Spaţii vectoriale. Baze. Subspaţii vectoriale[1]

Definiţia 1. Fie $(\mathbb{K},+,\cdot)$ un corp numeric, $\mathcal{V}$ o mulţime nevidă şi legile de compoziţie

$$\oplus:\mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathcal{V}\ ,\quad (\overline{u},\overline{v})\mapsto\overline{u}\oplus\overline{v}\ \ \text{(adunare)}$$
$$\odot:\mathbb{K}\times\mathcal{V}\to\mathcal{V}\ ,\quad (\alpha,\overline{v})\mapsto\alpha\odot\overline{v}\ \ \text{(înmulţire cu scalari)}.$$

Spunem că $(\mathcal{V},\oplus,\odot)$ este un **spaţiu vectorial** (**liniar**) peste corpul $\mathbb{K}$ dacă au loc următoarele proprietăţi:

- comutativitatea adunării: $\overline{u}\oplus\overline{v}=\overline{v}\oplus\overline{u}\ ,\ (\forall)\overline{u},\overline{v}\in\mathcal{V}$;
- asociativitatea adunării: $(\overline{u}\oplus\overline{v})\oplus\overline{w}=\overline{u}\oplus(\overline{v}\oplus\overline{w})\ ,\ (\forall)\overline{u},\overline{v},\overline{w}\in\mathcal{V}$;
- existenţa elementului neutru $\overline{0}$ pentru adunare: $\overline{v}\oplus\overline{0}=\overline{v}\ ,\ (\forall)\overline{v}\in\mathcal{V}$;
- orice element $\overline{v}\in\mathcal{V}$ are un simetric $\overline{v}'\overset{not}{=}-\bar{v}\in\mathcal{V}$ (vectorul opus): $\overline{v}\oplus\overline{v}'=\overline{0}$;
- distributivitatea înmulţirii cu scalari faţă de adunare:
  - la stânga: $\alpha\odot(\overline{u}\oplus\overline{v})=\alpha\odot\overline{u}\oplus\alpha\odot\overline{v}\ ,\ (\forall)\alpha\in\mathbb{K},\overline{u},\overline{v}\in\mathcal{V}$;
  - la dreapta: $(\alpha+\beta)\odot\overline{v}=\alpha\odot\overline{v}\oplus\beta\odot\overline{v}\ ,\ (\forall)\alpha,\beta\in\mathbb{K},\overline{v}\in\mathcal{V}$;
- asociativitatea înmulţirii cu scalari: $(\alpha\cdot\beta)\odot\overline{v}=\alpha\odot(\beta\odot\overline{v})\ ,\ (\forall)\alpha,\beta\in\mathbb{K},\overline{v}\in\mathcal{V}$;
- existenţa elementului neutru 1 la înmulţirea cu scalari: $1\odot\overline{v}=\overline{v}\ ,\ (\forall)\overline{v}\in\mathcal{V}$.

Precizăm că elementele unui spaţiu vectorial se numesc vectori şi se notează, dacă nu este altfel precizat, prin litere latine cu bară deasupra. Elementele corpului $\mathbb{K}$ se numesc scalari şi se notează cu litere greceşti. De obicei $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, caz în care vorbim despre un spaţiu vectorial real. În continuare, fără riscul de a face confuzii, vom nota cele două operaţii prin " $+$ " şi " $\cdot$ ". Avem imediat că $0\cdot\bar{v}=\bar{0}$ ($\alpha=\beta=0$ în distributivitatea înmulţirii cu scalari faţă de adunare la dreapta), $\alpha\cdot\bar{0}=\bar{0}$ ($\bar{u}=\bar{v}=\bar{0}$ în distributivitatea înmulţirii cu scalari faţă de adunare la stânga şi elementul neutru la adunare) şi $(-1)\bar{v}=-\bar{v}$, opusul lui $\bar{v}$ ($\alpha=1,\beta=-1$ în distributivitatea înmulţirii cu scalari faţă de adunare la dreapta).

[1]Cristian Lăzureanu - Note de curs

Pe lângă spaţiul aritmetic $\mathbb{R}^n$ şi spaţiul vectorilor legaţi $\mathcal{V}_O$, alte exemple de spaţii vectoriale cunoscute sunt: spaţiul liniar al matricelor cu m linii şi n coloane, notat $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, spaţiul liniar $\mathbb{R}_n[X]$ al polinoamelor de gradul n cu coeficienţi reali, spaţiul liniar al şirurilor, spaţiul liniar al funcţiilor continue etc. Planul geometric poate fi modelat ca spaţiu vectorial fixând un punct O şi asociind fiecărui punct P din plan vectorul $\overrightarrow{OP}$ (vectorul de poziţie). Îl vom identifica cu $\mathbb{R}^2$. Analog se modelează şi spaţiul geometric, care se identifică cu $\mathbb{R}^3$.

O mulţime de vectori din spaţiul vectorial $\mathcal{V}$ formează un **sistem de vectori** şi-l notăm, de obicei, prin $S = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_m\}$. O **combinaţie liniară** a vectorilor din S este o sumă de tipul

$$\alpha_1\overline{v}_1 + \alpha_2\overline{v}_2 + \ldots + \alpha_m\overline{v}_m,$$

unde coeficienţii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sunt scalari. Spunem că un vector $\overline{v} \in \mathcal{V}$ se scrie ca o **combinaţie liniară a vectorilor din** S dacă există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ astfel ca

$$\overline{v} = \alpha_1\overline{v}_1 + \alpha_2\overline{v}_2 + \ldots \alpha_m\overline{v}_m.$$

De exemplu, considerând sistemul de vectori $S = \{\bar{v}_1 = (1,1), \bar{v}_2 = (0,1)\}$ în spaţiul $\mathbb{R}^2$, vectorul $\bar{x} = (3,4)$ se poate scrie ca o combinaţie liniară a vectorilor din S deoarece

$$3\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = 3(1,1) + (0,1) = (3,3) + (0,1) = (3,4) = \bar{x}.$$

Definiţia 2. Un sistem de vectori se numeşte **liniar dependent** dacă unul din vectorii săi se poate scrie ca o combinaţie liniară a celorlalţi vectori din sistem.

Altfel spus, dacă $S = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_m\}$, $\alpha_1\overline{v}_1 + \alpha_2\overline{v}_2 + \ldots + \alpha_m\overline{v}_m = \bar{0}$ şi cel puţin doi coeficienţi α_i sunt nenuli, atunci S este liniar dependent.

De exemplu, să considerăm sistemul de vectori $S_1 = \{\bar{v}_1 = (1,2), \bar{v}_2 = (2,4)\}$ din spaţiul aritmetic $\mathbb{R}^2$. Observăm că $2\bar{v}_1 - \bar{v}_2 = (0,0)$ sau $\bar{v}_2 = 2\bar{v}_1$, desi S_1 este un sistem de vectori liniar dependent.

Definiţia 3. Un sistem de vectori se numeşte **liniar independent** dacă nici unul din vectorii săi nu poate fi scris ca o combinaţie liniară a celorlaţi vectori din sistem.

Astfel, dacă egalitatea

$$\alpha_1\overline{v}_1 + \alpha_2\overline{v}_2 + \ldots + \alpha_m\overline{v}_m = \bar{0}$$

implică

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0,$$

atunci sistemul $S = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_m\}$ este liniar independent.

Ca exemplu, vom arăta că sistemul $S_2 = \{\bar{v}_1 = (1,1), \bar{v}_2 = (2,-1)\} \subset \mathbb{R}^2$ este liniar independent. Condiţia $\alpha_1\overline{v}_1 + \alpha_2\overline{v}_2 = \bar{0}$ devine

$$\begin{aligned}
&\alpha_1(1,1) + \alpha_2(2,-1) = (0,0) \Leftrightarrow \\
&(\alpha_1, \alpha_1) + (2\alpha_2, -\alpha_2) = (0,0) \Leftrightarrow \\
&(\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) = (0,0) \Leftrightarrow \\
&\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Din ultima ecuaţie avem $\alpha_1 = \alpha_2$ cu care prima ecuaţie devine $3\alpha_1 = 0$. Atunci $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, deci sistemul de vectori S_2 este liniar independent. Remarcăm faptul că sistemul obţinut mai sus este un sistem liniar omogen ce are determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, deci el are doar soluţia banală.

Observăm cu uşurinţă că orice subsistem al unui sistem de vectori liniar independent este de asemenea liniar independent (vectorii eliminaţi au coeficienţii deja nuli).

Definiţia 4. Un sistem de vectori S se numeşte **sistem de generatori** ai spaţiului vectorial $\mathcal{V}$ dacă orice vector din $\mathcal{V}$ poate fi scris ca o combinaţie liniară a vectorilor din S.

Să verificăm că sistemul de vectori S_2 de mai sus este un sistem de generatori ai spaţiului aritmetic $\mathbb{R}^2$. Trebuie să arătăm că oricare ar fi vectorul $\bar{v} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ există scalarii $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ astfel ca $\bar{v} = \alpha_1\overline{v}_1 + \alpha_2\overline{v}_2$. Ultima condiţie devine în cazul nostru

$$(x,y) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(2,-1).$$

Efectuând calculele ca mai sus obţinem sistemul liniar în necunoscutele α_1, α_2:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = x \\ \alpha_1 - \alpha_2 = y \end{cases}$$

Cum determinantul sistemului este $-3 \neq 0$, sistemul de tip Cramer are soluţie unică, deci există α_1 şi α_2, pentru orice (x,y). În concluzie S_2 este sistem de generatori ai spaţiului $\mathbb{R}^2$.

Unicitatea soluţiei sistemului Cramer din acest ultim exemplu conduce la următoarea teoremă de unicitate a descompunerii unui vector după vectorii unui sistem.

