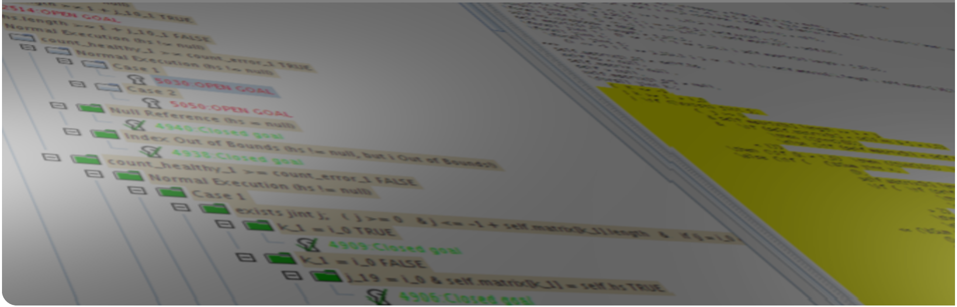
Karlsruhe Institute of Technology

Formale Systeme

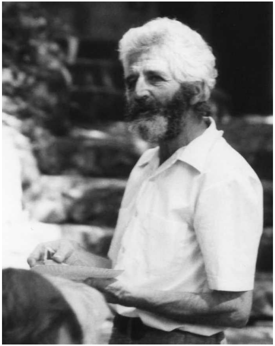
Prof. Dr. Bernhard Beckert, WS 2018/2019

Aussagenlogik: Syntax und Semantik

KIT – Institut für Theoretische Informatik



William Craig



1918 – 2016, Berkley University

Craig's Lemma: 1950er Jahre, für Prädikatenlogik formuliert
Praktische Relevanz um Jahrtausendwende

Das Craigsche Interpolationslemma

Seien A,B aussagenlogische Formeln mit

$$\models A \to B$$

dann (und genau dann) gibt es eine Formel C mit

$$\models A \to C \quad \text{und} \quad \models C \to B,$$

so dass in C nur solche aussagenlogischen Atome $P \in \Sigma$ vorkommen, die sowohl in A als auch in B vorkommen.

Das Craigsche Interpolationslemma

Einfaches Beispiel

- $P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_1 \vee P_3$ ist eine Tautologie.

Das Craigsche Interpolationslemma

Einfaches Beispiel

- $P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_1 \vee P_3$ ist eine Tautologie.
- Ebenso $P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_1$.

Das Craigsche Interpolationslemma

Einfaches Beispiel

- $P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_1 \vee P_3$ ist eine Tautologie.
- Ebenso $P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_1$.
- Ebenso $P_1 \rightarrow P_1 \vee P_3$.

Das Craigsche Interpolationslemma

Einfaches Beispiel

- $P_1 \wedge P_2 \to P_1 \vee P_3$ ist eine Tautologie.
- Ebenso $P_1 \wedge P_2 \to P_1$.
- Ebenso $P_1 \to P_1 \vee P_3$.
- Also: P_1 ist eine Interpolante für $P_1 \wedge P_2 \to P_1 \vee P_3$.

Interpolationslemma: Konstruktion

Seien $P_1, \ldots P_n$ alle in A vorkommenden aussagenlogischen Atome, die nicht in B vorkommen.

Interpolationslemma: Konstruktion

Seien $P_1, \dots P_n$ alle in A vorkommenden aussagenlogischen Atome, die nicht in B vorkommen.
Für Konstanten $c_i \in \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ bezeichnen wir mit $A[c_1, \dots, c_n]$ die Formeln, die aus A hervorgeht, indem P_i durch c_i ersetzt wird für alle $1 \leq i \leq n$.

