线性代数学习笔记

南风

My computer

2025 年 12 月 21 日

目录

Chapter 1

线性方程组

1.1 方程组和矩阵

1.1.1 方程组的行变换

对于一个方程组

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

其增广矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n+1}$ 化为一个阶梯形矩阵的一般形式

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,r_1-r_2+1} & \cdots & a_{1,r_1-r_s+1} & \cdots & a_{1,r_1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{2,1} & \cdots & a_{1,r_2-r_s+1} & \cdots & a_{1,r_2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{s,1} & \cdots & a_{s,r_s} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $r_s \leq \cdots \leq r_1 \leq n+1$ 以及 $s \leq m$

把主元所在的列记为 $\mathbf{A}_i, i \in \{1 \cdots s\}$ 剩下的记为 $\mathbf{B}_{i,j}$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{A}_s & \mathbf{B}_s & \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

于是多项式的未知量矩阵

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ -1 \end{bmatrix}$$

也可以化为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1,n+1-r_1} \\ \mathbf{X}_{2,1} \\ \mathbf{X}_{3,r_1-r_2-1} \\ \mathbf{X}_{4,1} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{2s,1} \\ \mathbf{X}_{2s+1,r_s-1} \\ -1 \end{bmatrix}$$

所以原方程组可以化为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{A}_s & \mathbf{B}_s & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1,n+1-r_1} \\ \mathbf{X}_{2,1} \\ \mathbf{X}_{3,r_1-r_2-1} \\ \mathbf{X}_{4,1} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{2s,1} \\ \mathbf{X}_{2s+1,r_s-1} \\ -1 \end{bmatrix} = \mathbf{O}$$

移除无关项后

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{A}_s & \mathbf{B}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{2,1} \\ \mathbf{X}_{3,r_1-r_2-1} \\ \mathbf{X}_{4,1} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{2s,1} \\ \mathbf{X}_{2s+1,r_s-1} \end{bmatrix} = \mathbf{C}$$

给个例子

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

方程组的**同解关系** $\Leftrightarrow$ 增广矩阵的**线性变换**之后还会学许多变换以及许多关系, 他们之间是否有一一对应的关系

1.2 习题解

1.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = a \end{cases} \to \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 7 & a \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & a+3 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{bmatrix}$$

所以当 $a = -1$ 时, 方程组有解, 原矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -18 & 0 & -5 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{cases} x_1 = -5 + 18x_2 \\ x_3 = 2 - 7x_2 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+2x_2-ax_3=9 \\ 2x_1-x_2+3x_3=6 \end{cases} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -a & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -a-1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -a-1 & 6 \\ 0 & 0 & -3a-2 & 18 \end{bmatrix}$$

当 $a=-\frac{2}{3}$ 时原方程无解.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -a-1 & 6 \\ 0 & 0 & -3a-2 & 18 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & a+2 & -3 \\ 0 & 1 & -a-1 & 6 \\ 0 & 0 & -3a-2 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3-\frac{18(a+2)}{-3a-2} \\ 0 & 1 & 0 & 6-\frac{18(-a-1)}{-3a-2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{18}{-3a-2} \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{9a+30}{3a+2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{3a+2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{18}{3a+2} \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9a+30}{3a+2} \\ -\frac{6}{3a+2} \\ -\frac{18}{3a+2} \end{bmatrix}$$

所以只要 $a\neq-\frac{2}{3}$ 方程就有唯一解, 例如当 $a=0$ 时

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -3 \\ -9 \end{bmatrix}$$

3.

$$
\begin{cases}
x + y = 1 \\
x - 3y = -1 \\
10x - 4y = 3
\end{cases}
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 \\
1 & -3 & -1 \\
10 & -4 & 3
\end{bmatrix}
$$

$$
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 \\
0 & -4 & -2 \\
0 & -14 & -7
\end{bmatrix}
$$

$$
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 1
\end{bmatrix}
$$

$$
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & 1 & \frac{1}{2}
\end{bmatrix}
$$

有唯一解, 若 $10x - 4y = 3$ 中 y 的系数为 10 则

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 \\
1 & -3 & -1 \\
10 & 10 & 3
\end{bmatrix}
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 \\
0 & -4 & -2 \\
0 & 0 & -7
\end{bmatrix}
$$

显然无解

图 1.1: W (图片来源: https://www.pixiv.net/artworks/136173777)

4.

