به‌نام خدا

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها - بهار ۱۴۰۳

تمرین شماره ۱۲

دستیار آموزشی این مجموعه: مهدی جمال‌خواه

mehdijmlkh1382@gmail.com

تاریخ تحویل: ۲۹ خرداد ماه (صفحه درس)

** می‌توانید از مسائلی که در کلاس اثبات شده‌اند $NP-complete$ هستند، برای کاهش استفاده کنید و نیازی نیست که $NP-complete$ بودن آن‌ها را اثبات کنید.

۱. به دست آوردن کدامیک از نتایج زیر منجر به حل شدن مساله $P \overset{?}{\neq} NP$ خواهد شد؟
علاوه بر پاسخ بلی/خیر، برای پاسخ خود دلیلی مختصر بیاورید . (اگر پاسخ‌تان بلی است، بگویید که منجر به $P = NP$ می‌شود یا $P \neq NP$.) (15 نمره)

الف) برای یک مساله در NP الگوریتمی با زمان چند جمله‌ای پیدا کنیم.
ب) به ازای هر زبان $NP-complete$ ، A ، کاهش با پیچیدگی زمانی چند جمله‌ای از A به A^* پیدا کنیم.
پ) یک گرامر مستقل از متن برای مساله $3SAT$ پیدا کنیم.
ت) ماشین تورینگی غیر قطعی با زمان چند جمله‌ای بیابیم که توسط ماشین تورینگ قطعی قابل شبیه سازی نباشد.
ث) یک NFA برای مساله $3SAT$ رسم کنیم.

پاسخ:

الف) خیر. مسائل P به NP هم تعلق دارند و یک مساله دلخواه در NP می‌تواند خود یک مساله در P باشد.

ب) بلی. زبان‌های $NP-complete$ تحت $kleene\ star$ بسته نیستند و A^* می‌تواند یک مساله P باشد.

مثال نقض برای بسته نبودن تحت $kleene\ star$:

فرض کنید الفبای زبان $3SAT$ را با Σ نشان دهیم.

$$A = 3SAT \cup \Sigma \quad \Rightarrow \quad A^* = \Sigma^* \in P$$

پ) بلی. زبان‌های مستقل از متن در دسته مسائل P قرار دارند، و اینکار باعث می‌شود که بتوانیم $3SAT$ را در زمان چند جمله‌ای حل کنیم.
ت) خیر. هر ماشین تورنگ غیر قطعی قابل شبیه سازی در ماشین تورینگ قطعی است (با صرف هزینه زمانی نمایی) پس این نتیجه اصلا قابل اثبات هم نیست.
ث) بلی. زبان‌های منظم در دسته مسائل P قرار دارند. با اینکار یعنی نشان داده‌ایم که $3SAT$ در P قرار دارد.

۲. ماشین M را در نظر بگیرید که n ورودی دارد $(x_1, \ldots, x_n)$، این ماشین یک ترکیب خطی از ورودی‌هایش تشکیل می‌دهد و اگر از یک آستانه‌ای بیش‌تر بود آن ورودی را می‌پذیرد، در غیراین صورت رد می‌کند.

$$M_j : return\ "YES"\ if \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_i > \beta_j \quad else\ "NO"$$

حال فرض کنید که m تا ماشین از این نوع داریم $(j = 1, \ldots, m)$ مقادیر α, β به ازای هر ماشین مشخص است. مساله این است که آیا $x_1, \ldots, x_n$ ای وجود دارد که همه‌ی m تاماشین آن را بپذیرند؟
ثابت کنید این مساله $NP-hard$ است. $(\alpha_{ij}, \beta_j \in \mathbb{Z}, x_i \in \{0,1\}; \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m)$
(15 نمره)

پاسخ:
مساله SAT را به آن کاهش می‌هیم. هر ماشین را یک عبارت از SAT در نظر بگیرید که α_i نشان می‌دهد که کدام متغیر ها در آن عبارت وجود دارند: (فرض می‌کنیم که در یک عبارت هر دو متغیر $x_i, \bar{x}_i$ با هم وجود ندارند زیرا چنین عبارتی همیشه درست است و می‌توانیم آن را حذف کنیم.)

