

Mitschrift zum

# Basiskurs Mathematik

bei Prof. Kreuzer im WS 16/17

<b>author</b>	Maximilian Reif < <a href="mailto:reifmaxi@fim.uni-passau.de">reifmaxi@fim.uni-passau.de</a> >
<b>last change</b>	March 4, 2017, version 0.6.0
<b>github</b>	<a href="http://www.github.com/lordreif">www.github.com/lordreif</a>

# Contents

<b>1</b>	<b>Rechnen mit ganzen Zahlen</b>	<b>4</b>
1.1	Zahlensysteme . . . . .	4
1.2	Beispiele . . . . .	4
1.3	Division mit Rest . . . . .	4
1.4	Beispiele . . . . .	5
1.5	Vielfaches, Teiler, Primzahl . . . . .	5
1.6	Beispiele . . . . .	5
1.7	Fundamentalsatz der Arithmetik . . . . .	5
1.8	Beispiele . . . . .	5
1.9	ggT, kgV . . . . .	6
1.10	ggT/kgV durch Primfaktorenzerlegung . . . . .	6
1.11	Beispiele . . . . .	6
1.12	Teilbarkeitsregeln . . . . .	6
1.13	Beispiele . . . . .	7
1.14	Geschicktes Rechnen . . . . .	7
1.15	Rekursive Definition von ggT und kgV . . . . .	7
1.16	Unendlichkeitssatz der Primzahlen . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Rechnen mit Brüchen und Reellen Zahlen</b>	<b>9</b>
2.1	Rechenregeln für Brüche . . . . .	9
2.2	Beispiele . . . . .	10
2.3	Potenzen . . . . .	10
2.4	Beispiele . . . . .	10
2.5	Rechenregeln für Potenzen . . . . .	10
2.6	Wurzeln . . . . .	11
2.7	Beispiele . . . . .	11
2.8	Irrationalitätsbeweis von $\sqrt{2}$ nach Euklid . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Rechnen mit Buchstaben</b>	<b>12</b>
3.1	Definition Term/Koeffizient/Monom/Polynom . . . . .	12
3.2	Rechenregeln für Polynome . . . . .	12
3.3	Beispiele und Formeln . . . . .	13
3.4	Rechenregeln für symbolische Berechnungen . . . . .	13
3.5	Der Grad . . . . .	14
3.6	Beispiele . . . . .	14
3.7	Rationale Funktion . . . . .	14
3.8	Bemerkung . . . . .	14
3.9	Beispiele . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Lineare und Quadratische Gleichungen</b>	<b>15</b>
4.1	Lineare Gleichungen . . . . .	15
4.2	Bemerkung . . . . .	15

4.3	Quadratische Gleichungen . . . . .	15
4.4	Lösen einer quadratischen Gleichung über $\mathbb{R}/\mathbb{C}$ . . . . .	15
4.5	Satz von Vieta . . . . .	16
4.6	Beispiele . . . . .	16
4.7	Substitution . . . . .	16
4.8	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	16
4.9	Beispiel . . . . .	17
4.10	Schnittpunkt von zwei Kreisen . . . . .	17
4.11	Aufgabe . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Ungleichungen</b>	<b>19</b>
5.1	Definition . . . . .	19
5.2	Beispiele . . . . .	19
5.3	Rechenregeln für Ungleichungen . . . . .	20
5.4	Beispiel . . . . .	20
5.5	Bemerkung . . . . .	20
5.6	Beispiele . . . . .	21
5.7	Beispiel . . . . .	21
5.8	Betrag . . . . .	21
5.9	Beispiel . . . . .	22
5.10	Betragsungleichungen . . . . .	22
5.11	Dreiecksungleichung . . . . .	22
5.12	Beispiel . . . . .	23
5.13	Beispiel . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Ebene Geometrie</b>	<b>24</b>
<b>12</b>	<b>Kombinatorik</b>	<b>25</b>
12.1	Definition . . . . .	25
12.2	Satz: Die Gruppe $S_n$ hat $n!$ Elemente. . . . .	25
12.3	Beispiel . . . . .	25
12.4	Definition . . . . .	25
12.5	Formel für die Binomialkoeffizienten . . . . .	26
12.6	Das Pascalsche Dreieck . . . . .	26

# 1 Rechnen mit ganzen Zahlen

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  Menge der **natürlichen Zahlen**

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$  Menge der **ganzen Zahlen**

## 1.1 Satz (Zahlensysteme)

Sei  $b \in \mathbb{N}$  mit  $b \geq 2$ . (Die Zahl  $b$  heißt **Basis** des Zahlensystems)

Dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  eindeutig bestimmte Elemente  $a_0, a_1, \dots, a_k \in \{0, 1, \dots, b-1\}$  sodass gilt:

$$n = a_0 + a_1 \cdot b + a_2 \cdot b^2 + \dots + a_k \cdot b^k.$$

Die Zahlen  $a_0, \dots, a_k$  heißen **Ziffern** von  $n$  in der Darstellung zur Basis  $b$ .

