線形代数 A 第 4 回演習課題

名前: 長田悠生
学籍番号: 202310330

2023/6/21

LaTeX

1.(1)

$$
\begin{aligned}
&(\text{左辺}) = (E-A)(E+A)^{-1} = E(E-A)(E+A)^{-1} \\
&= (E+A)^{-1}(E+A)(E-A)(E+A)^{-1} \\
&= (E+A)^{-1}(E^2-A^2)(E+A)^{-1} \\
&(E+A)^{-1}(E-A)(E+A)(E+A)^{-1} \\
&(E+A)^{-1}(E-A) = (\text{右辺}) \quad \square
\end{aligned}
$$

1.(2)

$(E+A)^T X = X(E+A)^T = E$ となる X について考える。
$E+A$ が正則より、
$X = ((E+A)^T)^{-1}$は存在する。
$\therefore (E+A)^T$は正則

1.(3)

$A = -A^T$を使う。

$$
\begin{aligned}
&(E-A)(E+A)^{-1}\left\{(E-A)(E+A)^{-1}\right\}^T = (E-A)(E+A)^{-1}(E-A^T)(E+A^T)^{-1} \\
&= (E+A^T)(E-A^T)^{-1}(E-A^T)(E+A^T)^{-1} \\
&= \left\{(E+A)(E-A)^{-1}(E-A)(E+A)^{-1}\right\}^T \\
&= \left\{(E+A)(E+A^T)^{-1}(E+A^T)(E+A)^{-1}\right\}^T \\
&= E \quad \square
\end{aligned}
$$

1.(4)

$$
\begin{aligned}
&\left\{(E-A^T)(E+A^T)^{-1}\right\}^T = (E-A^T)(E+A^T)^{-1} \\
&= (E-A^{-1})(E+A^{-1})^{-1} \\
&= (E-A^{-1})AA^{-1}(E+A^{-1})^{-1} \\
&= (A-E)(E+A)^{-1} \\
&= -(E-A)(E+A)^{-1} \quad \square
\end{aligned}
$$

2.(1)

$A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ より、

$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{a}{a+6} & \frac{3}{a+6} \\ \frac{-2}{a+6} & \frac{1}{a+6} \end{pmatrix} = E$ となり、

$\begin{pmatrix} a+1 & 2 \\ 5 & a+4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{a+4}{(a+1)(a+4)-10} & \frac{-2}{(a+1)(a+4)-10} \\ \frac{-5}{(a+1)(a+4)-10} & \frac{a+1}{(a+1)(a+4)-10} \end{pmatrix} \neq E$ となるような a を探せばよい。

$a \neq -6$ かつ $a = 1$ か -6 であればよいので、
$\therefore a = 1$

2.(2)

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

計算すると、$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$XA = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.1

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = f(\boldsymbol{e_1}) + f(\boldsymbol{e_3})$$

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = f(\boldsymbol{e_2}) + f(\boldsymbol{e_3})$$

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} = 2f(\boldsymbol{e_3})$$

したがって、$A = (f(\boldsymbol{e_1})f(\boldsymbol{e_2})f(\boldsymbol{e_3})) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

4.

$T_A(\boldsymbol{e_j}) = A\boldsymbol{e_j} \quad (1 \leq j \leq n)$ である。

また、$T_{A^n}(\boldsymbol{e_j}) = A^n\boldsymbol{e_j}$である。

$\boldsymbol{e_j}$と T_Aの具体的な関係についてみる。

$n = 3$ のとき、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_A(\boldsymbol{e_1}) = A\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = a\boldsymbol{e_3}$$

$$T_A(\boldsymbol{e_2}) = A\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e_1}$$

$$T_A(\boldsymbol{e_3}) = A\boldsymbol{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e_2}$$

ここまでの結果で、以下のことが推測できる。

$T_A(\boldsymbol{e_j}) = \boldsymbol{e_{j-1}} \ \ (2 \leq j)$、$T_A(\boldsymbol{e}_1) = a\boldsymbol{e_n} \ \ (1 = j)$

また、合成について、$T_A(\boldsymbol{e_3})$ の場合を例にすると、

$T_A\left(T_A\left(T_A(\boldsymbol{e_3})\right)\right) = a\boldsymbol{e_3}$

ここで、以下のことが推測できる。

$T_{A^n}(\boldsymbol{e_j}) = a\boldsymbol{e}_j$

$T_{A^n}(\boldsymbol{e_j}) = A^n\boldsymbol{e_j} = a\boldsymbol{e_j}$

ここで a はスカラーであり、A^nは、n 次正方行列である。

$\therefore A^n = aE_n$