به نام خدا

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها- بهار 1403

تمرین شماره 3

دستیار آموزشی این مجموعه: علی حمزه پور

alihamzehpour2002@gmail.com

تاریخ تحویل : 21 فروردین (صفحه درس)

---

1. با استفاده از لم تزریق نشان دهید که زبان‌های زیر نامنظم هستند.(هر کدام 7 نمره)

a) $L = \{a^{n^2} | n \geq 0\}$

پاسخ:

- حریف عدد صحیح $p \geq 1$ را انتخاب می‌کند.
- من رشته $s = a^{p^2}$ را انتخاب می‌کنم. $(|s| \geq p,\ s \in L)$
- حریف رشته را به $s = xyz$ می‌شکند که در آن $|xy| \leq p$, $y \neq \varepsilon$ پس

  $0 < l \leq p,\ y = a^{l}$
- با پمپ کردن y به مقدار $i = 2$ رشته به صورت a^{p^2+l} در می‌آید و میتوان نوشت:

  $0 < l \leq p \Rightarrow p^2 < l \leq p + p^2 \leq (p+1)^2$
- پس رشته‌ی درست‌شده عضو زبان نیست و در نتیجه L نامنظم است.

b) $L = \{a^i b^j c^k | 2i + 3k = 7j\}$

پاسخ:

- حریف عدد صحیح $p \geq 1$ را انتخاب می‌کند.
- من رشته $s = a^{2p} b^p c^p$ را انتخاب می‌کنم. $(|s| \geq p,\ s \in L)$
- حریف رشته را به $s = xyz$ می‌شکند که در آن $|xy| \leq p$, $y \neq \varepsilon$ پس

  $0 < l \leq p,\ y = a^{l}$

- با پمپ کردن y به مقدار $i = 2$ رشته به صورت $a^{2p+l}b^{p}c^{p}$ در می‌آید و میتوان نوشت:

$$l > 0 \Rightarrow 2(2p + l) + 3p = 7p + l > 7p$$

- پس رشته‌ی درست‌شده عضو زبان نیست و در نتیجه L نامنظم است.

c) $L = \{a^{n}b^{m} \mid |m - n| < 10\}$

پاسخ:

- حریف عدد صحیح $p \geq 1$ را انتخاب می‌کند.
- من رشته $a^{p}b^{p}$ را انتخاب می‌کنم. $(|s| \geq p,\ s \in L)$
- حریف رشته را به $s = xyz$ می‌شکند که در آن $y \neq \varepsilon,\ |xy| \leq p$ پس

$$0 < l \leq p,\ y = a^{l}$$

- با پمپ کردن y به مقدار $i = 101$ رشته به صورت $a^{p+100l}b^{p}$ در می‌آید و میتوان نوشت:

$$l \geq 1 \Rightarrow (p + 100l) - p = 100\,l \geq 100$$

- پس رشته‌ی درست‌شده عضو زبان نیست و در نتیجه L نامنظم است.

d) $L = \{wbbv \mid w, v \in \{a, b\}*\ ,\ |w| \neq |v|\}$

پاسخ:

- حریف عدد صحیح $p \geq 1$ را انتخاب می‌کند.
- من رشته $a^{p}bba^{p!+p}$ را انتخاب می‌کنم. $(|s| \geq p,\ s \in L)$
- حریف رشته را به $s = xyz$ می‌شکند که در آن $y \neq \varepsilon,\ |xy| \leq p$ پس

$$0 < l \leq p,\ y = a^{l}$$

- با پمپ کردن y به مقدار $i = \frac{p!}{l} + 1$ رشته به صورت $a^{p!+p}bba^{p!+p}$ در می‌آید زیرا:

$$(\frac{p!}{l} + 1)l + (p - l) = p! + l + p - l = p! + p$$

همچنین دقت کنید که $\frac{p!}{l}$ عددی طبیعی‌ست زیرا $l \leq p$ و در نتیجه $p!$ به آن بخش‌پذیر است.