Schreibweise:  $n_{[b]} = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$  (fehlt  $[b]$  so ist  $[10]$  gemeint)

## 1.2 Beispiele

- Binärsystem,  $b = 2$

$$5_{[10]} = 101_{[2]}$$

$$101_{[10]} = 64_{[10]} + 32_{[10]} + 4_{[10]} + 1_{[10]} = 1100101_{[2]}$$

- Hexadezimalsystem,  $b = 16$

$$\text{Notation: } 10_{[10]} = A_{[16]}, 11_{[10]} = B_{[16]}, \dots, 15_{[10]} = F_{[16]}$$

$$101_{[10]} = 5 \cdot 16 + 5 = 55_{[16]}$$

$$1B3_{[16]} = 256_{[10]} + 11_{[10]} \cdot 16_{[10]} + 3_{[10]} = 435_{[10]}$$

## 1.3 Satz (Division mit Rest)

Sei  $n \in \mathbb{Z}$  und  $m \in \mathbb{N}_+$ .

Dann gibt es eine eindeutige Darstellung  $n = q \cdot m + r$  mit  $q \in \mathbb{Z}$  (genannt **Quotient**) und  $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$  (genannt **Rest**).

$$\text{Schreibweise: } n \equiv r \pmod{m}$$

$\uparrow$   
"ist kongruent"

## 1.4 Beispiele

- Die Zahl  $n = 87$  soll durch  $m = 5$  geteilt werden:

$$n = q \cdot m + r = 17 \cdot 5 + 2$$

- Die möglichen Reste bei der Division einer Quadratzahl durch 12 sind:

$n \pmod{12}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n^2 \pmod{12}$	0	1	4	9	4	1	0	1	4	9	4	1

## 1.5 Definition (Vielfaches, Teiler, Primzahl)

1. Ist der Rest bei der Division von  $n$  durch  $m$  gleich Null, so heißt  $n$  ein **Vielfaches** von  $m$  und  $m$  ein **Teiler** von  $n$ .
2. Eine Zahl  $n \geq 2$  heißt eine **Primzahl**, wenn sie nur zwei positive Teiler 1 und  $n$  besitzt.

## 1.6 Beispiele

- Die Teiler von 12 sind 1, 2, 3, 4, 6, 12.
- Die ersten Primzahlen sind 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

## 1.7 Satz (Fundamentalsatz der Arithmetik)

Sei  $n \in \mathbb{N}_+$ . Dann gibt es eine (bis auf die Reihenfolge) eindeutige Darstellung

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$$

mit paarweise verschiedenen Primzahlen  $p_1, \dots, p_k$  und  $\alpha_i \in \mathbb{N}_+$ . Diese Darstellung heißt **Primfaktorzerlegung** von  $n$ .

## 1.8 Beispiele

- $24 = 2^3 \cdot 3$
- $111 = 3 \cdot 37$

- $1011 = 7 \cdot 11 \cdot 13$
- $1024 = 2^{10}$
- $729 = 3^6$
- $625 = 5^4$

## 1.9 Definition (ggT, kgV)

Seien  $a, b \in \mathbb{N}_+$ .

1. Die größte positive ganze Zahl  $g \in \mathbb{N}_+$  mit  $g|a$  und  $g|b$  heißt der **größte gemeinsame Teiler (ggT)** von  $a$  und  $b$ .
2. Die kleinste positive ganze Zahl  $k \in \mathbb{N}_+$  mit  $a|k$  und  $b|k$  heißt das **kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)** von  $a$  und  $b$ .

## 1.10 Satz (ggT/kgV durch Primfaktorenzerlegung)

Sei  $a, b \in \mathbb{N}_+$  mit Primfaktorzerlegungen  $a = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$  und  $b = p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}$  mit  $\alpha_i, \beta_i \geq 0$ . Dann gilt:

1.  $ggT(a, b) = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\gamma_k}$  mit  $\gamma_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$
2.  $kgV(a, b) = p_1^{\delta_1} \cdot p_2^{\delta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\delta_k}$  mit  $\delta_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$

## 1.11 Beispiele

- $ggT(30, 75) = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 15$ ,  
denn  $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$  und  $75 = 3 \cdot 5^2$
- $ggT(64, 81) = 1$ ,  
denn  $64 = 2^6$ ,  $81 = 3^4$

## 1.12 Bemerkung (Teilbarkeitsregeln)

1.  $2|n$  genau dann, wenn die Endziffer von  $n$  in  $\{0, 2, 4, 6, 8\}$  ist.
2.  $3|n$  genau dann, wenn die Quersumme( $Qs$ ) von  $n$  durch 3 teilbar ist.
3.  $4|n$  genau dann, wenn  $4|(10a_1 + a_0)$ .
4.  $5|n$  genau dann, wenn  $a_0 \in \{0, 5\}$  gilt.
5.  $6|n$  genau dann, wenn  $2|n$  und  $3|n$ .

