Mitschrift zum
Basiskurs Mathematik
bei Prof. Kreuzer im WS 16/17

author	Maximilian Reif `<reifmaxi@fim.uni-passau.de>`
last change	March 4, 2017, version 0.6.0
github	`https://github.com/lordreif/basiskurs-mathe`

Contents

1 Rechnen mit ganzen Zahlen

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ Menge der **natürlichen Zahlen**
$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ Menge der **ganzen Zahlen**

1.1 Satz (Zahlensysteme)

Sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$. (Die Zahl b heißt **Basis** des Zahlensystems)
Dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmte Elemente $a_0, a_1, \dots, a_k \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ sodass gilt:

$$n = a_0 + a_1 \cdot b + a_2 \cdot b^2 + \dots + a_k \cdot b^k.$$

Die Zahlen $a_0, \dots, a_k$ heißen **Ziffern** von n in der Darstellung zur Basis b.
Schreibweise: $n_{[b]} = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$ (fehlt $[b]$ so ist $[10]$ gemeint)

1.2 Beispiele

- Binärsystem, $b = 2$
  $5_{[10]} = 101_{[2]}$
  $101_{[10]} = 64_{[10]} + 32_{[10]} + 4_{[10]} + 1_{[10]} = 1100101_{[2]}$
- Hexadezimalsystem, $b = 16$
  Notation: $10_{[10]} = A_{[16]}, 11_{[10]} = B_{[16]}, \dots, 15_{[10]} = F_{[16]}$
  $101_{[10]} = 5 \cdot 16 + 5 = 55_{[16]}$
  $1B3_{[16]} = 256_{[10]} + 11_{[10]} \cdot 16_{[10]} + 3_{[10]} = 435_{[10]}$

1.3 Satz (Division mit Rest)

Sei $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}_+$.
Dann gibt es eine eindeutige Darstellung $n = q \cdot m + r$ mit $q \in \mathbb{Z}$ (genannt **Quotient**) und $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ (genannt **Rest**).

Schreibweise: $n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{"ist kongruent"}}}{\equiv} r \qquad (mod\ m)$

1.4 Beispiele

- Die Zahl $n = 87$ soll durch $m = 5$ geteilt werden:

$$n = q \cdot m + r = 17 \cdot 5 + 2$$

- Die möglichen Reste bei der Division einer Quadratzahl durch 12 sind:

$n \pmod{12}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n^2 \pmod{12}$	0	1	4	9	4	1	0	1	4	9	4	1

1.5 Definition (Vielfaches, Teiler, Primzahl)

1. Ist der Rest bei der Division von n durch m gleich Null, so heißt n ein **Vielfaches** von m und m ein **Teiler** von n.
2. Eine Zahl $n \geq 2$ heißt eine **Primzahl**, wenn sie nur zwei positive Teiler 1 und n besitzt.

1.6 Beispiele

- Die Teiler von 12 sind 1, 2, 3, 4, 6, 12.
- Die ersten Primzahlen sind 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

1.7 Satz (Fundamentalsatz der Arithmetik)

Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gibt es eine (bis auf die Reihenfolge) eindeutige Darstellung

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$$

mit paarweise verschiedenen Primzahlen $p_1, \ldots, p_k$ und $\alpha_i \in \mathbb{N}_+$.
Diese Darstellung heißt **Primfaktorzerlegung** von n.

1.8 Beispiele

- $24 = 2^3 \cdot 3$
- $111 = 3 \cdot 37$

- $1011 = 7 \cdot 11 \cdot 13$
- $1024 = 2^10$
- $729 = 3^6$
- $625 = 5^4$

1.9 Definition (ggT, kgV)

Seien $a, b \in \mathbb{N}_+$.

1. Die größte positive ganze Zahl $g \in \mathbb{N}_+$ mit $g|a$ und $g|b$ heißt der **größte gemeinsame Teiler (ggT)** von a und b.
2. Die kleinste positive ganze Zahl $k \in \mathbb{N}_+$ mit $a|k$ und $b|k$ heißt das **kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)** von a und b.