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -7 \\
x_1 + +3x_3 - x_4 = 8 \\
x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2a + 2 \\
3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -11 \\
2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2a
\end{cases}
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\
1 & 0 & 3 & -1 & 8 \\
1 & 2 & -1 & 1 & 2a+2 \\
3 & 3 & 3 & 2 & -11 \\
2 & 2 & 2 & 1 & 2a
\end{bmatrix}
$$

$$
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\
0 & -1 & 2 & -2 & 15 \\
0 & 1 & -2 & 0 & 2a+9 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 10 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2a+14
\end{bmatrix}
$$

$$
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\
0 & -1 & 2 & -2 & 15 \\
0 & 0 & 0 & -2 & 2a+24 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 10 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2a+4
\end{bmatrix}
$$

$$
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\
0 & 1 & -2 & 2 & -15 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -a-12 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a+2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a+2
\end{bmatrix}
$$

$$
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 3 & -1 & 8 \\
0 & 1 & -2 & 2 & -15 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -a-12 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a+2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

所以当 $a=-2$ 时方程组有解所以

$$\begin{bmatrix}1&0&3&-1&8\\0&1&-2&2&-15\\0&0&0&1&-10\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&3&0&-2\\0&1&-2&0&5\\0&0&0&1&-10\end{bmatrix}$$
$$\rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_4\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}-3\\2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\5\\-10\end{bmatrix}$$

5.

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=c\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=d\end{cases}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3&c\\0&1&2&2&6&3\\5&4&3&3&-1&d\end{bmatrix}$$
$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-2&-6&c-3\\0&1&2&2&6&3\\0&-1&-2&-2&-6&d-5\end{bmatrix}$$
$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-2&-6&c-3\\0&0&0&0&0&c\\0&0&0&0&0&d-c-2\end{bmatrix}$$

所以只要 $c=0,d=2$ 时方程组有解所以

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-2&-6&-3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1&-1&5&-2\\0&1&2&2&6&3\end{bmatrix}$$

解得

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix}-5\\-6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$$

6.

Chapter 2

行列式

2.1 n 元排列

定理 2.1

对换改变 n 元排列的奇偶性

证明. 对于任意一个排列

$$a = a_1 \dots a_k a_{k+1} \dots a_n$$

设 $\tau(a) = A$ 若交换其中相邻的两项 a_k, a_{k+1} 对于有序数对 $a_i a_j$ 其中 $i < k$ 或 $i > k+1$ 并不改变其逆序性质.

若 $a_k < a_{k+1}$ 则 $A+1$ 若 $a_k > a_{k+1}$ 则 $A-1$ 所以交换任意相邻两项改变逆序数的奇偶性.

对于更一般的情况

$$a = a_1 \dots a_i \dots a_j \dots a_n$$

假设 a_i 和 a_j 之间不包括端点有 s 项, 交换 a_i 和 a_{i+1} 奇偶性改变一次, 只看 a_i 和 a_j 之间的项

$$a_i a_{i+1} a_{i+2} \dots a_j \to a_{i+1} a_i a_{i+2} \dots a_j$$

再交换 a_i 和 a_{i+2} 奇偶性改变两次, 以此类推直到

$$a_{i+1} \dots a_{i+s} a_i a_j$$

时, 奇偶性改变了 s 次

再次交换 a_i 和 a_j 奇偶性改变了 $s+1$ 次, 此时

$$a_{i+1}\dots a_{i+s}a_ja_i$$

然后让 a_j 以此与 $a_{i+s}, a_{i+s-1}\cdots a_{i+1}$ 一共 s 个项交换, 使得奇偶性又改变了 s 次, 结合之前的 $s+1$ 次, 我们发现奇偶性一共改变了 $2s+1$ 次.

这就意味着, 对于任意 s 都会改变奇数次, 如果原来 A 是偶数, 就会变成奇数, 如果原来是奇数, 就会变成偶数.

因此对于一切 a 交换其任意两项, 都会改变逆序数的奇偶性. □

定理 2.2

任一排列 $b_1b_2\dots b_n$ 都可以通过 s 步骤变换成 $a_1a_2\dots a_n$ 其中 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 并且其奇偶性与 s 相同

定理 2.3

行列式的行列互换, 行列式的值不变.

