確率論第 4 回課題

長田悠生

2023/5/21

LaTeX

演習課題 4A

$p_{X,Y}(x,y)$ について表にまとめる。

表 1　$p_{X,Y}(x,y)$

4	$\frac{4!}{4!0!0!}(\frac{1}{6})^4(\frac{1}{6})^0(\frac{4}{6})^0$	0	0	0	0
3	$\frac{4!}{3!0!1!}(\frac{1}{6})^3(\frac{1}{6})^0(\frac{4}{6})^1$	$\frac{4!}{3!1!0!}(\frac{1}{6})^3(\frac{1}{6})^1(\frac{4}{6})^0$	0	0	0
2	$\frac{4!}{2!0!2!}(\frac{1}{6})^2(\frac{1}{6})^0(\frac{4}{6})^2$	$\frac{4!}{2!1!1!}(\frac{1}{6})^2(\frac{1}{6})^1(\frac{4}{6})^1$	$\frac{4!}{2!2!0!}(\frac{1}{6})^2(\frac{1}{6})^2(\frac{4}{6})^0$	0	0
1	$\frac{4!}{1!0!3!}(\frac{1}{6})^1(\frac{1}{6})^0(\frac{4}{6})^3$	$\frac{4!}{1!1!2!}(\frac{1}{6})^1(\frac{1}{6})^1(\frac{4}{6})^2$	$\frac{4!}{2!1!1!}(\frac{1}{6})^2(\frac{1}{6})^1(\frac{4}{6})^1$	$\frac{4!}{3!1!0!}(\frac{1}{6})^3(\frac{1}{6})^1(\frac{4}{6})^0$	0
0	$\frac{4!}{0!0!4!}(\frac{1}{6})^0(\frac{1}{6})^0(\frac{4}{6})^4$	$\frac{4!}{1!0!3!}(\frac{1}{6})^1(\frac{1}{6})^0(\frac{4}{6})^3$	$\frac{4!}{2!0!2!}(\frac{1}{6})^2(\frac{1}{6})^0(\frac{4}{6})^2$	$\frac{4!}{3!0!1!}(\frac{1}{6})^3(\frac{1}{6})^0(\frac{4}{6})^1$	$\frac{4!}{4!0!0!}(\frac{1}{6})^4(\frac{1}{6})^0(\frac{4}{6})^0$
Y/X	0	1	2	3	4

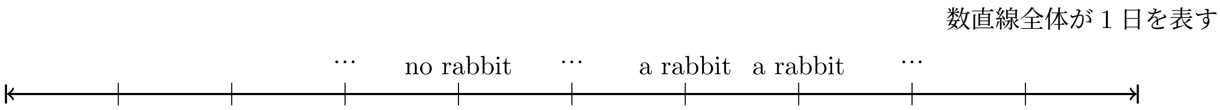
表より、同時分布 $p_{X,Y}(x,y)$ は、

$$\therefore p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{1296} & if (x,y) = (4,0),(0,4) \\ \dfrac{1}{81} & if (x,y) = (3,0),(0,3) \\ \dfrac{2}{27} & if (x,y) = (2,0),(0,2) \\ \dfrac{16}{81} & if (x,y) = (1,0),(0,1)(0,0) \\ \dfrac{1}{324} & if (x,y) = (3,1),(1,3) \\ \dfrac{1}{27} & if (x,y) = (2,1),(1,2) \\ \dfrac{4}{27} & if (x,y) = (1,1) \\ \dfrac{1}{216} & if (x,y) = (2,2) \end{cases}$$

演習課題 4B

まず、Z の値が k のときの様子を以下に示す。
以下の数直線は、Z のポアソン分布を表している数直線

さらに、k について 1 日を k 等分した数直線上にウサギを 1 羽ずつ確率 p で存在させる様子を数直線で表すと、以下のようになる。



1 日を k 当分したとすると、区間の数は k、ウサギの頭数を α として、1 つの区間にウサギが 1 羽いるかいないかとなるようにウサギを区間に分配したとすると、各区間にウサギが分配されている確率は p なので、k 個の区間の内、ウサギがいる区間の個数の確率は、

$$p_{k\cap X}(\alpha) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \times {}_k\mathrm{C}_\alpha p^\alpha (1-p)^{k-\alpha} \tag{1}$$

textmc$p_X(x)$ がポアソン分布に従っていれば良いので、

$$p_X(x) = e^{-\lambda p} \times \frac{(\lambda p)^x}{x!} \tag{2}$$

を示せばよい。

$p_X(x)$ の値をある値 x に固定した場合、$p_X(x)$ の値は $\sum_{k=x}^{\infty} p_{k\cap x}(\alpha)$ である。また、$X = x$ のときの y の値は 0 から ∞ まで取り得るので、$X = x$ のすべての場合の総和を $\sum_{k=x}^{\infty}$ で表す。これは、$X = x$ における $Z = x + y$ のすべての場合の総和を表していることと同等である。
よって $p_X(x)$ は、以下の式で表せる。

$$p_X(x) = \sum_{k=x}^{\infty} p_{X,Y,Z}(x, y, x+y) \tag{3}$$

上記の式を次ページのように変形していく。

$$
\begin{aligned}
p_X(x) &= \sum_{k=x}^{\infty} \frac{\lambda^{x+y} e^{-\lambda}}{(x+y)!} \times {}_{x+y}\mathrm{C}_x p^x (1-p)^y \\
&= \sum_{k=x}^{\infty} \frac{\lambda^{x+y} e^{-\lambda}}{(x+y)!} \times \frac{(x+y)!}{(x+y)-xx!} p^x (1-p)y \\
&= \frac{p^x e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \times \sum_{k=x}^{\infty} \frac{\lambda^y \times (1-p)^y}{y!} \\
&= \frac{p^x e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \times \sum_{k=x}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda p)^y}{y!} \\
&= \frac{p^x e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \times e^{\lambda - \lambda p} \\
&= e^{-\lambda p} \times \frac{(\lambda p)^x}{x!}
\end{aligned}
$$

$p_Y(y)$ も同様に、$p_Y(y) = e^{-\lambda(1-p)} \times \frac{\{\lambda(1-p)\}^y}{y!}$ となる。

$\therefore X\ Poisson(\lambda p)$、$Y\ Poisson(\lambda(1-p))$ は、成り立つ。