Mitschrift zum

Basiskurs Mathematik

bei Prof. Kreuzer im WS 16/17

author	Maximilian Reif `<reifmaxi@fim.uni-passau.de>`
last change	March 6, 2017, version 0.8.1
github	`https://github.com/lordreif/basiskurs-mathe`

Contents

1 Rechnen mit ganzen Zahlen

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ Menge der **natürlichen Zahlen**
$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ Menge der **ganzen Zahlen**

1.1 Satz (Zahlensysteme)

Sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$. (Die Zahl b heißt **Basis** des Zahlensystems)
Dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmte Elemente $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ sodass gilt:

$$n = a_0 + a_1 \cdot b + a_2 \cdot b^2 + \cdots + a_k \cdot b^k.$$

Die Zahlen $a_0, \ldots, a_k$ heißen **Ziffern** von n in der Darstellung zur Basis b.
Schreibweise: $n_{[b]} = a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0$ (fehlt $[b]$ so ist $[10]$ gemeint)

1.2 Beispiele

- Binärsystem, $b = 2$
  - $5_{[10]} = 101_{[2]}$
  - $101_{[10]} = 64_{[10]} + 32_{[10]} + 4_{[10]} + 1_{[10]} = 1100101_{[2]}$
- Hexadezimalsystem, $b = 16$
  Notation: $10_{[10]} = A_{[16]}, 11_{[10]} = B_{[16]}, \ldots, 15_{[10]} = F_{[16]}$
  - $101_{[10]} = 5 \cdot 16 + 5 = 55_{[16]}$
  - $1B3_{[16]} = 256_{[10]} + 11_{[10]} \cdot 16_{[10]} + 3_{[10]} = 435_{[10]}$

1.3 Satz (Division mit Rest)

Sei $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}_+$.
Dann gibt es eine eindeutige Darstellung $n = q \cdot m + r$ mit $q \in \mathbb{Z}$ (genannt **Quotient**) und $r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ (genannt **Rest**).

$$\text{Schreibweise: } n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{"ist kongruent"}}}{\equiv} r \pmod{m}$$

1.4 Beispiele

- Die Zahl $n = 87$ soll durch $m = 5$ geteilt werden:

$$n = q \cdot m + r = 17 \cdot 5 + 2$$

- Die möglichen Reste bei der Division einer Quadratzahl durch 12 sind:

$n \pmod{12}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n^2 \pmod{12}$	0	1	4	9	4	1	0	1	4	9	4	1

1.5 Definition (Vielfaches, Teiler, Primzahl)

1. Ist der Rest bei der Division von n durch m gleich Null, so heißt n ein **Vielfaches** von m und m ein **Teiler** von n.
2. Eine Zahl $n \geq 2$ heißt eine **Primzahl**, wenn sie nur zwei positive Teiler 1 und n besitzt.

1.6 Beispiele

- Die Teiler von 12 sind 1, 2, 3, 4, 6, 12.
- Die ersten Primzahlen sind 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

1.7 Satz (Fundamentalsatz der Arithmetik)

Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gibt es eine (bis auf die Reihenfolge) eindeutige Darstellung

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$$

mit paarweise verschiedenen Primzahlen $p_1, \ldots, p_k$ und $\alpha_i \in \mathbb{N}_+$.
Diese Darstellung heißt **Primfaktorzerlegung** von n.

1.8 Beispiele

- $24 = 2^3 \cdot 3$
- $111 = 3 \cdot 37$
- $1011 = 7 \cdot 11 \cdot 13$

- $1024 = 2^{10}$
- $729 = 3^6$
- $625 = 5^4$

1.9 Definition (ggT, kgV)

Seien $a, b \in \mathbb{N}_+$.

1. Die größte positive ganze Zahl $g \in \mathbb{N}_+$ mit $g|a$ und $g|b$ heißt der **größte gemeinsame Teiler (**ggT**)** von a und b.
2. Die kleinste positive ganze Zahl $k \in \mathbb{N}_+$ mit $a|k$ und $b|k$ heißt das **kleinste gemeinsame Vielfache (**kgV**)** von a und b.

1.10 Satz (ggT/kgV durch Primfaktorenzerlegung)

Sei $a, b \in \mathbb{N}_+$ mit Primfaktorzerlegungen

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \text{ und} b = p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k} \text{ mit } \alpha_i, \beta_i \geq 0.$$

Dann gilt:

1. $\mathrm{ggT}(a, b) = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\gamma_k}$ mit $\gamma_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$

1.11 Beispiele

- $\mathrm{ggT}(30, 75) = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 15$,
  denn $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ und $75 = 3 \cdot 5^2$
- $\mathrm{ggT}(64, 81) = 1$,
  denn $64 = 2^6, 81 = 3^4$

1.12 Bemerkung (Teilbarkeitsregeln)

1. $2|n$ genau dann, wenn die Endziffer von n in $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ ist.
2. $3|n$ genau dann, wenn die Quersumme(Qs) von n durch 3 Teilbar ist.
3. $4|n$ genau dann, wenn $4|(10a_1 + a_0)$.
4. $5|n$ genau dann, wenn $a_0 \in \{0, 5\}$ gilt.
5. $6|n$ genau dann, wenn $2|n$ und $3|n$.

6. $8|n$ genau dann, wenn $8|(100a_2 + 10a_1 + a_0)$.
7. $9|n$ genau dann, wenn $9|\operatorname{Qs}(n)$.
8. $10|n$ genau dann, wenn $a_0 = 0$ gilt.
9. $11|n$ genau dann, wenn $11|(a_0 - a_1 + a_2 - + \dots \pm a_k)$.
10. $12|n$ genau dann, wenn $3|n$ und $4|n$.

1.13 Beispiele

- $9|123453$
- $11|1232$

1.14 Bemerkung (Geschicktes Rechnen)

1. Dritte binomische Formel: $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$ plus Quadratzahlen
   - $13 \cdot 17 = 15^2 - 2^2 = 225 - 4 = 221$
   - $23 \cdot 25 = 576 - 1 = 575$
   - $27 \cdot 33 = 900 - 9 = 891$
2. Multiplikation durch Umsortierung der Primfaktoren
   - $8 \cdot 375 = 8 \cdot 3 \cdot 125 = 10^3 \cdot 3 = 3000$
   - $40 \cdot 75 = 4 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 25 = 3000$
3. Quadrieren mittels erster binomischer Formel: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
   - $43^2 = 40^2 + 2 \cdot 3 \cdot 40 + 9 = 1600 + 240 + 9 = 1849$
   - $98^2 \cdot (100-2)^2 = 10000 - 400 + 4 = 9604$

Querverweise binom

1.15 Definition (Rekursive Definition von ggT und kgV)

Für $n \geq 2$ und $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}_+$ gilt:

- $\operatorname{ggT}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \operatorname{ggT}(\operatorname{ggT}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n)$
- $\operatorname{kgV}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \operatorname{kgV}(\operatorname{kgV}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n)$

1.16 Satz: Es gibt unendlich viele Primzahlen

BEWEIS. Angenommen es gibt nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Dann betrachte die Primfaktorenzerlegung von $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$. Die Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ teilen n <u>nicht</u>, sondern lassen den Rest 1. Also sind $p_1, p_2, \ldots, p_k$ nicht alle Primzahlen, was im Widerspruch zur Annahme steht. $\square$

