

# Explorando nuevos modelos de materia oscura en el Sistema Solar a través de simulaciones de N cuerpos



**Universidad**  
Zaragoza



**Facultad de Ciencias**  
**Universidad** Zaragoza

**María Rubio Viana**

Trabajo de fin de Grado en Física

Dirigido por:

Javier Galán Lacarra

Theopisti Dafni

2023-2024

# Índice

<b>1. Objetivos</b>	<b>1</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>1</b>
2.1. Evidencias de la materia oscura . . . . .	2
2.2. Posibles modelos de materia oscura . . . . .	3
2.2.1. WIMPs . . . . .	3
2.2.2. Axiones . . . . .	3
2.2.3. Otras propuestas de materia oscura . . . . .	4
2.3. Observación y experimentos . . . . .	4
2.3.1. Detección indirecta . . . . .	5
2.3.2. Detección directa . . . . .	6
2.3.3. Tecnologías de detección y experimentos . . . . .	6
<b>3. Modelado de materia oscura</b>	<b>7</b>
3.1. Captura gravitacional . . . . .	7
3.2. Distribuciones de densidad . . . . .	9
3.3. Integración orbital . . . . .	10
3.3.1. Método de integración: Runge-Kutta . . . . .	10
3.3.2. Transformación de unidades . . . . .	11
<b>4. Metodología</b>	<b>12</b>
4.1. Programas . . . . .	12
<b>5. Estudios de captura gravitacional</b>	<b>14</b>
5.1. Tiempo de captura . . . . .	14
5.1.1. Órbitas y trayectorias en un modelo de dos cuerpos masivos . .	15
5.2. Modelado de la distribución de densidad de axiones KK en el Sistema Solar . . . . .	17
5.2.1. Velocidad de escape de axiones en el interior del Sol . . . . .	17
5.2.2. Órbitas cerradas alrededor del Sol . . . . .	18
5.2.3. Perfiles de densidad en el Sol . . . . .	20

5.2.4. Ritmo de producción en el Sol . . . . .	21
5.3. Influencia de un segundo cuerpo masivo en el problema de los axiones KK	23
<b>6. Conclusiones</b>	<b>24</b>
<b>Referencias</b>	<b>25</b>
<b>Anexos</b>	<b>26</b>

## 1. Objetivos

En este trabajo se busca estudiar la materia oscura, en concreto, como se distribuye y comporta en el Sistema Solar. El objetivo principal de este trabajo es el modelado de materia oscura por captura gravitacional. Se comenzará con un estudio bibliográfico sobre la materia oscura para conocer los posibles candidatos así como las diferentes técnicas experimentales de detección de materia oscura y los experimentos más relevantes. Se describirán las condiciones de captura gravitacional, sus características y la conexión con el modelado de materia oscura.

De forma más práctica, se utilizarán técnicas de integración numérica en simulaciones por ordenador para conseguir describir el movimiento de las partículas de materia oscura en un modelo simplificado del Sistema Solar. Se estudiarán sus órbitas y trayectorias y cómo varían estas modificando las condiciones iniciales de la partícula de diferentes formas. Se observará el efecto de la captura gravitacional al modificar el modelo de Sistema Solar utilizado: añadiendo más cuerpos y cambiando sus características.

Para el modelado de materia oscura es necesario explicar la conexión entre el cálculo orbital y la creación de modelos de materia oscura basados en estos. Además se estudiarán, en concreto, los axiones Kaluza Klein que pueden ser generados en el Sol y cómo se distribuyen en el Sistema Solar. En este trabajo se utilizan modelos de Sistema Solar muy simplificados, se intentarán extrapolar los resultados para obtener en el futuro simulaciones que puedan describir de forma más acertada un Sistema Solar más complejo, similar al real.

## 2. Introducción

Al estudiar la composición energética de nuestro Universo y la materia que lo constituye, los científicos llegaron a la conclusión de que existe mucha más materia de la que se puede observar. La materia tal y como la conocemos constituye un 15 % del Universo; el 85 % restante es materia oscura, un concepto completamente nuevo y de gran relevancia propuesto para poder explicar los campos gravitatorios detectados e incongruencias obtenidas en el modelo estándar entre otras muchas cosas que se desarrollaran más adelante.

Se define la densidad crítica del Universo como:  $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$ . Mientras que  $\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}$  es la proporción de la densidad de la materia de tipo “i” en el Universo siendo  $\rho_i$  la densidad de ese tipo de materia. Al estudiar la composición del Universo se descubrió que la contribución a la densidad que realizaban las partículas conocidas (materia bariónica) tenía un valor de  $\Omega_b = 0,05$ . Este valor no encajaba con la densidad total de la materia del Universo cuyo valor es  $\Omega_m = 0,25$ . Esta fue una de las razones que hizo plausible la idea de la existencia de la materia oscura, unas partículas con una

densidad tan grande que pudieran compensar este valor obtenido.

Las principales propiedades de la materia oscura son que:

- Interactúa muy débilmente (o no interactúa en absoluto) con la radiación electromagnética.
- Interactúa principalmente gravitacionalmente.
- Tiene que estar compuesta de partículas no relativistas.
- Interactúa muy débilmente con el plasma primordial.
- Es cosmológicamente estable porque se pueden ver sus efectos en el tiempo de desacoplo en el fondo cósmico de microondas e incluso en el tiempo actual.

Los científicos han propuesto modelos de materia oscura que se podrían ajustar a estas propiedades. Los más relevantes para este trabajo son: WIMPs y axiones.

### 2.1. Evidencias de la materia oscura

La principal evidencia de la existencia de la materia oscura son los efectos gravitacionales observados en la materia que sí era conocida bajo la consideración de la mecánica newtoniana, tales como el movimiento de las estrellas o las galaxias. En esto se basaron Zwicky y Rubin para descubrir la materia oscura.

La existencia de la materia oscura fue propuesta por Fritz Zwicky en 1933, quien estudió las velocidades orbitales de las galaxias en los cúmulos. Estudiando las observaciones de Hubble del cúmulo de galaxias Coma, se dio cuenta de que las galaxias individualmente se estaban moviendo demasiado rápido como para que el cúmulo permaneciera unido y, sin embargo, así era. Zwicky propuso la existencia de una materia invisible que afectara a las interacciones gravitacionales entre galaxias para que así permanecieran unidas en un cúmulo. Su propuesta no fue verdaderamente aceptada por la comunidad científica hasta 1974, con los descubrimientos de Vera Rubin.

Rubin consiguió medir un espectro muy preciso que podía describir las distintas partes de una galaxia en espiral, incluso partes de la galaxia muy alejadas del centro y con mucha precisión, lo cual fue innovador. Comenzó con la galaxia Andrómeda, pero estudió más de otras 10 galaxias en espiral y sus correspondientes curvas de rotación galáctica. Rubin descubrió que en distintas órbitas de galaxias espirales las estrellas giraban a casi la misma velocidad angular, lo que implicaba que sus densidades tenían que ser muy similares. Este resultado le permitió deducir que más del 50 % de la masa de las galaxias estaba contenida en el halo galáctico y no se podía detectar como la materia clásica en ese momento conocida, verificando la existencia de la materia oscura.

## 2.2. Posibles modelos de materia oscura

A continuación, se describirán algunas de las propuestas de materia oscura más aceptadas por la comunidad científica, relevantes para este trabajo.

### 2.2.1. WIMPs

En esta sección se definen los WIMPs como propuestas de materia oscura ya que existen estudios científicos sobre modelado de materia oscura con WIMPs relevantes para este trabajo. Uno de ellos es el artículo [1] que estudia la distribución de WIMPs en la Tierra por captura gravitacional, utilizando simulaciones de un modelo de Sistema Solar que sólo considera el Sol y Júpiter.

Los WIMPs ([2]) son partículas hipotéticas que encajarían con las características de la materia oscura y que se generarían en el origen del Universo. Son partículas neutras que podrían pasar a ser partículas del modelo estándar mediante la siguiente interacción que regula la densidad de WIMPs en el Universo:

$$\chi + \chi \leftrightarrow S + \bar{S}, \quad (1)$$

con  $\sigma_\chi$  la sección eficaz de esta interacción electrodébil. Forman parte de extensiones del modelo estándar que consideran supersimetría en la que, para cada partícula en el modelo estándar, hay una nueva partícula que se considera su pareja supersimétrica y que en dimensiones muy grandes tendrá un infinito número de “resonancias” con masas mayores. Por ejemplo, el gravitino que sería la pareja supersimétrica del gravitón.

### 2.2.2. Axiones

Experimentalmente se sabe que las interacciones fuertes respetan la simetría CP ya que se obtiene la misma interacción intercambiando cada partícula por su antipartícula (simetría C) e invirtiendo sus coordenadas espaciales (simetría P). Sin embargo, la cromodinámica cuántica afirma que es posible que las interacciones fuertes rompan la simetría CP y esto no sucede en la realidad. Los axiones ([2]) fueron propuestos por los físicos Roberto Peccei y Helen Quinn como una solución al problema de la simetría CP-fuerte del modelo estándar.

Los axiones serían partículas neutras y muy ligeras (pero con masa), que interactúan débilmente entre ellos y con el resto de las partículas convencionales. Se cree que los axiones fueron generados durante la inflación, una etapa temprana del Universo, aunque teorías recientes sostienen que los axiones podrían estar generados en el Sol y se están diseñando experimentos en la actualidad para poder detectarlos (helioscopios).

Se han propuesto varios tipos de axiones y partículas que cumplen con esta fenomenología (ALPs) pero para este trabajo resultan de especial importancia los axiones Kaluza Klein ([3]). Los axiones KK surgen de teorías con dimensiones extra (teoría

de cuerdas y teoría Kaluza Klein). Poseen modos excitados asociados con diferentes masas. Pueden ser generados en el Sol a partir de fotones en dos procesos: *proceso Primakoff* ( $\gamma + q \rightarrow a + q$ ) y *coalescencia de fotones* ( $\gamma + \gamma \rightarrow a$ ).

En el artículo [4], se concluye que la coalescencia de fotones es más eficiente para capturar axiones KK gravitacionalmente en el Sistema Solar que el proceso Primakoff.

Únicamente una fracción de los axiones KK generados en el Sol permanecen atrapados gravitacionalmente, aquellos cuyo momento es suficientemente bajo como para no poder superar el escape gravitacional. En la Figura 1 sacada del artículo [5] se muestra la distribución de la velocidad de los axiones KK capturados gravitacionalmente.

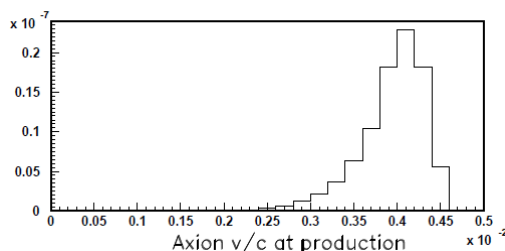


Figura 1: Distribución de la velocidad de los axiones KK generados en el Sol y capturados gravitacionalmente por el mismo. La velocidad se presenta en m/s y dividida entre la velocidad de la luz. Obtenida del artículo [5].

### 2.2.3. Otras propuestas de materia oscura

Hay muchas otras propuestas de materia oscura además de los WIMPs y los axiones que cumplen con las posibles características descritas de la materia oscura: neutrinos ordinarios y pesados; cuerpos astronómicos como estrellas enanas y planetas (MACHOs).

Los candidatos a materia oscura que no son partículas elementales se suelen llamar generalmente MACHOs (objeto astrofísico masivo compacto del halo). Son cuerpos astronómicos (agujeros negros, distintos tipos de estrellas, planetas aislados...) de mucha masa pero lo suficientemente pequeños como para no ser detectables mediante telescopios y poder considerarse materia oscura. Se podrían detectar con microlentes gravitacionales de las que se habla en la Sección 2.3.1.

Otro candidato es la materia oscura asimétrica propuesta como explicación al desequilibrio en la abundancia de bariones y antibariones en el Universo.