Interpolationslemma: Konstruktion

Seien $P_1, \ldots P_n$ alle in A vorkommenden aussagenlogischen Atome, die nicht in B vorkommen.
Für Konstanten $c_i \in \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ bezeichnen wir mit $A[c_1, \ldots, c_n]$ die Formeln, die aus A hervorgeht, indem P_i durch c_i ersetzt wird für alle $1 \leq i \leq n$.
Wir setzen

$$C \equiv \bigvee_{(c_1,\ldots,c_n)\in\{\mathbf{1},\mathbf{0}\}^n} A[c_1, \ldots, c_n]$$

Interpolationslemma: Konstruktion

Seien $P_1, \ldots P_n$ alle in A vorkommenden aussagenlogischen Atome, die nicht in B vorkommen.
Für Konstanten $c_i \in \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ bezeichnen wir mit $A[c_1, \ldots, c_n]$ die Formeln, die aus A hervorgeht, indem P_i durch c_i ersetzt wird für alle $1 \leq i \leq n$.
Wir setzen

$$C \equiv \bigvee_{(c_1,\ldots,c_n)\in\{\mathbf{1},\mathbf{0}\}^n} A[c_1, \ldots, c_n]$$

Beweis der Korrektheit der Konstruktion: Siehe Skriptum

Einfaches Beispiel zur Konstruktion von C

- Betrachte die Tautologie $A \to B$
  mit $A = P_1 \wedge P_2$, $B = P_1 \vee P_3$.

Einfaches Beispiel zur Konstruktion von C

- Betrachte die Tautologie $A \to B$ mit $A = P_1 \wedge P_2$, $B = P_1 \vee P_3$.
- P_2 ist das einzige Atom, das in A, aber nicht in B vorkommt.

Einfaches Beispiel zur Konstruktion von C

- Betrachte die Tautologie $A \to B$
  mit $A = P_1 \wedge P_2$, $B = P_1 \vee P_3$.
- P_2 ist das einzige Atom, das in A, aber nicht in B vorkommt.
- $A[\mathbf{1}] \quad = \quad P_1 \wedge \mathbf{1} \quad \equiv \quad P_1$

Einfaches Beispiel zur Konstruktion von C

- Betrachte die Tautologie $A \rightarrow B$ mit $A = P_1 \wedge P_2$, $B = P_1 \vee P_3$.
- P_2 ist das einzige Atom, das in A, aber nicht in B vorkommt.
- $A[\mathbf{1}] \quad = \quad P_1 \wedge \mathbf{1} \quad \equiv \quad P_1$
- $A[\mathbf{0}] \quad = \quad P_1 \wedge \mathbf{0} \quad \equiv \quad \mathbf{0}$

Einfaches Beispiel zur Konstruktion von C

- Betrachte die Tautologie $A \to B$
  mit $A = P_1 \wedge P_2$, $B = P_1 \vee P_3$.
- P_2 ist das einzige Atom, das in A, aber nicht in B vorkommt.
- $A[\mathbf{1}] \quad = \quad P_1 \wedge \mathbf{1} \quad \equiv \quad P_1$
- $A[\mathbf{0}] \quad = \quad P_1 \wedge \mathbf{0} \quad \equiv \quad \mathbf{0}$
- $$\begin{aligned} C &= A[\mathbf{1}] \vee A[\mathbf{0}] \\ &\equiv P_1 \vee \mathbf{0} \\ &\equiv P_1 \end{aligned}$$

Weiteres Beispiel zur Konstruktion von C

- $A \rightarrow B$ mit
  $A = (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_3) \wedge P_2$
  $B = \neg((\neg P_2 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_4) \wedge \neg P_4)$

Weiteres Beispiel zur Konstruktion von C

- $A \rightarrow B$ mit
  $A = (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_3) \wedge P_2$
  $B = \neg((\neg P_2 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_4) \wedge \neg P_4)$
- $A \equiv P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3$ und $B \equiv \neg P_2 \vee \neg P_3 \vee P_4$

Weiteres Beispiel zur Konstruktion von C

- $A \to B$ mit
  $A = (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_3) \wedge P_2$
  $B = \neg((\neg P_2 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_4) \wedge \neg P_4)$
- $A \equiv P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3 \quad$ und $\quad B \equiv \neg P_2 \vee \neg P_3 \vee P_4$
- $A \to B$ ist eine Tautologie.