2 Rechnen mit Brüchen und Reellen Zahlen

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}_+\}$ Menge der **rationalen Zahlen**

2.1 Bemerkung (Rechenregeln für Brüche)

Für alle $a, c \in \mathbb{Z}$ und $b, c \in \mathbb{N}_+$ gilt:

1. (Gleichheit von Brüchen)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ genau dann wenn } ad = bc$$

2. $\mathrm{kgV}(a, b) = p_1^{\delta_1} \cdot p_2^{\delta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\delta_k}$ mit $\delta_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$

   Beispiel: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

   Kürzen von Brüchen:

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_+$$

3. (Addition/Subtraktion von Brüchen)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} = \frac{a \cdot \tilde{b} + c \cdot \tilde{d}}{\mathrm{kgV}(b, d)}$$

   mit

$$\tilde{b} = \frac{\mathrm{kgV}(b, d)}{b} \text{ und } \tilde{d} = \frac{\mathrm{kgV}(b, d)}{d}.$$

   Beispiele: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\quad \frac{7}{30} + \frac{11}{45} = \frac{22}{90} + \frac{22}{90} = \frac{43}{90}$

4. (Multiplikation von Brüchen)

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

5. (Division von Brüchen/Doppelbrüche) Sei nun $c \neq 0$. Dann gilt:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

6. (Kehrwert eines Bruchs)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \text{ falls } a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$

2.2 Beispiele

1. Für $n \geq 1$ gilt

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{m-1} = \frac{m+1}{m(m+1)} - \frac{m}{m(m+1)} = \frac{1}{m(m+1)},$$

also zB $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

2. - $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
   - $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$
   - $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$
   - $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n-1}{2^n}$

2.3 Definition (Potenzen)

1. Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann definiere $a^0 = 1,\ a^1 = a,\ a^2 = a^1 \cdot a = a \cdot a$ etc.
   Für $n \geq 1$ sei also $a^n = a^{n-1} \cdot a = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{mal}}$.
   Die Zahl a^n heißt die **n-te Potenz** von a.
2. Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Für $n = -k$ mit $k \geq 1$ setze $a^n = a^{-k} = \frac{1}{a^k}$.

2.4 Beispiele

- $343 = 7^3$
- $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$
- $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$
- $3^6 = 9^3 = 729$

2.5 Bemerkung (Rechenregeln für Potenzen)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $k, l \in \mathbb{Z}$ gilt:

1. $a^k \cdot b^k = (ab)^k$
2. $a^k \cdot a^l = a^{k+l}$
3. $\left(a^k\right)^l = a^{kl}$
4. $\frac{a^k}{a^l} = a^{k-l}$ falls $a \neq 0$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}$ falls $b \neq 0$

2.6 Definition (Wurzeln)

1. Sei $a \in \mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} | a > 0\}$ und $k \in \mathbb{N}_+$.
   Dann gibt es genau ein $b \in \mathbb{R}_+$ mit $b^k = a$. Diese Zahl b heißt die **k-te Wurzel** von a und wird mit $b = \sqrt[k]{a}$ bezeichnet.
   Im Fall $k = 2$ schreiben wir auch einfach $b = \sqrt{a}$. ("Quadratwurzel") Gänsefüßchen
2. Für $a \in \mathbb{R}_+$ und $m, n \in \mathbb{N}_+$ setzen wir

   $$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

   Insbesondere sei also

   $$a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}.$$

   Mit dieser Definition gelten die Rechenregeln für Potenzen auch für rationale Exponenten. Insbesondere sei

   $$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

2.7 Beispiele

- $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 2 \cdot \sqrt[3]{3}$
- $\sqrt[3]{216} = 6$
- $\sqrt{484} = 22$
- $\sqrt{\frac{36}{121}} = \frac{6}{11}$
- $\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{2}$

2.8 Satz (Euklid)

Behauptung. $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Beweis. Angenommen $\sqrt{2}$ wäre rational.
Dann gäbe es $a, b \in \mathbb{N}_+$ mit $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.
Durch Kürzen können wir annehmen, dass $ggT(a, b) = 1$ gi Blitz
Durch Quaddrieren folgt $2 = \frac{a^2}{b^2}$, also $2b^2 = a^2$.
Da a^2 gerade ist, ist auch a gerade, das heißt $\exists c \in \mathbb{N}_+$ mit $a = 2c$.
Einsetzen liefert $2b^2 = (2c)^2 \Leftrightarrow b^2 = 2c^2$.
Somit muss auch b gerade sein. BLITZ zu $ggT(a, b) = 1$ $\square$.

3 Rechnen mit Buchstaben

Seien $a, b, c, \ldots$ Buchstabensymbole.

FRAGE. Was ist $(x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-c) \cdot \cdots \cdot (x-z)$?
HINWEIS. Betrachte den 24. Faktor!

3.1 Definition

1. Ein Produkt der Form $(a^{n_a} \cdot b^{n_b} \cdot c^{n_c} \ldots)$ mit $n_a, n_b, n_c, \ldots \in \mathbb{N}$ heißt **Term**.
   Beachte: $a^2bc = caba = acab$ etc. (Kommutativgesetz)
2. Ein Ausdruck der Form $c \cdot t$ mit einem **Koeffizienten** $c \in \mathbb{R}$ und einem Term t heißt **Monom**.
3. Eine entliche Summe von Monomen heißt **Polynom**.

3.2 Bemerkung (Rechenregeln für Polynome)

Seien $f, g, h, \ldots$ Polynome.

1. Distributivgesetze:

   $f \cdot (g+h) = f \cdot g + f \cdot h$ (bedeutet $(f \cdot g) + (f \cdot h)$ "Punkt vor Strich")
   $(f+g) \cdot h = f \cdot h + g \cdot h$

2. Kommutativgesetz:

$$f \cdot g = g \cdot f, \quad f + g = g + f$$

3. Assoziativgesetz:

$$(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h), \quad (f+g)+h = f+(g+h)$$

   Die Klammern können auch ganz weggelassen werden.

4. Prioritätsregel: Exponent vor Punkt vor Strich!

$$f^2g + h = ((f \cdot f) \cdot g) + h$$

Gänsefüßchen

3.3 Beispiele

1. (Erste binomische Formel)

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. (Zweite binomische Formel)

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3. (Dritte binomische Formel)

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

4. (Teleskopsumme)

$$1 - a^{n+1} = (1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n)\cdot(1-a)$$

5. $1+a^n = (1-a+a^2-a^3+\cdots+a^{n-3}-a^{n-2}+a^{n-1})\cdot(1+a)$ falls n ungerade
6. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
7. $a^n + b^n = (a+b)\cdot(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - + \cdots b^{n-1})$ falls n ungerade
8. $a^3 + b^3 = (a+b)\cdot(a^2 - ab + b^2)$

3.4 Bemerkung (Rechenregeln für symbolische Berechnungen)

1.

$$\begin{aligned}(-1)(-1) &= 1\\(-1)(+1) &= -1\\(-x)(-y) &= xy\end{aligned}$$

2. (Ausklammern)
Man kann die Distributivgesetze oft ”andersherum” anwenden:

$$\begin{aligned}ab + a + b + 1 &= a\cdot(b+1) + (b+1) = (a+1)(b+1)\\x^2 + 3x + 2 &= (x+1)(x+2) \quad \text{(Vieta)}\end{aligned}$$

Gänsefüschen, Link to Vieta

3.5 Definition

1. Ist $t = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ ein Term, so heißt $deg(t) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ der **Grad** von t.
2. Ist $f = c_1 t_1 + \ldots + c_s t_s$ ein Polynom mit $c_1 \neq 0, \ldots, c_s \neq 0$ so heißt $deg(f) = max\{deg(t_1), \ldots, deg(t_s)\}$ der **Grad** von f.
3. Ist $f = c_1 t_1 + \ldots + c_s t_s$ ein Polynom mit $c_1 \neq 0, \ldots, c_s \neq 0$ und gilt $deg(t_1) = \ldots = deg(t_s)$, so heißt f ein **homogenes Polynom**.

