第九章　多元函数微分法及其应用

第一节 多元函数的基本概念

1．填空：

（1）<u>区域</u>；<u>曲面</u>．（2）$\underline{-\frac{1}{3}}$，$\underline{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$．

（3）$\underline{xy}$．（4）$\underline{\{(x,y)|y^2-2x+5=0\}}$．

2． 求下列各函数的定义域，并画出该定义域的草图.

（1）　解：（1）$D=\{(x,y)|-y^2\le x\le y^2, y\ne 0\}$，图略.

（2）　解：（2）$D=\{(x,y)|y>x,\quad x^2+y^2\le 1\}$，图略.

3．求下列极限：

（1）解：$\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)}\frac{3}{\sqrt{4}-1}=3$．

（2）解：$\because (x,y)\to(0,0)$，$\therefore xy\to 0$ 且 $\left|\sin\frac{5}{x^2+y^2}\right|\le 1$（有界），故原式=0．

（3*）解：当 $x\to\infty, y\to\infty$ 时，有

$$0\le\left|\frac{5x-6y}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{5x}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{6y}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{5x}{x^2}\right|+\left|\frac{6y}{y^2}\right|\to 0,$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{5x-6y}{x^2+y^2}=0$．

4．证明：当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，令 $x=ky^3$，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^3}{x^2+y^6}$

$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{ky^6}{k^2y^6+y^6}=\frac{k}{k^2+1}$，　结果与 k 值有关，故极限不存在.

5．解：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=2\ne -2=f(0,0)$，故函数在 $(0,0)$ 处不连续.

第二节 偏导数

1．填空：

（1）<u>常数</u>；$\underline{(1+xy)^x\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right]}$；$\frac{\partial z}{\partial y}=\underline{x^2(1+xy)^{x-1}}$．

（2）<u>既非充分也非必要</u>．（3）$\underline{\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}}$，$\underline{\arctan 2}$．

（4）$\underline{2f'_x(x_0,y_0)}$．（5）$\underline{0}$，$\underline{1}$．（6）<u>充分</u>.

2．求下列函数的一阶偏导数：

（1）解： $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x}$ ， $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y}$.

（2）解： $\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}+2xy$ ， $\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}+x^2$.

（3）解： $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$ ， $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$ ， $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$.

3．求下列函数的二阶偏导数：

（1）解： $\frac{\partial z}{\partial x}=\sin(x+y)+x\cos(x+y)$ ， $\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos(x+y)$ ，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\cos(x+y)-x\sin(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos(x+y)-x\sin(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-x\sin(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\cos(x+y)-x\sin(x+y).$$

（2）解： $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}$ ， $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$ ，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

4．解： $\frac{\partial z}{\partial x}=f'\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{x}$ ， $\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)$ ，

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=f'-f'=0.$$

5．解： 1） $\because \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}y\cos\frac{1}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$ ，

故函数在点 $(0,0)$ 处连续；

2） $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$ ，

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y\cos\frac{1}{(\Delta y)^2}-0}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\cos\frac{1}{(\Delta y)^2}$$，极限不存在，

故此点处关于 y 的偏导数不存在.

第三节 全微分

1．（1）<u>充分</u>．<u>必要</u>.（2）<u>必要</u>．<u>充分</u>.（3）<u>充分</u>.

2．求下列函数的全微分：

（1）解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy+\frac{1}{y}$　，$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2-\frac{x}{y^2}$，

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(2xy+\frac{1}{y}\right)dx+\left(x^2-\frac{x}{y^2}\right)dy.$$

（2）解：$\frac{\partial z}{\partial x}=3e^{-y}-\frac{1}{\sqrt{x}}$　，$\frac{\partial z}{\partial y}=-3xe^{-y}$，

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(3e^{-y}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx-3xe^{-y}dy.$$

（3）解：$\frac{\partial u}{\partial x}=zy^{xz}\ln y$　，$\frac{\partial u}{\partial y}=xzy^{xz-1}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=xy^{xz}\ln y$，

$$du=zy^{xz}\ln y dx+xzy^{xz-1}dy+xy^{xz}\ln y dz.$$

3．解：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=\frac{2x}{1+x^2+y^2}\Delta x+\frac{2y}{1+x^2+y^2}\Delta y$，

$$=\frac{2}{3}\times 0.1+\frac{1}{3}\times(-0.2)=0.$$

4．解：设所求边长为 a，则 $a=1.9\sin 31^\circ=1.9\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)$，