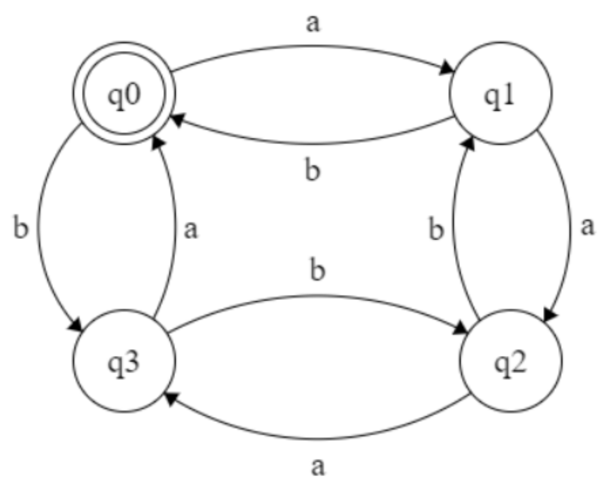
- پس رشته‌ی درست‌شده عضو زبان نیست و در نتیجه L نامنظم است.

2. منظم‌بودن یا نامنظم‌بودن زبان‌های زیر را مشخص و اثبات کنید. برای نامنظم‌بودن از لم تزریق استفاده کنید.(هر کدام 5 نمره)

a) $L = \{a^n b^m \mid n \equiv m \ mod \ 4\}$

پاسخ:

این زبان منظم است و DFA زیر آن را تشخیص می‌دهد:



b) $L = \{a^n b^m \mid mn \geq 12\}$

پاسخ:

زبان $\bar{L}$ متناهی است در نتیجه منظم است. از آنجا که زبان‌های منظم روی مکمل‌گیری بسته هستند می‌توان نتیجه گرفت که L نیز منظم است.

c) $L = \{a^p \mid p \ is \ a \ prime \ number\}$

پاسخ:

- حریف عدد صحیح $p \geq 1$ را انتخاب می‌کند.
- من رشته a^q که q یک عدد اول بزرگتر از p است را انتخاب می‌کنم. $(|s| \geq p, \ s \in L)$
- حریف رشته را به $s = xyz$ می‌شکند که در آن $|xy| \leq p$, $y \neq \varepsilon$ پس

$$0 < l \le p,\ y = a^l$$

- با پمپ کردن y به مقدار $i = q + 1$ رشته به صورت a^{q+ql} در می‌آید و

$$q + ql = q(1 + l)$$

از آنجا که $l \ge 1$ پس $l + 1 \ge 2$ پس $q + ql$ عددی غیر اول است.

- پس رشته‌ی درست‌شده عضو زبان نیست و در نتیجه L نامنظم است.

d) $L = \{a^n w a^n \mid n \ge 1,\ w \in \{a, b\}*\}$

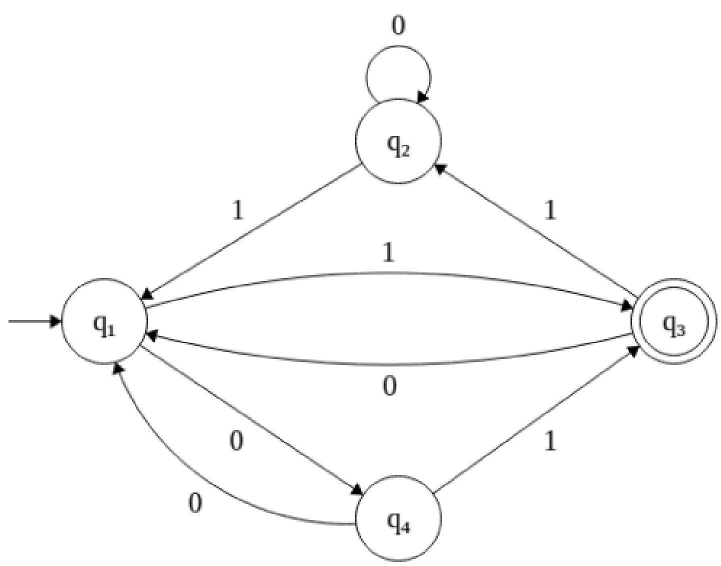
پاسخ:

