第二节 可分离变量的微分方程

一、可分离变量的微分方程的形式

二、可分离变量的微分方程的解法

三、应用

一阶微分方程可以写为：$y' = f(x, y)$

或者 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \qquad \frac{dx}{dy} = -\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

$$(Q(x, y) \neq 0) \qquad (P(x, y) \neq 0)$$

在解这个微分方程时，可以将x看成是y的函数，也可以将y看成是x的函数.

对于方程：$\dfrac{dy}{dx}=2x$，可以写为：$dy=2xdx$，

左右两端同时求不定积分，得到 $y=x^2+C$，通解！

对于 $\dfrac{dy}{dx}=2xy^2$，如果采用同样的方法

则出现 $\int 2xy^2dx$ 不易求积分,但如果化为

$\dfrac{dy}{y^2}=2xdx$，两端同时求积分，则可得到

$$-\frac{1}{y}=x^2+C$$

启示：如果方程可以化为两端只含一个变量的形式，则可以两端分别积分求解方程.

一、可分离变量的微分方程的形式

一般的，如果一阶微分方程可以写为：

$$g(y)dy = f(x)dx$$

特点：方程的一端只含有变量*y*，一端只含有变量*x*, 方程称为可分离变量的方程.

例如，$\dfrac{dy}{dx} = 2x^2 y^{\frac{4}{5}} \Rightarrow y^{-\frac{4}{5}}dy = 2x^2dx,$

二、可分离变量的微分方程的解法

$$g(y)dy = f(x)dx$$

解法：如果函数 $g(y)$和 $f(x)$都连续，则可以左右两端同时求不定积分.

分离变量法

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

得到：$G(y) = F(x) + C$

其中，$G(y)$、$F(x)$是$g(y)$、$f(x)$的原函数，C为常数.

$$G(y) = F(x) + C$$

称为微分方程的隐式通解.

例 求解微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=2xy$ 的通解.

解 分离变量，得 $\dfrac{dy}{y}=2xdx,$

两端积分 $\displaystyle\int\frac{dy}{y}=\int 2xdx$，得

$\ln|y|=x^2+C_1$，即 $y=\pm e^{x^2+C_1}=\pm e^{C_1}\cdot e^{x^2}$

$\pm e^{C_1}$为任意非零常数，$y\equiv 0$也是方程的解，

$\therefore\ y=Ce^{x^2}$为所求通解.

例 求方程 $x(1+y^2)\mathrm{d}x - y(1+x^2)\mathrm{d}y = 0$ 的通解.

解 分离变量，得 $\dfrac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y = \dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

两端积分 $\displaystyle\int \frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y = \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$，得

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln C$$

$$\ln(1+y^2) = \ln C(1+x^2)$$

$\therefore\ 1+y^2 = C(1+x^2)$ 为方程的通解. 隐式通解

三、应用

例　衰变问题. 衰变速度与未衰变原子含量M成正比，$M\big|_{t=0}=M_0$，求衰变过程中铀含量 $M(t)$ 随时间 t 变化的规律.

解　衰变速度 $\dfrac{dM}{dt}$，由题设条件

$\boxed{\dfrac{dM}{dt}=-\lambda M}$（$\lambda>0$衰变系数），分离变量，得 $\dfrac{dM}{M}=-\lambda dt$

负号是由于当 t 增加时M单调减少

$-\lambda t+\ln C,$

$\ln M-\ln C=-\lambda t$，即 $M=Ce^{-\lambda t}$ 通解！

由 $M\big|_{t=0}=M_0$，得 $M_0=Ce^0=C$，得特解 $M=M_0e^{-\lambda t}$

衰变规律

初始条件: $y(0)=1,\ y(12)=3$

例 求游船上的传染病人数.

一只游船上有800人,一名游客患了某种传染病,12小时后有3人发病.由于这种传染病没有早期症状,故感染者不能被及时隔离. 直升机将在60至72小时将疫苗运到,试估算疫苗运到时患此传染病的人数.

设传染病的传播速度与受感染的人数及未受感染的人数之积成正比.

解 用 $y(t)$表示发现首例病人后 t 小时时的感染人数, $800-$ 可分离变量微分方程 染的人数, 由题意,

得
$$\frac{dy}{dt}=ky(800-y),$$
其中$k>0$为比例常数.

分离变量
$$\frac{dy}{y(800-y)}=k\,dt,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y(800-y)}=k\mathrm{d}t,$$

初始条件

$y(0)=1,\quad y(12)=3$

即 $$\frac{1}{800}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{800-y}\right)\mathrm{d}y=k\mathrm{d}t,$$

两边积分，得 $\frac{1}{800}[\ln y-\ln(800-y)]=kt+C_1,$

通解 $$y=\frac{800}{1+Ce^{-800kt}}\qquad (C=e^{-800C_1}).$$

由初始条件$y(0)=1$,得$C=799$. 再由 $y(12)=3$,

便可确定出 $800k\approx-\frac{1}{12}\ln\frac{799}{2397}\approx 0.09176$.

所以 $$y(t)=\frac{800}{1+799e^{-0.09176t}}.$$

直升机将在60至72小时将疫苗运到,试估算疫苗运到时患此传染病的人数.

$$y(t)=\frac{800}{1+799e^{-0.09176t}}.$$

下面计算$t=60,72$小时时的感染者人数

$$y(60)=\frac{800}{1+799e^{-0.09176\times 60}}\approx 188,$$

$$y(72)=\frac{800}{1+799e^{-0.09176\times 72}}\approx 385.$$

从上面数字可看出,在72小时疫苗运到时, 感染的人数将是60小时感染人数的2倍. 可见在传染病流行时及时采取措施是至关重要的.

练习

设 $f(x)=\int_0^{2x} f(\frac{t}{2})\mathrm{d}t+\ln 2$, 则 $f(x)=(B)$.

$A.e^x\ln 2;\quad B.e^{2x}\ln 2;\quad C.e^x+\ln 2;\quad D.e^{2x}+\ln 2$

分析 一、代入验算。 二、两边求导化为微分方程。

$$f'(x)=f\left(\frac{2x}{2}\right)\cdot 2\Rightarrow f'(x)=2f(x)$$

分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)}=2\mathrm{d}x,\quad \ln f(x)=2x+\ln C$ 两边积分

通解 $f(x)=Ce^{2x}.\quad f(0)=\ln 2\Rightarrow C=\ln 2,$

特解 $f(x)=e^{2x}\ln 2.$

作业

练习册7-2