0.1 Probabilităţi

Teoria probabilităţilor şi statistica matematică se aplică în majoritatea domeniilor ştiinţei, începând cu ştiinţele exacte şi inginereşti şi finalizând cu ştiinţele socio-economice, în special acolo unde există condiţii de risc şi incertitudine şi unde este necesară adoptarea unor decizii riguros argumentate.

Teoria probabilităţilor are scopul de a face previziuni în legătură cu un eveniment aleator.

0.1.1 Evenimente şi câmp de probabilitate

Definiţia 0.1.1 *Realizarea practică a unui ansamblu de condiţii bine precizat poartă numele de experienţă sau probă.*

Definiţia 0.1.2 *Prin eveniment vom înţelege orice rezultat al unei experienţe despre care putem spune că s-a realizat sau că nu s-a realizat, după efectuarea experimentului considerat. Evenimentele se pot clasifica în:*

- *evenimente sigure (evenimentul care se produce în mod obligatoriu la efectuarea unei probe şi se notează cu Ω);*
- *evenimente imposibile, (evenimentul care ˆn mod obligatoriu nu se produce la efectuarea unei probe şi se notează cu $\emptyset$);*
- *evenimente aleatoare (evenimentul care poate sau nu să se realizeze la efectuarea unei probe şi se notează prin litere mari A, B, C,..., sau prin litere mari urmate de indici $A_i, B_i, ...$)*

Exemplul 0.1.3
- *extragerea unei bile albe dintr-o urnă care conţine numai bile albe (evenimentul sigur)*
- *apariţia unui numar de 7 puncte la o probă a aruncării unui zar (evenimentul imposibil)*
- *apariţia feţei cu 3 puncte la o probă a aruncării unui zar (ev. aleator).*

Definiţia 0.1.4 *Evenimentul contrar evenimentului A se notează cu $\overline{A} = CA$,unde*

$$CA = \{x \in \Omega |\ x \notin A\} = \Omega \setminus A$$

şi este evenimentul ce se realizează numai atunci când nu se realizează evenimentul A.

Definiţia 0.1.5 *Un eveniment se numeşte:*

- *elementar dacă se realizează ca rezultat al unei singure probe; se notează cu* ω *(ex. apariţia S (stemei) sau B (banului) în experienţa aruncării unei monezi).*

- *compus dacă acesta apare cu două sau mai multe rezultate ale probei considerate (ex. în experienţa aruncării unui zar un eveniment compus este apariţia unei feţe cu un număr par de puncte* $\{2, 4, 6\}$*).*

Definiţia 0.1.6 *Mulţimea tuturor evenimentelor elementare generate de un experiment aleator se numeşte spaţiul evenimentelor elementare (spaţiul de selecţie) şi se notează cu* Ω *. Acesta poate fi finit sau infinit.*

Observaţia 0.1.7 *Vom înţelege evenimentul sigur ca mulţime a tuturor evenimentelor elementare, adică:* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, .., \omega_n\}$ *şi orice eveniment compus ca o submulţime a lui* Ω. *De asemenea, putem vorbi despre mulţimea tuturor părţilor lui* Ω *pe care o notăm prin* $\mathcal{P}(\Omega)$, *astfel că pentru un eveniment compus* A *putem scrie, în contextul analogiei dintre evenimente şi mulţimi, că* $A \subset (\Omega)$ *sau* $A \notin \mathcal{P}(\Omega)$.

Definiţia 0.1.8 *1. Spunem că evenimentul* A *implică evenimentul* B *şi scriem* $A \Rightarrow B$, *dacă realizarea evenimentului* A *atrage după sine şi realizarea lui* B.

2. Spunem că două evenimente sunt echivalente dacă realizarea unuia atrage după sine şi realizarea celuilalt şi reciproc.

3. Prin reunirea evenimentelor A *şi* B *vom înelege evenimentul notat* $A \cup B$ *care constă în realizarea a cel puţin unuia dintre evenimentele* A *şi* B.

4. Evenimentele A *şi* B *sunt dependente dacă realizarea unuia depinde de realizarea celuilalt şi sunt independente dacă realizarea unuia nu depinde de realizarea celuilalt.*

Definiţia 0.1.9 *O mulţime nevidă de evenimente* $K \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *se numeşte corp dacă satisface axiomele:*

i) $\forall A \in K \Rightarrow \overline{A} \in K$

ii) $\forall A, B \in K \Rightarrow A \cup B \in K$. *Cuplul* (Ω, K) *se numeşte câmp finit de evenimente, în cazul în care* K *este un corp.*

Definiţia 0.1.10 *Într-un câmp finit de evenimente* (Ω, K), *evenimentele* $A_i \in K$, $i = \overline{1,n}$, *formează un sistem complet de evenimente (sau o partiţie a câmpului) dacă:*

i) $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \Omega$,

ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$, $i, j = \overline{1,n}$.

Definiţia 0.1.11 *(clasică a probabilităţii)*

Probabilitatea unui eveniment A este egală cu raportul dintre numărul evenimentelor egal probabile favorabile evenimentului A şi numărul total al evenimentelor egal probabile.

$$P(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \sum_{1\leq k\leq m} P(\{\omega_{i_k}\}).$$

Altă formulare: probabilitatea unui eveniment este raportul dintre numărul cazurilor favorabile evenimentului şi numărul cazurilor posibile.

