

Mitschrift zum

Basiskurs Mathematik

bei Prof. Kreuzer im WS 16/17

author	Maximilian Reif <reifmaxi@fim.uni-passau.de>
last change	March 4, 2017, version 0.6.0
github	https://github.com/lordreif/basiskurs-mathe

Contents

1	Rechnen mit ganzen Zahlen	5
1.1	Zahlensysteme	5
1.2	Beispiele	5
1.3	Division mit Rest	5
1.4	Beispiele	6
1.5	Vielfaches, Teiler, Primzahl	6
1.6	Beispiele	6
1.7	Fundamentalsatz der Arithmetik	6
1.8	Beispiele	6
1.9	ggT, kgV	7
1.10	ggT/kgV durch Primfaktorenzerlegung	7
1.11	Beispiele	7
1.12	Teilbarkeitsregeln	7
1.13	Beispiele	8
1.14	Geschicktes Rechnen	8
1.15	Rekursive Definition von ggT und kgV	8
1.16	Unendlichkeitssatz der Primzahlen	9
2	Rechnen mit Brüchen und Reellen Zahlen	10
2.1	Rechenregeln für Brüche	10
2.2	Beispiele	11
2.3	Potenzen	11
2.4	Beispiele	11
2.5	Rechenregeln für Potenzen	11
2.6	Wurzeln	12
2.7	Beispiele	12
2.8	Irrationalitätsbeweis von $\sqrt{2}$ nach Euklid	12
3	Rechnen mit Buchstaben	13
3.1	Definition Term/Koeffizient/Monom/Polynom	13
3.2	Rechenregeln für Polynome	13
3.3	Beispiele und Formeln	14
3.4	Rechenregeln für symbolische Berechnungen	14
3.5	Der Grad	15
3.6	Beispiele	15
3.7	Rationale Funktion	15
3.8	Bemerkung	15
3.9	Beispiele	15
4	Lineare und Quadratische Gleichungen	16
4.1	Lineare Gleichungen	16
4.2	Bemerkung	16

4.3	Quadratische Gleichungen	16
4.4	Lösen einer quadratischen Gleichung über \mathbb{R}/\mathbb{C}	16
4.5	Satz von Vieta	17
4.6	Beispiele	17
4.7	Substitution	17
4.8	Lineare Gleichungssysteme	17
4.9	Beispiel	18
4.10	Schnittpunkt von zwei Kreisen	18
4.11	Aufgabe	19
5	Ungleichungen	20
5.1	Definition	20
5.2	Beispiele	20
5.3	Rechenregeln für Ungleichungen	21
5.4	Beispiel	21
5.5	Bemerkung	21
5.6	Beispiele	22
5.7	Beispiel	22
5.8	Betrag	22
5.9	Beispiel	23
5.10	Betragsungleichungen	23
5.11	Dreiecksungleichung	23
5.12	Beispiel	24
5.13	Beispiel	24
6	Ebene Geometrie	25
11	Die komplexen Zahlen	26
11.1	Definition	26
11.2	Bemerkung	26
11.3	Beispiele	26
11.4	Komplexe Konjugation	27
11.5	Rechenregeln für komplexe Konjugation	27
11.6	Die komplexe Zahlenebene	27
11.7	Algebraische Beschreibung geometrischer Mengen	28
11.8	Algebraische Interpretation von Abbildungen der Zeichenebene	29
11.9	Geometrische Interpretation von $z \mapsto \bar{z}$	30
11.10	Inversion am Kreis	30
11.11	Eigenschaften der Inversion am Kreis	31
11.12	Die komplexe e -Funktion	31
11.13	Die Eulersche Formel	32
11.14	Korollar	32
11.15	Beispiel	32

12 Kombinatorik	33
12.1 Definition	33
12.2 Satz: Die Gruppe S_n hat $n!$ Elemente.	33
12.3 Beispiel	33
12.4 Definition	33
12.5 Formel für die Binomialkoeffizienten	34
12.6 Das Pascalsche Dreieck	34

1 Rechnen mit ganzen Zahlen

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ Menge der **natürlichen Zahlen**

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ Menge der **ganzen Zahlen**

1.1 Satz (Zahlensysteme)

Sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$. (Die Zahl b heißt **Basis** des Zahlensystems)

Dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmte Elemente $a_0, a_1, \dots, a_k \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ sodass gilt:

$$n = a_0 + a_1 \cdot b + a_2 \cdot b^2 + \dots + a_k \cdot b^k.$$

Die Zahlen a_0, \dots, a_k heißen **Ziffern** von n in der Darstellung zur Basis b .

Schreibweise: $n_{[b]} = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$ (fehlt $[b]$ so ist $[10]$ gemeint)

1.2 Beispiele

- Binärsystem, $b = 2$

$$5_{[10]} = 101_{[2]}$$

$$101_{[10]} = 64_{[10]} + 32_{[10]} + 4_{[10]} + 1_{[10]} = 1100101_{[2]}$$

- Hexadezimalsystem, $b = 16$

$$\text{Notation: } 10_{[10]} = A_{[16]}, 11_{[10]} = B_{[16]}, \dots, 15_{[10]} = F_{[16]}$$

$$101_{[10]} = 5 \cdot 16 + 5 = 55_{[16]}$$

$$1B3_{[16]} = 256_{[10]} + 11_{[10]} \cdot 16_{[10]} + 3_{[10]} = 435_{[10]}$$

1.3 Satz (Division mit Rest)

Sei $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}_+$.

Dann gibt es eine eindeutige Darstellung $n = q \cdot m + r$ mit $q \in \mathbb{Z}$ (genannt **Quotient**) und $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ (genannt **Rest**).

$$\text{Schreibweise: } n \equiv r \pmod{m}$$

\uparrow
"ist kongruent"

1.4 Beispiele

- Die Zahl $n = 87$ soll durch $m = 5$ geteilt werden:

$$n = q \cdot m + r = 17 \cdot 5 + 2$$

- Die möglichen Reste bei der Division einer Quadratzahl durch 12 sind:

$n \pmod{12}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n^2 \pmod{12}$	0	1	4	9	4	1	0	1	4	9	4	1

1.5 Definition (Vielfaches, Teiler, Primzahl)

1. Ist der Rest bei der Division von n durch m gleich Null, so heißt n ein **Vielfaches** von m und m ein **Teiler** von n .
2. Eine Zahl $n \geq 2$ heißt eine **Primzahl**, wenn sie nur zwei positive Teiler 1 und n besitzt.

