Tutorat 11

Analysis I

Panajiotis Christoforidis

1 Ableitungen, Limiten

a): Bestimme die Ableitung von $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

1)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x^x)^x = e^{x\cdot\ln x^x} = e^{x^2\cdot\ln x} \\
\frac{d}{dx}f(x) &\overset{\text{KR, PR}}{=} e^{x^2\cdot\ln(x)} \cdot \left(2\cdot x\cdot\ln(x) + \frac{x^2}{x}\right) \\
&= (x^x)^x \cdot (2\cdot x\cdot\ln(x) + x)
\end{aligned}
$$

2)

$$f(x) = \log(\log(1+x))$$

g differenzierbar :

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\log(g(x)) &= \frac{g'(x)}{g(x)} \\
\Longrightarrow \frac{d}{dx}f(x) &= \frac{\frac{d}{dx}(\log(1+x))}{log(1+x)} = \frac{1}{(1+x)\cdot\log(1+x)}
\end{aligned}
$$

b): Berechne die Limiten

1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{1-\cos(1\cdot x)}^{\to 0}}{\underbrace{1-\cos(x)}_{\to 0}} \overset{\text{L' Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{a\cdot\sin(a\cdot x)}^{\to 0}}{\underbrace{\sin(x)}_{\to 0}} = \lim_{x\to 0}\frac{a^2\cdot\overbrace{\cos(a\cdot x)}^{\to 1}}{\underbrace{\cos(x)}_{\to 1}} = a^2$$

Dies darf angewandt werden, da:

$$
\begin{aligned}
&\forall x \neq 0, x\to 0 : 1-\cos(a\cdot x) \neq 0 \\
&\forall x \neq 0, x\to 0 : \sin(a\cdot x) \neq 0
\end{aligned}
$$

2)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+2\cdot x)}{3\cdot x}\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{1+2\cdot x}\right)\cdot 2}{3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{3+6\cdot x}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+2\cdot x)^{\frac{1}{3\cdot x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{3\cdot x}\cdot\ln(1+2\cdot x)}\overset{\text{da } e \text{ monoton, stetig}}{=}e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{3\cdot x}\cdot\ln(1+2\cdot x)}=e^0=1$$

2 Mittelwertsatz

a)

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig, f in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ diff.bar

Behauptung (2.1): $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ existiert $\Longrightarrow f$ auf ganz $\mathbb{R}$ diff.bar und $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $x_n\to 0$.
Betrachte den Differenzenquotienten: $\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0}$
$x_n>0\xRightarrow{\text{Mittelwertsatz}}\exists c_n\in(0,x_n):f'(c_n)=\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0}$
$x_n<0\xRightarrow{\text{Mittelwertsatz}}\exists c_n\in(x_n,0):f'(c_n)=\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0}$
$\Longrightarrow\exists c_n:0<|c_n|<|x_n|$ mit:
$f'(c_n)=\frac{f(x_n)f(0)}{x_n-0}$
Da $x_n\to 0\quad\Longrightarrow\quad c_n\to 0$
$\xRightarrow[\text{Satz 2.2, Kapitel 4}]{\text{Annahme}}\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ existiert, also auch $\lim\limits_{n\to\infty}f'(c_n)$,
$\lim\limits_{n\to\infty}f'(c_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0}$
$\xRightarrow[\text{Satz 2.2, Kapitel 4}]{\text{Annahme}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existiert
$\Longrightarrow f$ ist in 0 diff.bar, $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ ■

2.0.1 b)

Sei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, stetig, diff.bar ung g gerade. $(:\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}:g(x)=g(-x))$

Behauptung (2.2): $g'(0)=0$

Beweis.

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}g(x)&=g(-x)\\ \Leftrightarrow\frac{d}{dx}g(x)&=\frac{d}{dx}g(-x)\\ \Leftrightarrow\lim_{x\to 0}g'(x)&=\lim_{x\to 0}-g'(x)\\ \Leftrightarrow g'(0)&=-g'(0)\\ \Leftrightarrow g'(0)&=0\end{aligned}$$

■

3 Satz von Taylor

Behauptung (3.1): $log(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot x^k$

Beweis.

$$x = 0, \quad log(1+0) = 0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot 0^k.$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= log(1+x), \quad f : (-1,1] \to \mathbb{R} \\
f^{(1)}(x) = f'(x) &= \frac{1}{1+x} \\
f^{(2)}(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2} \\
\vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\
f^{(k)}(x) &= \frac{(-1)^{k+1} \cdot (k-1)!}{(1+x)^k} \\
f^{(1)}(0) &= 1 \\
f^{(2)}(0) &= -1 \\
\vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\
f^{(k)}(x) &= (-1)^{k+1} \cdot k - 1!
\end{aligned}$$

Führe Taylorentwicklung von f im Punkt $a = 0$ durch: $(b = x)$

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists c_n \in (0,x) : f(x) = \overbrace{f(0)}^{=0} + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(c_n) \cdot x^{n+1}}_{:=R_{n+1}(x)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} \cdot \cancel{(k-1)!}}{k\cancel{!}} \cdot x^k + R_{n+1}(x)$$

Noch zu zeigen: $R_n \to 0$ mit $n \to \infty$

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &= \left| \frac{1}{(n+1)!} \cdot (-1)^{n+1} + 1 \cdot \frac{n!}{(1+c_n)^{n+1}} \right| \\
&= \left| \frac{\cancel{n!}^{\,1}}{(n+1)\cancel{!}} \cdot (-1)^{n+1} + 1 \cdot \overbrace{\frac{1}{(1+c_n)^{n+1}}}^{\leq 1, \text{ da } 1+c_n \geq x, \forall x \in (0,1)} \right| \\
&\leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 0.
\end{aligned}$$

■

4 Präsenzaufgabe

$(a) \not\Rightarrow (b)$

$$
\begin{aligned}
&f(x) = -|x| \\
&\text{in } c = 0 \text{ ein relatives Extremum} \\
&\text{in } c = 0 \text{ nicht diff.bar} \\
&f'(x) = -1 \quad \forall x > 0 \\
&f'(x) = 1 \quad \forall x < 0 \\
\lim_{x \nearrow 0} &f'(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x \swarrow 0}
\end{aligned}
$$

$(b) \not\Rightarrow (a)$

$$
\begin{aligned}
&f(x) = x^3 \\
&\text{in } c = 0, f \text{ in } c \text{ diff.bar}, f'(c) = 0, \text{ aber in c kein relatives Extremum}
\end{aligned}
$$