

概率论与数理统计 B (56 学时) 综合练习二

(建议复习完再做题, 模拟期末考, 闭卷, 答题时间控制在 1 个半小时内)

班级_____学号_____姓名_____成绩_____

一、填空 (每题 2 分, 共 10 分)

1. 袋中有红球 4 只, 黑球 3 只, 不放回地从中任取 2 只, 则这 2 只球的颜色不相同的概率等于_____。
2. 若事件 A 、 B 满足 $P(AB) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$ 且 $P(A) = 1/3$, 则 $P(B) =$ _____。
3. 已知 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, r)$, 如果 X 和 Y 独立, 那么 $r =$ _____。
4. 已知 X 的概率密度函数 $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, 则 $Y = 3X$ 的概率密度函数 $f_Y(y) =$ _____。
5. 设总体 X 服从参数为 2 的泊松(Poisson)分布, (X_1, \dots, X_8) 是来自总体 X 的容量为 8 的样本, \bar{X} 是样本均值, 那么 $E(\bar{X})^2 =$ _____。

二、单项选择题 (每题 2 分, 共 10 分)

1. 设连续型随机变量 X 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ kx + b, & 0 \leq x \leq \pi \\ 1, & x > \pi \end{cases}$, 则以下正确的答案是_____。
A. $b=1, k=\pi$; B. $b=1/\pi, k=0$; C. $b=0, k=1/\pi$; D. $b=\pi, k=1$
2. 设 $X \sim N(3, \sigma^2)$, $P\{3 < X < 4\} = 0.4$, 则 $P\{X \leq 2\} =$ _____。
A. 0.1; B. 0.2; C. 0.3; D. 0.9
3. 设 X 的方差 $DX = 4$, Y 的方差 $DY = 1$, X 和 Y 相关系数 $\rho_{XY} = 0.6$, 则 $3X - 2Y$ 的方差 $D(3X - 2Y) =$ _____。
A. 40; B. 24; C. 17.6; D. 25.6
4. 样本 (X_1, X_2, X_3) 来自总体 X , X 的期望 $EX = \mu$, X 的方差 $DX = \sigma^2$, 则有_____。
A. $X_1 + X_2 + X_3$ 是 μ 的无偏估计;
B. $\frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$ 是 μ 的无偏估计;
C. $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$ 是 σ^2 的无偏估计;
D. $\left(\frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}\right)^2$ 是 σ^2 的无偏估计
5. 设 X_1, X_2, X_3 相互独立, $X_i \sim N(0, 1)$, $i = 1, 2, 3$. 则 $\frac{\sqrt{2}X_1}{\sqrt{X_2^2 + X_3^2}}$ 服从_____分布。
A. $t(3)$; B. $t(2)$; C. $\chi^2(3)$; D. $F(1, 2)$

三、(8 分) 一个车间由甲、乙两台机床加工同种零件。甲机床加工的零件出现废品的概率为 0.03，乙机床加工的零件出现废品的概率为 0.02，已知甲机床加工的零件数量是乙机床加工的零件数量的两倍，加工出来的零件放在一起。现从该车间任抽取一个零件，(1) 求该零件为废品的概率；(2) 若已知抽取到的该零件为废品，求该零件为乙机床加工的概率。

四、(12 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的分布律如下表所示。(1) 求 X 和 Y 各自的边缘分布律；(2) 求 $EX, EY, E(XY)$ ，以及 X 和 Y 的协方差 $\text{cov}(X, Y)$ ，并且判断 X 和 Y 是否相关；(3) 求 $X + Y$ 的分布律。

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0.1	0.3	0.2
1	0.2	0.1	0.1

五、(10 分) 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x) = \begin{cases} Cx^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ 。

(1) 求常数 C ；(2) 求 X 的分布函数 $F(x)$ ；(3) 求常数 m ，使 $P\{X > m\} = P\{X < m\}$ 。

六、(12 分) 设二维连续型随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad (1) \text{ 求 } X \text{ 和 } Y \text{ 各自的边缘密度函数 } f_X(x), f_Y(y);$$

(2) 判断 X 与 Y 是否独立; (3) 计算概率 $P\{Y > X^2\}$ 。

七、(8 分) 某保险公司多年的统计资料表明, 在索赔户中被盗索赔户占 20%, 随机抽查 100 户。利用中心极限定理求被盗索赔户不少于 10 户且不多于 30 户的概率。($\Phi(2.5) = 0.9938$)

八、(10 分) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的一个样本, 且 X 的密度函数 $f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$,

其中未知参数 $\theta > 0$ 。(1) 求参数 θ 的矩估计量; (2) 求参数 θ 的极大似然估计量。

九、(10 分) 某工厂生产一批滚珠, 其直径 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 现从某天的产品中随机抽取 6 件, 测得直径 (单位: 厘米) 为 15.1, 14.8, 15.2, 14.9, 14.6, 15.1。 (1)求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间; (2)求 σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间。

($t_{0.025}(5) = 2.5706$, $\chi_{0.025}^2(5) = 12.833$, $\chi_{0.975}^2(5) = 0.831$)

十、(10 分) 分别用甲、乙两个不同的计算机系统检索 10 个资料, \bar{x}_1 , \bar{x}_2 分别是甲系统和乙系统检索时间 (单位: 秒) 的样本均值, s_1^2 , s_2^2 分别为甲系统和乙系统检索时间的样本方差。测量得 $\bar{x}_1 = 3.097$, $\bar{x}_2 = 3.179$, $s_1^2 = 2.67$, $s_2^2 = 1.21$, 假定检索时间服从正态分布。在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下, (1) 检验甲、乙两系统检索时间的方差是否有显著差别; (2) 检验甲、乙两系统检索时间的均值是否有显著差别。

($F_{0.975}(9, 9) = 0.248$, $F_{0.025}(9, 9) = 4.03$, $t_{0.025}(18) = 2.101$)