Teorema 1. Fie $\mathcal{V}$ un spaţiu liniar şi $S \subset \mathcal{V}$ un sistem de vectori liniar independent. Dacă există descompunerea unui vector din $\mathcal{V}$ după vectorii din S, atunci ea este unică.

Demonstraţie. Prin reducere la absurd, presupunem că există două scrieri diferite ale unui vector $\bar{v}$ după vectorii din $S = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_m\}$:

$$\bar{v} = \alpha_1\overline{v}_1 + \alpha_2\overline{v}_2 + \ldots + \alpha_m\overline{v}_m = \beta_1\overline{v}_1 + \beta_2\overline{v}_2 + \ldots + \beta_m\overline{v}_m.$$

Rezultă

$$(\alpha_1 - \beta_1)\overline{v}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\overline{v}_2 + \ldots + (\alpha_m - \beta_m)\overline{v}_m = \bar{0}$$

şi cum S este liniar independent obţinem $\alpha_1 - \beta_1 = 0$, $\alpha_2 - \beta_2 = 0$, ..., $\alpha_m - \beta_m = 0$, adică descompunerile sunt identice, contradicţie. Deci presupunerea făcută este falsă, ca atare descompunerea este unică. ■

Următoarea noţiune este legată de noţiunea de reper din spaţiul geometric tridimensional.

Definiţia 5. Fie $\mathcal{V}$ un spaţiu liniar şi $B \subset \mathcal{V}$ un sistem de vectori. B se numeşte **bază** a spaţiului $\mathcal{V}$ dacă este liniar independent şi sistem de generatori ai lui $\mathcal{V}$.

Din exemplele precedente avem că S_2 este o bază a spaţiului aritmetic $\mathbb{R}^2$. Această bază nu este unică, putând schimba vectorii astfel încât acel determinant obţinut în calcule să fie nenul. Există şi situaţia în care acel determinant este al matricei unitate, caz în care vorbim despre cea mai simplă bază a unui spaţiu vectorial, **baza canonică**. Pentru $\mathbb{R}^2$, baza canonică este

$$B_c = \{\bar{e}_1 = (1,0), \bar{e}_2 = (0,1)\}.$$

Mai general, baza canonică a spaţiul aritmetic $\mathbb{R}^n$ este

$$B_c = \{\bar{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0), \bar{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, \bar{e}_n = (0,0,0,\ldots,1)\}$$

şi orice vector $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se scrie sub forma

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \ldots + x_n\bar{e}_n.$$

Pentru spaţiul polinoamelor de gradul 2,

$$\mathbb{R}_2[X] = \{p(X) = a + bX + cX^2 \ : \ a, b, c \in \mathbb{R}\},$$

baza canonică este

$$B_c = \{p_1(X) = 1, p_2(X) = X, p_3(X) = X^2\},$$

iar orice polinom are scrierea

$$p(X) = a + bX + cX^2 = ap_1(X) + bp_2(X) + cp_3(X).$$

Pentru spaţiul matricelor pătratice de ordinul doi,

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ : \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

baza canonică este dată de

$$B_c = \{E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\},$$

orice matrice A scriindu-se sub forma

$$A = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4.$$

În general, dacă $B_c = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ este baza canonică a spaţiului vectorial $\mathcal{V}$, orice vector $\bar{v} \in \mathcal{V}$ se scrie în mod unic în funcţie de vectorii din baza canonică sub forma

$$\bar{v} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \ldots + x_n\bar{e}_n,$$

numită **expresia analitică** a lui $\bar{v}$, unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se vor numi **coordonatele** lui $\bar{v}$ în baza canonică. Acestei scrieri îi corespunde matricea coloană

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

şi convenim că atunci când lucrăm sub formă matriceală, vectorii ”se pun” pe coloane. Dacă mai considerăm un vector, mai obţinem o matrice coloană ş.a.m.d. Atunci putem defini **matricea unui sistem de vectori relativ la baza canonică** ca fiind matricea ce are pe coloane coordonatele vectorilor din sistem în baza canonică. Vom nota această matrice prin T_{B_cS}. Este evident că dacă sistemul de vectori este chiar B_c atunci matricea ascociată este chiar matricea identitate I_n.

Ca exemplu, fie sistemul de vectori $S = \{\bar{v}_1 = (1, 2, 3), \bar{v}_2 = (-1, 0, 4)\} \subset \mathbb{R}^3$. Baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$ este $B_c = \{\bar{e}_1 = (1, 0, 0), \bar{e}_2 = (0, 1, 0), \bar{e}_3 = (0, 0, 1)\}$ şi avem

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= (1, 2, 3) = (1, 0, 0) + (0, 2, 0) + (0, 0, 3) = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3 \\ \bar{v}_2 &= (-1, 0, 4) = -(1, 0, 0) + 0(0, 1, 0) + 4(0, 0, 1) = -\bar{e}_1 + 0\bar{e}_2 + 4\bar{e}_3. \end{aligned}$$

Atunci matricea sistemul S relativ la baza canonică este

$$T_{B_cS} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(*relativ la baza canonică, pe coloane sunt exact componentele celor doi vectori*).

Vom arăta că S este liniar independent. Condiţia $\alpha_1\overline{v}_1 + \alpha_2\overline{v}_2 = \bar{0}$ devine

$$\begin{aligned}
&\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(-1,0,4) = (0,0,0) \Leftrightarrow \\
&(\alpha_1, 2\alpha_1, 3\alpha_1) + (-\alpha_2, 0, 4\alpha_2) = (0,0,0) \Leftrightarrow \\
&(\alpha_1 - \alpha_2, 2\alpha_1, 3\alpha_1 + 4\alpha_2) = (0,0,0) \Leftrightarrow \\
&\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 = 0 \\ 3\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ matricea sistemului } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Evident $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, deci S este liniar independent. Mai mult observăm că matricea sistemului obţinut este chiar T_{B_cS} şi are rangul egal cu 2, egal cu numărul de vectori liniari independenţi din S. Rezultatul se generalizează, având loc următoarea **teoremă a rangului**:

(*i*) **Metodă practică pentru liniar independenţă.** Fie T_{B_cS} matricea sistemului de vectori S relativ la baza canonică a spaţiului vectorial $\mathcal{V}$. Dacă *rang* $T_{B_cS} = m$, unde m este numărul de vectori din S, atunci S este liniar independent.

(*ii*) **Metodă practică pentru sistem de generatori.** Fie T_{B_cS} matricea sistemului de vectori S relativ la baza canonică a spaţiului vectorial $\mathcal{V}$. Dacă *rang* $T_{B_cS} = n$, unde n este numărul de vectori din B_c, atunci S este sistem de generatori ai lui $\mathcal{V}$.

(*iii*) **Metodă practică pentru baze.** Fie T_{B_cS} matricea sistemului de vectori S relativ la baza canonică a spaţiului vectorial $\mathcal{V}$. Dacă $m = n$, unde m este numărul de vectori din S şi n este numărul de vectori din B_c, iar *det* $T_{B_cS} \neq 0$, atunci S este bază a lui $\mathcal{V}$.

Modul de calcul al rangului matricei T_{B_cS} ne arată câţi şi care vectori trebuie păstraţi în S pentru a fi liniar independent.

Conform acestor criterii, sistemul de vectori din exemplul precedent nu este sistem de generatori şi nici bază pentru $\mathbb{R}^3$, deoarece numărul de vectori din S nu este 3, adică numărul de vectori din baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$.

Din ultimul criteriu deducem că orice bază a unui spaţiu vectorial are acelaşi număr de vectori. Vom spune că **dimensiunea spaţiului vectorial** este egală cu numărul vectorilor din baza lui canonică. Deci $dim\,\mathbb{R}^n = n$, $dim\,\mathbb{R}_2[X] = 3$, $dim\,\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$.

Problema 1. Se consideră vectorii $\bar{v}_1 = (1,1,1), \bar{v}_2 = (1,1,0), \bar{v}_3 = (-1,0,1)$, $\bar{v}_4 = (a,1,a)$, $a \in \mathbb{R}$.
a) Să se verifice dacă $S_1 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ este liniar independent;
b) Să se calculeze valoarea lui a pentru care sistemul de vectori $S_2 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_4\}$ este liniar dependent;
c) Să se stabilească dacă $S_3 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$ este un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^3$;
d) Pentru $a = 1$, să se extragă din S_3 o bază a lui $\mathbb{R}^3$.

Rezolvare. Vom aplica Teorema rangului.
a) Relativ la baza canonică B_c a lui $\mathbb{R}^3$, matricea sistemului de vectori S_1 este

$$T_{B_cS_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(am pus vectorii pe coloane).}$$

Alegem minorul de ordinul 2 dat de ultimele două linii: $d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, deci rangul matricei $T_{B_cS_1}$ este 2. Cum numărul de vectori din S_1 este tot 2 rezultă (din metoda practică pentru liniar independenţă) că S_1 este liniar independent.
b) Din metoda practică pentru liniar independentă avem că S_2, care are 3 vectori, este liniar dependent dacă $rang\,T_{B_cS_2} < 3$ (numărul de vectori din S_2). Dar

$$T_{B_cS_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix},$$

deci avem condiţia $det\,T_{B_cS_2} = 0$, adică $1 - a = 0$. Rezultă $a = 1$.
c) Matricea sistemului de vectori S_3 este

$$T_{B_cS_3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

Alegând minorul de ordinul 3: $d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, obţinem că $rang\, T_{B_c S_3} = 3 =$numărul de vectori din baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$. Conform metodei practice pentru sistem de generatori deducem că S_3 este sistem de ge-neratori pentru $\mathbb{R}^3$.
d) O bază B a lui $\mathbb{R}^3$ trebuie să conţină 3 vectori, iar $det\, T_{B_c B} \neq 0$. Atunci $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, deoarece în acest caz $det\, T_{B_c B} = d_3 = 1$. ■

Fie acum B_1 şi B_2 două baze ale spaţiului vectorial $\mathcal{V}$. Conform Teoremei 1, orice vector al bazei B_2 poate fi scris în mod unic în funcţie de vectorii din B_1. Matricea ce are pe coloane coordonatele astfel obţinute se numeşte **matricea de trecere** de la baza B_1 la baza B_2. Evident, dacă $B_1 = B_c$ şi $B_2 = B$, atunci matricea lui B relativ la baza canonică este $T_{B_c B}$, care va fi şi matricea de trecere de la baza canonică la baza B. Reţinem deci că matricea de trecere de la baza canonică la baza B se formează punând pe coloane vectorii din B.

