

第三节 齐次方程

- 一、齐次方程及其解法
- 二、举例
- 三、小结



-、齐次方程及其解法

观察 $(xy-y^2)dx-(x^2-2xy)dy=0$, 可化为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy} = \frac{\frac{y}{x} - (\frac{y}{x})^2}{1 - 2\frac{y}{x}}$$
 齐次方程.

如果一阶微分方程可以写成 $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ 的形式,

则称之为齐次方程.

齐次方程
$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$
 的一般解法

作变量代换
$$u = \frac{y}{x}$$
, 即 $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = u + x \cdot \frac{du}{dx}$

得到
$$u$$
 满足的方程 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = g(u)$,整理得
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{g(u) - u}{x}, \quad \text{可分离变量的方程}$$
 分离变量
$$\frac{\mathrm{d}u}{g(u) - u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad \text{两边积分}$$

求出通解后, 用 $\frac{y}{x}$ 代替u, 就得到原方程的通解.



例 解方程
$$xydx - (x^2 - y^2)dy = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

解将方程写为
$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2} = \frac{\frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$
 齐次方程 $\Rightarrow u = \frac{y}{x}$, 则 $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$

$$\Leftrightarrow u = \frac{y}{x}, \text{ If } y = ux, \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

方程变为
$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{u}{1-u^2}$$
,即 $\frac{1-u^2}{u^3}$ d $u = \frac{1}{x}$ d x

积分得
$$-\frac{1}{2u^2} - \ln|u| = \ln|x| + C$$
 可分离变量方程

$$-\frac{x^2}{2y^2} - \ln\left|\frac{y}{x}\right| = \ln|x| + C$$

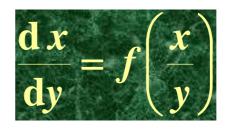




求方程 $(1+e^{-y})ydx = (x-y)dy$ 的通解.

分析 把x看作y的函数,求解比较方便.

解
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{1+e^{-\frac{x}{y}}} \left(\frac{x}{y} - 1\right)$$
 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = f\left(\frac{x}{y}\right)$ 齐次方程



方程变为
$$u + y \frac{du}{dy} = \frac{1}{1 + e^{-u}} (u - 1)$$

$$u + y \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{1 + e^{-u}} (u - 1)$$

分离变量
$$\frac{1+e^u}{u+e^u}du = -\frac{1}{y}dy$$

两边积分 $\ln(u+e^u) = -\ln y + \ln C$

即
$$y(u+e^u)=C$$

得通解
$$x + ye^{\frac{x}{y}} = C$$





(教材第310页第3题)

设有连结点O(0,0)和A(1,1)的一段向上凸的曲线弧OA,对于弧OA上的任一点P(x,y),曲线弧OP与直线段 \overline{OP} 所围成的面积为 x^2 ,求曲线弧OA的方程.



作业 练习册7-3

