

Tutorat 05
Analysis I
Panajiotis Christoforidis

Aufgabe 1

Man prüfe die Injektivität und Surjektivität der folgenden Funktionen und bestimme ggf. die Umkehrfunktion

a)

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

Behauptung (1.1): f weder surjektiv noch injektiv

Beweis. nicht injektiv: $-1, 1 \in \mathbb{R} - 1 \neq 1$

aber $f(1) = f(-1) \not\Leftarrow f$ injektiv

nicht surjektiv:

$$\forall x \in \mathbb{R} x^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \text{Bild}(f) \subseteq \mathbb{R}^{\geq 0} \Rightarrow \emptyset \neq \mathbb{R} \setminus \text{Bild}(f) \subseteq \mathbb{R}^{<0}$$

Also kann f gar nicht surjektiv sein.

Da f weder surjektiv, injektiv \Rightarrow ex. keine Umkehrabbildung f^{-1} ■

b)

$$h : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{x}{1 - |x|}$$

Behauptung (1.2): h bijektiv

Beweis. h injektiv:

Überlege zuerst:

$$x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$$

$$x < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$$

Dann können wir folgender Fälle betrachten:

1. Fall: Seien $x, x' \geq 0$

$$f(x) = f(x')$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{1 - |x|} = \frac{x'}{1 - |x'|}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (1 - x') = x' \cdot (1 - x)$$

$$\Leftrightarrow x - x' \cdot x = x' - x \cdot x'$$

$$\Leftrightarrow x = x' \quad \text{2. Fall } x < 0 \text{ analog} \quad \text{3. Fall } x' < 0 \leq x$$

insbesondere $x \neq x'$ nach der Vorüberlegung folgt $h(x) \neq h(x')$

h surjektiv:

1. Fall Sei $a \geq 0$, definiere $x := \frac{a}{1+a}$

Dann ist $h(x) = h\left(\frac{a}{1+a}\right) = \frac{\frac{a}{1+a}}{1 - \frac{a}{1+a}} = \frac{\frac{a}{1+a}}{\frac{1+a-a}{1+a}} = a$
 und $-1 < 0 \leq x < 1$ da $a < 1 + a \Leftrightarrow \frac{a}{1+a} < 1$

2. Fall $a < 0$

Setze $x := \frac{a}{1-a}$

$$h(x) = h\left(\frac{a}{1-a}\right) = \frac{\frac{a}{1-a}}{1 - \frac{a}{1-a}} = \frac{\frac{a}{1-a}}{\frac{1-a-a}{1-a}} = a$$

Benutze: $h^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$, $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$

Da h bijektiv genügt es

$h \circ h^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}}$ oder

$h \circ h^{-1} = \text{id}_{(-1,1)}$ zu prüfen.

Diese wurden bereits mit der Surjektivität gezeigt. ■

Aufgabe 2

Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$. $\forall n \in \mathbb{N} \ a_n \leq b_n \leq c_n$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n =: g$

Behauptung (2.3): $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$ existiert.

Beweis. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \Leftrightarrow \forall \varepsilon < 0 \exists n_a \in \mathbb{N} \forall n > n_a$ ■