Exemplul 0.1.12 *Dintr-o urnă cu 15 bile numerotate de la 1 la 15 se extrage o bilă la întâmplare. Se consideră evenimentele:*

- A = *obţinerea unui număr prim;*
- B = *obţinerea unui număr par;*
- C = *obţinerea unui număr divizibil cu 3.*

Să se calculeze probabilităţile acestor evenimente.

Soluţie. *În această experienţă aleatoare numărul total al cazurilor posibile este 15.*

Pentru A numărul cazurilor favorabile este 6, adică $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$, *deci* $P(A) = \frac{6}{15}$.

Pentru B numărul cazurilor favorabile este 7, adică $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$, *deci* $P(B) = \frac{7}{15}$.

Pentru C, numărul cazurilor favorabile este 5, adică $\{3, 6, 9, 12, 15\}$, *deci* $P(C) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

Definiţia 0.1.13 *(axiomatică a probabilităţii -Kolmogorov)*

Fie (Ω, K) un câmp finit de evenimente. Se numeşte probabilitate pe câmpul considerat o funcţie $P : K \to [0, 1]$ care satisface condiţiile:
i) $P(A) \geq 0$, $\forall A \in K$,
ii) $P(\Omega) = 1$,
iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, $\forall A, B \in K$, $A \cap B = \emptyset$.

Observaţia 0.1.14 *În cazul în care câmpul de evenimente (Ω, K) este infinit (K este infinită) probabilitatea P definită pe K satisface axiomele:*
i) $P(A) \geq 0$, $\forall A \in K$,
ii) $P(\Omega) = 1$,
iii) $P(\bigcup\limits_{i \in I} A_i) = \sum\limits_{i \in I} A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$, $A_i \in K$, $I \subset \mathbb{N}$.

Propoziţia 0.1.15 *(Reguli de calcul cu probabilităţi) Au loc afirmaţiile:*

- *P1) Probabilitatea diferenţei: Dacă $A, B \in K$ şi $A \subset B$ atunci*

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

- *P2) Probabilitatea reuniunii (formula lui Poincaré): Dacă $A, B \in K$ atunci*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

- *P3) Probabilităţi condiţionate: Dacă $P(B) \neq 0$ atunci raportul $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ este probabilitatea lui A condiţionată de B şi notăm $P_B(A)$ sau $P(A|B)$.*

- *P4) Probabilitatea reuniniunii evenimentelor independente. Dacă $A_1, A_2, ..., A_n$ sunt evenimente independente, atunci:*

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} P(A_i)) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - P(A_i)).$$

- *P5) Inegalitatea lui Boole: Dacă $A_1, A_2, ..., A_n$, sunt evenimente dependente atunci*

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} P(A_i) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n - 1) = 1 - \sum_{i=1}^{n} P(\overline{A_i}).$$

- *P6) Formula probabilităţii totale: Dacă $A_1 A_2, ..., A_n$ este un sistem complet de evenimente şi $X \in K$ atunci*

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(X).$$

- *P7) Formula lui Bayes: Dacă $A_1, A_2, ..., A_n$ este un sistem complet de evenimente al câmpului (Ω, K) şi $X \in K$ atunci:*

$$P_X(A_i) = \frac{P(A_i) P_{A_i}(X)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(X)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Demonstraţie. P1) Din relaţiile $B = A \cup (B - A)$, $A \cap (B - A) = \emptyset$, şi din axioma ii) a probabilităţii rezultă

$$P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A).$$

P3) Arătăm că $P_B(A)$ satisface axiomele probabilităţii:

i) $P_B(A) \geq 0$ deoarece $P(A \cap B) \geq 0$ şi $P(B) > 0$.

ii) $P_B(E) = \dfrac{P(B \cap E)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1.$

iii) Fie $A_1, A_2 \in K$ şi $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Avem

$$P_B(A_1 \cup A_2) = \frac{P(B \cap (A_1 \cup A_2))}{P(B)} = \frac{P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)]}{P(B)}$$
$$= \frac{P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A_1)}{P(B)} + \frac{P(B \cap A_2)}{P(B)} = P_B(A_1) + P_B(A_2),$$

dacă $(B \cap A_1) \cap (B \cap A_2) = \emptyset$.

P4). Se folosesc relaţiile lui De Morgan: $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ şi faptul că A_i, $i = \overline{1, n}$ sunt evenimente independente. Astfel avem

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - P(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P(A_i)).$$

P6). Din ipoteza că A_i, $i=\overline{1,n}$ este un sistem complet de evenimente rezultă

$$X=(A_1\cap X)\cup(A_2\cap X)\cup...\cup(A_n\cap X).$$

Deoarece $A_i\cap A_j=\emptyset$, $i\neq j$, $i,j=\overline{1,n}$ rezultă $(X\cap A_i)\cap(X\cap A_j)=\emptyset$, $i\neq j$, $i,j=\overline{1,n}$. Avem succesiv

$$P(X)=P(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap X)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i\cap X)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P_{A_i}(X).$$

P7) Deoarece

$$P(X\cap A_i)=P(X)\cdot P_X(A_i)$$

şi

$$P(X\cap A_i)=P(A_i)\cdot P_{A_i}(X)$$

avem $P(X)\cdot P_X(A_i)=P(A_i)\cdot P_{A_i}(X)$, deci

$$P_X(A_i)=\frac{P(A_i)\cdot P_{A_i}(X)}{P(X)}=\frac{P(A_i)\cdot P_{A_i}(X)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)\cdot P_{A_i}(X)}.$$