

# Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert, WS 2018/2019

Aussagenlogik: Syntax und Semantik

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

# Sudoku

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Vervollständigen Sie das Sudoku so, dass

- ▶ in jeder der neun Spalten
- ▶ in jeder der neun Reihen
- ▶ und in jeder der neun Regionen

alle Zahlen von 1 bis 9 vorkommen.

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Wir führen für jede Zellenposition  $(i, j)$  des Sudoku und jede Zahl  $k$  zwischen 1 und 9 eine Boolesche Variable

$$D_{i,j}^k$$

ein, mit der Vorstellung, dass  $D_{i,j}^k$  den Wert *wahr* hat, wenn auf dem Feld  $(i, j)$  die Zahl  $k$  steht.

Wir benutzen kartesische Koordinaten zur Notation von Positionen.

So ist z.B.  $D_{9,1}^9$  wahr, wenn in der rechten unteren Ecke die Zahl 9 steht.

$$D_{1,9}^1 \vee D_{2,9}^1 \vee D_{3,9}^1 \vee D_{4,9}^1 \vee D_{5,9}^1 \vee D_{6,9}^1 \vee D_{7,9}^1 \vee D_{8,9}^1 \vee D_{9,9}^1$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der ersten Zeile vorkommen muß.

$$D_{1,1}^1 \vee D_{1,2}^1 \vee D_{1,3}^1 \vee D_{1,4}^1 \vee D_{1,5}^1 \vee D_{1,6}^1 \vee D_{1,7}^1 \vee D_{1,8}^1 \vee D_{1,9}^1$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der ersten Spalte vorkommen muß.

$$D_{1,1}^1 \vee D_{1,2}^1 \vee D_{1,3}^1 \vee D_{2,1}^1 \vee D_{2,2}^1 \vee D_{2,3}^1 \vee D_{3,1}^1 \vee D_{3,2}^1 \vee D_{3,3}^1$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der Region links unten vorkommen muss.

# Zusätzliche AL-Formeln

Ergibt soweit:  $(9 + 9 + 9) * 9 = 243$  Formeln.

Diese Formeln beschreiben Sudoku noch nicht genau.

Man muss noch sagen, dass auf jeder Zelle höchstens **eine** Zahl stehen kann.

$$\begin{aligned}
 &\neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^2), \neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^3), \neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^4), \neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^5), \\
 &\neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^6), \neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^7), \neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^8), \neg(D_{1,1}^1 \wedge D_{1,1}^9), \\
 &\neg(D_{1,1}^2 \wedge D_{1,1}^3), \neg(D_{1,1}^2 \wedge D_{1,1}^4), \neg(D_{1,1}^2 \wedge D_{1,1}^5), \neg(D_{1,1}^2 \wedge D_{1,1}^6), \\
 &\neg(D_{1,1}^2 \wedge D_{1,1}^7), \neg(D_{1,1}^2 \wedge D_{1,1}^8), \neg(D_{1,1}^2 \wedge D_{1,1}^9), \neg(D_{1,1}^3 \wedge D_{1,1}^4),
 \end{aligned}$$

usw.

Allgemein:

$$\neg(D_{i,j}^s \wedge D_{i,j}^t)$$

für alle  $1 \leq i, j, s, t \leq 9$  mit  $s < t$ .

Ergibt insgesamt:  $243 + 81 * 36 = 3159$  Formeln.

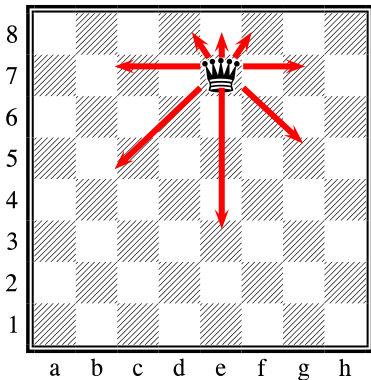
Hinzu kommen atomare Formeln, die das konkrete Rätsel beschreiben:

$$D_{1,4}^7, \dots, D_{9,6}^3$$

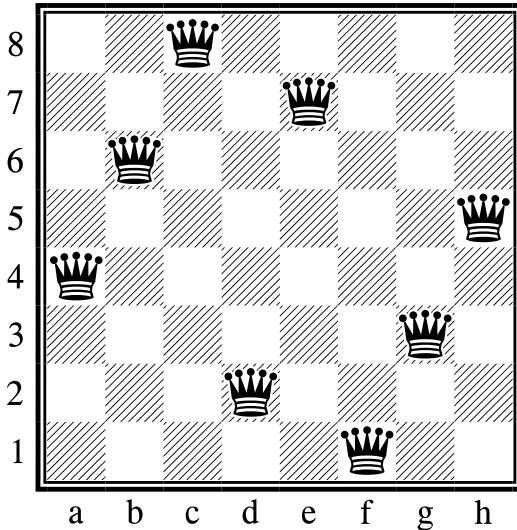


# Das 8-Damen-Problem

Man platziere acht Damen so auf einem Schachbrett, dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen.