3.6 Beispiele

- Das Polynom $f = x^3 + y^3$ ist homogen vom Grad 3.
- Das Polynom $p = x^4 + 4y^4$ ist homogen vom Grad 4.

3.7 Definition

Seien f, g Polynome mit $g \neq 0$. Dann heißt $\frac{f}{g}$ eine **rationale Funktion**.

3.8 Bemerkung

Man kann mit rationalen Funktionen entsprechend der Bruchregeln rechnen.

3.9 Beispiele

- $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)-(x-1)}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-1}$
- $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{x^2-y^2}{xy}$
- $\frac{x^2-y^2}{x+y} = \frac{(x-y)(x+y)}{x+y} = x - y$

4 Lineare und Quadratische Gleichungen

4.1 Definition

Eine Gleichung der Form $ax + b = 0$ mit Zahlen a, b und $a \neq 0$ heißt eine **lineare Gleichung** mit einer Unbestimmten.

4.2 Bemerkung

Die Lösung einer Gleichung $ax + b = 0$ ist $x_1 = -\frac{b}{a}$ (falls $a \neq 0$).
Die Menge $L = \{-\frac{b}{a}\}$ heißt die **Lösungsmenge** der Gleichung.
(Wenn $\frac{1}{a}$ nicht definiert ist, so gilt $L = \emptyset$.)

4.3 Definition

Seien a, b, c Zahlen mit $a \neq 0$. Dann heißt $ax^2+bx+c = 0$ eine **quadratische Gleichung** mit einer Unbestimmten.

4.4 Bemerkung (Lösen einer quadratischen Gleichung über $\mathbb{R}/\mathbb{C}$)

R/Q fett

1. Schritt: Wegen $a \neq 0$ kann man durch a teilen und erhält:
$x^2 + px + q = 0$ mit $p = \frac{b}{a}, q = \frac{c}{a}$

2. Schritt: (quadratische Ergänzung)
$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0$

3. Schritt: (Wurzel ziehen)
$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q = \frac{p^2-4q}{4}$
Ist $p^2 - 4q < 0$, so gibt es in $\mathbb{R}$ keine Lösung.
Ansonsten: $x + \frac{p}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}$

Die Lösungen sind also
$x_1 = -\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}$ und $x_1 = -\frac{p}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}$

Die Zahl $\Delta = p^2 - 4q$ heißt die **Diskriminante** der Gleichung.

4.5 Satz (Vieta)

Seien $x_1.x_2$ die Lösungen einer quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$. Dann gilt: $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.

BEWEIS. Sind x_1, x_2 die Lösungen, so gilt:

$$(x - x_1)(x - x_1) = 0 \text{ und somit } x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2 = 0,$$
$$\text{also } x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 x_2) = 0.$$

centering, qed

ANWENDUNG: Um $x^2 + px + q = 0$ zu lösen, finde zwei Zahlen mit Summe $-p$ und Produkt q.

4.6 Beispiele

- $x^2 - 3x + 2 = 0$ hat die Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.
- $x^2 - 4x + 3, L = \{1, 3\}$
- $x^2 + 3x + 2, L = \{-1, -2\}$
- $x^2 + x - 2, L = \{1, -2\}$

4.7 Bemerkung (Substitution)

Manchmal kann man eine Gleichung durch eine geschickte **Substitution** lösen.

- Löse $x^4 - 7x^2 + 10$ in $\mathbb{R}$. Setze $y = x^2$.
  Erhalte $y^2 - 7y + 12 = 0$ mit $L = \{3, 4\}$ und somit $x_{1/2} = \pm\sqrt{3}, x_{3/4} = \pm 2$.
- Löse $x - 18\sqrt{x} + 17 = 0$ in $\mathbb{R}$. Setze $y = \sqrt{x}$.
  Erhalte $y^2 - 18y + 17 = 0$ mit $L = \{1, 17\}$, also $\sqrt{x} = 1$ und $\sqrt{x} = 17$. Somit sind $x_1 = 1$ und $x_2 = 289$.

4.8 Bemerkung (Lineares Gleichungssystem)

Gegeben seien Zahlen $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ mit $a_1 b_1 - a_2 b_2 \neq 0$.
Dann heißt $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$ ein **lineares Gleichungssystem** mit zwei Unbestimmten x, y.

1. Lösungsmethode "Einsetzen"
   Ist $a_1 \neq 0$, so wird $x = -\frac{b_1}{a_1}y - \frac{c_1}{a_1}$. Setze dies in die zweite Gleichung ein und erhalte $a_2\left(-\frac{b_1}{a_1}y - \frac{c_1}{a_1}\right) + b_2y + c = 0$. Löse diese lineare Gleichung und erhalte y_1. Dann gilt $x_1 = -\frac{b_1}{a_2}y_1 - \frac{c_1}{a_1}$. $L = \{(x_1, y_1)\}$.

   <u>Sonderfall:</u> y hebt sich in der ersetzten Gleichung auf:
   $a_2 \cdot \left(-\frac{b_1}{a_1}\right) + b_2 = 0$, also $\frac{-a_2b_1 + a_1b_2}{a_1} = 0$ und somit $a_1b_2 - a_2c_1 = 0$.

   In diesem Fall lautet die ersetzte Gleichung:
   $a_2\left(-\frac{c_1}{a_1}\right) + c_2 = 0$, also $\frac{-a_2c_1 + a_1c_1}{a_1} = 0$ und somit $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$

   Es gibt zwei Möglichkeiten:

   (a) $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0 \Rightarrow L = \emptyset$

   (b) $a_1c_2 - a_2c_1 = 0 \Rightarrow y$ beliebig, $x = -\frac{b_1}{a_1}y - \frac{c_1}{a_1}$
   Somit gilt: $L = \left\{\left(-\frac{b_1}{a_1} \cdot \lambda - \frac{c_1}{a_1}, \lambda\right) \middle| \lambda \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$

2. Lösungsmethode "Inderreduzieren", "Gauß-Verfahren"
   <u>Ziel:</u> Bilde Linearkombinationen der beiden Gleichungen, in denen nur eine der beiden Unbestimmten vorkommt.

Gänsefüßchen

4.9 Beispiel

Löse $\left\{\begin{array}{ll} 2x + 5y = 9 & \text{(I)} \\ 3x - 4y = 2 & \text{(II)} \end{array}\right.$

3·(I)−2·(II): $15y + 8y = 27 - 4$ liefert $y = 1$.
Einsetzen von $y = 1$ in (II) ergibt $3x = 6 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow L = \{(2, 1)\}$.

4.10 Beispiel (Schnittpunkt von zwei Kreisen)

Zwei Kreise seien gegeben durch: $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0 \\ (x+1)^2 + (y-3)^2 = 9 \end{array}\right\} \quad K_1$

.

