Tutorat 14

Analysis I

Panajiotis Christoforidis

1 Potenzreihen: Konvergenzradius

a) - Konvergenzradien bestimmen

i)

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k^k} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-a)^k$
Also ist der Koeffizient $\frac{1}{k^k}$
$\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\frac{1}{k^k}|} = \limsup\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$
Also ist $r = \infty$.

ii)

(1) : GWS, Monotonie der Wurzel $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \cosh(x) \cdot x^k$
Also ist der Koeffizient $\cosh(x)$
$\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\cosh(k)|} = \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{e^k+e^{-k}}{2}}$
$\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[k]{e^k+e^{-k}} \overset{(1)}{\geq} \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{2}} \cdot \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{e^k} = 1 \cdot e = e$
$\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[k]{e^k+e^{-k}} \leq \limsup\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{2}} \cdot \sqrt[k]{2 \cdot e^k} = e$
Also ist $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\cosh(x)|} = e$ und $r = \frac{1}{e}$

b) - Konvergenzradius in Abh. vom Parameter a

Berechne den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a^{k^2} \cdot x^k$ in Abhängigkeit von a. Der Koeffizient ist a^{k^2}

$\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a^{k^2}|} = \limsup\limits_{k\to\infty} |a|^k = \begin{cases} 0 & |a| < 1 \\ 1 & |a| = 1 \\ \infty & |a| > 1 \end{cases}$

Also $r = \begin{cases} \infty & |a| < 1 \\ 1 & |a| = 1 \\ 0 & |a| > 1 \end{cases}$

2 (Uneigentliche) Integrale

a) - uneigentliche Integrale

i)

Behauptung (2.1): $\int\limits_0^1 x^{-\frac{1}{3}}\, dx$ existiert.

Beweis. $\int\limits_0^1 x^{-\frac{1}{3}}\, dx = \lim\limits_{a\searrow 0} \int\limits_0^1 x^{-\frac{1}{3}}\, dx = \lim\limits_{a\searrow 0} \left[\frac{3}{2} \cdot x^{\frac{2}{3}}\right]_a^1 = \lim\limits_{a\searrow 0} \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot a^{\frac{2}{3}} \overset{\text{GWS}}{=} \frac{3}{2} - 0$ ∎

ii)

Behauptung (2.2): $\int\limits_0^\infty x \cdot e^{-x^2}\, dx$ existiert.

Beweis. $x \cdot e^{-x^2}$ ist stetig, also Regelfunktion auf ganz $\mathbb{R}$.

$\int\limits_0^\infty x \cdot e^{-x^2}\, dx = \lim\limits_{a\to\infty} \int\limits_0^a x \cdot e^{-x^2}\, dx = \lim\limits_{a\to\infty} \left[-\frac{1}{2} \cdot e^{-x^2}\right]_0^a = \lim\limits_{a\to\infty} -\frac{1}{2} \cdot \underbrace{e^{-a^2}}_{\to 0} - \left(-\frac{1}{2} \cdot \underbrace{e^0}_{=1}\right) = \frac{1}{2}$ ■

b) - Stammfunktionen bestimmen

i)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$
Funktionen f,g zu (1):

$f(x) = -\cos x,\ f'(x) = \sin x$
$g(x) = \cos x, g'(x) = -\sin x$

$$\int \sin x \cdot \cos x\, dx \overset{\text{P.I. (1)}}{=} [-\cos x \cdot \cos x] - \int -\cos x \cdot (-\sin x)\ dx$$
$$= -\cos^2(x) - \int \cos x \cdot \sin x\, dx$$
$$\Leftrightarrow \int \cos x \cdot \sin x\, dx = \frac{-\cos^2(x)}{2}$$

ii)

$f : [-1,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \arcsin(x)$
Funktionen f,g zu (2):

$f(x) = \arcsin x,\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$g(x) = x, g'(x) = 1$

$$\int \arcsin x\, dx = \int 1 \cdot \arcsin x\, dx \overset{\text{P.I. (2)}}{=} [x \cdot \arcsin x] - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$
$$\int -\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot x) \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\, dx = -\int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy = -\sqrt{y} = \sqrt{1-x^2}$$

Insgesamt also:

$$\int \arcsin x\, dx = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

3 Funktionsfolgen

Es sei die Funktionsfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{n \cdot x^2}{1+n\cdot|x|}$.

