第十二章　无穷级数

第一节 常数项级数的概念与性质

1．填空：

（1）$\underline{(-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n}}$．（2）$\underline{\ 0\ }$．（3）$\underline{1-\dfrac{1}{n+1}}$，$\underline{\ 1\ }$．

（4）$\underline{a_1-a_{n+1}}$，$\underline{a_1-a}$．（5）<u>收敛</u>，$\underline{2s\text{-}u_1}$．（6）<u>发散</u>．

2．根据级数收敛与发散的定义判断下列级数的敛散性，如果收敛，则求级数的和：

（1）解：级数的部分和为

$$s_n=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\dots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$$=\sqrt{n+1}-1.$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=+\infty$，

即部分和数列不存在极限，所以原级数发散．

（2）解：将级数的一般项进行分解得

$$u_n=\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{(n+1)(n-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right),$$

所以，级数的部分和为

$$s_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{3}{4}$，

即部分和数列存在极限，且极限值为$\dfrac{3}{4}$，根据定义可得，原级数收敛，且收敛于$\dfrac{3}{4}$．

（3）解：　因为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{n\pi}{6}$不存在，根据收敛级数的必要性条件可知，级数的一般项极限不为零，则原级数必定发散．

3．判断下列级数的敛散性，如果收敛，则求级数的和：

（1）解：这是一个公比为$-\dfrac{3}{4}$的等比级数，因为$\left|-\dfrac{3}{4}\right|<1$，所以收敛．其和为$s=\dfrac{u_1}{1-q}=\dfrac{-\frac{3}{4}}{1-(-\frac{3}{4})}=-\dfrac{3}{7}$．

（2）解：这是公比为$-\dfrac{3}{2}$的等比级数，因为$\left|-\dfrac{3}{2}\right|>1$，所以发散．

（3）解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{100n+1}=\dfrac{1}{100}\neq 0$，根据收敛级数的

必要性条件可知，原级数发散.

（4）解：因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}$是公比为$\frac{2}{3}$的等比级数，所以收敛，

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n}=3\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散级数，根据收敛级数的性质可知，

原级数发散.

（5）解：原级数的一般项$u_n=\ln(n+1)-\ln n$，所以原级数的部

分和$s_n=(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\ldots+[(\ln(n+1)-\ln n]$

$=\ln(n+1)-\ln 1=\ln(n+1)$，

因为$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)$不存在，所以原级数发散.

（6）解：原级数变形为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(\frac{1}{3})^n+(\frac{1}{2})^n]$，因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^n$和

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n$均为公比$|q|<1$的等比级数，所以原级数收敛.

其和为$s=\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$.

（7）解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^n}{(1+n)^n}=3\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{1+n})^n=3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{3}{e}\neq 0$，

根据收敛级数的必要条件可知，原级数发散.

第二节　常数项级数的审敛法

1．填空：

（1）<u>收敛</u>.（2）<u>发散</u>；<u>收敛</u>；<u>可能收敛也可能发散</u>.

（3）<u>$k<1$</u>；<u>$k>1$</u>时，<u>$k=1$</u>.（4）<u>$p>1$</u>；<u>$p\le 1$</u>时.（5）<u>发散</u>.

（6）<u>可能发散也可能收敛</u>.

2．选择：（1）D.（2）C.（3）B .（4）C.

3．用比较审敛法及其极限形式判断下列级数的敛散性：

（1）解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n+1}{n^2+2}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n^2+2}=1$，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，

根据比较审敛法的极限形式（或者极限审敛法），原级数一定发散.

（2）解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{(n+1)(2n+1)}}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)(2n+1)}=\frac{1}{2}$，而

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，根据比较审敛的极限形式（或者极限审敛法），原级数一定收敛.

（3）解：因为$0\le\sin\frac{\pi}{2^n}\le\frac{\pi}{2^n}$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$是公比为$\frac{1}{2}$的等比级数，根据比较审敛法，原级数一定收敛.

（4）解：当$a>1$时，$0\le\frac{1}{1+a^n}<\frac{1}{a^n}$而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$是公比为$\frac{1}{a}<1$的等比级数，根据比较审敛法，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$一定收敛；

当$0<a<1$时，因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}=1\neq 0$，根据级数收敛的必要性条件，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$发散；

当$a=1$时，原级数即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$，发散.

（5*）解：因为$\ln(1+x)<x(x\neq 0,-1<x<+\infty)$，

所以$\ln\frac{n+1}{n}=\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$，即原级数为正项级数；

同时，$\ln\frac{n+1}{n}=-\ln\frac{n}{n+1}=-\ln(1-\frac{1}{n+1})>\frac{1}{n+1}$，

则：$0<\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}$，

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，所以原级数也收敛.

4．用比值审敛法判断下列级数的敛散性：

（1）解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}}=\frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^2=\frac{1}{3}<1$，根据比值审敛法，原级数收敛.