Problema 2. În spaţiul aritmetic $\mathbb{R}^2$ se consideră sistemele de vectori
$B_1 = \{\bar{u}_1 = (1,1), \bar{u}_2 = (2,-1)\}$ şi $B_2 = \{\bar{v}_1 = (4,1), \bar{v}_2 = (0,-3)\}$.
a) Să se scrie matricile celor două sisteme relativ la baza canonică;
b) Să se verifice că B_1 şi B_2 sunt baze pentru $\mathbb{R}^2$;
c) Să se scrie vectorul $\bar{v}_1$ în baza B_1;
d) Să se determine matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_2.

Rezolvare. a) Matricea unui sistem de vectori relativ la baza canonică are pe coloane exact componentele vectorilor din sistem. Atunci

$$T_{B_c B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ şi } T_{B_c B_2} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

b) Baza canonică a lui $\mathbb{R}^2$ este $B_c = \{\bar{e}_1 = (1,0), \bar{e}_2 = (0,1)\}$. Din metoda practică pentru baze, B_1 este bază pentru $\mathbb{R}^2$ dacă are 2 vectori şi $det\ T_{B_c B_1} \neq 0$. Cum $det\ T_{B_c B_1} = -3$ rezultă că B_1 este bază. Analog B_2 este bază, deoarece are doi vectori şi $det\ T_{B_c B_2} = -12 \neq 0$.
c) Scrierea vectorului $\bar{v}_1$ în baza B_1 înseamnă găsirea scalarilor $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\bar{v}_1 = \alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2.$$

Această condiţie este echivalentă cu

$$(4,1) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(2,-1) \Leftrightarrow$$

$$(4,1) = (\alpha_1, \alpha_1) + (2\alpha_2, -\alpha_2) \Leftrightarrow$$
$$(4,1) = (\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 4 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

Scăzând cele două ecuaţii avem $3\alpha_2 = 3$, adică $\alpha_2 = 1$. Înlocuind în prima ecuaţie obţinem $\alpha_1 = 2$. Atunci scrierea lui $\bar{v}_1$ în baza B_1 este $\bar{v}_1 = 2\bar{u}_1 + \bar{u}_2$, iar coordonatele lui $\bar{v}_1$ în baza B_1 sunt $(2,1)$.
d) Matricea de trecere $T_{B_1B_2}$ are pe coloane coordonatele lui $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ în baza B_1. Coordonatele lui $\bar{v}_1$ în baza B_1 sunt $(2,1)$, din *c*). Pentru $\bar{v}_2$ avem

$$\bar{v}_2 = \beta_1\bar{u}_1 + \beta_2\bar{u}_2 \Leftrightarrow$$
$$(0,-3) = \beta_1(1,1) + \beta_2(2,-1) \Leftrightarrow$$
$$(0,-3)) = (\beta_1, \beta_1) + (2\beta_2, -\beta_2) \Leftrightarrow$$
$$(0,-3) = (\beta_1 + 2\beta_2, \beta_1 - \beta_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 + 2\beta_2 = 0 \\ \beta_1 - \beta_2 = -3 \end{cases}$$

Scăzând cele două ecuaţii avem $3\beta_2 = 3$, adică $\beta_2 = 1$. Înlocuind în prima ecuaţie obţinem $\beta_1 = -2$. Atunci scrierea lui $\bar{v}_2$ în baza B_1 este $\bar{v}_1 = -2\bar{u}_1 + \bar{u}_2$, iar coordonatele lui $\bar{v}_2$ în baza B_1 sunt $(-2,1)$. Scriind pe coloane, obţinem matricea de trecere $T_{B_1B_2} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
■

În Problema 2 observăm că, de exemplu, vectorul $\bar{v}_1$ are coordonate diferite în baze diferite. Vom nota cu $\bar{v}_{B_1}$ scrierea pe coloană a vectorului în baza B_1 şi cu $\bar{v}_{B_2}$ scrierea pe coloană în baza B_2. Ne interesează o legătură între cele două scrieri. Are loc **legea de schimbare a coordonatelor unui vector la schimbarea bazei**:

Propoziţia 1. Fie B_1, B_2 baze ale spaţiului vectorial $\mathcal{V}$ şi $\bar{v}$ un vector oarecare din $\mathcal{V}$. Atunci

$$\bar{v}_{B_1} = T_{B_1B_2}\bar{v}_{B_2}.$$

Demonstraţie. Pentru a uşura scrierea vom alege *dim* $\mathcal{V} = 2$. Atunci $B_1 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ şi $B_2 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$. Scriem, teoretic, vectorii din B_2 relativ la baza B_1 sub forma:

$$\bar{v}_1 = \alpha_1\bar{u}_1 + \alpha_2\bar{u}_2$$

$$\bar{v}_2 = \beta_1\bar{u}_1 + \beta_2\bar{u}_2,$$

adică matricea de trecere de la B_1 la B_2 este

$$T_{B_1B_2} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix}.$$

Pe de altă parte, vectorul $\bar{v}$ se scrie relativ la baza B_1, respectiv B_2 astfel:

$$\bar{v} = a_1\bar{u}_1 + b_1\bar{u}_2,$$

$$\bar{v} = a_2\bar{v}_1 + b_2\bar{v}_2.$$

Înlocuim $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$. Obţinem

$$\bar{v} = a_2\bar{v}_1 + b_2\bar{v}_2 = a_2(\alpha_1\bar{u}_1 + \alpha_2\bar{u}_2) + b_2(\beta_1\bar{u}_1 + \beta_2\bar{u}_2).$$

Identificând coeficienţii lui $\bar{u}_1$, respectiv $\bar{u}_2$, din cele două scrieri ale lui $\bar{v}$, avem

$$a_1 = a_2\alpha_1 + b_2\beta_1$$

$$b_1 = a_2\alpha_2 + b_2\beta_2$$

ceea ce este echivalent cu

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

adică $\bar{v}_{B_1} = T_{B_1B_2}\bar{v}_{B_2}$. ■

În particular, dacă se dă un vector $\bar{v}$ în baza canonică, atunci coordonatele sale într-o bază B pot fi obţinute matriceal din relaţia

$$\bar{v}_B = T_{BB_c}\bar{v} = T_{B_cB}^{-1}\bar{v},$$

sau pot fi obţinute rezolvând sistemul $\bar{v} = T_{B_cB}\bar{v}_B$.

Au loc şi următoarele proprietăţi ale matricelor de trecere de la o bază la altă bază.

Propoziţia 2. Fie B_1, B_2, B_3 baze ale spaţiului vectorial $\mathcal{V}$ şi B_c baza sa canonică. Atunci:

(i) $T_{B_2B_1} = T_{B_1B_2}^{-1}$;

(ii) $T_{B_1B_2} = T_{B_1B_3} \cdot T_{B_3B_2}$;

(iii) $T_{B_1B_2} = T_{B_cB_1}^{-1} \cdot T_{B_cB_2}$.

Demonstraţie. (i) Din Propoziţia 1, pentru un vector oarecare avem scrierile $\bar{v}_{B_1} = T_{B_1B_2}\bar{v}_{B_2}$, respectiv $\bar{v}_{B_2} = T_{B_2B_1}\bar{v}_{B_1}$. Matricea de trecere are determinantul nenul, deci înmulţind la stânga primei relaţii cu matricea $T^{-1}_{B_1B_2}$ obţinem

$$T^{-1}_{B_1B_2}\bar{v}_{B_1} = T^{-1}_{B_1B_2} \cdot T_{B_1B_2}\bar{v}_{B_2} = I_n\bar{v}_{B_2} = \bar{v}_{B_2}.$$

Comparând cele două scrieri ale lui $\bar{v}_{B_2}$, rezultă concluzia.
(ii) Pentru un vector oarecare avem

$$T_{B_1B_2}\bar{v}_{B_2} = \bar{v}_{B_1} = T_{B_1B_3}\bar{v}_{B_3} = T_{B_1B_3} \cdot T_{B_3B_2}\bar{v}_{B_2},$$

de unde obţinem egalitatea dorită.
(iii) Considerând $B_3 = B_c$ în egalitatea de la (ii) şi folosind rezultatul de la (i), rezultă

$$T_{B_1B_2} = T_{B_1B_c} \cdot T_{B_cB_2} = T^{-1}_{B_cB_1} \cdot T_{B_cB_2},$$

ceea ce încheie demonstraţia. ■

Problema 3. Se consideră bazele $B_1 = \{\bar{u}_1 = (1,1), \bar{u}_2 = (2,-1)\}$ şi $B_2 = \{\bar{v}_1 = (4,1), \bar{v}_2 = (0,-3)\}$ ale lui $\mathbb{R}^2$.
$a)$ Să se afle matricea de trecere de la baza B_1 la baza canonică;
$b)$ Să se scrie vectorul $\bar{v} = (1,-2)$ în baza B_1;
$c)$ Să se determine matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_2.

