確率論第 2 回演習課題

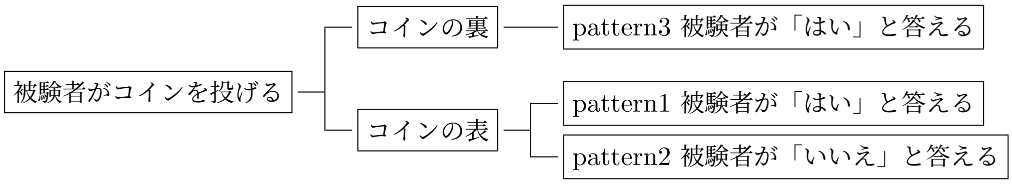
長田悠生

2023/4/25

LaTeX

演習課題 2A

問題の理解のために、まずツリー構造に直してみる。



問題文をツリー構造に直すと、結果には pattern1 から 3 があることがわかった。次に、pattern1 から 3 について、集合 A・B を用いて表す。

Pattern1

$$P(A \cap B) \tag{1}$$

Pattern2

$$P(A^c \cap B) \tag{2}$$

Pattern3

$$P(B^c) \tag{3}$$

A と B は互いに独立の関係で、A と B のみで C を表現できる。よって、上図のツリー構造より $P(C)$ は、

$$P(A \cap B) + P(B^c) = P(C) \tag{4}$$

と表せる。

よって、$P(A)$ は、

$$\frac{1}{2}P(A) + \frac{1}{2} = \frac{55}{100} \tag{5}$$

$$P(A) = 0.1 \tag{6}$$

演習課題 2B

事象 A と B が独立より、独立の定義から次のことが成り立つ。

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{7}$$

事象 B と事象 B^c の和集合は、全体集合を表すので、

$$P(B) + P(B^c) = 1 \tag{8}$$

また、$P(A \cap B)$ と $P(A \cap B^c)$ は排反より、

$$P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = P(A) \tag{9}$$

上記の 3 式を利用して、事象 A と事象 B^c が独立であることを示す。
以下、事象 A と事象 B^c が独立であることの証明

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^c) \tag{10}$$

$$P(B) = 1 - P(B^c) \tag{11}$$

$$P(A) - P(A \cap B^c) = \{1 - P(B^c)\}P(A) \tag{12}$$

$$P(A) - P(A \cap B^c) = P(A) - P(B^c)P(A) \tag{13}$$

$$P(A \cap B^c) = P(B^c)P(A) \tag{14}$$

式 (14) は、事象 A と B^c が独立であるときの、定義を表す式である。
よって、証明を得る。