（2）解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{(n+1)!}}{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=2>1$，根据比值审敛法，原级数发散.

（3）解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\tan\dfrac{\pi}{2^{n+2}}}{n\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{\dfrac{\pi}{2^{n+2}}}{\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}=\dfrac{1}{2}<1$，根据比值审敛法，原级数收敛.

（4）解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{2^n n!}{n^n}}=2\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n}{n+1})^n=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(1+\dfrac{1}{n})^n}=\dfrac{2}{e}<1$，

根据比值审敛法，原级数收敛.

5．用根值审敛法判别下列级数的敛散性：

（1）解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\dfrac{n}{2n+1})^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}<1$，根据根值审敛法，原级数收敛.

（2）解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{[\ln(n+1)]^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}=0<1$，根据根值审敛法，原级数收敛.

（3）解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\dfrac{b}{a_n})^n}=\dfrac{b}{a}$，

当$\dfrac{b}{a}<1$，即$a>b$时，原级数收敛；

当$\dfrac{b}{a}>1$，即$a<b$时，原级数发散；

当$\dfrac{b}{a}=1$，即$a=b$时，原级数可能收敛也可能发散.

6．判别下列级数的敛散性：

（1）解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}=1\neq 0$，根据收敛级数的必要条件可知，原级数发散.

（2）解：原级数显然为正项级数，根据比较审敛法的极限形式，

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{na+b}}{\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a+\dfrac{b}{n}}=\dfrac{1}{a}$，所以原级数发散.

（3）解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{2^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\dfrac{e}{2}>1$，

所以原级数发散.

7．判别级数的敛散性，若收敛，指出条件收敛还是绝对收敛：

（1）解：因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{n}{3^{n-1}}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^{n-1}}$，

而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n+1}{3^n}}{\dfrac{n}{3^{n-1}}}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{1}{3}<1$，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^{n-1}}$收敛，

因此原级数绝对收敛.

（2）解：因为$\left|\frac{(2n+1)^2}{2^n}\cos n\pi\right| \le \frac{(2n+1)^2}{2^n}$，又因为：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+3)^2}{2^{n+1}}}{\frac{(2n+1)^2}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)^2}{2(2n+1)^2}=\frac{1}{2}<1,$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^2}{2^n}$收敛，因此原级数绝对收敛.

（3）解：级数的一般项为：$u_n=(-1)^{n-1}(1+\frac{1}{10^n})$，因为

$\lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{10^n})=1\ne 0$，所以原级数的一般项不趋近于 0，原级数发散.

（4[*]）解：这是一个交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$，

因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$发散（见第一节习题 2（1）），

所以原级数不是绝对收敛，

又因为：$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$，

$$u_n-u_{n+1}=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{1}{1+\sqrt{\frac{n}{n+1}}}-\frac{1}{1+\sqrt{\frac{n}{n+1}+2}}\right)>0,$$

根据莱布尼兹定理可知，原级数收敛且是条件收敛.

8[*]．解：先讨论$x>0$的情形.

当$x=1$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$，显然发散；

当$0<x<1$时，级数为正项级数，利用比值审敛法，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{1+x^{2n+2}}\cdot\frac{1+x^{2n}}{x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x+x^{2n+1}}{1+x^{2n+2}}=x<1,$$

所以此时级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$收敛且是绝对收敛；

当$x>1$时，同样利用比值审敛法，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x+x^{2n+1}}{1+x^{2n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^{2n+1}}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^{2n+2}}+1}=\frac{1}{x}<1,$$

所以此时级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$收敛且是绝对收敛；

再看$x<0$的情形.

当$x=-1$，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}$，显然发散；

当$-1<x<0$和$x<-1$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-x)^n}{1+x^{2n}}$，这是一个交错级数，对其一般项取绝对值得到正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{1+x^{2n}}$，按照同样的方法可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{1+x^{2n}}$收敛，也即原级数绝对收敛；

而当$x=0$时，级数显然收敛且绝对收敛；

综合得，原级数在$x=\pm1$时发散，其他均为绝对收敛.

9*．证明：设$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=S_1$，若$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$收敛，设$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=S_2$，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=S_2-S_1$，即$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n}+a_{2n-1})=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，与$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$条件收敛矛盾，所以$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$发散.

因为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$条件收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

10* 证明：因为$a_n^2+b_n^2\geq 2|a_nb_n|\geq 0$，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_nb_n\right|$收敛；

因为$0\leq(a_n+b_n)^2\leq a_n^2+b_n^2+2|a_nb_n|$，所以$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$收敛；令$b_n=\frac{1}{n}$，因为$\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_nb_n\right|$收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$收敛.