Rezolvare. $a)$ Avem formula $T_{B_1B_c} = T^{-1}_{B_cB_1}$. Cum $T_{B_cB_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ cu $det\ T_{B_cB_1} = -3$, rezultă $T^t_{B_cB_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $T^*_{B_cB_1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ şi
$T^{-1}_{B_cB_1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.
$b)$ Folosind scrierea matriceală avem

$$\bar{v}_{B_1} = T_{B_1B_c}\bar{v} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Atunci $\bar{v} = -\bar{u}_1 + \bar{u}_2$.
$c)$ Aplicând formula $T_{B_1B_2} = T^{-1}_{B_cB_1} \cdot T_{B_cB_2}$, obţinem

$$T_{B_1B_2} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \ ■$$

Întrebări teoretice

1. Definiţi noţiunea de sistem de vectori liniar dependenţi, respectiv sistem de vectori liniar independenţi.

2. Care este condiţia de definiţie ca sistemul de vectori $S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ din spaţiul vectorial $\mathcal{V}$ să fie liniar independent?

3. Cum se construieşte matricea ataşată unui sistem de vectori relativ la baza canonică? Cum se foloseşte această matrice la studiul independenţei liniare a sistemului respectiv de vectori?

4. Fie spaţiul vectorial $\mathcal{V}$ cu baza canonică $B_c = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ şi sistemul de vectori $S = \{\bar{u} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3, \bar{v} = b_1\bar{e}_1 + b_2\bar{e}_2 + b_3\bar{e}_3\}$. Scrieţi matricea sistemului S relativ la baza canonică. Precizaţi condiţia practică pentru ca S să fie liniar independent.

5. Definiţi noţiunea de sistem de generatori ai unui spaţiu vectorial.

6. Cum se foloseşte matricea unui sistem de vectori relativ la baza canonică pentru a arăta că acel sistem generează tot spaţiul vectorial?

7. Fie spaţiul vectorial $\mathcal{V}$ cu baza canonică $B_c = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ şi sistemul de vectori $S = \{\bar{u} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2, \bar{v} = b_1\bar{e}_1 + b_2\bar{e}_2, \bar{w} = c_1\bar{e}_1 + c_2\bar{e}_2\}$. Scrieţi matricea sistemului S relativ la baza canonică. Precizaţi condiţia practică pentru ca S să fie sistem de generatori ai spaţiului $\mathcal{V}$.

8. Definiţi noţiunea de bază a unui spaţiu vectorial? Scrieţi baza canonică a spaţiului aritmetic $\mathbb{R}^3$.

9. Fie $\mathcal{V}$ un spaţiu vectorial de dimensiune 3 şi S un sistem cu n vectori. În ce condiţii practice S este bază pentru V?

10. Ce înseamnă să scriem vectorul $\overline{v}$ în baza $B = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$?

11. Definiţi noţiunea de matrice de trecere de la o bază la altă bază.

12. Cum se construieşte matricea de trecere de la baza canonică la baza B? Cum se numeşte matricea T_{BB_c}? Care este legătura dintre T_{BB_c} şi T_{B_cB}? Dar între $T_{B_cB_1}, T_{B_cB_2}$ şi T_{B_1,B_2}?

13. Care este legea de schimbare a coordonatelor unui vector la schimbarea bazei?

Exerciţii

1. Folosind definiţia, arătaţi că sistemul de vectori S este liniar independent, unde:
$a)$ $S = \{\overline{v}_1 = (1, -1), \overline{v}_2 = (1, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$;

b) $S = \{\overline{v}_1 = (0,1,0), \overline{v}_2 = (2,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.
c) $S = \{\overline{v}_1 = (1,1,0), \overline{v}_2 = (1,2,-1), \overline{v}_3 = (0,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$.

2. Dacă sistemul de vectori $S_1 = \{v_1, v_2\}$ din spaţiul vectorial real $\mathcal{V}$ este liniar independent, studiaţi, folosind definiţia, liniar independenţa sistemului de vectori $S_2 = \{u_1 = 2v_1 - v_2, u_2 = 3v_1 + 2v_2\}$.

3. Discutaţi liniar dependenţa următoarelor sisteme de vectori:
a) $S = \{\overline{v}_1 = (2,m), \overline{v}_2 = (1,1)\} \subset \mathbb{R}^2$;
b) $S = \{\overline{v}_1 = (4,2,m), \overline{v}_2 = (2,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$;
c) $S = \{\overline{v}_1 = (1,2,0), \overline{v}_2 = (1,1,-1), \overline{v}_3 = (0,1,m)\} \subset \mathbb{R}^3$,
unde $m \in \mathbb{R}$.

4. Fie $S = \{\overline{v}_1 = (1,2,m), \overline{v}_2 = (0,1,1), \overline{v}_3 = (1,-1,1)\} \subset \mathbf{R}^3$. Determinaţi valoarea parametrului real m pentru care sistemul S este liniar dependent. Găsiţi apoi relaţia dintre cei trei vectori.

5. Arătaţi că vectorii $\overline{v}_1 = (1,3), \overline{v}_2 = (-1,1)$ sunt liniar independenţi şi determinaţi numerele reale a, b pentru care $(2,4) = a\overline{v}_1 + b\overline{v}_2$.

6. Studiaţi dacă sistemul de vectori S este un sistem de generatori pentru spaţiul vectorial $\mathcal{V}$, unde:
a) $S = \{\overline{v}_1 = (2,-2), \overline{v}_2 = (4,2), \overline{v}_3 = (1,-1)\},\ \mathcal{V} = \mathbb{R}^2$;
b) $S = \{\overline{v}_1 = (1,2,0), \overline{v}_2 = (0,-2,3), \overline{v}_3 = (1,0,3)\},\ \mathcal{V} = \mathbb{R}^3$.

Este S o bază a spaţiului respectiv?

7. Verificaţi dacă sistemul de vectori S este bază, unde:
a) $S = \{\overline{v}_1 = (1,2), \overline{v}_2 = (1,1)\} \subset \mathbb{R}^2$;
b) $S = \{\overline{v}_1 = (1,1,3), \overline{v}_2 = (1,2,0), \overline{v}_3 = (0,1,-3)\} \subset \mathbb{R}^3$.

8. *a*) Extrageţi din sistemul de vectori $S = \{\overline{v}_1 = (1,1,1), \overline{v}_2 = (1,1,0), \overline{v}_3 = (0,0,1), \overline{v}_4 = (1,0,1)\}$ o bază pentru $\mathbb{R}^3$.
b) Completaţi sistemul de vectori $S = \{\overline{v}_1 = (1,0,1), \overline{v}_2 = (1,-1,2)\}$ la o bază pentru $\mathbb{R}^3$.

9. Fie $B = \{\overline{v}_1 = (a,2), \overline{v}_2 = (-1,3)\} \subset \mathbb{R}^2$.
a) Determinaţi a pentru care B este o bază a spaţiului vectorial $\mathbb{R}^2$;
b) Pentru $a = 1$, calculaţi coordonatele vectorului $\overline{x} = (4,2)$ în baza B.

10. Fie sistemul de vectori $B = \{\overline{v}_1 = (a,0,1), \overline{v}_2 = (1,1,0), \overline{v}_3 = (1,0,-1)\}$.
a) Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ pentru care B este o bază pentru $\mathbb{R}^3$;
b) Pentru $a = 1$, aflaţi coordonatele lui $\overline{x} = (3,1,-4)$ în baza B.

11. Fie $B = \{\overline{v}_1 = (1,3), \overline{v}_2 = (-2,3)\} \subset \mathbb{R}^2$.

a) Arătaţi că B este o bază a spaţiului vectorial $\mathbb{R}^2$;
b) Scrieţi matricea de trecere de la baza canonică din $\mathbb{R}^2$ la baza B;
c) Determinaţi coordonatele vectorului $\overline{v}_B = (-4, 2)$ în baza B_c;
d) Calculaţi matricea de trecere de la baza B la baza canonică;
e) Determinaţi coordonatele vectorului $\overline{v} = (4, 5)$ în baza B.

12. Fie sistemele de vectori $B_1 = \{\overline{v}_1 = (3, -1), \overline{v}_2 = (-1, 2)\}$ şi $B_2 = \{\overline{u}_1 = (1, 2), \overline{u}_2 = (2, 1)\}$.
a) Verificaţi că B_1 şi B_2 sunt baze pentru $\mathbb{R}^2$;
b) Calculaţi matricea $T_{B_1B_2}$;
c) Determinaţi coordonatele vectorului $\bar{v}$ în baza B_1 ştiind că în baza B_2 are coordonatele $(4, -4)$.

13. Fie $T_{B_cB_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ şi $T_{B_1B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Determinaţi bazele B_1 şi B_2 ale spaţiului $\mathbb{R}^2$.

14. Fie baza $B_2 = \{\overline{v}_1 = (1, 0, 0), \overline{v}_2 = (0, 1, 0), \overline{v}_3 = (1, -1, 1)\}$ pentru $\mathbb{R}^3$. Găsiţi baza B_1 ştiind că matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_2 este

$$T_{B_1B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Subspaţii vectoriale

După cum sunt numite, subspaţiile vectoriale sunt submulţimi ale spaţiilor vectoriale formate din elemente cu aceleaşi proprietăţi. De exemplu, în spaţiul aritmetic $\mathbb{R}^3$ considerăm toţi vectorii cu prima componentă 0, în spaţiul polinoamelor de gradul 3 luăm doar polinoamele fără termen liber, în spaţiul matricelor pătratice considerăm numai matricele simetrice ($A^t = A$) etc. În general avem:

Definiţia 1. Fie spaţiul vectorial $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ peste corpul $\mathbb{K}$ şi $\mathcal{U}$ o submulţime nevidă a sa. Spunem că $\mathcal{U}$ este **subspaţiu vectorial** al lui $\mathcal{V}$ dacă $(\mathcal{U}, +, \cdot)$ este spaţiu vectorial.

Conform definiţiei, pentru a arăta că o submulţime este subspaţiu vectorial ar trebui să verificăm toate proprietăţile din definiţia spaţiului vectorial. Se poate însă şi mai simplu, conform următoarei propoziţii.