- اگر x_i در عبارت وجود نداشت آنگاه $\alpha_i = 0$.
- اگر x_i در عبارت بود آنگاه $\alpha_i = 1$.
- اگر $\bar{x}_i$ در عبارت بود آنگاه $\alpha_i = -1$.

و β را منفی تعداد متغیرهای منفی در آن عبارت قرار می‌دهیم. x_i هایی که این مساله به عنوان جواب به ما می‌دهد همان جواب مساله SAT است. زیرا ماشین j ام در صورتی ورودی را می‌پذیرد که:

$$\sum_{x_i \in C_j} x_i - \sum_{\bar{x}_i \in C_j} x_i > -\sum_{\bar{x}_i \in C_j} 1$$

$$\sum_{x_i \in C_j} x_i + \sum_{\bar{x}_i \in C_j} (1 - x_i) > 0$$

یعنی اگر x_i ای در C_j باشد و مقدار آن برابر با یک باشد یا $\bar{x}_i$ ای در C_j باشد و مقدار آن برابر با صفر باشد، ماشین j می‌پذیرید..

۳. کسرا یک بازی جدید اختراع کرده است. این بازی بر روی یک گراف ساده بدون جهت G انجام می‌شود. هر گره در این گراف به تعداد صفر یا بیشتر شکلات دارد. یک حرکت از این بازی شامل برداشتن دو شکلات از گره v و اضافه کردن یکی از شکلات‌ها به یک همسایه دلخواه v و خوردن شکلات دیگر می‌شود (گره v قبل از انجام حرکت باید حداقل دو شکلات داشته باشد.) هدف از این بازی این است که در نهایت با انجام چند حرکت تمامی شکلات‌ها به جز یکی خورده شود. ثابت کنید که این بازی $NP - hard$ است. به عبارت دقیق تر، فرض کنید که یک گراف ساده بدون جهت G به همراه تابع $m(v)$ داده شده است که در آن تابع m تعداد شکلات‌های گره v را برمی‌گرداند .ثابت کنید مساله بافتن دنباله‌ای از حرکات شکلات بازی که تمامی شکلات‌ها جز یکی را حذف کند $NP - hard$ است. (17 نمره)

پاسخ:

از کاهش دور همیلتونی استفاده می‌کنیم. فرض کنید ورودی مساله دور همیلتونی گراف G باشد و ورودی این بازی گراف G' باشد.

گراف G' را با گره‌های G به این صورت می‌سازیم:

برای یک گره دلخواه v قرار می‌دهیم: $m(v) = 2$ و برای باقی گره‌ها مقدار تابع m را یک تعیین می‌کنیم. اگر چنانچه بازی روی G' جواب داشته باشد یعنی یک دور همیلتونی در G وجود دارد که توسط آن می‌توانیم با عیور از یک‌یک گره‌ها به v برگردیم.

۴. تینا در تلاش است که با تغییر مساله SAT یک ورژن جدید از آن بدست آورد که در دسته مسائل P قرار گیرد. او این مساله را طراحی کرده است: یک عبارت منطقی $(boolean)$ را به عنوان ورودی می‌گیرد و اگر همیشه صحیح یا همیشه غلط باشد آن را می‌پذیرد. به تینا کمک کنید که آیا این مساله در دسته P قرار دارد؟ اگر بلی برای آن یک الگوریتم چند جمله‌ای ارائه دهید، در غیر این صورت اثبات کنید که $NP - hard$ است. (10 نمره)

پاسخ:

این مساله $NP - hard$ است. برای اثبات، مساله SAT را به آن کاهش می‌دهیم. فرض کنید ورودی مساله

SAT عبارت Φ باشد که از متغیرهای $x_1, \ldots, x_n$ تشکیل شده است عبارت Φ' را که ورودی مساله جدید است را به این صورت می‌سازیم.

