力学 1 演習課題【4】

名前: 長田悠生
学籍番号: 202310330

2023/6/18

LaTeX

4-2

(1)

$$\boldsymbol{F} = -m\omega^2 x(t) \text{ より、}$$
$$\boldsymbol{F} = m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -m\omega^2 x(t)$$
$$\therefore m\frac{d^2}{dt^2}x(t) + m\omega^2 x(t) = 0$$

(2-1)

$$x(t) = e^{\lambda t}$$
$$\therefore \frac{d^2}{dt^2}e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0$$

(2-2)

$$x(t) = e^{\lambda t}$$
$$\frac{d^2}{dt^2}e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0$$
$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0$$
$$e^{\lambda t}(\omega^2 + \lambda^2) = 0$$
$$e^{\lambda t} > 0 \text{ より、}$$
$$\lambda^2 = -\omega^2$$
$$\lambda = \pm\omega i$$
$$\therefore x_1(t) = e^{\omega t i}\text{、}x_2(t) = e^{-\omega t i}$$

(2-3)

$$e^{\omega t i} \times A = e^{-\omega t i} \quad (A \text{ は定数関数) とおくと、}$$
$$A = e^{-2\omega t i}$$
$$\therefore A \text{ は定数関数ではないので、} x_1(t) \text{ と } x_2(t) \text{ は一次独立}$$
$$\therefore (\text{一般解})x(t) = Ae^{\omega t i} + Be^{-\omega t i}$$

(3)

$$x(t) = Ae^{\omega t i} + Be^{-\omega t i}$$
$$= A(\cos\omega t + i\sin\omega t) + B\cos(-\omega t) + i\sin(-\omega t)$$
$$= A(\cos\omega t + i\sin\omega t) + B(\cos\omega t - i\sin\omega t)$$
$$\therefore A(\cos\omega t + i\sin\omega t) + B(\cos\omega t - i\sin\omega t)$$

(4)

$x(t) = A(\cos\omega t + i\sin\omega t) + B(\cos\omega t - i\sin\omega t)$
$= (A+B)\cos\omega t + i(A-B)\sin\omega t$
$t = 0$ のとき、
$x(0) = (A+B)\cos 0 + i(A-B)\sin 0$
$= A+B$
このとき、$x(0) = D$ より、$A+B = D$ である。
$v(t) = \dfrac{d}{dt}x(t) = -\omega(A+B)\sin\omega t + \omega(A-B)i\cos\omega t$
$t = 0$ のとき、
$v(0) = -\omega(A+B)\sin 0 + \omega(A-B)i\cos 0 = 0$
$\omega(A-B)i = 0$
$\omega \neq 0$ より、
$A - B = 0$
$A = B = \dfrac{1}{2}D$
$\therefore x(t) = D\cos\omega t$
おもりの運動は、振幅 D の $\cos$ 波になる。

4-3

(1)

$$\boldsymbol{F} = -m\omega^2 x(t) - 2m\beta\frac{dx(t)}{dt}$$

(2)

ωを全てβに置き換える。
$m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -m\beta^2 x(t) - 2m\beta\dfrac{dx(t)}{dt}$
$m > 0$ より、
$\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -\beta^2 x(t) - 2\beta\dfrac{dx(t)}{dt} \quad \cdots ①$
$x(t) = e^{\lambda t}$を代入
$\lambda^2 e^{\lambda t} = -\beta^2 e^{\lambda t} - 2\beta\lambda e^{\lambda t}$
$e^{\lambda t} > 0$ より、
$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \beta^2 = 0$
$(\lambda+\beta)^2 = 0$
$\lambda + \beta > 0$ より、
$\lambda + \beta = 0$
$\lambda = -\beta$
$\therefore x(t) = e^{-\beta t}$

(3)

(2) より、$x(t) = Ce^{-\beta t} \quad (C$ は定数関数)
C を $y(t)$ という関数に置き換えてみる。
$x(t) = y(t)e^{-\beta t}$ と仮定して、(2) の①の式に代入して解いていく。

$$\frac{d^2\, y(t)e^{-\beta t}}{dt^2} = -\beta^2 y(t)e^{-\beta t} - 2\beta \frac{d\, y(t)e^{-\beta t}}{dt}$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} e^{-\beta t} + (\beta^2 - \beta^2) y(t) e^{-\beta t} = 0$$

$e^{-\beta t} > 0$ より、

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = 0$$

したがって、$y(t) = C_1 t + C_2 \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$ とおける。

$$\therefore x(t) = (C_1 t + C_2) e^{-\beta t}$$

$$= C_1 t e^{-\beta t} + C_2 e^{-\beta t}$$

$x(t)$ のもう一つの解は、$te^{-\beta t}$ となる。

(4)

$$x(t) = C_1 t e^{-\beta t} + C_2 e^{-\beta t} \quad (\text{一般解})$$

(5)

運動： 臨界減衰
$\omega > \beta$ の場合よりも、収束するのが早い上に、$\omega > \beta$ の場合と異なり、振動しない。

(6)

ドアが閉まる際に、ドアの動きが振動しないようにするドアダンパーへの利用。