Tutorat 04

Analysis I

Panajiotis Christoforidis

1 Aufgabe

Seien M_1, M_2, M_3 Mengen und seien $f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$ Funktionen.

a

Behauptung (1.1): $g \circ f$ injektiv und f surjektiv $\Rightarrow g$ injektiv

Beweis. Angenommen g nicht injektiv. Also:

$$\begin{aligned} &\exists m_{21}, m_{22} \in M_2 : g(m_{21}) = g(m_{22}) \wedge m_{21} \neq m_{22} \\ &\text{Da } f \text{ surjektiv } \exists m_{11}, m_{12} \in M_1 : f(m_{11}) = m_{21} \wedge f(m_{12}) = m_{22} \\ &\text{Wenn } m_{11} \neq m_{12} \to f \text{ keine Funktion} \\ &(g \circ f)(m_{11}) = g(f(m_{11})) = g(m_{21}) = g(m_{22}) = g(f(m_{12})) = (f \circ g)(m_{12}) \lightning f \text{ injektiv} \end{aligned}$$

■

b

Behauptung (1.2): $g \circ f$ surjektiv und g injektiv $\Rightarrow f$ surjektiv

Beweis. Angenommen f ist nicht surjektiv.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists m_2 \in M_2, \nexists m_1 \in M_1 : f(m_1) = m_2 \\ &\text{Sei } g(m_2) = m_3 \\ &\overset{g \circ f \text{ surj.}}{\Rightarrow} \exists m_1 \in M_1 : g(f(m_1)) = m_3 \\ &\Rightarrow \exists m_{22} \in M_2 : f(m_{11}) = m_{22}, \quad m_{22} \neq m_{21} \\ &\Rightarrow g(m_{22}) = m_3 = g(m_{21}) \quad \lightning \quad g \text{ injektiv} \end{aligned}$$

■

c

Behauptung (1.3): f injektiv $\Rightarrow f^{-1} := \{(f(x), x) | x \in M_1\}$ $f^{-1} :$ Bild$(f) \to M_1$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
&`\{f(x)|\, x \in M_1\} =: \mathrm{Bild}(f) \\
&\{x|\, x \in M_1\} =: M_1 \\
\Rightarrow\ & (f(x), x), (f(x'), x') \in f^{-1} \\
&\Rightarrow \text{gilt } f(x) = f(x') \Rightarrow x = x' \\
&\Rightarrow f^{-1} \text{ ist eine Funktion : } f^{-1} : \mathrm{Bild}(f) \to M_1
\end{aligned}
$$

■

2 Aufgabe 2

a)

Behauptung (2.1): $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N}_0 \cup \{0\}$ ist abzählbar

Beweis. Suche Surjektion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
&f(n) := n - 1 \\
&\text{Sei } m \in \mathbb{N}_0 \\
\text{Dann } & f(m+1) = (m+1) - 1 = \underline{m}
\end{aligned}
$$

■

b)

Behauptung (2.2): Die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar

Beweis. Sei A_k die Menge der k-elementigen Teilmengen von $\mathbb{N}$ für $k \in \mathbb{N}$
Zeige zuerst A_k abzählbar für alle $k \in \mathbb{N}$

$\underline{IA}$: $k = 0 \quad A_0 = \emptyset \quad \checkmark$

$k = 1 \quad A_1 = \{\{n\} | \, n \in \mathbb{N}\ \}$

$\underline{IV}$: Sei A_k abzählbar für ein $k \in \mathbb{N}_0$

$\underline{IS}$: $k \mapsto k+1$

$B_{n,k} = \{a_k \cup \{n\} | \, n \in \mathbb{N}, \, a_k \in A_k\}$

F.a.$a \in A_{k+1}$ existiert ein $B_{n,k}$ sodass $a \in B_{n,k}$ also ist

$$A_{k+1} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{n,k}$$

$B_{n,k}$ ist nach Konstruktion abzählbar

$$\overset{Hinweis}{\Rightarrow} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{n,k} \text{ abzählbar } \Rightarrow A_{k+1} \text{ abzählbar}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A_k \text{ abzählbar}$$

■

3 Aufgabe

a)

Behauptung (3.1): $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, \infty) = \emptyset$

Beweis. Angenommen $\exists s \quad s \in \mathbb{R} \wedge s \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, \infty)$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$

Für $n_0 := \lceil s \rceil$ gilt $s \notin [n_0, \infty) \quad ↯ \quad s \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, \infty)$

■

b)

Behauptung (3.2): $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, \frac{1}{n}) = \emptyset$

Beweis. Angenommen $\exists s \quad s \in \mathbb{R} \wedge s \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, \frac{1}{n})$

$$\overset{4.3}{\Rightarrow} \exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < s$$

$$\Rightarrow s \notin \left(0, \frac{1}{n_0}\right) \quad ↯ \quad s \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, \frac{1}{n})$$

■

Das Intervallschachtelungsprinzip setzt beschränkte und abgeschlossene Mengen voraus. Die Menge aus (3.1) ist weder beschränkt noch abgeschlossen. Die Menge aus (3.2) ist nicht abgeschlossen. Insgesamt stellt dies also keinen Widerspruch zum Intervallschatelungsprinzip dar.

4 Präsenzaufgabe

$$\begin{aligned} A \subseteq \mathbb{R} \text{ offen } \Leftrightarrow \; & \forall a \in A \, \exists \varepsilon > 0 \\ & (a - \varepsilon,\, a + \varepsilon) \subseteq A \end{aligned}$$

Behauptung (4.1): Jede offene Menge in $\mathbb{R}$ist eine Vereinigung abzählbar vieler Intervalle.

Beweis.

$$\widetilde{\mathcal{U}} := \bigcup_{\substack{x \in \mathcal{U} \cap \mathbb{Q} \\ \varepsilon > 0,\, \varepsilon \in \mathbb{Q} \\ (x-\varepsilon,\, x+\varepsilon) \subseteq \mathcal{U}}} (x - \varepsilon,\, x + \varepsilon)$$

$\widetilde{\mathcal{U}}$ ist abzählbar, da abzählbar viele Intervalle um abzählbar viele Punkte vereinigt werden. Noch zu zeigen: $\mathcal{U} = \widetilde{\mathcal{U}}$

" $\subseteq$ " : klar nach Konstruktion von $\widetilde{\mathcal{U}}$
" $\supseteq$ " :Sei $x \in \mathcal{U}$
Da $\mathcal{U}$ offen $\exists \varepsilon > 0 : (x - \varepsilon,\, x + \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}$
Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ex. ein $\widetilde{x} \in (x - \frac{\varepsilon}{2},\, x + \frac{\varepsilon}{2}) \cap \mathbb{Q}$
Es ex. ein $\widetilde{\varepsilon} \in (|x - \widetilde{x}|,\, \varepsilon) \cap \mathbb{Q}$ mit
$(\widetilde{x} - \widetilde{\varepsilon},\, \widetilde{x} + \widetilde{\varepsilon}) \subseteq (x - \varepsilon,\, x + \varepsilon) \;\Rightarrow x \in (\widetilde{x} - \widetilde{\varepsilon},\, \widetilde{x} + \widetilde{\varepsilon})$

Insbesondere $x \in \widetilde{\mathcal{U}}$ ■