$$\Phi' = y \wedge \Phi$$

دقت کنید که Φ' نمی‌تواند همیشه صحیح باشد زیرا اگر متغیر جدید y را برابر با $false$ قرار دهیم عبارت حاصل نیز $false$ می‌شود. Φ' را به مساله جدید می‌دهیم و اگر پذیرفت SAT عبارت Φ را رد می‌کند و برعکس. زیرا اگر مساله جدید عبارت Φ' را بپذیرد. یعنی Φ' همیشه $false$ بوده است در و چون y می‌تواند $true$ یا $false$ باشد پس Φ همیشه $false$ بوده و SAT آن را نمی‌پذیرد.

۵. دو مساله زیر را در نظر بگیرید:
A : مجموعه S از اعداد صحیح‌مثبت و عدد t داده شده است. می‌خواهیم تعیین کنیم که آیا زیر مجموعه از S وجود دارد که مجموع اعضای آن برابر t باشد.
B : مجموعه S از اعداد صحیح‌مثبت داده شده است. آیا می‌توان زیر مجموعه‌ای از S مانند S' پیدا کرد به طوری که $\sum_{i \in S'} i = \frac{1}{|S|} \sum_{i \in S} i$. دقت کنید در این عبارت $|S|$ برابر تعداد عناصر مجموعه S است.
سعی کنید راه حل چند جمله‌ای برای مساله B پیدا کنید یا با استفاده از مساله A که می‌دانیم $NP-complete$ است، اثبات کنید $NP-hard$ است. (18 نمره)

پاسخ:
نشان می‌دهیم که $NP-hard$ است. فرض کنید ورودی مساله A به صورت (S, t) باشد و ورودی مساله B مجموعه T باشد. T را به این صورت می‌سازیم:

$$S_t = \{a \in S : a \leq t\} = \{a_1, \ldots, a_n\} \quad ; \quad n = |S_t|$$
$$y = (n+1)t - \sum_{i=1}^{n} a_i$$
$$T = \{a_1, \ldots, a_n, y\}$$

دقت داریم که میانگین مجموعه T برابر t است.
اگر زیر مجموعه‌ای از S مجموعش برابر با t باشد آنگاه همین زیر مجموعه، زیر مجموعه T نیز هست. و از آن طرف اگر زیر مجموعه از T مجموعش برابر با t باشد دو حالت داریم: (این زیر مجموعه را R می‌نامیم.)

- $y > t$: در این حالت y نمی‌تواند در R باشد و R زیر مجموعه‌ای از S نیز هست.

- $y \leq t$: در این حالت داریم:

$$y = (n+1)t - \sum_{i=1}^{n} a_i \leq t$$

$$nt \leq \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$t \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

از طرفی می‌دانیم که $a_i \leq t$ یعنی تمام a_i ها از میانگینشان کمتر یا مساوی اند، که نتیجه می‌دهد $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = t$. پس هر کدام از a_i ها را می‌توان به عنوان زیر مجموعه مطلوب مجموعه S انتخاب کرد.

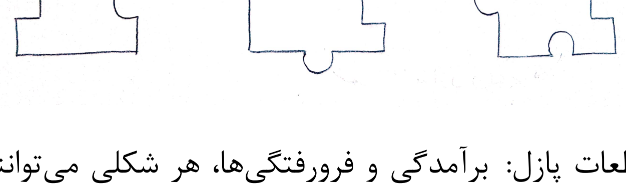
۶. دو مساله زیر را در نظر بگیرید:

A : مجموعه‌ای از $n = 4m$ عدد طبیعی داریم $(a_1, \ldots, a_n)$ ، آیا می توانیم آن را به m زیر مجموعه بشکنیم که مجموع همه‌ی آن‌ها با هم برابر باشد؟ (**قید** : مقدار اعداد این مجموعه در اردر چند جمله‌ای از n می‌باشد، $a_i \leq n^{O(1)};\ 1 \leq i \leq n$)