6.  $8|n$  genau dann, wenn  $8|(100a_2 + 10a_1 + a_0)$ .
7.  $9|n$  genau dann, wenn  $9|Qs(n)$ .
8.  $10|n$  genau dann, wenn  $a_0 = 0$  gilt.
9.  $11|n$  genau dann, wenn  $11|(a_0 - a_1 + a_2 - + \cdots \pm a_k)$ .
10.  $12|n$  genau dann, wenn  $3|n$  und  $4|n$ .

### 1.13 Beispiele

- $9|123453$
- $11|1232$

### 1.14 Bemerkung (Geschicktes Rechnen)

1. Dritte binomische Formel:  $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$  plus Quadratzahlen
  - $13 \cdot 17 = 15^2 - 2^2 = 225 - 4 = 221$
  - $23 \cdot 25 = 576 - 1 = 575$
  - $27 \cdot 33 = 900 - 9 = 891$
2. Multiplikation durch Umsortierung der Primfaktoren
  - $8 \cdot 375 = 8 \cdot 3 \cdot 125 = 10^3 \cdot 3 = 3000$
  - $40 \cdot 75 = 4 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 25 = 3000$
3. Quadrieren mittels erster binomischer Formel:  $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ 
  - $43^2 = 40^2 + 2 \cdot 3 \cdot 40 + 9 = 1600 + 240 + 9 = 1849$
  - $98^2 \cdot (100 - 2)^2 = 10000 - 400 + 4 = 9604$

### 1.15 Definition (Rekursive Definition von ggT und kgV)

Für  $n \geq 2$  und  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}_+$  gilt:

- $ggT(a_1, a_2, \dots, a_n) = ggT(ggT(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n)$
- $kgV(a_1, a_2, \dots, a_n) = kgV(kgV(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n)$

### 1.16 Satz: Es gibt unendlich viele Primzahlen

BEWEIS. Angenommen es gibt nur endlich viele Primzahlen  $p_1, p_2, \dots, p_k$ . Dann betrachte die Primfaktorenzerlegung von  $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$ . Die Zahlen  $p_1, p_2, \dots, p_k$  teilen  $n$  nicht, sondern lassen den Rest 1. Also sind  $p_1, p_2, \dots, p_k$  nicht alle Primzahlen.

blitz, qed



## 2 Rechnen mit Brüchen und Reellen Zahlen

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}_+\}$  Menge der **rationalen Zahlen**

### 2.1 Bemerkung (Rechenregeln für Brüche)

Für alle  $a, c \in \mathbb{Z}$  und  $b, d \in \mathbb{N}_+$  gilt:

1. (Gleichheit von Brüchen)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ genau dann wenn } ad = bc$$

Beispiel:  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Kürzen von Brüchen:

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_+$$

2. (Addition/Subtraktion von Brüchen)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} = \frac{a \cdot \tilde{b} + c \cdot \tilde{d}}{kgV(b, d)}$$

mit  $\tilde{b} = \frac{kgV(b, d)}{b}$  und  $\tilde{d} = \frac{kgV(b, d)}{d}$ .

Beispiele:  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{7}{30} + \frac{11}{45} = \frac{22}{90} + \frac{22}{90} = \frac{43}{90}$

3. (Multiplikation von Brüchen)

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

4. (Division von Brüchen/Doppelbrüche) Sei nun  $c \neq 0$ . Dann gilt:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

5. (Kehrwert eines Bruchs)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \text{ falls } a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

## 2.2 Beispiele

1. Für  $n \geq 1$  gilt

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{m-1} = \frac{m+1}{m(m+1)} - \frac{m}{m(m+1)} = \frac{1}{m(m+1)},$$

also zB  $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ .

2.
  - $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
  - $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$
  - $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$
  - $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$

## 2.3 Definition (Potenzen)

1. Sei  $a \in \mathbb{R}$ . Dann definiere  $a^0 = 1, a^1 = a, a^2 = a^1 \cdot a = a \cdot a$  etc.  
Für  $n \geq 1$  sei also  $a^n = a^{n-1} \cdot a = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}$ .

Die Zahl  $a^n$  heißt die  $n$ -te Potenz von  $a$ .

2. Sei  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a \neq 0$ . Für  $n = -k$  mit  $k \geq 1$  setze  $a^n = a^{-k} = \frac{1}{a^k}$ .

## 2.4 Beispiele

- $343 = 7^3 x$
- $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$
- $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$
- $3^6 = 9^3 = 729$

## 2.5 Bemerkung (Rechenregeln für Potenzen)

Für  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $k, l \in \mathbb{Z}$  gilt:

1.  $a^k \cdot b^k = (ab)^k$
2.  $a^k \cdot a^l = a^{k+l}$
3.  $(a^k)^l = a^{kl}$
4.  $\frac{a^k}{a^l} = a^{k-l}$  falls  $a \neq 0$

5.  $\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}$  falls  $b \neq 0$

## 2.6 Definition (Wurzeln)

1. Sei  $a \in \mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} | a > 0\}$  und  $k \in \mathbb{N}_+$ .

Dann gibt es genau ein  $b \in \mathbb{R}_+$  mit  $b^k = a$ . Diese Zahl  $b$  heißt die  $k$ -te Wurzel von  $a$  und wird mit  $b = \sqrt[k]{a}$  bezeichnet.