设 $z=f(x,y)=x\sin y$，取

$$x=2,\Delta x=-0.1,y=\frac{\pi}{6},\Delta y=\frac{\pi}{180},$$

因为 $f_x(x,y)=\sin y, f_y(x,y)=x\cos y$，所以

$$a=f\left(2-0.1,\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)$$

$$\approx f\left(2,\frac{\pi}{6}\right)+f_x\left(2,\frac{\pi}{6}\right)(-0.1)+f_y\left(2,\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{180}\right)$$

$=0.95+\frac{\sqrt{3}\pi}{180}\approx 0.98$，故所求边长的近似值为 $0.98m$.

5．解：$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x\cdot 0|}-0}{\Delta x}=0$，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|0\cdot\Delta y|}-0}{\Delta y}=0,$$

故函数 $\boldsymbol{z}=\sqrt{|\boldsymbol{xy}|}$ 在点 $(0,0)$ 处的偏导数存在；

但 $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-dz}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$，其中

$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，

易知当 $(\Delta x,\Delta y)$ 沿直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 时此极限不存在．故函数 $\boldsymbol{z}=\sqrt{|\boldsymbol{xy}|}$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

第四节 多元复合函数的求导法则

1．填空：

（1）树图略，$e^{3t}\sin t\left(2\cos^2 t+3\sin t\cos t-\sin^2 t\right)$.

（2）$2z$．（3）$3\left(y^2+y+x\right)$.

（4）$\ln y$，x^2，$2x\ln y$，$\frac{x^2}{y}$.

2．求下列函数的偏导数或导数：

（1）解：$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\cos t-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\cdot e^t$，

$$=\frac{1}{\sqrt{\sin^2 t-e^{2t}}}\left(\sin t\cos t-e^{2t}\right).$$

（2）解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(v)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=-2xf'(v)$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+y^2}+f'(v)\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{1+y^2}+2yf'(v).$$

（3）解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y-1}{\sqrt{1-(u-v)^2}}$，

$$=\frac{y-1}{\sqrt{1-(xy-x+y)^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x+1}{\sqrt{1-(u-v)^2}}$$

$$=\frac{x+1}{\sqrt{1-(xy-x+y)^2}}.$$

（4）解：$\dfrac{dz}{dt}=4uv^3w+9u^2v^2wt^2+3u^2v^3$.

3．求下列函数的偏导数：

（1）解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}f_1'-\sin(x+y)f_2'$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}f_1'-\sin(x+y)f_2'.$$

（2）解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xyf_1'+f_2'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2f_1'+f_3'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf_1'+2x^3yf_{11}''+2xyf_{13}''+x^2f_{21}''+f_{23}''.$$

（3）解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+f_2'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=xf_1'-f_2'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2f_{11}''+2yf_{12}''+f_{22}''，$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+xyf_{11}''+(x-y)f_{12}''-f_{22}''，$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2f_{11}''-2xf_{12}''+f_{22}''.$$

3．证明：$\dfrac{\partial u}{\partial t}=af'-ag'$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2f''+a^2g''$，

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'+g'$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''+g''$，故 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

第五节 隐函数的求导法则

1．解：（公式法）令 $F(x,y)=\sin xy+e^x-y^2$，

则 $F_x=y\cos xy+e^x$，　　$F_y=x\cos xy-2y$，

所以 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}=-\dfrac{y\cos xy+e^x}{x\cos xy-2y}$，

提示：另还可用两边直接对自变量求偏导或两边求全微分的方法，过程略．下同．

2．解：（公式法）令 $F(x,y,z)=\dfrac{x}{z}-\ln\dfrac{z}{y}$，$F_x=\dfrac{1}{z}$，　$F_y=\dfrac{1}{y}$，

$F_z=-\dfrac{x+z}{z^2}$，

则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{z}{x+z}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}=\dfrac{z^2}{y(x+z)}$，

故 $dz=\frac{z}{x+z}dx+\frac{z^2}{y(x+z)}dy$.

