \mathbb{N}$ endlich ist, ist auch $(|f_n|^\mu)_n^N = |f|^p \in R([a,b])$ nach Behauptung (2.5) Blatt 12 (2c). ∎

b)

Behauptung (1.2): $\int_a^b |f(x)\cdot g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$

Beweis. o.B.d.A. $\int_a^b |f(x)\cdot g(x)|dx \neq 0$.
Sei $c(x) := \frac{|f(x)|^p}{\int_a^b f(t)dt}, \quad d(x) := \frac{|g(x)|^p}{\int_a^b g(t)dt}$

$$c(x)^{\frac{1}{p}} \cdot d(x)^{\frac{1}{q}} = \frac{|f(x)|\cdot|g(x)|}{\left(\int_a^b f(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b g(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{c(x)}{p} + \frac{d(x)}{q}$$

$$\frac{\int_a^b |f(x)\cdot g(x)|dx}{\left(\int_a^b f(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b g(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{\cancel{\int_a^b |f(x)|^p dx}}{\frac{\cancel{\int_a^b |f(t)|^p dt}}{p}} + \frac{\cancel{\int_a^b |g(x)|^q dx}}{\frac{\cancel{\int_a^b |g(t)|^q dt}}{q}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

∎

2 Substitutionsregel

Satz (2.1): $\varphi : [a,b] \to [c,d] : \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int\limits_{a}^{b} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) (1)$

$$\iff \int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) (2)$$

$\varphi(x) = 1 + x^2$, $\varphi'(x) = 2 \cdot x$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{2}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{\overbrace{2 \cdot x}^{=\varphi'(x)}}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\underbrace{1+x^2}_{=\varphi(x)}}}}_{=f(x)} dx$$

$$= \int_{1+0^2}^{1+1^2} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} dx \overset{(1)}{=} \left[\sqrt{x}\right]_1^2 = \sqrt{2} - 1$$

Zu (1) : $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

3 Präsenzaufgabe

$f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ stetig und $-f(-x) = f(x)$ für alle $x \in [-1,1]$

Behauptung (3.1): $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = 0.$

Beweis.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$$

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{-1} -f(-x)dx \overset{(2)}{=} -\int_{0}^{1} f(x)dx$$

$$\implies \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} f(x)dx - \int_{0}^{1} f(x)dx = 0$$

Zu (2): Wende Subtitution mit folgenden Funktionen an: $f(x) = x$, $\varphi(x) = -x$, $\varphi'(x) = -1$ ∎