Im Fall  $k = 2$  schreiben wir auch einfach  $b = \sqrt{a}$ . ("Quadratwurzel")

Gänsefüßchen

2. Für  $a \in \mathbb{R}_+$  und  $m, n \in \mathbb{N}_+$  setzen wir  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ . Insbesondere sei also  $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$ .

Mit dieser Definition gelten die Rechenregeln für Potenzen auch für rationale Exponenten. Insbesondere sei  $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$ .

## 2.7 Beispiele

- $\sqrt[3]{24} = \sqrt{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 2 \cdot \sqrt[3]{3}$
- $\sqrt[3]{216} = 6$
- $\sqrt{484} = 22$
- $\sqrt{\frac{36}{121}} = \frac{6}{11}$
- $\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{2}$

## 2.8 Satz (Euklid)

BEHAUPTUNG.  $\sqrt{2}$  ist keine rationale Zahl.

BEWEIS. Angenommen  $\sqrt{2}$  wäre rational.

Dann gäbe es  $a, b \in \mathbb{N}_+$  mit  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ .

Durch Kürzen können wir annehmen, dass  $\text{ggT}(a, b) = 1$

Blitz, qed

Durch Quadrieren folgt  $2 = \frac{a^2}{b^2}$ , also  $2b^2 = a^2$ .

Da  $a^2$  gerade ist, muss auch  $a$  gerade sein, das heißt  $\exists c \in \mathbb{N}_+$  mit  $a = 2c$ .

Einsetzen liefert  $2b^2 = (2c)^2 \Leftrightarrow b^2 = 2c^2$ .

Somit muss auch  $b$  gerade sein. BLITZ zu  $\text{ggT}(a, b) = 1$ .

### 3 Rechnen mit Buchstaben

Seien  $a, b, c, \dots$  Buchstabensymbole.

FRAGE. Was ist  $(x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c) \cdot \dots \cdot (x - z)$ ?

HINWEIS. Betrachte den 24. Faktor!

#### 3.1 Definition

1. Ein Produkt der Form  $(a^{n_a} \cdot b^{n_b} \cdot c^{n_c} \dots)$  mit  $n_a, n_b, n_c, \dots \in \mathbb{N}$  heißt **Term**.  
Beachte:  $a^2bc = caba = acab$  etc. (Kommutativgesetz)
2. Ein Ausdruck der Form  $c \cdot t$  mit einem **Koeffizienten**  $c \in \mathbb{R}$  und einem Term  $t$  heißt **Monom**.
3. Eine endliche Summe von Monomen heißt **Polynom**.

#### 3.2 Bemerkung (Rechenregeln für Polynome)

Seien  $f, g, h, \dots$  Polynome.

1. Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} f \cdot (g + h) &= f \cdot g + f \cdot h \text{ (bedeutet } (f \cdot g) + (f \cdot h) \text{ "Punkt vor Strich")} \\ (f + g) \cdot h &= f \cdot h + g \cdot h \end{aligned}$$

2. Kommutativgesetz:

$$f \cdot g = g \cdot f, \quad f + g = g + f$$

3. Assoziativgesetz:

$$(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h), \quad (f + g) + h = f + (g + h)$$

Die Klammern können auch ganz weggelassen werden.

4. Prioritätsregel: Exponent vor Punkt vor Strich!

$$f^2g + h = ((f \cdot f) \cdot g) + h$$

### 3.3 Beispiele

1. (Erste binomische Formel)

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. (Zweite binomische Formel)

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3. (Dritte binomische Formel)

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

4. (Teleskopsumme)

$$1 - a^{n+1} = (1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n) \cdot (1 - a)$$

5.  $1 + a^n = (1 - a + a^2 - a^3 + \dots + a^{n-3} - a^{n-2} + a^{n-1}) \cdot (1 + a)$  falls  $n$  ungerade

6.  $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

7.  $a^n + b^n = (a + b) \cdot (a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1})$  falls  $n$  ungerade

8.  $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$

### 3.4 Bemerkung (Rechenregeln für symbolische Berechnungen)

- 1.

$$(-1)(-1) = 1$$

$$(-1)(+1) = -1$$

$$(-x)(-y) = xy$$

2. (Ausklammern)

Man kann die Distributivgesetze oft "andersherum" anwenden:

$$ab + a + b + 1 = a \cdot (b + 1) + (b + 1) = (a + 1)(b + 1)$$

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2) \quad (\text{Vieta})$$

### 3.5 Definition

1. Ist  $t = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$  ein Term, so heißt  $\deg(t) = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  der **Grad** von  $t$ .
2. Ist  $f = c_1 t_1 + \dots + c_s t_s$  ein Polynom mit  $c_1 \neq 0, \dots, c_s \neq 0$  so heißt  $\deg(f) = \max\{\deg(t_1), \dots, \deg(t_s)\}$  der **Grad** von  $f$ .
3. Ist  $f = c_1 t_1 + \dots + c_s t_s$  ein Polynom mit  $c_1 \neq 0, \dots, c_s \neq 0$  und gilt  $\deg(t_1) = \dots = \deg(t_s)$ , so heißt  $f$  ein **homogenes Polynom**.