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0 \qquad K_2$$

Gleichung $K_1 - K_2$: $6x - 2y + 6 = 0$, also $y = 3x + 3$.
Setze dies in K_1 (oder K_2) ein: $x^2 + (3x + 3)^2 + 2x - 6 \cdot (3x + 1) + 1 = 0$.

Liefert: $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{4}{5}$, also $y_1 = 0,\ y_2 = \frac{27}{5} \Rightarrow L = \left\{(-1,0), \left(\frac{4}{5}, \frac{27}{5}\right)\right\}$

4.11 Aufgabe (Aus einem alten chinesischem Rechenbuch)

In einem Stall sind Hühner und Schweine.
Es sind 40 Tiere. Zusammen haben sie 70 Füße.

Wie viele Tiere von jeder Sorte sind es?

5 Ungleichungen

Seien f, g Polynome in Unbestimmten $x_1, x_2, \dots, x_n$ (oder x, y, z) mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$.

5.1 Definition

Es gibt 5 Typen von Ungleichungen:

1. $f \leq g$
2. $f \geq g$
3. $f < g$
4. $f > g$
5. $f \neq g$

Interpretation: $f \leq g$ bedeutet, dass die Ungleichung gelten soll, wenn man für $x_1, \dots, x_n$ Zahlen (aus einem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^n$) einsetzt.

5.2 Beispiele

- Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x^2 \geq 0$.
- Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x^2 + y^2 \geq 2xy$

  Beweis.

  $$\begin{aligned} (x-y)^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 &\geq 2xy \end{aligned}$$

  Folgerung: Für $x, y \geq 0$ gilt: $\underbrace{\sqrt{xy}}_{\text{geometrisches Mittel}} \leq \underbrace{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}}_{\text{quadratisches Mittel}}$

- Arithmetisches Mittel: $\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{xy}$

Größenverhätnisse

5.3 Bemerkung (Rechenregeln für Ungleichungen)

1. - $f \leq g$ ist äquivalent mit $g \geq f$
   - $f < g$ ist äquivalent mit $g > f$
   - $f \leq g$ ist äquivalent mit $[f < g$ oder $f = g]$
   - $f \neq g$ ist äquivalent mit $[f < g$ oder $f > g]$
2. Sei h ein weiteres Polynom.
   Dann ist $f \leq g$ äquivalent mit $f + h \leq g + h$.
3. $f \leq g$ ist äquivalent mit $-f \geq -g$
4. Gilt $f \leq g$ und $h \geq 0$ so folgt $f \cdot h \leq g \cdot h$
   Gilt $f \leq g$ und $h \leq 0$ so folgt $f \cdot h \geq g \cdot h$
5. Für $0 < f \leq g$ gilt $0 < \frac{1}{g} \leq \frac{1}{f}$

Eine Ungleichung zu lösen bedeutet, alle $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ zu finden, für die die Ungleichung gilt.

5.4 Beispiel

Löse $\left\{ \begin{array}{ll} 3x - 4y \leq 1 & \text{(I)} \\ x + y \geq 2 & \text{(II)} \end{array} \right.$.

Skizze:

Skizze

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(II)':} & -x - y \geq -2 \\ \text{(I)+3(II)':} & -7y \leq 5 \Rightarrow y \geq \frac{5}{7} \\ \hline \text{aus (II):} & x \geq 2 - y \\ \hline \text{aus (I):} & y \leq \frac{1}{3} + \frac{4}{3}y \end{array} \right\} \text{Es folgt: } L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq \tfrac{5}{7} \wedge 2 - y \leq x \leq \tfrac{1}{3} + \tfrac{4}{3}y\right\}$$

5.5 Bemerkung

Ist $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton steigend, (das heißt aus $x \leq y$ folgt $h(x) \leq h(y)$,) so gilt:

$$\text{Aus } f \leq g \text{ folgt } h \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Komposition}}}{\circ} f \leq h \circ g.$$

5.6 Beispiele

- Die Funktion $h : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto \sqrt{x}$ ist monoton steigend.
  Somit folgt aus $0 \leq f \leq g$ die Ungleichung $0 \leq \sqrt{f} \leq \sqrt{g}$.
- Die Abbildung $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)$ ist monoton steigend.
  Aus $0 \leq f \leq g$ die Ungleichung $0 \leq \ln(f) \leq \ln(g)$.

5.7 Beispiel

Löse die Ungleichung $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \geq 0$ in $\mathbb{R}$.

Quadratische Ergänzung:

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$$

<u>Fallunterscheidung!</u>

1. Fall: $x - \frac{1}{4} \geq 0$: Wurzelziehen ist erlaubt.
   ...und liefert: $x - \frac{1}{4}$, also $x \geq 1$.

   Die Lösungsmenge im 1. Fall ist also:
   $L_1 = \left\{x \in \mathbb{R} | x \geq \frac{1}{4} \land x \geq 1\right\} = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$
2. Fall: $x - \frac{1}{4} < 0$, also $\frac{1}{4} - x > 0$
   Die Ungleichung $(\frac{1}{4} - x)^2 \geq \frac{9}{16}$ liefert $\frac{1}{4} - x \geq \frac{3}{4}$, also $x \leq -\frac{1}{2}$

   Anmerkung des Autors: in der Klammer wurde -1 ausgeklammert, da diese beim Quadrieren belanglos ist. Eine (einfachere) Alternative ist 5.9.

   Dies zeigt $L_2 = \left\{x \in \mathbb{R} | x < \frac{1}{4} \land x \leq -\frac{1}{2}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} | x \leq -\frac{1}{2}\right\}$

Insgesamt ergibt sich die Lösungsmenge $L = L_1 \cup L_2 = \left\{x \in \mathbb{R} | x \geq 1 \lor x \leq -\frac{1}{2}\right\}$.

5.8 Definition

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ heißt

$|x| \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$ der **(Absolut-)Betrag** von x.

5.9 Beispiel

Im letzten Beispiel folgt aus $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2$ die Ungleichung $|x - \frac{1}{4}| \geq \frac{3}{4}$

5.10 Beispiel

Löse die Ungleichung $|x+1| + |x-1| \leq 2$.

<u>Fallunterscheidung!</u>

1. Fall: $x < -1$
   Die Ungleichung lautet $-(x+1) - (x-1) \leq 2$ und somit $x \geq -1$.
   Dies liefert $L_1 = \emptyset$
2. Fall: $-1 \leq x < 1$
   Die Ungleichung lautet $(x+1) - (x-1) \leq 2$ und somit $2 \leq 2$.
   Somit folgt $L_2 = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 1\}$
3. Fall: $x \geq 1$
   Die Ungleichung lautet $(x+1) + (x-1) \leq 2$ und somit $x \leq 1$.
   Dies zeigt $L_3 = \{1\}$.

Insgesamt erhalten wir $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 1\}$.

5.11 Dreiecksungleichung

1. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $|x+y| \leq |x| + |y|$ (**Dreiecksungleichung**)
2. Es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die **umgekehrte Dreiecksungleichung**: $\big||x| - |y|\big| \leq |x+y|$

Beweis.