1.10 Satz (ggT/kgV durch Primfaktorenzerlegung)

Sei $a, b \in \mathbb{N}_+$ mit Primfaktorzerlegungen $a = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ und $b = p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$ mit $\alpha_i, \beta_i \geq 0$. Dann gilt:

1. $ggT(a, b) = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\gamma_k}$ mit $\gamma_i = min\{\alpha_i, \beta_i\}$
2. $kgV(a, b) = p_1^{\delta 1} \cdot p_2^{\delta 2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\delta_k}$ mit $\delta_i = max\{\alpha_i, \beta_i\}$

1.11 Beispiele

- $ggT(30, 75) = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 15$,
  denn $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ und $75 = 3 \cdot 5^2$
- $ggT(64, 81) = 1$,
  denn $64 = 2^6, 81 = 3^4$

1.12 Bemerkung (Teilbarkeitsregeln)

1. $2|n$ genau dann, wenn die Endziffer von n in $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ ist.
2. $3|n$ genau dann, wenn die Quersumme(Qs) von n durch 3 Teilbar ist.
3. $4|n$ genau dann, wenn $4|(10a_1 + a_0)$.
4. $5|n$ genau dann, wenn $a_0 \in \{0, 5\}$ gilt.
5. $6|n$ genau dann, wenn $2|n$ und $3|n$.

6. $8|n$ genau dann, wenn $8|(100a_2 + 10a_1 + a_0)$.
7. $9|n$ genau dann, wenn $9|Qs(n)$.
8. $10|n$ genau dann, wenn $a_0 = 0$ gilt.
9. $11|n$ genau dann, wenn $11|(a_0 - a_1 + a_2 - + \cdots \pm a_k)$.
10. $12|n$ genau dann, wenn $3|n$ und $4|n$.

1.13 Beispiele

- $9|123453$
- $11|1232$

1.14 Bemerkung (Geschicktes Rechnen)

1. Dritte binomische Formel: $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$ plus Quadratzahlen
   - $13 \cdot 17 = 15^2 - 2^2 = 225 - 4 = 221$
   - $23 \cdot 25 = 576 - 1 = 575$
   - $27 \cdot 33 = 900 - 9 = 891$
2. Multiplikation durch Umsortierung der Primfaktoren
   - $8 \cdot 375 = 8 \cdot 3 \cdot 125 = 10^3 \cdot 3 = 3000$
   - $40 \cdot 75 = 4 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 25 = 3000$
3. Quadrieren mittels erster binomischer Formel: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
   - $43^2 = 40^2 + 2 \cdot 3 \cdot 40 + 9 = 1600 + 240 + 9 = 1849$
   - $98^2 \cdot (100 - 2)^2 = 10000 - 400 + 4 = 9604$

1.15 Definition (Rekursive Definition von ggT und kgV)

Für $n \geq 2$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{N}_+$ gilt:

- $ggT(a_1, a_2, \ldots, a_n) = ggT(ggT(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n)$
- $kgV(a_1, a_2, \ldots, a_n) = kgV(kgV(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n)$

1.16 Satz: Es gibt unendlich viele Primzahlen

Beweis. Angenommen es gibt nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Dann betrachte die Primfaktorenzerlegung von $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$. Die Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ teilen n nicht, sondern lassen den Rest 1. Also sind $p_1, p_2, \ldots, p_k$ nicht alle Primzahlen.

blitz, qed

2 Rechnen mit Brüchen und Reellen Zahlen

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}_+\}$ Menge der **rationalen Zahlen**

2.1 Bemerkung (Rechenregeln für Brüche)

Für alle $a, c \in \mathbb{Z}$ und $b, c \in \mathbb{N}_+$ gilt:

1. (Gleichheit von Brüchen)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ genau dann wenn } ad = bc$$

   Beispiel: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

   Kürzen von Brüchen:

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_+$$

2. (Addition/Subtraktion von Brüchen)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} = \frac{a \cdot \tilde{b} + c \cdot \tilde{d}}{kgV(b, d)}$$

   mit $\tilde{b} = \frac{kgV(b,d)}{b}$ und $\tilde{d} = \frac{kgV(b,d)}{d}$.