### 3.6 Beispiele

- Das Polynom  $f = x^3 + y^3$  ist homogen vom Grad 3.
- Das Polynom  $p = x^4 + 4y^4$  ist homogen vom Grad 4.

### 3.7 Definition

Seien  $f, g$  Polynome mit  $g \neq 0$ . Dann heißt  $\frac{f}{g}$  eine **rationale Funktion**.

### 3.8 Bemerkung

Man kann mit rationalen Funktionen entsprechend der Bruchregeln rechnen.

### 3.9 Beispiele

- $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)-(x-1)}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-1}$
- $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{x^2-y^2}{xy}$
- $\frac{x^2-y^2}{x+y} = \frac{(x-y)(x+y)}{x+y} = x - y$

## 4 Lineare und Quadratische Gleichungen

### 4.1 Definition

Eine Gleichung der Form  $ax + b = 0$  mit Zahlen  $a, b$  und  $a \neq 0$  heißt eine **lineare Gleichung** mit einer Unbestimmten.

### 4.2 Bemerkung

Die Lösung einer Gleichung  $ax + b = 0$  ist  $x_1 = -\frac{b}{a}$  (falls  $a \neq 0$ ).  
Die Menge  $L = \{-\frac{b}{a}\}$  heißt die **Lösungsmenge** der Gleichung.  
(Wenn  $\frac{1}{a}$  nicht definiert ist, so gilt  $L = \emptyset$ .)

### 4.3 Definition

Seien  $a, b, c$  Zahlen mit  $a \neq 0$ . Dann heißt  $ax^2 + bx + c = 0$  eine **quadratische Gleichung** mit einer Unbestimmten.

### 4.4 Bemerkung (Lösen einer quadratischen Gleichung über $\mathbb{R}/\mathbb{C}$ )

R/Q fett

1. Schritt: Wegen  $a \neq 0$  kann man durch  $a$  teilen und erhält:  
 $x^2 + px + q = 0$  mit  $p = \frac{b}{a}, q = \frac{c}{a}$

2. Schritt: (quadratische Ergänzung)  
 $(x + \frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0$

3. Schritt: (Wurzel ziehen)  
 $(x + \frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4} - q = \frac{p^2 - 4q}{4}$   
Ist  $p^2 - 4q < 0$ , so gibt es in  $\mathbb{R}$  keine Lösung.  
Ansonsten:  $x + \frac{p}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q}$

Die Lösungen sind also

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q} \text{ und } x_2 = -\frac{p}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q}$$

Die Zahl  $\Delta = p^2 - 4q$  heißt die **Diskriminante** der Gleichung.

## 4.5 Satz (Vieta)

Seien  $x_1, x_2$  die Lösungen einer quadratischen Gleichung  $x^2 + px + q = 0$ .  
Dann gilt:  $x_1 + x_2 = -p$  und  $x_1 \cdot x_2 = q$ .

BEWEIS. Sind  $x_1, x_2$  die Lösungen, so gilt:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \text{ und somit } x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = 0, \\ \text{also } x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1x_2) = 0.$$

ANWENDUNG: Um  $x^2 + px + q = 0$  zu lösen, finde zwei Zahlen mit Summe  $-p$  und Produkt  $q$ .

centering,  
qed

## 4.6 Beispiele

- $x^2 - 3x + 2 = 0$  hat die Lösungen  $x_1 = 1$  und  $x_2 = 2$ .
- $x^2 - 4x + 3, L = \{1, 3\}$
- $x^2 + 3x + 2, L = \{-1, -2\}$
- $x^2 + x - 2, L = \{1, -2\}$

## 4.7 Bemerkung (Substitution)

Manchmal kann man eine Gleichung durch eine geschickte **Substitution** lösen.

- Löse  $x^4 - 7x^2 + 10$  in  $\mathbb{R}$ . Setze  $y = x^2$ .  
Erhalte  $y^2 - 7y + 10 = 0$  mit  $L = \{3, 4\}$  und somit  $x_{1/2} = \pm\sqrt{3}, x_{3/4} = \pm 2$ .
- Löse  $x - 18\sqrt{x} + 17 = 0$  in  $\mathbb{R}$ . Setze  $y = \sqrt{x}$ .  
Erhalte  $y^2 - 18y + 17 = 0$  mit  $L = \{1, 17\}$ , also  $\sqrt{x} = 1$  und  $\sqrt{x} = 17$ .  
Somit sind  $x_1 = 1$  und  $x_2 = 289$ .

## 4.8 Bemerkung (Lineares Gleichungssystem)

Gegeben seien Zahlen  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$  mit  $a_1b_1 - a_2b_2 \neq 0$ .

Dann heißt  $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$  ein **lineares Gleichungssystem** mit zwei Unbestimmten  $x, y$ .