3. 解：令 $F(x,y,z)=z^3-3xyz-1$，则 $F_x=-3yz$，$F_y=-3xz$，

$F_z=3z^2-3xy$，

则 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz}{z^2-xy}$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz}{z^2-xy}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xz}{z^2-xy}\right)$$

$$=\frac{\left(z^2-xy\right)\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)-yz\left(2z\frac{\partial z}{\partial y}-x\right)}{\left(z^2-xy\right)^2}$$

$$=\frac{z\left(z^4-2xyz^2-x^2y^2\right)}{\left(z^2-xy\right)^3}.$$

4. 证明：令 $F(x,y,z)=x+z-yf\left(x^2-z^2\right)$，则 $F_x=1-2xyf'$，

$F_y=-f$，　$F_z=1+2yzf'$，

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{1-2xyf'}{1+2yzf'}$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{f}{1+2yzf'}$，

故 $z\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z-2xyzf'}{1+2yzf'}+\frac{yf}{1+2yzf'}$

$$=-\frac{z-2xyzf'-yf}{1+2yzf'}=-\frac{z-2xyzf'-(x+z)}{1+2yzf'}=x.$$

5. 解： 方程组两边直接对自变量 x 求偏导，得：

$$\begin{cases}2x+2y\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}=0\\ 1+\frac{dy}{dx}-\frac{dz}{dx}=0\end{cases},$$

故 $\frac{dy}{dx}=\frac{-x-z}{y+z}$，　$\frac{dz}{dx}=\frac{y-x}{y+z}$.

6. 解： 方程组两边直接对自变量 x 求偏导，得：

$$\begin{cases}2u\frac{\partial u}{\partial x}+v+x\frac{\partial v}{\partial x}=0\\ 2v\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial x}=3\end{cases},$$

故 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-2v^2-3x}{4uv-xy}$，　$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{6u-yv}{4uv-xy}$.

7*. 解：联立方程组 $\begin{cases}y=f(x,t)\\ F(x,y,t)=0\end{cases}$ 两边直接对自变量 x 求偏导，

得：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f_x' + f_t \dfrac{dt}{dx} \\ F_x + F_y \dfrac{dy}{dx} + F_t \dfrac{dt}{dx} = 0 \end{cases}$$

故 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f_x F_t - f_t F_x}{f_t F_y + F_t}$

第六节 多元函数微分学的几何应用

1．填空：

（1）$\begin{cases} x = x \\ y = \pm\sqrt{2x} \\ z = 2x-5 \end{cases}$．（2）$\underline{(-2,10,1)}$.

2．解：切向量 $\vec{T} = (x',y',z')\big|_{t=\frac{\pi}{6}} = (1,\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\sqrt{3})$，

曲线在对应 $t = \dfrac{\pi}{6}$ 的点处的切线方程为：

$$\frac{x-\frac{\pi}{6}}{1} = \frac{y-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{z-\frac{1}{2}}{-\sqrt{3}},$$

法平面方程为：$(x-\dfrac{\pi}{6}) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}(y-\dfrac{1}{2}) - \sqrt{3}(z-\dfrac{1}{2}) = 0$，

即 $2x + \sqrt{3}y - 2\sqrt{3}z + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{3} = 0$.

3．解：用隐函数组求导的方法得到 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{5x+z}{-5y-z}$，

$\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{-y+x}{-5y-z}$，点 $M_0(1,2,2)$ 处的切向量

$$\vec{T} = \left(1,\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}\right)\bigg|_{M_0} = (1,-\frac{7}{12},\frac{1}{12}) // (12,-7,1),$$

曲线在对应点 $M_0(1,2,2)$ 处的切线方程为：

$$\frac{x-1}{12} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z-2}{1},$$

法平面方程为：$12(x-1) - 7(y-2) + (z-2) = 0$.

4．解： 令 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$，

法向量 $\vec{n} = (f_x,f_y,f_z)\big|_{(1,0,2\sqrt{2})} = (2,0,4\sqrt{2}) // (1,0,2\sqrt{2})$，

故所求切平面方程为 $(x-1) + 2\sqrt{2}(z-2\sqrt{2}) = 0$，

即 $x + 2\sqrt{2}z - 9 = 0$.

法线方程为：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-0}{0}=\dfrac{z-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$.

