

**Tutorat 11**  
 Analysis I  
*Panajiotis Christoforidis*

## 1 Ableitungen, Limiten

**a): Bestimme die Ableitung von  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$**

**1)**

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^x)^x = e^{x \cdot \ln x^x} = e^{x^2 \cdot \ln x} \\ \frac{d}{dx} f(x) &\stackrel{\text{KR, PR}}{=} e^{x^2 \cdot \ln(x)} \cdot \left( 2 \cdot x \cdot \ln(x) + \frac{x^2}{x} \right) \\ &= (x^x)^x \cdot (2 \cdot x \cdot \ln(x) + x) \end{aligned}$$

**2)**

$$f(x) = \log(\log(1+x))$$

$g$  differenzierbar :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \log(g(x)) &= \frac{g'(x)}{g(x)} \\ \implies \frac{d}{dx} f(x) &= \frac{\frac{d}{dx}(\log(1+x))}{\log(1+x)} = \frac{1}{(1+x) \cdot \log(1+x)} \end{aligned}$$

**b): Berechne die Limiten**

**1)**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{1 - \cos(1 \cdot x)}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{1 - \cos(x)}_{\rightarrow 0}} \stackrel{\text{L' H\^opital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{a \cdot \sin(a \cdot x)}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{\sin(x)}_{\rightarrow 0}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 \cdot \overbrace{\cos(a \cdot x)}^{\rightarrow 1}}{\underbrace{\cos(x)}_{\rightarrow 1}} = a^2$$

Dies darf angewandt werden, da:

$$\begin{aligned} \forall x \neq 0, x \rightarrow 0 : 1 - \cos(a \cdot x) &\neq 0 \\ \forall x \neq 0, x \rightarrow 0 : \sin(a \cdot x) &\neq 0 \end{aligned}$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+2 \cdot x)}{3 \cdot x} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{1+2 \cdot x}\right) \cdot 2}{3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3+6 \cdot x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1+2 \cdot x)^{\frac{1}{3 \cdot x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{3 \cdot x} \cdot \ln(1+2 \cdot x)} \stackrel{\text{da } e \text{ monoton, stetig}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{3 \cdot x} \cdot \ln(1+2 \cdot x)} = e^0 = 1$$

## 2 Mittelwertsatz

a)

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $f$  in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  diff.bar

**Behauptung (2.1):**  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$  existiert  $\implies f$  auf ganz  $\mathbb{R}$  diff.bar und  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$

*Beweis.* Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit  $x_n \rightarrow 0$ .

Betrachte den Differenzenquotienten:  $\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0}$

$$x_n > 0 \stackrel{\text{Mittelwertsatz}}{\implies} \exists c_n \in (0, x_n) : f'(c_n) = \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0}$$

$$x_n < 0 \stackrel{\text{Mittelwertsatz}}{\implies} \exists c_n \in (x_n, 0) : f'(c_n) = \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0}$$

$$\implies \exists c_n : 0 < |c_n| < |x_n| \text{ mit:}$$

$$f'(c_n) = \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0}$$

$$\text{Da } x_n \rightarrow 0 \implies c_n \rightarrow 0$$

$$\stackrel{\text{Annahme}}{\implies} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \text{ existiert, also auch } \lim_{n \rightarrow \infty} f'(c_n),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0}$$

$$\stackrel{\text{Annahme}}{\implies} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ existiert}$$

$$\implies f \text{ ist in } 0 \text{ diff.bar, } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \quad \blacksquare$$

### 2.0.1 b)

Sei  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , stetig, diff.bar und  $g$  gerade. ( $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : g(x) = g(-x)$ )

**Behauptung (2.2):**  $g'(0) = 0$

*Beweis.*

$$\forall x \in \mathbb{R} g(x) = g(-x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} g(-x)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -g'(x)$$

$$\Leftrightarrow g'(0) = -g'(0)$$

$$\Leftrightarrow g'(0) = 0 \quad \blacksquare$$

### 3 Satz von Taylor

**Behauptung (3.1):**  $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot x^k$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
 x=0, \quad \log(1+0) &= 0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot 0^k. \\
 f(x) &= \log(1+x), \quad f: (-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\
 f^{(1)}(x) &= f'(x) = \frac{1}{1+x} \\
 f^{(2)}(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2} \\
 &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
 f^{(k)}(x) &= \frac{(-1)^{k+1} \cdot (k-1)!}{(1+x)^k} \\
 f^{(1)}(0) &= 1 \\
 f^{(2)}(0) &= -1 \\
 &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
 f^{(k)}(0) &= (-1)^{k+1} \cdot (k-1)!
 \end{aligned}$$

Führe Taylorentwicklung von  $f$  im Punkt  $a=0$  durch: ( $b=x$ )

$$\begin{aligned}
 \forall n \in \mathbb{N} \exists c_n \in (0, x) : f(x) &= \overbrace{f(0)}^{=0} + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(c_n) \cdot x^{n+1}}_{:=R_{n+1}(x)} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} \cdot (k-1)!}{k!} \cdot x^k + R_{n+1}(x)
 \end{aligned}$$

Noch zu zeigen:  $R_n \rightarrow 0$  mit  $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 |R_n(x)| &= \left| \frac{1}{(n+1)!} \cdot (-1)^{n+1} + 1 \cdot \frac{n!}{(1+c_n)^{n+1}} \right| \\
 &= \left| \frac{\overset{1}{n!}}{(n+1)!} \cdot (-1)^{n+1} + 1 \cdot \frac{\overset{\leq 1, \text{ da } 1+c_n \geq x, \forall x \in (0,1)}{1}}{(1+c_n)^{n+1}} \right| \\
 &\leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
 \end{aligned}$$

■

## 4 Präsenzaufgabe

(a)  $\nRightarrow$  (b)

$$f(x) = -|x|$$

in  $c = 0$  ein relatives Extremum

in  $c = 0$  nicht diff.bar

$$f'(x) = -1 \quad \forall x > 0$$

$$f'(x) = 1 \quad \forall x < 0$$

$$\lim_{x \nearrow 0} f'(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x \searrow 0} f'(x)$$

(b)  $\nRightarrow$  (a)

$$f(x) = x^3$$

in  $c = 0$ ,  $f$  in  $c$  diff.bar,  $f'(c) = 0$ , aber in  $c$  kein relatives Extremum