Propoziţia 1. Fie spaţiul vectorial $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ peste corpul $\mathbb{K}$ şi $\mathcal{U}$ o submulţime nevidă a sa. Atunci $\mathcal{U}$ este subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{V}$ dacă şi numai dacă
$(Sv1)$ $\bar{u} + \bar{v} \in \mathcal{U}$, $(\forall)\bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{U}$;
$(Sv2)$ $\alpha\bar{u} \in \mathcal{U}$, $(\forall)\alpha \in \mathbb{K}, \bar{u} \in \mathcal{U}$.

Demonstraţie. " $\Rightarrow$ " Ştim că $\mathcal{U}$ este subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{V}$ şi trebuie să verificăm $(Sv1)$ şi $(Sv2)$. Cum $\mathcal{U}$ este subspaţiu vectorial rezultă că cele două operaţii sunt legi de compoziţie cu valori în $\mathcal{U}$, adică ceea ce trebuia verificat.
" $\Leftarrow$ " Acum au loc cele două proprietăţi, $(Sv1)$ şi $(Sv2)$, şi verificăm toate proprietăţile din definiţia spaţiului vectorial. Din ipoteză, cele două operaţii sunt legi de compoziţie cu valori în $\mathcal{U}$, iar proprietăţile de comutativitate, asociativitate, distributivitate ce au loc în $\mathcal{V}$ rămân valabile şi în $\mathcal{U}$. Din $(Sv2)$ avem că $0 \cdot \bar{u} = \bar{0} \in \mathcal{U}$, deci elementul neutru din $\mathcal{V}$ este şi în $\mathcal{U}$. Tot din $(Sv2)$ rezultă că $(-1)\bar{u} = -\bar{u} \in \mathcal{U}$, deci orice vector din $\mathcal{U}$ are un simetric (opus) tot

în $\mathcal{U}$ şi de asemenea $1\bar{u} = \bar{u} \in \mathcal{U}$. ■

Să verificăm dacă $\mathcal{U}_1 = \{(x, y, 1) : x, y \in \mathbb{R}\}$ este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^3$. Fie $\bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{U}_1$, adică $\bar{u} = (x_1, y_1, 1)$ şi $\bar{v} = (x_2, y_2, 1)$. Atunci
$\bar{u} + \bar{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 2) = (x, y, 2) \notin \mathcal{U}_1$, adică proprietatea $(Sv1)$ nu este verificată, deci $\mathcal{U}_1$ nu este subspaţiu vectorial.

În alt exemplu considerăm spaţiul polinoamelor de gradul întâi cu coeficienţi reali, $\mathbb{R}_1[X] = \{a + bX : a, b \in \mathbb{R}\}$ şi submulţimea $\mathcal{U}$ a polinoamelor de gradul întâi cu coeficienţi egali, $\mathcal{U}_2 = \{a + aX : a \in \mathbb{R}\}$. Atunci $\mathcal{U}_2$ este subspaţiu vectorial. Într-adevăr, fie $p(X), q(X) \in \mathcal{U}_2$, adică $p(X) = a_1 + a_1X$ şi $q(X) = a_2 + a_2X$. Atunci $p(X) + q(X) = (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2)X = a + aX \in \mathcal{U}_2$, deci $(Sv1)$ este verificată. De asemenea, $\alpha p(X) = \alpha(a_1 + a_1X) = \alpha a_1 + \alpha a_1X = a + aX \in \mathcal{U}_2$, deci şi $(Sv2)$ este verificată. Conform Propoziţiei 1 rezultă că $\mathcal{U}_2$ este subspaţiu vectorial.

Cele două condiţii, $(Sv1)$ şi $(Sv2)$, pot fi înlocuite printr-una singură, numită **condiţia de subspaţiu vectorial**.

Propoziţia 2. Fie spaţiul vectorial $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ peste corpul $\mathbb{K}$ şi $\mathcal{U}$ o submulţime nevidă a sa. Atunci $\mathcal{U}$ este subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{V}$ dacă şi numai dacă

$$(Sv) \quad \alpha\bar{u} + \beta\bar{v} \in \mathcal{U}, \ (\forall)\alpha, \beta \in \mathbb{K}, \bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{U}.$$

Demonstraţie. " $\Rightarrow$ " Dacă $\mathcal{U}$ este subspaţiu vectorial atunci au loc proprietăţile $(Sv1)$ şi $(Sv2)$. Atunci, din $(Sv2)$ avem că $\alpha\bar{u}, \beta\bar{v} \in \mathcal{U}$, iar din $(Sv1)$ suma lor este tot în $\mathcal{U}$, adică $\alpha\bar{u} + \beta\bar{v} \in \mathcal{U}$.
" $\Leftarrow$ " Reciproc, dacă are loc proprietatea (Sv) atunci pentru $\alpha = \beta = 1$ obţinem $(Sv1)$, iar pentru $\beta = 0$, $(Sv2)$, ceea ce încheie demonstraţia. ■

Fiind şi spaţiu vectorial, în cazul unui subspaţiu vectorial putem vorbi şi despre baze şi, automat, despre dimensiunea subspaţiului. Pentru a găsi o *bază a subspaţiului vectorial* determinăm un sistem de generatori ai subspaţiului si arătăm că este liniar independent. **Dimensiunea** subspaţiului vectorial este egală cu numărul de vectori din baza găsită.

Să luăm, de exemplu, $\mathcal{U} = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Pentru $\bar{u} = (x_1, x_1) \in \mathcal{U}$ şi $\bar{v} = (x_2, x_2) \in \mathcal{U}$ avem

$$\begin{aligned} \alpha\bar{u} + \beta\bar{v} &= \alpha(x_1, x_1) + \beta(x_2, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_1) + (\beta x_2, \beta x_2) \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha x_1 + \beta x_2) = (x, x) \in \mathcal{U}, \end{aligned}$$

deci $\mathcal{U}$ este subspaţiu vectorial. Observăm că orice vector din $\mathcal{U}$ se scrie sub forma $(x,x) = x(1,1)$, deci vectorul $(1,1) \in \mathcal{U}$ generează subspaţiul $\mathcal{U}$. Deci $B_{\mathcal{U}} = \{(1,1)\}$ este sistem de generatori ai lui $\mathcal{U}$. Mai mult, fiind un singur vector, este şi liniar independent, deci $B_{\mathcal{U}}$ este bază pentru $\mathcal{U}$. Rezultă că $dim\, \mathcal{U} = 1$.

Ştim că un sistem de generatori ai spaţiului generează, prin combinaţii liniare între ei, tot spaţiul. Se pune problema ce se întâmplă dacă luăm un sistem de vectori oarecare şi considerăm toate combinaţiile liniare între ei.

Definiţia 2. Fie $S = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m\}$ un sistem de vectori în spaţiul vectorial $\mathcal{V}$ peste corpul $\mathbb{K}$. Mulţimea tuturor combinaţiilor liniare ale vectorilor din S cu coeficienţi din $\mathbb{K}$, notată $\mathcal{L}(S)$ formează **acoperirea liniară** a lui S:

$$\mathcal{L}(S) = \{\alpha_1\bar{u}_1 + \alpha_2\bar{u}_2 + \ldots + \alpha_m\bar{u}_m, (\forall)\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}\}$$

Structura acoperirii liniare este dată în propoziţia următoare.

Propoziţia 3. Fie $S = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m\}$ un sistem de vectori în spaţiul vectorial $\mathcal{V}$ peste corpul $\mathbb{K}$. Atunci $\mathcal{L}(S)$ este subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{V}$ şi dimensiunea lui este dată de numărul vectorilor liniar independenţi din S.

Demonstraţie. Fie $\bar{u} = \gamma_1\bar{u}_1 + \ldots + \gamma_m\bar{u}_m = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k\bar{u}_k \in \mathcal{L}(S)$ şi

$\bar{v} = \sum_{k=1}^{m} \delta_k\bar{u}_k \in \mathcal{L}(S)$. Atunci

$$\begin{aligned}\alpha\bar{u} + \beta\bar{v} &= \alpha\sum_{k=1}^{m}\gamma_k\bar{u}_k + \beta\sum_{k=1}^{m}\delta_k\bar{u}_k = \sum_{k=1}^{m}\alpha\gamma_k\bar{u}_k + \sum_{k=1}^{m}\beta\delta_k\bar{u}_k \\ &= \sum_{k=1}^{m}(\alpha\gamma_k + \beta\delta_k)\bar{u}_k = \sum_{k=1}^{m}\alpha_k\bar{u}_k \in \mathcal{L}(S),\end{aligned}$$

adică proprietatea (Sv) este verificată, deci $\mathcal{L}(S)$ este subspaţiu vectorial. Cum S este sistem de generatori pentru $\mathcal{L}(S)$, din el alegem un sistem maximal de vectori liniar independenţi (cel mai mare număr posibil), care va fi bază pentru $\mathcal{L}(S)$. Atunci dimensiunea lui $\mathcal{L}(S)$ este dată de numărul vectorilor liniar independenţi din S. ■

Această definiţie ne permite să spunem în loc de acoperirea liniară a lui S, subspaţiul generat de S.

Remarcăm că rezultatul de mai sus furnizează o modalitate de a construi subspaţii vectoriale pornind de la nişte vectori.

Ca o consecinţă a acestei propoziţii, pentru construirea lui $\mathcal{L}(S)$ procedăm astfel: folosind *metoda practică pentru liniar independenţă*, din S alegem un sistem maximal liniar independent, B. Atunci $\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(B)$, iar B este bază pentru $\mathcal{L}(S)$.

Problema 1. În spaţiul aritmetic $\mathbb{R}^3$ considerăm sistemul de vectori
$S = \{\bar{u}_1 = (1, -1, 1), \bar{u}_2 = (1, 1, 0), \bar{u}_3 = (2, 0, 1), \bar{u}_4 = (2, 2, 0)\}$.
$a)$ Să se extragă din S un sistem maximal de vectori liniar independenţi;
$b)$ Să se determine $\mathcal{L}(S)$ şi să se precizeze dimensiunea sa.

