線形代数 A 第 3 回演習課題

名前: 長田悠生
学籍番号: 202310330

2023/6/12

LaTeX

1.

$$A + B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 6 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \times B_1 = \begin{pmatrix} -11 & 11 \\ -13 & 21 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A \times B_3 = \begin{pmatrix} -15 & 1 & 13 \\ -17 & 7 & 11 \\ 17 & 4 & -18 \end{pmatrix}$$

$$A \times B_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A \times B_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2.(1)

$$\begin{aligned} A \times A^T &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} \\ A^T \times A &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} \\ \therefore A \times A^T &= A^T \times A \end{aligned}$$

2.(2)

$$\begin{aligned} A + A^T &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = 2a \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2aE \\ A - A^T &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = 2b \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2bI \\ A \times A^T &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = (a^2+b^2) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (a^2+b^2)E \end{aligned}$$

3.(1)

任意の正方行列を $n \times n$ 行列 $\{n \in \mathbb{N}(\mathbb{N} > 1)\}$ とおく。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{と表現するとする。}$$

$$A + A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{nn-1} \\ a_{1n} & \dots & a_{n-1n} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + a_{11} & a_{12} + a_{21} & \dots & a_{1n} + a_{n1} \\ a_{21} + a_{12} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} + a_{nn-1} \\ a_{n1} + a_{1n} & \dots & a_{n-1n} + a_{nn-1} & a_{nn} + a_{nn} \end{pmatrix} = B \text{ とおく。}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{11} & a_{12} + a_{21} & \dots & a_{1n} + a_{n1} \\ a_{21} + a_{12} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} + a_{nn-1} \\ a_{n1} + a_{1n} & \dots & a_{n-1n} + a_{nn-1} & a_{nn} + a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\therefore B = B^T$ より、$A + A^T$ は対称行列。

$$A - A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{nn-1} \\ a_{1n} & \dots & a_{n-1n} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & a_{12} - a_{21} & \dots & a_{1n} - a_{n1} \\ a_{21} - a_{12} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} - a_{nn-1} \\ a_{n1} - a_{1n} & \dots & a_{n-1n} - a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix} = C \text{ とおく。}$$

$$-C^T = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} - a_{21} & \dots & a_{1n} - a_{n1} \\ a_{21} - a_{12} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} - a_{nn-1} \\ a_{n1} - a_{1n} & \dots & a_{n-1n} - a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore C = -C^T$ より、$A - A^T$ は交代行列。

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{C+B^T}{2} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & a_{12}-a_{21} & \cdots & a_{1n}-a_{n1} \\ a_{21}-a_{12} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n}-a_{nn-1} \\ a_{n1}-a_{1n} & \cdots & a_{n-1n}-a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} + \\
&\begin{pmatrix} a_{11}+a_{11} & a_{12}+a_{21} & \cdots & a_{1n}+a_{n1} \\ a_{21}+a_{12} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n}+a_{nn-1} \\ a_{n1}+a_{1n} & \cdots & a_{n-1n}+a_{nn-1} & a_{nn}+a_{nn} \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

3.(2)

$$
\begin{aligned}
A+A^T &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} (\text{対称行列}) \\
A-A^T &= \begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \\ -6 & 0 & -4 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} (\text{交代行列})
\end{aligned}
$$

$$
\frac{(\text{対称行列})+(\text{交代行列})}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \\ -6 & 0 & -4 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A
$$

4.

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と可換な二次の正方行列を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと、

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$ より、

$\therefore \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ の時に成立。

また、上記の行列が互いに可換であることを示す。

$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae-bf & af+eb \\ -be-af & -bf+ea \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae-bf & af+eb \\ -be-af & -bf+ea \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ より、互いに可換である。

5.(1)

$$AB \times (\text{左辺}) = AB \times (AB)^{-1} = E(\text{単位ベクトル})$$
$$AB \times (\text{右辺}) = AB \times B^{-1} \times A^{-1}$$
$$= A \times (B \times B^{-1}) \times A^{-1}$$
$$= A \times E \times A^{-1} = A \times A^{-1} = E(\text{単位ベクトル})$$
$$\therefore (AB)^{-1} = A^{-1} \times B^{-1}$$

5.(2)

A が零因子であると仮定すると、$A \times X = 0$ となるような X が存在する。

$A \times X = 0$ の両辺に A^{-1}をかける。

$A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times 0$

$X = 0$

A が零因子の場合は、$X \neq 0$ でなければいけないので、$X = 0$ はこれに反する。

$X \times A = 0$ も同様に、$X = 0$ となる。

$\therefore A$ は零因子ではない。