B : n قطعه پازل داریم. هر قطعه به شکل یک مربع یک در یک است که چهار طرف آن می‌تواند هر شکلی به صورت برآمدگی یا فرورفتگی داشته باشد (شکل ۱) . و یک مستطیل داریم که باید این قطعات را در آن بچینیم، به صورتی که کل مساحت مستطیل را بپوشاند. آیا این کار امکان پذیر است؟

الف) می‌دانیم که مساله A ، $NP - complete$ است. ثابت کنید که مساله B ، $NP - hard$ است. (20 نمره)

ب) اگر قید گفته شده برای مساله A را حذف کنیم همچنان اثبات شما در بخش قبل درست است؟ به صورت مختصر توضیح دهید. (5 نمره)

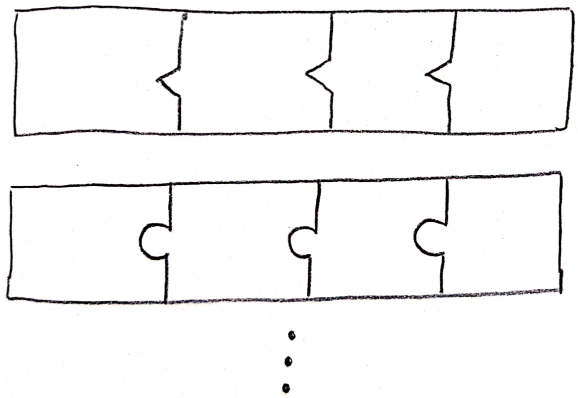


شکل ۱: چند نمونه از قطعات پازل: برآمدگی و فرورفتگی‌ها، هر شکلی می‌توانند باشند و تعدادشان بی نهایت است.

پاسخ:

الف) اگر $\sigma = \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ باشد، مجموع هر زیر مجموعه باید برابر با σ باشد. یک مستطیل با عرض m و طول $n\sigma$ در نظر بگیرید. ابتدا به ازای هر عدد یک مستطیل کوچک‌تر با عرض یک و طول na_i ایجاد می‌کنیم. پوشاندن مستطیل بزرگ با این مستطیل‌های کوچک معادل همان مساله A زیرا تمام مستطیل های کوچک باید به صورت افقی در مستطیل بزرگ قرار گیرند (حتی اگر $a_i = 1$ باشد طول مستطیل کوچک بیش‌تر از عرض مستطیل بزرگ خواهد بود) و هر ردیف از مستطیل‌های کوچک که کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند معادل با یک زیر مجموعه در A است.

حال باید این مستطیل‌های کوچک را به قطعات پازل تبدیل کنیم:



شکل ۲: شکستن مستطیل های کوچک به قطعات پازل

دقت کنید قطعات متعلق به هر مستطیل کوچک باید کنار هم بیایند، زیرا برآمدگی‌های آن‌ها منحصر به فرد است.

در نیجه مساله A را به مساله B کاهش دادیم.

ب) خیر زیرا ما به تعداد $n\sum_{i=1}^{n} a_i$ قطعات پازل ایجاد می‌کنیم و اگر مقادیر a_i در اردر نمایی باشد، کاهش ما چندجمله‌ای نخواهد بود.

۷. (امتیازی) این بازی ماری جدید را در نظر بگیرید که ماری در یک صفحه شطرنجی حرکت می‌کند. و چهار چیز می‌توانند در این صفحه وجود داشته باشند:

۱. مار

۲. موش: هر موش به اندازه سه خانه طول دارد((3×1) . موش ها ساکن هستند و اگر مار به هر قسمت از آن‌ها برخورد کند، به صورت کامل خورده می‌شوند.

