

线性代数学习笔记

南风

My computer



2025 年 12 月 12 日

目录

1 线性方程组	1
1.1 方程组和矩阵	1
1.2 习题解	3

Chapter 1

线性方程组

1.1 方程组和矩阵

1.1.1 方程组的行变换

对于一个方程组

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

其增广矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n+1}$ 化为一个阶梯形矩阵的一般形式

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} 0 & \cdots & 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,r_1-r_2+1} & \cdots & a_{1,r_1-r_s+1} & \cdots & a_{1,r_1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{2,1} & \cdots & a_{2,r_2-r_s+1} & \cdots & a_{2,r_2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{s,1} & \cdots & a_{s,r_s} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right]$$

其中 $r_s \leq \cdots \leq r_1 \leq n+1$ 以及 $s \leq m$

把主元所在的列记为 $\mathbf{A}_i, i \in \{1 \cdots s\}$ 剩下的记为 $\mathbf{B}_{i,j}$

$$[\mathbf{O} \quad \mathbf{A}_1 \quad \mathbf{B}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{A}_s \quad \mathbf{B}_s \quad \mathbf{C}]$$

于是多项式的未知量矩阵

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ -1 \end{bmatrix}$$

也可以化为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1,n+1-r_1} \\ \mathbf{X}_{2,1} \\ \mathbf{X}_{3,r_1-r_2-1} \\ \mathbf{X}_{4,1} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{2s,1} \\ \mathbf{X}_{2s+1,r_s-1} \\ -1 \end{bmatrix}$$

所以原方程组可以化为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{A}_s & \mathbf{B}_s & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1,n+1-r_1} \\ \mathbf{X}_{2,1} \\ \mathbf{X}_{3,r_1-r_2-1} \\ \mathbf{X}_{4,1} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{2s,1} \\ \mathbf{X}_{2s+1,r_s-1} \\ -1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

移除无关项后

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{A}_s & \mathbf{B}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{2,1} \\ \mathbf{X}_{3,r_1-r_2-1} \\ \mathbf{X}_{4,1} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{2s,1} \\ \mathbf{X}_{2s+1,r_s-1} \end{bmatrix} = \mathbf{C}$$

给个例子

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

方程组的同解关系 \Leftrightarrow 增广矩阵的线性变换之后还会学许多变换以及许多关系, 他们之间是否有一一对应的关系

1.2 习题解

1.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = a \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 7 & a \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & a+3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{bmatrix}$$

所以当 $a = -1$ 时, 方程组有解, 原矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -18 & 0 & -5 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 + 18x_2 \\ x_3 = 2 - 7x_2 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - ax_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -a & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -a-1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -a-1 & 6 \\ 0 & 0 & -3a-2 & 18 \end{bmatrix}$$

当 $a = -\frac{2}{3}$ 时原方程无解.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -a-1 & 6 \\ 0 & 0 & -3a-2 & 18 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & a+2 & -3 \\ 0 & 1 & -a-1 & 6 \\ 0 & 0 & -3a-2 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 - \frac{18(a+2)}{-3a-2} \\ 0 & 1 & 0 & 6 - \frac{18(-a-1)}{-3a-2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{18}{-3a-2} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{9a+30}{3a+2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{3a+2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{18}{3a+2} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9a+30}{3a+2} \\ -\frac{6}{3a+2} \\ -\frac{18}{3a+2} \end{bmatrix}$$

所以只要 $a \neq -\frac{2}{3}$ 方程就有唯一解, 例如当 $a = 0$ 时

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -3 \\ -9 \end{bmatrix}$$

3.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 3y = -1 \\ 10x - 4y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 10 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -14 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

有唯一解, 若 $10x - 4y = 3$ 中 y 的系数为 10 则

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 10 & 10 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

显然无解



图 1.1: W (图片来源: <https://www.pixiv.net/artworks/136173777>)

4.

$$\begin{cases}
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -7 \\
 x_1 + 3x_3 - x_4 = 8 \\
 x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2a + 2 \\
 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -11 \\
 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2a
 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2a+2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & -11 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2a \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2a+9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2a+14 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2a+24 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a+4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a-12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a-12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以当 $a = -2$ 时方程组有解所以

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix}$$

5.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = c \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = d \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & c \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & d \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & c-3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & d-5 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & c-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d-c-2 \end{bmatrix}$$

所以只要 $c = 0, d = 2$ 时方程组有解所以

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

解得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

6.