

Introduction to Plasma Physics

中 陽太

2025 年 8 月 29 日

目次

| | | |
|-----|-----------|----|
| 1 | プラズマとは | 1 |
| 1.1 | 自然界でのプラズマ | 1 |
| 1.2 | プラズマの定義 | 2 |
| 1.3 | 温度の概念 | 2 |
| 1.4 | デバイ遮蔽 | 4 |
| 1.5 | プラズマパラメータ | 6 |
| 1.6 | プラズマの条件 | 6 |
| 2 | 1 粒子の運動 | 7 |
| 2.1 | 一様な電場と磁場 | 7 |
| 3 | 結論 | 10 |

前書き

以下の内容は、主に

[1] Francis F. Chen, "Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion"

[2] 宮本健郎『プラズマ物理の基礎』

[3] EMAN の物理学

を参照している。

1 プラズマとは

1.1 自然界でのプラズマ

物質の温度を上げていくと、固体、液体、気体と相変化し、さらに温度を上げると、気体分子は原子から電子が剥ぎ取られ、プラスの電荷を持ったイオンと負の電荷を持った電子とが混じった気体になる。このような高温の電離ガス状態を**プラズマ**という。固体、液体、気体と並んで、「第四の状態」と呼ばれることもある。

一般的に、プラズマは真空中にしか存在しない。なぜなら、空気がプラズマを冷やし、イオンと電子を再び結合させるからである。自然界においては、宇宙空間は密度がかなり低いが一種のプラズマだし、点灯中の蛍

光灯の中やロウソクの炎などは全ての原子から電子が剥がれるほどではないがこれも一種のプラズマだし、さらにオーロラや電離層もプラズマだし、冬場に体験する静電気の放電や、溶接工事に使う電気放電、落雷などもプラズマである。太陽もまたプラズマの塊である。実に、この宇宙の 99% 以上の場所がプラズマであって、地球のようなそうでない場所の方が珍しいくらいである。

Saha 方程式では、熱平衡状態にある気体において、イオン化の割合を教えてくれる。

Saha 方程式

$$\frac{n_i}{n_n} \approx 2.4 \times 10^{21} \frac{T^{3/2}}{n_i} e^{-U_i/KT} \quad (1.1)$$

ここで n_i はイオン化された原子の密度 [m^{-3}]、 n_n は原子の密度であり、 K はボルツマン定数、 U_i は気体のイオン化エネルギーである。

(1.1) 式から、 T が大きくなるにつれて n_i の割合が増える、つまり気体がプラズマ状態になることがいえる。これがプラズマが高温でのみ存在する理由である。

Saha 方程式の物理的な意味を指摘すると、気体中の原子は熱エネルギーに分布があり、たまたま十分大きいエネルギーの衝突を受けると電子が飛び出して電離する。低温ではそのような“速い原子”は少なく、電離はまれ。Saha 式の $\exp(-U_i/KT)$ は「速い原子の数が温度に対して指数関数的に減る（＝低温で急減）」ことを表す。また、いったん電離しても、電子と出会えば再結合して中性に戻る。つまり、再結合率は電子密度に依存する。これが n_i^{-1} となる要因である。星間ガスでは $n_i \sim 1cm^{-3}$ と非常に低密度のため、再結合が遅く、高温でなくてもプラズマ状態が保たれやすい。

1.2 プラズマの定義

いかなるイオン化した気体をプラズマと呼ぶわけではない。プラズマの定義は次のように表される。

プラズマとは、荷電粒子と中性粒子からなる準中性ガスであり、集団運動を示すものである。

準中性ガスの説明は 1.4 節で説明する。集団運動について、これはプラズマ粒子間に働くクーロン力が遠距離まで作用することに起因している。クーロン力は $1/r^2$ で減衰するのに対し、プラズマの場合、立体角を考慮すると、A に対する B の体積は r^3 に比例する。そのため、遠距離においてもプラズマは影響し合っている。つまり、集団運動とは、局所的な条件だけでなく、遠隔領域におけるプラズマの状態にも依存する運動を指す。実際、これらの性質がプラズマ物理学という研究分野を豊かにしている。

1.3 温度の概念

先に進む前に、温度の物理的な概念を見直そう。熱平衡状態の気体の速度分布はマクスウェル分布に従う。

一次元のマクスウェル分布

$$f(u) = A \exp\left(-\frac{1}{2}mu^2/KT\right), \quad A = n \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{1/2} \quad (1.2)$$

