第七章　微分方程

本章概述：微分方程指含有自变量，未知函数及其导数的等式．它是常微分方程（ODE）和偏微分方程（PDE）的总称．本章着重研究常用的 ODE 的解法．

基本要求:了解阶、解、通解、初始条件和特解的概念；掌握可分离变量及一阶线性 ODE 的解法（重点）；会解齐次 ODE，了解伯努利方程，领会变量代换的思想．会用降阶法求解方程：$y^{(n)}=f(x)$，$y''=f(x,y')$ 和 $y''=f(y,y')$；理解二阶线性 ODE 解的结构．掌握二阶常系数齐次线性 ODE 的解法（重点），并了解高阶常系数齐次线性 ODE 的解法．会求自由项形如 $e^{\lambda x}P_m(x)$、$e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$ 的二阶常系数非齐次线性 ODE 的特解（重点，难点）．8．会用 ODE 解一些简单的几何和物理问题．[1]

第一节　微分方程的基本概念

1．多选：

下面的方程中　（　　　）　是二阶常微分方程．

（A）　$dy+\dfrac{1}{x}ydx=x^3dx \quad (x\neq 0)$；

（B）　$y''+yy'=x^2+1$；

（C）　$x^2u'''-xu''+3u'=9x^2$；

（D）　$\dfrac{d^2\theta}{dt^2}+a^2\theta=0$．

2．填空：

若 $y=(Ax+B)e^x$ 是微分方程 $y''-2y'=xe^x$ 的一个特解，则 $A=$______，$B=$ ______．

3．证明：

（1）验证 $y=\sin(x+C)$ 是微分方程 $y'^2+y^2-1=0$ 的通解,并验证 $y=\pm1$ 也是解．

[1] 微分方程论是数学的重要分支之一,应用非常广泛．牛顿研究天体力学和机械力学的时候，利用了微分方程这个工具，从理论上得到了行星运动规律．后来，法国天文学家勒维烈和英国天文学家亚当斯使用微分方程各自计算出那时尚未发现的海王星的位置．

（2）验证 $y=x(\int x^{-1}e^{x}dx+C)$ 是微分方程 $xy'-y=xe^{x}$ 的通解.

4. 验证 $y=Cx+\frac{1}{C}$ 是微分方程 $x(\frac{dy}{dx})^{2}-y\frac{dy}{dx}+1=0$ 的通解（其中 C 为任意常数）， 并求过点 $(0,2)$ 的积分曲线.

5．设物体的温度高于 20℃，将其放置在空气温度为 20℃的环境中冷却． 根据冷却定律：物体温度的变化率与物体和当时空气温度之差成正比，设物体的温度 T 与时间 t 的函数关系为 $T=T(t)$，试建立物体冷却的数学模型.

本节作业总结：

第二节　可分离变量的微分方程与齐次方程

1．求下列微分方程的通解：

（1）$\dfrac{dy}{2x}=ydx$.

（2）$dx-ydy=y^2dx-xydy$.

2．求微分方程 $\sin 2xdx+\cos 3ydy=0$ 满足的初值条件 $y(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{3}$ 的特解.

3．已知函数 $y=f(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{x^2}+o(\Delta x)$，$f(1)=1$, 求 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 的值.

4．太平洋比目鱼渔场用下列逻辑斯蒂方程建模

$$\frac{dy}{dt}=r(M-y)y$$

其中 $y(t)$ 表示时间为 t（年）时比目鱼种群的总重量（kg），估计渔场承受总量是 $M=8\times10^{7}$ kg，$r=0.08875\times10^{-7}$。

（1）如果 $y(0)=1.6\times10^{-7}$ kg，1 年后比目鱼种群总重量是多少？

（2）何时比目鱼总重量达到 4×10^{7} kg？

本节作业总结：

第三节　齐次方程

1．求下列齐次微分方程的通解：

（1）　$xy' - y = x\tan\frac{y}{x}$.

（2）$(3x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy = 0$.

（3）　$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

2. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$ 满足初始条件 $y\big|_{x=1} = \frac{\pi}{6}$ 的特解.