Rezolvare. $a)$ Matricea sistemului de vectori S relativ la baza canonică este

$$T_{B_cS} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vom determina rangul matricei T_{B_cS}. Pentru aceasta, alegem un minor de ordinul doi nenul, de exemplu $d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ pe care îl bordăm la ordinul trei:

$$d_3' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \;\; d_3'' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Deoarece aceşti minori de ordinul trei sunt nuli avem că *rang* $T_{B_cS} = 2$. Mai mult, $B = \{\bar{u}_1 = (1, -1, 1), \bar{u}_2 = (1, 1, 0)\} \subset S$ este un sistem maximal de vectori liniar independenţi (cu cei doi vectori s-a construit minorul d_2 care a determinat rangul matricei T_{B_cS}).
$b)$ Avem $\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(B) = \{\alpha_1\bar{u}_1 + \alpha_2\bar{u}_2, (\forall)\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$. Dar

$$\alpha_1\bar{u}_1 + \alpha_2\bar{u}_2 = \alpha_1(1, -1, 1) + \alpha_2(1, 1, 0) = (\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1).$$

Atunci $\mathcal{L}(S) = \{(\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1), (\forall)\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$. Mai mult, B este o bază a lui $\mathcal{L}(S)$ şi *dim* $\mathcal{L}(S) = 2$. ■

O altă consecinţă a Propoziţiei 3 este următoarea **metodă practică pentru subspaţii vectoriale**: fie $\mathcal{U}$ o submulţime a spaţiului vectorial $\mathcal{V}$ şi B un sistem de vectori liniar independenţi. Dacă $\mathcal{U} = \mathcal{L}(B)$ atunci $\mathcal{U}$ este subspaţiu vectorial având baza B.

Problema 2. Să se arate că $\mathcal{U} = \{(x, x + y, 2y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^3$. Să se determine o bază a sa şi să se precizeze *dim* $\mathcal{U}$.

Rezolvare. Mai întâi determinăm sistemul de generatori ai lui $\mathcal{U}$. Un vector oarecare din $\mathcal{U}$ se scrie sub forma

$$(x, x+y, 2y) = (x, x, 0) + (0, y, 2y) = x(1,1,0) + y(0,1,2),$$

de unde deducem că sistemul de vectori $B = \{(1,1,0), (0,1,2)\}$ generează orice vector din $\mathcal{U}$, adică îl generează pe $\mathcal{U}$. Să arătăm că B este liniar independent. Avem

$$T_{B_c B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Cum minorul de ordinul doi $d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ este nenul şi nu există minori de ordinul trei, rezultă că $rang\ T_{B_c B} = 2$, adică numărul de vectori din B. Atunci, conform criteriului practic pentru liniar independenţă, B este liniar independent. Rezultă că $\mathcal{U} = \mathcal{L}(B)$, deci $\mathcal{U}$ este subspaţiu vectorial, iar B este o bază a sa. Mai mult, $dim\ \mathcal{U} = 2$. ■

O altă modalitate de a construi subspaţii vectoriale este prin intermediul operaţiilor dintre subspaţii vectoriale.

Definiţia 3. Fie $\mathcal{U}_1$ şi $\mathcal{U}_2$ subspaţii vectoriale ale lui $\mathcal{V}$. Se numeşte **sumă a subspaţiilor vectoriale** $\mathcal{U}_1$ şi $\mathcal{U}_2$ mulţimea

$$\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 = \{\bar{v} \in \mathcal{V} :\ (\exists)\bar{u}_1 \in \mathcal{U}_1, (\exists)\bar{u}_2 \in \mathcal{U}_2 \text{ cu } \bar{v} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2\}.$$

Luând pe rând $\bar{u}_2 = \bar{0}_{\mathcal{V}}$, respectiv $\bar{u}_1 = \bar{0}_{\mathcal{V}}$, se constată uşor că $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$.

Definiţia 4. Fie $\mathcal{U}_1$ şi $\mathcal{U}_2$ subspaţii vectoriale ale lui $\mathcal{V}$. Se numeşte **sumă directă a subspaţiilor vectoriale** $\mathcal{U}_1$ şi $\mathcal{U}_2$ mulţimea

$$\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 = \{\bar{v} \in \mathcal{V} :\ (\exists!)\bar{u}_1 \in \mathcal{U}_1, (\exists!)\bar{u}_2 \in \mathcal{U}_2 \text{ cu } \bar{v} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2\}.$$

Deosebirea dintre cele două sume este că într-o sumă directă scrierea este unică.

Definiţia 5. Fie $\mathcal{U}_1$ şi $\mathcal{U}_2$ subspaţii vectoriale ale lui $\mathcal{V}$. Se numeşte **intersecţie a subspaţiilor vectoriale** $\mathcal{U}_1$ şi $\mathcal{U}_2$ mulţimea

$$\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \{\bar{v} \in \mathcal{V} :\ \bar{v} \in \mathcal{U}_1, \bar{v} \in \mathcal{U}_2\}.$$

Structurile acestor mulţimi sunt date în propoziţia ce urmează.

Propoziţia 4. Fie $\mathcal{U}_1$ şi $\mathcal{U}_2$ subspaţii vectoriale ale lui $\mathcal{V}$. Atunci $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$ şi $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathcal{V}$.

Demonstraţie. Fie $\bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$, adică există $\bar{u}_1, \bar{v}_1 \in \mathcal{U}_1$ şi $\bar{u}_2, \bar{v}_2 \in \mathcal{U}_2$ astfel ca $\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$, respectiv $\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$. Atunci

$$\alpha\bar{u} + \beta\bar{v} = \alpha(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) + \beta(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = (\alpha\bar{u}_1 + \beta\bar{v}_1) + (\alpha\bar{u}_2 + \beta\bar{v}_2).$$

Dar $\bar{u}_1, \bar{v}_1 \in \mathcal{U}_1$ şi din (Sv) rezultă $\alpha\bar{u}_1 + \beta\bar{v}_1 \in \mathcal{U}_1$. La fel, $\bar{u}_2, \bar{v}_2 \in \mathcal{U}_2$, de unde $\alpha\bar{u}_2 + \beta\bar{v}_2 \in \mathcal{U}_2$. Atunci rezultă că $\alpha\bar{u} + \beta\bar{v} \in \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$, adică proprietatea (Sv) este verificată pentru $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$. În concluzie, $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ este subspaţiu vectorial.

Analog, şi $\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$ este subspaţiu vectorial.

Rămâne să demonstrăm că intersecţia $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ este subspaţiu vectorial. Fie $\bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, deci $\bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{U}_1$ şi $\bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{U}_2$. Folosind proprietatea (Sv) pentru $\mathcal{U}_1$, respectiv $\mathcal{U}_2$, obţinem $\alpha\bar{u} + \beta\bar{v} \in \mathcal{U}_1$, respectiv $\alpha\bar{u} + \beta\bar{v} \in \mathcal{U}_2$. Atunci $\alpha\bar{u} + \beta\bar{v} \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, adică proprietatea (Sv) este verificată pentru $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$. Deci $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ este subspaţiu vectorial. ■

"Mărimea" sumei a două subspaţii vectoriale, raportată la operaţia de inclu-ziune, este subliniată de

Propoziţia 5. Fie $\mathcal{U}_1$ şi $\mathcal{U}_2$ subspaţii vectoriale ale lui $\mathcal{V}$. Atunci $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ este cel mai mic subspaţiu vectorial ce conţine atât pe $\mathcal{U}_1$ cât şi pe $\mathcal{U}_2$.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{U}$ un subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{V}$ astfel ca $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}$ şi $\mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}$. Fie $\bar{v} \in \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$, deci există $\bar{u}_1 \in \mathcal{U}_1$, $\bar{u}_2 \in \mathcal{U}_2$ cu $\bar{v} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$. Din alegerea lui $\mathcal{U}$ rezultă că $\bar{u}_1 \in \mathcal{U}$ şi $\bar{u}_2 \in \mathcal{U}$ şi, cum $\mathcal{U}$ este subspaţiu vectorial, $\bar{u}_1 + \bar{u}_2 \in \mathcal{U}$. Rezultă că $\bar{v} \in \mathcal{U}$. Cum $\bar{v}$ a fost luat arbitrar în $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$, obţinem că $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}$, adică ce trebuia demonstrat. ■

Caracterizarea faptului că o sumă este sumă directă este dată de următoarea **metodă practică pentru sumă directă**:

Propoziţia 6. Fie $\mathcal{U}_1$ şi $\mathcal{U}_2$ subspaţii vectoriale ale lui $\mathcal{V}$. Atunci suma celor două subspaţii este directă, $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$, dacă şi numai dacă $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \{\bar{0}\}$.