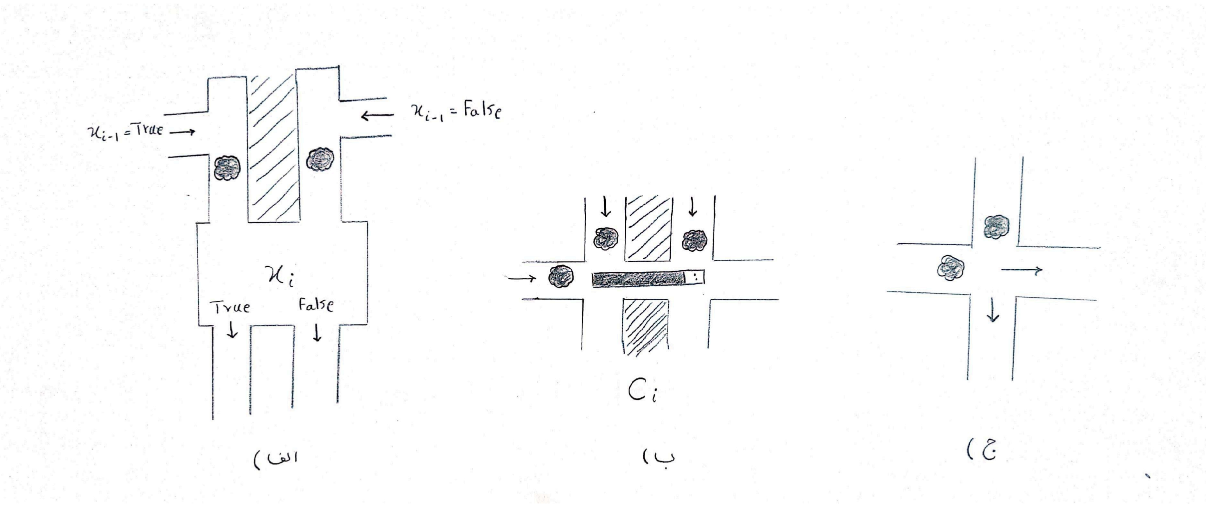
۳. سم: اگر مار وارد خانه‌ای شود که سم دارد، مسموم می‌شود و تاسه خانه بعد از آن در همان جهتی که هست حرکت می‌کند و نمی‌تواند تغییر جهت بدهد. سم‌ها بعد از خورده شدن از بین نمی‌روند.

۴. سنگ: مار نمی‌تواند وارد خانه‌هایی شود که سنگ هستند.

در صورتی که همه‌ی موش‌ها را بخورید، برنده می‌شوید. حال یک مرحله از بازی ماری به شما داده شده است، اما از آنجا که شما درس نظربه زبان‌ها و ماشین‌ها را خوانده‌اید، تصمیم می‌گیرید قبل از آنکه بازی را شروع کنید بررسی کنید که آیا برنده شدن در آن مرحله امکان پذیر است یا نه؟ و اگر امکان پذیر نیست وقت خود را هدر ندهید و بازی نکنید. نشان دهید که مشخص کردن اینکه برنده شدن در مرحله داده شده امکان پذیر هست یا نه یک مساله $NP-complete$ است. (راهنمایی: می‌توانید از کاهش مساله $3SAT$ استفاده کنید.) (10 نمره)

پاسخ:

