

線形代数 A 第 7 回演習課題

2023/7/12

L^AT_EX

1.

$$(1) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{86}{33} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\therefore x = \frac{86}{33}, y = -\frac{7}{3}, z = 3, w = 1$$

$$(2) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 3 & 1 & 7 & 7 & 9 \\ 1 & 9 & 11 & 19 & 11 \\ 2 & 7 & 11 & 5 & t \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t \end{array} \right)$$

$$\therefore x + 2y = -3, y + z = -11, w = 1 \quad (t = 0)$$

$$(3) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & t+3 \\ 4 & 3 & 2 & t & t \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\therefore x - z = 0, y + z = 0, w = 0 \quad (t = 0, -1)$$

2.

$$(1) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} & 2 & -\frac{5}{3} \end{array} \right)$$

$$\therefore \left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 & -1 \\ -\frac{8}{3} & 2 & -\frac{5}{3} \end{array} \right)$$

$$(2) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{12} \end{array} \right)$$

$$\therefore \left(\begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{12} \end{array} \right)$$

$$(3) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{12} \end{array} \right)$$

$$\therefore \left(\begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{12} \end{array} \right)$$

3.

拡大係数行列にすると以下のようになる

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & 2k & k+1 \\ k-1 & 3k-1 & k & k-1 \\ 2k-1 & 7k-1 & 3k & 3k-1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2k+2}{k+3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1-k}{k+3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad (k \neq 0, 3)$$

$$\therefore x = \frac{2k-12}{3-k}, y = \frac{1-k}{3-k}, z = 0 \text{ のときに 1 組の解を持つ。}$$

(i) $k = 0$ のとき、

$$\begin{cases} x+y=1 \\ -x-y=-1 \\ -x-y=-1 \end{cases}$$

$x = t, y = 1 - t, z = s$ と表せる。

\therefore 解が 2 つ以上ある。

(ii) $k = 3$ のとき、

$$\begin{cases} x+4y+6z=4 \\ 2x+8y+3z=2 \text{ となる。①, ②より、} z=\frac{2}{3} \\ 5x+20y+2z=8 \end{cases}$$

$$\text{①, ③より、} z = \frac{16}{21}$$

① ③を満たす z は存在しない。

\therefore 解は存在しない。

$\therefore k = 0$ のとき、 $(x, y, z) = (t, 1 - t, s)$ (s, t はパターン)