شرط لازم و کافی برای عضو زبان بودن این است که یک رشته با a آغاز و با a تمام شود تا عضو زبان باشد، زیرا در این حالت با $n = 1$ می‌توان رشته را به فرمت خواسته شده نوشت. پس عبارت منظم زیر این زبان را توصیف می‌کند و این زبان منظم است:

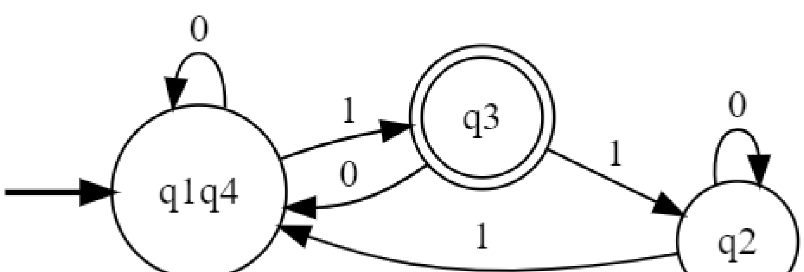
$$L = a.(a + b)*.a$$

3. DFAهای زیر را کمینه کنید.(هر کدام 7 نمره)

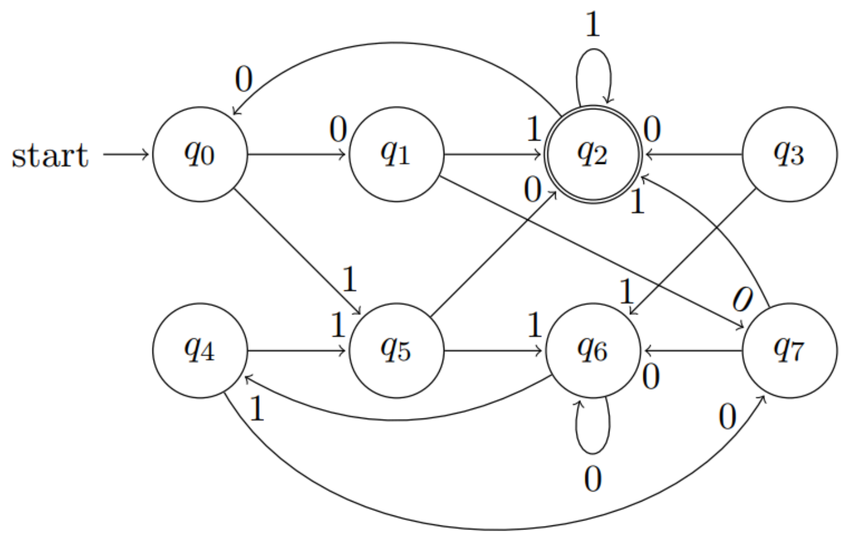
a)



پاسخ:



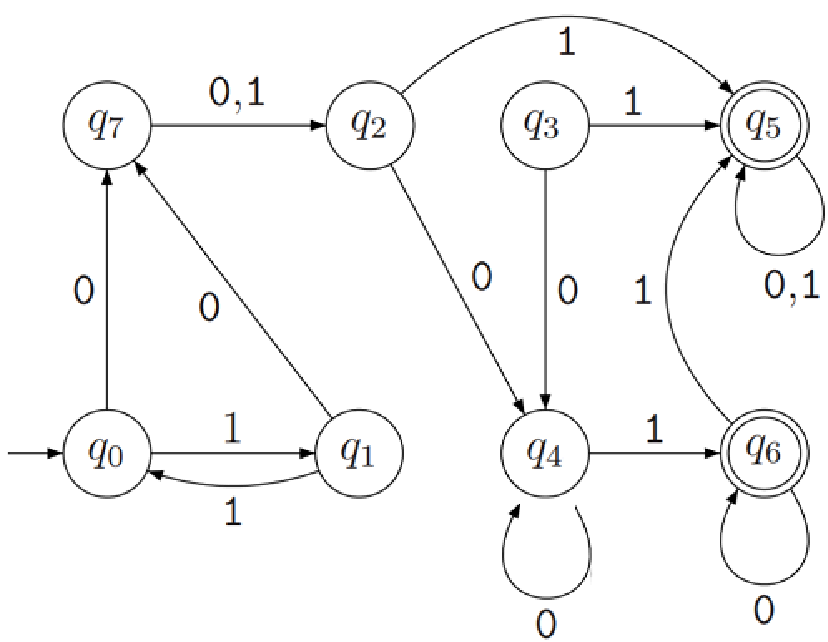
b)