1.6 Beispiele

- Die Teiler von 12 sind 1, 2, 3, 4, 6, 12.
- Die ersten Primzahlen sind 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

1.7 Satz (Fundamentalsatz der Arithmetik)

Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gibt es eine (bis auf die Reihenfolge) eindeutige Darstellung

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$$

mit paarweise verschiedenen Primzahlen p_1, \dots, p_k und $\alpha_i \in \mathbb{N}_+$. Diese Darstellung heißt **Primfaktorzerlegung** von n .

1.8 Beispiele

- $24 = 2^3 \cdot 3$
- $111 = 3 \cdot 37$

- $1011 = 7 \cdot 11 \cdot 13$
- $1024 = 2^{10}$
- $729 = 3^6$
- $625 = 5^4$

1.9 Definition (ggT, kgV)

Seien $a, b \in \mathbb{N}_+$.

1. Die größte positive ganze Zahl $g \in \mathbb{N}_+$ mit $g|a$ und $g|b$ heißt der **größte gemeinsame Teiler (ggT)** von a und b .
2. Die kleinste positive ganze Zahl $k \in \mathbb{N}_+$ mit $a|k$ und $b|k$ heißt das **kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)** von a und b .

1.10 Satz (ggT/kgV durch Primfaktorenzerlegung)

Sei $a, b \in \mathbb{N}_+$ mit Primfaktorzerlegungen $a = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ und $b = p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}$ mit $\alpha_i, \beta_i \geq 0$. Dann gilt:

1. $ggT(a, b) = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\gamma_k}$ mit $\gamma_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$
2. $kgV(a, b) = p_1^{\delta_1} \cdot p_2^{\delta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\delta_k}$ mit $\delta_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$

1.11 Beispiele

- $ggT(30, 75) = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 15$,
denn $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ und $75 = 3 \cdot 5^2$
- $ggT(64, 81) = 1$,
denn $64 = 2^6$, $81 = 3^4$

1.12 Bemerkung (Teilbarkeitsregeln)

1. $2|n$ genau dann, wenn die Endziffer von n in $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ ist.
2. $3|n$ genau dann, wenn die Quersumme(Qs) von n durch 3 teilbar ist.
3. $4|n$ genau dann, wenn $4|(10a_1 + a_0)$.
4. $5|n$ genau dann, wenn $a_0 \in \{0, 5\}$ gilt.
5. $6|n$ genau dann, wenn $2|n$ und $3|n$.

6. $8|n$ genau dann, wenn $8|(100a_2 + 10a_1 + a_0)$.
7. $9|n$ genau dann, wenn $9|Qs(n)$.
8. $10|n$ genau dann, wenn $a_0 = 0$ gilt.
9. $11|n$ genau dann, wenn $11|(a_0 - a_1 + a_2 - + \cdots \pm a_k)$.
10. $12|n$ genau dann, wenn $3|n$ und $4|n$.

1.13 Beispiele

- $9|123453$
- $11|1232$

1.14 Bemerkung (Geschicktes Rechnen)

1. Dritte binomische Formel: $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$ plus Quadratzahlen
 - $13 \cdot 17 = 15^2 - 2^2 = 225 - 4 = 221$
 - $23 \cdot 25 = 576 - 1 = 575$
 - $27 \cdot 33 = 900 - 9 = 891$
2. Multiplikation durch Umsortierung der Primfaktoren
 - $8 \cdot 375 = 8 \cdot 3 \cdot 125 = 10^3 \cdot 3 = 3000$
 - $40 \cdot 75 = 4 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 25 = 3000$
3. Quadrieren mittels erster binomischer Formel: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
 - $43^2 = 40^2 + 2 \cdot 3 \cdot 40 + 9 = 1600 + 240 + 9 = 1849$
 - $98^2 \cdot (100 - 2)^2 = 10000 - 400 + 4 = 9604$

1.15 Definition (Rekursive Definition von ggT und kgV)

Für $n \geq 2$ und $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}_+$ gilt:

- $ggT(a_1, a_2, \dots, a_n) = ggT(ggT(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n)$
- $kgV(a_1, a_2, \dots, a_n) = kgV(kgV(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n)$

1.16 Satz: Es gibt unendlich viele Primzahlen

BEWEIS. Angenommen es gibt nur endlich viele Primzahlen p_1, p_2, \dots, p_k . Dann betrachte die Primfaktorenzerlegung von $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$. Die Zahlen p_1, p_2, \dots, p_k teilen n nicht, sondern lassen den Rest 1. Also sind p_1, p_2, \dots, p_k nicht alle Primzahlen.

blitz, qed

2 Rechnen mit Brüchen und Reellen Zahlen

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}_+\}$ Menge der **rationalen Zahlen**

2.1 Bemerkung (Rechenregeln für Brüche)

Für alle $a, c \in \mathbb{Z}$ und $b, d \in \mathbb{N}_+$ gilt:

1. (Gleichheit von Brüchen)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ genau dann wenn } ad = bc$$

Beispiel: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Kürzen von Brüchen:

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_+$$

2. (Addition/Subtraktion von Brüchen)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} = \frac{a \cdot \tilde{b} + c \cdot \tilde{d}}{kgV(b, d)}$$

mit $\tilde{b} = \frac{kgV(b, d)}{b}$ und $\tilde{d} = \frac{kgV(b, d)}{d}$.