1. Aus $xy \leq |x| \cdot |y| = |xy|$ folgt $x^2 + 2xy + y^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$, also $(x+y)^2 \leq (|x| + |y|)^2$.
   Da $|x+y|, |x|$ und $|y|$ nicht negativ sind, ist Wurzelziehen erlaubt.
2. Nach 1. gilt $|x| \leq |x+y| + |-y| = |(x+y) - y|$
   und somit $|x+y| \geq |x| - |y|$.
   Andererseits gilt, ebenfalls nach 1., die Ungleichung
   $|x+y-x| = |y| \leq |x+y| + |-x| = |x+y| + |x|$
   und somit $|x+y| \geq |y| - |x|$.

   Kombiniert man beide Erkenntnisse, so folgt $|x+y| \geq \big||x| - |y|\big|$.

qed

5.12 Beispiel

Löse $\sqrt{2x-1} < x+1$ für $x \in \mathbb{R}$.

Damit die Wurzel definiert ist, muss gelten $2x-1 \geq 0$, also $x \geq \frac{1}{2}$.
Dann ist die rechte Seite positiv und Quadrieren erlaubt.

Es folgt: $2x-1 < x^2+2x+1$, also $x^2 > -2$.

Insgesamt erhalten wir: $L = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0,5\}$.

5.13 Beispiel

Löse $\sqrt{x^2+1} > x+1$ in $\mathbb{R}$.

1. Fall: $x+1 < 0$.
   In diesem Fall gilt $\sqrt{x^2+1} > 0 > x+1$,
   also $L_1 = \{x \in \mathbb{R} | x < -1\}$.
2. Fall: $x+1 \geq 0$.
   Jetzt ist Quadrieren eine Äquivalenzumformung und es folgt $x^2+1 > x^2+2x+1$, also $x < 0$.
   Dies liefert $L_2 = \{x \in \mathbb{R} | -1 \geq x < 0\}$.

Insegesamt folgt: $L = L_1 \cup L_2 = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$.

6 Ebene Geometrie

Die Grundlage der ebenen Geometrie ist die **Zeichenebene**. Nach der Einführung von rechtwinkligen (kartesischen) Koordinaten ist dies die Menge $\mathbb{R}^2$. Genauer gesagt ist sie der **2-dimensionale affine Raum** über $\mathbb{R}$ und wird mit $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ bezeichnet.
Die Elemente von $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ heißen **Punkte**.
Zu je zwei verschiedenen Punkten in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ gibt es genau eine **Gerade**, die diese enthält.

Notation:

- $A, B, \dots \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ Punkte
- $G = AB$ Gerade durch die Punkte A und B
- $[AB]$ Strecke von A nach B
- $a = \overline{AB}$ Länge der Strecke $[AB]$

6.1 Definition

Seien $A, B, C \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ drei **nicht kollineare** (=nicht auf einer Gerade) Punkte.
Dann heißt die Vereinigung der Strecken $[AB], [BC]$ und $[CA]$ das **Dreieck** mit den **Seiten(längen)** $a = \overline{BC}, b = \overline{AC}, c = \overline{AB}$. Die Punkte A, B, C heißen die **Ecken** des Dreiecks. Skizze

Notation: ΔABC (Nummerierung gegen den Uhrzeigersinn!)

Die Winkel an den Ecken des Dreiecks werden mit $\alpha = \angle BAC, \beta = \angle CBA, \gamma = \angle ACB$ bezeichnet.

6.2 Beispiel (Das gleichseitige Dreieck)

Es gelte: $a = b = c$. Dann heißt ΔABC ein **gleichseitiges Dreieck**. Skizze

6.3 Satz

In einem Dreieck ΔABC gilt $\alpha + \beta + \gamma = 180° = \pi$.

6.4 Definition (Bogenmaß)

Im **Bogenmaß** gilt $180° = \pi, 360° = 2\pi, 90° = \frac{\pi}{2}$ usw.
Es entspricht der Länge des Kreisbogens auf dem Einheitskreis, der diesem Winkel entspricht.

6.5 Beispiel

Im gleichseitigen Dreieck gilt: $\alpha = \beta = \gamma = 60° = \frac{\pi}{3}$.

6.6 Beispiel

Das**gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck** erfüllt $\alpha = \beta = 45°$ und $\gamma = 90°$.
Ein $90°$-Winkel heißt auch **rechter Winkel** und wird auch wie folgt notiert:

Skizze

6.7 Bemerkung

1. Die Winkel an einer Geradengleichung erfüllen Skizze mit $\alpha + \beta = 180°$.
2. Werden zwei **parallele** Geraden (d.h. Geraden, die sich nicht schneiden) von einer dritten Gerade geschnitten, so gilt: Skizze ("Z-Winkelsatz") $\alpha + \beta = 180°$

Skizze, Gänsefüßchen

6.8 Satz

Die Summe der Innenwinkel in einem **konvexen** n-Eck (d.h. die Strecke von einem Punkt des n-Ecks zu einem anderen liegt vollständig im Inneren) beträgt $(n-2) \cdot 180°$.

Beweis. Skizze

Ausgehend von einer Ecke A zeichne die Diagonalen zu den nicht anliegenden Ecken ein. Diese zerlegen das n-Eck in $n-2$ Dreiecke. Aus der Aufteilung der Außenwinkel folgt, dass die Winkelsumme im n-Eck gleich der $n-2$ Dreiecke ist und es folgt die Behauptung. qed

6.9 Beispiel (Das reguläre n-Eck)

Das reguläre n-Eck hat n Ecken, n gleich lange Seiten und n gleich große Innenwinkel.

Skizze

6.10 Definition (Besondere Linien im Dreieck)

1. Fällt man von einer Ecke das Lot auf die gegenüberliegende Gerade, so heißt die entstehende Stecke eine **Höhe** des Dreiecks.
   Notation: h_a, h_b, h_c
2. Verbindet man eine Ecke des Dreiecks mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite, so heißt die entstehende Strecke eine **Seitenhalbierende**.
   Notation: s_a, s_b, s_c
3. Fällt man auf die Mittelpunkte der Seiten einers Dreiecks die Lote, so heißen diese die **Mittelsenkrechten** des Dreiecks.
   Notation: M_a, M_b, M_c
4. Zeichnet man im Dreieck ΔABC jeweils die Geraden ein, die die Winkel α, β, γ halbieren, bezeichet man diese als **Winkelhalbierende**.
   Notation: $W_\alpha, W_\beta, W_\gamma$

Skizzen

6.11 Definition (Kongruente Dreiecke)

1. Zei Teilmengen T_1, T_2 von $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ heißen **kongruent** (oder **deckungsgleich**), wenn sie durch eine **Bewegung** (hier: durch Verschiebungen, Rotationen, Spiegelungen) ineinander überführbar sind. Statt Bewegung sagt man auch oft **Kongruenzabbildung**.
2. Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ heißt **Kongruentabbildung**, wenn wie Längen und Winkel erhält.

6.12 Satz (Die Kongruenzsätze im Dreieck)

Zwei Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ sind kongruent, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. (sss-Satz) Die Seitenlängen sind paarweise gleich.
2. (sws-Satz) Zwei Seitenlängen und der eingeschlossene Winkel sind jeweils gleich.

3. (wsw-Satz) Zwei entsprechende Seitenlängen und die jeweils anliegenden Winkel sind gleich.

6.13 Satz

1. Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Der Schnittpunkt ist der **Umkreismittelpunkt** des Dreiecks.
2. Die Winkelhalbierenden schneiden sich in einem Punkt. Der Schnittpunkt ist der **Innkreismittelpunkt** des Dreiecks.
3. Die drei Seithenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. dieser Punkt ist der **Schwerpunkt** des Dreiecks.
4. Die drei Höhen des Dreiecks schneiden sich in einem Punkt ("**Höhenschnittpunkt**").

