第九章　多元函数微分法及其应用

本章概述：本章知识结构如下图：

- 多元函数及其微分
  - 基本概念
    - 多元函数、定义域、图形
    - 距离、邻域、开（闭）集、区域、有（无）界区域
    - 极限
    - 连续
    - 偏导数、方向导数*、梯度*
    - 全微分
  - 性质
    - 极限与连续的关系
    - 闭区域上连续函数的性质
    - 偏导数、连续性与全微分之间的关系
    - 微分法
      - 一阶微分形式不变性
      - 复合函数（链导法则）
      - 隐函数
        - 一个方程
        - 方程组
  - 应用
    - 几何应用
      - 空间曲线的切线与法平面
      - 空间曲面的切平面与法线
    - 极值
      - 必要条件
      - 充分条件
      - 无条件极值
      - 条件极值
        - 一个约束条件
        - 两个约束条件
    - 最值

重点：多元函数求偏导以及微分的基本方法.

难点：复合函数的高阶偏导计算；尤其是即具有复合结构，又是隐函数，并且含有抽象函数的综合函数的偏导计算.

基本要求：本章要注意一元函数与多元函数在相关概念、性质、应用等方面的相同与不同之处．在理解二元函数概念的基础上掌握极限、连续的概念和性质；理解偏导数[1]和全微分的概念，熟练掌握求它们的方法；掌握复合函数和隐函数的微分法，会求空间曲线的切线与法平面方程、空间曲面的切平面与法线方程；应掌握二元函数极值的充分必要条件，会用拉格朗日乘数法求解二、三元函数条件极值问题.

第一节　多元函数的基本概念

1．填空：

（1）相比较而言，一元函数 $y=f(x)$ 的定义域通常是区间，而二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域通常是平面上的 _________；

一元函数 $y=f(x)$ 的图像通常为坐标平面上的一条曲线，而二

---

[1]本章出现的偏导数符号“∂”是同学们接触的一个新记号，区别于全导数符号 “d”（其实是弯曲的“d”），∂可读作“der”、“del”、“dah”或“偏”. 这个符号是法国数学家阿德里安-马里•勒让德（Adrien-Marie Legendre，1752－1833)引入的，并在普鲁士数学家雅可比（Carl Gustav Jacob Jacobi，1804－1851)的重新引入后得到普遍接受．偏导数记号 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 是一个整体记号，而全导数记号 $\dfrac{dy}{dx}$ 既可以看作一个整体记号，亦可视为两微分之商.

元函数 $z=f(x,y)$ 的图像通常为空间中的一个________.

（2）设 $f(x,y)=\dfrac{1-x^2y^2}{x^2+y^2}$，则 $f(\sqrt{2},1)=$____________ ，

$f(\dfrac{y}{x},1)=$____________.

（3）设 $f(x+y,x-y)=x^2-y^2$，则 $f(x,y)=$______________.

（4）二元函数 $z=\dfrac{1}{y^2-2x+5}$ 的间断点是________________.

2．求下列各函数的定义域，并画出该定义域的草图：

（1） $z=\arcsin\dfrac{x}{y^2}$.

（2） $z=\ln(y-x)+\sqrt{1-x^2-y^2}$.

3．求下列极限：

（1） $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$.

（2） $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}xy\sin\dfrac{5}{x^2+y^2}$.

（3^*）$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{5x-6y}{x^2+y^2}$.

4．证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$ 不存在.

5．判断函数 $f(x,y)=\begin{cases}2, & x^2+y^2\neq 0\\ -2, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点处是否连续，并说明理由.

本节作业总结：

第二节 偏导数

1．填空：

（1）函数 $z=f(x,y)$ 对其中一个自变量求偏导数时，应视另一自变量为＿＿＿＿＿＿，因此一元函数与二元函数的求导本质上来说并无任何不同．例如二元函数 $z=(1+xy)^x$，当 z 对 x 求偏导时，该函数可视为幂指函数，$\frac{\partial z}{\partial x}=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿；当 z 对 y 求偏导时，该函数视为幂函数，$\frac{\partial z}{\partial y}=$ ＿＿＿＿＿＿＿．

（2）函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处偏导数均存在是其在该点连续的＿＿＿＿＿＿条件．

（3）由偏导数的几何意义可知，若要求曲线 $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x=1 \end{cases}$ 在点 $(1,1,2)$ 处的切线与 y 轴正向所成的角，则求出偏导数＿＿＿＿＿＿即可，易知该角是＿＿＿＿＿＿．

（4）设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处存在偏导数，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0-\Delta x,y_0)}{\Delta x}=＿＿＿＿＿＿.$$

（5）设 $f(x,y)=xy+(x-1)\sin\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$，则 $f'_x(1,0)=$＿＿＿＿＿，$f'_y(1,0)=$＿＿＿＿＿．

（6）$z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域 D 内连续是这两个二阶混合偏导数在 D 内相等的＿＿＿＿＿＿条件．

2．求下列函数的一阶偏导数：

（1）$z=\ln\frac{y}{x}$．

（2）$z=e^{xy}+yx^2$．

（3） $u = x^{\frac{y}{z}}$.