第三节 幂级数

1．填空：

（1）<u>绝对收敛</u>；<u>绝对收敛</u>．（2）$\underline{\frac{1}{\rho}}$；$\underline{+\infty}$；$\underline{0}$．（3）$\underline{1}$，

$(-1,1)$．（4）$R_1=R_2$；（5）$(-R,R)$．

2．选择：（1）B．（2）B．　（3）A．　（4）C．

（5*）B（提示：令 $y=x-1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty} na_n y^{n+1}$

$=y^2\sum_{n=1}^{\infty} na_n y^{n-1}=y^2(\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n)'$）．（6）B．（7）D．

3．　求下列幂级数的收敛域：

（1）解：因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)}=0$，

收敛半径为 $R=+\infty$，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$．

（2）解：因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)^2}}{(-1)^n\frac{1}{n^2}}\right|=1$，

所以收敛半径 $R=1$，收敛区间为 $(-1,1)$；

当 $x=1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$，这是一个绝对收敛级数；

当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，这是一个收敛的正项级数；

综合得原级数的收敛域为 $[-1,1]$．

（3）解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{2n-1}{2n+1}\right|=1\Rightarrow R=1$，

故当 $|2x-3|<1$，即 $1<x<2$ 时级数绝对收敛，

当 $x=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$，级数发散，

当 $x=2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ 为收敛的交错级数，所以原级数的收敛域为 $(1,2]$．

（4）解：这是一个缺奇次项的幂级数，直接使用比值审敛法得：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})\cdot 2^{n+1}\cdot x^{2n+2}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot 2^n\cdot x^{2n}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}\cdot 2x^2=2x^2,$$

所以当 $2x^2<1$，即 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，级数绝对收敛；

当 $2x^2>1$ 时，即 $x>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $x<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，原级数发散；

当 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$，发散；

当 $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$，发散（见第一节习题 2（1））；

所以，级数的收敛域为 $(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}})$.

（5*）解：因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}\Big),$$

因为正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})=+\infty$，

所以上述的 $\rho=1$，即级数的收敛半径为 1，收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=\pm1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})x^n$，因为

$$|u_n|=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\to\infty(n\to\infty),$$

所以发散，综合得原级数的收敛域为 $(-1,1)$.

4．求下列幂级数的收敛域与和函数：

（1）解：先求收敛域：

利用比值审敛法可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{x^{4n+5}}{4n+5}}{\frac{x^{4n+1}}{4n+1}}\right|=x^4$，

因此，当 $x^4<1$，即 $|x|<1$ 时，级数收敛；

当 $x=1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{4n+1}$，发散；

当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-\dfrac{1}{4n+1})$，发散，所以级数的收敛域为 $(-1,1)$.

为求和函数，令 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ ，两端同时求导得：

$$s'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}=\frac{1}{1-x^4},x\in(-1,1)$$

再两端同时积分得：

$$s(x)-s(0)=\int_0^x s'(x)dx=\int_0^x\frac{1}{1-x^4}dx=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x,$$

显然 $s(0)=0$ ，所以原级数的和函数为

$$s(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x, x\in(-1,1).$$

（2）解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}(2n+2)}{x^{2n-1}2n}\right|=|x|^2$，

故当 $|x|^2<1\Rightarrow|x|<1$ 时级数绝对收敛，当 $|x|>1$ 时，级数发散.

当 $x=-1$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty}2n(-1)^{2n-1}=-\sum_{n=1}^{\infty}2n$ 发散，

当 $x=1$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty}2n$ 发散， $\Rightarrow$ 收敛域为 $(-1,1)$.

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2nx^{2n-1}\Rightarrow S(0)=0$

$$\Rightarrow\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x 2nt^{2n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow S(x)=\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)'=\frac{2x}{(1-x^2)^2}(|x|<1).$$

（3）解：先求收敛域：

因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}=1$，

所以收敛半径为 1，明显当 $x=\pm1$ 原级数发散，故级数的收敛域为 $(-1,1)$；

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n\Rightarrow S(0)=0$ ，

$$\Rightarrow\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n(n+1)t^n dt=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+1}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

$$=x^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x^2\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x^2}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow S(x)=\left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)'=\frac{2x}{(1-x)^3}(|x|<1).$$

（4）解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{2n+1}(2n-1)}{x^{2n-1}(2n+1)}\right|=|x|^2$，

故当$|x|^2<1\Rightarrow|x|<1$时级数绝对收敛，

当$|x|>1$时，级数发散.

当$x=-1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}(-1)^{2n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{2n-1}$为收敛的交错级数，当$x=1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$为收敛的交错级数，$\Rightarrow$ 收敛域为$[-1,1]$.

令$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1}\Rightarrow S(0)=0$，

$$\Rightarrow S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow S(x)-S(0)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\arctan x$$

$$\Rightarrow S(x)=\arctan x(-1\le x\le 1).$$

第四节　函数展开成幂级数

1．将下列函数展开成x的幂级数，并求展开式成立的区间：

（1）解：利用间接展开法.

因为$e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!},x\in(-\infty,+\infty)$，所以

$$a^x=e^{\ln a^x}=e^{x\ln a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n,x\in(-\infty,+\infty).$$

（2）解：利用间接展开法.

