线性代数练习题

一 、选择题（本题共 7 小题，每题 3 分，共 21 分）

1. 下列选项中是五阶行列式$\left|a_{ij}\right|(i,j=1,2,\cdots 5)$中一项的是（　　）

(A) $a_{12}a_{31}a_{23}a_{45}a_{34}$　　(B) $-a_{31}a_{22}a_{43}a_{14}a_{55}$　　(C) $-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}a_{51}$　　(D) $a_{12}a_{21}a_{55}a_{43}a_{34}$

2. 行列式$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & a_5 & a_6 & 0 \\ a_7 & 0 & 0 & a_8 \end{vmatrix}$中元素$a_7$的代数余子式为（　　）

(A) $a_2a_3a_6-a_2a_4a_5$　　(B) $a_2a_4a_5-a_2a_3a_6$　　(C) $a_1a_3a_6-a_2a_4a_5$　　(D) $a_3a_6a_8-a_4a_5a_8$

3. 设A,B均为n阶矩阵，下列关系一定成立的是（　　）

(A) $(AB)^2=A^2B^2$　　(B) $(AB)^T=A^TB^T$　　(C) $|A+B|=|A|+|B|$　　(D) $|AB|=|BA|$

4. 设A,B,C均为n阶矩阵，I为单位矩阵，且$ABC=I$，则下列矩阵乘积一定等于I的是（　　）

(A) ACB　　(B) BAC　　(C) CAB　　(D) CBA

5. 若6×5矩阵A的秩为$r(A)=3$，对应的齐次线性方程组为$Ax=0$，则其基础解系中解向量个数为（　　）

(A) 2 个　　(B) 3 个　　(C) 5 个　　(D) 6 个

6. 已知$\lambda_0=2$是可逆矩阵A的一个特征值，则矩阵$\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$必有一个特征值为（　　）

(A) $\frac{4}{3}$　　(B) $\frac{3}{4}$　　(C) $-\frac{4}{3}$　　(D) $-\frac{4}{3}$

7. 若二次型$f=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$的秩为 2，则$c$等于（　　）

(A) 4　　(B) 3　　(C) 2　　(D) 1

二、填空题（本题共 7 小题，每题 3 分，共 21 分）

1. 设 2 阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=m$，则$\begin{vmatrix} a_{12} & 2a_{11}+4a_{12} \\ a_{22} & 2a_{21}+4a_{22} \end{vmatrix}=$____________.

2. 如果齐次方程组$\begin{cases} 4x_1+kx_2=0 \\ kx_1+4x_2=0 \end{cases}$有非零解，那么$k=$____________.

3. 已知$AP=PB$,其中矩阵$P=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,则$A=$____________.

4. 设A为 3 阶方阵，且$|A|=2$，则$\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-3A^*\right|=$____________.

5. 若n阶矩阵A满足方程$A^2-A-2I=0$,其中I是单位矩阵，则$(A+2I)^{-1}=$____________.

6. 已知向量$\alpha=(-2,4,t)^T$与$\beta=(2,-2,3)^T$正交，则$t=$____________.

7. 已知$f=x_1^2+3x_2^2+2x_3^2+2x_1x_3+2\lambda x_2x_3$为正定二次型，则$\lambda$的取值范围为____________.

三.（8 分）计算行列式$D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix}$.

四. (10 分)已知向量组$\alpha_1=(1,-1,2,4)^T,\alpha_2=(0,3,1,2)^T,\alpha_3=(3,0,7,14)^T,\alpha_4=(2,1,5,6)^T$

和$\alpha_5=(1,-1,2,0)^T$，求该向量组的极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表出.

五. (10 分)线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=4\\ -x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda^2\\ x_1-x_2+2x_3=-4\end{cases}$，其中$\lambda$是参数. 问：当$\lambda$取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？当有无穷多解时，求出其全部解.

六.（8 分）设 3 阶矩阵A满足$|A-I|=0,|A+2I|=0,|2A+3I|=0$，其中$I$为 3 阶单位矩阵，

若$\varphi(A)=A^2-A+2I$，求$\varphi(A)$的特征值及$\varphi(A)$的行列式.

七. (14 分)已知实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$，求正交变换$x=Qy$，将二次型转化为标准形.

八. (8 分) 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n(n>1)$线性无关，且$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$，证明：向量$\beta-\alpha_1$, $\beta-\alpha_2$, $\cdots\beta-\alpha_n$线性无关.