   Beispiele: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{7}{30} + \frac{11}{45} = \frac{22}{90} + \frac{22}{90} = \frac{43}{90}$

3. (Multiplikation von Brüchen)

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

4. (Division von Brüchen/Doppelbrüche) Sei nun $c \neq 0$. Dann gilt:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

5. (Kehrwert eines Bruchs)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \text{ falls } a \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$$

2.2 Beispiele

1. Für $n \geq 1$ gilt
$$\frac{1}{m} - \frac{1}{m-1} = \frac{m+1}{m(m+1)} - \frac{m}{m(m+1)} = \frac{1}{m(m+1)},$$
also zB $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.
2.
   - $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
   - $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$
   - $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$
   - $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n-1}{2^n}$

2.3 Definition (Potenzen)

1. Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann definiere $a^0 = 1, a^1 = a, a^2 = a^1 \cdot a = a \cdot a$ etc.
Für $n \geq 1$ sei also $a^n = a^{n-1} \cdot a = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-mal}$.
Die Zahl a^n heißt die n-te Potenz von a.
2. Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Für $n = -k$ mit $k \geq 1$ setze $a^n = a^{-k} = \frac{1}{a^k}$.

2.4 Beispiele

- $343 = 7^3 x$
- $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$
- $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$
- $3^6 = 9^3 = 729$

2.5 Bemerkung (Rechenregeln für Potenzen)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $k, l \in \mathbb{Z}$ gilt:

1. $a^k \cdot b^k = (ab)^k$
2. $a^k \cdot a^l = a^{k+l}$
3. $\left(a^k\right)^l = a^{kl}$
4. $\frac{a^k}{a^l} = a^{k-l}$ falls $a \neq 0$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}$ falls $b \neq 0$

2.6 Definition (Wurzeln)

1. Sei $a \in \mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} | a > 0\}$ und $k \in \mathbb{N}_+$.
   Dann gibt es genau ein $b \in \mathbb{R}_+$ mit $b^k = a$. Diese Zahl b heißt die k-te Wurzel von a und wird mit $b = \sqrt[k]{a}$ bezeichnet.
   Im Fall $k = 2$ schreiben wir auch einfach $b = \sqrt{a}$. ("Quadratwurzel") Gänsefüßchen
2. Für $a \in \mathbb{R}_+$ und $m, n \in \mathbb{N}_+$ setzen wir $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Insbesondere sei also $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$.
   Mit dieser Definition gelten die Rechenregeln für Potenzen auch für rationale Exponenten. Insbesondere sei $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$.

2.7 Beispiele

- $\sqrt[3]{24} = \sqrt{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 2 \cdot \sqrt[3]{3}$
- $\sqrt[3]{216} = 6$
- $\sqrt{484} = 22$
- $\sqrt{\frac{36}{121}} = \frac{6}{11}$
- $\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{2}$

2.8 Satz (Euklid)

BEHAUPTUNG. $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

BEWEIS. Angenommen $\sqrt{2}$ wäre rational.
Dann gäbe es $a, b \in \mathbb{N}_+$ mit $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.
Durch Kürzen können wir annehmen, dass $ggT(a, b) = 1$ g Blitz, qed
Durch Quadrieren folgt $2 = \frac{a^2}{b^2}$, also $2b^2 = a^2$.
Da a^2 gerade ist, muss auch a gerade sein, das heißt $\exists c \in \mathbb{N}_+$ mit $a = 2c$.
Einsetzen liefert $2b^2 = (2c)^2 \Leftrightarrow b^2 = 2c^2$.
Somit muss auch b gerade sein. BLITZ zu $ggT(a, b) = 1$.

3 Rechnen mit Buchstaben

Seien $a, b, c, \ldots$ Buchstabensymbole.

FRAGE. Was ist $(x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c)\cdot\cdots\cdot(x-z)$?
HINWEIS. Betrachte den 24. Faktor!

3.1 Definition

1. Ein Produkt der Form $(a^{n_a} \cdot b^{n_b} \cdot c^{n_c} \ldots)$ mit $n_a, n_b, n_c, \ldots \in \mathbb{N}$ heißt **Term**.
   Beachte: $a^2bc = caba = acab$ etc. (Kommutativgesetz)
2. Ein Ausdruck der Form $c \cdot t$ mit einem **Koeffizienten** $c \in \mathbb{R}$ und einem Term t heißt **Monom**.
3. Eine entliche Summe von Monomen heißt **Polynom**.

3.2 Bemerkung (Rechenregeln für Polynome)

Seien $f, g, h, \ldots$ Polynome.