本节作业总结：

第四节 一阶线性微分方程

1．试用公式法求解下列微分方程:

（1）$\frac{dy}{dx}+\frac{1-2x}{x^2}y-1=0$.

（2）$\frac{dy}{dx}=y+\sin x$.

2．试用常数变易法求下列微分方程的通解：

（1）$\frac{dy}{dx}+2xy=4x$.

（2）$y'-\frac{1}{x-2}y=2(x-2)^2$.

3．求满足初始条件$y(0)=1$的微分方程$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+y^2}$的特解.

4．求曲线,使其切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标.

5*．下列为伯努利方程的是（　　　　）

（A）$\dfrac{dy}{dx}=(x+y)^3$；　　　　（B）$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x}{y}+yx^2$；

（C）$y\dfrac{dy}{dx}+x^2y=x^3y^5$；　　　　（D）$\dfrac{dy}{dx}+x^2y^2=x^3y^3$.

6*．求解伯努利微分方程$\dfrac{dy}{dx}+y=y^2(\cos x-\sin x)$.

本节作业总结：

第五节　可降阶的高阶微分方程

1．求下列微分方程的通解：

（1）　$y''=2x\ln x$.

（2）　$xy''+y'=4x$.

（3）　$yy''-y'^2=0$.

2．求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

（1）　$y''=e^{2y}, y(0)=0,\ y'(0)=1$.

（2）　$y''+2xy'^2=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=-\dfrac{1}{2}$.

本节作业总结：

第六节　高阶线性微分方程

1．填空：

设 y_1, y_2 是方程 $y'' + ay' + by = f(x)$ 的两个特解,则__________是方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的解.

2．选择：

（1）设 y_1, y_2, y_3 是 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的三个不同的解, C_1, C_2 为任意常数，且 $\dfrac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} \neq$ 常数, 则方程的通解为（　）

（A）$C_1y_1 + C_2y_2 + y_3$；

（B）$C_1y_1 + C_2y_2 - (C_1 + C_2)y_3$；

（C）$C_1y_1 + C_2y_2 - (1 - C_1 - C_2)y_3$；

（D）$C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$.

（2）　下列函数组线性无关的是（　　）

（A）　$x, x+1, x-1$；　　（B）　$\sin 2x, \cos x \sin x$；

（C）　e^{2+x}, e^{2-x}；　　（D）　$e^{2x}, 3e^{2x}$.

本节作业总结：

第七节 常系数齐次线性微分方程

1．填空：

（1）设 e^{-x} 与 $(C_1x+C_2)e^{-x}$ 是方程 $y''+ay'+by=0$ 的两个解，

（其中 C_1 与 C_2 为任意常数），　则 $a=$____，$b=$_____ ．

（2）一个四阶常系数齐次微分方程有四个特解，e^x，xe^x，$\cos 2x$，

$2\sin 2x$，则这个微分方程的通解是________________________．

2．　求下列微分方程的通解：

（1）　$y''-3y'+2y=0$．

（2）　$y''+8y'+16y=0$．

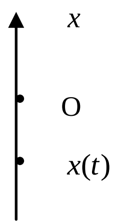
（3）　$y''-2y'+10y=0$．

（4）　$y'''+y''-2y=0$．

3．　求微分方程 $y''+25y=0$，满足初始条件 $y\big|_{x=0}=2$，

$y'\big|_{x=0}=5$ 的特解.

4．设圆柱形浮筒，直径为 0．5 米，将它铅直放在水中，当稍向下压后突然放开，浮筒在水中上下振动的周期为 2 秒，求浮筒的质量.



本节作业总结：

第八节 常系数非齐次线性微分方程

1．填空与选择：

（1）微分方程 $y''-3y'+2y=xe^{2x}$ 的特解可设为___________.

（2）微分方程 $y''-4y'-5y=e^{-x}+\sin 5x$ 的特解形式为（　　）

（A） $ae^{-x}+b\sin 5x$；（B） $ae^{-x}+b\cos 5x+c\sin 5x$；

（C）$axe^{-x}+b\sin 5x$；（D）$axe^{-x}+b\cos 5x+c\sin 5x$.

2．求微分方程 $y''+y'=f(x)$ 的通解：

（1） $f(x)=2x^2-3$.

