به نام خدا

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها- بهار ۱۴۰۳

تمرین شماره ۱۰

دستیار آموزشی این مجموعه: امیر پارسا موبد
pmobed82@gmail.com

تاریخ تحویل : ۱۳ خرداد (صفحه درس)

با توجه به تعریف زیر به سوال‌های ۱ و ۲ پاسخ دهید :

$F : M \rightarrow M$ یک تابع است که ورودی آن یک ماشین تورینگ و خروجی آن نیز ماشین تورینگ است.
این تابع از روی ماشین تورینگِ ورودی M، ماشین تورینگِ خروجی را به این صورت می‌سازد که در این ماشین به ازای هر ورودی w، به اندازه حداکثر $2^{|w|}$ گام برای ورودی w را در ماشین تورینگ M اجرا می‌کند، اگر در $2^{|w|}$ متوقف شد و اکسپت شده بود اکسپت می‌کند و در غیر این صورت ریجکت می‌کند.

1. نشان دهید، زبان زیر تشخیص‌پذیر است. (۲۰ نمره)

$$L = \{< M_1, M_2 > \mid M_1 \text{ and } M_2 \text{ are Turing machines and } L(F(M_1)) \neq L(F(M_2))\}$$

پاسخ: ماشین‌های تورینگ $F(M_1)$ و $F(M_2)$ با توجه به تعریف، تصمیم‌پذیر هستند(زیرا در تعداد گام متناهی متوقف می‌شوند. برای این که چک کنیم زبان این دو ماشین مساوی نیستند باید یک کلمه پیدا کنیم که در یک ماشین اکسپت و در دیگری ریجکت می‌شود. برای ... $i = 1, 2, 3,$ به ازای تمام کلمات $w \in \Sigma^*$ که $|w| = i$، w را در $F(M_1)$ و $F(M_2)$ اجرا می‌کنیم (دقت کنید تعداد کلمات به طول i متناهی است).
اگرنتیجه متفاوت بود اکسپت می‌کنیم. در این صورت چون اگر دو زبان متفاوت باشند قطعاً در یک کلمه مثل w تفاوت دارند. قطعا در زمانی که $i = |w|$ متوجه این تفاوت خواهیم شد و اکسپت خواهیم کرد، و در غیر این صورت متوقف نخواهیم شد. در نتیجه این زبان تشخیص‌پذیر است.

2. (امتیازی) نشان دهید این مسئله که آیا برای ماشین $F(M)$، DFA ای با تعداد state های کمتر یا مساوی n، وجود ندارد، تشخیص‌پذیر است. (۱۰ نمره)

$$L = \{< M, n > \mid M \text{ is a Turing machine, and } n \text{ is an integer,}$$

$$\text{there is no DFA } D, \text{ where } L(D) = L(F(M)) \text{ and the number of states of } D \text{ is less than or equal to } n.\}$$

پاسخ: اگر زبان $L(F(M))$ بخواهد یک DFA با حداکثر n استیت داشته باشد، باید زبانی منظم باشد در نتیجه لم پامپینگ برای آن برقرار خواهد شد؛ و چون حداکثر n استیت دارد، درباره ثابت p در شرط پامپینگ، که باید به ازای کلمه‌های $|w| \geq p$ برقرار باشد، می‌توان نتیجه گیری کرد که می‌تواند برابر با n باشد.
حال می‌دانیم برای رد کردن منظم بودن یک زبان باید کلمه‌ای پیدا کنیم که به هر ترتیبی که به سه بخش، با شرایط گفته شده در لم پامپینگ، تقسیم کنیم، حداقل یک n وجود داشته باشد، که xy^nz داخل زبان $L(F(M))$ نباشد.

حال برای پیدا کردن این کلمه به ازای تمام کلمات با طول بیشتر یا مساوی n ابتدا به ترتیب طول و بین کلمات با طول برابر به ترتیب الفبایی این کار را انجام می‌دهیم: (فرض کنید کلمه مفروض w است.)