Skizze,Gänsefüßchen,Beweis) (

6.14 Satz (Fläche des Dreiecks)

Die Fläche F des Dreiecks ΔABC ist gegeben durch $F = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$. Skizze

Beweis. $F = F_1 + F_2 = \frac{1}{2} \cdot p \cdot h_c + \frac{1}{2} \cdot q \cdot h_c = \frac{1}{2} h_c (p + c) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$ qed

6.15 Beispiel (Rechtwinkliges Dreieck)

Ist in einem Dreieck einer der Innenwinkel gleich 90°, so heißt es ein **rechtwinkliges Dreieck**. Dann heißt $[AB]$ die **Hypotenuse** des Dreiecks und $[BC], [AC]$ heißen die **Katheten** des Dreiecks.
Es gilt: $\alpha + \beta = 90°$.

6.16 Satz (Der Satz des Thales)

Ist M der Mittelpunkt der Hypotenuse und zeichnet man den Kreis um M mit Radius $\frac{c}{2}$, so liegt die Ecke C auf diesem Kreis. Er heißt **Thaleskreis** des Dreiecks.

Umgekehrt gilt: Liegt die Eckt C auf dem Kreis um den Mittelpunkt M von $[AB]$ mit Radius $\frac{c}{2}$, so ist das Dreieck ΔABC rechtwinklig mit $\gamma = 90°$.

Beweise+Skizzen

6.17 Definition (Zentrische Streckung)

Eine **zentrische Streckung (Homothetie)** mit Zentrum Z und Streckungsfaktor $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ist die Abbildung, die jedem Punkt P abbildet auf den Punkt Q auf der Halbgeraden $[ZP$, der von Z (in Richtung P) die Entfernung $\lambda \cdot \overline{ZP}$ besitzt.

Skizze

Zentrische Streckungen sind winkelerhaltend.

6.18 Satz (Der Strahlensatz)

Gegeben seien zwei Geraden, die sich in einem Punkt Z schneiden. Diese Geraden G_1, G_2 werden von zwei parallelen Geraden H_1, H_2 geschnitten. Die Schnittpunkte seien A, A', B, B'.

Skizze

$$\text{Setze} \quad \begin{array}{lll} a = \overline{ZA} & a' = \overline{ZA'} & a'' = \overline{AA'} \\ b = \overline{ZB} & b' = \overline{ZB'} & b'' = \overline{BB'} \\ c = \overline{AB} & c' = \overline{A'B'} & \end{array}$$

1. Strahlensatz
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \text{ und } \frac{a}{a''} = \frac{b}{b''}$$
2. Strahlensatz
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$
3. Umkehrung des 1. Strahlensatz
$$\text{Gilt } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \text{ so folgt } H_1 \parallel H_2.$$

Vorsicht: Die Umkehrung des 2. Strahlensatzes gilt nicht.

Blitz

Beweis.

1. Betrachte die zentrische Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckungsfaktor $\frac{a'}{a}$.
   Bei der zentrischen Streckung wird H_1 in eine parallele Gerade abgebildet, denn würde sich H_1 und ihr Bild in einem Punkt schneiden,

so wäre dieser Punkt ein Fixpunkt ungleich Z der Abbildung, was für $\lambda \neq 1$ nicht geht.
Also wird H_1 auf H_2 abgebildet. Somit wird B auf B' abgebiltet und $\frac{b'}{b} = \lambda = \frac{a'}{a}$.

2. Die Strecke $[AB]$ wird bei der zentrische Streckung auf $[A'B']$ abgebildet, also gilt $\frac{c'}{c} = \lambda = \frac{a'}{a}$.

3. Nach Voraussetzung wird bei der zentrischen Streckung mit $\lambda = \frac{a'}{a}$ sowohl A in A' also auch B in B' überführt. Also wird $[AB]$ in $[A'B']$ überführt und es folgt $A'B' \parallel AB$.

qed

6.19 Definition

Zwei ebene geometrische Figuren heißen **ähnlich**, wenn es eine Kongruenzabbildung und eine anschließende zentrische Streckung gibt, die die eine in die andere überführt.

6.20 Korollar

Sind zwei ebene geometrische Figuren ähnlich, so sind entsprechende Winkel gleich und entsprechende Streckenlängen stehen in einem festen Verhältnis λ.

6.21 Beispiel

Der Schwerpunkt eines Dreiecks teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis $2:1$.

Beweis. Skizze
Zeichne die Parallele zu CM_c durch M_a. Ihr Schnittpunkt mit der Seite $[AB]$ sei P.
Nach dem Strahlensatz gilt: $\frac{\overline{BM_c}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BM_a}} = \frac{2}{1} = \frac{\overline{BS}}{\overline{BQ}}$.
Strahlensatz mit Zentrum A: Die Geraden AM_a und AB werden von zwei paralleln Geraden geschnitten: $\frac{\overline{AM_a}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BM_a}} = \frac{3}{2}$

WTF?!? qed

6.22 Satz (Die Satzgruppe des Pythagoras)

Sei ΔABC ein rechtwinkliges Dreieck mit $\gamma = 90°$.

1. (Satz des Pytagoras, ca. 540 v. Chr.)

$$a^2 + b^2 = c^2$$

2. (Umkehrung des Satzes von Pytagoras)
   Gilt in einem Dreieck ΔABC die Gleichung $a^2+b^2 = c^2$, so ist ΔABC rechtwinklig mit $\gamma = 90°$.
3. (Höhensatz)

$$h^2 = pq, \text{ wobei } h = h_c \text{ und } p, q \textbf{ Hypotenusenabschnitte}.$$

4. (Kathetensatz)

$$a^2 = cq \text{ und } b^2 = cp$$

Skizze

Beweis.

1. Die äußeren Dreiecke sind kongruent.

$$\Rightarrow (a+b)^2 = c^2 + 4(\frac{1}{2}ab) = c^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

2. Konstruiere das rechtwinklige Dreieck $\Delta A'B'C'$ mit den Seitenlängen $a.b.c$ und Katheten a, b.
   Nach 1. gilt: $\tilde{c} = c$. Nach sss-Satz folgt die Behauptung.
3. Nach 1. gilt: $p^2 + h^2 = b^2$ und $q^2 + h^2 = q^2$

$$\Rightarrow p^2 + q^2 + 2h^2 = q^2 + b^2 = c^2 = (p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2 \Rightarrow 2h^2 = 2hq \Rightarrow h^2 = pq$$

4.

$$a^2 = h^2 + q^2 = pq + q^2 = q(p+q) = qc$$
$$b^2 = h^2 + p^2 = pq + p^2 = p(p+q) = pc$$

Skizzen, Beweis 3.?

6.23 Beispiel

Sei ΔABC ein gleichseitiges Dreieck. Skizze

Für die Höhe h gilt dann: $h^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.
Für die Fläche folgt: $F = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

6.24 Beispiel

Sei ΔABC gleichschenklig-rechtwinklig. Skizze

Es gilt: $c^2 = 2a^2 \Rightarrow c = \sqrt{2}a$
und $h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow h^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.
Schließlich folgt: $F = \frac{1}{2}a^2$.