（2） $f(x)=xe^{-x}$.

3．求微分方程 $y'''+y''-2y'=x(e^x+4)$ 的通解.

4．求微分方程满足已给初始条件的特解：

（1）　求微分方程 $y''-3y'+2y=2e^x$ 满足条件

$y(0)=0, y'(0)=1$ 的特解．

（2）$y''+y+\sin 2x=0$　　$y(\pi)=1, y'(\pi)=1$.

5．　设连续函数 $f(x)$ 满足

$f(x)=e^x+\int_0^x (t-x)f(t)dt$　　求 $f(x)$.

本节作业总结：

第七章　自测题

1．填空：

（1）方程 $x(y'-1)=y$ 的通解是________________ .

（2）方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2x+e^{2y}}$ 的通解是________________.

（3）以 $y_1=e^{2x}$, $y_2=xe^{2x}$ 为特解的二阶常系数线性齐次微分方程为____________________.

（4）函数 $y=y(x)$ 的图形在点 $(0,-2)$ 处的切线为 $2x-3y=6$，且 $y(x)$ 满足微分方程 $y''=6x$, 则此函数为______________ .

2．选择：

（1）一阶线性非齐次微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的通解是（　　）

（A）$y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]$；

（B）$y=e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$；

（C）$y=e^{\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+C]$；

（D）$y=ce^{-\int P(x)dx}$.

（2）方程 $xy'=\sqrt{x^2+y^2}+y$ 是（　　）

（A）齐次方程；　　　　（B）一阶线性方程；

（C）伯努利方程；　　　（D）可分离变量方程.

（3）若 y_1,y_2 是方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ $(Q(x)\neq 0)$ 的两个特解，要使 $\alpha y_1+\beta y_2$ 也是解，则 α 与 β 应满足的关系是（　　）

（A）$\alpha+\beta=\dfrac{1}{2}$ ；　　（B）$\alpha+\beta=1$；

（C）$\alpha\beta=0$；　　（D）$\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$.

（4）设 $y=f(x)$ 是满足微分方程 $y''+2y'=-\dfrac{e^x}{1+x^2}$ 的解,并且 $f'(x_0)=0$,则 $f(x)$（　　）

（A）在 x_0 的某个领域内单调增加；（B）在 x_0 取得极小值；

（C）在 x_0 的某个领域内单调减少；（D）在 x_0 取得极大值.

3．求一阶微分方程 $(1+x^2)dy=(2xy+3x^2+3)dx$ 的通解.

4．求二阶微分方程 $y''+5y'+4y=3-2x$ 的通解．　试给出某初始条件,并求出相应的特解．

5．已知 $f(x)\int_0^x f(t)dt=1,\ x\neq 0,$ 试求函数 $f(x)$ 的一般表达式．

6．求一曲线，使其任意一点的切线与过切点平行于 y 轴的直线和 x 轴所围城三角形面积等于常数 a^2 .

7．考研题练练看：

（1）（2011 年数学一及数学二，4 分 ）微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$

满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$____________________.

（2）（2011 年数学二 ，4 分）三阶常系数线性齐次微分方程

$y'''-2y''+y'-2y=0$ 的通解为_________________________ .

（3）（2012 年数学一，4 分）若函数 $f(x)$ 满足方程

$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$，则

$f(x)=$____________________.

（4）（2013 年数学三 ，4 分）

微分方程 $y''-y'+\dfrac{1}{4}y=0$ 的通解是________________________.

（5）（2013 年数学一、二， 4 分）已知

$y_1=e^{3x}-xe^{2x}, y_2=e^x-xe^{2x}, y_3=-xe^{2x}$ 是某个二阶常系数

线性微分方程三个解，则满足 $y(0)=0, y'(0)=1$ 方程的解

为___________________________.

（6）（2011 年数学二 ，4 分）微分方程 $y''-r^2y=e^{rx}+e^{-rx}(r>0)$

的特解形式为（　　　　）

（A） $a(e^{rx}+e^{-rx})$； （B） $ax(e^{rx}+e^{-rx})$；

（C） $x(ae^{rx}+be^{-rx})$； （D） $x^2(ae^{rx}+be^{-rx})$.