Beispiele: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{7}{30} + \frac{11}{45} = \frac{22}{90} + \frac{22}{90} = \frac{43}{90}$

3. (Multiplikation von Brüchen)

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

4. (Division von Brüchen/Doppelbrüche) Sei nun $c \neq 0$. Dann gilt:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

5. (Kehrwert eines Bruchs)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \text{ falls } a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

2.2 Beispiele

1. Für $n \geq 1$ gilt

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{m-1} = \frac{m+1}{m(m+1)} - \frac{m}{m(m+1)} = \frac{1}{m(m+1)},$$

also zB $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

2. • $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
• $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$
• $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$
• $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$

2.3 Definition (Potenzen)

1. Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann definiere $a^0 = 1, a^1 = a, a^2 = a^1 \cdot a = a \cdot a$ etc.
Für $n \geq 1$ sei also $a^n = a^{n-1} \cdot a = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}$.

Die Zahl a^n heißt die n -te Potenz von a .

2. Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Für $n = -k$ mit $k \geq 1$ setze $a^n = a^{-k} = \frac{1}{a^k}$.

2.4 Beispiele

- $343 = 7^3 x$
- $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$
- $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$
- $3^6 = 9^3 = 729$

2.5 Bemerkung (Rechenregeln für Potenzen)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $k, l \in \mathbb{Z}$ gilt:

1. $a^k \cdot b^k = (ab)^k$
2. $a^k \cdot a^l = a^{k+l}$
3. $(a^k)^l = a^{kl}$
4. $\frac{a^k}{a^l} = a^{k-l}$ falls $a \neq 0$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}$ falls $b \neq 0$

2.6 Definition (Wurzeln)

1. Sei $a \in \mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} | a > 0\}$ und $k \in \mathbb{N}_+$.

Dann gibt es genau ein $b \in \mathbb{R}_+$ mit $b^k = a$. Diese Zahl b heißt die k -te Wurzel von a und wird mit $b = \sqrt[k]{a}$ bezeichnet.

Im Fall $k = 2$ schreiben wir auch einfach $b = \sqrt{a}$. ("Quadratwurzel")

Gänsefüßchen

2. Für $a \in \mathbb{R}_+$ und $m, n \in \mathbb{N}_+$ setzen wir $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Insbesondere sei also $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$.

Mit dieser Definition gelten die Rechenregeln für Potenzen auch für rationale Exponenten. Insbesondere sei $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$.

2.7 Beispiele

- $\sqrt[3]{24} = \sqrt{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 2 \cdot \sqrt[3]{3}$
- $\sqrt[3]{216} = 6$
- $\sqrt{484} = 22$
- $\sqrt{\frac{36}{121}} = \frac{6}{11}$
- $\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{2}$

2.8 Satz (Euklid)

BEHAUPTUNG. $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

BEWEIS. Angenommen $\sqrt{2}$ wäre rational.

Dann gäbe es $a, b \in \mathbb{N}_+$ mit $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

Durch Kürzen können wir annehmen, dass $\text{ggT}(a, b) = 1$

Blitz, qed

Durch Quadrieren folgt $2 = \frac{a^2}{b^2}$, also $2b^2 = a^2$.

Da a^2 gerade ist, muss auch a gerade sein, das heißt $\exists c \in \mathbb{N}_+$ mit $a = 2c$.

Einsetzen liefert $2b^2 = (2c)^2 \Leftrightarrow b^2 = 2c^2$.

Somit muss auch b gerade sein. BLITZ zu $\text{ggT}(a, b) = 1$.

3 Rechnen mit Buchstaben

Seien a, b, c, \dots Buchstabensymbole.

FRAGE. Was ist $(x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c) \cdot \dots \cdot (x - z)$?

HINWEIS. Betrachte den 24. Faktor!

3.1 Definition

1. Ein Produkt der Form $(a^{n_a} \cdot b^{n_b} \cdot c^{n_c} \dots)$ mit $n_a, n_b, n_c, \dots \in \mathbb{N}$ heißt **Term**.
Beachte: $a^2bc = caba = acab$ etc. (Kommutativgesetz)
2. Ein Ausdruck der Form $c \cdot t$ mit einem **Koeffizienten** $c \in \mathbb{R}$ und einem Term t heißt **Monom**.
3. Eine endliche Summe von Monomen heißt **Polynom**.

3.2 Bemerkung (Rechenregeln für Polynome)

Seien f, g, h, \dots Polynome.

1. Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} f \cdot (g + h) &= f \cdot g + f \cdot h \text{ (bedeutet } (f \cdot g) + (f \cdot h) \text{ "Punkt vor Strich")} \\ (f + g) \cdot h &= f \cdot h + g \cdot h \end{aligned}$$

2. Kommutativgesetz:

$$f \cdot g = g \cdot f, \quad f + g = g + f$$

3. Assoziativgesetz:

$$(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h), \quad (f + g) + h = f + (g + h)$$

Die Klammern können auch ganz weggelassen werden.

4. Prioritätsregel: Exponent vor Punkt vor Strich!

$$f^2g + h = ((f \cdot f) \cdot g) + h$$

3.3 Beispiele

1. (Erste binomische Formel)

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. (Zweite binomische Formel)

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3. (Dritte binomische Formel)

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

4. (Teleskopsumme)

$$1 - a^{n+1} = (1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n) \cdot (1 - a)$$

5. $1 + a^n = (1 - a + a^2 - a^3 + \dots + a^{n-3} - a^{n-2} + a^{n-1}) \cdot (1 + a)$ falls n ungerade

6. $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

7. $a^n + b^n = (a + b) \cdot (a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1})$ falls n ungerade

8. $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$

3.4 Bemerkung (Rechenregeln für symbolische Berechnungen)

- 1.

$$(-1)(-1) = 1$$

$$(-1)(+1) = -1$$

$$(-x)(-y) = xy$$

2. (Ausklammern)

Man kann die Distributivgesetze oft "andersherum" anwenden:

$$ab + a + b + 1 = a \cdot (b + 1) + (b + 1) = (a + 1)(b + 1)$$

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2) \quad (\text{Vieta})$$

3.5 Definition

1. Ist $t = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$ ein Term, so heißt $\deg(t) = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ der **Grad** von t .
2. Ist $f = c_1 t_1 + \dots + c_s t_s$ ein Polynom mit $c_1 \neq 0, \dots, c_s \neq 0$ so heißt $\deg(f) = \max\{\deg(t_1), \dots, \deg(t_s)\}$ der **Grad** von f .
3. Ist $f = c_1 t_1 + \dots + c_s t_s$ ein Polynom mit $c_1 \neq 0, \dots, c_s \neq 0$ und gilt $\deg(t_1) = \dots = \deg(t_s)$, so heißt f ein **homogenes Polynom**.