Weiteres Beispiel zur Konstruktion von C

- $A \to B$ mit
  $A = (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_3) \wedge P_2$
  $B = \neg((\neg P_2 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_4) \wedge \neg P_4)$
- $A \equiv P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3 \quad$ und $\quad B \equiv \neg P_2 \vee \neg P_3 \vee P_4$
- $A \to B$ ist eine Tautologie.
- P_1 ist einziges Atom in A und nicht in B.

Weiteres Beispiel zur Konstruktion von C

- $A \to B$ mit
  $A = (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_3) \wedge P_2$
  $B = \neg((\neg P_2 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_4) \wedge \neg P_4)$
- $A \equiv P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3$ und $B \equiv \neg P_2 \vee \neg P_3 \vee P_4$
- $A \to B$ ist eine Tautologie.
- P_1 ist einziges Atom in A und nicht in B.
- $$\begin{aligned} A[\mathbf{1}] &= (\mathbf{1} \vee \neg P_2) \wedge (\neg \mathbf{1} \vee \neg P_3) \wedge P_2 \\ &\equiv \mathbf{1} \wedge \neg P_3 \wedge P_2 \\ &\equiv \neg P_3 \wedge P_2 \end{aligned}$$

Weiteres Beispiel zur Konstruktion von C

- $A \rightarrow B$ mit
  $A = (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_3) \wedge P_2$
  $B = \neg((\neg P_2 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_4) \wedge \neg P_4)$
- $A \equiv P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3$ und $B \equiv \neg P_2 \vee \neg P_3 \vee P_4$
- $A \rightarrow B$ ist eine Tautologie.
- P_1 ist einziges Atom in A und nicht in B.
- $$\begin{aligned} A[\mathbf{1}] &= (\mathbf{1} \vee \neg P_2) \wedge (\neg \mathbf{1} \vee \neg P_3) \wedge P_2 \\ &\equiv \mathbf{1} \wedge \neg P_3 \wedge P_2 \\ &\equiv \neg P_3 \wedge P_2 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} A[\mathbf{0}] &= (\mathbf{0} \vee \neg P_2) \wedge (\neg \mathbf{0} \vee \neg P_3) \wedge P_2 \\ &\equiv \neg P_2 \wedge \mathbf{1} \wedge P_2 \\ &\equiv \mathbf{0} \end{aligned}$$

Weiteres Beispiel zur Konstruktion von C

- $A \to B$ mit
  $A = (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_3) \wedge P_2$
  $B = \neg((\neg P_2 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_4) \wedge \neg P_4)$
- $A \equiv P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3 \quad$ und $\quad B \equiv \neg P_2 \vee \neg P_3 \vee P_4$
- $A \to B$ ist eine Tautologie.
- P_1 ist einziges Atom in A und nicht in B.
- $$\begin{aligned} A[\mathbf{1}] &= (\mathbf{1} \vee \neg P_2) \wedge (\neg \mathbf{1} \vee \neg P_3) \wedge P_2 \\ &\equiv \mathbf{1} \wedge \neg P_3 \wedge P_2 \\ &\equiv \neg P_3 \wedge P_2 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} A[\mathbf{0}] &= (\mathbf{0} \vee \neg P_2) \wedge (\neg \mathbf{0} \vee \neg P_3) \wedge P_2 \\ &\equiv \neg P_2 \wedge \mathbf{1} \wedge P_2 \\ &\equiv \mathbf{0} \end{aligned}$$
- Also $C = (\neg P_3 \wedge P_2) \vee \mathbf{0} \quad \equiv \quad \neg P_3 \wedge P_2$
  ist eine Interpolante für $A \to B$.