Demonstraţie. "$\Rightarrow$" Considerăm că suma este directă. Fie $\bar{v} \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ şi $\bar{u} \in \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$, adică există un unic $\bar{u}_1 \in \mathcal{U}_1$ şi un unic $\bar{u}_2 \in \mathcal{U}_2$ asfel ca $\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$. Cum $\bar{u}_1, \bar{v} \in \mathcal{U}_1$ şi $\bar{u}_2, \bar{v} \in \mathcal{U}_2$, putem scrie $\bar{u} = (\bar{u_1} - \bar{v}) + (\bar{u}_2 + \bar{v}) \in \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$. Cum scrierea lui $\bar{u}$ este unică, rezultă $\bar{u_1} - \bar{v} = \bar{u}_1$ şi $\bar{u}_2 + \bar{v} = \bar{u}_2$, deci $\bar{v} = \bar{0}$. Dar $\bar{v}$ a fost ales arbitrar din $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, deci

$\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \{\bar{0}\}$.
" $\Leftarrow$ " Fie $\bar{u}$ un vector oarecare din $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$. Considerăm că ar exista două scrieri sub formă de sumă pentru $\bar{u}$: $\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$, unde $\bar{u}_1, \bar{v}_1 \in \mathcal{U}_1$ şi $\bar{u}_2, \bar{v}_2 \in \mathcal{U}_2$. Rezultă că $\underbrace{\bar{u}_1 - \bar{v}_1}_{\in \mathcal{U}_1} = \underbrace{\bar{v}_2 - \bar{u}_2}_{\in \mathcal{U}_2} \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \{\bar{0}\}$. Atunci $\bar{u}_1 = \bar{v}_1$ şi $\bar{u}_2 = \bar{v}_2$, deci scrierea lui $\bar{u}$ este unică, adică suma este directă. ∎

Problema 3. În spaţiul aritmetic $\mathbb{R}^3$ se consideră subspaţiile $\mathcal{U}_1 = \mathcal{L}((1,2,0))$ şi $\mathcal{U}_2 = \mathcal{L}((1,0,1))$.
a) Să se descrie cele două subspaţii vectoriale;
b) Să se calculeze $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$;
c) Să se calculeze $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ şi să se precizeze dacă suma $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ este directă.

Rezolvare. *a*) Avem $\mathcal{U}_1 = \mathcal{L}((1,2,0)) = \{(\alpha, 2\alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$, respectiv
$\mathcal{U}_2 = \mathcal{L}((1,0,1)) = \{(\beta, 0, \beta) : \beta \in \mathbb{R}\}$.
b) Un element al sumei $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ se obţine însumând un vector din $\mathcal{U}_1$ cu altul din $\mathcal{U}_2$, adică $(\alpha, 2\alpha, 0) + (\beta, 0, \beta) = (\alpha + \beta, 2\alpha, \beta)$. Se obţine că
$\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 = \{(\alpha + \beta, 2\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.
c) Fie $\bar{u} \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$. Atunci $\bar{u} \in \mathcal{U}_1$ şi $\bar{u} \in \mathcal{U}_2$, deci $\bar{u} = (\alpha, 2\alpha, 0) = (\beta, 0, \beta)$. Rezultă $\alpha = \beta$, $2\alpha = 0$ şi $0 = \beta$, adică $\bar{u} = (0,0,0)$. Atunci $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \{\bar{0}\}$, iar suma $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ este directă, $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$. ∎

O altă caracterizare pentru suma directă este dată de

Propoziţia 7. Fie $\mathcal{U}_1$ şi $\mathcal{U}_2$ subspaţii vectoriale ale lui $\mathcal{V}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(*i*) suma celor două subspaţii este directă;
(*ii*) dacă $\bar{u}_1 \in \mathcal{U}_1$ şi $\bar{u}_2 \in \mathcal{U}_2$ astfel ca $\bar{u}_1 + \bar{u}_2 = \bar{0}_{\mathcal{V}}$ atunci $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = \bar{0}_{\mathcal{V}}$.

Demonstraţie. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*) $\bar{u}_1 + \bar{u}_2 = \bar{0}_{\mathcal{V}} = \bar{0}_{\mathcal{V}} + \bar{0}_{\mathcal{V}}$ şi scrierea este unică, deci $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = \bar{0}_{\mathcal{V}}$.
(*ii*) $\Rightarrow$ (*i*) Fie $\bar{u} \in \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ arbitrar ales cu două posibile scrieri $\bar{u} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \bar{w}_1 + \bar{w}_2$, unde $\bar{v}_1, \bar{w}_1 \in \mathcal{U}_1$ şi $\bar{v}_2, \bar{w}_2 \in \mathcal{U}_2$. Rezultă $(\bar{v}_1 - \bar{w}_1) + (\bar{v}_2 - \bar{w}_2) = \bar{0}_{\mathcal{V}}$. Cum $\bar{v}_1, \bar{w}_1 \in \mathcal{U}_1$ rezultă $\bar{v}_1 - \bar{w}_1 \overset{not}{=} \bar{u}_1 \in \mathcal{U}_1$ şi analog $\bar{v}_2 - \bar{w}_2 \overset{not}{=} \bar{u}_2 \in \mathcal{U}_2$. Din ipoteza (*ii*) obţinem $\bar{v}_1 - \bar{w}_1 = \bar{0}_{\mathcal{V}}$ şi $\bar{v}_2 - \bar{w}_2 = \bar{0}_{\mathcal{V}}$, de unde deducem că scrierea este unică, iar suma este directă. ∎

Cum fiecare subspaţiu vectorial are o dimensiune, vom preciza şi dimensiunile subspaţiilor obţinute prin operaţiile de mai sus.

Propoziţia 8. Fie $\mathcal{U}_1$ şi $\mathcal{U}_2$ subspaţii vectoriale ale lui $\mathcal{V}$. Atunci:
(i) $dim\,\mathcal{U}_1 \leq dim\,\mathcal{V}$;
(ii) $dim\,\mathcal{U}_1 = dim\,\mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{U}_1 = \mathcal{V}$;
(iii) $dim(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2) = dim\,\mathcal{U}_1 + dim\,\mathcal{U}_2 - dim(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$;
(iv) $dim(\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2) = dim\,\mathcal{U}_1 + dim\,\mathcal{U}_2$.

Demonstraţie. (i) Evident, numărul de vectori dintr-o bază a lui $\mathcal{U}_1$ nu poate fi mai mare decât numărul de vectori dintr-o bază a lui $\mathcal{V}$.
(ii) Dacă $dim\,\mathcal{U}_1 = dim\,\mathcal{V}$ atunci numărul de vectori dint-o bază a lui $\mathcal{U}_1$ este egal cu numărul de vectori dint-o bază a lui $\mathcal{V}$, deci baza lui $\mathcal{U}_1$ este bază şi pentru $\mathcal{V}$. Atunci $\mathcal{U}_1 = \mathcal{V}$.
(iii) Fie B o bază pentru $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$. Atunci B se completează la o bază pentru $\mathcal{U}_1$, notată B_1 şi la o bază pentru $\mathcal{U}_2$, notată B_2. O bază pentru $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ este $B_1 \cup B_2$. Ştiind formula $card(B_1 \cup B_2) = card(B_1) + card(B_2) - card(B_1 \cap B_2)$, obţinem concluzia.
(iv) Suma este directă şi atunci $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \bar{0}$. ∎

Punctul (ii) al Propoziţiei precedente ne oferă o **metodă practică pentru a arăta că un subspaţiu vectorial este egal cu tot spaţiul vectorial**: dacă un subspaţiu vectorial are aceeaşi dimensiune cu spaţiul vectorial, atunci coincid.

De exemplu, în $\mathbb{R}^2$ să considerăm $\mathcal{U}_1 = \mathcal{L}((1,2)) = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$ şi $\mathcal{U}_2 = \mathcal{L}((0,1)) = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$. Atunci $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \{(0,0)\}$, de unde
$dim(\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2) = dim\,\mathcal{U}_1 + dim\,\mathcal{U}_2 = 1 + 1 = 2 = dim(\mathbb{R}^2)$. Deci $\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 = \mathbb{R}^2$.

Definiţia 6. Subspaţiile vectoriale $\mathcal{U}_1$ şi $\mathcal{U}_2$ ale lui $\mathcal{V}$ se numesc **subspaţii complementare** dacă $\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 = \mathcal{V}$.

Precizăm că uneori se foloseşte termenul de subspaţii suplementare.

Observăm că subspaţiile considerate în exemplul precedent sunt complementa-re. Modul de rezolvare prezentat ne furnizează şi **metoda practică pentru a arăta că două subspaţii vectoriale sunt complementare**: arătăm că suma este directă, adică $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \{\bar{0}\}$, şi că $dim(\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2) = dim\,\mathcal{V}$.

O metodă rapidă de a construi două subspaţii complementare este dată de "spargerea" unei baze a spaţiului vectorial în două părţi şi construirea subspaţiilor generate de acestea. Are loc

Propoziţia 9. Fie $B = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ o bază a spaţiului vectorial $\mathcal{V}$ ce se separă în două sisteme de vectori disjuncte, S_1 şi S_2. Atunci $\mathcal{L}(S_1) \oplus \mathcal{L}(S_2) = \mathcal{V}$.

Demonstraţie. Fără a restrânge generalitatea, considerăm $S_1 = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_p\}$ şi $S_2 = \{\bar{v}_{p+1}, \ldots, \bar{v}_n\}$. Pentru a arăta că suma este directă vom folosi Propoziţia 7. Fie pentru aceasta $\bar{u}_1 \in \mathcal{L}(S_1)$ şi $\bar{u}_2 \in \mathcal{L}(S_2)$ astfel ca $\bar{u}_1 + \bar{u}_2 = \bar{0}_{\mathcal{V}}$. Atunci există scalarii $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n$ cu

$$\bar{u}_1 = \alpha_1 \bar{v}_1 + \ldots + \alpha_p \bar{v}_p$$

şi

$$\bar{u}_2 = \alpha_{p+1} \bar{v}_{p+1} + \ldots + \alpha_n \bar{v}_n.$$

Condiţia $\bar{u}_1 + \bar{u}_2 = \bar{0}_{\mathcal{V}}$ implică

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \ldots + \alpha_p \bar{v}_p + \alpha_{p+1} \bar{v}_{p+1} + \ldots + \alpha_n \bar{v}_n = \bar{0}_{\mathcal{V}}.$$

Dar vectorii $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_p, \ldots, \bar{v}_n$ sunt liniar independenţi şi atunci

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = \alpha_{p+1} = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Implicit, $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = \bar{0}_{\mathcal{V}}$. Deci suma celor două subspaţii este directă.