5．解：设点M的坐标为$(x_0\ y_0\ ,z_0)$，则切平面π的法向量$\vec{n}$

$=(2x_0,4y_0,6z_0)$，直线L过点$(6,3,\dfrac{1}{2})$，且方向向量为

$\vec{l}=(2,1,-1)$，故有

$$\begin{cases}4x_0+4y_0-6z_0=0\\ 2x_0(x_0-6)+4y_0(y_0-3)+6z_0\left(z_0-\dfrac{1}{2}\right)=0\\ x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=21\end{cases},$$

解得$\begin{cases}x_0=3\\ y_0=0\\ z_0=2\end{cases}$或$\begin{cases}x_0=1\\ y_0=2\\ z_0=2\end{cases}$，

所求切平面方程为$x+2z=7$或$x+4y+6z=21$.

注：上题中在直线L上任取两点的坐标代入平面π的方程，同样可求得点$(x_0\ y_0\ ,z_0)$，过程略.

第七节* 方向导数与梯度

1．填空：

（1）既不充分也不必要.（2）充分.

2．解：$\overrightarrow{PQ}=\left(1,-\sqrt{3}\right)$，与之同方向的单位向量$\vec{e}=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+y},$$

所求方向导数为$\left.\dfrac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,2)}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\theta+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\sin\theta=\dfrac{1-\sqrt{3}}{6}$.

3．解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

锥面的外法线方向为$(\sqrt{2},\sqrt{2},-2)$，其方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=\frac{-\sqrt{2}}{2},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=4,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=3,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}=5,$$

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\cos\gamma=\frac{7-5\sqrt{2}}{2}.$$

4．解：$f_x=2xyz$，$f_y=x^2z$，$f_z=x^2y$，

$grad\ f(1,-5,2) = -20\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$，

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left|grad\ f(1,-5,2)\right| = \sqrt{429}.$$

第八节 多元函数的极值及其求法

1．填空：

（1）<u>各偏导数存在的极值点必是驻点，但驻点不一定是极值点</u>.

（2）<u>0</u>，<u>0</u>.

2．解：由
$$\begin{cases} f_x = 1 + \dfrac{x}{x^2+y^2} - \dfrac{3y}{x^2+y^2} = 0 \\ f_y = -2 + \dfrac{y}{x^2+y^2} + \dfrac{3x}{x^2+y^2} = 0 \end{cases},$$

得驻点$(1,1)$，$(0,0)$（无定义，舍去），

$$f_{xx} = \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2x(3y-x)}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$f_{xy} = -\frac{3}{x^2+y^2} + \frac{2y(3y-x)}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$f_{yy} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y(y+3x)}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

在驻点$(1,1)$处，$A=\frac{3}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=-\frac{3}{2}$，得

$AC-B^2=-\frac{5}{2}<0$，故$(1,1)$不是函数的极值点，该函数无极值点.

3．解：令$F(x,y,z)=6x^2+4y^2+3z^2-12x+6z-3$，

由隐函数求导得
$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z} = -\dfrac{2x-2}{z+1} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z} = -\dfrac{4y}{3z+3} = 0 \end{cases},$$

得驻点$(1,0)$， 代入原方程得：

$z^2+2z-3=0$，解得$z=1, z=-3$，

由方程知此曲面为椭球面，故函数$z=f(x,y)$的极大值为1，极小值为-3.

4．解：（1）求D内的驻点：

由
$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x-y+1=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y-x+1=0 \end{cases}$$
得驻点$(-1,-1)$，而$z(-1,-1)=-1$；

（2） 求函数在边界上的最值.

当 $x=0,-3\le y\le 0$ 时， $z=y^2+y$，

只须比较 $z(0,0)=0, z(0,-3)=6, z(0,-\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$，

同理可讨论边界 $y=0,-3\le x\le 0$，得

$z(-3,0)=6, z(-\frac{1}{2},0)=-\frac{1}{4}$，

当 $x+y=-3$ 时， $z=3x^2+9x+6$，得 $z(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2})=-\frac{3}{4}$，

比较以上函数值，易知函数在 $(-3,0)$ 和 $(0,-3)$ 处取得最大值 6，

在点 $(-1,-1)$ 处达到最小值 -1.