7 Trigonometrie

11 Die komplexen Zahlen

11.1 Definition

1. Wir führen auf $\mathbb{R}^2$ eine Multiplikation ein durch
$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, bc-ad).$$
Wie man leicht nachprüft, erhält man damit einen Körper $\mathbb{C}$. Dieser enthält $\mathbb{R}$ mittels der injektiven Abbildung
$$\iota : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}, a \mapsto (a,0)$$

2. <u>Schreibweisen:</u>
   - Statt $e_1 = (1,0)$ schreibe 1.
   - Statt $e_2 = (0,1)$ schreibe i.

   Jedes Element von $\mathbb{C}$ hat also eine eindeutige Darstellung der Form
$$a + b\cdot i \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

3. Für $z = a+bi \in \mathbb{C}$ heißt $\mathrm{Re}(z) = a$ der **Realteil** von z und $\mathrm{Im}(z) = b$ der **Imaginärteil** von z.

11.2 Bemerkung

1. Die Zahl i erfüllt $i^2 = 1$, denn $(0,1)\cdot(0,1) = (0-1,0) = (-1,0)$. Man schreibt daher auch $i = \sqrt{-1}$.

2. Für $a \in \mathbb{R}_{\geq o}$ gilt:
$$(\sqrt{a}\cdot i)^2 = a\cdot(-1) = -a, \text{ also } \pm\sqrt{a}\cdot i = \sqrt{-a}$$

3. Für $z = a+bi \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ gilt:
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\cdot i$$

11.3 Beispiele

1. Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt: $i^n = \begin{cases} i & \text{falls } n \equiv 1 \quad (mod\ 4) \\ -1 & \text{falls } n \equiv 2 \quad (mod\ 4) \\ -i & \text{falls } n \equiv 3 \quad (mod\ 4) \\ 1 & \text{falls } n \equiv 0 \quad (mod\ 4) \end{cases}.$

2. $(1+i)^2 = 2i$
3. In $\mathbb{C}$ besitzt jede quadratische Gleichung genau 2 Lösungen.

11.4 Definition

Die Abbildung $\kappa : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad a + bi \mapsto a - bi$ heißt die **komplexe Konjugation**.
Für $z \in \mathbb{C}$ schreiben wir statt $\kappa(z)$ auch $\overline{z}$.

Funktion schöner machen

11.5 Bemerkung (Rechenregeln für komplexe Konjugation)

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
4. Für $a \in \mathbb{R}$ gilt: $\overline{a \cdot z} = a \cdot \overline{z}$
5. $\frac{1}{\overline{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$
6. $\overline{z} + z = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$
7. $z - \overline{z} = 2bi = 2\,\mathrm{Im}(z) \cdot i$

7.?

11.6 Bemerkung (Die komplexe Zahlenebene)

Im $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ führen wir kartesische Koordinaten ein und identifizieren die Zahl $z = a + bi \in \mathbb{C}$ mit dem Punkt (a, b).

Skizze

Geometrische Interpretation der Körperoperationen:

1. Addition:

   $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$entspricht der Vektoraddition.

2. Multiplikation mit $i: \qquad (a + bi) \cdot i = -b + ai.$

   Dies entspricht also der Drehung um $90°$ im mathematisch positiven Sinn um den Ursprung.

3. Abstand zum Nullpunkt/Länge des Vektors
   Der **Betrag** einer komplexen Zahl $z = a + bi$ ist $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

   Eigenschaften:

   (a) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

   (b) $|c \cdot z| = |c| \cdot |z|$ für $c \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$

   (c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

4. Der **Winkel** φ (oder das **Argument**) einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $z = a + bi$ und $a, b \in \mathbb{R}$ erfüllt $z = |z| \cdot \cos(\varphi) + |z| \cdot \sin(\varphi) \cdot i$ $(\varphi \in [0, 2\pi[)$.

   Wir schreiben $\varphi = \operatorname{arc}(z)$.

5. Sei $r = |z|$ und $\varphi = \operatorname{arc}(z)$. Dann ist die Multiplikation mit
   $$z = r \cdot \cos(\varphi) + r \cdot \sin(\varphi)i = r\big(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i\ \big)$$
   die Komposition der Multiplikation mit $\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i$ und der Multiplikation mit $r \in \mathbb{R}_+$. Letztere ist die zentrische Streckung um den Faktor r mit Mittelpunkt 0.

   Nun wende die erste Multiplikation an auf $\tilde{z} = \tilde{r} \cdot (\cos(\psi) + \sin(\psi)i)$. Dann gilt:
   $$\begin{gathered}\tilde{z} \cdot \big(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i\big) = \\ \tilde{r}\big(\cos(\psi) + \sin(\psi)i\big)\big(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i\big) = \\ \tilde{r}\Big[\big(\cos(\psi)\cos(\varphi) - \sin(\psi)\sin(\varphi)\big) + \big(\sin(\psi)\cos(\varphi) + \cos(\psi)\sin(\varphi)\big)i\Big] = \\ \tilde{r}\Big[\cos(\psi + \varphi) + \sin(\psi + \varphi)i\Big]\end{gathered}$$
   Das Produkt hat also denselben Betrag, aber der Winkel ist um φ größer. Die Multiplikation mit $\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i$ entspricht also der Drehung um den Winkel φ um den Nullpunkt.

   Insgesamt ist die Multiplikation mit z also eine Drehstreckung mit Zentrum 0.

Skizzen!s

11.7 Bemerkung (Algebraische Beschreibung geometrischer Mengen)

1. (Kreis mit Mittelpunkt $m \in \mathbb{C}$ und Radius $r \in \mathbb{R}_+$)
   Der Abstand von $z \in \mathbb{C}$ zu m ist gegeben durch $|z - m|$.

Der Kreis ist also gegeben durch $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - r| = r\}$.

2. Eine Gerade G durch $z = a + bi$ und $\tilde{z} = c + di$ ist gegeben durch $G = \{z + \lambda(\tilde{z} - z) | \lambda \in \mathbb{R}\}$ (*explizite Darstellung*).

   Implizite Darstellung: $G = \{z \in \mathbb{C} | \overline{e}z + e\overline{z} + g = 0\}$ mit $e \in \mathbb{C},\ g \in \mathbb{R}$.
   Es gilt: $\overline{e}z + e\overline{z} = \overline{e}z + \overline{(ez)} = 2\,\mathrm{Re}(\overline{e}z)$.
   Schreibe: $e = \alpha + \beta i$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.
   Dann folgt:
   $$\mathrm{Re}(\overline{e}z) = \mathrm{Re}\big((\alpha + \beta i)(x + yi)\big) =$$
   $$\mathrm{Re}\big((\alpha x + \beta y) + (-\beta x + \alpha y)i\big) =$$
   $$\alpha x + \beta y.$$
   $$\left(= \left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \right)$$

   Dann folgt:
   $$\overline{e}z + e\overline{z} + \underbrace{g}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{2\alpha x + 2\beta y + g = 0}_{\text{implizite Geradengleichung in } \mathbb{R}^2.} \quad .$$

11.8 Bemerkung (Algebraische Interpretation von Abbildungen der Zeichenebene)

1. (Translation)
   Die Translation τ um den Vektor $a + bi$ ist die Addition
   $$\tau : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z + (a + bi)$$
   .

2. (Drehung)
   Die Drehung um den Winkel φ um den Nullpunkt entspricht der Multiplikation mit $\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i$.

   Sei nun $m \in \mathbb{C}$.

