



第七章 微分方程





利用函数关系可以对客观事物作定量分析. 但在许多实际问题中, 而根据问题所服从的客观规律, 不能直接找出所需要的函数关系, 只能列出含有未知函数的导数或微分的关系式, 把这样的关系式称为 **微分方程**. 对它进行研究确定出未知函数的过程就是 **解微分方程**. 牛顿和莱布尼茨确定的微积分运算的互逆性, 实际上就解决了最简单的微分方程 $y' = f(x)$ 求解问题.



本章主要介绍微分方程的一些基本概念和几种常用的微分方程的解法,讨论如下几个问题:

1. 微分方程的基本概念;
2. 一阶微分方程;
3. 几种可积的高阶微分方程;
4. 线性微分方程及其通解的结构;
5. 常系数齐次线性方程;
6. 常系数非齐次线性方程.



第一节 微分方程的基本概念

● 问题的提出

● 基本概念



一、问题的提出

例 一曲线通过点 $(1,2)$, 且在该曲线上任一点 $M(x,y)$ 处的切线的斜率为 $2x$, 求这曲线的方程.

解 设所求曲线为 $y = \varphi(x)$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

——可直接积分

未知函数满足条件: $x = 1, y = 2$

$$y = \int 2x dx \quad \text{即} \quad y = x^2 + C, \text{求得 } C = 1,$$

所求曲线方程为 $y = x^2 + 1$.



例 列车在平直的线路上以 20米/秒的速度行驶,当制动时列车获得加速度 -0.4米/秒^2 , 问开始制动后多少时间列车才能停住? 列车在这段时间内行驶了多少路程?

解 设制动后 t 秒钟行驶 s 米, $s = s(t)$.

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -0.4 \quad (1)$$

未知函数满足条件: $t = 0, s = 0, v = \frac{ds}{dt} = 20,$

对(1)直接积分 $v = \frac{ds}{dt} = -0.4t + C_1, s = -0.2t^2 + C_1t + C_2$

$$t = 0, s = 0, v = \frac{ds}{dt} = 20 \Rightarrow C_1 = 20, C_2 = 0$$



故 $v = \frac{ds}{dt} = -0.4t + 20,$

$$s = -0.2t^2 + 20t,$$

令 $v = 0$, 得到开始制动到列车完全停住共需时间

$$t = \frac{20}{0.4} = 50(\text{秒}),$$

$t = 50$, 得到列车在这段时间内行驶的路程

$$s = -0.2 \times 50^2 + 20 \times 50 = 500(\text{米}).$$



$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -0.4$$

特点：含有未知函数的导数，称为**微分方程**。

我们所学习的不定积分,实际上就是求解最简单的一类微分方程.有些微分方程虽不象这样简单,但经过化简,可以变成以上的形式.这些方程也可看作**可直接积分的方程**.



二、基本概念

表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系方程，叫做**微分方程**。

如 $y' = xy$ 一阶 $y'' + 2y' - 3y = e^x$ 二阶

$(t^2 + x)dt + xdx = 0$ 一阶 $\frac{\partial z}{\partial x} = x + y$ 一阶

未知函数是一元函数的方程为**常微分方程**；

未知函数是多元函数的方程为**偏微分方程**。

方程中所出现的导数的最高阶数称为**微分方程的阶**。

一般的 n 阶微分方程为 $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$,

或已解出最高阶导数 $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ 。



代入微分方程能使方程成为恒等式的函数称为微分方程的解.

微分方程的解的分类

(1) **通解** 微分方程的解中含有相互独立的任意常数, 且任意常数的个数与微分方程的阶数相同.

如方程 $\frac{dy}{dx} = 2x$, **通解** $y = x^2 + C$ **特解** $y = x^2 + 1$.

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -0.4, \quad \begin{array}{ll} \text{通解} & s = -0.2t^2 + C_1t + C_2 \\ \text{特解} & s = -0.2t^2 + 20t. \end{array}$$

(2) **特解** 确定了通解中任意常数以后的解.



例 一 曲线通过点 $(1,2)$, 且在该曲线上任一点 $M(x,y)$ 处的切线的斜率为 $2x$, 求这曲线的方程.

初始条件 用来确定任意常数的条件.

如前例, 曲线通过点 $(1, 2)$.

一阶方程 $y' = f(x, y)$ 的初始条件表示为

$$y|_{x=x_0} = y_0$$

二阶方程 $y'' = f(x, y, y')$ 的初始条件表示为

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0$$

微分方程的解的图形, 称为**微分方程的积分曲线**.



初值问题 求微分方程满足初始条件的解的问题.

比如
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

几何意义 求过定点的积分曲线;

又如
$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0 \end{cases}$$

几何意义 求过定点且在定点的切线的斜率为定值的积分曲线.



例 验证函数 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ 是微分方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0 \text{ 的解, 其中 } k \neq 0,$$

并求满足初始条件 $x|_{t=0} = A, \frac{dx}{dt}|_{t=0} = 0$ 的特解.

$$\text{解 } \because \frac{dx}{dt} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 C_1 \cos kt - k^2 C_2 \sin kt$$

代入方程, 得

$$-k^2(C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) + k^2(C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) \equiv 0$$



$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0, \quad x|_{t=0} = A, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

故 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ 是原方程的解, 且为通解.

$$\because x|_{t=0} = A \Rightarrow C_1 = A, \quad \because \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

$$\text{而 } \frac{dx}{dt} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt$$

$$\Rightarrow C_2 = 0.$$

所求特解为 $x = A \cos kt$.



例 求微分方程 $y'' + 3y' + 2y = 0$ 形如 $y = e^{rx}$ 的解.

解 对 $y = e^{rx}$ 求导, 得 $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$,

将 y, y', y'' 代入微分方程中, 得

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

$$(r + 2)(r + 1) = 0$$

$$r_1 = -2, r_2 = -1$$

得两个解 $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{-x}$.



最后,看一个相反的问题

例 求含有两个任意常数 C_1, C_2 的曲线族

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

满足的微分方程.

解

求曲线族满足的微分方程,具体方法是求导数,并消去任意常数.若曲线族中含有两个任意常数,则需求到二阶导数.

由以

得到

所求的微分方程 $y'' - y' - 2y = 0$.



小结

微分方程的基本概念：

微分方程 微分方程的阶

微分方程的解 $\begin{cases} \text{通解} \\ \text{特解} \end{cases}$

初始条件 初值问题 积分曲线



作业

练习册第7-1节