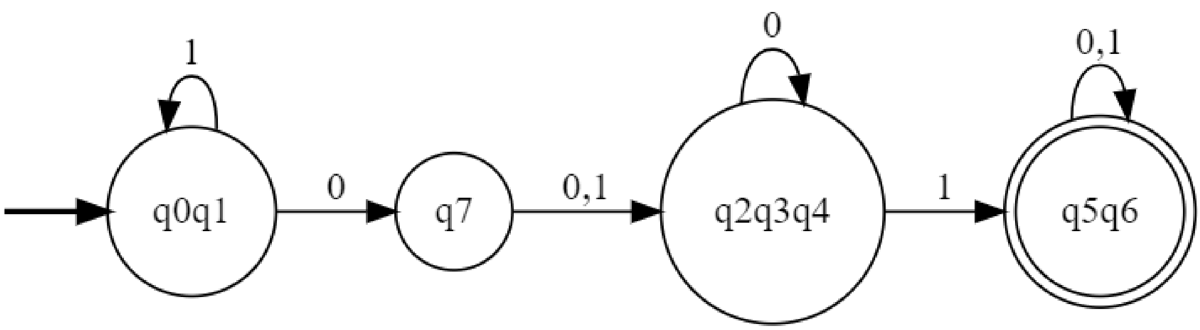
پاسخ:

تنها استیت q3 حذف می‌شود و باقی استیت‌ها با هم فرق دارند.

c)



پاسخ:



4. مینا که به تازگی با لم تزریق آشنا شده، سعی دارد اثبات کند که زبان زیر نامنظم است:

$$L = \{a^k w \mid w \in \{a, b\}^*, \ |w| = k\}$$

او مراحل زیر را در اثبات طی می‌کند:

- حریف عدد صحیح $p \geq 1$ را انتخاب می‌کند.
- من رشته $s = a^p b^p$ را انتخاب می‌کنم. $(|s| \geq p, \ s \in L)$
- حریف رشته را به $s = xyz$ می‌شکند که در آن $y \neq \varepsilon, \ |xy| \leq p$
- چون $|xy| \leq p$ حتما y در aهای رشته قرار می‌گیرد: $y = a^l, \ l \neq 0$. با پمپ کردن yبه مقدار $i = 2$ رشته به صورت $a^{p+l}b^p$ در می‌آید و چون تعداد aها از طول w بیشتر است، این رشته به L تعلق ندارد.
- پس L نامنظم است.

نرگس، دوست مینا، حس می‌کند که اثبات او ایراد دارد اما نمی‌تواند مشکلی از آن پیدا کند. به نرگس کمک کنید و توضیح دهید چه قسمتی از اثبات دچار مشکل است. سپس اثبات را اصلاح کنید تا به درستی نامنظم‌بودن این زبان معلوم شود.(10 نمره)

پاسخ:

مشکل پاسخ مینا این است که می‌توان قسمتی از a^{p+l} را به w منتقل کرد تا دوباره تساوی را برقرار کنیم. برای حل این مشکل مرحله‌ی آخر اثبات را به شکل زیر تغییر می‌دهیم:

- چون $|xy| \leq p$ حتما y در aهای رشته قرار می‌گیرد: $y = a^l,\ l \neq 0$. با پمپ کردن y به مقدار $i = 0$ رشته به صورت $a^{p-l}b^p$ در می‌آید و چون تعداد aها از طول w کمتر است، این رشته به L تعلق ندارد.
- پس L نامنظم است.

