線形代数 A 第 2 回演習課題

名前: 長田悠生
学籍番号: 202310330

2023/6/4

LaTeX

1.(1)

この方程式の切片は b より、$(x, y) = (0, b)$ なので、位置ベクトル $\boldsymbol{a} = (0, b)$ とおける。また、方向ベクトルは、この方程式の傾きより、方向ベクトル $\boldsymbol{v} = (1, a)$ とおける。

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$$

1.(2)

$x = c$ となるのは $y = 0$ のときより、位置ベクトル $\boldsymbol{a} = (c, 0)$ とおける。また、y 軸と並行なので傾きを $(x, y) = (0, 1)$ と表せる。よって、方向ベクトルは $\boldsymbol{v} = (0, 1)$ とおける。

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.(3)

$$x = p + tu \cdots ①$$
$$y = q + tv \cdots ②$$
$$① \times v - ② \times u \text{ より、}$$
$$\therefore (x - p)v = (y - q)u$$

2.(1)

直線 l, m をパラメータ表示する。

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdots l$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdots m$

平面 H の法線ベクトルを $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ とおく。また、l の法線ベクトルを $\boldsymbol{l}_v$・m の法線ベクトルを $\boldsymbol{m}_u$とおく。

このとき、$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l}_v) = 0$ かつ $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}_u) = 0$ より、

$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l}_v) = 2X + Y + 3Z = 0 \cdots ①$

$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}_u) = 5X - 2Y + 4Z = 0 \cdot ②$

①と②の式より、$\begin{pmatrix} X \\ \frac{7}{10}X \\ -\frac{9}{10}X \end{pmatrix}$

平面を表す式は、法線ベクトル $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$、位置ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$・$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ としたとき、以下のように表せる。

$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$

上記の式を 2.(1) で求める平面の方程式に当てはめる。すると、以下の方程式になる。それが平面 H の方程式である。

$\therefore 10x + 7y - 9z = 0$

2.(2)

l の位置ベクトルを $\boldsymbol{l}_a$・m 位置ベクトルを $\boldsymbol{m}_a$とおくと、

$\boldsymbol{l}_a = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{m}_a = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 2 \end{pmatrix}$ である。

この 2 点は、平面 H 上の点より、h の方程式を満たす。よって、

$10 \times a + 7 \times 0 + -9 = 0$

$\therefore a = \dfrac{9}{10}$

$10 + 7b - 18 = 0$

$\therefore b = \dfrac{8}{7}$

3.(1)

まず、交線の方向ベクトルを求める。

$x - y + 2z = 1$ を平面 A、$2x + y - z = -1$ を平面 B とおく。

また、平面 A の法線ベクトルを n_A、平面 B の法線ベクトルを n_Bとおくと、

$\boldsymbol{n}_A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{n}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3.(1) で求める交線を $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}$ とおくと、

$(\boldsymbol{n}_A, \boldsymbol{v}) = 0$ かつ $(\boldsymbol{n}_B, \boldsymbol{v}) = 0$ であるので、$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ としたとき、

$(\boldsymbol{n}_A, \boldsymbol{v}) = X - Y + 2Z = 0 \cdots$ ①

$(\boldsymbol{n}_B, \boldsymbol{v}) = 2X + Y - Z = 0 \cdots$ ②

①と②より、

$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} X \\ -5X \\ 3X \end{pmatrix}$

また、位置ベクトルを求める為に、$z = 0$ のときの x、y の値を求める。

$x - y = 1 \cdots$ 平面 A

$2x + y = -1 \cdots$ 平面 B

上記の連立方程式を解くと、以下の答えが出てくる。

$(x, y, z) = (0, -1, 0)$

そのため、位置ベクトル $\boldsymbol{m}$ は、$\boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

3.(2)

求めたい平面の法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とおくと、$\boldsymbol{n}$ は l の方向ベクトルで、

l と xy 平面との交点を通ることから、位置ベクトル $\boldsymbol{m}$ は、$\boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

平面の法線ベクトルと位置ベクトルを、平面の方程式に当てはめると以下のような式になる。

以下の式が、3.(2) で求める平面の方程式である。

$\therefore x - 5y - 3z - 2 = 0$