1. Lösungsmethode "Einsetzen"

Ist  $a_1 \neq 0$ , so wird  $x = -\frac{b_1}{a_1}y - \frac{c_1}{a_1}$ . Setze dies in die zweite Gleichung ein und erhalte  $a_2 \left(-\frac{b_1}{a_1}y - \frac{c_1}{a_1}\right) + b_2y + c = 0$ . Löse diese lineare Gleichung und erhalte  $y_1$ . Dann gilt  $x_1 = -\frac{b_1}{a_2}y_1 - \frac{c_1}{a_1}$ .  $L = \{(x_1, y_1)\}$ .

Sonderfall:  $y$  hebt sich in der ersetzten Gleichung auf:

$$a_2 \cdot \left(-\frac{b_1}{a_1}\right) + b_2 = 0, \text{ also } \frac{-a_2b_1 + a_1b_2}{a_1} = 0 \text{ und somit } a_1b_2 - a_2c_1 = 0.$$

In diesem Fall lautet die ersetzte Gleichung:

$$a_2 \left(-\frac{c_1}{a_1}\right) + c_2 = 0, \text{ also } \frac{-a_2c_1 + a_1c_2}{a_1} = 0 \text{ und somit } a_1c_2 - a_2c_1 = 0$$

Es gibt zwei Möglichkeiten:

(a)  $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0 \Rightarrow L = \emptyset$

(b)  $a_1c_2 - a_2c_1 = 0 \Rightarrow y$  beliebig,  $x = -\frac{b_1}{a_1}y - \frac{c_1}{a_1}$

$$\text{Somit gilt: } L = \left\{ \left( -\frac{b_1}{a_1} \cdot \lambda - \frac{c_1}{a_1}, \lambda \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

2. Lösungsmethode "Inderreduzieren", "Gauß-Verfahren"

Ziel: Bilde Linearkombinationen der beiden Gleichungen, in denen nur eine der beiden Unbestimmten vorkommt.

Gänsefüßchen

## 4.9 Beispiel

$$\text{Löse } \begin{cases} 2x + 5y = 9 & \text{(I)} \\ 3x - 4y = 2 & \text{(II)} \end{cases}$$

$$3 \cdot \text{(I)} - 2 \cdot \text{(II)}: 15y + 8y = 27 - 4 \text{ liefert } y = 1.$$

$$\text{Einsetzen von } y = 1 \text{ in (II) ergibt } 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow L = \{(2, 1)\}.$$

## 4.10 Beispiel (Schnittpunkt von zwei Kreisen)

$$\text{Zwei Kreise seien gegeben durch: } \left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 &= 0 \\ (x+1)^2 + (y-3)^2 &= 9 \end{aligned} \right\} K_1$$

.

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0 \quad K_2$$

$$\text{Gleichung } K_1 - K_2: 6x - 2y + 6 = 0, \text{ also } y = 3x + 3.$$

$$\text{Setze dies in } K_1 \text{ (oder } K_2 \text{) ein: } x^2 + (3x+3)^2 + 2x - 6 \cdot (3x+1) + 1 = 0.$$

Liefert:  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = \frac{4}{5}$ , also  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = \frac{27}{5} \Rightarrow L = \left\{(-1, 0), \left(\frac{4}{5}, \frac{27}{5}\right)\right\}$

#### **4.11 Aufgabe (Aus einem alten chinesischem Rechenbuch)**

In einem Stall sind Hühner und Schweine.

Es sind 40 Tiere. Zusammen haben sie 70 Füße.

Wie viele Tiere von jeder Sorte sind es?

## 5 Ungleichungen

Seien  $f, g$  Polynome in Unbestimmten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (oder  $x, y, z$ ) mit Koeffizienten aus  $\mathbb{R}$ .

### 5.1 Definition

Es gibt 5 Typen von Ungleichungen:

1.  $f \leq g$
2.  $f \geq g$
3.  $f < g$
4.  $f > g$
5.  $f \neq g$

Interpretation:  $f \leq g$  bedeutet, dass die Ungleichung gelten soll, wenn man für  $x_1, \dots, x_n$  Zahlen (aus einem Definitionsbereich  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ) einsetzt.

### 5.2 Beispiele

- Für  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  $x^2 \geq 0$ .
- Für  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:  $x^2 + y^2 \geq 2xy$

BEWEIS.

$$\begin{aligned}(x - y)^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 &\geq 2xy\end{aligned}$$

FOLGERUNG: Für  $x, y \geq 0$  gilt:

$$\underbrace{\sqrt{xy}}_{\text{geometrisches Mittel}} \leq \underbrace{\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}}_{\text{quadratisches Mittel}}$$

- Arithmetisches Mittel:  $\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{xy}$

