실험계획과 분석

심송용(한림대학교 데이터과학스쿨)

http://jupiter.hallym.ac.kr

완전임의화 블록설계

짝비교(paired sample t-test)

- 독립 2표본인 경우 두 그룹의 자료 $X_1, X_2, \ldots, X_m$과 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$이 독립인 경우에 적용.
- 두 그룹 자료의 모평균을 비교하는 문제에서 자료가 짝으로 이루어진 경우. 이 경우 X_i와 Y_i는 독립이 아닐 수 있음.
- $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$이 n개의 임의표본이며 $E(X_i) = \mu_1$이고 $E(Y_i) = \mu_2$ $D_i = X_i - Y_i \sim N(\mu_D, \sigma_D^2)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ 일 때
- 평균차 $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$에 대한 추론 ⇨ 짝비교, 대응표본 t-검정, 쌍체비교 등으로 불림.

예: 두 종류의 타이어 A와 B의 마모도를 비교하기 위해 5대의 자동차의 앞바퀴 좌우에 임의로 A, B를 장착한 후 마모도를 비교하는 문제를 생각해보자. 이 경우

- 자동차의 무게, 운전자의 특성(각 차량을 다른 운전자가 운전하는 경우) 등에 의해 각 차량의 타이어 마모도는 영향을 받는다.
- 예를 들어 첫 번째 차량은 무게가 많이 나가는 차량으로 급가속, 급정지를 많이 한다면 타이어 A와 B 모두 마모도가 높을 것이다. 즉 A의 마모도가 높으면 B의 마모도도 높을

완전임의화 블록설계

것으로 어느 정도 예상이 가능하고, 이는 독립성을 가정할 수 없게 한다.

예: 두 콜라의 선호도를 알아보기 위해 표시가 나지 않는 컵에 두 콜라를 담고 피실험자를 대상으로 콜라 맛에 대한 평가를 하도록 한 후 어느 콜라의 선호도가 높은지 결정하는 경우:

- 첫 번째 피실험자는 차가운 것을 싫어하는 사람이면 두 콜라 모두에 낮은 점수를 줄 수 있다.
- 두 번째 피실험자는 브랜드를 가리지 않고 콜라를 좋아하는 사람이면 두 콜라 모두에 높은 점수를 줄 수 있다.
- 이런 이유로 각 콜라에 대한 i번째 평가자의 점수 X_i와 Y_i는 독립이라고 가정할 수 없다.

완전임의화 블록설계

자료가 짝으로 얻어진 두 그룹의 평균차에 대한 추론:

$D_i = X_i - Y_i$라고 할 때

$$\overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i}{n} \left(\overline{D} = \overline{X} - \overline{Y} \right), \quad S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (D_i - \overline{D})^2}{n-1}$$ 를 각각 표본평균과 표본분산이라 하면

$$t = \frac{\overline{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

임이 알려져 있다. 따라서

$$1 - \alpha = \Pr[-t_{n-1;\alpha/2} < \frac{\overline{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}} < t_{n-1;\alpha/2}]$$

$$= \Pr[\overline{D} - t_{n-1;\alpha/2} \frac{S_D}{\sqrt{n}} < \mu_D < \overline{D} + t_{n-1;\alpha/2} \frac{S_D}{\sqrt{n}}]$$

에서

완전임의화 블록설계

$\mu_D = \mu_1 - \mu_2$의 100(1-α)% 신뢰구간

$$\boxed{\mu_D = \overline{D} \pm t_{n-1;\alpha/2}\frac{S_D}{\sqrt{n}}}$$

$H_0 : \mu_D = \delta_0$에 대한 가설검정.

다음 검정통계량이 귀무가설이 참이면 자유도 $(n-1)$인 t-분포를 따르므로

$$t_0 = \frac{\overline{D} - \delta_0}{S_D / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

- 대립가설 $H_1 : \mu_D > \delta_0$이면 $t_0 > t_{n-1;\alpha}$이면 귀무가설을 기각
- 대립가설 $H_1 : \mu_D < \delta_0$이면 $t_0 < -t_{n-1;\alpha}$이면 귀무가설을 기각
- 대립가설 $H_1 : \mu_D \neq \delta_0$이면 $|t_0| > t_{n-1;\alpha/2}$이면 귀무가설을 기각

(자이를 계산한 후 자이에 대한 일표본 추론과 같음)

완전임의화 블록설계

수치보기(위의 자동차 타이어 마모도 차이여부):

자동차	1	2	3	4	5	평균	분산
A	10.6	9.8	12.3	9.7	8.8	10.24	1.733
B	10.2	9.4	11.8	9.1	8.3	9.76	1.763
D=A-B	0.4	0.4	0.5	0.6	0.5	0.48	0.007

- μ_D의 95% 신뢰구간($t_{4;0.025} = 2.7764$)

$$\mu_D = \overline{D} \pm t_{n-1;\alpha/2} \frac{S_D}{\sqrt{n}} = 0.48 \pm 2.776 \frac{\sqrt{0.007}}{\sqrt{5}} = (0.376, 0.5839)$$

이며

- 귀무가설 $H_0 : \mu_D = 0$ 대 대립가설 $H_1 : \mu_D \neq 0$을 검정하기 위한 검정통계량은

$$t_0 = \frac{\overline{D} - \delta_0}{S_D / \sqrt{n}} = \frac{0.48 - 0}{\sqrt{0.007} / \sqrt{5}} = 12.829$$ 로 $|t_0| > t_{4,0.025} = 2.7764$ 이므로 귀무가설을 기각.

- 유의확률은 $2\Pr[t_{n-1} > t_0] = 0.00021$ 이므로 귀무가설 기각

완전임의화 블록설계

만일 위의 자료를 독립 2표본으로 착각하면 $S_p^2 = \dfrac{4 \cdot 1.733 + 4 \cdot 1.763}{8} = 1.748$이므로

$t_0 = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_p \sqrt{1/n + 1/n}} = \dfrac{0.48}{\sqrt{1.748}\sqrt{1/5 + 1/5}} = 0.574$ 이고 $t_{8;0.025} = 2.306$으로

$|t_0| < t_{n+n-2;\alpha/2}$ 이므로 귀무가설을 기각하지 못한다는 잘못된 결론에 도달.

SAS를 사용한 짝비교

```
data a /* ttest3.sas */;
input x  y;
datalines;
10.6 10.2
 9.8  9.4
12.3 11.8
 9.7  9.1
 8.8  8.3
```

완전임의화 블록설계

```
;

proc ttest;
 paired x*y;
run;
```

Difference: x - y

N	Mean	Std Dev	Std Err	Minimum	Maximum
5	0.4800	0.0837	0.0374	0.4000	0.6000

Mean	95% CL Mean		Std Dev	95% CL Std Dev	
0.4800	0.3761	0.5839	0.0837	0.0501	0.2404

DF	t Value	Pr > |t|
4	12.83	0.0002