Behauptung (3.1): $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen die Betragsfunktion

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Es gilt $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, x \in [-1,1]$ beliebig:

$$||f_n(x)| - |x|| = \left|\left|\frac{n \cdot x^2}{1+n\cdot|x| - |x|}\right|\right| = \left|\frac{n \cdot x^2}{1+n\cdot|x|} - \frac{|x| \cdot (1+n\cdot|x|)}{1+n\cdot|x|}\right| = \left|\frac{n \cdot x^2 - |x| + n \cdot |x^2|}{1+n\cdot|x|}\right|$$
$$= \left|\frac{|x|}{1+n\cdot|x|}\right| = \frac{1}{\frac{1}{|x|}+n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

■

Behauptung (3.2): $\forall n \in \mathbb{N} : f_n$ ist differenzierbar

Beweis. Fallunterscheidung:
1.Fall: $x_0 \in [-1, 0) : f_n(x) = \frac{n \cdot x^2}{1+n\cdot|x|} = \frac{n\cdot x^2}{1-n\cdot x}$
Als Komposition von Polynomen ist $f_n(x)$ genau dann differenzierbar, wenn der Divisor ungleich 0 ist: $1 - n \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{n} > 0$ ↯ zu $x \in [-1, 0) \Rightarrow f_n$ ist in $[-1, 0)$ differenzierbar mit:

$$\begin{aligned}
f_n'(x) = \left(\frac{n \cdot x^2}{1 - n \cdot x}\right)' &\overset{\text{Quitientenregel}}{=} \frac{(n \cdot x^2)' \cdot (1 - n \cdot x)) - (1 - n \cdot x)' \cdot n \cdot x^2}{(1 - n \cdot x)^2} \\
&= \frac{2 \cdot x \cdot n \cdot (1 - n \cdot x) - (-1) \cdot n \cdot x^2}{(1 - n \cdot x)^2} = \frac{2 \cdot x \cdot n - 2 \cdot n^2 \cdot x^2 + n^2 \cdot x^2}{(1 - n \cdot x)^2} \\
&= \frac{2 \cdot x \cdot n - n^2 \cdot x^2}{(1 - n \cdot x)^2} = \frac{2 \cdot x \cdot n - n^2 \cdot x^2 + 0}{(1 - n \cdot x)^2} = \frac{2 \cdot x \cdot n - n^2 \cdot x^2 + 1 - 1}{(1 - n \cdot x)^2} \\
&= \frac{(1 - n \cdot x)^2 - 1}{(1 - n \cdot x)^2} = 1 - \frac{1}{(1 - n \cdot x)^2}
\end{aligned}$$

2.Fall: $x_0 \in (0, 1] : f_n(x) = \frac{n\cdot x^2}{1+n\cdot|x|} = \frac{n\cdot x^2}{1+n\cdot x}$
Als Komposition von Polynomen ist $f_n(x)$ genau dann differenzierbar, wenn der Divisor ungleich 0 ist: $1 + n \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{n} < 0$ ↯ zu $x \in (0, 1) \Rightarrow f_n$ ist in $(0, 1]$ differenzierbar mit:

$$\begin{aligned}
f_n'(x) = \left(\frac{n \cdot x^2}{1 + n \cdot x}\right)' &\overset{\text{Quitientenregel}}{=} \frac{(n \cdot x^2)' \cdot (1 + n \cdot x)) - (1 + n \cdot x)' \cdot n \cdot x^2}{(1 + n \cdot x)^2} \\
&= \frac{2 \cdot x \cdot n \cdot (1 + n \cdot x) - n \cdot n \cdot x^2}{(1 + n \cdot x)^2} = \frac{2 \cdot x \cdot n \cdot +2 \cdot n^2 \cdot x^2 - n^2 \cdot x^2}{(1 + n \cdot x)^2} \\
&= \frac{n^2 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot n}{(1 + n \cdot x)^2} = \frac{n^2 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot n + 0}{(1 + n \cdot x)^2} \\
&= \frac{n^2 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot n + 1 - 1}{(1 + n \cdot x)^2} = \frac{(1 + n \cdot x)^2 - 1}{(1 + n \cdot x)^2} \\
&= 1 - \frac{1}{(1 + n \cdot x)^2}
\end{aligned}$$

3.Fall: $x_0 = 0$

$$f_n'(x_0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{n\cdot x^2}{1+n\cdot|x|} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{n\cdot x}{1+n\cdot|x|}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{n \cdot x}^{\to 0}}{\underbrace{1 + \underbrace{n \cdot |x|}_{\to 0}}_{\to 1}} = 0$$

$\Longrightarrow \forall x \in [-1, 1] : f_n'$ existiert

∎

Behauptung (3.3): $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann nicht gleichmäßig konvergent sein.

Beweis. Hack: Alle f_n' sind stetig, $f'(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & |x| > 0 \\ -1 & |x| < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist aber nicht stetig in $x = 0$

Wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{gleichmäßig}} f$ und $\forall n \in \mathbb{N} : f_n$ stetig $\Longrightarrow f$ stetig ∎

4 Klausurinfos vom Tutor

- Ausführliche Argumentation

  Dies hilft bei der Vergabe von Teilpunkten

- Vorraussetzungen von Sätzen prüfen, bevor diese angewendet werden

- Bei integralberechnung kann es erforderlich sein (abhängig von der Funktion), das uneigentliche Integral zu betrachten.