Cum S_1 şi S_2 sunt liniar independente, ele sunt şi baze pentru cele două subspaţii generate. Avem atunci

$$dim(\mathcal{L}(S_1) \oplus \mathcal{L}(S_2)) = dim\, \mathcal{L}(S_1) + dim\, \mathcal{L}(S_2) = p + (n - p) = n = dim\, \mathcal{V},$$

deci $\mathcal{L}(S_1) \oplus \mathcal{L}(S_2) = \mathcal{V}$. ■

Se poate pune şi problema determinării subspaţiului complementar unui sub-spaţiu dat. În acest sens, din propoziţia de mai sus deducem următoarea **metodă practică de aflare a subspaţiului complementar**:

1) Determinăm o bază $B_{\mathcal{U}}$ a subspaţiului dat $\mathcal{U}$;
2) Completăm $B_{\mathcal{U}}$ la o bază pentru tot spaţiul vectorial $\mathcal{V}$: $B = B_{\mathcal{U}} \cup S$;
3) Subspaţiul complementar lui $\mathcal{U}$ este $\mathcal{L}(S)$.

Problema 4. Fie $\mathcal{U} = \{(x, -x, 2x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. Să se arate că $\mathcal{U}$ este subspaţiu vectorial şi să se determine subspaţiul său complementar.

Rezolvare. Cum $(x, -x, 2x) = x(1, -1, 2)$, rezultă că $\mathcal{U} = \mathcal{L}((1, -2, 2))$, deci este subspaţiu vectorial cu baza $B_{\mathcal{U}} = \{(1, -1, 2)\}$. Completăm această bază la o bază pentru $\mathbb{R}^3$.

Fie, de exemplu $B = \{(1,-1,2),(0,1,0),(0,0,1)\}$, care este bază deoarece $det\ T_{B_cB} = 1 \neq 0$. Atunci subspaţiul complementar lui $\mathcal{U}$ este $\mathcal{L}((0,1,0),(0,0,1)) = \{(0,y,z) : y,z \in \mathbb{R}\}$. ■

Subspaţii generate de o matrice

Fie $A = [a_{ij}]$, $i \in \{1,2,\dots,m\}$, $j \in \{1,2,\dots,n\}$, o matrice cu m linii şi n coloane.

Definiţia 11. Se numeşte **subspaţiul nul al matricei** A mulţimea

$$Null(A) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : A\bar{x} = \bar{0}\},$$

adică mulţimea soluţiilor sistemului omogen $A\bar{x} = \bar{0}$.

Propoziţia 16. Subspaţiul nul al unei matrice este subspaţiu vectorial a lui $\mathbb{R}^n$.

Demonstraţie. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\bar{x}, \bar{y} \in Null(A)$, adică $A\bar{x} = \bar{0}$ şi $A\bar{y} = \bar{0}$. Atunci

$$A(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \alpha A\bar{x} + \beta A\bar{y} = \bar{0},$$

deci $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in Null(A)$, ceea ce trebuia demonstrat. ■

Definiţia 12. Subspaţiul generat de vectorii puşi pe coloanele matricei A se numeşte **subspaţiul coloanelor** lui A, notat $col(A)$.

Evident, $col(A)$ este subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^m$.

Propoziţia 17. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Atunci:

$$dim\, col(A) = rang\, A\ , \quad dim\, Null(A) = n - rang\, A.$$

Demonstraţie. Matricea sistemului omogen $A\bar{x} = \bar{0}$ este A. Tot A este matricea sistemului de vectori ce generează $col(A)$. Numărul vectorilor liniar independenţi este $rang\, A$, iar numărul necunoscutelor secundare ale sistemului este $n - rang\, A$. ■

Problema 8. Fie matricea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Să se scrie ecuaţiile lui $Null(A)$ şi să se precizeze dimensiunea lui. Să se determine o bază a lui $Null(A)$.

Rezolvare. Ecuaţiile lui $Null(A)$ sunt ecuaţiile sistemului omogen $A\bar{x} = \bar{0}$, adică:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Numărul de coloane ale lui A este $n = 3$, deci $Null(A)$ este subspaţiu al lui $\mathbb{R}^3$. Cum $rang\, A = 2$, rezultă $dim\, Null(A) = 3 - 2 = 1$.

Pe de altă parte, dacă rezolvăm sistemul omogen avem $x_1 = -2x_2$, apoi $3x_2 + 3x_3 = 0$, deci $x_2 = -x_3$ şi $x_1 = 2x_3$. Obţinem că

$$Null(A) = \{(2x_3, -x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((2, -1, 1)),$$

adică $B_0 = \{(2, -1, 1)\}$ este o bază a lui $Null(A)$. ■

Întrebări teoretice

1. Definiţi noţiunea de subspaţiu vectorial.

2. Care sunt condiţiile (sau condiţia) ca o submulţime a unui spaţiu vectorial să fie subspaţiu vectorial?

3. Cum procedaţi pentru a găsi o bază a unui subspaţiu vectorial?

4. Care este subspaţiul generat de sistemul de vectori $S = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$? Când S este bază pentru acesta? În acest caz, cât este dimensiunea subspaţiului generat?

5. Care este metoda practică pentru subspaţii vectoriale?

6. Definiţi noţiunea de sumă a două subspaţii vectoriale.

7. Definiţi noţiunea de sumă directă a două subspaţii vectoriale.

8. Care este metoda practică pentru sumă directă?

9. În ce condiţii un subspaţiu vectorial este egal cu întreg spaţiul?

10. Definiţi noţiunea de subspaţii complementare.

11. Care este metoda practică pentru subspaţii complementare?

12. Care sunt paşii pentru a determina un subspaţiu complementar unui subspaţiu dat?

Exerciţii

1. Arătaţi că $\mathcal{U} = \{(2 + a, -a, 2a) : a \in \mathbb{R}\}$ nu este subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^3$.

2. Verificaţi că $\mathcal{U} = \{(2a, -a, a) : a \in \mathbb{R}\}$ este subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^3$. Determinaţi o bază a sa.

3. Arătaţi că $\mathcal{U} = \{(x + y, x - y, 2x) : x, y \in \mathbb{R}\}$ este subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^3$. Determinaţi o bază a sa. Cât este $dim\, \mathcal{U}$?

4. Determinaţi subspaţiul generat de sistemul de vectori $S = \{\overline{v}_1 = (1,1,0), \overline{v}_2 = (0,-2,3), \overline{v}_3 = (1,-1,3)\}$, stabilind şi o bază a acestuia. Care este dimensiunea subspaţiului generat?

5. Fie sistemul de vectori $S = \{\overline{v}_1 = (1,m,2), \overline{v}_2 = (2,4,-1), \overline{v}_3 = (1,0,1)\}$. Determinaţie $m \in \mathbb{R}$ astfel ca $\mathcal{L}(S) \neq \mathbb{R}^3$.

6. Fie sistemul de vectori $S = \{\overline{v}_1 = (2,1,2), \overline{v}_2 = (1,1,1), \overline{v}_3 = (4,3,4)\}$.

$a)$ Determinaţi o bază a lui $\mathcal{L}(S)$;

$b)$ Stabiliţi dacă $\bar{u} = (-3,-1,-3) \in \mathcal{L}(S)$ scriindu-l în baza determinată.

7. Fie $\mathcal{U} = \{(x+y, 2x) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Arătaţi că $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$.

8. Fie $\mathcal{U}_1 = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$ şi $\mathcal{U}_2 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a + b = 0\}$.

$a)$ Arătaţi că $\mathcal{U}_1$ şi $\mathcal{U}_2$ sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathbb{R}^2$;

$b)$ Calculaţi $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ şi $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$;

$c)$ Verificaţi dacă $\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 = \mathbb{R}^2$;

$d)$ Justificaţi că $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ nu este subspaţiu vectorial.

9. Se consideră $\mathcal{U}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0, x - z = 0\}$ şi $\mathcal{U}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$.

$a)$ Arătaţi că sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathbb{R}^3$;

$b)$ Determinaţi $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$;

$c)$ Calculaţi $dim(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2)$.

10. Fie $\mathcal{U}_1 = \{(x, 3x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ şi $\mathcal{U}_2 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a - c = 0\}$.

$a)$ Arătaţi că $\mathcal{U}_1$ şi $\mathcal{U}_2$ sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathbb{R}^3$;

$b)$ Stabiliţi dacă $\mathcal{U}_1$ şi $\mathcal{U}_2$ sunt complementare.

11. Stabiliţi dacă subspaţiile $\mathcal{L}((1,-1,1))$ şi $\mathcal{L}(\{(1,1,2),(0,-2,-1)\})$ sunt complementare în spaţiul aritmetic $\mathbb{R}^3$.

12. Determinaţi un subspaţiu complementar lui $\mathcal{L}((3,2))$ în $\mathbb{R}^2$.

13. Arătaţi că $\mathcal{U} = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a + c = 0\}$ este subspaţiu vectorial şi determinaţi un subspaţiu vectorial $\mathcal{W}$ astfel ca $\mathcal{U} \oplus \mathcal{W} = \mathbb{R}^3$.

14. Fie matricea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

$a)$ Scrieţi ecuaţiile lui $Null(A)$;

$b)$ Precizaţi dimensiunea subspaţiului $Null(A)$;

$c)$ Aflaţi o bază a lui $Null(A)$;

$d)$ Stabiliţi dacă $col(A) = \mathbb{R}^2$;

e) Determinaţi subspaţiul ortogonal al lui $Null(A)$.

15. Fie matricea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Arătaţi că $Null(A) = \{(0,0)\}$;

b) Determinaţi subspaţiul ortogonal al lui $col(A)$.

16. Fie matricea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & m \end{bmatrix}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Determinaţi m pentru care $dim\, Null(A) = 1$;

b) Pentru $m = 1$, aflaţi o bază a subspaţiului $Null(A)$;

c) Pentru $m = 1$, stabiliţi dacă $Null(A) \oplus col(A) = \mathbb{R}^3$.