

线性代数 3、4、5 章练习

班级_____姓名_____学号_____成绩_____

1. 单项选择题

(1). 已知 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ($m > 2$) 线性无关, 则【 】

(A) 对任意一组数 k_1, k_2, \dots, k_m 都有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$;

(B) $m > n$; (C) 对任意 n 维向量 β , 有 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 线性相关;

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ($m > 2$) 中任意两个向量均线性无关;

(2). 设矩阵 $A_{m \times n}$ 的秩 $R(A) = m < n$, B 为 n 阶方阵, 则【 】

(A) $A_{m \times n}$ 的任意 m 阶子式均不为零; (B) 当秩 $R(B) = n$ 时有秩 $R(AB) = m$;

(C) $A_{m \times n}$ 的任意 m 个列向量均线性无关; (D) $|A^T A| \neq 0$;

2. 设 4 元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有三个线性无关的特解 η_1, η_2, η_3 ,

且 $R(A) = 2$, 则方程组的通解 _____

3. 讨论 λ 取何值时线性方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases}$$
 有解, 并求解.

4. 已知向量空间 R^3 中的四个向量:

$$\alpha_1 = (1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 1, 1)^T, \alpha_3 = (2, 2, 1)^T, \alpha_4 = (-1, -1, 1)^T,$$

求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩与一个最大线性无关组, 并将其余向量用最大无关组表示

5. 已知: $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

(1) 试求一个正交变换 $x = Py$, 将上面的二次型化为标准形;

(2) 判断上述二次型是否为正定的, 为什么?

6. 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为实对称矩阵, $R(A) = r < n$, 且 $A^2 = 2A$, 求 A 的迹 $Tr(A)$

7. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ($m > 1$) 线性无关, 且 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$,

判断向量组 $\beta - \alpha_1, \beta - \alpha_2, \dots, \beta - \alpha_m$ 的线性相关性.

8. 设 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a+1 & 2a & 3a+1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 且存在 3 阶非零方阵 B 使 $BA = 0$, 求 a