دقت کنید در این راه حل دیگر نمی‌توان تعدادی از کاراکترها را از w به a^{p-l} انتقال داد زیرا w فقط شامل b است.

5. اگر A مجموعه‌ای شامل اعداد طبیعی باشد و k نیز عددی طبیعی بزرگتر از 1 باشد، تعریف می‌کنیم:

$$B_k(A) = \{w |\ w\ is\ \ representation\ in\ base\ k\ of\ some\ number\ in\ A\}$$

در نمایش یک عدد در مبنای k اجازه‌ی استفاده از 0 قبل از عدد نداریم. برای مثال $B_2(\{2, 3\}) = \{10, 11\}$ و $B_3(\{2, 3\}) = \{2, 10\}$. یک مجموعه A مثال بزنید که $B_2(A)$ منظم باشد اما $B_3(A)$ نامنظم باشد و آن را ثابت کنید.(14 نمره)

پاسخ:

$$A = \{x \mid x = 2^n - 1,\ n \geq 1\}$$

$B_2(A)$ منظم است زیرا کافی‌ست چک کنیم که تمام کاراکترها 1 باشد:

$$B_2(A) = 1.(1)^*$$

حالا ثابت می‌کنیم که $B_3(A)$ نامنظم است:

- حریف عدد صحیح $p \geq 1$ را انتخاب می‌کند.
- من رشته‌ای دلخواه در مبنای 3 با طول بزرگتر از p انتخاب می‌کنم که نشانگر یک عدد مثل $2^n - 1$ است.(چون n می‌تواند هر چقدر بزرگ باشد، همچین رشته‌ای وجود دارد)
- حریف رشته را به $s = xyz$ می‌شکند که که در آن $|xy| \leq p$, $y \neq \varepsilon$. می‌توانیم عددی که این رشته نشان می‌دهد را به این صورت بنویسیم:

$$[xyz]_3 = [x]_3 3^{|y|} 3^{|z|} + [y]_3 3^{|z|} + [z]_3$$

منظور از $[a]_3$ عددیست که رشته‌ی a در مبنای 3 نشان می‌دهد.

حالا به ازای هر $i > 1$ می‌توان نوشت:

$$[xy^iz]_3 = [x]_3 3^{i|y|}3^{|z|} + [y]_3 3^{|z|}(\sum_{0\le j<i} 3^{j|y|}) + [z]_3$$

و در نتیجه(با کمک جمع در دنباله‌ی هندسی):

$$[xy^iz]_3 - [xyz]_3 = 3^{|y|+|z|}\frac{3^{(i-1)|y|}}{3^{|y|}-1}([x]_3(3^{|y|} - 1) + [y]_3)$$
$$= 2^m - 1 - (2^n - 1) = 2^n(2^{m-n} - 1);\ (m>n)$$

پس این حاصل باید مضربی از 2^n و یا همان مقدار رشته‌ی اولیه + 1 باشد. از طرفی $3^{|y|+|z|}\frac{3^{(i-1)|y|}}{3^{|y|}-1}$ مقداری فرد است، پس بزرگترین ضریب 2 در این عبارت همان بزرگترین ضریب 2 در $([x]_3(3^{|y|} - 1) + [y]_3)$ است که این عبارت کمتر از 3^p است (زیرا $|xy| \le p$). از طرفی مقدار رشته‌ی اولیه قطعا از 3^p بزرگتر است زیرا طول آن را بزرگتر از p است. در نتیجه به تناقض رسیدیم و اختلاف حساب شده نمی‌تواند ضریبی از 2^n باشد.

