



به نام خدا

نظریه زبان ها و ماشین ها- بهار 1403

تمرین شماره 11

دستیار آموزشی این مجموعه: فرید عظیم محسنی

farbodazimmohseni@gmail.com

تاریخ تحویل: 20 خرداد

- در هیچ کدام از اثبات ها به غیر از سوال 3 مجاز به استفاده از قضیه Rice نیستید.

1. یک از دانشجویان که هنوز بخش reduction را مطالعه نکرده است زبان زیر را می بیند (این زبان تمام ماشین تورینگ هایی را شامل می شود که تعداد متناهی رشته را می پذیرند):

$$FINITE_{TM} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ is finite} \}$$

و اینگونه استدلال می کند که میتوان یک ماشین تورینگ ساخت که ماشین تورینگی را به عنوان ورودی بگیرد و چک کند که آیا در state های آن loop وجود دارد یا نه؟ اگر وجود داشت یعنی اینکه میتوان به تعداد دلخواه loop زد و بی نهایت رشته را پذیرفت. شما به عنوان کسی که این بخش را مطالعه کرده است به سوالات زیر جواب دهید:

- الف) چرا این استدلال اشتباه است؟ (5 نمره)

- ب) با استفاده از کاهش A_{TM} به $FINITE_{TM}$ ($A_{TM} \leq FINITE_{TM}$) ثابت کنید $FINITE_{TM}$ تصمیم ناپذیر است (10 نمره)

- ج) حال که قسمت قبل را ثابت کردید با استفاده از کاهش $FINITE_{TM} \leq A_{TM}$ نشان دهید A_{TM} تصمیم ناپذیر است (10 نمره).

2. ثابت کنید مسئله زیر undecidable است. (15 نمره)

$$Palindrome = \{ \langle G \rangle \mid G \text{ is a context free grammar and } L(G) \text{ has at least one palindrome} \}$$

★ اگر یک رشته palindrome باشد یعنی از هر دو طرف به یک شکل دیده می شود مثل abba

★ راهنمایی: می توانید از کاهش $PCP \leq Palindrome$ استفاده کنید

3. با قضیه Rice، تصمیم ناپذیر بودن کدام یک از زبان های زیر را می توان ثابت کرد و کدام یک را نمی توان (در صورت امکان اثبات کنید، در غیر این صورت دلیل بیاورید)

• الف) (10 نمره)

$$\{(M) \mid M \text{ is a TM and never writes anything on a blank cell}\}$$

• ب) زبان تورینگ ماشین M حداکثر 3 رشته را میپذیرد (5 نمره)

$$\{(M) \mid M \text{ is a TM and } |L(TM)| \leq 3\}$$

یک زبان چه خاصیتی باید داشته باشد تا با قضیه Rice بتوان تصمیم ناپذیری آن را اثبات کرد (5 نمره)

4. ثابت کنید زبان زیر تصمیم ناپذیر است (مسئله L ، ماشین تورینگ M و استیت q را دریافت می کند و می گوید که ماشین M حین اجرا آیا هرگز وارد آن استیت می شود یا نه) (10 نمره)

$$L = \{ \langle M, q \rangle \mid M \text{ never enters state } q \}$$

5. زبان زیر را در نظر بگیرید (در هر دو بخش $\Sigma = \{0,1\}$):

$$L1 = \{ \langle M \rangle \mid \text{where } M \text{ is a TM and } L(M) \neq \emptyset \text{ and each string in } M\text{'s language has prefix } 101 \}$$

• الف) ثابت کنید زبان زیر turing recognizable نیست. (10 نمره)

حال زبان $L2$ به شکل زیر را در نظر بگیرید:

$$L2 = \{ \langle M1, M2 \rangle \mid \text{where } M1 \text{ and } M2 \text{ are turing machines and } L(M1) \subseteq L(M2) \}$$

• ب) با استفاده از $L1 \leq L2$ ثابت کنید $L2$ هم تشخیص ناپذیر است. (10 نمره)

6. ثابت کنید زبان زیر تصمیم پذیر است: (10 نمره)

$$L = \{ \langle A, B \rangle \mid A \text{ and } B \text{ are DFA and } L(A) \subseteq L(B) \}$$

7. تابع busy beaver به صورت $BB: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ تعریف می شود. به ازای هر مقدار از k ، تمام ماشین تورینگ های k -استیتی را در نظر بگیرید که با شروع از یک نوار خالی، در نهایت halt می کنند. مقدار $BB(k)$ حداکثر تعداد یک های است که پس از halt کردن بر روی نوار در بین تمام ماشین تورینگ های گفته شده باقی می ماند. اثبات کنید این تابع قابل محاسبه نمی باشد (برای تمام ماشین تورینگ های این مسئله، زبان نوار را به صورت $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$ فرض کنید) (10 نمره امتیازی)