3.6 Beispiele

- Das Polynom $f = x^3 + y^3$ ist homogen vom Grad 3.
- Das Polynom $p = x^4 + 4y^4$ ist homogen vom Grad 4.

3.7 Definition

Seien f, g Polynome mit $g \neq 0$. Dann heißt $\frac{f}{g}$ eine **rationale Funktion**.

3.8 Bemerkung

Man kann mit rationalen Funktionen entsprechend der Bruchregeln rechnen.

3.9 Beispiele

- $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)-(x-1)}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-1}$
- $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{x^2-y^2}{xy}$
- $\frac{x^2-y^2}{x+y} = \frac{(x-y)(x+y)}{x+y} = x - y$

4 Lineare und Quadratische Gleichungen

4.1 Definition

Eine Gleichung der Form $ax + b = 0$ mit Zahlen a, b und $a \neq 0$ heißt eine **lineare Gleichung** mit einer Unbestimmten.

4.2 Bemerkung

Die Lösung einer Gleichung $ax + b = 0$ ist $x_1 = -\frac{b}{a}$ (falls $a \neq 0$).
Die Menge $L = \{-\frac{b}{a}\}$ heißt die **Lösungsmenge** der Gleichung.
(Wenn $\frac{1}{a}$ nicht definiert ist, so gilt $L = \emptyset$.)

4.3 Definition

Seien a, b, c Zahlen mit $a \neq 0$. Dann heißt $ax^2 + bx + c = 0$ eine **quadratische Gleichung** mit einer Unbestimmten.

4.4 Bemerkung (Lösen einer quadratischen Gleichung über \mathbb{R}/\mathbb{C})

R/Q fett

1. Schritt: Wegen $a \neq 0$ kann man durch a teilen und erhält:
$$x^2 + px + q = 0 \text{ mit } p = \frac{b}{a}, q = \frac{c}{a}$$

2. Schritt: (quadratische Ergänzung)
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0$$

3. Schritt: (Wurzel ziehen)
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q = \frac{p^2 - 4q}{4}$$

Ist $p^2 - 4q < 0$, so gibt es in \mathbb{R} keine Lösung.
Ansonsten: $x + \frac{p}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q}$

Die Lösungen sind also

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q} \text{ und } x_2 = -\frac{p}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q}$$

Die Zahl $\Delta = p^2 - 4q$ heißt die **Diskriminante** der Gleichung.

4.5 Satz (Vieta)

Seien x_1, x_2 die Lösungen einer quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$.
Dann gilt: $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.

BEWEIS. Sind x_1, x_2 die Lösungen, so gilt:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \text{ und somit } x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = 0, \\ \text{also } x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1x_2) = 0.$$

ANWENDUNG: Um $x^2 + px + q = 0$ zu lösen, finde zwei Zahlen mit Summe $-p$ und Produkt q .

centering,
qed

4.6 Beispiele

- $x^2 - 3x + 2 = 0$ hat die Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.
- $x^2 - 4x + 3, L = \{1, 3\}$
- $x^2 + 3x + 2, L = \{-1, -2\}$
- $x^2 + x - 2, L = \{1, -2\}$

4.7 Bemerkung (Substitution)

Manchmal kann man eine Gleichung durch eine geschickte **Substitution** lösen.

- Löse $x^4 - 7x^2 + 10$ in \mathbb{R} . Setze $y = x^2$.
Erhalte $y^2 - 7y + 12 = 0$ mit $L = \{3, 4\}$ und somit $x_{1/2} = \pm\sqrt{3}, x_{3/4} = \pm 2$.
- Löse $x - 18\sqrt{x} + 17 = 0$ in \mathbb{R} . Setze $y = \sqrt{x}$.
Erhalte $y^2 - 18y + 17 = 0$ mit $L = \{1, 17\}$, also $\sqrt{x} = 1$ und $\sqrt{x} = 17$.
Somit sind $x_1 = 1$ und $x_2 = 289$.

4.8 Bemerkung (Lineares Gleichungssystem)

Gegeben seien Zahlen $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ mit $a_1b_1 - a_2b_2 \neq 0$.

Dann heißt $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ ein **lineares Gleichungssystem** mit zwei Unbestimmten x, y .

1. Lösungsmethode "Einsetzen"

Ist $a_1 \neq 0$, so wird $x = -\frac{b_1}{a_1}y - \frac{c_1}{a_1}$. Setze dies in die zweite Gleichung ein und erhalte $a_2 \left(-\frac{b_1}{a_1}y - \frac{c_1}{a_1}\right) + b_2y + c = 0$. Löse diese lineare Gleichung und erhalte y_1 . Dann gilt $x_1 = -\frac{b_1}{a_2}y_1 - \frac{c_1}{a_1}$. $L = \{(x_1, y_1)\}$.

Sonderfall: y hebt sich in der ersetzten Gleichung auf:

$$a_2 \cdot \left(-\frac{b_1}{a_1}\right) + b_2 = 0, \text{ also } \frac{-a_2b_1 + a_1b_2}{a_1} = 0 \text{ und somit } a_1b_2 - a_2c_1 = 0.$$

In diesem Fall lautet die ersetzte Gleichung:

$$a_2 \left(-\frac{c_1}{a_1}\right) + c_2 = 0, \text{ also } \frac{-a_2c_1 + a_1c_2}{a_1} = 0 \text{ und somit } a_1c_2 - a_2c_1 = 0$$

Es gibt zwei Möglichkeiten:

(a) $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0 \Rightarrow L = \emptyset$

(b) $a_1c_2 - a_2c_1 = 0 \Rightarrow y$ beliebig, $x = -\frac{b_1}{a_1}y - \frac{c_1}{a_1}$

$$\text{Somit gilt: } L = \left\{ \left(-\frac{b_1}{a_1} \cdot \lambda - \frac{c_1}{a_1}, \lambda \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

2. Lösungsmethode "Inderreduzieren", "Gauß-Verfahren"

Ziel: Bilde Linearkombinationen der beiden Gleichungen, in denen nur eine der beiden Unbestimmten vorkommt.

