力学 1 演習課題【1】

名前: 長田悠生
学籍番号: 202310330

2023/5/29

LaTeX

2-1

1.

位置: position, 速度: velocity, 加速度: accelaration

質量: mass, 力: force, 半径: radius

2.(1)

定数を k とおくと、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + mgy\right) = \frac{d}{dt}k$$
$$amv + mgv = 0$$
$$mg = -ma$$

2.(2)

$mg = -ma$ は、運動方程式 $F = ma$ の形になっている。よって、$F = ma$ の両辺に速度 v をかけて、時間 t で積分することで導出できる。

3.(1)

[加速度]

グラフより、

$a(t) = sint$

[速度]

$\int adt = \int sintdt$

$v(t) = -cost + v_o \quad (v_o$は、積分定数)

[位置]

$\int vdt = \int(-cost + v_o)dt$

$x(t) = -sint + v_o t + x_o \quad (v_o \cdot x_o$は、積分定数)

3.(2)

まず、v_oについて求める。

$v(0) = 0 = -cos0 + v_o$

$\therefore v_o = 1$

よって、エレベーターが停止する $v(0) = 0$ の時の t は、

$v(t) = 0 = -cost + 1$

$cost = 1$

$t = 0, 2\pi$

$\therefore t = 0, 2\pi$の時にエレベーターは、停止する。

また、$t = 0$ の時の高さ x_oはエレベータの高さの初期値より、エレベータの停止時の位置 (上昇量) は、

$\Delta x = x_{t=2\pi} - x_{t=0} = (2\pi + x_o) - (0 + x_o)$

$\therefore \Delta x = 2\pi$

4.

$\frac{1}{v}$ と t が線形の関係にあるので、実数 A、B を用いて以下のように表せる。

$\frac{1}{v} = At + B$

v^2 については、比例定数 k を用いて以下のように表せる。

$v^2 = \left(\frac{1}{At+B}\right)^2 \times k$

加速度について、計算を進める。

$a = \frac{d}{dt}v = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{At+B}\right)^2 \times k$

$= \frac{0 \times (At+B) - 1 \times (At+B)'}{(At+B)^2}$

$= -\frac{A}{(At+B)^2}$

$a = -\frac{A}{(At+B)^2}$ ($-A$ は定数) について、

$k = -A \times l$ (l は定数) とおくと、

$v^2 = a \times l = \frac{k}{(At+B)^2}$

$\therefore$ 加速度は速度の 2 乗に比例する。

2-2

1.

スカラーは大きさを表し、ベクトルは大きさと方向を表す。

2.(a)

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(2.5,2,1.5)$$
$$(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{A}=-1.5\times 2+-2\times 2+-0.5\times 1=-7.5$$

2.(b)

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=1.5,\quad \|\boldsymbol{A}\|=3,\quad \|\boldsymbol{B}\|=\frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|cos\theta \text{より、}$$
$$\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\times 3cos\theta$$
$$\sqrt{2}=cos\theta$$
$$\therefore \theta=45^\circ$$

3.(a)

$t=t$ における速度、加速度は、

$$\boldsymbol{v}=\frac{d}{dt}\times\boldsymbol{r}=\frac{d}{dt}(2t^3-4t)\boldsymbol{e}_x+\frac{d}{dt}(5-3t^2)\boldsymbol{e}_y$$
$$=(6t^2-4)\boldsymbol{e}_x-6t\boldsymbol{e}_y$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{d^2}{dt^2}\times\boldsymbol{r}=\frac{d^2}{dt^2}(5-3t^2)\boldsymbol{e}_y$$
$$=12t\boldsymbol{e}_x-6\boldsymbol{e}_y$$

$t=0$ のとき、

[位置ベクトル]

$$\boldsymbol{r}=0\times\boldsymbol{e}_x+5\times\boldsymbol{e}_y$$
$$\therefore (x,y)=(0,5)$$

[速度ベクトル]

$$\boldsymbol{v}=-4\times\boldsymbol{e}_x+0\times\boldsymbol{e}_y$$
$$\therefore (x,y)=(-4,0)$$

[加速度ベクトル]

$$\boldsymbol{a}=0\times\boldsymbol{e}_x-6\times\boldsymbol{e}_y$$
$$\therefore (x,y)=(0,-6)$$

3.(b)

$t=2$ の位置ベクトル
$\boldsymbol{2} = 8 \times \boldsymbol{e}_x - 7 \times \boldsymbol{e}_y$
$(x, y) = (8, -7)$
変異ベクトルは、
$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{t=2} - \boldsymbol{r}_{t=0} = (8, -12)$
$\therefore \Delta \boldsymbol{r} = (8, -12)$
変異ベクトルの大きさは、
$\therefore \|\Delta \boldsymbol{r}\| = \sqrt{8^2 + (-12)^2} = 4\sqrt{13}$

4.(a)

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} cos\omega t + \boldsymbol{j} sin\omega t$$

4.(b)

$$\boldsymbol{v} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} \times \frac{d}{dt}(cos\omega t) + \boldsymbol{j} \times \frac{d}{dt}(sin\omega t)$$
$$= -\boldsymbol{i}\omega sin\omega t + \boldsymbol{j}\omega cos\omega t$$

4.(c)

$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v} = (cos\omega t)(-\omega sin\omega t) + (sin\omega t)(\omega cos\omega t)$
$= -\omega cos\omega t sin\omega t + \omega cos\omega t sin\omega t$
$= 0$
$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ より、$\|\boldsymbol{r}\| \neq 0$、$\|\boldsymbol{v}\| \neq 0$ のとき、$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$ は常に垂直

4.(d)

$$\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} \times \frac{d}{dt}(-\omega sin\omega t) + \boldsymbol{j} \times \frac{d}{dt}(\omega cos\omega t)$$
$$= -\boldsymbol{i}\omega^2 cos\omega t - \boldsymbol{j}\omega^2 sin\omega t$$
また、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{r}$ との関係は、
$\boldsymbol{a} = -\omega^2 \boldsymbol{r}$ より、
$\boldsymbol{a}$ は、$\boldsymbol{r}$ において反対向きのベクトルである。

5.

軸に垂直な方向の成分速度が一定より、軸方向の運動だけ考える。
軸方向の運動は鉛直投げ上げより、y 軸を初期値からの変異、t 軸を室店が動き始めてからの時間とすると、
軌跡の式は、以下のようになる。
$y = kx^2 \quad (k$ は定数)
よって、速度と加速度は以下のようになる。
[速度]
$$\frac{d}{dt}y = v_y = k \times 2t$$
$$\therefore v_y = 2kt$$
[加速度]
$$\frac{d^2}{dt^2}y = a_y = 2kt$$
$$\therefore a_y = 2k$$