## 2.3. Observación y experimentos

Para comprobar que las propuestas de materia oscura son ciertas deberían de poder detectarse estas partículas desconocidas mediante métodos experimentales. La

detección de materia oscura se divide en detección indirecta y directa. En la detección indirecta se miden los efectos que provocan estas posibles partículas: curvas de rotación de galaxias, lentes gravitacionales y estudiar la dinámica galáctica. Por otra parte, la detección directa de partículas de materia oscura se realiza en laboratorios subterráneos.

### 2.3.1. Detección indirecta

Las curvas de rotación de galaxias ya fueron utilizadas en los descubrimientos de Vera Rubin. En ellas se representa la velocidad angular de las estrellas o el gas pertenecientes a una galaxia frente a la distancia al centro de la galaxia. La mayor parte de la masa de las galaxias detectada está cerca del centro, por lo que por la mecánica Newtoniana y las leyes de Kepler las curvas de rotación deberían de decaer conforme se aumenta la distancia al centro de la galaxia. Sin embargo, Rubin descubrió que esto no era así y las curvas permanecían casi constantes al aumentar la distancia cómo se puede ver en la Figura 2. Demostrando así que el halo galáctico contiene una gran cantidad de materia oscura.

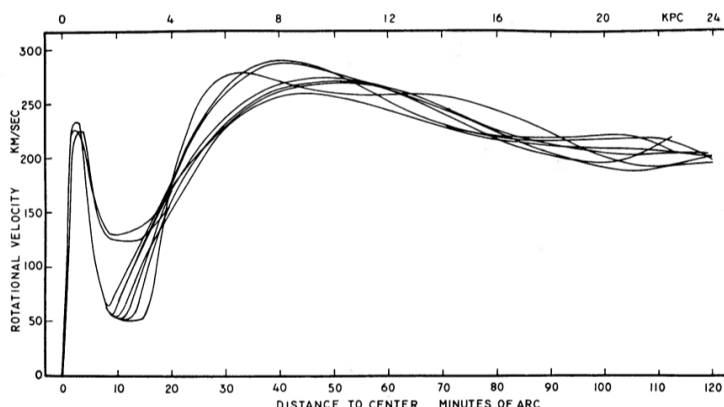


Figura 2: Catorce curvas de rotación de la galaxia Andromeda obtenidas por Rubin en los años 70.[6]

Otro método de detección indirecta son las lentes gravitatorias que se producen cuando la luz proveniente de un sistema astronómico muy lejano pasa cerca de un cuerpo muy masivo y se curva, llegando a formar incluso anillos (anillos de Einstein). Las galaxias pueden actuar como lentes gravitatorias a gran escala, pero también existen microlentes gravitacionales dentro de las galaxias que resultan muy útiles para la detección de MACHOs. En múltiples experimentos, los científicos han encontrado más lentes gravitacionales de las esperadas por la presencia de materia convencional. Así pues, cartografiando las posiciones de estas lentes gravitacionales inesperadas se pueden acotar las zonas que contienen grandes cantidades de materia oscura.



### 2.3.2. Detección directa

La detección directa de materia oscura se realiza en experimentos en laboratorios subterráneos para evitar el efecto de los rayos cósmicos que recibe la superficie terrestre. Se trabaja en condiciones de silencio cósmico, que significa estar en nulo o muy bajo fondo cósmico para explorar las circunstancias de la naturaleza. Por ejemplo, en el Laboratorio Subterráneo de Canfranc (LSC), la montaña protege de los rayos cósmicos y sólo llega al laboratorio uno de cada 3.000 que llegarían a la superficie. Los experimentos se diseñan de diferentes formas para poder detectar las posibles interacciones de algunas de las propuestas de materia oscura que lleguen al laboratorio con otras partículas convencionales o entre ellas.

### 2.3.3. Tecnologías de detección y experimentos

Los experimentos de detección directa de WIMPs miden un pequeño retroceso nuclear (10 keV - 100 keV). Algunos de los experimentos de detección directa de WIMPs en la actualidad son: DEAP/CLEAN, LUX, SuperCDMS, WARP, XENON1T y XMASS. En Zaragoza se han diseñado dos experimentos para la detección directa de WIMPs: ANAIS y TREX-DM. ANAIS busca detectar retrocesos nucleares por WIMPs a través de la señal de centelleo en cristales de NaI en el LSC. Mientras que TREX-DM se centra en la búsqueda de WIMPs de baja masa, utilizando cámaras de proyección temporal rellenas de gas.

Para la detección indirecta de WIMPs se utilizan satélites y telescopios de neutrinos. Los satélites buscan fotones (Fermi Gamma-Ray Space Telescope) u otras partículas (ATIC y PAMELA) que surgen de la aniquilación de WIMPs en el halo galáctico de materia oscura de la vía láctea. Los telescopios de neutrinos como BAKSAN, MACRO, Super-Kamiokande y AMANDA miden el flujo de neutrinos que proviene de la aniquilación de WIMPs en la Tierra y en el Sol. Los últimos telescopios de neutrinos diseñados son Antares, IceCube y el propuesto KM3NeT.

Para detectar los axiones que se generarían en el Sol, se utiliza detección directa midiendo el exceso de rayos X que se crea en su producción en el Sol y que puede llegar hasta la Tierra. Estos experimentos los realizan observatorios de rayos X en órbita como: CHANDRA, ASCA, BeppoSAX, XMM-Newton y ROSAT. Son relevantes para la detección directa los helioscopios que generan campos magnéticos en los que los axiones, producidos en el Sol, pasan a ser fotones de rayos X. El helioscopio detecta estos rayos X midiendo así la presencia de axiones en la región en la que se crea el campo magnético.

También se buscan indicios de materia oscura en los colisionadores de partículas, como el Large Hadron Collider.

### 3. Modelado de materia oscura

El modelado de materia oscura en el contexto de este trabajo consiste en el cálculo de las trayectorias de partículas bajo la influencia gravitacional. Estas trayectorias permiten crear perfiles de densidad que podrían describir la distribución de materia oscura en el Sistema Solar. Es particularmente relevante porque, a partir de la información obtenida con el modelado de materia oscura, se puede determinar la sensibilidad de los detectores para futuros experimentos de detección directa. Además también resulta útil comparar los resultados obtenidos en experimentos de detección con los modelos resultantes del modelado de materia oscura para ver si estos coinciden.

Cuando la materia oscura interactúa gravitacionalmente, al igual que el resto de partículas convencionales, su trayectoria cambia ante la cercanía de cuerpos celestes masivos, pudiendo verse afectada por la captura gravitacional. La trayectoria que siguen las partículas de materia oscura en el Sistema Solar es importante porque su presencia en un punto en concreto del mismo nos permite calcular la densidad de estas partículas en ese punto. Si esta densidad es muy elevada se forman pozos gravitacionales de materia oscura. Por ello es importante definir la captura gravitacional que se describe en el siguiente apartado.

#### 3.1. Captura gravitacional

La captura gravitacional es el fenómeno por el cual una partícula, que no está gravitacionalmente ligada, se aproxima a un cuerpo masivo desde una distancia muy lejana y se dan las condiciones para que permanezca en órbita cerrada alrededor del mismo durante un periodo de tiempo concreto llamado *tiempo de captura*.

Para describir la captura gravitacional de una partícula de materia oscura por un cuerpo masivo es necesario un sistema de N-cuerpos con  $N > 2$ . La energía potencial total de la partícula en el sistema es:

$$U(\vec{q}, t) = - \sum_i^N \frac{GM_i}{|\vec{q} - \vec{q}_i|}, \quad (2)$$

donde  $M_i$  son las masas de los cuerpos masivos,  $\vec{q}$  es la posición de la partícula,  $\vec{q}_i$  son las posiciones de los cuerpos masivos y  $G$  es la constante gravitatoria. La energía cinética de la partícula tendrá la siguiente expresión:

$$K(\vec{v}, t) = \frac{1}{2} (\vec{v} - \vec{v}_B)^2, \quad (3)$$

con  $\vec{v}$  la velocidad de la partícula y  $\vec{v}_B$  la velocidad del cuerpo masivo sobre el que se realiza la captura. La energía total de la partícula ( $E$ ) es la suma de su energía potencial total y la energía cinética. También resulta importante definir la fuerza entre

la partícula y el cuerpo masivo que viene dada por la fuerza de Kepler:

$$\vec{F}_{Kepler} = -\frac{GM_B}{|\vec{q} - \vec{q}_B|^3}(\vec{q} - \vec{q}_B). \quad (4)$$

Según la energía total de la partícula ( $E = K + U$ ) son posibles las siguientes situaciones:

- Si es negativa ( $E < 0$ ), estará capturada gravitacionalmente por el cuerpo masivo en una órbita circular o elíptica (cerradas).
- Si es cero ( $E = 0$ ), entonces tiene condiciones de escape, es decir, no estará capturada y su órbita será parabólica (abierta). La velocidad inicial de una partícula que cumple esto se denomina velocidad de escape.
- Si es positiva ( $E > 0$ ), no está capturada gravitacionalmente por el cuerpo masivo y tiene una órbita hiperbólica (abierta).

Por lo tanto, si una partícula, respecto a uno de los cuerpos masivos, tiene inicialmente energía positiva y esta pasa a ser negativa, se puede decir que ha sido capturada por ese cuerpo y se observa un proceso de captura gravitacional.

Cabe destacar que, tal y como se menciona en el artículo [7], la captura permanente es posible, por ejemplo en el problema restringido hiperbólico. Sin embargo, en el problema de tres cuerpos restringido a órbitas circulares y elípticas la captura permanente no es posible.

En este trabajo se van a realizar simulaciones con modelos de Sistema Solar simplificado de uno o dos cuerpos masivos. Este último, se basa en las simulaciones del artículo [7] que consideran el Sol y un cuerpo masivo secundario. En estas simulaciones se utilizan dos sistemas de referencia: uno inercial ( $X, Y$ ) y otro sinódico ( $\xi, \eta$ ).

Inicialmente (en  $t = 0$ ), los dos cuerpos masivos y la partícula están alineados y ambos sistemas de coordenadas coinciden.  $M_1$  es la masa del Sol y  $M_2$  la masa del cuerpo secundario, además se utilizan:

$$\mu_1 = \frac{M_1}{M_1 + M_2}; \mu_2 = \frac{M_2}{M_1 + M_2}. \quad (5)$$

El sistema de referencia inercial es fijo,  $\mu_1$  es su baricentro y origen de coordenadas, y los dos cuerpos masivos tienen una órbita circular a su alrededor (como se observa en la Figura 3 extraída del artículo [7]). Uno de los ejes de este sistema ( $\xi$ ) une  $M_1$  y  $M_2$  en  $t=0$  mientras que el otro ( $\eta$ ) es perpendicular al plano de órbita de los dos cuerpos masivos. El sistema de referencia sinódico, que es el que se utiliza en las simulaciones del artículo, rota con una velocidad angular ( $n$ ) igual a la velocidad media del movimiento de los dos cuerpos masivos. En este sistema uno de los ejes ( $X$ ) une los dos cuerpos masivos para cualquier valor de  $t$ .

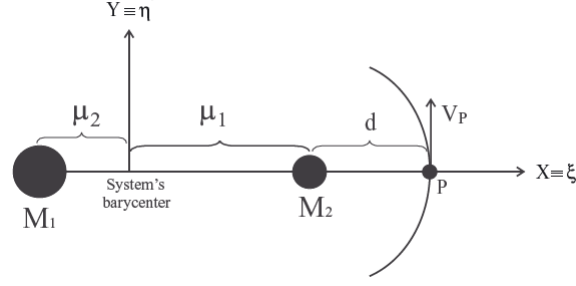


Figura 3: Condiciones iniciales de los dos cuerpos masivos y la partícula en el sistema sinódico  $(\xi, \eta)$  e inercial  $(X, Y)$  en las simulaciones del artículo [7].