1. Distributivgesetze:

   $f \cdot (g+h) = f \cdot g + f \cdot h$ (bedeutet $(f \cdot g) + (f \cdot h)$ "Punkt vor Strich")
   $(f+g) \cdot h = f \cdot h + g \cdot h$

2. Kommutativgesetz:

$$f \cdot g = g \cdot f, \quad f + g = g + f$$

3. Assoziativgesetz:

$$(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h), \quad (f+g)+h = f+(g+h)$$

   Die Klammern können auch ganz weggelassen werden.

4. Prioritätsregel: Exponent vor Punkt vor Strich!

$$f^2g + h = ((f \cdot f) \cdot g) + h$$

Gänsefüßchen

3.3 Beispiele

1. (Erste binomische Formel)

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. (Zweite binomische Formel)

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3. (Dritte binomische Formel)

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

4. (Teleskopsumme)

$$1 - a^{n+1} = (1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n)\cdot(1-a)$$

5. $1+a^n = (1-a+a^2-a^3+\cdots+a^{n-3}-a^{n-2}+a^{n-1})\cdot(1+a)$ falls n ungerade
6. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
7. $a^n + b^n = (a+b)\cdot(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - + \cdots b^{n-1})$ falls n ungerade
8. $a^3 + b^3 = (a+b)\cdot(a^2 - ab + b^2)$

3.4 Bemerkung (Rechenregeln für symbolische Berechnungen)

1.

$$\begin{aligned} (-1)(-1) &= 1 \\ (-1)(+1) &= -1 \\ (-x)(-y) &= xy \end{aligned}$$

2. (Ausklammern)
Man kann die Distributivgesetze oft "andersherum" anwenden:

$$\begin{aligned} ab + a + b + 1 &= a\cdot(b+1) + (b+1) = (a+1)(b+1) \\ x^2 + 3x + 2 &= (x+1)(x+2) \quad \text{(Vieta)} \end{aligned}$$

Gänsefüschen, Link to Vieta

3.5 Definition

1. Ist $t = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ ein Term, so heißt $deg(t) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ der **Grad** von t.
2. Ist $f = c_1t_1 + \ldots + c_st_s$ ein Polynom mit $c_1 \neq 0, \ldots, c_s \neq 0$ so heißt $deg(f) = max\{deg(t_1), \ldots, deg(t_s)\}$ der **Grad** von f.
3. Ist $f = c_1t_1 + \ldots + c_st_s$ ein Polynom mit $c_1 \neq 0, \ldots, c_s \neq 0$ und gilt $deg(t_1) = \ldots = deg(t_s)$, so heißt f ein **homogenes Polynom**.

3.6 Beispiele

- Das Polynom $f = x^3 + y^3$ ist homogen vom Grad 3.
- Das Polynom $p = x^4 + 4y^4$ ist homogen vom Grad 4.

3.7 Definition

Seien f, g Polynome mit $g \neq 0$. Dann heißt $\frac{f}{g}$ eine **rationale Funktion**.

3.8 Bemerkung

Man kann mit rationalen Funktionen entsprechend der Bruchregeln rechnen.

3.9 Beispiele

- $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)-(x-1)}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-1}$
- $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{x^2-y^2}{xy}$
- $\frac{x^2-y^2}{x+y} = \frac{(x-y)(x+y)}{x+y} = x - y$

4 Lineare und Quadratische Gleichungen

4.1 Definition

Eine Gleichung der Form $ax + b = 0$ mit Zahlen a, b und $a \neq 0$ heißt eine **lineare Gleichung** mit einer Unbestimmten.

4.2 Bemerkung

Die Lösung einer Gleichung $ax + b = 0$ ist $x_1 = -\frac{b}{a}$ (falls $a \neq 0$).
Die Menge $L = \{-\frac{b}{a}\}$ heißt die **Lösungsmenge** der Gleichung.
(Wenn $\frac{1}{a}$ nicht definiert ist, so gilt $L = \emptyset$.)

4.3 Definition

Seien a, b, c Zahlen mit $a \neq 0$. Dann heißt $ax^2+bx+c = 0$ eine **quadratische Gleichung** mit einer Unbestimmten.