۱. تمام حالات قطعه بندی $w = xyz$ به طوری که $|xy| \leq n$, $|y| \geq 1$ را در نظر می‌گیریم. (چون طول رشته محدود است تعداد حالات قطعه بندی هم محدود است.)
۲. به ازای n=0 تا بی‌نهایت $xy^n z$ را در $F(M)$ اجرا می‌کنیم (اجرا کردن در $F(M)$ زمان محدودی به طول می‌انجامد). اگر حداقل یک $xy^n z \notin L(F(M))$ وجود داشته باشد، این قطعه بندی معتبر نیست.
۳. اگر هیچ قطعه بندی معتبری برای کلمه w پیدا نشود. $L(F(M))$ منظم نیست.

اما هنوز یک قدم تا اینکه این ماشین تشخیص‌پذیر شود فاصله داریم. زیرا در مرحله ۲ ما به ازای n=0 تا بی‌نهایت می‌خواهیم اجرا کردن در $F(M)$ را انجام دهیم، بدیت ترتیب امکان دارد هیچوقت به چک کردن قطعی بندی بعدی نرسیم. برای رفع این مشکل کلماتی که قرار است در $F(M)$ اجرا شود را به به ترتیب طول اجرا می‌کنیم. یعنی وقتی قطعه‌بندی $w = xyz$ را داشتیم می‌دانیم طول کلمه $xy^n z$ از $|w| - |y|$ شروع می‌شود که $1 \leq |y| \leq n$ و در کل به ازای n برابر با $|w| + (n - 1)|y|$ است. بدین ترتیب می‌توانیم به ترتیب طول کلمات را روی ماشین اجرا کنیم و وقتی به طول i رسیدیم تمام کلماتی که قرار است در $F(M)$ اجرا شوند به ترتیب الفبایی اجرا کنیم، اگر ریجکت بود قطعه بندی مربوط به این رشته را رد کنیم و هرگاه تمام قطعه‌بندی های یک کلمه رد شد، این کلمه مثال نقض پامپینگ است و زبان منظم نیست.

3. A و B دو زبان تشخیص‌پذیر هستند، ثابت کنید $A \cup B$ و $A \cap B$ تشخیص‌پذیر هستند. (۲۰ نمره)

پاسخ : برای هر کدام از این دو زبان تشخیص پذیر ماشین تورینگ تشخیص پذیر وجود دارد.
حال برای ساخت $A \cup B$ کافی است به ازای هر کلمه در M_A, M_B اجرا کنیم. اگر حداقل یکی اکسپت کرد اکسپت کنیم. اگر $w \in A \cup B$ باشد حداقل در یکی از این دو ماشین اکسپت می‌شود پس به ازای هر کلمه ورودی با اجرای آن در ماشین M_A و M_B در زمان متناهی مشخص می‌شود که اکسپت می‌شود یا خیر. اما دقت شود چون این دو ماشین تشخیص‌پذیر هستند ممکن است روی ورودی به اصطلاح لوپ بزنند. پس اگر ابتدا در ماشین A و بعد در ماشین B بخواهیم اجرا کنیم ممکن است اجرا کردن روی ماشین A هیچوقت به اتمام نرسد، پس برای رفع این مشکل یکی در میان یک گام از هر ماشین را اجرا می‌کنیم. به طور مشابه برای $A \cap B$ عمل می‌کنیم، با این تفاوت، که باید صبر کنیم تا هر دو ماشین w را اکسپت کنند.

