一. **填空题（每题 5 分， 共 50 分）**

1． $f(x,y)=$ $\underline{xy}$.　2. $\underline{4(x^2+z^2)+9y^2=36}$.　3. $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $\underline{yx^{y-1}}$.

4. $\underline{-\frac{1}{2}}$.　5． $\frac{\partial z}{\partial x}=\underline{2xf_1'+2yf_2'}$,　$\frac{\partial z}{\partial y}=\underline{-2yf_1'+2xf_2'}$.

6. $\underline{\begin{cases} x^2-x+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}}$.　7. $Y=\underline{C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}}$.　8. $y^*(x)=\underline{Axe^{2x}+Bx+C}$

9. $\underline{16x-14y-11z+1=0}$.　10． $\underline{\frac{x-a}{0}=\frac{y}{a}=\frac{z}{b}}$.

二、已知方程 $\sin(x+y-z)=z+x$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：令 $F(x,y,z)=\sin(x+y-z)-z-x,$ 则

$$F_x=\cos(x+y-z)-1,\ F_y=\cos(x+y-z),\ F_z=-\cos(x+y-z)-1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{\cos(x+y-z)-1}{\cos(x+y-z)+1},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{\cos(x+y-z)}{\cos(x+y-z)+1}.$$

三、求微分方程 $y'=e^{x+2y}$ 的通解.

解：方程化为 $e^{-2y}dy=e^xdx$，左右两边积分得 $-\frac{1}{2}e^{-2y}=e^x+C$

四、求函数 $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 的极值.

解： $f_x=4-2x=0,\ f_y=-4-2y=0,$ 得驻点 $(2,-2)$，

$$A=f_{xx}=-2, B=f_{xy}=0, C=f_{yy}=-2,\ AC-B^2=4>0,\ \text{且}\ A<0,$$

所以 $f(2,-2)=8$ 为函数的极大值.

五、求平行于平面 $x+2y+3z+4=0$ 且与球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 相切的平面方程.

解：设切点为 (x_0, y_0, z_0), 则所求切平面的法向量为 $(2x_0, 2y_0, 2z_0)$，

因为切平面平行于平面 $x+2y+3z+4=0$，所以有 $\frac{2x_0}{1}=\frac{2y_0}{2}=\frac{2z_0}{3}$，

又因为 $x_0^2+y_0^2+z_0^2=14$，

所以 $\begin{cases} x_0=1 \\ y_0=2 \\ z_0=3 \end{cases}$，$\begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=-2 \\ z_0=-3 \end{cases}$

切平面为 $(x-1)+2(y-2)+3(z-3)=0$，$(x+1)+2(y+2)+3(z+3)=0$

六.）设可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\cos x+2\int_0^x f(t)\sin t dt=x+1$，求 $f(x)$.

解：对方程 $f(x)\cos x+2\int_0^x f(t)\sin t dt=x+1$ 两边关于 x 求导, 得

$$f'(x)\cos x+f(x)\sin x=1$$

即

$$f'(x)+\tan x\cdot f(x)=\frac{1}{\cos x}$$

求解上面的一阶线性微分方程得

$$f(x)=e^{-\int \tan x dx}[\int \frac{1}{\cos x}e^{\int \tan x dx}dx+C]=\sin x+C\cos x$$

由于 $f(0)=1$，所以 $C=1$，故 $f(x)=\sin x+\cos x$ 。