Tutorat 05

Analysis I

Panajiotis Christoforidis

Aufgabe 1

Man prüfe die Injektivität und Surjektivität der folgenden Funktionen und bestimme ggf. die Umkehrfunktion

a)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

Behauptung (1.1): f weder surjektiv noch injektiv

Beweis. nicht injektiv: $-1, 1 \in \mathbb{R} - 1 \neq 1$
aber $f(1) = f(-1) \quad ↯ \quad f$ injektiv
nicht surjektiv:
$\forall x \in \mathbb{R} x^2 \geq 0$
$\Rightarrow \text{Bild}(f) \subseteq \mathbb{R}^{\geq 0} \Rightarrow \emptyset \neq \mathbb{R} \backslash \text{Bild}(f) \subseteq \mathbb{R}^{<0}$
Also kann f gar nicht surjektiv sein.
Da f weder surjektiv, injektiv $\Rightarrow$ ex. keine Umkehrabbildung f^{-1} ∎

b)

$$h : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x}{1 - |x|}$$

Behauptung (1.2): h bijektiv

Beweis. h injektiv:
Überlege zuerst:
$x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$
$x < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$
Dann können wir folgender Fälle betrachten:
1.Fall: Seien $x, x' \geq 0$
$f(x) = f(x')$
$\Leftrightarrow \frac{x}{1-|x|} = \frac{x'}{1-|x'|}$
$\Leftrightarrow x \cdot (1 - x') = x' \cdot (1 - x)$
$\Leftrightarrow x - x' \cdot x = x' - x \cdot x'$
$\Leftrightarrow x = x'$ 2. Fall $x < 0$ analog 3. Fall $x' < 0 \leq x$
insbesondere $x \neq x'$ nach der Vorüberlegung folgt $h(x) \neq h(x')$
h surjektiv:
1. Fall Sei $a \geq 0$, definiere $x := \frac{a}{1+a}$

Dann ist $h(x) = h(\frac{a}{1+a}) = \frac{\frac{a}{1+x}}{1-\frac{a}{1+a}} = \frac{\frac{a}{1+a}}{\frac{1+a-a}{a+1}} = a$
und $-1 < 0 \leq x < 1$ da $a < 1 + a \Leftrightarrow \frac{a}{1+x} < 1$
2. Fall $a < 0$
Setze $x := \frac{a}{1-a}$
$h(x) = h(\frac{a}{1-a}) = \frac{\frac{a}{1-a}}{1+\frac{a}{1-a}} = \frac{\frac{a}{1-a}}{\frac{1-a+a}{1-a}} = a$
Benutze: $h^{-1} : \mathbb{R} \to (-1, 1), x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$
Da h bijektiv genügt es
$h \circ h^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ oder
$h \circ h^{-1} = \mathrm{id}_{(-1,1)}$ zu prüfen.
Diese wurden bereits mit der Surjektivität gezeigt. ∎

Aufgabe 2

Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq b_n \leq c_n \quad (3)$
$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n =: g$

Behauptung (2.3): $\lim_{n\to\infty} b_n = g$ existiert.

Beweis. Folgendes gilt:
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g \Leftrightarrow \forall \varepsilon < 0\, \exists n_a \in \mathbb{N}\, \forall n > n_a\ |a_n - g| < \varepsilon$
$\Rightarrow \forall n > n_a \quad -\varepsilon < a_n - g < \varepsilon \quad (1)$
$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = g \Rightarrow \forall n > n_c \quad -\varepsilon < c_n - g < \varepsilon \quad (2)$
$\overset{(1),(2),(3)}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \forall n > \underbrace{\max\{n_a, n_c\}}_{=:n_b} \quad -\varepsilon < a_n - g \leq b_n - g \leq c_n - g < \varepsilon$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n > n_b \quad -\varepsilon < b_n - g < \varepsilon \Rightarrow |b_n - g| < \varepsilon$
$\Rightarrow (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit Grenzwert g ∎

Aufgabe 4