線形代数 A 第 1 回演習課題

名前: 長田悠生
学籍番号: 202310330

2023/5/26

LATEX

　自宅にスキャナーがなく、また、カメラの性能が悪いために何が書いているか読み取れそうにないので、$\LaTeX$ で提出します。あらかじめご了承ください。

問 1

写像 $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ を

$$f(n)=\begin{cases}3n+1(n\text{ が奇数のとき}),\\ \dfrac{n}{2}(n\text{ が偶数のとき})\end{cases}$$

と定義する. このとき,

(a)f が全射であることを示せ.

Proof. f が全射であることの証明
任意の実数 y に対して、

$$y=\begin{cases}3n+1(n\text{ が奇数のとき})\\ \dfrac{n}{2}(n\text{ が偶数のとき})\end{cases}$$

とおく。
$y=3n+1(n$ が奇数のとき$)$ について、n が奇数より、
$m\in\mathbb{N}$ かつ $n=2m+1$ である m を定義する。

$$\begin{aligned}y&=3(2m+1)+1\\&=6m+4\\&=2(3m+2)\end{aligned}$$

よって、y は偶数である。
また、$y=\frac{n}{2}(n$ が偶数のとき$)$ について、n が偶数より、
$m\in\mathbb{N}$ かつ $n=2m$ である m を定義する。

$$\begin{aligned}y&=\frac{2m}{2}\\&=m\end{aligned}$$

よって、y は自然数である。
$\therefore$ 写像 $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ より、終域の全てを $f(n)$ の地域は表している。それは、f が全射であることを意味する。
$\square$

(b)f が単射であることを示せ.

Proof. 反例を以下に示す。
写像 $f(n_1)$、$f(n_2)$ を、n_1 を奇数、n_2 を偶数とおく。

$$
\begin{aligned}
&f(n_1 = 1) = 3 \times 1 + 1 = 4 \\
&f(n_2 = 8) = \frac{8}{2} = 4 \\
&f(n_1 = 1) = f(n_2 = 8) \text{ より、} f \text{ は単射ではない。}
\end{aligned}
$$

□

問 2

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$ の両方に直交する、長さ 1 のベクトルを $\boldsymbol{c}$ とすると、

$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = 0$ かつ $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$ で $\|\boldsymbol{c}\| = 1$、$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = 2x + 4y + 3z = 0 \cdots ① \\
&(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 5x + 9y + 7z = 0 \cdots ② \\
&\|\boldsymbol{c}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1 \cdots ③ \\
\\
&z = -2y \cdots ① \times 5 - ② \times 2 \\
&x = y \cdots ① \times 7 - ② \times 3 \\
&z = -2y = -2x \cdots ④ \\
&\text{③に④を代入} \\
&x^2 + x^2 + (-2x)^2 = 1 \\
&x = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \quad or \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}
$$

問 3

Proof. シュワルツの不等式の証明

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とする。

$\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \geq 0$、$\|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\| \geq 0$ より共に 2 乗すると、

$(\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|)^2 - \|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\|^2$

$= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2$

$= a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2$

$= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \geq 0$

($a_1 b_2 = a_2 b_1$のとき、等号成立)

□

問 4

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とする。

$$\left(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2} \right)$$
$$= a_1 \left(x_1 - a_1 \times \frac{(a_1 x_1 + a_2 x_2)}{{a_1}^2 + {a_2}^2} \right) + a_2 \left(x_2 - a_2 \times \frac{(a_1 x_1 + a_2 x_2)}{{a_1}^2 + {a_2}^2} \right)$$
$$= \frac{x_1 a_1 {a_2}^2 - x_1 {a_1}^2 a_2 + x_1 {a_1}^2 a_2 - x_1 a_1 {a_2}^2}{a_1^2 + a_2^2} = 0$$

$\therefore \boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) \dfrac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}$は垂直である。