5．解：作拉格朗日函数 $L(x,y)=x^2+y^2+\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)$

由 $\begin{cases} L_x=2x+\dfrac{\lambda}{a}=0 \\ L_y=2y+\dfrac{\lambda}{b}=0 \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\dfrac{ab^2}{a^2+b^2} \\ y=\dfrac{a^2b}{a^2+b^2} \\ \lambda=-\dfrac{2a^2b^2}{a^2+b^2} \end{cases}$，故有唯一驻点

$\left(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2},\dfrac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$，

显然此问题无极大值(几何意义为求已知直线上点到原点的距离的极值问题)，所以函数在该驻点处取得极小值，代入可

得极小值为 $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

6*．解：作拉格朗日函数

$L(x,y,z)=z^2+\lambda(x^2+y^2-1)+\mu(x+y+z-2)$

由 $\begin{cases} L_x=2\lambda x+\mu=0 \\ L_y=2\lambda y+\mu=0 \\ L_z=2z+\mu=0 \\ x^2+y^2=1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$，要使满足第 5 个方程的点

的竖坐标最小，

故点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},2-\sqrt{2}\right)$ 为所求.

第九章　自测题

1．填空：

（1）$\underline{2x+4y+xy}$.（2）$\underline{2}$.（3）$\underline{0}$， $\underline{-1}$.

（4）$\underline{\dfrac{\varphi_1'}{a\varphi_1'+b\varphi_2'}}$， $\underline{\dfrac{\varphi_2'}{a\varphi_1'+b\varphi_2'}}$， $\underline{1}$.（5）$\underline{\dfrac{ze^{-x^2}}{z+1}}$.

（6）$\underline{e^{xyz}(x^2y^2z^2+3xyz+1)}$.

（7）$\underline{\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-0}{0}=\dfrac{z-1}{0}}$，　$\underline{x-1=0}$.（8*）$\underline{\sqrt{2}}$.

（9）不可导点.（10）$\underline{(0,0)}$.

2．计算：

（1）解：$\mathrm{d}u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$，又

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x^{y-1}y^{z+1}z^x+x^y y^z z^x\ln z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^y y^{z-1}z^{x+1}+x^y y^z z^x\ln x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{y+1}y^z z^{x-1}+x^y y^z z^x\ln y,$$ 所以

$$\mathrm{d}u=x^y y^z z^x[(\frac{y}{x}+\ln z)\mathrm{d}x+(\frac{z}{y}+\ln x)\mathrm{d}y+(\frac{x}{z}+\ln y)\mathrm{d}y].$$

（2）解：由题设知，$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，

方程组两端同时对 x 求导得：

$$\begin{cases}\cos u\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+y+x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0\\ e^y\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2x+3\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=0\end{cases},$$

解方程组得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2x\cos u+3y}{e^y\cos u-3x}$，所以

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f_x+f_y\cdot\frac{2x\cos u+3y}{e^y\cos u-3x}.$$

（3）解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot e^x\sin y+f_2'\cdot 2x$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(f_1'\cdot e^x\sin y)+\frac{\partial}{\partial y}(f_2'\cdot 2x),$$

$$=f_1'\cdot e^x\cos y+e^x\sin y(f_{11}''\cdot e^x\cos y+f_{12}''\cdot 2y)$$

$$+2x(f_{21}''\cdot e^x\cos y+f_{22}''\cdot 2y)$$

$$=f_1'\cdot e^x\cos y+e^{2x}\sin y\cos y\cdot f_{11}''$$

$$+2e^x(y\sin y+x\cos y)f_{12}''+4xyf_{22}''.$$

（4）证明：设 (x_0,y_0,z_0) 是曲面上任意一点，则

$x_0y_0z_0=a^3$，$a>0, x_0, y_0, z_0$ 不同时为零.

令 $F(x,y,z)=xyz-a^3,(a>0)$，则曲面在该点处切平面的法向量为：

$F_x\big|_{(x_0,y_0,z_0)}=yz\big|_{(x_0,y_0,z_0)}=y_0z_0$，

$F_y\big|_{(x_0,y_0,z_0)}=xz\big|_{(x_0,y_0,z_0)}=x_0z_0$ ，

$F_z\big|_{(x_0,y_0,z_0)}=xy\big|_{(x_0,y_0,z_0)}=x_0y_0$，

切平面的方程为：

$y_0z_0(x-x_0)+x_0z_0(y-y_0)+x_0y_0(z-z_0)=0$，

将其化为截距式方程得：$\dfrac{x}{3x_0}+\dfrac{y}{3y_0}+\dfrac{z}{3z_0}=1$，

则切平面在三个坐标轴的截距分别为：$3x_0$，$3y_0$，$3z_0$，切平面与三个坐标面围成的四面体的体积为：

$V=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 3x_0\cdot 3y_0\cdot 3z_0=\dfrac{9}{2}a^3$，为常数.