因为$\ln(1+x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1},x\in(-1,1]$，所以

$$\ln(a+x)=\ln[a(1+\frac{x}{a})]=\ln a+\ln(1+\frac{x}{a})$$

$$=\ln a+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}}x^{n+1},x\in(-a,a].$$

（3*）解：利用间接展开法.

因为

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n,|x|<1$$

所以$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=x\cdot(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$=x-\frac{1}{2}x^3+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^5-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^7+\ldots,x\in(-1,1].$$

注：当$m=-\frac{1}{2}$时，在右端点处收敛.

（4）解：利用间接展开法.

因为$\cos t=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n},x\in(-\infty,+\infty)$，所以

$$\int_0^x t\cos t\mathrm{d}t=\int_0^x t[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}]\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n+1}\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n+1}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(2n+2)}t^{2n+2},x\in(-\infty,+\infty).$$

2． 解：$e^x=e^{x-1+1}=e\cdot e^{x-1}=e\sum\limits_{x=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!},x\in(-\infty,+\infty)$.

3．解：$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-2}{2}}=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x-2)^n,x\in(0,4)$.

4．解：将$\sin x$变形为：

$$\sin x=\sin[(x-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{6}]=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}\cos(x-\frac{\pi}{6}),$$

利用$\sin x$和$\cos x$的展开式可得

$$\sin x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2\cdot1!}(x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2\cdot2!}(x-\frac{\pi}{6})^2+\ldots+$$

$$\frac{(-1)^{n\text{-}1}\sqrt{3}}{2\cdot(2\text{n-}1)!}(x-\frac{\pi}{6})^{2n-1}+\frac{(-1)^{n\text{-}1}}{2\cdot2\text{n}!}(x-\frac{\pi}{6})^{2n},x\in(-\infty,+\infty).$$

5．解：$\frac{x}{x^2-5x+4}=\frac{x}{3}(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-1})$

$$=\frac{5+(x-5)}{3}(\frac{1}{1+(x-5)}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-5}{4}})$$

$$=\frac{5}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-\frac{1}{4^{n+1}})(x-5)^n+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-\frac{1}{4^{n+1}})(x-5)^{n+1},$$

其中第一个展开式的收敛域为$|x-5|<1$，第二个展开式的收敛域为$\frac{|x-5|}{4}<1$，所以原函数的展开式的收敛域为$|x-5|<1$，即$4<x<6$.

第五节 函数的幂级数展开式的应用

1．利用函数的幂级数的展开式求下列各数的近似值：

（1）解：根据$\ln(1+x)$的展开式可得：

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\ldots)(-1<x<1)$$（见教材）

令 $\frac{1+x}{1-x}=5$，解得 $x=\frac{2}{3}\in(-1,1)$，带入上述展开式可得

$$\ln 5=2(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2^3}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2^5}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{2^7}{3^7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{2^9}{3^9}\ldots),$$

如果取前五项作为其近似值，则

$$|r_5|=2(\frac{1}{11}\cdot\frac{2^{11}}{3^{11}}+\frac{1}{13}\cdot\frac{2^{13}}{3^{13}}+\frac{1}{15}\cdot\frac{2^{15}}{3^{15}}+\frac{1}{17}\cdot\frac{2^{17}}{3^{17}}+\ldots)$$

$$=2\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{2^{11}}{3^{11}}(1+\frac{11}{13}\cdot\frac{4}{9}+\frac{11}{15}\cdot\frac{4^2}{9^2}+\frac{11}{17}\cdot\frac{4^3}{9^3}+\ldots)$$

$$<\frac{2}{11}\cdot\frac{2^{11}}{3^{11}}(1+\frac{4}{9}+\frac{4^2}{9^2}+\frac{4^3}{9^3}+\ldots)$$

$$<\frac{2}{11}\cdot\frac{2^{11}}{3^{11}}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{9}}=\frac{2}{11}\cdot\frac{2^{11}}{3^{11}}\cdot\frac{9}{5}\approx 0.0038$$，符合误差要求，因此取前五项作为其近似值，即

$$\ln 5\approx 2(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2^3}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2^5}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{2^7}{3^7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{2^9}{3^9})\approx 1.61.$$

（2）解：根据 $\cos x$ 的幂级数展开式可得

$$\cos 18^\circ=\cos\frac{\pi}{10}=1-\frac{1}{2!}(\frac{\pi}{10})^2+\frac{1}{4!}(\frac{\pi}{10})^4-\frac{1}{6!}(\frac{\pi}{10})^6+\ldots,$$

$\because \frac{1}{6!}(\frac{\pi}{10})^6\approx 1.335\times 10^{-6}$，所以取前四项作为近似值，即

$$\cos 18^\circ=1-\frac{1}{2!}(\frac{\pi}{10})^2+\frac{1}{4!}(\frac{\pi}{10})^4-\frac{1}{6!}(\frac{\pi}{10})^6\approx 0.95099.$$

（3）解：根据 $\cos x$ 的幂级数展开式可得

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}x^2+\frac{1}{6!}x^6+\ldots,$$

于是可得 $\int_0^{0.5}\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{0.5}(\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}x^2+\frac{1}{6!}x^6+\ldots)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2})^3+\frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{5}\cdot(\frac{1}{2})^5+\ldots\approx 0.12327.$$

2．解：因为 $\sin x$、$\arctan x$ 的展开式分为可以写为：

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3),$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\arctan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{6}$.