Es importante determinar las condiciones iniciales de la partícula en este sistema de referencia. Se define  $V_P$  como la velocidad de la partícula y  $d$  como la distancia inicial entre el cuerpo masivo secundario y la partícula. Entonces las coordenadas iniciales de la partícula son:

$$x = \mu_1 + d; y = 0; v_x = 0; v_y = V_P - nx. \quad (6)$$

Si  $V_2$  es la velocidad del cuerpo masivo secundario, se define  $v$  como la diferencia entre la velocidad de la partícula y la del cuerpo masivo secundario:

$$v = V_P - V_2; V_2 = n\mu_1. \quad (7)$$

Por lo que las condiciones iniciales de la partícula en el sistema de referencia sinódico son:

$$x = \mu_1 + d; y = 0; v_x = 0; v_y = v - d. \quad (8)$$

En estas simulaciones si la partícula está capturada temporalmente por el segundo cuerpo masivo, la energía total de la partícula con respecto al segundo cuerpo masivo será negativa. Tras escaparse, la partícula comenzará a orbitar el cuerpo masivo principal, entonces la energía partícula-segundo cuerpo masivo es positiva y la energía partícula-cuerpo masivo principal es negativa. Es lo que sucede en la Figura 4 que se ha obtenido del artículo [7] donde se ve que su tiempo de captura es  $t = 10, 25$ . Se volverá a hablar de esta figura en el Apartado 5.1.1.

### 3.2. Distribuciones de densidad

Para el modelado de materia oscura es necesario encontrar una relación entre la trayectoria de las partículas en órbita alrededor del Sol con su densidad. La contribución a la densidad de una partícula en cada diferencial radial esta relacionado con el tiempo que invierte la partícula en cada elemento diferencial, segun la relacion:

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{dr}{v(r)}, \quad (9)$$

donde  $v(r)$  es la velocidad radial. La contribución de  $N$  partículas vendria dada en troncos por:

$$\frac{N}{T} \cdot \frac{dr}{v(r)}. \quad (10)$$

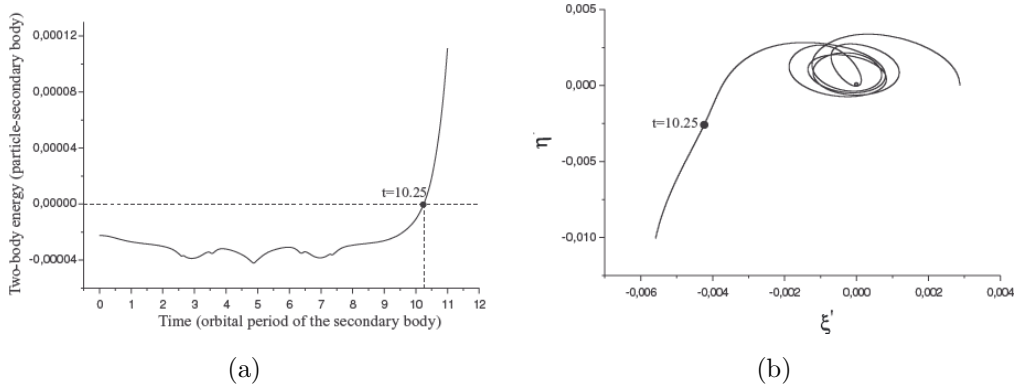


Figura 4: Figura obtenida del artículo [7]. Partícula con  $v = 0,0050$ ;  $d = 0,00287$ ;  $\mu_2 = 10^{-7}$ . (a) Energía partícula-segundo cuerpo masivo frente al tiempo. (b) Órbita de la partícula alrededor del cuerpo secundario y su escape tras sobrepasar su tiempo de captura en el sistema de referencia inercial.

En estas expresiones hemos normalizado con el periodo orbital ( $T$ ) porque si una partícula tiene un periodo 10 veces menor que el periodo de otra, pasará por el mismo punto 10 veces más que la otra, por lo que, la primera partícula deberá contribuir a la densidad 10 veces más de lo que contribuye la segunda. Para obtener la densidad se divide por el volumen diferencial en la posición de la partícula:

$$dV = 4\pi r^2 dr, \quad (11)$$

$$\rho(r) = \frac{N}{T} \cdot \frac{1}{v(r)} \cdot \frac{1}{4\pi r^2}. \quad (12)$$

La densidad total en un punto cualquiera del Sistema Solar se calcula integrando la expresión anterior a la velocidad radial y la distancia radial.

### 3.3. Integración orbital

Para poder realizar las simulaciones del trabajo se han utilizado una serie de programas. Se explica en este apartado el método numérico de integración gracias al cual los programas evolucionan en el tiempo: el método de Runge-Kutta. Los programas no utilizan unidades convencionales por lo que es necesario obtener factores de conversión a las unidades físicas correspondientes en cada caso como se verá más adelante en esta apartado.

#### 3.3.1. Método de integración: Runge-Kutta

El método numérico de integración elegido para la evolución de los programas utilizados en este trabajo es Runge-Kutta de orden 4. Consiste en calcular la pendiente entre dos puntos contiguos como la media pesada de cuatro pendientes entre estos dos

puntos, considerando que las pendientes intermedias  $k_2$  y  $k_3$  tienen el doble de peso que las de los extremos. Por lo tanto, el algoritmo general es el siguiente:

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + k_1 \cdot \frac{h}{2}) \\ k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + k_2 \cdot \frac{h}{2}) \\ k_4 = f(t_n + h, y_n + k_3 \cdot h) \end{cases} \quad (13)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (14)$$

donde  $h$  es el paso temporal.

Por supuesto, para aplicar esto a las trayectorias estudiadas, las variables  $k$  serán aceleraciones ( $kj_v$  con  $j=1, 2, 3, 4$ ) y velocidades ( $kj$  con  $j=1, 2, 3, 4$ ) y servirán para modificar la velocidad y posición de la partícula respectivamente en cada paso temporal. Representándolo para tan sólo la coordenada  $x$  el algoritmo queda:

$$\begin{cases} k1_{vx} = F_{Kepler,x}(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}) \\ k1_x = v_{x,i-1} \\ k2_{vx} = F_{Kepler,x}(x_{i-1} + k1_x \cdot \frac{h}{2}, y_{i-1} + k1_y \cdot \frac{h}{2}, z_{i-1} + k1_z \cdot \frac{h}{2}) \\ k2_x = v_{x,i-1} + k1_{vx} \cdot \frac{h}{2} \\ k3_{vx} = F_{Kepler,x}(x_{i-1} + k2_x \cdot \frac{h}{2}, y_{i-1} + k2_y \cdot \frac{h}{2}, z_{i-1} + k2_z \cdot \frac{h}{2}) \\ k3_x = v_{x,i-1} + k2_{vx} \cdot \frac{h}{2} \\ k4_{vx} = F_{Kepler,x}(x_{i-1} + k3_x \cdot h, y_{i-1} + k3_y \cdot h, z_{i-1} + k3_z \cdot h) \\ k4_x = v_{x,i-1} + k3_{vx} \cdot h \end{cases} \quad (15)$$

$$v_{x,i} = \frac{h}{6} \cdot (k1_{vx} + 2 \cdot k2_{vx} + 2 \cdot k3_{vx} + k4_{vx}) \quad (16)$$

$$x_i = \frac{h}{6} \cdot (k1_x + 2 \cdot k2_x + 2 \cdot k3_x + k4_x). \quad (17)$$

El método de Runge-Kutta no tiene simetría temporal, es decir, al cambiar el sentido temporal se ve que la pendiente calculada cambiará ya que su valor depende del punto de partida. Además, este método no conserva la energía para tiempos muy largos. Sin embargo, se decide utilizar este método simpléctico porque para pasos temporales pequeños genera muy poco error, de hecho, el error global es proporcional a  $h^4$ .

### 3.3.2. Transformación de unidades

En el código no se utilizan unidades convencionales para ninguna de las variables físicas. Para poder aplicar los programas a un modelo real es necesario encontrar los factores de conversión a las unidades físicas correspondientes en cada caso.

La unidad de masa en los programas es la masa del Sol y la unidad de distancia es el radio del Sol. Por lo que, para obtener distancias y masas en metros y kilogramos

respectivamente, se multiplican los valores obtenidos en el programa por la masa y el radio del Sol:  $M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{30} kg$ ;  $R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^8 m$ .

Para obtener el factor de conversión entre el tiempo sin unidades físicas de los programas y el tiempo en segundos ( $T_u$ ), se debe tener en cuenta que en los programas se ha considerado que la constante gravitatoria tiene valor unidad ( $G_{dimless} = 1$ ) pero su valor real con unidades físicas es:  $G = 6,67428 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ .

El valor de  $G$  en unidades físicas a partir del valor utilizado en el código es:

$$G = G_{dimless} \cdot \frac{R_{\odot}^3}{M_{\odot} T_u^2} \quad (18)$$

Y si de aquí se despeja el factor de conversión temporal:

$$T_u = \sqrt{G_{dimless} \cdot \frac{R_{\odot}^3}{M_{\odot} G}} = 1593,65 s. \quad (19)$$

Por lo tanto, si se multiplica cualquier valor del tiempo obtenido en los programas por  $T_u$  se obtiene el tiempo en segundos. Por ejemplo, el paso temporal utilizado en el método de Runge-Kutta en segundos será:  $h = 0,01 \cdot T_u = 15,9365 s$ .

Se puede utilizar este proceso para calcular el factor de conversión de cualquier magnitud física derivada y pasar de su valor obtenido en los programas a su valor en las unidades del Sistema Internacional, por ejemplo para la velocidad:

$$v = v_{dimless} \cdot v_u \quad (20)$$

$$v_{dimless} = \frac{R_{\odot}}{T_u} = 4,367 \cdot 10^5. \quad (21)$$

## 4. Metodología

Para realizar las simulaciones de este trabajo se ha utilizado un código C++ compuesto de varios programas distintos que permiten estudiar las órbitas y trayectorias de posibles partículas de materia oscura en un modelo de Sistema Solar simplificado, en el que sólo se considera la presencia del Sol o del Sol y un cuerpo masivo secundario. Al simplificar el modelo del Sistema Solar, se facilita el estudio de los principales mecanismos físicos del sistema. Se trabaja con cálculo de vectores para obtener la posición, velocidad y energía de la partícula en cada paso temporal. La evolución temporal de los programas utiliza el método de integración de Runge-Kutta explicado anteriormente.

### 4.1. Programas

Para realizar las simulaciones y obtener toda la información buscada se han desarrollado 5 programas basados en un ejemplo inicial que aportaron mis tutores: solarDM.cpp, Tcaptura.cpp, velocidadradial.cpp, scapevel.cpp y SecondaryBodyKKactions.cpp.

Estos programas se encuentran en el repositorio de github [8]. El programa principal es *solarDM* los demás programas se escribieron a partir de este pero con pequeñas variaciones. Aquí se explica el programa principal, el resto se desarrollan en el Anexo A.

Los vectores 3D se definen mediante una clase donde también se definen operadores para la suma, resta, multiplicación y división de vectores. Se crean tres estructuras. Una para los cuerpos masivos (Body) que almacena sus coordenadas (velocidad y posición) y su masa. Otra para la partícula (Particle) que guarda la información de cada punto de su órbita: sus coordenadas (velocidad y posición), su energía potencial, su energía cinética, su energía total y la energía respecto a los cuerpos masivos. Todas las fórmulas de las distintas energías se encuentran en el Apartado 3.1. La tercera y última estructura almacena la información del sistema gravitacional al completo.

En el programa se define la fuerza entre la partícula y uno de los cuerpos masivos como un vector 3D dado por la fuerza de Kepler, cuya fórmula aparecen en el Apartado 3.1. Hay que tener en cuenta la posibilidad de que la partícula se encuentre en el interior de uno de los cuerpos masivos ( $\vec{q} - \vec{q}_B < R_B$ ), en cuyo caso la masa del cuerpo masivo ( $M_B$ ) se verá reducida a la masa correspondiente a una esfera de radio la distancia entre la partícula y el centro del cuerpo masivo ( $\vec{q} - \vec{q}_B$ ) en lugar del radio del propio cuerpo masivo ( $R_B$ ).