Größenverhältnisse

### 5.3 Bemerkung (Rechenregeln für Ungleichungen)

1.
  - $f \leq g$  ist äquivalent mit  $g \geq f$
  - $f < g$  ist äquivalent mit  $g > f$
  - $f \leq g$  ist äquivalent mit  $[f < g \text{ oder } f = g]$
  - $f \neq g$  ist äquivalent mit  $[f < g \text{ oder } f > g]$
2. Sei  $h$  ein weiteres Polynom.  
Dann ist  $f \leq g$  äquivalent mit  $f + h \leq g + h$ .
3.  $f \leq g$  ist äquivalent mit  $-f \geq -g$
4. Gilt  $f \leq g$  und  $h \geq 0$  so folgt  $f \cdot h \leq g \cdot h$   
Gilt  $f \leq g$  und  $h \leq 0$  so folgt  $f \cdot h \geq g \cdot h$
5. Für  $0 < f \leq g$  gilt  $0 < \frac{1}{g} \leq \frac{1}{f}$

Eine Ungleichung zu lösen bedeutet, alle  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  zu finden, für die die Ungleichung gilt.

### 5.4 Beispiel

$$\text{Löse } \begin{cases} 3x - 4y \leq 1 & \text{(I)} \\ x + y \geq 2 & \text{(II)} \end{cases}.$$

Skizze:

Skizze

$$\left. \begin{array}{l} \text{(II)'}: \quad -x - y \geq -2 \\ \text{(I)} + 3 \text{(II)'}: \quad -7y \leq 5 \Rightarrow y \geq \frac{5}{7} \\ \hline \text{aus (II)}: \quad x \geq 2 - y \\ \text{aus (I)}: \quad y \leq \frac{1}{3} + \frac{4}{3}y \end{array} \right\} \text{Es folgt: } L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq \frac{5}{7} \wedge 2 - y \leq x \leq \frac{1}{3} + \frac{4}{3}y\}$$

### 5.5 Bemerkung

Ist  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monoton steigend, (das heißt aus  $x \leq y$  folgt  $h(x) \leq h(y)$ ), so gilt:

$$\text{Aus } f \leq g \text{ folgt } h \circ f \leq h \circ g.$$

$\uparrow$   
 Komposition

## 5.6 Beispiele

- Die Funktion  $h : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, x \mapsto \sqrt{x}$  ist monoton steigend.  
Somit folgt aus  $0 \leq f \leq g$  die Ungleichung  $0 \leq \sqrt{f} \leq \sqrt{g}$ .
- Die Abbildung  $\ln : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)$  ist monoton steigend.  
Aus  $0 \leq f \leq g$  die Ungleichung  $0 \leq \ln(f) \leq \ln(g)$ .

## 5.7 Beispiel

Löse die Ungleichung  $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \geq 0$  in  $\mathbb{R}$ .

Quadratische Ergänzung:

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$$

Fallunterscheidung!

1. Fall:  $x - \frac{1}{4} \geq 0$ : Wurzelziehen ist erlaubt.  
...und liefert:  $x - \frac{1}{4}$ , also  $x \geq 1$ .

Die Lösungsmenge im 1. Fall ist also:

$$L_1 = \{x \in \mathbb{R} | x \geq \frac{1}{4} \wedge x \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$$

2. Fall:  $x - \frac{1}{4} < 0$ , also  $\frac{1}{4} - x > 0$   
Die Ungleichung  $(\frac{1}{4} - x)^2 \geq \frac{9}{16}$  liefert  $\frac{1}{4} - x \geq \frac{3}{4}$ , also  $x \leq -\frac{1}{2}$

*Anmerkung des Autors: in der Klammer wurde -1 ausgeklammert, da diese beim Quadrieren belanglos ist. Eine (einfachere) Alternative ist 5.9.*

$$\text{Dies zeigt } L_2 = \{x \in \mathbb{R} | x < \frac{1}{4} \wedge x \leq -\frac{1}{2}\} = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -\frac{1}{2}\}$$

Insgesamt ergibt sich die Lösungsmenge  $L = L_1 \cup L_2 = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1 \vee x \leq -\frac{1}{2}\}$ .

## 5.8 Definition

Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  heißt

$$|x| \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases} \text{ der (\textbf{Absolut-})Betrag von } x.$$

## 5.9 Beispiel

Im letzten Beispiel folgt aus  $(x - \frac{1}{4})^2$  die Ungleichung  $|x - \frac{1}{4}| \geq \frac{3}{4}$

## 5.10 Beispiel

Löse die Ungleichung  $|x + 1| + |x - 1| \leq 2$ .

Fallunterscheidung!

1. Fall:  $x < -1$   
Die Ungleichung lautet  $-(x + 1) - (x - 1) \leq 2$  und somit  $x \geq -1$ .  
Dies liefert  $L_1 = \emptyset$
2. Fall:  $-1 \leq x < 1$   
Die Ungleichung lautet  $(x + 1) - (x - 1) \leq 2$  und somit  $2 \leq 2$ .  
Somit folgt  $L_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$
3. Fall:  $x \geq 1$   
Die Ungleichung lautet  $(x + 1) + (x - 1) \leq 2$  und somit  $x \leq 1$ .  
Dies zeigt  $L_3 = \{1\}$ .

Insgesamt erhalten wir  $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ .

