به‌نام خدا

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها - بهار ۱۴۰۳

تمرین شماره ۱۲

دستیار آموزشی این مجموعه: مهدی جمال‌خواه

mehdijmlkh1382@gmail.com

تاریخ تحویل: ۲۹ خرداد ماه (صفحه درس)

** می‌توانید از مسائلی که در کلاس اثبات شده‌اند $NP-complete$ هستند، برای کاهش استفاده کنید و نیازی نیست که $NP-complete$ بودن آن‌ها را اثبات کنید.

۱. به دست آوردن کدامیک از نتایج زیر منجر به حل شدن مساله $P \overset{?}{\neq} NP$ خواهد شد؟
علاوه بر پاسخ بلی/خیر، برای پاسخ خود دلیلی مختصر بیاورید . (اگر پاسخنان بلی است، بگویید که منجر به $P = NP$ می‌شود یا $P \neq NP$.) (15 نمره)

الف) برای یک مساله در NP الگوریتمی با زمان چند جمله‌ای پیدا کنیم.
ب) به ازای هر زبان $NP-complete$ ، A ، کاهش با پیچیدگی زمانی چند جمله‌ای از A به A^* پیدا کنیم.
پ) یک گرامر مستقل از متن برای مساله $3SAT$ پیدا کنیم.
ت) ماشین تورینگی غیر قطعی با زمان چند جمله‌ای بیابیم که توسط ماشین تورینگ قطعی قابل شبیه سازی نباشد.
ث) یک NFA برای مساله $3SAT$ رسم کنیم.

۲. ماشین M را در نظر بگیرید که n ورودی دارد $(x_1, \dots, x_n)$، این ماشین یک ترکیب خطی از ورودی‌هایش تشکیل می‌دهد و اگر از یک آستانه‌ای بیش‌تر بود آن ورودی را می‌پذیرد، در غیراین صورت رد می‌کند.

$$M_j : return \ "YES" \ if \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_i > \beta_j \quad else \ "NO"$$

حال فرض کنید که m تا ماشین از این نوع داریم $(j = 1, \dots, m)$ مقادیر α, β به ازای هر ماشین مشخص است. مساله این است که آیا $x_1, \dots, x_n$ ای وجود دارد که همه‌ی m تاماشین آن را بپذیرند؟
ثابت کنید این مساله $NP-hard$ است. $(\alpha_{ij}, \beta_j \in \mathbb{Z}, x_i \in \{0,1\}; \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m)$
(15 نمره)

۳. کسرا یک بازی جدید اختراع کرده است. این بازی بر روی یک گراف ساده بدون جهت G انجام می‌شود. هر گره در این گراف به تعداد صفر یا بیشتر شکلات دارد. یک حرکت از این بازی شامل برداشتن دو شکلات از گره v و اضافه کردن یکی از شکلات‌ها به یک همسایه دلخواه v و خوردن شکلات دیگر می‌شود (گره v قبل از انجام حرکت باید حداقل دو شکلات داشته باشد.) هدف از این بازی این است که در نهایت با انجام چند حرکت تمامی شکلات‌ها به جز یکی خورده شود. ثابت کنید که این بازی $NP-hard$ است. به عبارت دقیق تر، فرض کنید که یک گراف ساده بدون جهت G به همراه تابع $m(v)$ داده شده است که در آن تابع m تعداد شکلات‌های گره v را برمی‌گرداند .ثابت کنید مساله بافتن دنباله‌ای از حرکات شکلات بازی که تمامی شکلات‌ها جز یکی را حذف کند $NP-hard$ است. (17 نمره)

۴. تینا در تلاش است که با تغییر مساله SAT یک ورژن جدید از آن بدست آورد که در دسته مسائل P قرار گیرد. او این مساله را طراحی کرده است: یک عبارت منطقی $(boolean)$ را به عنوان ورودی می‌گیرد و اگر همیشه صحیح یا همیشه غلط باشد آن را می‌پذیرد. به تینا کمک کنید که آیا این مساله در دسته P قرار دارد؟ اگر بلی برای آن یک الگوریتم چند جمله‌ای ارائه دهید، در غیر این صورت اثبات کنید که $NP-hard$ است. (10 نمره)

۵. دو مساله زیر را در نظر بگیرید:

A : مجموعه S از اعداد صحیح‌مثبت و عدد t داده شده است. می‌خواهیم تعیین کنیم که آیا زیر مجموعه از S وجود دارد که مجموع اعضای آن برابر t باشد.

