確率論第 6 回課題

学籍番号: 202310330
名前: 長田悠生

2023/6/4

$\LaTeX$

演習課題 6A

確率変数を X、確率質量関数を $p_X(x)$ としたとき、期待値は以下の式で表せる。

$$\sum_x x p_X(x)$$

$p_X(xi)$ を k 回目までに目標の当たりの数-1 の当たりが出てから $k+1$ 回目に目標の当たりの数が出る確率だとすると、$p_X(xi)$ は幾何分布となり、期待値は 試行回数 $\times\, p_X(xi+1)$ より、xi までの試行回数を k と置いているので、

$$E[Xi] = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)p(1-p)^k$$
$$= p \times \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(1-p)^k$$
$$= p\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(k+1)(1-p)^k\right\}$$
$$= p\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1-(1-p)^{n+1}}{p^2} - \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(1-p)^{n+1}}{p}\right\}$$
$$= \frac{1}{p}$$

$$E[X] = E[X1] + E[X2] + \cdots + E[Xr]$$
$$= r \times \frac{1}{p} = \frac{r}{p}$$
$$\therefore E[X] = \frac{r}{p}$$

演習課題 6B

(a)

$$\int_{\infty}^{-\infty} f(x)dx = 1 \text{ より、}$$
$$\int_{\infty}^{-\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f_X(x)dx + \int_{0}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$
$$= 0 + \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\frac{x}{7}100} dx$$
$$= 0 + \left[-100\lambda e^{-\frac{x}{7}100}\right]_0^{\infty}$$
$$100\lambda = 1$$
$$\therefore \lambda = \frac{1}{100}$$

(b)

$0 \leq x \leq 100$ の範囲の $f_X(x)$ についての積分を行えばよいので、

$$\int_{0}^{100} f(x)dx = \int_{0}^{100} \lambda e^{-\frac{x}{7}100} dx$$
$$= \left[-100\lambda e^{-\frac{x}{7}100}\right]_0^1 00$$
$$= 100\lambda - \frac{100\lambda}{e}$$
$$\lambda = \frac{1}{100} \text{より、}$$
$$= 1 - \frac{1}{e}$$
$$\therefore 1 - \frac{1}{e}$$