3．求下列函数的二阶偏导数：

（1） $z = x\sin(x+y)$.

（2） $z = \arctan\dfrac{y}{x}$.

4．设 $z = f\left(\ln x + \dfrac{1}{y}\right)$，且函数 f 可导，求 $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

5．设函数 $f(x,y) = \begin{cases} y\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$，判断其在点 $(0,0)$ 处是否连续和偏导数是否存在.

本节作业总结：

第三节 全微分

1．在“充分”、“必要”、“充要”三者中选择一个正确的填空.

（1）$z=f(x,y)$在点(x,y)处可微分是其在该点连续的________条件. $z=f(x,y)$在点(x,y)处连续是其在该点可微分的_______条件.

（2）$z=f(x,y)$在点(x,y)处的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$存在是其在该点可微分的__________条件. $z=f(x,y)$在点(x,y)处可微分是其在该点偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$存在的___________条件.

（3）$z=f(x,y)$在点(x,y)处的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$存在且连续是其在该点可微分的___________条件.

2．求下列函数的全微分：

（1）$z=x^2y+\frac{x}{y}$.

（2）$z=3xe^{-y}-2\sqrt{x}+\ln 3$.

（3）$u=y^{xz}$.

3．求函数$z=\ln(1+x^2+y^2)$当$x=2$，$y=1$，$\Delta x=0.1$，$\Delta y=-0.2$时的全微分.

4．一直角三角形的斜边长$1.9m$，一个锐角为31°，利用全微分法求这个锐角所对边长的近似值.

5．讨论函数$z=\sqrt{|xy|}$在点$(0,0)$处的可导性与可微性.

本节作业总结：

第四节 多元复合函数的求导法则

1．填空：

（1）设 $z=u^2v^3\cos t, u=\sin t, v=e^t$，则该函数的变量树图为

____________，且 $\dfrac{dz}{dt}=$________________________.

（2）设 $z=xyf\left(\dfrac{y}{x}\right)$，且 $f(u)$ 可导，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$____________.

（3）设 $f(xy, x-y)=x^3-y^3$，其中 $f(u,v)$ 可微，则

$f_x'(x,y)+f_y'(x,y)=$____________.

（4）设 $z=x^2\ln y$，由一阶全微分的形式不变性有

$dz=$_________$d\left(x^2\right)+$________$d(\ln y)$

$=$____________$dx+$____________dy.

2．求下列函数的偏导数或导数：

（1）$z=\sqrt{x^2-y^2}$，$x=\sin t, y=e^t$，求 $\dfrac{dz}{dt}$.

（2）$z=\arctan y+f(v), v=y^2-x^2$，其中 f 可导，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

（3）设 $z=\arcsin(u-v), u=xy, v=x-y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

（4）$z=u^2v^3w$，$u=2t+1, v=t^3, w=3t-1$，求 $\dfrac{dz}{dt}$.

3．求下列函数的偏导数：

（1）$z = f\left(e^{xy}, \cos(x+y)\right)$，其中 f 具有一阶连续偏导数，求

$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

（2）设 $z = f(u,x,y), u = x^2 y$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求

$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

（3）设 $z = f(xy, x-y)$，f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

4．已知函数 f，g 可导，验证 $u = f(x+at) + g(x-at)$ 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

本节作业总结：

第五节 隐函数的求导法则

1．设方程 $\sin xy + e^x = y^2$ 确定了隐函数 $y = y(x)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

2. 设方程 $\dfrac{x}{z} = \ln\dfrac{z}{y}$ 确定了隐函数 $z = z(x, y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\mathrm{dz}$.

3．设方程 $z^3 - 3xyz = 1$ 确定了隐函数 $z = z(x, y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

4．设隐函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x + z = yf\left(x^2 - z^2\right)$ 所确定，其中 f 具有连续导数，求 $z\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

5．设 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 36 \\ x + y - z = 9 \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$， $\dfrac{dz}{dx}$.

6．设$\begin{cases} u^2+xv=2y \\ v^2+yu=3x \end{cases}$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

7[*]．设$y=f(x,t)$,而t是由$F(x,y,t)=0$所确定的x,y的函数，其中f,F均有一阶连续的偏导数，求$\dfrac{dy}{dx}$.