マクスウェル分布の導出は <https://www1.doshisha.ac.jp/~bukka/lecture/statistic/pdf/text/>

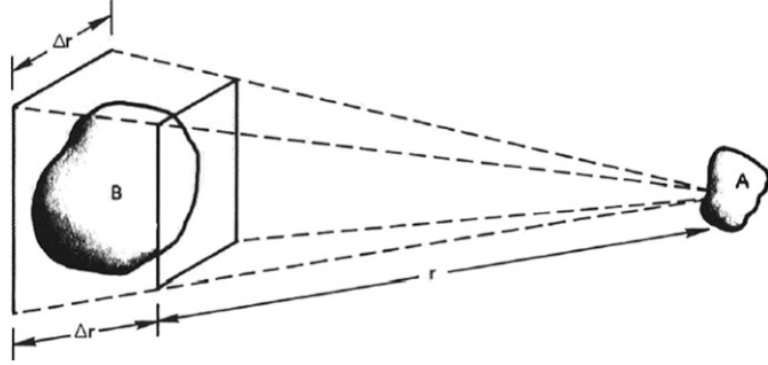


図1 遠距離に作用するクーロン力

[std-02.pdf](#) を参照してほしい。

分布の幅は定数 T によって特徴づけられ、これを温度と呼ぶ。 T の正確な意味を理解するために、この分布における粒子の平均運動エネルギーを計算しよう。

$$E_{av} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m u^2 f(u) du}{\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du} \quad (1.3)$$

ここで、

$$v_{th} := (2KT/m)^{1/2}, \quad y := u/v_{th} \quad (1.4)$$

と定義すると、式 (1.2) は

$$f(u) = A \exp(-u^2/v_{th}^2)$$

となり、式 (1.3) は

$$E_{av} = \frac{\frac{1}{2} m A v_{th}^3 \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(-y^2)] y^2 dy}{A v_{th} \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(-y^2)] dy}$$

となる。分子における積分部分について、部分積分を用いることで、

$$\int_{-\infty}^{\infty} [-\frac{1}{2} \exp(-y^2)]' \cdot y dy = [-\frac{1}{2} \exp(-y^2) y]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{2} \exp(-y^2) dy = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy$$

となり、積分部分が相殺される。これより、

$$E_{av} = \frac{\frac{1}{2} m A v_{th}^3 \frac{1}{2}}{A v_{th}} = \frac{1}{4} m v_{th}^2 = \frac{1}{2} K T \quad (1.5)$$

が得られる。つまり、平均運動エネルギーは $\frac{1}{2} K T$ である。

3次元への拡張は簡単であるため、導出を省き、結果を書くと、

$$E_{av} = \frac{3}{2} K T \quad (1.6)$$

上で見たように、 T は E_{av} で記述できるため、プラズマ物理では温度をエネルギーの単位で表すことが慣習になっている。次元による混乱を避けるため E_{av} ではなく、 $K T$ で温度を表す。 $K T = 1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ から

$$T = \frac{1.6-19}{1.38-23} = 11,600$$

したがって、変換係数は、

$$1 \text{ eV} = 11,600 \text{ K} \quad (1.7)$$

である。

面白いのは、プラズマは異なる温度を持つことである。電子とイオンは衝突頻度の違いにより、それぞれ異なる温度 T_e, T_i を持つことがある。磁場中では、一種類の粒子でもローレンツ力の作用により、平行方向の温度 T_{\parallel} と垂直方向の温度 T_{\perp} が異なる場合がある。

次章に進む前に温度の概念の誤解を解かなければならない。高温であることが必ずしも「大量の熱」を意味するわけではないのだ。例えば、蛍光灯内の電子温度は約 $2 \times 10^4 \text{ K}$ だが、電子密度が低いため壁への熱伝達は小さい。タバコの灰は高温でも、含まれる熱量が少ないため手に落ちてても大きな火傷をしない。実験室プラズマでは 10^6 K 程度の温度を持つこともあるが、密度が $10^{18}-10^{19} \text{ m}^{-3}$ と低いため、壁加熱は深刻な問題とならない。