4.4 Bemerkung (Lösen einer quadratischen Gleichung über $\mathbb{R}/\mathbb{C}$)

R/Q fett

1. Schritt: Wegen $a \neq 0$ kann man durch a teilen und erhält:
$x^2 + px + q = 0$ mit $p = \frac{b}{a}, q = \frac{c}{a}$

2. Schritt: (quadratische Ergänzung)
$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0$

3. Schritt: (Wurzel ziehen)
$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q = \frac{p^2-4q}{4}$
Ist $p^2 - 4q < 0$, so gibt es in $\mathbb{R}$ keine Lösung.
Ansonsten: $x + \frac{p}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}$

Die Lösungen sind also
$x_1 = -\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}$ und $x_1 = -\frac{p}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}$

Die Zahl $\Delta = p^2 - 4q$ heißt die **Diskriminante** der Gleichung.

4.5 Satz (Vieta)

Seien $x_1.x_2$ die Lösungen einer quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$.
Dann gilt: $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.

Beweis. Sind x_1, x_2 die Lösungen, so gilt:

$$(x - x_1)(x - x_1) = 0 \text{ und somit } x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = 0,$$
$$\text{also } x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1x_2) = 0.$$

centering, qed

Anwendung: Um $x^2 + px + q = 0$ zu lösen, finde zwei Zahlen mit Summe $-p$ und Produkt q.

4.6 Beispiele

- $x^2 - 3x + 2 = 0$ hat die Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.
- $x^2 - 4x + 3, L = \{1, 3\}$
- $x^2 + 3x + 2, L = \{-1, -2\}$
- $x^2 + x - 2, L = \{1, -2\}$

4.7 Bemerkung (Substitution)

Manchmal kann man eine Gleichung durch eine geschickte **Substitution** lösen.

- Löse $x^4 - 7x^2 + 10$ in $\mathbb{R}$. Setze $y = x^2$.
  Erhalte $y^2 - 7y + 12 = 0$ mit $L = \{3, 4\}$ und somit $x_{1/2} = \pm\sqrt{3}, x_{3/4} = \pm 2$.
- Löse $x - 18\sqrt{x} + 17 = 0$ in $\mathbb{R}$. Setze $y = \sqrt{x}$.
  Erhalte $y^2 - 18y + 17 = 0$ mit $L = \{1, 17\}$, also $\sqrt{x} = 1$ und $\sqrt{x} = 17$.
  Somit sind $x_1 = 1$ und $x_2 = 289$.

4.8 Bemerkung (Lineares Gleichungssystem)

Gegeben seien Zahlen $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ mit $a_1b_1 - a_2b_2 \neq 0$.
Dann heißt $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ ein **lineares Gleichungssystem** mit zwei Unbestimmten x, y.

1. Lösungsmethode "Einsetzen"
   Ist $a_1 \neq 0$, so wird $x = -\frac{b_1}{a_1}y - \frac{c_1}{a_1}$. Setze dies in die zweite Gleichung ein und erhalte $a_2\left(-\frac{b_1}{a_1}y - \frac{c_1}{a_1}\right) + b_2 y + c = 0$. Löse diese lineare Gleichung und erhalte y_1. Dann gilt $x_1 = -\frac{b_1}{a_2}y_1 - \frac{c_1}{a_1}$. $L = \{(x_1, y_1)\}$.

   Sonderfall: y hebt sich in der ersetzten Gleichung auf:
   $a_2 \cdot \left(-\frac{b_1}{a_1}\right) + b_2 = 0$, also $\frac{-a_2b_1+a_1b_2}{a_1} = 0$ und somit $a_1b_2 - a_2c_1 = 0$.

   In diesem Fall lautet die ersetzte Gleichung:
   $a_2\left(-\frac{c_1}{a_1}\right) + c_2 = 0$, also $\frac{-a_2c_1+a_1c_1}{a_1} = 0$ und somit $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$

   Es gibt zwei Möglichkeiten:

   (a) $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0 \Rightarrow L = \emptyset$

   (b) $a_1c_2 - a_2c_1 = 0 \Rightarrow y$ beliebig, $x = -\frac{b_1}{a_1}y - \frac{c_1}{a_1}$
   Somit gilt: $L = \left\{\left(-\frac{b_1}{a_1} \cdot \lambda - \frac{c_1}{a_1}, \lambda\right) \middle| \lambda \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$

2. Lösungsmethode "Inderreduzieren", "Gauß-Verfahren"
   Ziel: Bilde Linearkombinationen der beiden Gleichungen, in denen nur eine der beiden Unbestimmten vorkommt.