第七节　傅里叶级数

1．填空：

（1）其中的任何两个不同函数的乘积在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的积分为

0，相同函数的乘积在此区间上积分不为 0 .

（2） $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$， $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x(n=1,2,\ldots)$，

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x(n=1,2,\ldots)$.

（3） $a_n=0,b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x$.

（4） $1+\pi$.（5）在一个周期内连续或者只有有限个第一类间断点，在一个周期内至多有有限个极值点，收敛，$f(x)$，左右极限均值.

2．下列函数以 2π 为周期，且在 $[-\pi,\pi)$ 上取值如下，试将其展开成傅里叶级数：

（1）解：先利用系数公式得出傅里叶级数.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}(e^{2x}-e^{-2x}),$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{2(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n}{4+n^2},(n=1.2\ldots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}n}{4+n^2},(\text{n=1,2...}),$$

所以，函数的傅里叶级数为

$$f(x)\sim\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{4\pi}+\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4+n^2}(2\cos nx-n\sin nx).$$

再考虑其收敛性.

易知函数满足收敛性定理的条件，其不连续点为

$$x=(2k+1)\pi(k=0,\pm1,\pm2,\ldots),$$

在这些点处，上述的傅里叶级数收敛于左右极限的均值，即

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{e^{2\pi}+e^{-2\pi}}{2},$$

在连续点处，傅里叶级数收敛于函数 $f(x)=e^{2x}$，因此

$$f(x)=\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{4\pi}+\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4+n^2}(2\cos nx-n\sin nx)$$

$$x\in(-\infty,+\infty),x\neq(2k+1)\pi(k=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

（2）解：先根据系数公式求傅里叶级数.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4 x\mathrm{d}x=\frac{3}{4},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4 x\cos nxdx=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{3}{2}-2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x)\cos nxdx,$$

根据三角函数系的正交性，仅当 n=2,n=4 时，$a_n\neq0$，易得

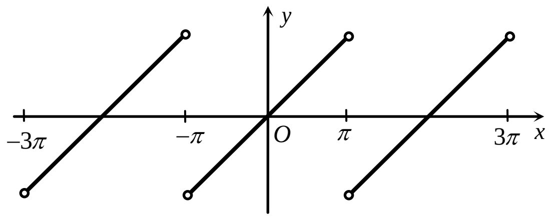
$$a_2=-\frac{1}{2},a_4=\frac{1}{8},$$

由于 $f(x)=\sin^4 x$ 是 $[-\pi,\pi]$ 的偶函数，故 $b_n=0$；

又因为函数 $f(x)=\sin^4 x$ 是连续函数，所以可得：

$$f(x)=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x,-\infty<x<\infty .$$

3．解：（1） $f(x)=x(-\pi<x<\pi)$ 作周期延拓的图象如下：



其分段光滑，故可展开为傅里叶级数.

由系数公式得

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,\mathrm{d}x=0 .$$

当 $n\geq 1$ 时，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,\mathrm{d}(\sin nx)$$

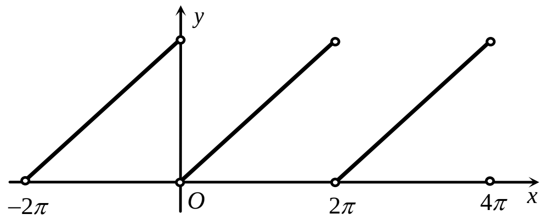
$$=\frac{1}{n\pi}x\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{-1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,\mathrm{d}(\cos nx)$$

$$=\frac{-1}{n\pi}x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x=(-1)^{n+1}\frac{2}{n},$$

所以 $f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{x},(-\pi<x<\pi)$ 为所求.

（2） $f(x)=x(0<x<2\pi)$ 作周期延拓的图象如下：



其分段光滑，故可展开为傅里叶级数.

由系数公式得

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\,\mathrm{d}x=2\pi .$$

当 $n\geq 1$ 时，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}x\,\mathrm{d}(\sin nx)$$

$$=\frac{1}{n\pi}x\sin nx\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{-1}{n\pi}\int_0^{2\pi}x\,\mathrm{d}(\cos nx)$$

$$=\frac{-1}{n\pi}x\cos nx\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{-2}{n},$$

所以 $f(x)=\pi-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{x},(0<x<2\pi)$ 为所求.

