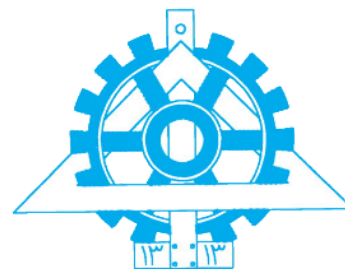




به نام خدا

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها- بهار 1403



تمرین شماره 3

دستیار آموزشی این مجموعه: علی حمزه پور

alihamzhepour2002@gmail.com

تاریخ تحویل: 21 فروردین (صفحه درس)

1. با استفاده از لم تزریق نشان دهید که زبان‌های زیر نامنظم هستند. (هر کدام 7 نمره)

a) $L = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$

b) $L = \{a^i b^j c^k \mid 2i + 3k = 7j\}$

c) $L = \{a^n b^m \mid |m - n| < 10\}$

d) $L = \{wbbv \mid w, v \in \{a, b\}^*, |w| \neq |v|\}$

2. منظم بودن یا نامنظم بودن زبان‌های زیر را مشخص و اثبات کنید. برای نامنظم بودن از لم تزریق استفاده کنید. (هر کدام 5 نمره)

a) $L = \{a^n b^m \mid n \equiv m \pmod{4}\}$

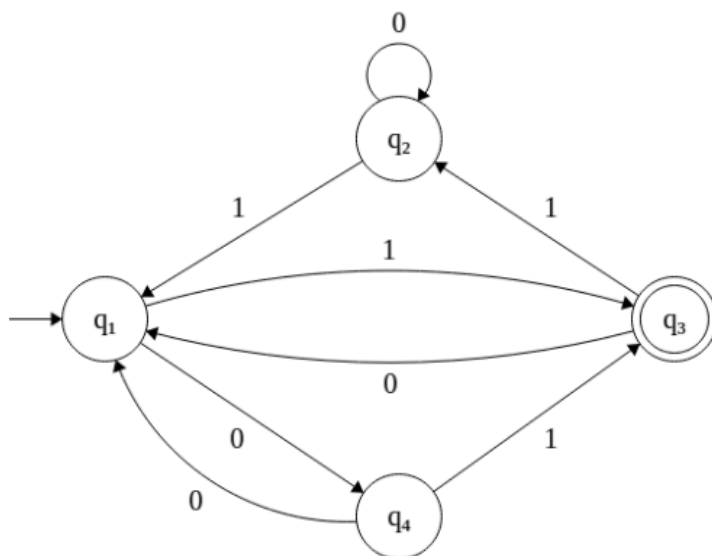
b) $L = \{a^n b^m \mid mn \geq 12\}$

c) $L = \{a^p \mid p \text{ is a prime number}\}$

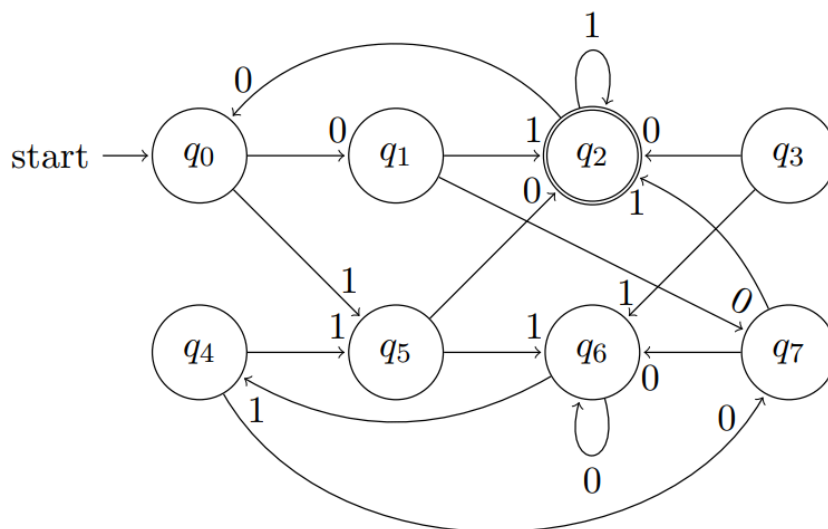
d) $L = \{a^n w a^n \mid n \geq 1, w \in \{a, b\}^*\}$