# Eine Lösung des 8-Damen-Problems



# Wiederholung

## Syntax und Semantik der Aussagenlogik

## Logische Zeichen

- 1** Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
- 0** Symbol für den Wahrheitswert „falsch“
- $\neg$  Negationssymbol („nicht“)
- $\wedge$  Konjunktionssymbol („und“)
- $\vee$  Disjunktionssymbol („oder“)
- $\rightarrow$  Implikationssymbol („wenn . . . dann“)
- $\leftrightarrow$  Symbol für beiderseitige Implikation („genau dann, wenn“)
- (,) die beiden Klammern

## Signatur

Eine (aussagenlogische) *Signatur* ist eine abzählbare Menge  $\Sigma$  von Symbolen, etwa

$$\Sigma = \{P_0, \dots, P_n\}$$

oder

$$\Sigma = \{P_0, P_1, \dots\}.$$

Die Elemente von  $\Sigma$  heißen auch *atomare Aussagen*, *Atome* oder *Aussagevariablen*.

# Formeln der Aussagenlogik

Zur Signatur  $\Sigma$  ist  $For0_\Sigma$ , die Menge der  
*Formeln* über  $\Sigma$

induktiv definiert durch

- ▶  $1 \in For0_\Sigma$   
 $0 \in For0_\Sigma$   
 $\Sigma \subseteq For0_\Sigma$
- ▶ wenn  $A, B \in For0_\Sigma$  dann sind auch  
 $\neg A$   
 $(A \wedge B)$   
 $(A \vee B)$   
 $(A \rightarrow B)$   
 $(A \leftrightarrow B)$

Elemente von  $For0_\Sigma$

## Interpretation

Es sei  $\Sigma$  eine aussagenlogische Signatur. Eine **Interpretation** über  $\Sigma$  ist eine beliebige Abbildung

$$I : \Sigma \rightarrow \{W, F\}.$$

## Auswertung

Zu jedem  $I$  über  $\Sigma$  wird eine zugehörige **Auswertung** der Formeln über  $\Sigma$  definiert

$$val_I : For0_\Sigma \rightarrow \{W, F\}$$

mit:

$$val_I(\mathbf{1}) = W$$

$$val_I(\mathbf{0}) = F$$

$$val_I(P) = I(P) \quad \text{für jedes } P \in \Sigma$$

$$val_I(\neg A) = \begin{cases} F & \text{falls } val_I(A) = W \\ W & \text{falls } val_I(A) = F \end{cases}$$



## Auswertung (Forts.)

$val_I$  auf  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \rightarrow B)$ ,  $(A \leftrightarrow B)$  wird gemäß der folgenden Tabelle berechnet

$val_I(A)$	$val_I(B)$	$val_I(A \wedge B)$	$val_I(A \vee B)$	$val_I(A \rightarrow B)$	$val_I(A \leftrightarrow B)$
W	W	W	W	W	W
W	F	F	W	F	F
F	W	F	W	W	F
F	F	F	F	W	W

## Definition

- ▶ Ein **Modell** einer Formel  $A \in For0_\Sigma$  ist eine Interpretation  $I$  über  $\Sigma$  mit  $val_I(A) = W$ .
- ▶ Zu einer Formelm**enge**  $M \subseteq For0_\Sigma$  ist ein Modell von  $M$  eine Interpretation  $I$ , welche Modell von jedem  $A \in M$  ist.
- ▶  $A \in For0_\Sigma$  heißt **allgemeingültig**  
gdw  
 $val_I(A) = W$  für jede Interpretation  $I$  über  $\Sigma$ .
- ▶  $A \in For0_\Sigma$  heißt **erfüllbar**  
gdw  
es gibt eine Interpretation  $I$  über  $\Sigma$  mit  $val_I(A) = W$ .

## Definition

$\Sigma$  sei eine Signatur,  $M \subseteq For0_\Sigma$ ,  $A, B \in For0_\Sigma$ .

- ▶  $M \models A$       lies: **aus  $M$  folgt  $A$**   
gdw  
Jedes Modell von  $M$  ist auch Modell von  $A$ .
- ▶  $A, B \in For0_\Sigma$  heißen **logisch äquivalent**  
gdw  
 $\{A\} \models_\Sigma B$  und  $\{B\} \models_\Sigma A$

$$A \rightarrow A$$

Selbstimplikation

$$\neg A \vee A$$

Tertium non datur

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

Abschwächung

$$0 \rightarrow A$$

Ex falso quodlibet

$$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$$

Modus Ponens

$$A \wedge A \leftrightarrow A$$

Idempotenz

$$(\neg\neg A) \leftrightarrow A$$

Doppelnegation

$$A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$$

Absorption

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$$

Äquivalenz/Implikation

$$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

Distributivität

$$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Distributivität

# Beispiele allgemeingültiger Formeln (Forts.)

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \quad \text{Kontraposition}$$