本节作业总结：

第六节 多元函数微分学的几何应用

1．填空：

（1）曲线$\begin{cases} y^2 = 2x \\ z - 2x + 5 = 0 \end{cases}$化成参数形式(以 x 为参数)为：

__________________.

（2）空间曲面 $z = x^2 - 5y^2$ 在点 $(1,1,-4)$ 处方向向上的法向量为

________________.

2．求曲线 $x = t,\ y = \sin t,\ z = \cos 2t$ 在对应 $t = \dfrac{\pi}{6}$ 的点处的切线方程和法平面方程.

3．求曲线$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x + y - 5z + 7 = 0 \end{cases}$在点 $M_0(1,2,2)$ 处的切线方程及法平面方程.

4. 求曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 在点 $(1, 0, 2\sqrt{2})$ 处的切平面方程和法线方程.

5. 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上某点 M 处的切平面 π 的方程，使平面 π 过已知直线 L: $\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{2z-1}{-2}$.

本节作业总结：

第七节* 方向导数与梯度

1．填空：

（1）二元函数 $f\left(x,y\right)$ 在点 $(x_0,\ y_0)$ 处偏导数存在是其在该点的方向导数存在的__________________条件.

（2）二元函数 $f\left(x,y\right)$ 在点 $(x_0,\ y_0)$ 处可微分是其在该点的方向导数存在的_____________条件.

2．求函数 $z=\ln(x+y)$ 在点 $P(1,2)$ 处沿从点 $P(1,2)$ 到点 $Q(2,2-\sqrt{3})$ 的方向的方向导数.

3．求函数 $u=xy+2yz+3xz$ 在点 $(1,1,1)$ 处沿着锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的外法线方向的方向导数.

4．设 $f(x,y,z)=x^2yz$，求 $grad\ \ f(1,-5,2)$，并求函数沿该梯度方向的方向导数.

本节作业总结：

第八节 多元函数的极值及其求法

1．填空：

（1）二元函数的极值点与驻点的关系是：

______________________________________.

（2）若函数 $z=f\left(x,y\right)$ 在点 $(x_0,\, y_0)$ 处具有偏导数，且在点 $(x_0,\, y_0)$ 处有极值，则有 $f_x\left(x_0,y_0\right)=$____________，

$f_y\left(x_0,y_0\right)=$____________.

2．求函数 $f(x,y)=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3\arctan\dfrac{y}{x}$ 的极值.

3．求由 $6x^2+4y^2+3z^2-12x+6z-3=0$ 确定的函数 $z=f\left(x,y\right)$ 的极值.

4．求函数 $z=x^2+y^2-xy+x+y$ 在闭区域 D：$x\le 0,\, y\le 0$ 及 $x+y\ge -3$ 上的最大值和最小值.

5．求函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在条件 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 下的极值.

6*. 求平面 $x+y+z=2$ 和柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线上与 xoy 平面距离最短的点.

本节作业总结：

第九章　自测题

1．填空：

（1）设 $f(x,y)=x+2y$，则 $f(xy, f(x,y))=$______________.

（2）极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{e^x+e^y}{\cos x+\sin y}=$______________.

（3）设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 0, \qquad (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则

$f_x(0,0)=$______，　$f_{xy}(0,0)=$_______.

（4）设 $\varphi(x-az, y-bz)=0$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$________，

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________，　$a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=$_______.

（5）设 $z=z(x,y)$ 由 $z+\ln z-\int_y^x e^{-t^2}dt=0$，则

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$___________________ .

（6）设 $u=e^{xyz}$，则 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=$__________________________.

（7）曲线 $\vec{r}=\vec{f}(t)=(t+1)^2\vec{i}+t^3\vec{j}+\sqrt{1+t^2}\vec{k}$ 在与 $t=0$ 相应的点处的切线方程为______________________，法平面方程_____________________.

（8*）函数 $z=xe^{xy}$ 在点 $(1,0)$ 沿________方向的方向导数最大，其最大值是_______.

（9）二元函数的极值只可能在____________和__________处取得.

（10）二元函数 $z=5-x^2-y^2$ 的极大值点是____________.

2．计算：

（1）求 $u(x,y,z)=x^y y^z z^x$ 的全微分.

（2）设 $z=f(x,y)$ ， $y=y(x)$ 由方程组 $\begin{cases}\sin u+xy=0\\ e^{y}-x^{2}+3u=0\end{cases}$

(其中 u 是 x 的函数)确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

（3）设 $z=f(e^{x}\sin y,x^{2}+y^{2})$ ，其中 f 具有二阶连续偏导数，

求 $\dfrac{\partial^{2}z}{\partial x\partial y}$.