3. DFA های زیر را کمینه کنید. (هر کدام 7 نمره)

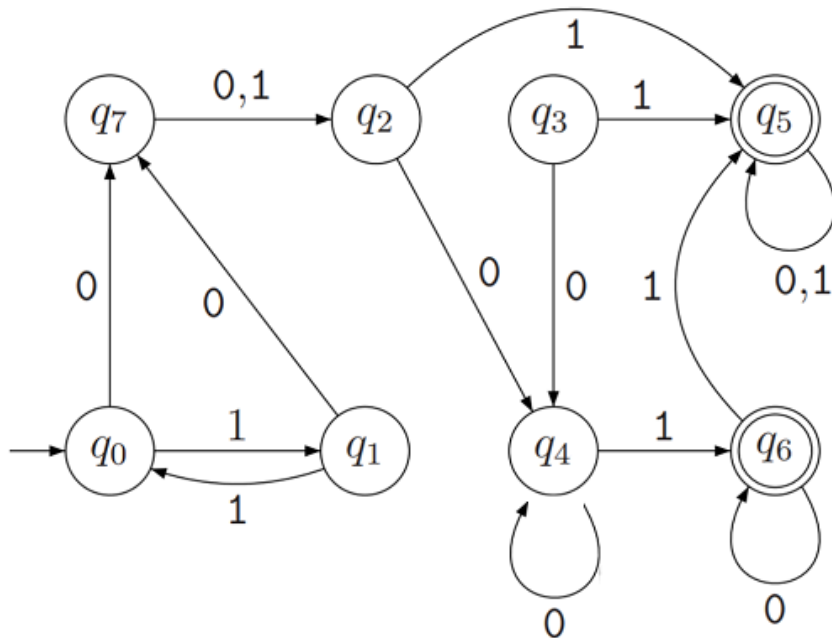
a)



b)



c)



4. مینا که به تازگی با لم تزریق آشنا شده، سعی دارد اثبات کند که زبان زیر نامنظم است:

$$L = \{a^k w \mid w \in \{a, b\}^*, |w| = k\}$$

او مراحل زیر را در اثبات طی می‌کند:

- حریف عدد صحیح $p \geq 1$ را انتخاب می‌کند.
 - من رشته $s = a^p b^p$ را انتخاب می‌کنم. ($|s| \geq p, s \in L$)
 - حریف رشته را به $s = xyz$ می‌شکند که در آن $|xy| \leq p, y \neq \varepsilon$
 - چون $|xy| \leq p$ حتماً y در a های رشته قرار می‌گیرد: $y = a^l, l \neq 0$. با پمپ کردن y به مقدار $i = 2$ رشته به صورت $a^{p+l} b^p$ در می‌آید و چون تعداد a ها از طول w بیشتر است، این رشته به L تعلق ندارد.
 - پس L نامنظم است.
- نرگس، دوست مینا، حس می‌کند که اثبات او ایراد دارد اما نمی‌تواند مشکلی از آن پیدا کند. به نرگس کمک کنید و توضیح دهید چه قسمتی از اثبات دچار مشکل است. سپس اثبات را اصلاح کنید تا به درستی نامنظم بودن این زبان معلوم شود. (10 نمره)

5. اگر A مجموعه‌ای شامل اعداد طبیعی باشد و k نیز عددی طبیعی بزرگتر از 1 باشد، تعریف می‌کنیم:

$$B_k(A) = \{w \mid w \text{ is representation in base } k \text{ of some number in } A\}$$

در نمایش یک عدد در مبنای k اجازه‌ی استفاده از 0 قبل از عدد نداریم. برای مثال $B_2(\{2, 3\}) = \{10, 11\}$ و $B_3(\{2, 3\}) = \{2, 10\}$. یک مجموعه A مثال بزنید که $B_2(A)$ منظم باشد اما $B_3(A)$ نامنظم باشد و آن را ثابت کنید. (14 نمره)

6.

الف) با توجه به بسته بودن زبان‌های منظم به برخی عملگرهای خاص و سپس با کمک لم تزریق، ثابت کنید که زبان زیر منظم نیست. (7 نمره)

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0, \text{ if } i = 1 \text{ then } j = k\}$$

ب) می‌توان نشان داد که فقط با استفاده از لم تزریق نامنظم بودن این زبان قابل اثبات نیست.
در مورد قضیه Myhill Nerode که ابزاری قوی‌تر برای بررسی منظم یا نامنظم بودن یک زبان است،
تحقیق کنید و با استفاده از این قضیه نشان دهید که زبان مطرح شده نامنظم است. (10 نمره امتیازی)