Gänsefüßchen

4.9 Beispiel

$$\text{Löse } \begin{cases} 2x + 5y = 9 & \text{(I)} \\ 3x - 4y = 2 & \text{(II)} \end{cases}$$

$$3 \cdot \text{(I)} - 2 \cdot \text{(II)}: 15y + 8y = 27 - 4 \text{ liefert } y = 1.$$

$$\text{Einsetzen von } y = 1 \text{ in (II) ergibt } 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow L = \{(2, 1)\}.$$

4.10 Beispiel (Schnittpunkt von zwei Kreisen)

$$\text{Zwei Kreise seien gegeben durch: } \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0 \\ (x+1)^2 + (y-3)^2 = 9 \end{cases} \quad K_1$$

.

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0 \quad K_2$$

$$\text{Gleichung } K_1 - K_2: 6x - 2y + 6 = 0, \text{ also } y = 3x + 3.$$

$$\text{Setze dies in } K_1 \text{ (oder } K_2 \text{) ein: } x^2 + (3x+3)^2 + 2x - 6 \cdot (3x+1) + 1 = 0.$$

Liefert: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{4}{5}$, also $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{27}{5} \Rightarrow L = \left\{(-1, 0), \left(\frac{4}{5}, \frac{27}{5}\right)\right\}$

4.11 Aufgabe (Aus einem alten chinesischem Rechenbuch)

In einem Stall sind Hühner und Schweine.

Es sind 40 Tiere. Zusammen haben sie 70 Füße.

Wie viele Tiere von jeder Sorte sind es?

5 Ungleichungen

Seien f, g Polynome in Unbestimmten x_1, x_2, \dots, x_n (oder x, y, z) mit Koeffizienten aus \mathbb{R} .

5.1 Definition

Es gibt 5 Typen von Ungleichungen:

1. $f \leq g$
2. $f \geq g$
3. $f < g$
4. $f > g$
5. $f \neq g$

Interpretation: $f \leq g$ bedeutet, dass die Ungleichung gelten soll, wenn man für x_1, \dots, x_n Zahlen (aus einem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^n$) einsetzt.

5.2 Beispiele

- Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x^2 \geq 0$.
- Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x^2 + y^2 \geq 2xy$

BEWEIS.

$$\begin{aligned}(x - y)^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 &\geq 2xy\end{aligned}$$

FOLGERUNG: Für $x, y \geq 0$ gilt:

$$\underbrace{\sqrt{xy}}_{\text{geometrisches Mittel}} \leq \underbrace{\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}}_{\text{quadratisches Mittel}}$$

- Arithmetisches Mittel: $\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{xy}$

5.3 Bemerkung (Rechenregeln für Ungleichungen)

1.
 - $f \leq g$ ist äquivalent mit $g \geq f$
 - $f < g$ ist äquivalent mit $g > f$
 - $f \leq g$ ist äquivalent mit $[f < g \text{ oder } f = g]$
 - $f \neq g$ ist äquivalent mit $[f < g \text{ oder } f > g]$
2. Sei h ein weiteres Polynom.
Dann ist $f \leq g$ äquivalent mit $f + h \leq g + h$.
3. $f \leq g$ ist äquivalent mit $-f \geq -g$
4. Gilt $f \leq g$ und $h \geq 0$ so folgt $f \cdot h \leq g \cdot h$
Gilt $f \leq g$ und $h \leq 0$ so folgt $f \cdot h \geq g \cdot h$
5. Für $0 < f \leq g$ gilt $0 < \frac{1}{g} \leq \frac{1}{f}$

Eine Ungleichung zu lösen bedeutet, alle $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ zu finden, für die die Ungleichung gilt.

5.4 Beispiel

$$\text{Löse } \begin{cases} 3x - 4y \leq 1 & \text{(I)} \\ x + y \geq 2 & \text{(II)} \end{cases}.$$

Skizze:

Skizze

$$\left. \begin{array}{l} \text{(II)'}: \quad -x - y \geq -2 \\ \text{(I)} + 3\text{(II)'}: \quad -7y \leq 5 \Rightarrow y \geq \frac{5}{7} \\ \hline \text{aus (II)'}: \quad x \geq 2 - y \\ \text{aus (I)}: \quad y \leq \frac{1}{3} + \frac{4}{3}y \end{array} \right\} \text{Es folgt: } L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq \frac{5}{7} \wedge 2 - y \leq x \leq \frac{1}{3} + \frac{4}{3}y\}$$

5.5 Bemerkung

Ist $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton steigend, (das heißt aus $x \leq y$ folgt $h(x) \leq h(y)$), so gilt:

$$\text{Aus } f \leq g \text{ folgt } h \circ f \leq h \circ g.$$

\uparrow
 Komposition

5.6 Beispiele

- Die Funktion $h : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, x \mapsto \sqrt{x}$ ist monoton steigend.
Somit folgt aus $0 \leq f \leq g$ die Ungleichung $0 \leq \sqrt{f} \leq \sqrt{g}$.
- Die Abbildung $\ln : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)$ ist monoton steigend.
Aus $0 \leq f \leq g$ die Ungleichung $0 \leq \ln(f) \leq \ln(g)$.

5.7 Beispiel

Löse die Ungleichung $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \geq 0$ in \mathbb{R} .

Quadratische Ergänzung:

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$$

Fallunterscheidung!