4. ثابت کنید زبان زیر تصمیم پذیر است. (۲۰ نمره)

$$L = \{< D > \mid D \text{ is a DFA that } w \in L(K) \Rightarrow w^R \in L(K)\}$$

پاسخ : زبان‌های منظم نسبت به وارون‌سازی بسته‌اند. و یک زبان شرط سوال را دارد اگر و تنها اگر با وارونش برابر باشد. در نتیجه با استفاده از EQ_{DFA} چک می‌کنیم آیا $L(D) = L(D^R)$ یا خیر که یک مسئله تصمیم‌پذیر است پس این زبان نیز تصمیم‌پذیر است.

5. اگر L_1 و L_2 دو زبان تصمیم‌پذیر باشند نشان دهید زبان زیر تصمیم‌پذیر است. (۲۰ نمره)

$$L = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1,\ w_2 \in L_2 \text{ and } w_1 w_2 \text{ is palindrome.}\}$$

پاسخ : ماشین تورینگ تصمیم‌پذیر برای L را به این صورت می‌سازیم که به ازای هر ورودی w ابتدا چک می‌کنیم پالیندروم باشد، برای چک کردم پالیندروم بودن w نیز باید w با w^R(وارون شده w) یکی باشد. حال کافی است دو تکه w را فیکس کنیم $w = xy$ و سپس x را در M_{L_1} اجرا می‌کنیم و y را در M_{L_2} اگر هر دو اکسپت شدند w را اکسپت می‌کنیم. چون L_1 و L_2 تصمیم‌پذیر بودند نیز اجرای رشته ورودی روی آنها یک زمان متناهی طول می‌کشد و فیکس کردن xy هم $|w|$ حالت دارد.

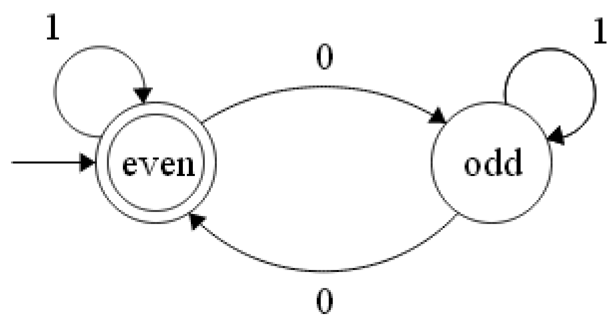
6. نشان دهید مسئله اینکه آیا یک CFG به ازای تمامی ... $i = 0, 1, 2,$ رشته‌ای به طول i می‌سازد، تصمیم‌پذیر است. (۱۰ نمره)

راهنمایی : می‌توانید از این قضیه بدون اثبات استفاده کنید که یک CFG، که تنها یک حرف دارد، منظم است.

پاسخ : چون فقط طول رشته تولید شده برای ما مهم است می‌توانیم تمام terminal symbol ها را یک حرف یکتا در نظر بگیریم. بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم این حرف a است. با این قضیه که اگر یک گرامر فقط از یک حرف تشکیل شده باشد زبان منظم است. پس برای اینکه شرط مسئله را چک کنیم کافی است DFA زبان مورد نظر را بسازیم و با EQ_{DFA} چک کنیم با a^* یکی هست یا خیر.

7. نشان دهید این مسئله که یک DFA با الفبای $\Sigma = \{0, 1\}$ هیچ کلمه‌ای با تعداد زوج 0 ندارد تصمیم‌پذیر است. (۱۰ نمره)

پاسخ : زبان DFA را با L نشان می‌دهیم. زبان B شامل تمام رشته‌ها با تعداد زوج 0، منظم است و با چنین DFA ای ساخته می‌شود :



می‌دانیم زبان‌های منظم نسبت به اشتراک گیری بسته‌اند. در نتیجه با اشتراک گرفتن $L \cap B$ یک زبان منظم داریم، که اگر $L \cap B \neq \emptyset$ نشان می‌دهد که L کلمه‌ای با تعداد 0 زوج دارد. پس کافی است با ماشین تصمیم‌پذیر E_{DFA} متوجه شویم اشتراک این دو زبات تهی هست یا خیر. پس این مسئله تصمیم پذیر است.