B : مجموعه S از اعداد صحیح‌مثبت داده شده است. آیا می‌توان زیر مجموعه‌ای از S مانند S' پیدا کرد به طوری که $\sum_{i\in S'} i = \frac{1}{|S|}\sum_{i\in S} i$. دقت کنید در این عبارت $|S|$ برابر تعداد عناصر مجموعه S است.

سعی کنید راه حل چند جمله‌ای برای مساله B پیدا کنید یا با استفاده از مساله A که می‌دانیم $NP-complete$ است، اثبات کنید $NP-hard$ است. (18 نمره)

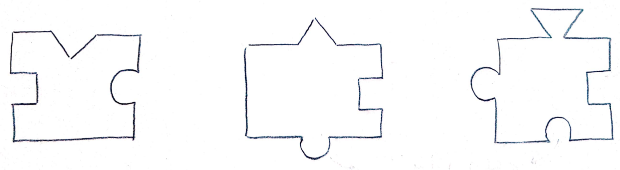
۶. دو مساله زیر را در نظر بگیرید:

A : مجموعه‌ای از $n = 4m$ عدد طبیعی داریم $(a_1, \ldots, a_n)$ ، آیا می توانیم آن را به m زیر مجموعه بشکنیم که مجموع همه‌ی آن‌ها با هم برابر باشد؟ (**قید** : مقدار اعداد این مجموعه در اردر چند جمله‌ای از n می‌باشد، $a_i \leq n^{O(1)};\ 1 \leq i \leq n$)

B : n قطعه پازل داریم. هر قطعه به شکل یک مربع یک در یک است که چهار طرف آن می‌تواند هر شکلی به صورت برآمدگی یا فرورفتگی داشته باشد (شکل ۱) . و یک مستطیل داریم که باید این قطعات را در آن بچینیم، به صورتی که کل مساحت مستطیل را بپوشاند. آیا این کار امکان پذیر است؟

الف) می‌دانیم که مساله A ، $NP - complete$ است. ثابت کنید که مساله B ، $NP - hard$ است. (20 نمره)

ب) اگر قید گفته شده برای مساله A را حذف کنیم همچنان اثبات شما در بخش قبل درست است؟ به صورت مختصر توضیح دهید. (5 نمره)



شکل ۱: چند نمونه از قطعات پازل: برآمدگی و فرورفتگی‌ها، هر شکلی می‌توانند باشند و تعدادشان بی نهایت است.

۷. (امتیازی) این بازی ماری جدید را در نظر بگیرید که ماری در یک صفحه شطرنجی حرکت می‌کند. و چهار چیز می‌توانند در این صفحه وجود داشته باشند:

۱. مار

۲. موش: هر موش به اندازه سه خانه طول دارد((3×1) . موش ها ساکن هستند و اگر مار به هر قسمت از آن‌ها برخورد کند، به صورت کامل خورده می‌شوند.

۳. سم: اگر مار وارد خانه‌ای شود که سم دارد، مسموم می‌شود و تاسه خانه بعد از آن در همان جهتی که هست حرکت می‌کند و نمی‌تواند تغییر جهت بدهد. سم‌ها بعد از خورده شدن از بین نمی‌روند.

۴. سنگ: مار نمی‌تواند وارد خانه‌هایی شود که سنگ هستند.

در صورتی که همه‌ی موش‌ها را بخورید، برنده می‌شوید. حال یک مرحله از بازی ماری به شما داده شده است، اما از آنجا که شما درس نظربه زبان‌ها و ماشین‌ها را خوانده‌اید، تصمیم می‌گیرید قبل از آنکه بازی را شروع کنید بررسی کنید که آیا برنده شدن در آن مرحله امکان پذیر است یا نه؟ و اگر امکان پذیر نیست وقت خود را هدر ندهید و بازی نکنید. نشان دهید که مشخص کردن اینکه برنده شدن در مرحله داده شده امکان پذیر هست یا نه یک مساله $NP-complete$ است. (راهنمایی: می‌توانید از کاهش مساله $3SAT$ استفاده کنید.) (10 نمره)