Para poder hacer evolucionar temporalmente las simulaciones, primero hay que inicializar el sistema; en el programa solarDM hay cuatro formas de hacerlo basadas en cuatro casos de estudio distintos.

**Simple** En la primera forma simplemente se utiliza un cuerpo masivo que representará el Sol, se le asigna masa unidad y se sitúa en el origen del sistema de coordenadas. La partícula de materia oscura se posiciona en las coordenadas  $x$  e  $y$  convenientes. También se le da velocidad inicial a la partícula ( $v_x$  y  $v_y$ ).

**Axiones KK** El segundo método numérico representa axiones KK, que podrían ser generados en el Sol, ya que se busca estudiar bajo qué condiciones permanecen atrapados gravitacionalmente en el Sistema Solar. Se le proporciona al Sol radio y masa unidad y se coloca de nuevo en el origen de coordenadas. La partícula de materia oscura se sitúa en el interior del Sol y se le asigna la posición y velocidad inicial que se necesite.

**Araujo** El tercer método utiliza un modelo de Sistema Solar con dos cuerpos masivos, se basa en el artículo [7] y se describe en el Apartado 3.1. El programa utiliza este método de inicialización por defecto a menos que se indique lo contrario. Se pasan al programa tres parámetros que se utilizarán en la función de inicialización, sino por defecto el programa utiliza:  $M_2 = 10^{-7}$ ;  $v = 0,005$ ;  $d = 0,00287$ . La masa del cuerpo masivo secundario ( $M_2$ ) se debe pasar como parámetro, su velocidad inicial es cero y se



coloca inicialmente en  $x = \mu_1$  e  $y = 0$ . Por otro lado, la masa del Sol es  $M_1 = 1 - M_2$ . Sus condiciones iniciales se establecen como:  $x = -\mu_2$ ;  $y = 0$ ;  $v_x = 0$ ;  $v_y = -\mu_2$ . Por último, la partícula se sitúa inicialmente en  $x = \mu_1 + d$  e  $y = 0$ . Su velocidad inicial será:  $v_x = 0$ ;  $v_y = v - d$ .

**Araujo modificado** El cuarto método es muy parecido al tercero; la única diferencia es que hay que pasar a la función un cuarto parámetro llamado CentralMass. Aunque se siga utilizando  $M_1$  en los cálculos al Sol se le otorga el valor de CentralMass como masa y no el de  $M_1$ .

Tras inicializar el sistema, para la evolución temporal se utiliza el algoritmo de Runge-Kutta. El paso temporal es  $h$  y está definido como parámetro en la función que describe el método de Runge-Kutta donde se le da un valor estándar de  $h = 0,01$ . Pero los cálculos se han realizado variando este valor según el caso. Para ello, se establece una variable global que ejerce el papel de paso temporal  $h$  llamada  $DT$ . El número de pasos temporales se define como  $2/DT$ .

El programa devuelve, para cada paso temporal, las tres coordenadas de la posición y velocidad de la partícula además de su energía total (suma de energía potencial y cinética).

## 5. Estudios de captura gravitacional

En este apartado se exponen los resultados obtenidos en este trabajo. Primero se estudian las órbitas y trayectorias de partículas de materia oscura en un modelo de Sistema Solar formado por dos cuerpos masivos, así como su tiempo de captura en el cuerpo masivo secundario, y cómo varían modificando las condiciones iniciales de la partícula.

En los siguientes apartados se habla de axiones KK capturados en el Sol, se estudian sus órbitas y se calcula su periodo orbital y velocidad de escape, para posteriormente obtener sus perfiles de densidad. Por último, se analizan órbitas y trayectorias de estos axiones considerando un Sistema Solar simplificado que incluye un cuerpo masivo secundario.

### 5.1. Tiempo de captura

Obtener el tiempo de captura es importante en el modelado de materia oscura ya que es el tiempo en el que las partículas en órbita van a contribuir a la densidad de materia oscura alrededor del cuerpo masivo. Se trabaja con el modelo de Sistema Solar más simple posible: sólo incluye el Sol y un segundo cuerpo masivo. El objetivo es estudiar cómo se modifica el tiempo de captura en el segundo cuerpo masivo y

la trayectoria de una partícula lanzada con una velocidad inicial fija para distintas posiciones iniciales.

### 5.1.1. Órbitas y trayectorias en un modelo de dos cuerpos masivos

Para poder estudiar el tiempo de captura en el sistema descrito se trabaja con el programa Tcaptura.cpp. Para poder observar las órbitas se usa el programa principal solarDM.cpp, siempre utilizando el método de estudio *Araujo modificado* para la inicialización descrito en la metodología.

Para todas las simulaciones se le pasan al programa los siguientes parámetros:  $M_2 = 10^{-7}$ ;  $v = 0,005$ ;  $CentralMass = 10^{-3}$ . Para poder ver órbitas interesantes con el programa Tcaptura.cpp se representa el tiempo de captura frente al valor de  $d$  en la Figura 5. Las órbitas elegidas para estudiar se recogen en la Tabla 1.

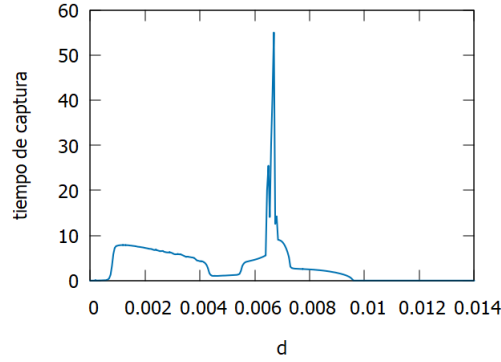


Figura 5: Tiempo de captura frente a  $d$ . Se utilizan las unidades del programa.

$d (\times 10^{-3})$	tiempo de captura
2,9	6,22
6,4	13,3
6,7	55,0
7,9	2,51

Tabla 1: Tiempos de captura de partículas lanzadas a diferentes distancias del cuerpo masivo secundario. Se utilizan las unidades del programa.

Como se ha mencionado, en el artículo [7] se ha estudiado el caso con  $d = 0,00287$  y  $v = 0,005$  así que se reproduce en el programa solarDM.cpp pasando como parámetros:  $d = 0,00287$  y  $steps = 6300$ . Se representa su órbita en la Figura 6(a) dónde se puede ver cómo la partícula comienza su trayectoria capturada por el cuerpo masivo secundario aquí representado, es decir, tiene una órbita elíptica alrededor del mismo y la energía de la partícula respecto al cuerpo masivo secundario es negativa. Cuando esta energía pasa a ser positiva, la partícula escapa de la órbita alrededor del cuerpo secundario, reproduciendo lo mencionado en el artículo [7] y en la Figura 4. En esta

figura el cuerpo masivo principal no está representado pero se representaría centrado en el origen de coordenadas.

Como se puede ver en la Figura 5, en la zona entre  $d = 0,006$  y  $d = 0,007$  el tiempo de captura aumenta muy drásticamente. Se estudia ahora la órbita de una partícula cercana al pico en dicho tramo:  $d = 0,00642$  y  $steps = 5780$ . En la Figura 6(b) se puede ver cómo la partícula completa varias órbitas alrededor del cuerpo secundario, mucho más inestables que en el caso anterior, para después escapar. De nuevo en esta figura no se llega a ver el cuerpo masivo principal ya que se sitúa en el origen de coordenadas.

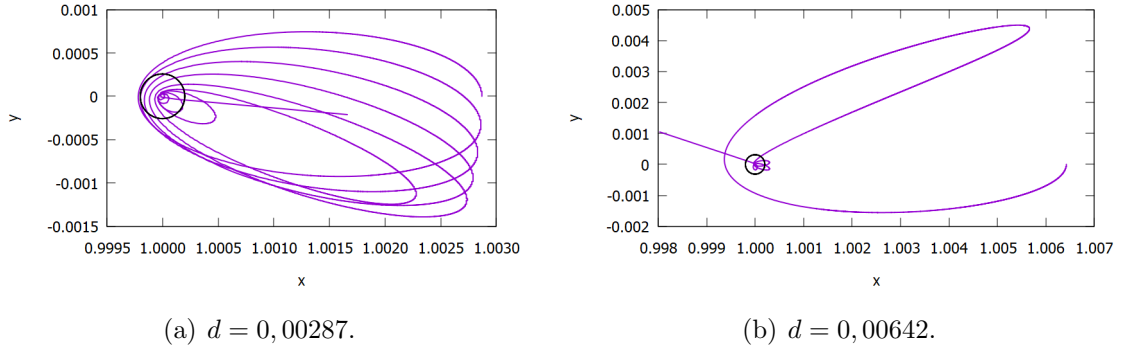


Figura 6: Órbitas de una partícula lanzada desde dos distancias  $d$  del cuerpo masivo secundario distintas con  $v = 0,005$ .

Se dibuja también la órbita de la partícula con  $d = 0,0067$  porque coincide con el pico de mayor tiempo de captura. Se puede ver en la Figura 7 que hasta  $steps = 50000$  la partícula sigue una órbita alrededor del cuerpo masivo secundario, pero conforme pasa el tiempo para  $steps = 90000$  se ve cómo no se escapa sino que sigue una nueva órbita mucho mayor. Harían falta muchos más pasos temporales para llegar a ver a la partícula escapando.

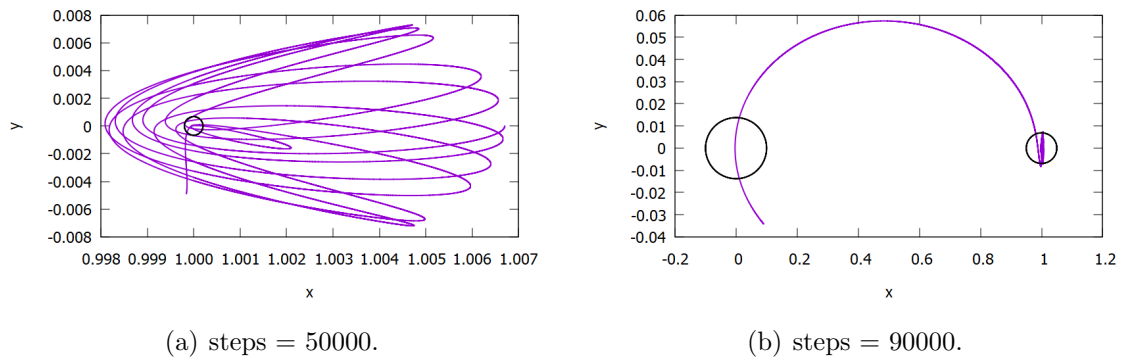


Figura 7: Órbita de una partícula lanzada desde una distancia  $d = 0,0067$  del cuerpo masivo secundario con  $v = 0,005$ .

Finalmente se representa la órbita de una partícula con un tiempo de captura mucho menor:  $d = 0,0079$  y  $steps = 5000$ . En la Figura 8 podemos ver cómo la

partícula no termina de completar una órbita alrededor del cuerpo secundario y ya se escapa.

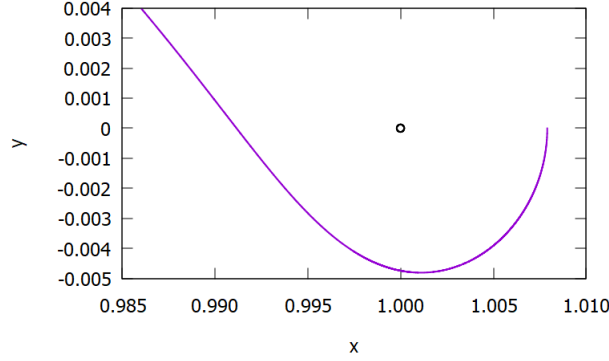


Figura 8: Órbita de una partícula lanzada desde una distancia  $d = 0,0079$  del cuerpo masivo secundario con  $v = 0,005$ .