定理 2.4

行列式的某行翻倍, 行列式的值也翻倍.

定理 2.5

行列式的某行是两组数的和, 可以看作.

定理 2.6

行列式两行互换, 行列式值取反.

定理 2.7

行列式两行相同值为零.

定理 2.8

行列式一行倍加到另一行, 行列式的值不变.

2.2 行列式鉴赏

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \tag{2.1}$$

$$\begin{vmatrix} a_1+c_1 & b_1+a_1 & c_1+b_1 \\ a_2+c_2 & b_2+a_2 & c_2+b_2 \\ a_3+c_3 & b_3+a_3 & c_3+b_3 \end{vmatrix} \tag{2.2}$$

$$\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix} \tag{2.3}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{2.4}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} \tag{2.5}$$

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix} \tag{2.6}$$

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix} \tag{2.7}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix} \tag{2.8}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}+t & \cdots & a_{1,n}+t \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}+t & \cdots & a_{n,n}+t \end{vmatrix} \tag{2.9}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \cdots & \binom{n-1}{1} & \binom{n}{1} \\ 1 & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \cdots & \binom{n}{2} & \binom{n+1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n}{n-2} & \cdots & \binom{2n-4}{n-2} & \binom{2n-3}{n-2} \\ 1 & \binom{n}{n-1} & \binom{n+1}{n-1} & \cdots & \binom{2n-3}{n-1} & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix} \tag{2.10}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1+a_{1,1} & \cdots & x_1^{n-1}+a_{n-1,1}x_1^{n-2}+\cdots+a_{n-1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n+a_{1,1} & \cdots & x_n^{n-1}+a_{n-1,1}x_n^{n-2}+\cdots+a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \tag{2.11}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} \tag{2.12}$$

以上请读者自证

2.3 克拉默 (Cramer) 法则

2.4 习题解

1.

$$
\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x & y-x & y-x & \cdots & y-x & y-x \\ z & x-z & y-z & \cdots & y-z & y-z \\ z & 0 & x-z & \cdots & y-z & y-z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z & 0 & 0 & \cdots & x-z & y-z \\ z & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-z \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

按照最后一行展开有

$$D_n = (x-z)D_{n-1} + zB_{n-1}$$

其中

$$
B_{n-1} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} y-x & y-x & \cdots & y-x & y-x \\ x-z & y-z & \cdots & y-z & y-z \\ 0 & x-z & \cdots & y-z & y-z \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-z & y-z \end{vmatrix}
$$

下面来讨论 B_n 令 $C_n = |B_n|$ 所以有

$$C_n = \begin{vmatrix} y-x & y-x & \cdots & y-x & y-x \\ x-z & y-z & \cdots & y-z & y-z \\ 0 & x-z & \cdots & y-z & y-z \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y-z & y-z \\ 0 & 0 & \cdots & x-z & y-z \end{vmatrix}$$

展开最后一行有

$$\begin{aligned} C_n = (-1)^{n+n-1}(x-z) &\begin{vmatrix} y-x & y-x & \cdots & y-x \\ x-z & y-z & \cdots & y-z \\ 0 & x-z & \cdots & y-z \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y-z \end{vmatrix} \\ +(-1)^{n+n}(y-z) &\begin{vmatrix} y-x & y-x & \cdots & y-x \\ x-z & y-z & \cdots & y-z \\ 0 & x-z & \cdots & y-z \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y-z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= (z-x)\begin{vmatrix} y-x & y-x & \cdots & y-x \\ x-z & y-z & \cdots & y-z \\ 0 & x-z & \cdots & y-z \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y-z \end{vmatrix} + (y-z)\begin{vmatrix} y-x & y-x & \cdots & y-x \\ x-z & y-z & \cdots & y-z \\ 0 & x-z & \cdots & y-z \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y-z \end{vmatrix}$$

注意到 $(z-x)$ 和 $(y-z)$ 所乘的行列式相同且为 C_{n-1} 所以合并同类项后有

$$C_n = (z-x+y-z)\begin{vmatrix} y-x & y-x & \cdots & y-x \\ x-z & y-z & \cdots & y-z \\ 0 & x-z & \cdots & y-z \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y-z \end{vmatrix} = (y-x)C_{n-1}$$