## 5.11 Dreiecksungleichung

1. Für  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (**Dreiecksungleichung**)
2. Es gilt für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  die **umgekehrte Dreiecksungleichung**:  
 $||x| - |y|| \leq |x + y|$

BEWEIS.

1. Aus  $xy \leq |x| \cdot |y| = |xy|$  folgt  $x^2 + 2xy + y^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$ , also  $(x + y)^2 \leq (|x| + |y|)^2$ .  
Da  $|x + y|$ ,  $|x|$  und  $|y|$  nicht negativ sind, ist Wurzelziehen erlaubt.
2. Nach 1. gilt  $|x| \leq |x + y| + |-y| = |(x + y) - y|$   
und somit  $|x + y| \geq |x| - |y|$ .  
Andererseits gilt, ebenfalls nach 1., die Ungleichung  
 $|x + y - x| = |y| \leq |x + y| + |-x| = |x + y| + |x|$   
und somit  $|x + y| \geq |y| - |x|$ .

Kombiniert man beide Erkenntnisse, so folgt  $|x + y| \geq ||x| - |y||$ .

### 5.12 Beispiel

Löse  $\sqrt{2x-1} < x+1$  für  $x \in \mathbb{R}$ .

Damit die Wurzel definiert ist, muss gelten  $2x-1 \geq 0$ , also  $x \geq \frac{1}{2}$ .  
Dann ist die rechte Seite positiv und Quadrieren erlaubt.

Es folgt:  $2x-1 < x^2+2x+1$ , also  $x^2 > -2$ .

Insgesamt erhalten wir:  $L = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0, 5\}$ .

### 5.13 Beispiel

Löse  $\sqrt{x^2+1} > x+1$  in  $\mathbb{R}$ .

1. Fall:  $x+1 < 0$ .

In diesem Fall gilt  $\sqrt{x^2+1} > 0 > x+1$ ,  
also  $L_1 = \{x \in \mathbb{R} | x < -1\}$ .

2. Fall:  $x+1 \geq 0$ .

Jetzt ist Quadrieren eine Äquivalenzumformung und es folgt  $x^2+1 > x^2+2x+1$ , also  $x < 0$ .

Dies liefert  $L_2 = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x < 0\}$ .

Insgesamt folgt:  $L = L_1 \cup L_2 = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$ .

## 6 Ebene Geometrie



## 12 Kombinatorik

Kombinatorik ist die Kunst des Zählens.

### 12.1 Definition

Seien  $a_1, \dots, a_n$  paarweise verschiedene Objekte ( $n \geq 1$ ).

1. Eine Anordnung  $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$  mit  $\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}$  heißt auch **Permutation** von  $a_1, \dots, a_n$ .

Schreibweisen:

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_n} \end{pmatrix} \text{ oder einfach } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

Ohne Einschränkung betrachten wir also meißt die Permutationen der Menge  $\{1, \dots, n\}$ .

2. Die Menge aller Permutationen von  $n$  Objekten heißt die **symmetrische Gruppe**  $S_n$ .

### 12.2 Satz: Die Gruppe $S_n$ hat $n!$ Elemente.

BEWEIS. Halte ein Element, zB  $a_n$  fest. Für die Bilder  $\sigma(a_1)$  unter  $\sigma \in S_n$  gibt es  $n$  Möglichkeiten, für  $\sigma(a_2)$  gibt es dann noch  $n - 1$  Möglichkeiten usw.

Am Ende gibt es für  $\sigma(a_n)$  nur noch 1 Auswahl. Insgesamt gibt es  $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$  Permutationen.

qed

### 12.3 Beispiel: Wir ordnen Permutationen

*Dieser Punkt wurde während der Ausführung gestrichen, da der Kenntnisstand der Studierenden in Lineare Algebra nicht ausreichend war.*

### 12.4 Definition

Gegeben seien  $n$  paarweise verschiedene Objekte  $a_1, \dots, a_n$ .

1. Sei  $0 \leq m \leq n$ . Eine Teilmenge von  $\{a_1, \dots, a_n\}$  bestehend aus  $m$  Elementen heißt auch **Auswahl** von  $m$  Elementen.

2. Die Anzahl der Auswahlen von  $m$  Elementen aus  $\{a_1, \dots, a_n\}$  heißt der **Binomialkoeffizient**  $\binom{n}{m}$ .

### 12.5 Satz (Formel für die Binomialkoeffizienten)

Für  $n \geq 1$  und  $0 \leq m \leq n$  gilt:  $\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$  (mit  $0! = 1$ ).

### 12.6 Bemerkung (Das Pascalsche Dreieck)

1. Die Binomialkoeffizienten erfüllen die Formel

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} \text{ für } m \geq 1, n \geq 2.$$

2. Die Binomialkoeffizienten sind gegeben durch das **Pascalsche Dreieck**:

n=1			1		1			(m=0,1)
n=2			1		2		1	(m=0,1,2)
n=3			1		3		3	(m=0,...,3)
n=4		1		4		6		(m=0,...,4)
n=5	1		5		10		10	(m=0,...,5)

*etc.*