## 5.2. Modelado de la distribución de densidad de axiones KK en el Sistema Solar

En este apartado se trabaja con axiones KK producidos en el Sol. Los axiones KK cuya velocidad no supere la velocidad de escape estarán capturados gravitacionalmente y se estudiarán sus órbitas así como sus periodos orbitales y velocidades de escape. El objetivo principal es poder generar perfiles de densidad que describan la distribución de axiones en el interior solar para poder obtener el ritmo de producción de estas partículas en el Sol. Por último, se estudiarán los posibles efectos de un cuerpo masivo secundario en las trayectorias de los axiones capturados en el Sol.

### 5.2.1. Velocidad de escape de axiones en el interior del Sol

Como en las simulaciones se trabaja con partículas inicialmente dentro del Sol es necesario saber en qué rango se encuentra su velocidad de escape para saber si las órbitas generadas son abiertas o cerradas. La velocidad de escape de una partícula es aquella que cumple:

$$-U(r) = \frac{1}{2}v_{esc}^2 \Rightarrow v_{esc} = \sqrt{-2U(r)}, \quad (22)$$

donde  $U(r)$  es la energía potencial de la partícula,  $r$  es la distancia entre la partícula y el centro del Sol y  $v_{esc}$  es la velocidad de escape.

La menor velocidad de escape posible de un axión en el interior del Sol es la de los que se encuentran en la superficie y se calcula utilizando que la energía potencial en la superficie del Sol ( $U(R_\odot)$ ) es:

$$U(R_\odot) = - \int_\infty^{R_\odot} -G \frac{M_\odot}{r^2} dr = -G \frac{M_\odot}{R_\odot} \quad (23)$$

La mayor velocidad de escape la tendrán los axiones situados inicialmente en el centro del Sol; para obtenerla, integramos la fuerza de Kepler para calcular  $U(0)$  en el centro del Sol. Suponiendo que la densidad solar ( $\rho$ ) es constante, la masa del Sol en función de su radio es:  $M(r) = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$ . Por lo que la energía potencial será:

$$U(0) = - \int_{R_\odot}^0 -G \frac{M(r)}{r^2} dr - \int_{\infty}^{R_\odot} -G \frac{M_\odot}{r^2} dr = -G\rho \frac{4\pi}{3} \frac{R_\odot^2}{2} + U(R_\odot) = \frac{3}{2}U(R_\odot) \quad (24)$$

La mayor velocidad de escape aparece en la Figura 1 ya que explica que la velocidad máxima de los axiones generados en el Sol y capturados gravitacionalmente en el mismo es proporcional a la velocidad de la luz como  $0,0047c$ . En la Tabla 2 se recogen todas estas velocidades de escape en diferentes unidades.

	v/c ( $\times 10^{-3}$ )	$\times 10^5$ (m/s)	unidades programa
$v_{esc}$ en la superficie del Sol	2,1	6,176	1,414
$v_{esc}$ en el centro del Sol	2,6	7,564	1,732
$v_{esc}$ mayor posible	4,7	14,10	3,229

Tabla 2: Velocidad de escape mínima (en la superficie del Sol) y máxima (en el centro del Sol y la obtenida de la Figura 1) que tendrán los axiones Kaluza Klain capturados gravitacionalmente en el Sol y que inicialmente se encuentran en su interior en diferentes unidades.

### 5.2.2. Órbitas cerradas alrededor del Sol

Se generan órbitas cerradas de axiones KK alrededor del Sol, y que inicialmente se encuentran dentro del mismo, que se pueden ver en la Figura 9. Se ha utilizado el programa `velocidadradial.cpp` para diferentes posiciones en el interior del Sol y velocidades iniciales usando el método de estudio *Axiones KK* para la inicialización descrito en la metodología.

El objetivo de este apartado es calcular el periodo de estas órbitas y la velocidad de escape que deberían de tener estos axiones. Se puede calcular el periodo de tres formas diferentes:

- Con la tercera ley de Kepler:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}. \quad (25)$$

- Representando la distancia radial frente al tiempo que será una función periódica con periodo el periodo orbital.
- La velocidad radial cambia su signo cada medio periodo. El tiempo en el que esto sucede multiplicado por dos es el periodo orbital.

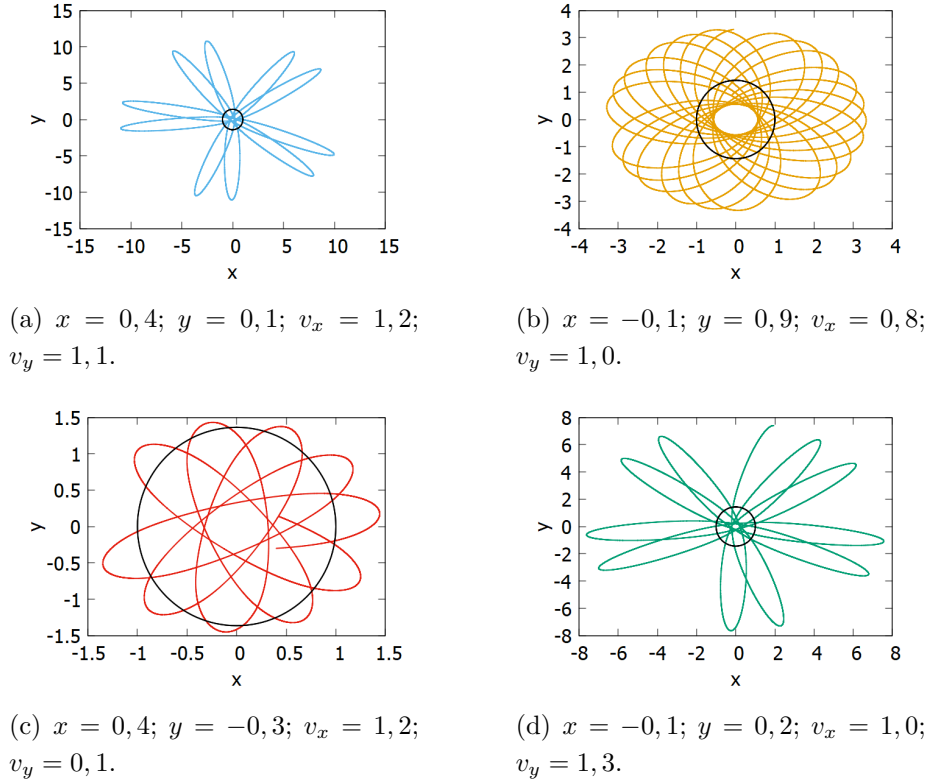


Figura 9: Órbitas cerradas de axiones KK alrededor del Sol.

Aquí se utiliza el segundo método porque para usar la tercera ley de Kepler es necesario conocer el semieje mayor de la órbita (es el mayor valor de  $r$  posible que ya se utiliza en el segundo método para observar los picos) y porque con el programa la velocidad radial es siempre positiva (está definida con una raíz) por lo que el tercer método no funcionará.

Se escoge una de las cuatro órbitas, la de valores iniciales:  $x = -0, 1; y = 0, 2; v_x = 1, 0; v_y = 1, 3$ . Se representa la distancia radial y la velocidad radial frente al tiempo para observar su periodicidad en las Figuras 10(a) y 10(b) respectivamente. Además se puede ver en la Figura 10(b) que realmente la velocidad nunca cambia de signo cómo ya se había mencionado. También se representa en la Figura 10(c) la velocidad radial frente a la distancia radial de la órbita elegida ya que será interesante para el siguiente apartado. Para las otras tres órbitas estudiadas estas gráficas son similares a las aquí representadas y se encuentran en el Anexo B.

Para calcular la velocidad de escape de cada axión en esas posiciones iniciales se utiliza el programa `scapevel.cpp`. En la Tabla 3 se recogen los valores del periodo y la velocidad de escape de las cuatro órbitas estudiadas tanto en las unidades del programa como en las unidades del SI.

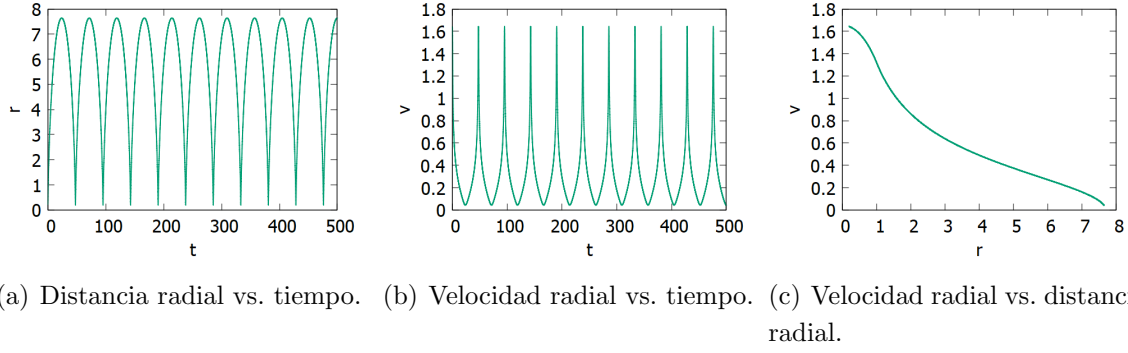


Figura 10: Figuras de la órbita cerrada de un axión alrededor del Sol con condiciones iniciales:  $x = -0,1$ ;  $y = 0,2$ ;  $v_x = 1,0$ ;  $v_y = 1,3$ . Se utilizan las unidades del programa.

Condiciones iniciales	T	$T \times 10^4$ (s)	$v_{esc}$	$v_{esc} \times 10^5$ (m/s)
$x = 0,4$ ; $y = 0,1$ ; $v_x = 1,2$ ; $v_y = 1,1$	165	26,2	1,70	7,42
$x = -0,1$ ; $y = 0,9$ ; $v_x = 0,8$ ; $v_y = 1,0$	31,2	4,98	1,50	6,55
$x = 0,4$ ; $y = -0,3$ ; $v_x = 1,2$ ; $v_y = 0,1$	9,12	1,45	1,70	7,42
$x = -0,1$ ; $y = 0,2$ ; $v_x = 1,0$ ; $v_y = 1,3$	95,2	15,2	1,75	7,64

Tabla 3: Periodo y velocidad de escape de cuatro órbitas de axiones inicialmente en el interior del Sol.

### 5.2.3. Perfiles de densidad en el Sol

Se puede buscar una relación entre la velocidad radial de axiones KK en órbita alrededor del Sol con la densidad de dichos axiones en el interior del Sol, esta relación son las fórmulas para obtener la densidad descritas en el Apartado 3.2. Si se calcula el valor de  $\rho(r)$  en cada punto de las cuatro órbitas obtenidas en el apartado anterior y se representa frente a la distancia radial se obtienen sus perfiles de densidad, tal y cómo se pueden ver en la Figura 11.

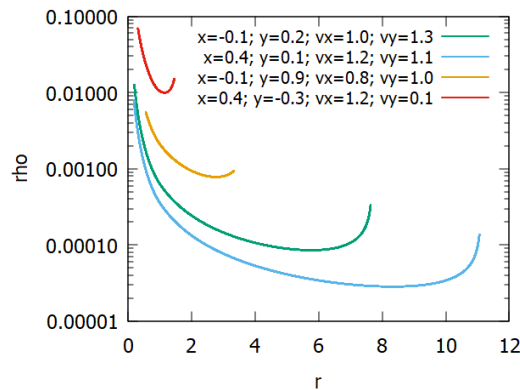


Figura 11: Perfiles de densidad de cuatro órbitas de axiones KK inicialmente situados en el interior del Sol.

En el Anexo C se han incluido los mismos cálculos y figuras obtenidas hasta ahora, pero para otras dos órbitas cerradas alrededor del Sol distintas a las cuatro que se han explicado aquí.