1. Fall: $x - \frac{1}{4} \geq 0$: Wurzelziehen ist erlaubt.
...und liefert: $x - \frac{1}{4}$, also $x \geq 1$.

Die Lösungsmenge im 1. Fall ist also:

$$L_1 = \{x \in \mathbb{R} | x \geq \frac{1}{4} \wedge x \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$$

2. Fall: $x - \frac{1}{4} < 0$, also $\frac{1}{4} - x > 0$
Die Ungleichung $(\frac{1}{4} - x)^2 \geq \frac{9}{16}$ liefert $\frac{1}{4} - x \geq \frac{3}{4}$, also $x \leq -\frac{1}{2}$

Anmerkung des Autors: in der Klammer wurde -1 ausgeklammert, da diese beim Quadrieren belanglos ist. Eine (einfachere) Alternative ist 5.9.

$$\text{Dies zeigt } L_2 = \{x \in \mathbb{R} | x < \frac{1}{4} \wedge x \leq -\frac{1}{2}\} = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -\frac{1}{2}\}$$

Insgesamt ergibt sich die Lösungsmenge $L = L_1 \cup L_2 = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1 \vee x \leq -\frac{1}{2}\}$.

5.8 Definition

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ heißt

$$|x| \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases} \text{ der \textbf{(Absolut-)Betrag} von } x.$$

5.9 Beispiel

Im letzten Beispiel folgt aus $(x - \frac{1}{4})^2$ die Ungleichung $|x - \frac{1}{4}| \geq \frac{3}{4}$

5.10 Beispiel

Löse die Ungleichung $|x + 1| + |x - 1| \leq 2$.

Fallunterscheidung!

1. Fall: $x < -1$
Die Ungleichung lautet $-(x + 1) - (x - 1) \leq 2$ und somit $x \geq -1$.
Dies liefert $L_1 = \emptyset$
2. Fall: $-1 \leq x < 1$
Die Ungleichung lautet $(x + 1) - (x - 1) \leq 2$ und somit $2 \leq 2$.
Somit folgt $L_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$
3. Fall: $x \geq 1$
Die Ungleichung lautet $(x + 1) + (x - 1) \leq 2$ und somit $x \leq 1$.
Dies zeigt $L_3 = \{1\}$.

Insgesamt erhalten wir $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$.

5.11 Dreiecksungleichung

1. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $|x + y| \leq |x| + |y|$ (**Dreiecksungleichung**)
2. Es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die **umgekehrte Dreiecksungleichung**:
 $||x| - |y|| \leq |x + y|$

BEWEIS.

1. Aus $xy \leq |x| \cdot |y| = |xy|$ folgt $x^2 + 2xy + y^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$, also $(x + y)^2 \leq (|x| + |y|)^2$.
Da $|x + y|$, $|x|$ und $|y|$ nicht negativ sind, ist Wurzelziehen erlaubt.
2. Nach 1. gilt $|x| \leq |x + y| + |-y| = |(x + y) - y|$
und somit $|x + y| \geq |x| - |y|$.
Andererseits gilt, ebenfalls nach 1., die Ungleichung
 $|x + y - x| = |y| \leq |x + y| + |-x| = |x + y| + |x|$
und somit $|x + y| \geq |y| - |x|$.

Kombiniert man beide Erkenntnisse, so folgt $|x + y| \geq ||x| - |y||$.

5.12 Beispiel

Löse $\sqrt{2x-1} < x+1$ für $x \in \mathbb{R}$.

Damit die Wurzel definiert ist, muss gelten $2x-1 \geq 0$, also $x \geq \frac{1}{2}$.
Dann ist die rechte Seite positiv und Quadrieren erlaubt.

Es folgt: $2x-1 < x^2+2x+1$, also $x^2 > -2$.

Insgesamt erhalten wir: $L = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0, 5\}$.

5.13 Beispiel

Löse $\sqrt{x^2+1} > x+1$ in \mathbb{R} .

1. Fall: $x+1 < 0$.

In diesem Fall gilt $\sqrt{x^2+1} > 0 > x+1$,
also $L_1 = \{x \in \mathbb{R} | x < -1\}$.

2. Fall: $x+1 \geq 0$.

Jetzt ist Quadrieren eine Äquivalenzumformung und es folgt $x^2+1 > x^2+2x+1$, also $x < 0$.

Dies liefert $L_2 = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x < 0\}$.

Insgesamt folgt: $L = L_1 \cup L_2 = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$.

6 Ebene Geometrie

11 Die komplexen Zahlen

11.1 Definition

1. Wir führen auf \mathbb{R}^2 eine Multiplikation ein durch

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad).$$

Wie man leicht nachprüft, erhält man damit einen Körper \mathbb{C} . Dieser enthält \mathbb{R} mittels der injektiven Abbildung

$$\iota : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}, a \mapsto (a, 0)$$

2. Schreibweisen:

- Statt $e_1 = (1, 0)$ schreibe 1.
- Statt $e_2 = (0, 1)$ schreibe i .

Jedes Element von \mathbb{C} hat also eine eindeutige Darstellung der Form

$$a + b \cdot i \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

3. Für $z = a + bi \in \mathbb{C}$ heißt $\operatorname{Re}(z) = a$ der **Realteil** von z und $\operatorname{Im}(z) = b$ der **Imaginärteil** von z .

11.2 Bemerkung

1. Die Zahl i erfüllt $i^2 = -1$, denn $(0, 1) \cdot (0, 1) = (0 - 1, 0) = (-1, 0)$.
Man schreibt daher auch $i = \sqrt{-1}$.
2. Für $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt:

$$(\sqrt{a} \cdot i)^2 = a \cdot (-1) = -a, \text{ also } \pm \sqrt{a} \cdot i = \sqrt{-a}$$

3. Für $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} \cdot i$$

11.3 Beispiele

1. Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt: $i^n = \begin{cases} i & \text{falls } n \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{falls } n \equiv 2 \pmod{4} \\ -i & \text{falls } n \equiv 3 \pmod{4} \\ 1 & \text{falls } n \equiv 0 \pmod{4} \end{cases}.$

$$2. (1+i)^2 = 2i$$

3. In \mathbb{C} besitzt jede quadratische Gleichung genau 2 Lösungen.

11.4 Definition

Die Abbildung $\kappa : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad a + bi \mapsto a - bi$ heißt die **komplexe Konjugation**.

