



실험계획과 분석

심송용(한림대학교 데이터과학스쿨)

<http://jupiter.hallym.ac.kr>

다중비교

Bonferroni 검정(수정)

LSD의 계산에서 유의수준이 α 이면 $LSD(i,j) = t_{df(MSE); \alpha/2} \sqrt{MSE(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j})}$ 로 $\alpha/2$ 를 사용하였다(양측). 그러나 여러개의 가설을 동시에 검정하면서 각각의 유의수준을 모두 α 로 하는 것은 전체오류율(집단오류율; familywise error rate)가 α 보다 커지는 상황이 발생한다. 예를 들어 a 개의 수준을 가진 처리에서 모든 가능한 비교는 $m = a(a-1)/2$ 일 때

$$H_{01} : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_{02} : \mu_1 = \mu_3$$

\vdots

$$H_{0m} : \mu_{a-1} = \mu_a$$

이며 각각의 비교가 유의수준 α 에서 행해지면 E_i 를 H_{0i} 에 대한 제1종오류(귀무가설이 참일 때 귀무가설을 기각하는 오류. 이 오류의 최대허용치가 유의수준)라 하면 전체오류율은

$$\text{전체오류율} = \Pr(\text{제1종 오류}) = \Pr\left(\bigcup_{i=1}^m E_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \Pr(E_i) = m\alpha$$

다중비교

로 전체 유의수준은 α 가 아닌 값이며 최대 $m\alpha$ 까지 가능하다.

따라서 전체 유의수준이 α 인 경우 비교하는 회수 만큼 적절한 보정이 필요하며 전체 유의수준이 α 이면 개별 비교의 유의수준을 $\frac{\alpha}{m} = \frac{\alpha}{a(a-1)/2}$ 을 사용하는 것을 Bonferroni 수정이라고 한다. 즉, $|\bar{y}_i - \bar{y}_j|$ 이

$$Bonf(i,j) = t_{df(MSE);(\alpha/2)/m} \sqrt{MSE(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j})}$$

보다 크면 차이 있는 그룹으로, 그렇지 않으면 차이 없는 그룹으로 판단한다.

앞에서 사용한 4가지 기름에 대한 다중비교에서 본페로니 수정을 적용하면 $a = 4$ 이므로 $m = 4 \times 3/2 = 6$ 이므로 개별 유의수준은 $\alpha/6$ 을 사용하여야 하고 유의수준이 5%라면 개별비교에서의 유의수준은 0.00833이 된다. 따라서

$$Bonf(i,j) = t_{df(MSE);(\alpha/2)/6} \sqrt{MSE(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j})} = 2.927 \sqrt{100.9(\frac{1}{6} + \frac{1}{6})} = 16.975$$

다중비교

가 된다. 여기서 $t_{20;0.004167} = 2.927$ 을 사용한 것이다. 따라서 본페로니 수정의 결과는

$$|\bar{y}_1 - \bar{y}_2| = 13.0 < 16.975$$

$$|\bar{y}_1 - \bar{y}_3| = 4.0 < 16.975$$

$$|\bar{y}_1 - \bar{y}_4| = 10.0 < 16.975$$

$$|\bar{y}_2 - \bar{y}_3| = 9.0 < 16.975$$

$$|\bar{y}_2 - \bar{y}_4| = 23.0 > 16.975$$

$$|\bar{y}_3 - \bar{y}_4| = 14.0 < 16.975$$

이며 이 결과를 선으로 도시하면 다음과 같다.

\bar{y}_4	\bar{y}_1	\bar{y}_3	\bar{y}_2
162	172	176	185
<hr/>			

다중비교

SAS를 이용한 Bonferroni 검정. (m.comparisons2.sas, data step 생략)

```
proc glm data = fatdata;
```

```
  class oil;
```

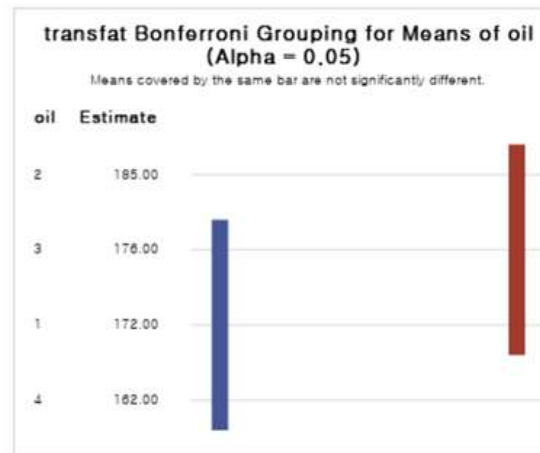
```
  model transfat = oil;
```

```
  means oil/ bon cldiff; /* 또는 means oil/ bon lines; */
```

```
run;
```

means 문에서 bon을 사용하여 결과를 얻을 수 있음. cldiff 또는 lines(기본값) 따른 출력이 다른 형태임도 lsd와 같음.