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow$$

$$((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad \text{Verteilen}$$

$$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \quad \text{De Morgan}$$

$$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B \quad \text{De Morgan}$$

## Theorem

- ▶  $A$  erfüllbar    gdw     $\neg A$  nicht allgemeingültig
- ▶  $\models A$     gdw     $A$  ist allgemeingültig
- ▶  $\models \neg A$     gdw     $A$  ist unerfüllbar
- ▶  $A \models B$     gdw     $\models A \rightarrow B$
- ▶  $M \cup \{A\} \models B$     gdw     $M \models A \rightarrow B$
- ▶  $A, B$  sind logisch äquivalent    gdw     $A \leftrightarrow B$  ist allgemeingültig

## Theorem

*Wenn*

- ▶ *A und B logisch äquivalent*
- ▶ *A Unterformel von C*
- ▶ *C' entsteht aus C dadurch, dass A durch B ersetzt wird*

*dann*

- ▶ *C und C' logisch äquivalent*

# Quiz

Welche der folgenden Formeln sind Tautologien?

- 1  $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$  *ja*
- 2  $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$  *ja*
- 3  $\neg(A \vee B) \rightarrow (A \vee B)$  *nein*
- 4  $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$  *nein*
- 5  $(\neg A \vee B) \vee (A \wedge \neg B)$  *ja*



## Definition

1. Eine Funktion  $f$  von  $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n$  nach  $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$  für  $n \in \mathbb{N}$  heißt eine  $n$ -stellige *Boolesche Funktion*.
2. Sei  $A \in \text{For}_0\Sigma$ ,  $\Sigma = \{P_1, \dots, P_n\}$  dann wird die *Boolesche Funktion*  $f_A$  von  $A$  definiert durch:

$$f_A(\bar{b}) = \text{val}_I(A)$$

wobei  $\bar{b} \in \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n$  und  $I(P_i) = b_i$ .

Die Boolesche Funktion  $f_A$  hängt ab von der Anordnung der in ihr vorkommenden aussagenlogischen Atome!

Für  $A = P_1 \wedge P_3$  in der Signatur  $\Sigma = \{P_1, P_2, P_3\}$  ergibt sich  $f_A$  aus der folgenden Tabelle:

$P_1$	$P_2$	$P_3$	$f_A(P_1, P_2, P_3)$
<b>W</b>	<b>W</b>	<b>W</b>	<b>W</b>
<b>W</b>	<b>W</b>	<b>F</b>	<b>F</b>
<b>W</b>	<b>F</b>	<b>W</b>	<b>W</b>
<b>W</b>	<b>F</b>	<b>F</b>	<b>F</b>
<b>F</b>	<b>W</b>	<b>W</b>	<b>F</b>
<b>F</b>	<b>W</b>	<b>F</b>	<b>F</b>
<b>F</b>	<b>F</b>	<b>W</b>	<b>F</b>
<b>F</b>	<b>F</b>	<b>F</b>	<b>F</b>

# Funktionale Vollständigkeit

## Wiederholung

### Satz

Zu jeder Booleschen Funktion  $f : \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n \rightarrow \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$  gibt es eine Formel  $A \in \text{For}_{0\Sigma}$  mit

$$f = f_A$$

**Beweis:** Seien  $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_k$  genau die  $n$ -Tupel aus  $\{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n$  mit  $f(\bar{b}_i) = \mathbf{W}$ .

$A = A_1 \vee \dots \vee A_k$ ,  $A_i = A_{i,1} \wedge \dots \wedge A_{i,n}$  mit

$$A_{i,j} = \begin{cases} P_j & \text{falls } b_{i,j} = \mathbf{W} \\ \neg P_j & \text{falls } b_{i,j} = \mathbf{F} \end{cases}$$

## Definition

Eine Menge  $KOp$  von aussagenlogischen Konstanten und Operatoren heißt eine

*Basis*,

wenn für jede Boolesche Funktion  $f : \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n \rightarrow \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$  eine Formel  $A$  existiert, die nur mit Konstanten und Operatoren aus  $KOp$  aufgebaut ist, mit

$$f_A = f.$$

Keine Minimalität für  $KOp$  gefordert.

## Beispiele

- ▶  $\{1, 0, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- ▶  $\{\neg, \wedge\}$
- ▶  $\{0, \rightarrow\}$
- ▶  $\{\downarrow\}$
- ▶  $\{1, 0, sh\}$

wobei  $A \downarrow B = \neg(A \vee B)$ :

$val_I(A)$	$val_I(B)$	$val_I(A \downarrow B)$
<b>W</b>	<b>W</b>	<b>F</b>
<b>W</b>	<b>F</b>	<b>F</b>
<b>F</b>	<b>W</b>	<b>F</b>
<b>F</b>	<b>F</b>	<b>W</b>