Gänsefüßchen

4.9 Beispiel

Löse $\begin{cases} 2x + 5y = 9 & \text{(I)} \\ 3x - 4y = 2 & \text{(II)} \end{cases}$

$3\cdot$(I)$-2\cdot$(II): $15y + 8y = 27 - 4$ liefert $y = 1$.
Einsetzen von $y = 1$ in (II) ergibt $3x = 6 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow L = \{(2, 1)\}$.

4.10 Beispiel (Schnittpunkt von zwei Kreisen)

Zwei Kreise seien gegeben durch: $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0 \\ (x+1)^2 + (y-3)^2 = 9 \end{array}\right\} \quad K_1$

.

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0 \qquad K_2$$

Gleichung $K_1 - K_2$: $6x - 2y + 6 = 0$, also $y = 3x + 3$.
Setze dies in K_1 (oder K_2) ein: $x^2 + (3x+3)^2 + 2x - 6 \cdot (3x + 1) + 1 = 0$.

Liefert: $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{4}{5}$, also $y_1 = 0,\ y_2 = \frac{27}{5} \Rightarrow L = \left\{(-1,0), \left(\frac{4}{5}, \frac{27}{5}\right)\right\}$

4.11 Aufgabe (Aus einem alten chinesischem Rechenbuch)

In einem Stall sind Hühner und Schweine.
Es sind 40 Tiere. Zusammen haben sie 70 Füße.

Wie viele Tiere von jeder Sorte sind es?

5 Ungleichungen

Seien f, g Polynome in Unbestimmten $x_1, x_2, \dots, x_n$ (oder x, y, z) mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$.

5.1 Definition

Es gibt 5 Typen von Ungleichungen:

1. $f \leq g$
2. $f \geq g$
3. $f < g$
4. $f > g$
5. $f \neq g$

Interpretation: $f \leq g$ bedeutet, dass die Ungleichung gelten soll, wenn man für $x_1, \dots, x_n$ Zahlen (aus einem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^n$) einsetzt.

5.2 Beispiele

- Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x^2 \geq 0$.
- Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x^2 + y^2 \geq 2xy$

  Beweis.

$$
\begin{aligned}
(x-y)^2 &\geq 0 \\
\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 &\geq 0 \\
\Leftrightarrow x^2 + y^2 &\geq 2xy
\end{aligned}
$$

  Folgerung: Für $x, y \geq 0$ gilt: $\underbrace{\sqrt{xy}}_{\text{geometrisches Mittel}} \leq \underbrace{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}}_{\text{quadratisches Mittel}}$

- Arithmetisches Mittel: $\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{xy}$

Größenverhätnisse

5.3 Bemerkung (Rechenregeln für Ungleichungen)

1. - $f \leq g$ ist äquivalent mit $g \geq f$
   - $f < g$ ist äquivalent mit $g > f$
   - $f \leq g$ ist äquivalent mit $[f < g$ oder $f = g]$
   - $f \neq g$ ist äquivalent mit $[f < g$ oder $f > g]$
2. Sei h ein weiteres Polynom.
   Dann ist $f \leq g$ äquivalent mit $f + h \leq g + h$.
3. $f \leq g$ ist äquivalent mit $-f \geq -g$
4. Gilt $f \leq g$ und $h \geq 0$ so folgt $f \cdot h \leq g \cdot h$
   Gilt $f \leq g$ und $h \leq 0$ so folgt $f \cdot h \geq g \cdot h$
5. Für $0 < f \leq g$ gilt $0 < \frac{1}{g} \leq \frac{1}{f}$

Eine Ungleichung zu lösen bedeutet, alle $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ zu finden, für die die Ungleichung gilt.

5.4 Beispiel

Löse $\left\{ \begin{array}{ll} 3x - 4y \leq 1 & \text{(I)} \\ x + y \geq 2 & \text{(II)} \end{array} \right.$.