1.4 デバイ遮蔽

プラズマが示す特徴的な挙動は電位を遮蔽することである。図 2 のように電源に繋がれた 2 つの荷電粒子をプラズマ中に入れた状況を考える。それぞれの荷電粒子は逆符号の粒子を印加し、荷電粒子の周りにイオンまたは電子の「雲」が作られる。荷電粒子のすぐ近くでは多くのイオン（電子）が引き寄せられるため、密度及びポテンシャルの勾配は高く、逆に遠方では低い。もしプラズマが低温で、熱運動がないのであれば、ポテンシャルは完全に遮蔽される。しかし、温度が高ければ、「雲」の端では静電ポテンシャルが低いため、熱エネルギーがその壁を越えることができる。このときの「雲」の縁は、ポテンシャルエネルギーが粒子の熱エネルギー KT とほぼ等しくなる半径で生じ、遮蔽は完全ではない。 KT/e オーダーのポテンシャルがプラズマに漏れ込み、そこに有限の電場が存在することとなる。

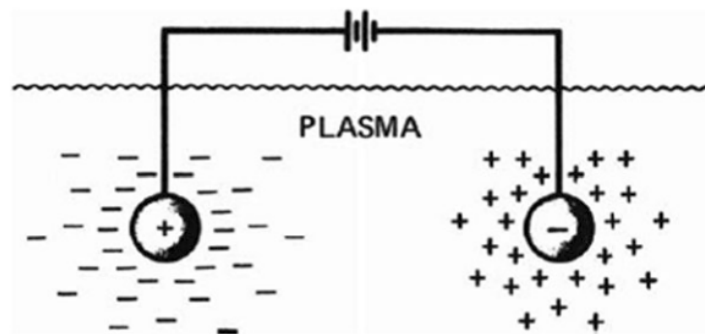


図 2 デバイ遮蔽の様子

雲の中心（荷電粒子の位置） $x = 0$ のポテンシャルを ϕ_0 として、そこから減少し、無限遠で 0 になるポテンシャルを考える。このときの $\phi(x)$ を求めてみよう。

一次元のポアソン方程式より、

$$\epsilon_0 \nabla^2 \phi = \epsilon_0 \frac{d^2 \phi}{dx^2} = -e(n_i - n_e) \quad (Z = 1) \quad (1.8)$$

もし遠方の密度が n_∞ であるなら、

$$n_i = n_\infty$$

となる。

ポテンシャルエネルギー $q\phi$ の存在下において、電子の分布関数（ボルツマン分布）は、

$$f(u) = A \exp[-(\frac{1}{2}mv^2 + q\phi)/KT_e] \quad (1.9)$$

$q = -e$ として、 u で積分すると、

$$n_e = \iiint A \exp[-(\frac{1}{2}mv^2 - e\phi)/KT_e] du^3 = \frac{A e^{\frac{e\phi}{KT_e}} \iiint e^{-\frac{mv^2}{2KT_e}} du^3}{\equiv n_0} \quad (1.10)$$

$$= n_0 \exp(e\phi/KT_e) \quad (1.11)$$

遠方 ($x \rightarrow \infty$) で $\phi \rightarrow 0$ より、

$$n_e = n_0 \cdot 1 = n_o = n_\infty$$

これより、

$$n_e = n_\infty \exp(e\phi/KT_e)$$

この式は 3.5 節でより物理的な洞察をもって導く。以上のことから、(1.8) 式を書き直すと、

$$\epsilon_0 \frac{d^2 \phi}{dx^2} = en_\infty (e^{e\phi/KT_e} - 1)$$

クーロンポテンシャルよりも運動エネルギーの方がはるかに大きい領域、つまり、 $|e\phi/KT_e| \ll 1$ の領域においてテーラー展開することで、

$$\epsilon_0 \frac{d^2 \phi}{dx^2} = en_\infty \left[\frac{e\phi}{KT_e} + \frac{1}{2} \left(\frac{e\phi}{KT_e} \right)^2 + \dots \right]$$

さらに、デバイ長を次のように定義する。

デバイ長

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 KT_e}{ne^2} \right)^{1/2} \quad (1.12)$$

これにより、式 (1.4) の解は、

$$\phi = \phi_0 \exp(-|x|/\lambda_D) \quad (1.13)$$

となる。デバイ長は遮蔽の距離を決める。密度が増えると λ_D が減るのは、より電子が集まり、雲が濃くなるからである。 λ_D の定義に使われているのは電子の温度である。なぜなら、電子はイオンに比べはるかに軽く、動きやすいため、電子が動くことにより遮蔽が生じるからである。