（7） （2010 年数学一 10 分）求微分方程 $y''-3y'+2y=2xe^x$

的通解.

（8）（2009 年数学三 ，10 分）设曲线 $f(x)$，其中 $y=f(x)$ 是可导函数，且 $f(x)>0$. 已知曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0,\ x=1$，$x=t$（$t>1$）所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的 πt 倍,求该曲线方程.

（9）（2011 年数学二 ， 10 分）设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，且曲线 $l: y=y(x)$ 与直线 $y=x$ 相切于原点．记 α 为曲线 l 在点 (x,y) 处切线的倾角，若 $\dfrac{d\alpha}{dx}=\dfrac{dy}{dx}$, 求 $y(x)$ 的表达式.

（10）（2014 年数学一，4 分）微分方程

$xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 满足 $y(1)=e^3$ 的解为______________.

（11）（2014 年数学二，10 分）已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程

$x^2+y^2y'=1-y'$，且 $y(2)=0$，求 $y(x)$ 的极大值和极小值.

（12）（2014 年数学二、数学三，10 分）

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数， $z=f(e^x\cos y)$ 满足

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$． 若 $f(0)=0, f'(0)=0$，

求 $f(u)$ 的表达式.

本章作业纠错与总结：

第八章　空间解析几何与向量代数

本章概述：空间解析几何是通过坐标法把空间中的点和三维向量对应起来，把空间中的图形和方程对应起来，从而可以从代数方法入手来研究几何问题．

基本要求：掌握向量的基本运算；掌握曲面方程及图形，能根据方程分析其图形的形状特点（难点）；了解一般空间曲线的方程及其在坐标平面上的投影；熟练掌握平面的各种方程形式（重点）；熟练掌握直线的各种方程（重点）；平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的位置关系（重点）．本章是学习重积分的基础．

第一节　向量及其线性运算

1．填空：

（1）点 $(1,1,1)$ 关于 xOy 面对称的点为__________，关于 yOz 面对称的点为__________，关于 xOz 面对称的点为__________．

（2）点 $(2,-1,2)$ 关于 x 轴对称的点为__________，关于 y 轴对称的点为__________，关于 z 轴对称的点为__________，关于坐标原点对称的点为__________．

（3）平行于向量 $(1,2,3)$ 的单位向量为__________．

（4）点 $(3,4,2)$ 到 z 轴的距离为____，到 xOy 面的距离为______．

(5) 设 $\vec{m}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$，$\vec{n}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$，则向量 $\vec{a}=4\vec{m}+\vec{n}$ 在 x 轴上的投影为__________．

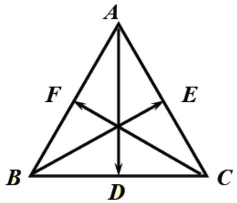
（6）向径 $\overrightarrow{OA}$ 与三个坐标轴的正向构成相等的锐角，设夹角均为 α，则 $\cos\alpha=$__________．

2．已知两点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(2,2,1)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角．

3．已知点 $B(1,-2,6)$ 且向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影分别为 $-4,4,1$，求点 A 的坐标．

4．设 ΔABC 的三边 $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{c}$，三边中点分别为 D,E,F，试用 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 表示 $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CF}$，并证明

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=0.$$



5．在 yOz 平面上，求与点 $A(1,2,1)$、$B(2,1,0)$ 和 $C(1,-1,1)$ 等距离的点．

6．设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}+5\vec{b},\overrightarrow{BC}=-6\vec{a}+18\vec{b},\overrightarrow{CD}=8(\vec{a}-\vec{b})$，试证 A、B、D 三点共线.