最终我们得到了一个递推公式 $C_n = (y-x)C_{n-1}$ 因为 C_2 的样子可能不够明显, 所以我们考虑较为显然的 C_3 所以

$$\begin{aligned}
C_3 &= \begin{vmatrix} y-x & y-x & y-x \\ x-z & y-z & y-z \\ 0 & x-z & y-z \end{vmatrix} \\
&= (z-x)\begin{vmatrix} y-x & y-x \\ x-z & y-z \end{vmatrix} + (y-z)\begin{vmatrix} y-x & y-x \\ x-z & y-z \end{vmatrix} \\
&= (y-x)\begin{vmatrix} y-x & y-x \\ x-z & y-z \end{vmatrix} \\
&= (y-x)[(y-x)(y-z)-(y-x)(x-z)] \\
&= (y-x)(y-x)[(y-z)-(x-z)] \\
&= (y-x)(y-x)(y-x) \\
&= (y-x)^3
\end{aligned}$$

由此可知 $C_n = (y-x)^n$ 所以

$$\begin{aligned}
B_{n-1} &= (-1)^{n+1}C_{n-1} \\
&= (-1)^{n+1}(y-x)^{n-1} \\
&= (-1)^2 \cdot (-1)^{n-1}(y-x)^{n-1} \\
&= (x-y)^{n-1}
\end{aligned}$$

带回到 $D_n = (x-z)D_{n-1} + zB_{n-1}$ 有 $D_n = (x-z)D_{n-1} + z(x-y)^{n-1}$ 多写几项观察一下规律

$$\begin{aligned}
D_n &= (x-z)D_{n-1} + z(x-y)^{n-1} \\
D_{n-1} &= (x-z)D_{n-2} + z(x-y)^{n-2}
\end{aligned}$$

带入得到

$$\begin{aligned}
D_n &= (x-z)\left[(x-z)D_{n-2} + z(x-y)^{n-2}\right] + z(x-y)^{n-1} \\
&= (x-z)^2 D_{n-2} + z(x-z)(x-y)^{n-2} + z(x-y)^{n-1} \\
&= (x-z)^2 D_{n-2} + z(x-y)^{n-2}((x-z)+(x-y))
\end{aligned}$$

把 $D_{n-2}=(x-z)D_{n-3}+z(x-y)^{n-3}$ 再带入得到

$$\begin{aligned}D_n=&(x-z)^2\left[(x-z)D_{n-3}+z(x-y)^{n-3}\right]\\&+z(x-y)^{n-2}\left[(x-z)+(x-y)\right]\\=&(x-z)^3D_{n-3}\\&+z(x-z)^2(x-y)^{n-3}+z(x-y)^{n-2}\left[(x-z)+(x-y)\right]\\=&(x-z)^3D_{n-3}+z(x-y)^{n-3}\\&\left[(x-z)^2+(x-y)\left[(x-z)+(x-y)\right]\right]\\=&(x-z)^3D_{n-3}+z(x-y)^{n-3}\\&\left[(x-z)^2+(x-y)(x-z)+(x-y)^2\right]\end{aligned}$$

大胆推测

$$\begin{aligned}D_n=&(x-z)^mD_{n-m}+z(x-y)^{n-m}\\&\left[(x-z)^{m-1}(x-y)^0+\cdots\text{一共 m 项}\cdots+(x-z)^0(x-y)^{m-1}\right]\end{aligned}$$

可以看出最后的是个等比数列, 可以计算出

$$\begin{aligned}&(x-z)^{m-1}(x-y)^0+\cdots+(x-z)^0(x-y)^{m-1}\\=&\frac{(x-y)^m-(x-z)^m}{(x-y)-(x-z)}\\=&\frac{(x-y)^m-(x-z)^m}{(z-y)}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}D_n&=(x-z)^mD_{n-m}+z(x-y)^{n-m}\left[\frac{(x-y)^m-(x-z)^m}{(z-y)}\right]\\&=(x-z)^mD_{n-m}+\frac{z}{z-y}\left[(x-y)^n-(x-y)^{n-m}(x-z)^m\right]\end{aligned}$$

可以计算出 $D_1=\begin{vmatrix}x\end{vmatrix}=x$ 所以当 $m=n-1$ 时就有

$$D_n=(x-z)^{n-1}x+\frac{z}{z-y}\left[(x-y)^n-(x-y)(x-z)^{n-1}\right]$$