（5）解：由题设可知 $\begin{cases} z_x=4x^3-2x-2y=0 \\ z_y=4y^3-2x-2y=0 \end{cases}$，

解得驻点为 $(-1,-1)$，$(1,1)$，$(0,0)$；

又 $A=z_{xx}=12x^2-2$，$B=z_{xy}=-2$，$C=z_{yy}=12y^2-2$，

所以在 $(-1,-1)$ 处，$A=10>0$，$B=-2$，$C=10$，故

$AC-B^2>0$，点 $(-1,-1)$ 是极小值点，极小值为

$z(-1,-1)=-2$；

在 $(1,1)$ 处，$A=10>0$，$B=-2$，$C=10$，同样

$AC-B^2>0$，点 $(1,1)$ 是极小值点，极小值为 $z(1,1)=-2$；

在 $(0,0)$ 处，$AC-B^2=0$，故无法做出判别． 而此时，若

$y=x$， 则 $z=2x^2(x^2-2)$ 在 $(x,y)=(0,0)$ 附近有

$z=2x^2(x^2-2)<0=z(0,0)$． 若 $y=-x$， 则

$z=2x^4>0=z(0,0)$，故 $(0,0)$ 不是极值点.

（6）解：设 (x,y,z) 是曲面上的点，它到原点的距离为

$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，

令 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$，问题化简为在 $(x-y)^2+z^2=1$ 的约束条件下求 $f(x,y,z)$ 的最小值.

设 $L(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda[(x-y)^2+z^2-1]$，则由

lagrange 乘数法得 $\begin{cases} L_x=2x+2\lambda(x-y)=0 \\ L_y=2y-2\lambda(x-y)=0 \\ L_z=2z+2\lambda z=0 \\ (x-y)^2+z^2-1=0 \end{cases}$，

解得 $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$，$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ 两个驻点，且均为最小值点，

原点到曲面的最短距离为 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（7）解：方法一（推导法）曲线的一般方程为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$，

方程两端同时对 $\boldsymbol{x}$ 求导得：$\begin{cases} 2x+2y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2x+2y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \end{cases}$，

解得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{(1,1,2)}=-1$，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\Big|_{(1,1,2)}=0$，

故曲线在点 $(1,1,2)$ 处的切向量为 $(1,-1,0)$，切线方程为：

$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{0}$.

方法二（向量代数法）设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6$，则

$F_x(x,y,z)\big|_{(1,1,2)}=2x\big|_{(1,1,2)}=2$，

$F_y(x,y,z)\big|_{(1,1,2)}=2y\big|_{(1,1,2)}=2$，

$F_z(x,y,z)\big|_{(1,1,2)}=2z\big|_{(1,1,2)}=4$，

即球面在点 $(1,1,2)$ 处的法向量 $\vec{n}_1=(2,2,4)$；

设 $G(x,y,z)=x^2+y^2-z$，则

$G_x(x,y,z)\big|_{(1,1,2)}=2x\big|_{(1,1,2)}=2$，

$G_y(x,y,z)\big|_{(1,1,2)}=2y\big|_{(1,1,2)}=2$，

$G_z(x,y,z)\big|_{(1,1,2)}=-1$，

即旋转抛物面在点 $(1,1,2)$ 处的法向量为 $\vec{n}_2=(2,2,-1)$，

故切向量 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(2,2,4)\times(2,2,-1)$

$=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(-6,6,0)//(1,-1,0)$，

切线方程为：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{0}$.

3．考研题练练看：

（1[*]）$\underline{(1,1,1)}$.（2）A.（3）$\underline{1}$.（4[*]）$\underline{2dx-dy}$.

（5）$\underline{(2\ln 2+1)dx-(2\ln 2+1)dy}$.（6）A.（7）$\underline{4}$.

（8）$\underline{f_{11}''(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1)}$.（9[*]）C.（10）A.