4．解：要展开为余弦级数，需对函数进行偶延拓，即定义函数

$$f_1(x)=\begin{cases}\cos\frac{x}{2},0\le x\le\pi\\ \cos\frac{x}{2},-\pi\le x\le 0\end{cases},$$

并将 $f_1(x)$ 以 2π 周期延拓到整个数轴，得到偶函数 $g(x)$.

对 $g(x)$ 进行傅里叶展开，显然有 $b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nx\,\mathrm{d}x=-\frac{4}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\right)(n=1,2,...),$$

根据上述系数即可得到 $g(x)$ 在整个数轴上的傅里叶展开式，

由于 $g(x)$ 连续，所以其傅里叶均收敛于 $g(x)$，最后将展开式限制在 $[0,\pi]$，既得 $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ 的傅里叶展开式

$$f(x)=-\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\cos nx,x\in[0,\pi].$$

4．解：将函数进行奇延拓，并求傅里叶系数：

$$a_n=0(n=0,1,2,...),$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin nxdx=-\frac{1}{2n}[(-1)^n-1](n=1,2,...),$$

因此函数 $f(x)=\frac{\pi}{4}$ 的正弦级数展开式为

$$\frac{\pi}{4}=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+...x\in(0,\pi),$$

根据收敛性定理，在端点 x=0,x=π 处傅里叶级数收敛于零.

令上式中的 $x=\frac{\pi}{2}$，即可得到

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+....$$

第八节　一般周期函数的傅里叶级数

1．填空：

（1）$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx(n=0,1,2...)$

$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx(n=1,2...)$.

（2）$\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx(\text{n}=1,2...)$.

2．解：为展开为正弦级数，先将函数 $f(x)$ 做奇延拓，其傅里叶系数为 $a_n=0(n=0,1,2,...)$；

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l\text{-}x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2},$$

所以 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$

$$=\frac{4l}{\pi^2}(\sin\frac{\pi x}{l}-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{l}+\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{l}-\frac{1}{7^2}\sin\frac{7\pi x}{l}+...),$$

由于 $f(x)$ 连续，上述展开式对于任意的 $x\in[0,l]$ 均成立.

3．解：$f(x)=2+|x|$为偶函数，所以展为余弦级数，其系数为

$b_n=0(n=1,2,...)$，

$a_0=2\int_0^1(2+x)\mathrm{d}x=5$，

$a_n=2\int_0^1(2+x)\cos(n\pi x)dx=\frac{2(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2}(n=1,2,...)$，

因为函数 $f(x)=2+|x|$满足狄氏收敛定理，所以

$$2+|x|=\frac{5}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$$

$$=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}(\cos\pi x+\frac{1}{3^2}\cos3\pi x+\frac{1}{5^2}\cos5\pi x+...)(-\infty\le x\le\infty).$$

令上式中的 $x=0$，可得 $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+...=\frac{\pi^2}{8}$，

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+...)+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+...)$

$=(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+...)+\frac{1}{4}(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...)$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+...)=\frac{\pi_2}{6}$.

第十二章　自测题

1．填空：

（1）<u>仍收敛于原来的和 s</u>．（2）<u>均收敛</u>；<u>均发散</u>．

（3）<u>1</u>；<u>2</u>．（4）$\underline{\frac{3}{4}}$，$\underline{\frac{1}{2}}$，$\underline{\frac{3}{4}}$．

2．选择：（1）C．（2）A（提示：使用阿贝尔定理）．

（3）D（提示：$2^{-\lambda\ln n}=e^{-\lambda\ln n\cdot\ln 2}=(e^{\ln n})^{-\lambda\ln 2}=n^{-\lambda\ln 2}$）．

（4）B．（5）A．（6）C．

3．判别下列级数的敛散性，若收敛指出绝对收敛或条件收敛：

（1）解：根据正项级数的根值审敛法，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n!)^n}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)}{n}=+\infty,$$

所以，原级数发散．

（2）解：因为 $\left|\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{4}\right|\le\frac{1}{n^2}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，

所以原级数收敛且绝对收敛．

（3）解：这是一个交错级数，由于 $\left|\frac{(-1)^n}{n\text{-}\ln n}\right|=\frac{1}{n\text{-}\ln n}\ge\frac{1}{n}$，

所以不是绝对收敛．因为 $\frac{1}{n+1-\ln(n+1)}-\frac{1}{n-\ln n}$

$$=\frac{\ln(1+\frac{1}{n})-1}{(n-\ln n)[n+1-\ln(n+1)]}<0,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=0$，根据莱布尼兹定理，级数收敛，即原级数条件收敛．

（4^*）解：根据比值审敛法，有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)^p}}{\frac{a^n}{n^p}}\right|=|a|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=|a|,$$

所以，当 $|a|<1$ 时，即 $-1<a<1$ 时，级数绝对收敛；

当 $|a|>1$，根据罗比达法则可知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^p}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{px^{p-1}}\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x(\ln a)^2}{p(p-1)x^{p-2}},$$

因为 p 是常数，有限次使用罗比达法则，可求出上述极限为无穷，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^p}=\infty$，所以原级数发散；

当 $a=1$ 时，级数既为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，此时若 $0<p\le 1$ 时，原级数

发散，若 $p>1$ 原级数收敛且绝对收敛；

当 $a=-1$ 时，级数既为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$，此时，若 $0<p\le 1$ 时，

根据莱布尼兹定理可知，原级数条件收敛，若 $p>1$ 时，根据比较审敛法可知，原级数绝对收敛.