式 (1.12) の便利な式として、

$$\begin{aligned}\lambda_D &= 69(T_e/n)^{1/2}\text{m}, & T_e \text{ in K} \\ \lambda_D &= 7430(KT_e/n)^{1/2}\text{m}, & KT_e \text{ in eV}\end{aligned}\tag{1.14}$$

を与えておく。

ここまでで先に述べた「準中性」を定義できる。もし距離 L の系が λ_D よりはるかに大きい場合、デバイ遮蔽が生じる。その外では $\nabla^2\phi$ は非常に小さく、 n_i は 10^{-6} 以上の精度で n_e と等しい。つまり、プラズマの「準中性」とは、 n をプラズマ密度と呼ばれる一般的な密度とした場合、 $n_i \simeq n_e \simeq n$ とみなせるほど十分に中性であるが、興味深い電磁気力がすべて消滅するほど中性ではない状態のことである。

デバイ遮蔽は、電子が非常に高速で互いに衝突せず、熱分布を維持できない場合に破られる。後述するように、電子が非常に高温の場合、電子衝突は稀である。この場合、イオンの正電荷に引き寄せられた一部の電子は、角度をつけて高速で進入し、惑星を周回する衛星のようにイオンの周囲を軌道運動する。この仕組みは、後述するラングミュアプローブの解説で明らかになる。この効果を「反遮蔽」と呼ぶ者もいる。

1つの種類の系でもデバイ遮蔽は起きることがいえるが、ここでは立ち入らないことにする。

1.5 プラズマパラメータ

上で述べたように、デバイ遮蔽が生じるのは「雲」を作るのに十分な粒子が存在するときである。(1.13) 式からデバイ領域の粒子数 N_D を計算できる。

$$N_D = n \cdot \frac{4}{3}\pi\lambda_D^3 = 1.38^6 T^{3/2}/n^{1/2} \quad (T \text{ in K})\tag{1.15}$$

「集団運動」をするためには、 $\lambda_D \ll L$ に加えて、

$$N_D \gg 1\tag{1.16}$$

が必要である。この N_D を **プラズマパラメータ** と呼ぶ。

1.6 プラズマの条件

イオン化された気体がプラズマとみなされる条件は次の3つである。

1. $\lambda_D \ll L$
2. $N_D \gg 1$
3. $\omega\tau > 1$

1,2の条件はこれまでに述べた。3について、プラズマ中の荷電粒子は、電磁力によって支配されている必要がある。しかし、弱電離ガス（例：飛行機のジェット排気）では、中性粒子との衝突頻度が高すぎるため、運動は流体力学的な力に支配される。典型的なプラズマ振動の角振動数を ω 、中性粒子との平均衝突時間を τ とすると、プラズマと言えるためには、 $\omega\tau > 1$ が必要である。

2 1 粒子の運動

2.1 一様な電場と磁場

プラズマの解析の難しい点は、流体のように個々の運動は考慮せず、集団運動で考える時もあれば、個々の粒子の集まりと考える時もあることである。まずは簡単な例として、この章では、1 粒子が電場または磁場においての運動を確認しよう。

2.1.1 $\mathbf{E}=0$

この系では粒子は単にサイクロトロン運動をする。運動方程式は、

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.1)$$

ここで、 \mathbf{B} は z 方向を向き、 $\mathbf{B} = B\hat{z}$ である。(2.1) 式から、

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x &= qBv_y, & m\dot{v}_y &= -qBv_x, & m\dot{v}_z &= 0 \\ \ddot{v}_x &= \frac{qB}{m}\dot{v}_y = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x \\ \ddot{v}_y &= -\frac{qB}{m}\dot{v}_x = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y \end{aligned} \quad (2.2)$$