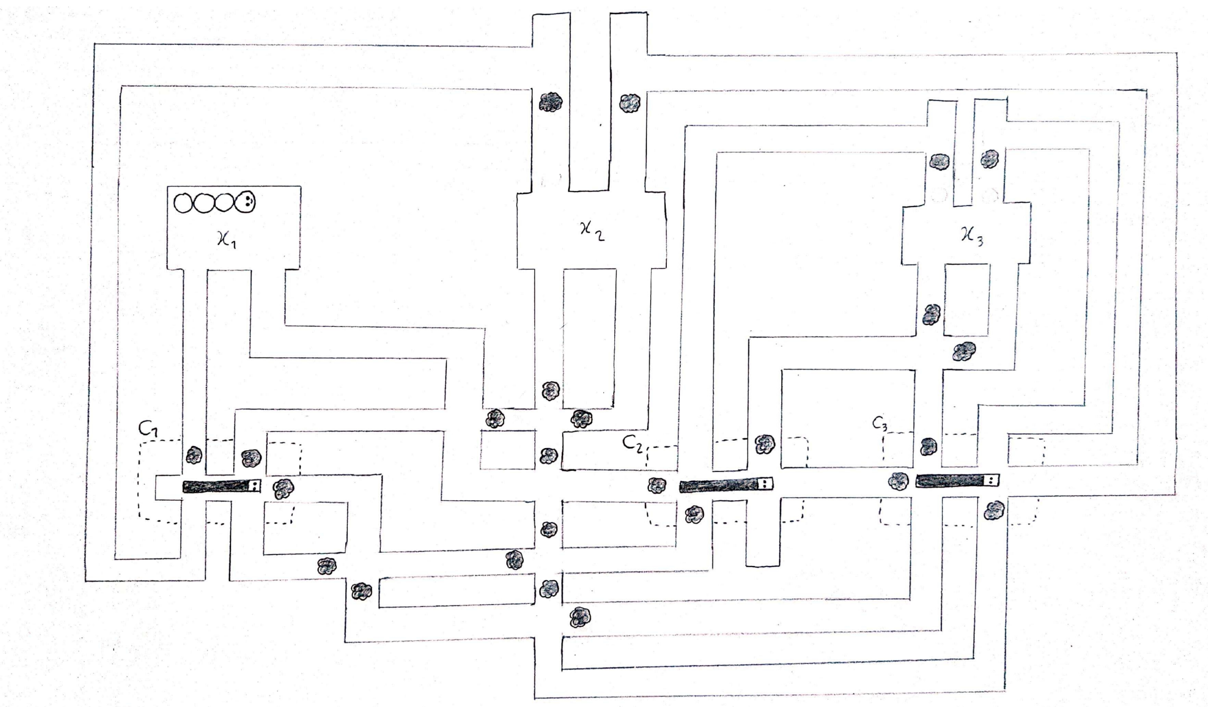
مساله $3SAT$ را به آن کاهش می‌دهیم. ایده کلی به این صورت است که یک فضای بسته به ازای هر متغیر ایجاد می‌کنیم که دو خروجی دارد، اگر مار از خروجی اول خارج شد آن متغیر را $true$ در نظر می‌گیریم، و اگر از خروجی دوم خارج شد آن را $false$ در نظر می‌گیریم. به ازای هر عبارت $(clause)$ نیز یک فضای بسته در نظر می‌گیریم که شامل یک موش است. حال از خروجی‌های هر متغیر یک مسیر به تمام عبارت‌هایی که به ازای آن مقدار متغیر $true$ می‌شوند، ایجاد میکنیم. این مسیر از تمام این عبارت‌ها که گذشت وارد فضای بسته‌ی متغیر بعدی می‌شود. اگر که مساله $3SAT$ جواب داشته باشد شما نیز می‌توانید در این بازی ببرید و برعکس.
از سم ها نیز برای چهار راه‌هایی که به دلیل روی هم افتادن مسیرها ایجاد می‌شود استفاده می‌کنیم تا مار را مجبور کنیم در مسیر مستقیم ادامه دهد و وارد مسیر های دیگر نشود.
این سه فضای در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل ۳: الف) فضای متغیر، ب) فضای عبارت، ج) چهار راه.

دقت کنید که به‌دلیل وجود سم‌ها در فضای متغیر، اگر مار بخواهد از تونل ورودی، خارج شود در بن‌بست گیر می‌کند و می‌بازد.
برای درک بهتر بازی ماری معادل عبارت منطقی زیر در شکل ۴ نشان داده شده است.

$$\Phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \quad (1)$$



شکل ۴: بازی ماری معادل عبارت منطقی ۱ : خط‌های مشکی توپر موش و دایره های مشکلی توپر سم هستند.

برای اثبات NP بودن نیز کافیست که مسیر داده شده برای مار را روی نقشه امتحان کنیم و ببینیم که آیا همه‌ی موش‌ها خورده می‌شوند.