4．解：因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{n+1}}{\frac{3^n+(-2)^n}{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{[3^{n+1}+(-2)^{n+1}]n}{(n+1)[3^n+(-2)^n]}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{[1+(-\frac{2}{3})^{n+1}]}{(1+\frac{1}{n})\cdot\frac{1}{3}\cdot[1+(-\frac{2}{3})^n]}=3,$$

所以，级数的收敛半径为 $\frac{1}{3}$，收敛区间为 $(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3})$；

在端点 $x=-\frac{4}{3}$ 处，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+(\frac{2}{3})^n}{n}$，因为级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n},\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^n\cdot\frac{1}{n}$ 均收敛，所以在此点处，原级数收敛；

在端点 $x=-\frac{2}{3}$ 处，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-\frac{2}{3})^n}{n}$，因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，发

散，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-\frac{2}{3})^n\cdot\frac{1}{n}$ 收敛，所以在此端点处，原级数发散；

综合得，原级数的收敛域为 $[-\frac{4}{3},-\frac{2}{3})$.

5．解：先利用比值审敛法求幂级数的收敛域.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\frac{x^{2n}}{(2n)!}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)}=+\infty$，

所以级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$；

令 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$，

则 $s'(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$，所以

$$s(x)+s'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=e^x,$$

即 $s(x)+s'(x)=e^x$，这是一个一阶线性微分方程，解之得

$s(x)=ce^{-x}+\frac{1}{2}e^x$.

又因为 $s(0)=1$，带入求得常数 $c=\frac{1}{2}$，所以幂级数的和函数

为 $s(x)=\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{2}e^x$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

6．解：因为 $\ln(1+x-2x^2)=\ln(1-x)+\ln(1+2x)$，而

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}(-1<x\le 1),$$

所以，$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}(-1\le x<1)$，

$$\ln(1+2x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n x^n}{n}(-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}),$$

于是得出原函数的展开式为

$$\ln(1+x-2x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n-1}{n}x^n(-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}).$$

7．解：为展开为正弦级数，先将函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,0)$ 上做奇延拓,再延拓到整个数轴，并求傅里叶系数

$a_n=0(n=0,1,2\ldots)$，

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}(n=1,2,\ldots),$$

因此可得函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi)$ 的傅里叶级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2})\sin nx(x\in[0,\pi),x\ne\frac{\pi}{2}),$$

由于 $x=-\frac{3}{2}\pi$ 为函数的不连续点，根据狄氏收敛性定理，和函数在 $x=-\frac{3}{2}\pi$ 处的值 $s(-\frac{3}{2}\pi)$ 为左右极限的均值，即 $s(-\frac{3}{2}\pi)=\frac{1}{4}\pi$，而 $x=\frac{5}{4}\pi$ 是函数的连续点，在此点处，收敛于（延拓后的）函数 $f(x)$，即 $s(\frac{5}{4}\pi)=0$.

8．考研题练练看：

（1）C.

解析：幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x-1)^k$ 的收敛域中心为 $x=1$，而

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\quad(n=1,2,\ldots)$ 无界表明 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x-1)^k$ 在 $x=2$ 发散，因此幂级数的收敛半径 $R\le 1$，同时，根据莱布尼兹定理，数列 $\{a_n\}$ 单减且收敛于 0，表明 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x-1)^k$ 在 $x=0$ 收敛，因此幂级数的收敛半径 $R\ge 1$，综合得收敛半径为 R=1，因此选 C.

（2）A.

解析：若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则对其任意项加括号后仍收敛，其逆命题不一定成立，所以选 A.

（3）D.

解析：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^a}$ 绝对收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a-\frac{1}{2}}}$ 收敛，所以 $\alpha>\frac{3}{2}$，又由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-a}}$ 条件收敛可知 $1\le\alpha<2$，所以选 D.

（4）C.

解析：根据题意，将函数在 $[-1,1]$ 展开成傅里叶级数（只含有正弦，不含余弦），因此将函数进行奇延拓：

$$f(x)=\begin{cases}\left|x-\frac{1}{2}\right|, x\in(0,1)\\ -\left|x+\frac{1}{2}\right|, x\in(-1,0)\end{cases}$$

，其傅里叶级数以 2 为周期，则当 $x\in(-1,1)$ 且 $f(x)$ 在 x 处连续时，$S(x)=f(x)$，所以

$$S(-\frac{9}{4})=S(-\frac{1}{4})=-S(\frac{1}{4})=-f(\frac{1}{4})=-\frac{1}{4}.$$

（5）D.