Resulta particularmente interesante realizar los perfiles de densidad de partículas cuya posición inicial es el centro del Sol. Se estudian así tres nuevas órbitas cerradas: una que llega a  $2R_{odot}$ , otra que llega a  $20R_{odot}$  y una última que alcanza los  $216 R_{odot}$ , es decir, que llega a la Tierra. Se representan en la Figura 12.

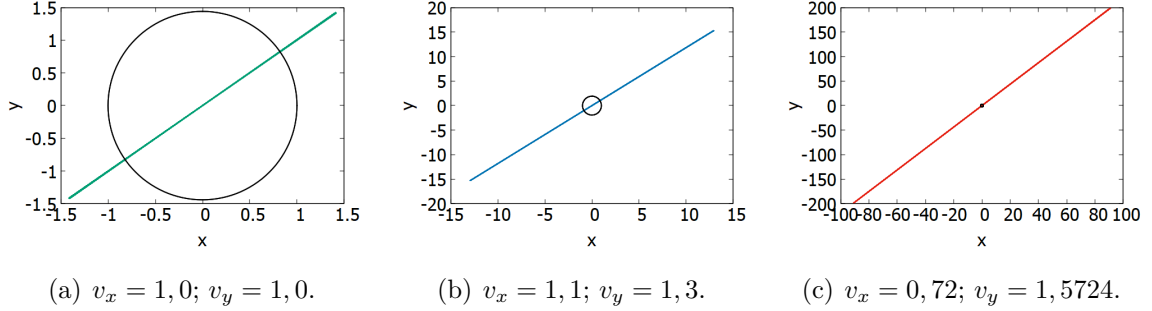


Figura 12: Órbitas cerradas de axiones inicialmente centrados en el Sol.

En el Anexo D se incluyen el resto de gráficas de estas órbitas, entre ellas las de la distancia radial frente al tiempo con las que se calcula el periodo. La velocidad de escape se calcula igual que en el apartado anterior. Los valores de los periodos y las velocidades de escape de estas tres órbitas se recogen en la Tabla 4.

Condiciones iniciales	T	$T \times 10^4$ (s)	$v_{esc}$	$v_{esc} \times 10^5$ (m/s)
$v_x = 1, 0; v_y = 1, 0$	13,43	2,140	1,75	7,64
$v_x = 1, 1; v_y = 1, 3$	398,0	63,42	1,75	7,64
$v_x = 0, 72; v_y = 1, 5724$	14360	2288	1,75	7,64

Tabla 4: Periodo y velocidad de escape de tres órbitas de axiones inicialmente en el centro del Sol.

Finalmente, una vez se han obtenido los periodos se representan los perfiles de densidad de estas tres órbitas en la Figura 13.

#### 5.2.4. Ritmo de producción en el Sol

Como se he mencionado, la coalescencia de fotones es el proceso mayoritario de formación de axiones KK en el interior del Sol. El ritmo de producción de axiones en el Sol de energía  $E$  por unidad de volumen debido a la coalescencia de fotones es:

$$\frac{dN_a}{dE} = \frac{g_{a\gamma\gamma}^2 m^4}{128\pi^3} p e^{-\frac{E}{T}}, \quad (26)$$

descrito así en el artículo [4]. De la fórmula anterior:



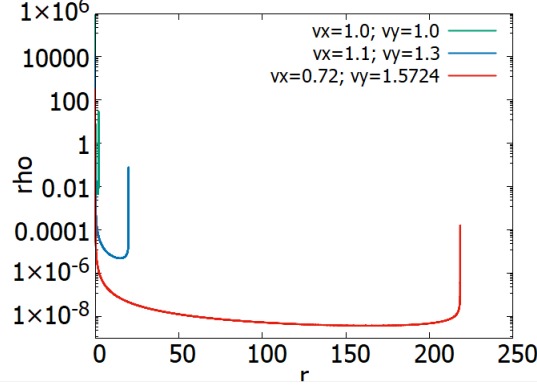


Figura 13: Perfiles de densidad de tres órbitas de axiones KK inicialmente situados en el centro del Sol.

- $g_{a\gamma\gamma} = 10^{-13} GeV^{-1}$  es la constante de acoplamiento de la coalescencia de fotones
- $m$  es la masa del axión a la que en el artículo [4] se le da tres valores posibles: 5 keV, 10 keV o 15 keV.
- $p = \sqrt{E^2 - m^2}$  es el momento del axión.
- $E = \frac{1}{2}v^2$  es su energía cinética.
- $T$  es la temperatura del Sol.

Se puede calcular el número de axiones ( $N_a$ ) que se producen en cada anillo solar (es decir, para cada valor de  $r$  y de  $T$  ya que esta varía con la distancia al centro solar) integrando para todas las velocidades radiales y, por lo tanto, energías que tienen los axiones en esa posición inicial dentro del Sol (de 0 hasta la velocidad de escape que se podría calcular con el programa `scapevel.cpp`). Si luego se integra para toda la esfera solar, considerando todos los anillos desde el centro del Sol a la superficie, se podría encontrar el número de axiones que dividido entre el volumen es la densidad.

Otro método alternativo de encontrar esta densidad sería utilizar en los programas un método de montecarlo para hallar todos los posibles perfiles de densidad. Además, integrando la expresión  $\frac{dN_a}{dE}$  se obtiene el flujo de axiones que llegan a la Tierra (axiones generados en el interior del Sol como el de la figura del apartado anterior):

$$\phi_a = 1,68 \cdot 10^9 cm^{-2} s^{-1} keV^{-1} \left( \frac{g_{a\gamma\gamma}}{10^{-10} GeV^{-1}} \right)^2 m^4 p \left( \frac{10}{0,2 + E^2} + 1 + 0,0006 E^3 \right) e^{-E}. \quad (27)$$

Para poder calcular de forma correcta el ritmo de producción de axiones en el Sol por coalescencia de fotones hay que tener en cuenta que un axión también se puede desintegrar en dos fotones en el proceso contrario. La tasa de desintegración de los axiones ( $a \rightarrow \gamma\gamma$ ), descrita en el artículo [5], es:

$$\tau^{-1} = \frac{g_{a\gamma\gamma}^2 m^3}{64\pi}. \quad (28)$$

### 5.3. Influencia de un segundo cuerpo masivo en el problema de los axiones KK

Por último, se trabaja con el programa SecondaryBodyKKaxions.cpp para poder considerar axiones KK en un Sistema Solar que incluye al Sol y a otro cuerpo masivo secundario. El objetivo es intentar ver cómo se modificarían las posibles trayectorias de estos axiones ante la presencia de otros planetas en un Sistema Solar más complejo.

Inicialmente el axión se encuentra en el interior del Sol y sus condiciones iniciales son:  $x = 0, 4$ ;  $y = -0, 3$ ;  $v_x = 0, 0$ ;  $v_y = 1, 3$ .

En la Figura 14 se comparan las trayectorias del axión cuando no hay cuerpo masivo secundario (Figura 14(a)), y cuando el cuerpo masivo secundario se deja fijo a una distancia  $d = 3$  y se modifica su masa para masas de  $M_2 = 0, 2$  en la Figura 14(b),  $M_2 = 0, 4$  en 14(c) y  $M_2 = 0, 8$  en 14(d).

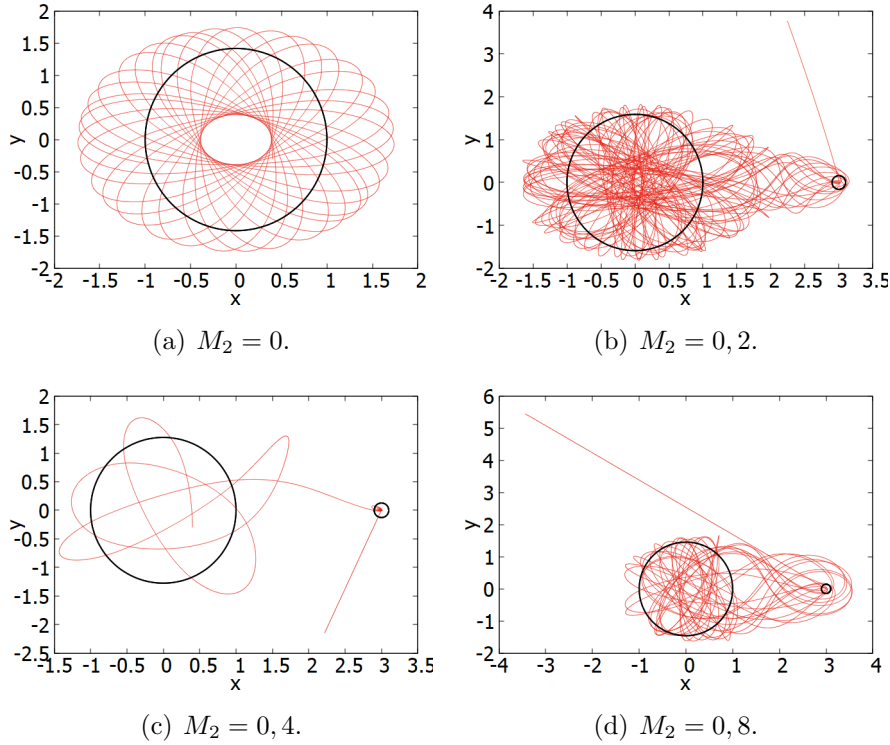


Figura 14: Órbita de un axión con condiciones iniciales:  $x = 0, 4$ ;  $y = 0, 3$ ;  $v_x = 0, 0$ ;  $v_y = 1, 3$  y un cuerpo masivo secundario a  $d = 3$  para diferentes masas del mismo. Se utilizan las unidades del programa.

Ahora se cambia la distancia entre el cuerpo masivo secundario y el Sol en la Figura 15 y se le aporta una masa fija  $M_2 = 0, 3$  para poder ver los posibles efectos en la órbita del axión a distancias  $d = 1$  (Figura 15(b)),  $d = 3$  (Figura 15(c)) y  $d = 5$  (Figura 15(d)). De nuevo, se puede comparar con la situación sin cuerpo masivo secundario (Figura 15(a)). Se puede observar como la captura gravitacional se comparte entre los dos cuerpos masivos hasta que la partícula escapa. Hay que tener en cuenta que

esto es simplemente el caso de la trayectoria de un axión con una posición y velocidad inicial concretas, para hacer un estudio estadístico habría que implementar el método de Montecarlo en los programas.

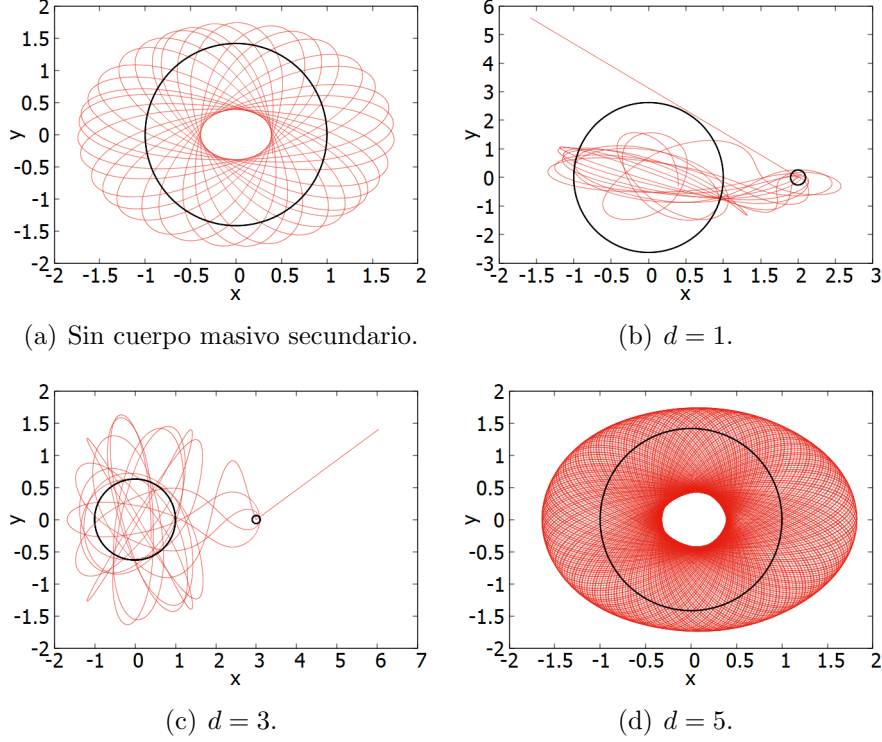


Figura 15: Órbita de un axión con condiciones iniciales:  $x = 0, 4$ ;  $y = 0, 3$ ;  $v_x = 0, 0$ ;  $v_y = 1, 3$  y un cuerpo masivo secundario con  $M_2 = 0, 3$  a diferentes distancias del Sol. Se utilizan las unidades del programa.

