第三节　齐次方程

一、齐次方程及其解法

二、举例

三、小结

一、齐次方程及其解法

观察 $(xy-y^2)dx-(x^2-2xy)dy=0$，可化为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy-y^2}{x^2-2xy}=\frac{\frac{y}{x}-(\frac{y}{x})^2}{1-2\frac{y}{x}}$$ 齐次方程.

如果一阶微分方程可以写成 $\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right)$ 的形式,

则称之为齐次方程.

齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g\left(\frac{y}{x}\right)$ 的一般解法：

代入

作变量代换 $u=\frac{y}{x}$, 即 $y=ux$, $\therefore \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

得到 u 满足的方程 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=g(u)$, 整理得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{g(u)-u}{x},$$ 可分离变量的方程

分离变量 $\frac{\mathrm{d}u}{g(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$, 两边积分

求出通解后, 用 $\frac{y}{x}$ 代替 u, 就得到原方程的通解.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

例 解方程 $xy\mathrm{d}x - (x^2 - y^2)\mathrm{d}y = 0$

解 将方程写为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{xy}{x^2 - y^2} = \dfrac{\frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$ 齐次方程

令 $u = \dfrac{y}{x}$，则 $y = ux$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

方程变为 $u + x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{u}{1 - u^2}$，即 $\dfrac{1 - u^2}{u^3}\mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$

可分离变量方程

积分得 $-\dfrac{1}{2u^2} - \ln|u| = \ln|x| + C$

$$-\frac{x^2}{2y^2} - \ln\left|\frac{y}{x}\right| = \ln|x| + C$$

练习 求方程$(1+e^{-\frac{x}{y}})y\mathrm{d}x=(x-y)\mathrm{d}y$的通解.

分析 把x看作y的函数，求解比较方便.

解 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{1+e^{-\frac{x}{y}}}\left(\frac{x}{y}-1\right)$$ $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=f\left(\frac{x}{y}\right)$$ 齐次方程

令 $u=\frac{x}{y}$, 则$x=uy$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$,

方程变为 $$u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{1+e^{-u}}(u-1)$$

$$u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{1+e^{-u}}(u-1)$$

分离变量 $$\frac{1+e^{u}}{u+e^{u}}\mathrm{d}u=-\frac{1}{y}\mathrm{d}y$$

两边积分 $$\ln(u+e^{u})=-\ln y+\ln C$$

即 $$y(u+e^{u})=C$$

得通解 $$x+ye^{\frac{x}{y}}=C$$

练习 （教材第310页第3题）

设有连结点$O(0,0)$和$A(1,1)$的一段向上凸的曲线弧OA，对于弧OA上的任一点$P(x, y)$，曲线弧OP与直线段$\overline{OP}$所围成的面积为x^2，求曲线弧OA的方程.

作业

练习册7-3