   Die Drehung $\rho m, \varphi$ ist die Komposition von

   (a) Verschiebung um $-m$

   (b) Drehung um 0 um Winkel φ

   (c) Verschiebung um $+m$

   Es gilt also: $\rho_{m,\varphi} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto (\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i)(z - m) + m$.

3. (Spiegelung an einer Geraden durch 0)
   G habe einen Richtungsvektor $a + bi$.
   Die Gerade durch z und $\tilde{z}$ haben dann den Richtungsvektor $-b + ai$.
   Dann ist $G \cap H$ der Lotfußpunkt $l \in \mathbb{C}$ und es gilt:

$$\tilde{z} = \sigma_G(z) = z + 2(l - z) = -z + 2l.$$

Funktionen, Skizzen

11.9 Bemerkung (Geometrische Interpretation von $z \mapsto \overline{z}$)

fett

Die Abbildung $\kappa : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, a + bi \mapsto a - bi$ entspricht der Spiegelung an der $\mathrm{Re}(z)$-Achse. Funktion

11.10 Bemerkung (Inversion am Kreis)

Die Abbildung $\iota : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}, z \mapsto \frac{1}{\overline{z}}$ wirkt auf $z = a + bi = r(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i)$ wie folgt: Funktion

$$\begin{gathered}\iota(z) = \frac{1}{\overline{z}} = \\ \kappa\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\cos(\varphi) - \sin(\varphi)i}{(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i)(\cos(\varphi) - \sin(\varphi)i)}\right) = \\ \frac{1}{r}\kappa(\cos(\varphi) - \sin(\varphi)i) = \\ \frac{1}{r}(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i)\end{gathered}$$

Die Zahl $\iota(z)$ liegt also auf demselben Halbstrahl druch 0 wie z. Ihr Betrag ist $\frac{1}{r}$. skizze

Der Einheitskreis $\mathbb{E} = \{\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i | \varphi \in [0, 2\pi[\}$ bleibt dabei fest.

Es gilt: $\iota^2(z) = \iota(\iota(z)) = z$.

Die geometrische Interpretation von $\frac{1}{z}$ ist also der Punkt, der aus z entsteht, indem man zuerst an der $\mathrm{Re}(x)$-Achse spiegelt und dann die Inversion am Einheitskreis durchführt.

11.11 Satz (Eigentschaften der Inversion am Kreis)

1. Ist G eine Gerade in $\mathbb{C}$, die nicht durch 0 geht, so ist $\iota(G)$ ein Kreis.
2. Ist G eine Gerade durch 0, so gilt $\iota(G\backslash\{0\}) = G\backslash\{0\}$.
3. Ist K ein Kreis in $\mathbb{C}$, der durch 0 geht, so ist $\iota(K\backslash\{0\})$ eine Gerade, die nicht durch 0 geht.
4. Ist K ein Kreis in $\mathbb{C}$, der nicht durch 0 geht, so ist $\iota(K)$ wieder ein Kreis.

11.12 Bemerkung (Die komplexe e-Funktion)

Die reelle e-Funktion $x \mapsto e^x$ erfüllt $(e^x)' = e^x$ und $e^0 = 1$.
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}x^n$$

.

Für $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}z^n \in \mathbb{C}$$

ebenfalls.

Weitere Potenzreihen, die für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergieren, sind:

- $\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - + \ldots$
- $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + - \ldots$

Durch dieselben Potenzreihen erhält man $e^z, \sin(z)$ und $\cos(z)$ auch für alle $z \in \mathbb{C}$.

Man weißt nach, dass $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt.

11.13 Satz (Die Eulersche Formel)

Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt: $e^{i\varphi} = \underbrace{\cos(\varphi) + i \cdot \cos(\varphi)}_{\text{Punkt auf dem Einheitskreis}}$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= 1 + \frac{1}{1!}(i\varphi) + \frac{1}{2!}(i^2\varphi^2) + \frac{1}{3!}(i^3\varphi^3) + \cdots = \\ &= (1 - \frac{1}{2!}\varphi^2 + \frac{1}{4!}\varphi^4 - \frac{1}{6!}\varphi^6 + - \dots) + i(\frac{1}{1!}\varphi - \frac{1}{3!}\varphi^3 + \frac{1}{5!}\varphi^5 - + \dots) = \\ &= \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi \end{aligned}$$

qed

11.14 Korollar

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

11.15 Beispiel

Aus der Eulerschen Formel folgt:

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha + \beta) + i \cdot \sin(\alpha\beta).$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned} e^{i(\alpha+\beta)} &= e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = \\ &= (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))(\cos(\beta) + i\sin(\beta)) = \\ &= [\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha\sin\beta] + i[\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta]. \end{aligned}$$

Durch Vergleich der Real- und Imaginärteile folgen die Additionstheoreme für sin und cos.

12 Kombinatorik

Kombinatorik ist die Kunst des Zählens.

12.1 Definition

Seien $a_1, \ldots, a_n$ paarweise verschiedene Objekte ($n \geq 1$).

1. Eine Anordnung $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$ mit $\{i_i, \ldots, i_n\} = \{1, \ldots, n\}$ heißt auch **Permutation** von $a_1, \ldots, a_n$.

   Schreibweisen:

   $$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_n} \end{pmatrix} \text{ oder einfach } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}.$$

   Ohne Einschränkung betrachten wir also meißt die Permutationen der Menge $\{1, \ldots, n\}$.

2. Die Menge aller Permutationen von n Objekten heißt die **symmetrische Gruppe $\mathbf{S_n}$**.

12.2 Satz: Die Gruppe S_n hat $n!$ Elemente.

Beweis. Halte ein Element, zB a_n fest. Für die Bilder $\sigma(a_1)$ unter $\sigma \in S_n$ gibt es n Möglichkeiten, für $\sigma(a_2)$ gibt es dann noch $n-1$ Möglichkeiten usw.
Am Ende gibt es für $\sigma(a_n)$ nur noch 1 Auswahl. Insgesamt gibt es $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ Permutationen.

qed

12.3 Beispiel: Wir ordnen Permutationen

Dieser Punkt wurde während der Ausführung gestrichen, da der Kentnissstand der Studierenden in Lineare Algebra nicht ausreichend war.

12.4 Definition

Gegeben seien n paarweise verschiedene Objekte $a_1, \ldots, a_n$.

1. Sei $0 \leq m \leq n$. Eine Teilmenge von $\{a_1, \ldots, a_n\}$ bestehend aus m Elementen heißt auch **Auswahl** von m Elementen.

2. Die Anzahl der Auswahlen von m Elementen aus $\{a_1, \ldots, a_n\}$ heißt der **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{m}$.

12.5 Satz (Formel für die Binomialkoeffizienten)

Für $n \geq 1$ und $0 \leq m \leq n$ gilt: $\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m+n))}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ (mit $0! = 1$).

12.6 Bemerkung (Das Pascalsche Dreieck)

1. Die Binomialkoeffizienten erfüllen die Formel

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} \text{ für } m \geq 1, n \geq 2.$$

2. Die Biomialkoeffizienten sind gegeben durch das **Pascalsche Dreieck**:

n=1					1		1					(m=0,1)
n=2				1		2		1				(m=0,1,2)
n=3			1		3		3		1			(m=0,...,3)
n=4		1		4		6		4		1		(m=0,...,4)
n=5	1		5		10		10		5		1	(m=0,...,5)

etc.