## 6. Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo ha consistido en comprender el modelado de materia oscura a través de la captura gravitacional. En mi trabajo he profundizado en el concepto de captura gravitacional que me ha permitido realizar simulaciones de un modelo de Sistema Solar simplificado que sólo considere el Sol y un cuerpo masivo secundario tal y como se describe en el artículo [7]. Las simulaciones realizadas tienen sus limitaciones, por ejemplo, Runge-Kutta no posee simetría temporal, una posible mejora de las mismas sería explorar otros métodos de integración numérica.

También se han investigado los axiones KK generados en el Sol y atrapados gravitacionalmente en el mismo. Se han generado órbitas cerradas de axiones inicialmente en el interior del Sol y se han obtenido sus periodos orbitales, sus velocidades de escape (comprobando que no superan los límites definidos) y sus perfiles de densidad. La densidad de estos axiones será mayor en las proximidades del Sol ya que en esta región contribuyen todos los perfiles de densidad de estas órbitas. Para obtener una

aproximación de la densidad de estas partículas en la vecindad de la órbita terrestre, los perfiles de densidad deberían convolucionarse con el ritmo de producción de axiones KK en el Sol por coalescencia de fotones, ya que es el método de producción más efectivo según [4].

Por último, se han combinado ambas ideas y se ha estudiado cómo varían las trayectorias de axiones KK en un modelo de Sistema Solar que considera dos cuerpos masivos variando las condiciones del cuerpo masivo secundario en las simulaciones. Hay que pensar que en el Sistema Solar real ningún planeta tiene las dimensiones ni se encuentra a la distancia del Sol utilizada para el cuerpo masivo secundario en las simulaciones. Estos valores se han exagerado para poder ver un mayor efecto pero esto no significa que el resto de planetas del Sistema Solar no tenga efecto ninguno sobre las partículas estudiadas.

Este trabajo es una inicialización al modelado de materia oscura en el Sistema Solar y al concepto de la captura gravitacional. El siguiente paso es mejorar las simulaciones para que lleguen a describir la situación real en la que se podrían encontrar las partículas de materia oscura en el Sistema Solar para así poder llegar a crear experimentos que quizás puedan detectarlas.

## Referencias

- [1] Annika H. G. Peter. “Dark matter in the Solar System. I. The distribution function of WIMPs at the Earth from solar capture”. *Physical Review D* 79.10 (2009).
- [2] Michael S. Turner. “WIMP and Axion Dark Matter”. (1997). To appear in the proceedings of the 1997 ICTP Summer School on High Energy Physics and Cosmology, Trieste, Italy, June 2–July 4, 1997. eprint: [hep-ph/9710467](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9710467) (hep-ph).
- [3] Q. Arnaud et al. “Solar Kaluza-Klein axion search with NEWS-G”. (1 2022), pp 012002. DOI: 10.1103/PhysRevD.105.012002. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.105.012002>.
- [4] L. Di Lella et al. “Search for solar Kaluza-Klein axions in theories of low-scale quantum gravity”. *Physical Review D* 62.12 (2000).
- [5] L. DiLella y K. Zioutas. “Observational evidence for gravitationally trapped massive axion(-like) particles”. *Astroparticle Physics* 19.1 (2003), pp. 145-170.
- [6] Vera C. Rubin y Jr. Ford W. Kent. “Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions”. 159 (1970), pp 379.
- [7] R. A. N. Araujo et al. “Sphere of influence and gravitational capture radius: a dynamical approach”. 391.2 (2008), pp. 675-684.
- [8] María Rubio Viana. *solarDM*. Accessed: 2024-08-13. 2024. URL: <https://github.com/mariarubioviana/solarDM>.

## Anexos

### A. Metodología: programas utilizados

En esta sección se explican el resto de programas utilizados en el trabajo:

- Tcaptura.cpp
- velocidadradial.cpp
- scapevel.txt
- SecondaryBodyKKaxions.cpp

El programa Tcaptura.cpp calcula el tiempo de captura de las partículas utilizando el método de inicialización *Araujo modificado*. La diferencia con solarDM.cpp es que en el programa Tcaptura.cpp establezco un valor de  $d$  inicial y un valor de  $d$  final. Con un bucle for se barren los valores de  $d$ . Para cada paso del bucle, es decir, para cada valor de  $d$  en la inicialización, calculamos el tiempo de captura que corresponde con el paso temporal para el cual la energía total de la partícula respecto al cuerpo masivo secundario pasa a ser positiva. El programa devuelve el tiempo de captura para cada valor de  $d$  que se recorre con el bucle.

El programa velocidadradial.cpp sirve para calcular la posición y velocidad radial de la partícula en cada punto de su trayectoria, para ello definimos la posición y la velocidad radial en la estructura de la partícula como:

$$RadialPosition = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (29)$$

$$RadialVelocity = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (30)$$

El programa scapevel.cpp se utiliza para calcular la velocidad de escape de los axiones KK por lo que se inicializará con el método de inicialización *Axiones KK*. Se añade la posición y la velocidad radial en la estructura de la partícula como en velocidadradial.cpp. Además el método de inicialización de forma que ahora requiere que le pase tres parámetros:  $(v, x, y)$ . El Sol sigue teniendo radio y masa unidad y lo coloco de nuevo en el origen de coordenadas. Sin embargo, la partícula tendrá  $v_y = 0$ ,  $v_x$  será el parámetro  $v$  proporcionado y su posición inicial serán los parámetros  $x$  e  $y$  también proporcionados al programa. En el programa establezco un valor de  $v$  inicial y un valor de  $v$  final. Un bucle for barre los valores de  $v$  inicializando el sistema cambiando el valor de  $v$  en cada paso del bucle. La velocidad de escape será el valor más pequeño de  $v$  para el cual en algún paso temporal de su evolución con Runge-Kutta, cuando la partícula se encuentra fuera del Sol (es decir, su posición radial es mayor que 1), la energía total de la partícula es positiva. El programa devuelve dicho valor de  $v$ .

El último programa que se ha utilizado es `SecondaryBodyKKaxions.cpp`, en él se utiliza un nuevo método de inicialización que combina los métodos segundo y tercero, es decir, estudia las posibles trayectorias de axiones KK en un Sistema Solar de dos cuerpos masivos. Se le pasarán al programa dos parámetros:  $(M_2, d)$ . El cuerpo masivo principal (el Sol), tendrá masa y radio unidad, velocidad inicial cero y estará situado en el origen. El cuerpo masivo secundario tendrá masa  $M_2$ , radio cero, velocidad inicial cero y estará situado en:  $x = d; y = 0$ . Sitúo el axión en el interior del Sol con la posición y velocidad inicial que me convenga para cada caso estudiado. También se añade la posición y la velocidad radial en la estructura de la partícula como en `velocidadradial.cpp`. El programa `SecondaryBodyKKaxions.cpp` devuelve el tiempo, la posición  $(x, y)$ , la posición radial y la velocidad radial de la partícula para cada punto estudiado de su trayectoria.

## B. Figuras del resto de órbitas cerradas de axiones inicialmente en el Sol

En el Apartado 5.2.2 sólo se han representado las gráficas correspondientes a la órbita del axión con valores iniciales:  $x = -0,1; y = 0,2; v_x = 1,0; v_y = 1,3$ . Pero se han obtenido otras tres órbitas distintas más de axiones inicialmente en el interior del Sol.

Represento:

- Figura 16: distancia radial frente a tiempo

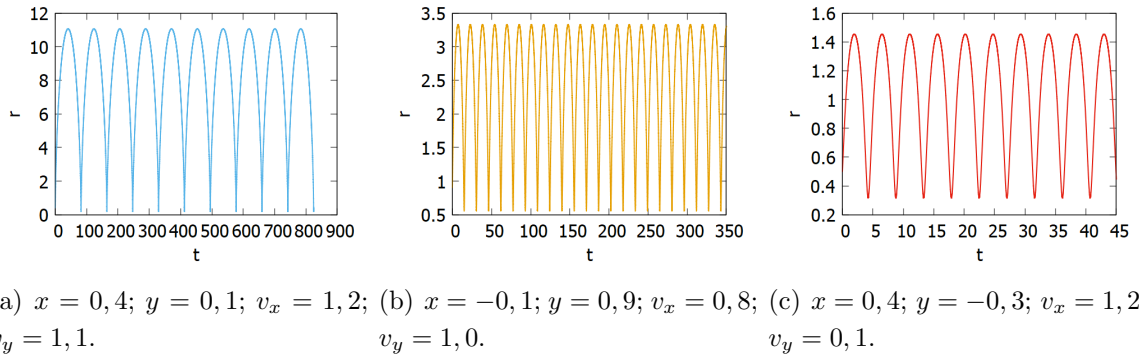


Figura 16: Distancia radial frente a tiempo de axiones KK en órbita cerrada alrededor del Sol. Se utilizan las unidades del programa.

- Figura 17: velocidad radial frente a tiempo
- Figura 18: velocidad radial frente a distancia radial

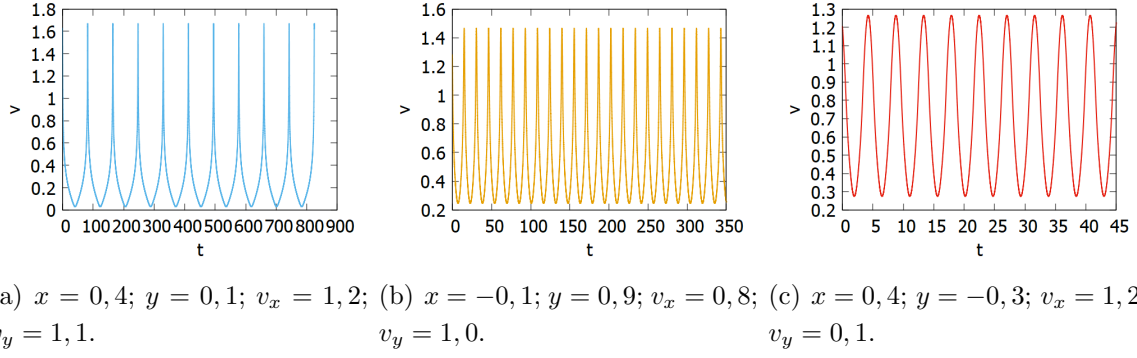


Figura 17: Velocidad radial frente a tiempo de axiones KK en órbita cerrada alrededor del Sol. Se utilizan las unidades del programa.

