確率論第 1 回演習課題

長田悠生

2023/4/22

LaTeX

演習課題 1A

まずは、問題文の理解のために HTML・CSS 風に構造化してみる。

HTML

```
<全体の問題文 class="全体の問題文">
  <(a) class="全体の問題文">
    この国の王位継承は女性が優先される場合に，きょうだいが男性である確率を求めよ．
  </(a)>
  <(b) class="全体の問題文">
    この国では年長者が王位を継承する場合に，きょうだいが男性である確率を求めよ．
  </(b)>
</全体の問題文>
```

CSS

```
.全体の問題文 {
  ある国の女王には，きょうだいが一人いる;
  なお(a),(b)において，この国では男女の生まれる確率は等しいとする;
}
```

問題文についての理解を深めたところで、問題を解いていく。

(a)

ある国にいる二人の人 (問題文での女王とその兄弟一人) について、男・女の観点における全パターンを標本空間として問題を解く。

$$\Omega = \{\text{女女、男女、女男、男男}\} \tag{1}$$

二人のうち少なくともどちらか一方が女である場合を、事象 A とする。また、きょうだいが男である場合を、事象 B とする。

条件付き確率の定義

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{2}$$

に従い計算を行う。

標本空間において、事象 A が発生する確率は、

$$\text{事象 } A \text{ の確率} = \frac{3}{4} \tag{3}$$

$A \cap B$ の事象は女男か男女になる確率だから、

$$\text{事象 } A \cap B \text{ の確率} = \frac{1}{2} \tag{4}$$

よって、

$$P(B|A) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \tag{5}$$

(b)

ある国にいる二人の人 (問題文での女王とその兄弟一人) をそれぞれ A, B とする。このとき、A, B について性別・年上・年下の観点における全パターンを標本空間として問題を解く。

$$\Omega = \left\{ \begin{aligned} &A(\text{年上・男})B(\text{年下・女})\text{、}A(\text{年下・男})B(\text{年上・女}) && (6)\\ &A(\text{年上・男})B(\text{年下・男})\text{、}A(\text{年下・男})B(\text{年上・男}) && (7)\\ &A(\text{年上・女})B(\text{年下・女})\text{、}A(\text{年下・女})B(\text{年上・女}) && (8)\\ &A(\text{年上・女})B(\text{年下・男})\text{、}A(\text{年下・女})B(\text{年上・男}) && (9) \end{aligned} \right\}$$

A が王位を継承する場合を、事象 α とする。また、B が男である場合を、事象 β とする。

条件付き確率の定義

$$P(\beta|\alpha) = \frac{P(\alpha \cap \beta)}{P(\alpha)} \tag{10}$$

に従い計算を行う。
標本空間において、事象 α が発生する確率は、

$$\text{事象}\alpha\text{の確率} = \frac{1}{2} \tag{11}$$

$\alpha \cap \beta$ の確率は、

$$\text{事象}\alpha \cap \beta\text{の確率} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \tag{12}$$

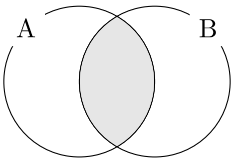
よって、

$$P(\beta|\alpha) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \tag{13}$$

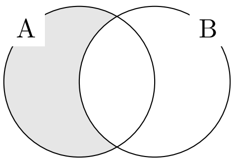
A が王位を継承する場合も B が王位を継承する場合も同様の確率になる。
この問題において、A・B の区別を対象の二人につけていないので、この問題の答えは $\frac{1}{2}$ となる。

演習課題 1B

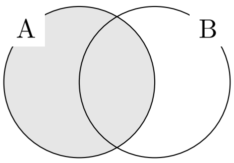
$P(A \cap B|C)$ をベン図で表現すると以下のようになる。
注) 以下の図は、簡略化の為に C を消している。



$P(A \cap B^c|C)$ をベン図で表現すると以下のようになる。
注) 以下の図は、簡略化の為に C を消している。



以上より、$P(A \cap B|C) + P(A \cap B^c|C)$ をベン図で表現すると以下のようになる。
注) 以下の図は、簡略化の為に C を消している。



よって、$P(A \cap B|C) + P(A \cap B^c|C) = P(A|C)$