力学 1 演習課題【3】

名前: 長田悠生
学籍番号: 202310330

2023/6/12

LaTeX

3-2 章

(1)

鉛直上向きを y 軸の正方向、v_oベクトルの方向を x 軸の正の方向とする。

$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma v_x \\ -mg - \gamma v_y \end{pmatrix}$

(2)

まずは、y 成分について解く。

$m\dfrac{dv_y}{dt} = -(mg + \gamma v_y) \cdots ①$

$g + \dfrac{\gamma v_y}{dt} = \eta$とおく。これを t で微分

$\dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{m}{\gamma} \times \dfrac{d\eta}{dt} \cdots ②$

②を①に代入

$\dfrac{m}{\gamma} \times \dfrac{d\eta}{dt} = -\eta$

$g + \dfrac{\gamma v_y}{m} = e^{-\frac{\gamma}{m}t - C_1}$ (積分定数を C_1とおく。)

y 成分の $t = 0$ の時は、$v_y = 0$ より、

$g + \dfrac{\gamma}{m} \times 0 = e^{-C_1}$

$-\log g = C_1$

$\therefore v_y = \dfrac{m}{\gamma}\left(e^{-\frac{\gamma}{m}t + \log g} - g\right)$

次に、x 成分について解く。

$m\dfrac{dv}{dt} = -\gamma v$

$\displaystyle\int \frac{1}{v}dv = -\int \frac{\gamma}{m}dt$

$\log|v| + C_1 = -\dfrac{\gamma}{m}t + C_2$ (積分定数を C_1、C_2とおく。)

$v = e^{-\frac{\gamma}{m}t + C_3}$ $(C_3 = C_2 - C_1)$

$t = 0$ のとき、$v_x = v_o$より、

$\therefore v_x = e^{-\frac{\gamma}{m}t + \log v_o}$

$$\therefore v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\gamma}{m}t + \log v_o} \\ \frac{m}{\gamma}\left(e^{-\frac{\gamma}{m}t + \log g} - g\right) \end{pmatrix}$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&y=\frac{m}{\gamma}\left(-\frac{m}{\gamma}e^{-\frac{\gamma}{m}t+\log g}-gt\right)+\frac{mg}{\gamma}\\
&x=-m\gamma e^{-\frac{\gamma}{m}t+\log v_o}+\frac{mv_o}{\gamma}\\
&\therefore z=\begin{pmatrix} y\\ x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{m}{\gamma}\left(-\frac{m}{\gamma}e^{-\frac{\gamma}{m}t+\log g}-gt\right)+\frac{mg}{\gamma}\\ -m\gamma e^{-\frac{\gamma}{m}t+\log v_o}+\frac{mv_o}{\gamma}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
&v_y=\frac{m}{\gamma}\left\{\left(1-\frac{\gamma}{m}t\right)g-g\right\}\\
&=-gt\\
&v_x=\left(1-\frac{\gamma}{m}t\right)v_o\\
&y=\frac{mg}{\gamma}\left(1-\frac{m}{\gamma}\right)\\
&x=v_ot\\
&\therefore v(t)=\begin{pmatrix} v_x\\ v_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(1-\frac{\gamma}{m}t\right)v_o\\ -gt\end{pmatrix}\\
&\therefore z(t)=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_ot\\ \frac{mg}{\gamma}\left(1-\frac{m}{\gamma}\right)\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(5)

十分時間が経過した時、$e^{-\frac{\gamma}{m}t}=0$ とおける。

$$
\begin{aligned}
&\therefore v(t)=\begin{pmatrix} v_x\\ v_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ -\frac{mg}{\gamma}\end{pmatrix}\\
&\therefore z(t)=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=z(t)=\begin{pmatrix}\frac{mv_o}{\gamma}\\ \frac{mg}{\gamma}(1-t)\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

4-1 章

A.(1)

$$\boldsymbol{r}(t) = r(\sin\omega t + \cos\omega t) \text{ より、}$$
$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\omega t \\ r\sin\omega t \end{pmatrix} \quad \text{(成分表示)}$$
$$\boldsymbol{r}(t) = r(\boldsymbol{e}_x \cos\omega t + \boldsymbol{e}_y \sin\omega t) \quad \text{(ベクトル表示)}$$

A.(2)

$$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \boldsymbol{v}(t) = r(\omega\cos\omega t - \omega\sin\omega t) \text{ より、}$$
$$\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega\sin\omega t \\ \omega\cos\omega t \end{pmatrix} \quad \text{(成分表示)}$$
$$\boldsymbol{v}(t) = r\omega(-\boldsymbol{e}_x \sin\omega t + \boldsymbol{e}_y \cos\omega t) \quad \text{(ベクトル表示)}$$

A.(3)

$$\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} = \boldsymbol{a}(t) = r(-\omega^2\sin\omega t - \omega^2\cos\omega t) \text{ より、}$$
$$\boldsymbol{a}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega^2\cos\omega t \\ -r\omega^2\sin\omega t \end{pmatrix} \quad \text{(成分表示)}$$
$$\boldsymbol{a}(t) = -r\omega^2(-\boldsymbol{e}_x \cos\omega t + \boldsymbol{e}_y \sin\omega t) \quad \text{(ベクトル表示)}$$

A.(4)

$$\boldsymbol{v}(t)\cdot\boldsymbol{r}(t) = r^2\omega(\sin\omega t\cos\omega t - \cos\omega t\sin\omega t) = 0$$

$\therefore \boldsymbol{v}(t)$ は $\boldsymbol{r}(t)$ に対して、垂直な方向を向いている。

A.(5)

$$\boldsymbol{a}(t) = -\omega^2\boldsymbol{r}(t)$$

$\therefore \boldsymbol{a}(t)$ は $\boldsymbol{r}(t)$ に対して、反対の方向を向いている。

A.(6)

運動方程式に、$A.(4)$ で求めた加速度をな代入する。

$\boldsymbol{F} = -mr\omega^2(\boldsymbol{e}_x\cos\omega t + \boldsymbol{e}_y\sin\omega t)$

$\therefore$ 力の大きさは、$mr\omega^2$である。

また、力の向きは、

$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}(t) = mr^2\omega^3(\boldsymbol{e}_x\cos\omega t\sin\omega t - \boldsymbol{e}_y\sin\omega t\cos\omega t) = 0$

$\boldsymbol{F} = -m\omega^2\boldsymbol{r}(t)$ より、

$\therefore$ 速さのベクトルとは垂直の関係、位置ベクトルとは反対向きの関係である。

B.(7)

大きさが r で、$\boldsymbol{e}_r$ベクトルの方向のベクトル。

B.(8)

$$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \boldsymbol{v}(t) = \frac{dr}{dt}\boldsymbol{e}_r + r \times \frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt}$$
$$= r \times \frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt}$$
$$= r\omega\boldsymbol{e}\theta$$

大きさが $r\omega$で、方位角ベクトル $\boldsymbol{e}_\theta$の方向。

B.(9)

$$\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} = \boldsymbol{a}(t) = \frac{dr}{dt}\omega\boldsymbol{e}_\theta + \frac{d\omega}{dt} \times r\boldsymbol{e}_\theta + r\omega \times \frac{d\boldsymbol{e}_\theta}{dt}$$
$$= 0 + 0 - r\omega^2\boldsymbol{e}_r = -r\omega^2\boldsymbol{e}_r$$

大きさが $r\omega^2$で、動径ベクトル $\boldsymbol{e}_r$の反対方向。