- پس رشته‌ی درست‌شده عضو زبان نیست و در نتیجه L نامنظم است.

.6

الف) با توجه به بسته‌بودن زبان‌های منظم به برخی عملگرهای خاص و سپس با کمک لم تزریق، ثابت کنید که زبان زیر منظم نیست.(7 نمره)

$$L = \{a^ib^jc^k \mid i, j, k \ge 0,\ if\ i = 1\ then\ j = k\}$$

پاسخ:

زبان L' را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$L' = \{ab^jc^k \mid j, k \ge 0\}$$

این زبان منظم است زیرا می‌توان با عبارت منظم زیر آن را توصیف کرد:

$$L' = ab*.c*$$

حالا از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم که L نیز منظم است. چون زبان‌های منظم به عملگر اشتراک بسته هستند می‌توان نتیجه گرفت که $L \cap L' = \{ab^n c^n\}$ نیز منظم است که تناقض است پس فرض اولیه غلط بوده و L نامنظم است.

اثبات نامنظم بودن $ab^n c^n$:

- حریف عدد صحیح $p \geq 1$ را انتخاب می‌کند.
- من رشته $s = ab^p c^p$ را انتخاب می‌کنم. $(|s| \geq p,\ s \in L)$
- حریف رشته را به $s = xyz$ می‌شکند که در آن $|xy| \leq p$, $y \neq \varepsilon$ پس
$$0 \leq k < p,\ y = ab^k$$
$$0 < l \leq p,\ y = b^l$$
- در هر دو حالت با پمپ کردن y به مقدار $i = 2$ رشته به حالتی در می‌آید که عضو زبان نیست.($a^2 b^{p+k} c^p$ یا $ab^{p+l} c^p$)
- پس L نامنظم است.

ب) می‌توان نشان داد که با استفاده از لم تزریق نامنظم‌بودن این زبان قابل اثبات نیست. در مورد قضیه‌ی Myhill Nerode که ابزاری قوی‌تر برای بررسی منظم یا نامنظم‌بودن یک زبان است، تحقیق کنید و با استفاده از این قضیه نشان دهید که زبان مطرح شده نامنظم است.(10 نمره امتیازی)

پاسخ:

تعریف: دو رشته‌ی x و y را روی زبان L غیرقابل تشخیص می‌نامیم در صورتی که به ازای هر رشته‌ی دلخواه z یا $xz,\ yz \in L$ یا $xz,\ yz \notin L$ برقرار باشد. تشخیص‌ناپذیر بودن را به صورت $x \equiv_L y$ نشان می‌دهیم.

از آنجا که این رابطه یک نوع رابطه‌ی تساوی است، رشته‌های مختلف را روی یک زبان می‌توان به کلاس‌های مختلف تقسیم کرد به طوری که دو رشته x و y عضو یک کلاس هستند اگر و تنها اگر $x \equiv_L y$
.

قضیه Myhill Nerode: یک زبان منظم است اگر و تنها اگر بتوان رشته‌های الفبایش را به تعداد متناهی کلاس تشخیص ناپذیری مختلف تقسیم کرد.

اثبات منظم بودن زبان L: نشان می‌دهیم که رشته‌های زبان به تعداد نامتناهی کلاس تشخیص ناپذیری مختلف تقسیم کرد. دو رشته‌ی ab^i و ab^j که $i \neq j$ را در نظر بگیرید. از آنجا که $ab^i c^i \in L$ اما $ab^i c^i \notin L$ می‌توان نتیجه گرفت که این دو رشته تشخیص‌پذیر هستند پس به دو کلاس تشخیص ناپذیری متفاوت تعلق دارند. با همین استدلال می‌توان نتیجه گرفت که به ازای هر عدد طبیعی مانند x برای رشته‌ی ab^x یک کلاس تشخیص‌ناپذیری متفاوت داریم پس تعداد کلاس‌های تشخیص‌ناپذیری این زبان نامتناهی‌ست و در نتیجه این زبان نامنظم است.