解析：因为 $P>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^P}$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty}n^Pa_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^P}}$ 存在，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}a^n$ 收敛.

（6）解：先求收敛域.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}}{\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}x^2=x^2<1,$$

即 $-1<x<1$ 时级数绝对收敛；

当 $x=\pm1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$，根据莱布尼兹定理，可知

此级数收敛，因此原级数的收敛域为$[-1,1]$.

为求和函数，设 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$，

令 $s_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$，则

$$s_1'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}=\frac{1}{1+x^2}\quad(-1<x<1),$$

两端同时积分，得

$$s_1(x)-s_1(0)=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\quad(-1<x<1),$$

明显 $s_1(0)=0$，所以 $s_1(x)=\arctan x\quad(-1<x<1)$，

既得 $s(x)=x\arctan x\quad(-1<x<1)$，

又因为 $x=\pm1$时，$s(x)$，$x\arctan x$ 都有定义，且连续，所以

$$s(x)=x\arctan x\quad(-1\le x\le 1).$$

（7）B.

（8）解：先求收敛域.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4(n+1)^2+4(n+1)+3}{2(n+1)+1}\cdot\frac{2n+1}{4n^2+4n+3}\cdot x^2\right|=x^2<1,$$

即 $-1<x<1$时级数绝对收敛；

当 $x=\pm1$时，级数为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}$，发散，因此幂级数的收敛域为$-1<x<1$.

为求和函数，设

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^2+2}{2n+1}x^{2n},$$

所以$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}$，

令 $S_1(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}$，$S_2(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}$，

对 $S_1(x)$ 两端积分得

$$\int_0^x S_1(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}=\frac{x}{1-x^2}\quad(-1<x<1),$$

两端求导得$S_1(x)=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\quad(-1<x<1)$；

因为 $xS_2(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{2n+1}x^{2n+1}$，两边求导得

$$[xS_2(x)]'=2\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{2}{1-x^2}\quad(-1<x<1),$$

再对两端积分得

$$xS_2(x)-0\cdot S(0)=\int_0^x\frac{2}{1-x^2}dx=\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\quad(-1<x<1),$$

所以 $S_2(x)=\dfrac{1}{x}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|\ (x\in(-1,0)\cup(0,1))$，

又因为 x=0 时，$S_1(0)=1.S_2(0)=2$，综合可得和函数为

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\dfrac{1}{x}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|, & x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ 3, & x=0\end{cases}.$$

（9）(i) 证明：由题意得 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$，

$$S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n,$$

$\because a_{n-2}-n(n-1)a_n=0$，

$\therefore a_n=(n+1)(n+2)a_{n+2}\ (n=0,1,2\ldots)$，

$\therefore S''(x)=S(x)$，即 $S''(x)-S(x)=0$.

(ii) 解：$S''(x)-S(x)=0$ 为二阶常系数齐次线性微分方程，

其特征方程为 $\lambda^2-1=0$，从而特征根为 $\lambda=\pm1$，于是其通解

为 $S(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{x}$，由 $S(0)=a_0=3$，$S'(0)=a_1=1$ 得

$$\begin{cases}C_1+C_2=3\\ -C_1+C_2=1\end{cases}\Rightarrow C_1=1,\ C_2=2,\text{所以 } S(x)=e^{-x}+2e^{x}.$$

（10）解：（1）证明：由 $\cos a_n-a_n=\cos b_n$，及

$0<a_n<\dfrac{\pi}{2},0<b_n<\dfrac{\pi}{2}$ 可得

$0<a_n=\cos a_n-\cos b_n<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $0<a_n<b_n<\dfrac{\pi}{2}$，

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛，由收敛的必要

条件可得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

（2）证明：由于 $0<a_n<\dfrac{\pi}{2},0<b_n<\dfrac{\pi}{2}$，

所以$\sin\frac{a_n+b_n}{2}\le\frac{a_n+b_n}{2},\sin\frac{b_n-a_n}{2}\le\frac{b_n-a_n}{2}$

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{\cos a_n-\cos b_n}{b_n}=\frac{2\sin\frac{a_n+b_n}{2}\sin\frac{b_n-a_n}{2}}{b_n}$$

$$\le\frac{2\frac{a_n+b_n}{2}\frac{b_n-a_n}{2}}{b_n}=\frac{b_n^2-a_n^2}{2b_n}<\frac{b_n^2}{2b_n}=\frac{b_n}{2}$$

由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，由正项级数的比较审敛法

可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$收敛.

（11）解：由于$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$，所以得到收敛半径$R=1$.

当$x=\pm1$时，级数的一般项不趋于零，是发散的，所以收敛域为

$(-1,1)$. 令和函数$\boldsymbol{S(x)=}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$，则

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+4n+3)x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+2}\right)''+\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right)'$$

$$=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''+\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{3-x}{(1-x)^3}$$