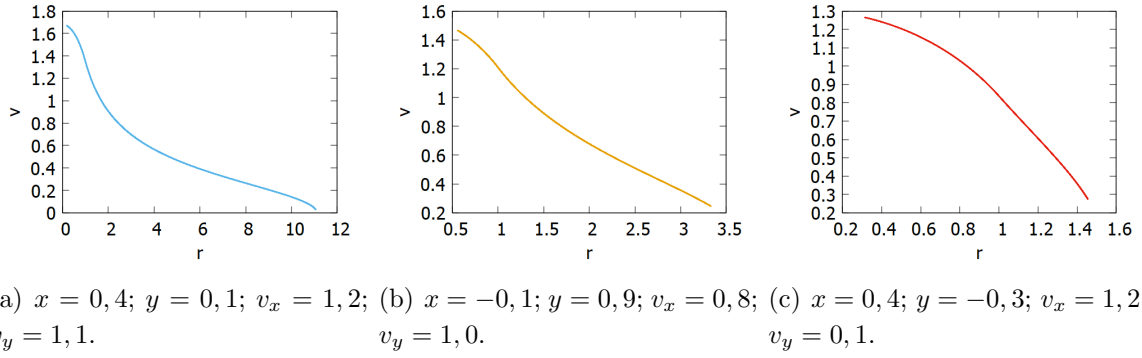


Figura 18: Velocidad radial frente a la distancia radial de axiones KK en órbita cerrada alrededor del Sol. Se utilizan las unidades del programa.

### C. Órbitas extra de axiones KK alrededor del Sol

Las dos órbitas extra de axiones alrededor del Sol se representan en las Figuras 19(a) y 19(b). Una de ellas se descartó porque a pesar de tener una órbita cerrada inicialmente no se encuentra dentro del Sol (es la representada de color morado).

Se representa también la distancia radial frente al tiempo en las Figuras 20(a) y 21(a) ya que las he utilizado para calcular los periodos de las órbitas, que se presentan, junto a sus velocidades de escape, en la Tabla 5. También represento la velocidad radial frente al tiempo (Figura 20(b) y Figura 21(b)) y frente a la distancia radial de las dos órbitas en las Figura 20(c) y 21(c).

Condiciones iniciales	T	$T \times 10^4$ (s)	$v_{esc}$	$v_{esc} \times 10^4$ (m/s)
$x = -0, 9; y = 0, 9; v_x = 0, 2; v_y = 1, 1$	68,4	10,9	1,30	5,68
$x = -0, 4; y = 0, 1; v_x = 0, 2; v_y = 1, 1$	7,00	1,12	1,70	7,42

Tabla 5: Periodo y velocidad de escape de dos órbitas de axiones alrededor del Sol.

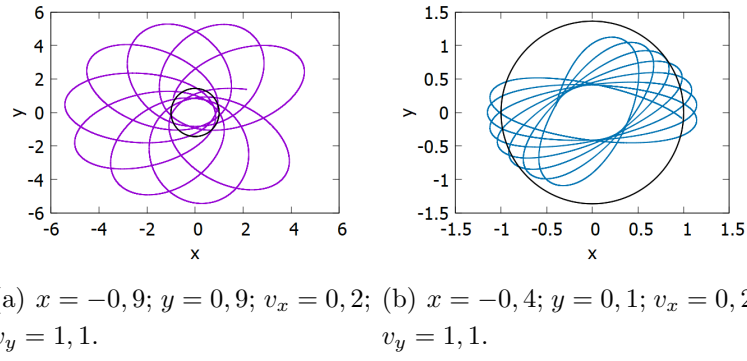


Figura 19: Órbitas cerradas de axiones alrededor del Sol. Se utilizan las unidades del programa.

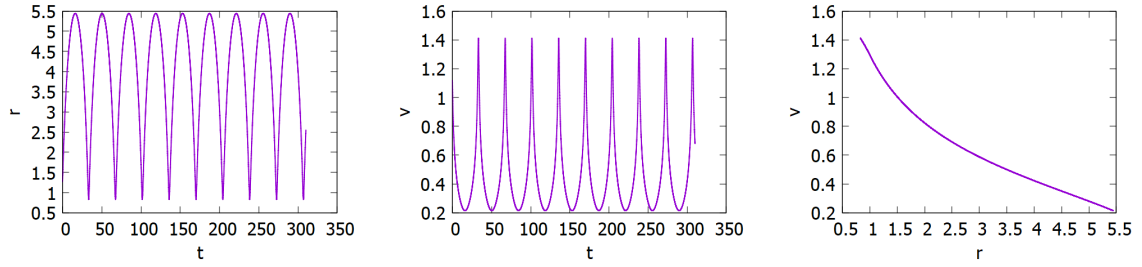
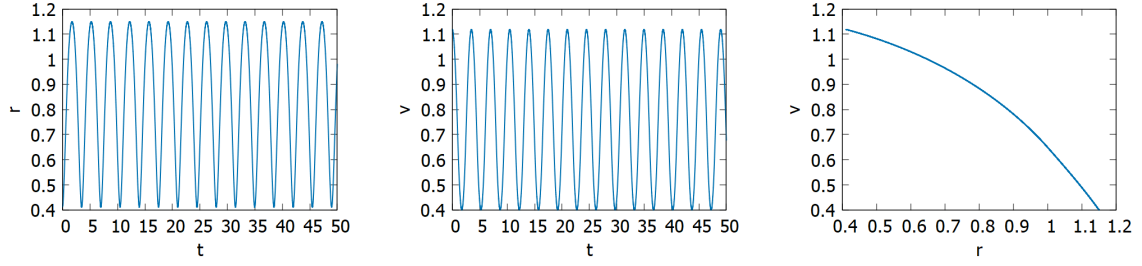


Figura 20: Figuras de la órbita cerrada de un axión alrededor del Sol con condiciones iniciales:  $x = -0,9; y = 0,9; v_x = 0,2$ . Se utilizan las unidades del programa.

Por último, represento los perfiles de densidad de estas dos órbitas junto a los correspondientes a las cuatro órbitas estudiadas en el trabajo (Figura 22).





(a) Distancia radial vs. tiempo. (b) Velocidad radial vs. tiempo. (c) Velocidad radial vs. distancia radial.

Figura 21: Figuras de la órbita cerrada de un axión alrededor del Sol con condiciones iniciales:  $x = -0,4$ ;  $y = 0,1$ ;  $v_x = 0,2$ ;  $v_y = 1,1$ . Se utilizan las unidades del programa.

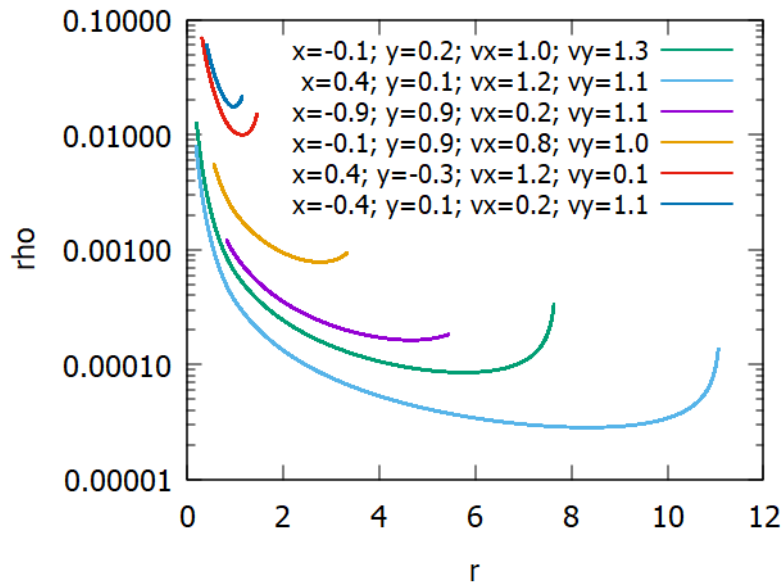


Figura 22: Perfiles de densidad de seis órbitas de axiones KK alrededor del Sol.

## D. Figuras de axiones KK inicialmente en el centro del Sol

Aquí se recogen las siguientes gráficas de las tres órbitas de axiones que inicialmente se encuentran en el centro del Sol:

- Figura 23: distancia radial frente al tiempo, utilizada para obtener el periodo de las órbitas.

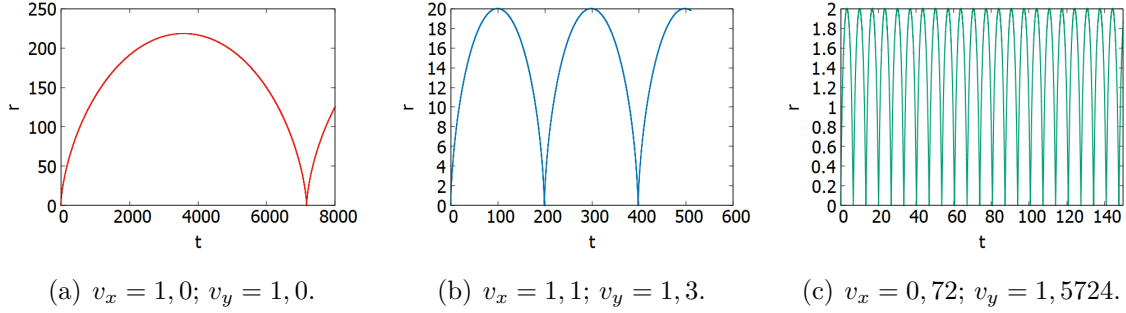


Figura 23: Distancia radial frente al tiempo de axiones inicialmente centrados en el Sol. Se utilizan las unidades del programa.

- Figura 24: velocidad radial frente al tiempo.

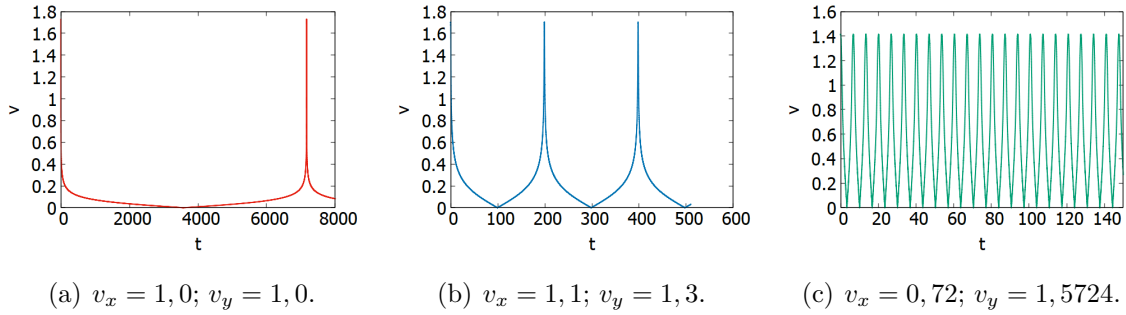


Figura 24: Velocidad radial frente al tiempo de axiones inicialmente centrados en el Sol. Se utilizan las unidades del programa.

- Figura 25: velocidad radial frente a distancia radial.

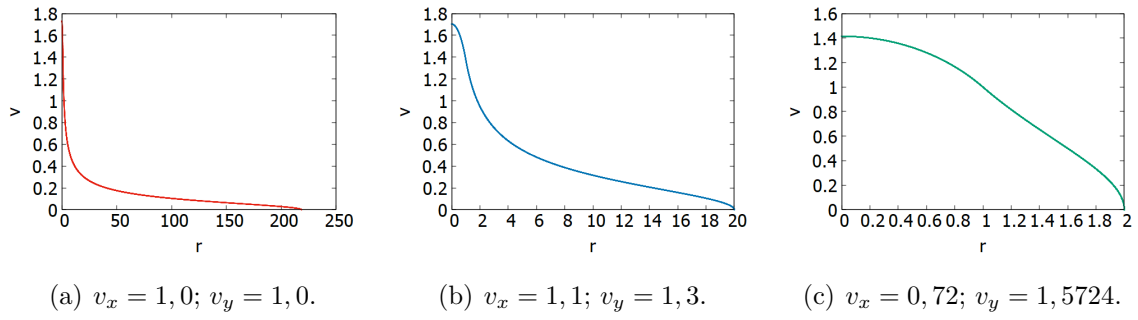


Figura 25: Velocidad radial frente a distancia radial de axiones inicialmente centrados en el Sol. Se utilizan las unidades del programa.