（11[*]）解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=z_u+z_v v_x$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z_{uu}+z_{uv}v_y+\left(z_{vu}+z_{vv}v_y\right)v_x+z_v v_{xy},$$

由于 $f(1,1=2)$ 是 $f(u,v)$ 的极值，故 $f_u(1,1)=f_v(1,1)=0$，

所以 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|(1,1)=f_{uv}(2,2)+f_v(2,2)f_{uv}(1,1)$，

（12）解：令 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-x)$

$=(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0$，

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-y)=(-xy)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0$，

得驻点 $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$，

又 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-x)(1-x^2)+e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-2x)$

$=(x^3-3x)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-y)(-xy)+e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-x)$

$=(xy^2-x)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-y)(1-x^2)=(x^2y-y)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，

故在 $(1,0)$ 处，$A=-2e^{-\frac{1}{2}},B=0,C=-e^{-\frac{1}{2}}$，所以

$AC-B^2=2e^{-1}>0$ 又 $A<0$，

$\therefore (1,0)$ 为极大值，极大值为 $f(1,0)=e^{-\frac{1}{2}}$；

在 $(-1,0)$ 处，$A=2e^{-\frac{1}{2}},B=0,C=e^{-\frac{1}{2}}$，所以

$AC-B^2=2e^{-1}>0$ 又 $A>0$，

$\therefore (-1,0)$为极小值，极小值为 $f(-1,0)=-e^{-\frac{1}{2}}$.

（13）解：作拉格朗日函数

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-4),$$

令$\begin{cases} F_x'=2x+2\lambda x+\mu=0 \\ F_y'=2y+2\lambda y+\mu=0 \\ F_z'=2z-\lambda+\mu=0 \\ x^2+y^2-z=0 \\ x+y+z-4=0 \end{cases}$，解得$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$或$\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \\ z=8 \end{cases}$，

故所求得最大值为 72，最小值为 6.

（14*）解：$\because \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot a+b\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 \mu}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=a\frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi^2}+(a+b)\frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi\partial \eta}+b\frac{\partial^2 \mu}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial u}{\partial \xi}+b\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=a^2\frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi^2}+2ab\frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi\partial \eta}+b^2\frac{\partial^2 \mu}{\partial \eta^2},$$

故$4\dfrac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}+12\dfrac{\partial^2 \mu}{\partial x\partial y}+5\dfrac{\partial^2 \mu}{\partial y^2}=(5a^2+12a+4)\dfrac{\partial^2 \mu}{\partial \xi^2}$

$$+(12(a+b)+10ab+8)\frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi\partial \eta}+(5b^2+12b+4)\frac{\partial^2 \mu}{\partial \eta^2}=0,$$

当$\begin{cases} 5a^2+12a+4=0 & (1) \\ 5b^2+12b+4=0 & (2) \\ 12(a+b)+10ab+8\neq 0 & (3) \end{cases}$时满足等式，

则$\begin{cases} a=-\dfrac{2}{5} \\ b=-2 \end{cases}$或$\begin{cases} a=-2 \\ b=-\dfrac{2}{5} \end{cases}$.

（15）$2x-y-z-1=0$.

（16）$-\dfrac{1}{2}dx-\dfrac{1}{2}dy$.

（17）A.

（18）解：设$u=e^x\cos y$,则$z=f(u)=f(e^x\cos y)$,

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(u)e^{x\cos y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial^2 x}=f''(u)e^{2x}\cos^2 y+f'(u)e^x\cos y$;

$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)e^x\sin y,\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}=f''(u)e^{2x}\sin^2 y-f'(u)e^x\cos y$；

$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}=f''(e^x\cos y)e^{2x}$，由条件知，

$f''(u)=4z+e^x\cos y=4f(u)+u$，此为二阶常系数线性非齐次方程.

对应齐次方程通解为：$f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}$,其中$C_1,C_2$为任意常数.

非齐次方程特解可求得为：$y^*=-\frac{1}{4}u$.

故非齐次方程通解为$f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}-\frac{1}{4}u$.

将初始条件$f(0)=0,f'(0)=0$代入,

可得$C_1=\frac{1}{16}$, $C_2=-\frac{1}{16}$.

所以$f(u)$的表达式为$f(u)=\frac{1}{16}e^{2u}-\frac{1}{16}e^{-2u}-\frac{1}{4}u$.