Alpha	0.05
Error Degrees of Freedom	20
Error Mean Square	100.9
Critical Value of t	2.92712
Minimum Significant Difference	16.976



다중비교

Comparisons significant at the 0.05 level are indicated by ***.				
oil Comparison	Difference Between Means	Simultaneous 95% Confidence Limits		
2 - 3	9,000	-7,976	25,976	
2 - 1	13,000	-3,976	29,976	
2 - 4	23,000	6,024	39,976	***
3 - 2	-9,000	-25,976	7,976	
3 - 1	4,000	-12,976	20,976	
3 - 4	14,000	-2,976	30,976	
1 - 2	-13,000	-29,976	3,976	
1 - 3	-4,000	-20,976	12,976	
1 - 4	10,000	-6,976	26,976	
4 - 2	-23,000	-39,976	-6,024	***
4 - 3	-14,000	-30,976	2,976	
4 - 1	-10,000	-26,976	6,976	

다중비교

Dunnette 검정

a 개의 수준을 비교하는 실험에서 종종 한 개의 대조군과 $k = (a - 1)$ 개의 처리군을 비교하는 경우가 있다.

- 옥수수를 재배할 때 무비료, 화학비료(관행농), 유기농에 따른 수확량 비교
- 두통에 대해: 약을 사용하지 않음, 이부프로펜(ibuprofen) 계열의 약, 아세트아미노펜(acetaminophen) 계열의 약, 아세틸살리실산(acetylsalicylic acid) 계열의 효과를 비교
에서 무비료 및 약을 사용하지 않는 경우와 비료사용, 약을 사용하는 경우를 비교할 때 무비료 및 약을 사용하지 않는 경우는 대조군이 된다.

이와 같이 대조군과 처리군을 비교할 때의 다중비교에서는 Dunnette 검정이 사용될 수 있다. Dunnette 검정은 i 번째 처리와 대조군의 모평균을 각각 μ_i 와 μ_c 라고 할 때 $\mu_i - \mu_c$ 에 대한 $100(1 - \alpha)\%$ 신뢰구간이

$$\mu_i - \mu_c = (\bar{y}_i - \bar{y}_c) \pm d_{k, df(MSE); \alpha} \sqrt{MSE \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_c} \right)}$$

임을 사용하고 이를 바탕으로

다중비교

$$\frac{|\bar{y}_i - \bar{y}_c|}{\sqrt{MSE(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_c})}} > d_{k, df(MSE); \alpha}$$

이면 차이가 있는 그룹으로, 그렇지 않으면 차이가 없는 그룹으로 판별하는 것이다.

여기서 $d_{k, df(MSE); \alpha}$ 는 교재의 표(Appendix 2)에 주어진 값이고 n_c 는 대조군의 자료수이다.

앞에서 사용한 네 가지 기름을 비교함에 있어서 두 번째 기름은 기존에 사용하던 것이고 나머지 기름은 기존 것을 교체할 후보들이라하고 Dunnett 검정을 해보자. 이 경우 대조군이 2번 기름이므로 1과 2, 3과 2, 4와 2의 비교만 필요하며 $k = a - 1 = 3$ 이므로

$d_{k, df(MSE); \alpha} = d_{3, 20; 0.05} = 2.54$ 를 표에서 얻을 수 있으며

$$\frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{\sqrt{MSE(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{13.0}{\sqrt{100.9(\frac{1}{6} + \frac{1}{6})}} = 2.241 < 2.54$$

다중비교

$$\frac{|\bar{y}_3 - \bar{y}_2|}{\sqrt{MSE(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{9.0}{\sqrt{100.9(\frac{1}{6} + \frac{1}{6})}} = 1.551 < 2.54$$

$$\frac{|\bar{y}_4 - \bar{y}_2|}{\sqrt{MSE(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{23.0}{\sqrt{100.9(\frac{1}{6} + \frac{1}{6})}} = 3.966 > 2.54$$

으로 4번째 기름만 대조군(2번 기름)에 비해 유의미한 차이가 있다.

SAS를 사용한 Dunnett 검정 (m.comparisons2.sas, data step 생략)

```
proc glm data = fatdata;  
  class oil;  
  model transfat = oil;  
  means oil/ dunnett('2');  
run;
```

다중비교

means 문에서 dunnett을 사용하여 결과를 얻을 수 있음.

- lsd나 bon과 달리 cldiff가 기본값이며 특성상 lines는 적용이 안됨. lines를 설정하면 출력이 안 나옴에 주의
- 기준범주를 괄호 안에 설정. 설정하지 않으면 첫 번째 범주(이 경우 1)이 대조군으로 간주하고 계산함.

Alpha	0.05
Error Degrees of Freedom	20
Error Mean Square	100.9
Critical Value of Dunnett's t	2.54035
Minimum Significant Difference	14.733

Comparisons significant at the 0.05 level are indicated by ***.					
oil Comparison	Difference Between Means	Simultaneous 95% Confidence Limits			
3 - 2	-9,000	-23,733	5,733		
1 - 2	-13,000	-27,733	1,733		
4 - 2	-23,000	-37,733	-8,267	***	