Skizze:

Skizze

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(II)':} & -x - y \geq -2 \\ \text{(I)+3(II)':} & -7y \leq 5 \Rightarrow y \geq \frac{5}{7} \\ \hline \text{aus (II):} & x \geq 2 - y \\ \hline \text{aus (I):} & y \leq \frac{1}{3} + \frac{4}{3}y \end{array}\right\} \text{Es folgt: } L = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq \tfrac{5}{7} \wedge 2 - y \leq x \leq \tfrac{1}{3} + \tfrac{4}{3}y\right\}$$

5.5 Bemerkung

Ist $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton steigend, (das heißt aus $x \leq y$ folgt $h(x) \leq h(y)$,) so gilt:

$$\text{Aus } f \leq g \text{ folgt } h \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Komposition}}}{\circ} f \leq h \circ g.$$

5.6 Beispiele

- Die Funktion $h : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto \sqrt{x}$ ist monoton steigend.
  Somit folgt aus $0 \leq f \leq g$ die Ungleichung $0 \leq \sqrt{f} \leq \sqrt{g}$.
- Die Abbildung $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)$ ist monoton steigend.
  Aus $0 \leq f \leq g$ die Ungleichung $0 \leq \ln(f) \leq \ln(g)$.

5.7 Beispiel

Löse die Ungleichung $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \geq 0$ in $\mathbb{R}$.

Quadratische Ergänzung:

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$$

<u>Fallunterscheidung!</u>

1. Fall: $x - \frac{1}{4} \geq 0$: Wurzelziehen ist erlaubt.
   ...und liefert: $x - \frac{1}{4}$, also $x \geq 1$.

   Die Lösungsmenge im 1. Fall ist also:
   $L_1 = \left\{x \in \mathbb{R} | x \geq \frac{1}{4} \wedge x \geq 1\right\} = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$
2. Fall: $x - \frac{1}{4} < 0$, also $\frac{1}{4} - x > 0$
   Die Ungleichung $(\frac{1}{4} - x)^2 \geq \frac{9}{16}$ liefert $\frac{1}{4} - x \geq \frac{3}{4}$, also $x \leq -\frac{1}{2}$

   Anmerkung des Autors: in der Klammer wurde -1 ausgeklammert, da diese beim Quadrieren belanglos ist. Eine (einfachere) Alternative ist 5.9.

   Dies zeigt $L_2 = \left\{x \in \mathbb{R} | x < \frac{1}{4} \wedge x \leq -\frac{1}{2}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} | x \leq -\frac{1}{2}\right\}$

Insgesamt ergibt sich die Lösungsmenge $L = L_1 \cup L_2 = \left\{x \in \mathbb{R} | x \geq 1 \vee x \leq -\frac{1}{2}\right\}$.

5.8 Definition

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ heißt

$|x| \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$ der **(Absolut-)Betrag** von x.

5.9 Beispiel

Im letzten Beispiel folgt aus $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2$ die Ungleichung $|x - \frac{1}{4}| \geq \frac{3}{4}$

5.10 Beispiel

Löse die Ungleichung $|x + 1| + |x - 1| \leq 2$.

Fallunterscheidung!

1. Fall: $x < -1$
   Die Ungleichung lautet $-(x + 1) - (x - 1) \leq 2$ und somit $x \geq -1$.
   Dies liefert $L_1 = \emptyset$
2. Fall: $-1 \leq x < 1$
   Die Ungleichung lautet $(x + 1) - (x - 1) \leq 2$ und somit $2 \leq 2$.
   Somit folgt $L_2 = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 1\}$
3. Fall: $x \geq 1$
   Die Ungleichung lautet $(x + 1) + (x - 1) \leq 2$ und somit $x \leq 1$.
   Dies zeigt $L_3 = \{1\}$.

Insgesamt erhalten wir $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 1\}$.

5.11 Dreiecksungleichung

1. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $|x + y| \leq |x| + |y|$ (**Dreiecksungleichung**)
2. Es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die **umgekehrte Dreiecksungleichung**: $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|$

Beweis.

1. Aus $xy \leq |x| \cdot |y| = |xy|$ folgt $x^2 + 2xy + y^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$, also $(x + y)^2 \leq (|x| + |y|)^2$.
   Da $|x + y|, |x|$ und $|y|$ nicht negativ sind, ist Wurzelziehen erlaubt.
2. Nach 1. gilt $|x| \leq |x + y| + |-y| = |(x + y) - y|$
   und somit $|x + y| \geq |x| - |y|$.
   Andererseits gilt, ebenfalls nach 1., die Ungleichung
   $|x + y - x| = |y| \leq |x + y| + |-x| = |x + y| + |x|$
   und somit $|x + y| \geq |y| - |x|$.