Für $z \in \mathbb{C}$ schreiben wir statt $\kappa(z)$ auch \bar{z} .

Funktion
schöner
machen

11.5 Bemerkung (Rechenregeln für komplexe Konjugation)

$$1. \bar{\bar{z}} = z$$

$$2. \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$3. \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$4. \text{ Für } a \in \mathbb{R} \text{ gilt: } \overline{a \cdot z} = a \cdot \bar{z}$$

$$5. \frac{1}{\bar{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$$

$$6. \bar{z} + z = 2a = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$7. z - \bar{z} = 2bi = 2\operatorname{Im}(z) \cdot i$$

7.?

11.6 Bemerkung (Die komplexe Zahlenebene)

Im $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ führen wir kartesische Koordinaten ein und identifizieren die Zahl $z = a + bi \in \mathbb{C}$ mit dem Punkt (a, b) .

Skizze

Geometrische Interpretation der Körperoperationen:

1. Addition:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \text{ entspricht der Vektoraddition.}$$

2. Multiplikation mit i : $(a + bi) \cdot i = -b + ai$.

Dies entspricht also der Drehung um 90° im mathematisch positiven Sinn um den Ursprung.

3. Abstand zum Nullpunkt/Länge des Vektors
Der **Betrag** einer komplexen Zahl $z = a + bi$ ist $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Eigenschaften:

- (a) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
 - (b) $|c \cdot z| = |c| \cdot |z|$ für $c \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$
 - (c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
4. Der **Winkel** φ (oder das **Argument**) einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $z = a + bi$ und $a, b \in \mathbb{R}$ erfüllt $z = |z| \cdot \cos(\varphi) + |z| \cdot \sin(\varphi) \cdot i$ ($\varphi \in [0, 2\pi[$).

Wir schreiben $\varphi = \arg(z)$.

5. Sei $r = |z|$ und $\varphi = \arg(z)$. Dann ist die Multiplikation mit

$$z = r \cdot \cos(\varphi) + r \cdot \sin(\varphi)i = r(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i)$$

die Komposition der Multiplikation mit $\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i$ und der Multiplikation mit $r \in \mathbb{R}_+$. Letztere ist die zentrische Streckung um den Faktor r mit Mittelpunkt 0.

Nun wende die erste Multiplikation an auf $\tilde{z} = \tilde{r} \cdot (\cos(\psi) + \sin(\psi)i)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{z} \cdot (\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i) &= \\ \tilde{r}(\cos(\psi) + \sin(\psi)i)(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i) &= \\ \tilde{r}[(\cos(\psi)\cos(\varphi) - \sin(\psi)\sin(\varphi)) + (\sin(\psi)\cos(\varphi) + \cos(\psi)\sin(\varphi))i] &= \\ \tilde{r}[\cos(\psi + \varphi) + \sin(\psi + \varphi)i] & \end{aligned}$$

Das Produkt hat also denselben Betrag, aber der Winkel ist um φ größer. Die Multiplikation mit $\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i$ entspricht also der Drehung um den Winkel φ um den Nullpunkt.

Insgesamt ist die Multiplikation mit z also eine Drehstreckung mit Zentrum 0.

Skizzen!

11.7 Bemerkung (Algebraische Beschreibung geometrischer Mengen)

1. (Kreis mit Mittelpunkt $m \in \mathbb{C}$ und Radius $r \in \mathbb{R}_+$)
Der Abstand von $z \in \mathbb{C}$ zu m ist gegeben durch $|z - m|$.

Der Kreis ist also gegeben durch $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - r| = r\}$.

2. Eine Gerade G durch $z = a + bi$ und $\tilde{z} = c + di$ ist gegeben durch $G = \{z + \lambda(\tilde{z} - z) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ (*explizite Darstellung*).

Implizite Darstellung: $G = \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{e}z + e\bar{z} + g = 0\}$ mit $e \in \mathbb{C}$, $g \in \mathbb{R}$.

Es gilt: $\bar{e}z + e\bar{z} = \bar{e}z + \overline{(ez)} = 2\operatorname{Re}(\bar{e}z)$.

Schreibe: $e = \alpha + \beta i$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

Dann folgt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\bar{e}z) &= \operatorname{Re}((\alpha + \beta i)(x + yi)) = \\ \operatorname{Re}((\alpha x + \beta y) + (-\beta x + \alpha y)i) &= \\ \alpha x + \beta y. & \\ \left(= \left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \right) & \end{aligned}$$

Dann folgt:

$$\bar{e}z + e\bar{z} + \underbrace{g}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{2\alpha x + 2\beta y + g = 0}_{\text{implizite Geradengleichung in } \mathbb{R}^2}.$$

11.8 Bemerkung (Algebraische Interpretation von Abbildungen der Zeichenebene)

1. (Translation)

Die Translation τ um den Vektor $a + bi$ ist die Addition

$$\tau : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z + (a + bi)$$

.

2. (Drehung)

Die Drehung um den Winkel φ um den Nullpunkt entspricht der Multiplikation mit $\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i$.

Sei nun $m \in \mathbb{C}$.

Die Drehung ρ_m, φ ist die Komposition von

- (a) Verschiebung um $-m$
- (b) Drehung um 0 um Winkel φ
- (c) Verschiebung um $+m$

Es gilt also: $\rho_{m,\varphi} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto (\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i)(z - m) + m$.

3. (Spiegelung an einer Geraden durch 0)
 G habe einen Richtungsvektor $a + bi$.
 Die Gerade durch z und \tilde{z} haben dann den Richtungsvektor $-b + ai$.
 Dann ist $G \cap H$ der Lotfußpunkt $l \in \mathbb{C}$ und es gilt:

$$\tilde{z} = \sigma_G(z) = z + 2(l - z) = -z + 2l.$$

Funktionen,
Skizzen

11.9 Bemerkung (Geometrische Interpretation von $z \mapsto \bar{z}$)

fett

Die Abbildung $\kappa : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, a + bi \mapsto a - bi$ entspricht der Spiegelung an der $\text{Re}(z)$ -Achse.