これは調和振動子を表し、その振動数を

サイクロトロン振動数

$$\omega_c = \frac{|q|B}{m} \quad (2.3)$$

と定義すると、(2.2) 式の解は、

$$v_{x,y} = v_{\perp} \exp(\pm i\omega_c t + i\delta_{x,y})$$

ここで、 \pm の符号はイオンであれば「+」、電子であれば「-」である。また、 v_{\perp} は \mathbf{B} に垂直な速度の成分である。

位相の任意性から、

$$v_x = v_{\perp} e^{i\omega_c t} = \dot{x} \quad (2.4a)$$

と選ぶことにより、

$$v_y = \frac{m}{qB} \dot{v}_x = \pm \frac{1}{\omega_c} \dot{v}_x = \pm i v_{\perp} e^{i\omega_c t} = \dot{y} \quad (2.4b)$$

これらを積分することで、

$$x - x_0 = -i \frac{v_{\perp}}{\omega_c} e^{i\omega_c t}, \quad y - y_0 = \pm \frac{v_{\perp}}{\omega_c} e^{i\omega_c t} \quad (2.5)$$

ここで、ラーモア半径を

ラーモア半径

$$r_L \equiv \frac{v_{\perp}}{\omega_c} = \frac{mv_{\perp}}{|q|B} \quad (2.6)$$

を定義すると、(2.5) 式は、

$$x - x_0 = r_L \sin \omega_c t, \quad y - y_0 = \pm r_L \cos \omega_c t \quad (2.7)$$

となる。これは案内中心 (x_0, y_0) を中心とした円軌道を表す。

粒子の回転運動の向きは磁場を減らそうとする向きであり、イオンと電子で反対になる。また、この働きからプラズマは反磁性であると言える。粒子はこのサイクロトロン運動に加え、 \mathbf{B} の方向に v_z で等加速度運動している。

2.1.2 有限の電場

次に、一様な電場がある場合を考える。同様に \mathbf{B} の方向に z 軸をとり、 $E_y = 0$ となるように \mathbf{E} を x - z 面に配置するように座標空間をとる。先の議論から z 成分と他の成分は分けて考えることができる。運動方程式は、

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.8)$$

z 成分は簡単に求まり、

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{q}{m} E_z \quad \therefore v_z = \frac{qE_z}{m} t + v_{z0} \quad (2.9)$$

となる。

残りの成分、つまり \mathbf{B} に垂直な面での運動は、(2.8) 式から

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{q}{m} E_x \pm \omega_c v_y \\ \frac{dv_y}{dt} &= 0 \mp \omega_c v_x \end{aligned} \quad (2.10)$$

微分してそれぞれ計算すると、

$$\ddot{v}_x = -\omega_c^2 v_x \quad (2.11a)$$

$$\ddot{v}_y = \mp \omega \left(\frac{q}{m} E_x \pm \omega_c v_y \right) = -\omega_c \left(\frac{E_x}{B} + v_y \right) \quad (2.11b)$$

ここで、前節との類似点から粒子がサイクロトロン運動をすることを見越して、

$$v_y = \underbrace{\pm v_{\perp} e^{i\omega_c t}}_{\text{サイクロトロン運動}} + v_E \quad (2.12)$$

を仮定する^{*1}。これの2階微分は、

^{*1} Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion の方法ではなく、<https://youtu.be/6PLOfKNmRmQ> の方法に従った。

$$\begin{aligned}\ddot{v}_y &= \mp i\omega_c^2 v_\perp e^{i\omega_c t} = -\omega_c^2 (\underbrace{\pm i v_\perp e^{i\omega_c t}}_{=v_y} + v_E) + \omega_c^2 v_E \\ &= -\omega_c^2 (-v_E + v_y)\end{aligned}\quad (2.13)$$

これと (2.11b) 式を比較すると、

$$v_E = -\frac{E_x}{B} \quad (2.14)$$

となる。これより、(2.12) 式を書き直すと

$$v_y = \pm i v_\perp e^{i\omega_c t} - \frac{E_x}{B} \quad (2.15)$$

さらに、

$$v_x = \mp \frac{1}{\omega_c} \dot{v}_y = v_\perp e^{i\omega_c t} \quad (2.16)$$

となる。サイクロトロン運動は以前と同様であるが、案内中心の y 方向へのドリフト v_E が重ね合わされる。 v_E の一般式は、ベクトル形式で表すことができる。

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -BE_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

となることから、

$$\boxed{\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}} \quad (2.17)$$

と表せる。この \mathbf{v}_E は **$\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト** と呼ばれる。 v_E は q, m, v_\perp に依存しない。

