

**Tutorat 03**  
Analysis I  
*Panajiotis Christoforidis*

## 1 Aufgabe

**a**

$$M := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0, x^2 < 2\}$$

**Behauptung (1.1):**  $M$  hat Supremum in  $\mathbb{R}$

*Beweis.* Folgendes gilt:

- Es ist  $0 < 1 \leq 1 \cdot 1 \leq 1^2 < 2 \Rightarrow 1 \in M$
- betrachte  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \leq 10 \Rightarrow x^2 \leq x \cdot 10 \leq 10 \cdot 10 = 100 < 2$   
Also  $M \subset (-\infty, 100)$  nach oben beschränkt.

$\Rightarrow M$  besitzt ein Supremum in  $\mathbb{R}$ . ■

**b**

**Behauptung (1.2):** Es gilt  $s^2 = 2$   $s^2 = 2$

*Beweis.* Aus dem Anordnungsaxiom folgt, dass genau einer der Folgenden Fälle gelten muss:

(1)  $s^2 < 2$

(2)  $s^2 > 2$

(3)  $s^2 = 2$

Wenn (1), (2) falsch gilt also (3)

Angenommen  $s^2 < 2$ :

$$\epsilon := \frac{s^2 - 2}{4s} > 0 \text{ da } s = \sup(M) \text{ ex. } x \in M$$

$$x^2 > (s - \epsilon)^2$$

$$= s^2 - 2 \cdot \epsilon \cdot s + \epsilon^2$$

$$\stackrel{\epsilon > 0}{>} s^2 - 2 \cdot \epsilon \cdot s$$

$$= s^2 - 2 \cdot s \cdot \frac{s^2 - 2}{4 \cdot s} = \frac{2 \cdot s^2 - s^2 + 2}{2} = \frac{s^2}{s} + 1 > 1 + 1 = 2$$

$$\nmid \text{ zu } x \in M \Rightarrow x^2 < 2$$

Angeommen  $s^2 > 2$ :

$$\begin{aligned}\delta &:= \frac{2 - s^2}{2s + 2} > 0 \\ (s + \delta)^2 &= s^2 + 2 \cdot \delta \cdot s + \delta^2 \\ &= s^2 + (2 \cdot s + \delta) \cdot \delta \\ &\stackrel{\delta < 2}{<} s^2 + (2s + 2) \cdot \delta \\ &= s^2 + (2s + 2) \cdot \frac{2 - s^2}{2s + 2} < 2\end{aligned}$$

zu  $s$  ist obere Schranke, da  $s + \delta \in M$

■

**c**

$$N := \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x, x^2 < 2\}$$

**Behauptung (1.3):**  $N$  hat obere Schranke in  $\mathbb{Q}$  aber kein Supremum in  $\mathbb{Q}$

*Beweis.* obere Schranke: analog zu (1.1).

Angenommen  $\sup N$  existiert in  $\mathbb{Q}$

wie in (1.2) folgt  $(\sup N)^2 = 2$

(*Hinweis:* Habe  $n \in \mathbb{N}$  und ein  $q \in \mathbb{Q}$  mit  $n = q^2$ . Dann ist  $q$  schon aus  $\mathbb{N}$ )

Da  $1^2 = 1, 2^2 = 4$  kann das Supremum, das nach dem Hinweis ebenso aus  $\mathbb{N}$  sein muss, nicht existieren. ■

**d**

**Behauptung (1.4):**  $x^2 = 2$  hat in  $\mathbb{R}^+$  genau eine Lösung und diese ist in  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

*Beweis.* Nach (1.1) gilt, dass die Gleichung  $x^2 = 2$  eine Lösung in  $\mathbb{R}^+$  hat, da nach (1.1)  $1 < \sup(M) < 10$  gilt.

Sei  $y \in \mathbb{R}^+$  eine weitere Lösung dieser Gleichung.

Dann:

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - y)(x + y) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = y \vee x = -y\end{aligned}$$

Im ersten Fall: klar

Im zweiten Fall:  $x$  und  $y$  können nicht beide in  $\mathbb{R}^+$  liegen.

(i)  $\forall x \in N, x \leq s$  da  $N \subseteq M$

(ii)  $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in N x > s - \varepsilon$ , wegen des Vollständigkeitsaxioms.

$$\stackrel{(i)}{\Rightarrow} \sup(N) \leq \sup(N) \quad (1)$$

$$\stackrel{(ii)}{\Rightarrow} \sup(M) \leq \sup(M) \quad (2)$$

$$\stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} \sup(N) = \sup(M) \in \mathbb{R}^+$$

nach (1.3):  $\sup(M) \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sup(N) \notin \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \sup(M) \notin \mathbb{Q} \stackrel{\text{in } \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} \sup(M) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \blacksquare$$

## 2 Aufgabe

**Behauptung (2.1):**  $\left(\sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k\right)^2 &\leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) \\ \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k\right) &\leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

*Induktionsanfang:*

$$\begin{aligned} n = 1 : \left(\sum_{k=1}^1 a_k \cdot b_k\right)^2 &= (a_1 \cdot b_1)^2 \\ &= \sum_{k=1}^1 a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^1 b_k^2 \\ n = 2 : \left(\sum_{k=1}^2 a_k \cdot b_k\right)^2 &= a_1^2 \cdot b_1^2 + 2 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot a_2 \cdot b_2 + a_2^2 \cdot b_2^2 \\ &\stackrel{H(2)}{\leq} a_1^2 \cdot b_1^2 + a_1^2 \cdot b_2^2 + a_2^2 \cdot b_1^2 + a_2^2 \cdot b_2^2 \\ &= \sum_{k=1}^2 a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^2 b_k^2 \end{aligned}$$

*Induktionsvoraussetzung:*

Für ein beliebiges aber festes  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)$$

*Induktionsschritt:*

$$\begin{aligned} n &\mapsto n + 1 \\ \sum_{k=1}^{n+1} a_k \cdot b_k &= \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k + a_{n+1} \cdot b_{n+1} \stackrel{IV}{\leq} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{:=\alpha} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{:=\beta} + a_{n+1} \cdot b_{n+1} \\ &= \alpha\beta + a_{n+1} \cdot b_{n+1} \stackrel{H(2)}{\leq} (\alpha^2 + a_{n+1}^2)^{\frac{1}{2}} (\beta^2 + b_{n+1}^2)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n+1} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

■

### 3 Aufgabe

Sei  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

**Behauptung (3.1):**  $\left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n}$

*Beweis. Induktionsanfang:*

$$n = 1 : \left(\frac{1}{b}\right)^1 = \frac{1}{b} = \frac{1}{b^1} \quad \checkmark$$

*Induktionsvoraussetzung:*

Es gelte  $\left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n}$  für ein beliebiges aber festes  $n \in \mathbb{N}$ .

*Induktionsschritt:*

$$n \mapsto n + 1$$

- (1) rekursive Definition der Potenz
- (2) Assoziativität der Multiplikation

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{b}\right)^{n+1} &\stackrel{(1)}{=} \left(\frac{1}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{b}\right) \\ &\stackrel{IV}{=} \frac{1}{b^n} \cdot \left(\frac{1}{b}\right) \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{b^n} \cdot \frac{1}{b} \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{b^{n+1}} \end{aligned}$$

■