Funktion

11.10 Bemerkung (Inversion am Kreis)

Die Abbildung $\iota : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ wirkt auf $z = a + bi = r(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i)$ wie folgt:

Funktion

$$\begin{aligned} \iota(z) &= \frac{1}{\bar{z}} = \\ \kappa \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\cos(\varphi) - \sin(\varphi)i}{(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i)(\cos(\varphi) - \sin(\varphi)i)} \right) &= \\ \frac{1}{r} \kappa(\cos(\varphi) - \sin(\varphi)i) &= \\ \frac{1}{r}(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i) \end{aligned}$$

Die Zahl $\iota(z)$ liegt also auf demselben Halbstrahl durch 0 wie z . Ihr Betrag ist $\frac{1}{r}$.

skizze

Der Einheitskreis $\mathbb{E} = \{\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i \mid \varphi \in [0, 2\pi[\}$ bleibt dabei fest.

Es gilt: $\iota^2(z) = \iota(\iota(z)) = z$.

Die geometrische Interpretation von $\frac{1}{\bar{z}}$ ist also der Punkt, der aus z entsteht, indem man zuerst an der $\text{Re}(x)$ -Achse spiegelt und dann die Inversion am Einheitskreis durchführt.

11.11 Satz (Eigenschaften der Inversion am Kreis)

1. Ist G eine Gerade in \mathbb{C} , die nicht durch 0 geht, so ist $\iota(G)$ ein Kreis.
2. Ist G eine Gerade durch 0, so gilt $\iota(G \setminus \{0\}) = G \setminus \{0\}$.
3. Ist K ein Kreis in \mathbb{C} , der durch 0 geht, so ist $\iota(K \setminus \{0\})$ eine Gerade, die nicht durch 0 geht.
4. Ist K ein Kreis in \mathbb{C} , der nicht durch 0 geht, so ist $\iota(K)$ wieder ein Kreis.

11.12 Bemerkung (Die komplexe e -Funktion)

Die reelle e -Funktion $x \mapsto e^x$ erfüllt $(e^x)' = e^x$ und $e^0 = 1$.
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}x^n$$

.

Für $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}z^n \in \mathbb{C}$$

ebenfalls.

Weitere Potenzreihen, die für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergieren, sind:

- $\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - + \dots$
- $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + - \dots$

Durch dieselben Potenzreihen erhält man $e^z, \sin(z)$ und $\cos(z)$ auch für alle $z \in \mathbb{C}$.

Man weiß nach, dass $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt.

11.13 Satz (Die Eulersche Formel)

Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt: $e^{i\varphi} = \underbrace{\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)}_{\text{Punkt auf dem Einheitskreis}}$

BEWEIS. Es gilt:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= 1 + \frac{1}{1!}(i\varphi) + \frac{1}{2!}(i^2\varphi^2) + \frac{1}{3!}(i^3\varphi^3) + \dots = \\ &= (1 - \frac{1}{2!}\varphi^2 + \frac{1}{4!}\varphi^4 - \frac{1}{6!}\varphi^6 + \dots) + i(\frac{1}{1!}\varphi - \frac{1}{3!}\varphi^3 + \frac{1}{5!}\varphi^5 - \dots) = \\ &= \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

ged

11.14 Korollar

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

11.15 Beispiel

Aus der Eulerschen Formel folgt:

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha + \beta) + i \cdot \sin(\alpha + \beta).$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned} e^{i(\alpha+\beta)} &= e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = \\ &= (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))(\cos(\beta) + i \sin(\beta)) = \\ &= [\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta] + i[\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta]. \end{aligned}$$

Durch Vergleich der Real- und Imaginärteile folgen die Additionstheoreme für sin und cos.

12 Kombinatorik

Kombinatorik ist die Kunst des Zählens.

12.1 Definition

Seien a_1, \dots, a_n paarweise verschiedene Objekte ($n \geq 1$).

1. Eine Anordnung $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$ mit $\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}$ heißt auch **Permutation** von a_1, \dots, a_n .

Schreibweisen:

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_n} \end{pmatrix} \text{ oder einfach } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

Ohne Einschränkung betrachten wir also meißt die Permutationen der Menge $\{1, \dots, n\}$.

2. Die Menge aller Permutationen von n Objekten heißt die **symmetrische Gruppe** S_n .

12.2 Satz: Die Gruppe S_n hat $n!$ Elemente.

BEWEIS. Halte ein Element, zB a_n fest. Für die Bilder $\sigma(a_1)$ unter $\sigma \in S_n$ gibt es n Möglichkeiten, für $\sigma(a_2)$ gibt es dann noch $n - 1$ Möglichkeiten usw.

Am Ende gibt es für $\sigma(a_n)$ nur noch 1 Auswahl. Insgesamt gibt es $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ Permutationen.

qed

12.3 Beispiel: Wir ordnen Permutationen

Dieser Punkt wurde während der Ausführung gestrichen, da der Kenntnisstand der Studierenden in Lineare Algebra nicht ausreichend war.

12.4 Definition

Gegeben seien n paarweise verschiedene Objekte a_1, \dots, a_n .

1. Sei $0 \leq m \leq n$. Eine Teilmenge von $\{a_1, \dots, a_n\}$ bestehend aus m Elementen heißt auch **Auswahl** von m Elementen.

2. Die Anzahl der Auswahlen von m Elementen aus $\{a_1, \dots, a_n\}$ heißt der **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{m}$.

12.5 Satz (Formel für die Binomialkoeffizienten)

Für $n \geq 1$ und $0 \leq m \leq n$ gilt: $\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ (mit $0! = 1$).

12.6 Bemerkung (Das Pascalsche Dreieck)

1. Die Binomialkoeffizienten erfüllen die Formel

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} \text{ für } m \geq 1, n \geq 2.$$

2. Die Binomialkoeffizienten sind gegeben durch das **Pascalsche Dreieck**:

n=1			1		1			(m=0,1)
n=2			1		2		1	(m=0,1,2)
n=3			1		3		3	(m=0,...,3)
n=4		1		4		6		(m=0,...,4)
n=5	1		5		10		10	(m=0,...,5)

etc.