このドリフトが生じる背景は図 3 を見てほしい。まず半回転する間において、粒子は電場 E_x により加速され、 r_L が大きくなる。反対に、もう半回転する間は r_L は小さくなる。この差が $-y$ 方向へのドリフトを生じさせる。イオンと電子では、 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトは同じ方向であるが回転は逆となる。

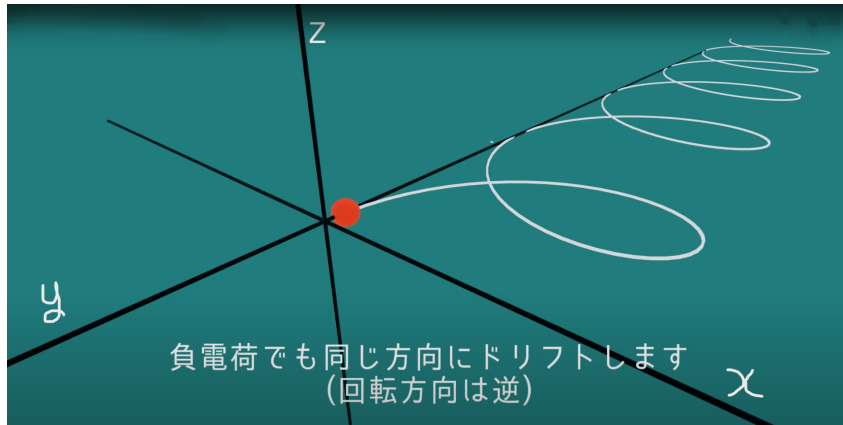


図3 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト+サイクロトロン運動の軌道

これらを踏まえて、 z 方向を含めた粒子の運動は、

$$\mathbf{v} = \left(\begin{array}{c} \text{磁場に平行なクーロン力による} \\ \text{等加速度直線運動} \end{array} \right) + (\text{サイクロトロン運動}) + (\mathbf{E} \times \mathbf{B} \text{ ドリフト})$$

となる。もし $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$ であるならば、第一項の運動はなくなる。

2.1.3 重力場

先の結果は $q\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ と置き換えることで一般的な力 \mathbf{F} に適用できる。 \mathbf{F} による案内中心のドリフトは (2.17) 式より

$$\mathbf{v}_f = \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (2.18)$$

特に、 \mathbf{F} が重力 $m\mathbf{g}$ であるとき、

$$\mathbf{v}_g = \frac{m}{q} \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (2.19)$$

となる。ここで注意すべきは、 \mathbf{v}_E では粒子によらず同じ方向であったが、 \mathbf{v}_g ではイオンと電子で方向が逆になる。プラズマ中で電子とイオンが逆向きに動くことは電流を流れることを意味する。電子だけ動いても電流が流れると思うかもしれないが、プラズマでは荷電分離がすぐに電場を生んで打ち消してしまうので、持続的に電流が流れるためには電子とイオンが逆向きに動く必要がある。この \mathbf{v}_g により生じる電流密度は、

$$\mathbf{j} = nev_{g,i} + n \cdot (-e)v_{g,e} = n(M + n) \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (2.20)$$

となる。

実際には、地上の重力 \mathbf{g} は小さいため、 $|\mathbf{v}_g|$ は通常、無視してよい。しかし、磁力線が曲がっている場合、後述するように、遠心力に起因する「有効重力」が生じる。遠心力は「重力」不安定と呼ばれるプラズマ不安定性の基盤であり、これは実際の重力とは無関係である。

3 結論

LaTeX を使えば、美しい日本語の文書を作成することができます。ぜひ活用してみてください。

参考文献

- [1] Francis F. Chen, Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion, Springer; Softcover reprint of the original 3rd ed., 2019
http://library.unisel.edu.my/equip-unisel/custom/ebook_catalog/2016BookIntroductionToPlasmaPhysicsAndcompressed.pdf
- [2] 宮本健郎, プラズマ物理の基礎, 朝倉書店, 2014
https://op.lib.kobe-u.ac.jp/opac/opac_details/?reqCode=fromlist&lang=0&amode=11&bibid=2002133568&opkey=B175679900718865&start=1&totalnum=4&listnum=1&place=&list_disp=20&list_sort=0&cmode=0&chk_st=0&check=0000

[3] EMAN の物理学

<https://eman-physics.net/electromag/plasma.html>