Tutorat 12

Analysis I

Panajiotis Christoforidis

1 Gleichmäßige, punktweise Konvergenz

i)

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x = 1 \\ x^n & x \in [0,1) \end{cases}$$

Behauptung (1.1): $f_n \xrightarrow[\text{punktweise}]{n\to\infty} 0$ (1), aber nicht gleichmäßig (2)

Beweis. (1):

$$x \in [0,1) : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0.$$
$$x = 1 : \lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

(2), da $x \mapsto x^n$ stetig, streng monoton steigend $\lim\limits_{x\to 1} = 1$:

$$||f_n - 0|| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - 0| = \sup_{x\in[0,1]} x^n = 1 \neq 0.$$

$\Longrightarrow$Also konvergiert f_n nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion

∎

ii)

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{1+n\cdot x} & x \in (0,1] \end{cases}$$

Behauptung (1.2): $g_n \xrightarrow[\text{punktweise}]{n\to\infty} 0$(1), aber nicht gleichmäßig.(2)

Beweis. (1):

$$x = 0 \lim_{n\to\infty} g_n(0) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$
$$x \in (0,1] \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \underbrace{n\cdot x}_{\to\infty}} = 0$$

(2):

$$||g_n - 0|| = \sup_{x\in[0,1]} |g_n - 0| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{1}{1+n\cdot x}\right| \overset{\text{da } g_n \text{ stetig, streng monoton}}{=} 1 \neq 0$$

∎

iii)

$h_n(x) = \frac{x}{1+n\cdot x}$

Behauptung (1.3): h_n konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

Beweis.

$$\left|\left|\frac{x}{1+n\cdot x} - 0\right|\right| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{x}{1+n\cdot x}\right| \overset{(1)}{=} \frac{1}{1+n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Zu (1): h_n stetig, streng monoton steigend

$\Rightarrow h_n$ konvergiert gleichmäßig gegen Nullfunktion, insbesondere also auch punktweise. ∎

2 Regelfunktionen

Aus Vorlesung:
Satz (2.1): $f : D \to \mathbb{R}$ Regelfunktion $\Leftrightarrow \forall x \in D$ existieren beide einseitigen Grenzwerte

a)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{x} & x \in (0,1] \end{cases}$$

Behauptung (2.1): f keine Regelfunktion.

Beweis. f ist nicht beschränkt, da $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = \infty$. Also ist f keine Regelfunktion. ■

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \sin(\frac{1}{x}) & x \in (0,1] \end{cases}$$

Behauptung (2.2): g keine Regelfunktion

Beweis. $\overset{(2.1)}{\Longrightarrow} g$ keine Regelfunktion, da $\lim\limits_{x \searrow 0} \sin(\frac{1}{x})$ nicht existiert. ■

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x \cdot \sin(\frac{1}{x}) & x \in (0,1] \end{cases}$$

Behauptung (2.3): h Regelfunktion

Beweis. $x \cdot \sin(\frac{1}{x})$ stetig auf $(0,1]$, da Komposition stetiger Funktionen.
$\lim\limits_{x \to 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0$, insbesondere ist $\lim\limits_{x \searrow 0} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) = 0 = h(0)$, also h in 0 stetig.
Da stetige Funktionen Regelfunktionen sind, ist h eine Regelfunktion. ■

b)

Behauptung (2.4): $f, g \in T([a,b]) \Rightarrow (f \cdot g) \in T([a,b])$

Beweis. trivial, selbst ■

c)

Behauptung (2.5): $f, g \in R([a,b]) \Rightarrow (f \cdot g) \in R([a,b])$

Beweis.

$$\begin{aligned} f, g \in R([a,b]) &\Leftrightarrow \text{ es existieren je alle einseitigen Grenzwerte in } [a,b] \\ &\overset{\text{GWS}}{\Longrightarrow} \text{ es existieren von } f \cdot g \text{ alle einseitigen Grenzwerte} \\ &\Leftrightarrow (f \cdot g) \in R([a,b]) \end{aligned}$$

■

3 Regelfunktionen contin'd

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktion, stetig

a)

Behauptung (3.1): $\int_{[a,b]} |f(x)|\,dx = 0 \Rightarrow f = 0$

Beweis. Angenommen nicht.

$$\begin{aligned}
&\text{Es existiert } x_0 \in [a,b] \text{ mit } f(x_0) \neq 0\\
&\text{o.B.d.A} \quad f(x_0) > 0\\
&\text{Da } f \text{ stetig eyistiert eine Umgebung } [c,d] \subset [a,b] \text{ von } x_0,\\
&\text{sodass } \forall x \in [c,d] : f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}\\
&\text{Also ist für } g(x) := \begin{cases} \frac{f(x_0)}{2} & x \in [c,d] \\ 0 & x \notin [c,d] \end{cases}\\
&|g(x)| \leq |f(x)| \text{ für alle } x \in [a,b]
\end{aligned}$$

Da das Integral monoton ist und $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = (d-c) \cdot \frac{f(x_0)}{2} > 0$:

$$0 < \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b |g(x)|\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx = 0. ↯ s$$

■

b)

$F : [a,b] \to \mathbb{R}$

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$

Behauptung (3.2): F stetig

Beweis. $\forall \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\delta := \frac{\varepsilon}{||f||}, \quad |x-y| < \delta : |F(x) - F(y)| &= \left| \int_a^x f(t)dt - \int_a^y f(t)dt \right|\\
&= \left| \int_x^y f(t)dt \right|\\
&\leq |x-y| \cdot ||f|| < \delta \cdot ||f|| = \varepsilon.
\end{aligned}$$

■

4 Präsenzaufgabe

f_n nicht gleichmäßig, da $||f_n|| = 1$