   Kombiniert man beide Erkenntnisse, so folgt $|x + y| \geq \big||x| - |y|\big|$.

qed

5.12 Beispiel

Löse $\sqrt{2x-1} < x+1$ für $x \in \mathbb{R}$.

Damit die Wurzel definiert ist, muss gelten $2x - 1 \geq 0$, also $x \geq \frac{1}{2}$.
Dann ist die rechte Seite positiv und Quadrieren erlaubt.

Es folgt: $2x - 1 < x^2 + 2x + 1$, also $x^2 > -2$.

Insgesamt erhalten wir: $L = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0,5\}$.

5.13 Beispiel

Löse $\sqrt{x^2+1} > x+1$ in $\mathbb{R}$.

1. Fall: $x + 1 < 0$.
   In diesem Fall gilt $\sqrt{x^2+1} > 0 > x+1$,
   also $L_1 = \{x \in \mathbb{R} | x < -1\}$.
2. Fall: $x + 1 \geq 0$.
   Jetzt ist Quadrieren eine Äquivalenzumformung und es folgt $x^2 + 1 > x^2 + 2x + 1$, also $x < 0$.
   Dies liefert $L_2 = \{x \in \mathbb{R} | -1 \geq x < 0\}$.

Insegeamt folgt: $L = L_1 \cup L_2 = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$.

6 Ebene Geometrie

12 Kombinatorik

Kombinatorik ist die Kunst des Zählens.

12.1 Definition

Seien $a_1, \dots, a_n$ paarweise verschiedene Objekte ($n \geq 1$).

1. Eine Anordnung $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$ mit $\{i_i, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}$ heißt auch **Permutation** von $a_1, \dots, a_n$.

   Schreibweisen:

   $$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_n} \end{pmatrix} \text{ oder einfach } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

   Ohne Einschränkung betrachten wir also meißt die Permutationen der Menge $\{1, \dots, n\}$.

2. Die Menge aller Permutationen von n Objekten heißt die **symmetrische Gruppe $\mathbf{S_n}$**.

12.2 Satz: Die Gruppe S_n hat $n!$ Elemente.

Beweis. Halte ein Element, zB a_n fest. Für die Bilder $\sigma(a_1)$ unter $\sigma \in S_n$ gibt es n Möglichkeiten, für $\sigma(a_2)$ gibt es dann noch $n-1$ Möglichkeiten usw.
Am Ende gibt es für $\sigma(a_n)$ nur noch 1 Auswahl. Insgesamt gibt es $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ Permutationen.

qed

12.3 Beispiel: Wir ordnen Permutationen

Dieser Punkt wurde während der Ausführung gestrichen, da der Kentnissstand der Studierenden in Lineare Algebra nicht ausreichend war.

12.4 Definition

Gegeben seien n paarweise verschiedene Objekte $a_1, \dots, a_n$.

1. Sei $0 \leq m \leq n$. Eine Teilmenge von $\{a_1, \dots, a_n\}$ bestehend aus m Elementen heißt auch **Auswahl** von m Elementen.

2. Die Anzahl der Auswahlen von m Elementen aus $\{a_1, \ldots, a_n\}$ heißt der **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{m}$.

12.5 Satz (Formel für die Binomialkoeffizienten)

Für $n \geq 1$ und $0 \leq m \leq n$ gilt: $\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m+n))}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ (mit $0! = 1$).

12.6 Bemerkung (Das Pascalsche Dreieck)

1. Die Binomialkoeffizienten erfüllen die Formel

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} \text{ für } m \geq 1, n \geq 2.$$

2. Die Biomialkoeffizienten sind gegeben durch das **Pascalsche Dreieck**:

n=1					1		1					(m=0,1)
n=2				1		2		1				(m=0,1,2)
n=3			1		3		3		1			(m=0,...,3)
n=4		1		4		6		4		1		(m=0,...,4)
n=5	1		5		10		10		5		1	(m=0,...,5)

etc.