（4）设曲面的方程为 $xyz=a^{3}(a>0)$ ，证明曲面上任意点处的切平面与三个坐标面围成的四面体的体积为常数.

（5）求函数 $z=x^{4}+y^{4}-x^{2}-2xy-y^{2}$ 的极值.

（6）求原点到曲面 $(x-y)^2+z^2=1$ 的最短距离.

（7）求球面 $x^2+y^2+z^2=6$ 与旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 的交线在点 $(1,1,2)$ 处的切线方程.

3．考研题练练看：

（1*）(2012 年数学一，4 分) $grad\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=$___________.

（2）(2012 年数学二，4 分)设函数 $f(x,y)$ 为可微函数，且对任意的 x,y 都有 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$，则使不等式 $f(x_1,y_1)>f(x_2,y_2)$ 成立的一个充分条件是（　　　　）

（A）$x_1>x_2,y_1<y_2$；　　（B）$x_1>x_2,y_1>y_2$；

（C）$x_1<x_2,y_1<y_2$；　　（D）$x_1<x_2,y_1>y_2$.

（3）(2012 年数学二，4 分)设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数，则 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}=$___________.

（4*）(2012 年数学三，4 分)设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$$，则 $dz|_{(0,1)}=$___________.

（5）（2011 年数学三，4 分）设函数 $z=\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$，则 $dz\big|_{(1,1)}=$______________.

（6）(2011 年数学一，4 分)设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(x)>0$，$f'(0)=0$，则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是(　　　　)

（A） $f(0)>1, f''(0)>0$；　（B） $f(0)>1, f''(0)<0$；

（C） $f(0)<1, f''(0)>0$；　（D） $f(0)<1, f''(0)<0$.

（7）(2011 年数学一，4 分)设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}dt$，则 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$____________.

（8）(2011 年数学一，4 分)设 $z=f(xy,yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导，且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$，则 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=1,y=1}=$__________________.

（9*）(2001 数学一，4 分)设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义，且 $f_x'(0,0)=3,\ f_y'(0,0)=1$, 则(　　　　)

（A） $dz\big|_{(0,0)}=3dx+dy$；

（B）曲面 $z=f(x,y)$ 在 $(0,0,f(0,0))$ 处的法向量为 $(3,1,1)$；

（C）曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\y=0\end{cases}$ 在 $(0,0,f(0,0))$ 处的切向量为 $(1,0,3)$；

（D）曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\y=0\end{cases}$ 在 $(0,0,f(0,0))$ 处的切向量为 $(3,0,1)$.

（10）曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为（　　）

（A） $x-y+z=-2$；　（B） $x+y+z=0$；

（C） $x-2y+z=-3$；　（D） $x-y-z=0$.

（11*）(2011 年数学三，10 分)已知函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$ 的极值，$z=f(x+y,f(x,y))$，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$.

（12）(2012 年数学一、二，10 分)求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

（13）(2008 年数学二，10 分)求函数$u = x^2 + y^2 + z^2$在约束条件$z = x^2 + y^2$和$x + y + z = 4$下的最大值和最小值.

（14*）(2010 年数学二，11 分)设函数$\mu = f(x, y)$具有二阶连续偏导数，且满足等式$4\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + 12\frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} = 0$，确定$a, b$的值，使等式在变换$\xi = x + ay, \eta = x + by$下化简为$\frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

（15）（2014 年数学一，4 分）

曲面 $z = x^2(1-\sin y) + y^2(1-\sin x)$ 在点 $(1,0,1)$ 处的切平面方程为__________________________.

（16）(2014 年数学二，4 分)设 $z = z(x,y)$ 是由方程 $e^{2yz} + x + y^2 + z = \frac{7}{4}$ 确定的函数，则 $dz\big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} =$_____________.

(17) (2014 年数学二，4 分)设 $u(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 上连续，在 D 的内部具有二阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$，则(　　　　　).

（A）$u(x,y)$ 的最大值点和最小值点必定都在区域 D 的边界上；

（B）$u(x,y)$ 的最大值点和最小值点必定都在区域 D 的内部；

（C）$u(x,y)$ 的最大值点在区域 D 的内部，最小值点在区域 D 的边界上；

（D）$u(x,y)$ 的最小值点在区域 D 的内部，最大值点在区域 D 的边界上.

（18）(2014 年数学一，10 分)设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$z = f(e^x \cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y)e^{2x}$. 若 $f(0) = 0, f'(0) = 0$,求 $f(u)$ 的表达式.

本章作业纠错与总结：