本节作业总结：

第二节 数量积 向量积

1．填空：

（1）向量$\vec{a}=(1,2,3),\vec{b}=(4,5,6)$，则$\left|\vec{a}\right|=$____，$\left|\vec{b}\right|=$____，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$______，$\vec{a}\times\vec{b}=$______，两个向量的夹角

为__________． 以向量$\vec{a},\vec{b},\vec{a}-\vec{b}$为边的三角形的面积

为________．

（2）若$|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=4,(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\pi}{3}$，则$\left|3\vec{a}-2\vec{b}\right|=$________．

（3）已知$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$_________．

（4）已知$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$为单位向量，且$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，则

$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=$___________．

(5) 已知$|\vec{a}|=10,|\vec{b}|=18,|\vec{a}+\vec{b}|=20$，则

$|\vec{a}-\vec{b}|=$_________．

2．已知$\vec{a}=(1,2,4)$，$\vec{b}=(3,-3,3)$，求$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角及$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影．

3．求与$\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k},\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$都垂直的单位向量．

4．设ΔABC的三边$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{c}$，证明

$$\frac{|\vec{a}|}{\sin A}=\frac{|\vec{b}|}{\sin B}=\frac{|\vec{c}|}{\sin C}.$$

5．已知$\vec{a}=(1,-2,3)$，$\vec{b}=(2,m,0)$，$\vec{c}=(9,-3,9)$，

（1）确定m的值，使得$\vec{a}+\vec{b}$与c平行.

（2）确定m的值，使得$\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{c}$垂直.

本节作业总结：

第三节 曲面及其方程

1．填空：

（1）将 xOz 坐标面上的抛物线 $z^2 = 4x$ 绕 x 轴旋转一周，所生成的旋转曲面的方程为______________，绕 z 轴旋转一周，所生成的旋转曲面的方程为______________.

（2）以点 $(2,-3,2)$ 为球心，且通过坐标原点的球面方程为____________________.

（3）将 xOy 坐标面的圆 $x^2 + y^2 = 4$ 绕 x 轴旋转一周，所生成的旋转曲面的方程为__________________.

（4）方程 $x^2 + y^2 = 1$ 在 xOy 坐标面上表示______________，在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中表示_______________________.

2．求与点 $A(1,2,1)$ 与点 $B(1,0,2)$ 之比为 $1:2$ 的动点的轨迹，并注明它是什么曲面.

3．求与点 $(2,1,3)$ 和点 $(4,2,4)$ 等距离的动点的轨迹.

4．写出下列曲面的名称，并画出相应的图形.

（1）$\dfrac{x^2 + y^2}{4} + \dfrac{z^2}{25} = 1$.

（2）$x^2 - y^2 = 9x$.

（3）$y^2 + z^2 = 9x$.

（4）$4(x-1)^2 + (y-2)^2 - (z-3)^2 = 0$.

（5）$16x^2 - 9y^2 - 9z^2 = -25$.

（6）$16x^2 - 9y^2 - 9z^2 = 25$.

本节作业总结：

第四节 空间曲线及其方程

1．填空：

（1）二元一次方程组$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 4x - 3 \end{cases}$在平面解析几何中表示的图形是____________________；它在空间解析几何中表示的图形是____.

（2）旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 (0 \le z \le 2)$ 在 xOy 面上的投影为____________________，

在 xOz 面上的投影为____________________，

在 yOz 面上的投影为____________________.

2．求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 与平面 $x + z = 1$ 的交线在 xOy 面上的投影方程.

3．分别求母线平行于 x 轴、 y 轴及 z 轴而且通过曲线 $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 - y^2 + 2z^2 = 0 \end{cases}$ 的柱面方程.

4．写出过点 $A(2,0,0), B(0,1,0), C(0,0,4)$ 的圆周曲线方程.

5．将下列曲线的一般方程化为参数方程：

（1）$\begin{cases}(x-1)^2+y^2+z^2=4\\ y=x-1\end{cases}$.

（2）$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\ x^2+z^2=4\end{cases}$.

6. 求螺旋线$\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=2\sin\theta\\ z=3\theta\end{cases}$在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.

7．画出下列方程所表示的曲线：

（1）$\begin{cases}x^2+y^2+4z^2=16\\ z=1\end{cases}$.

（2）$\begin{cases} x^2+z^2=y \\ x^2+(y-2)^2=1 \end{cases}$.

（3）$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{z^2}{16}=1 \\ y=4 \end{cases}$.

本节作业总结：

第五节 平面及其方程

1．填空：

（1）一平面过点$(1,1,-4)$且平行于向量$\vec{a}=(2,1,-1)$ 和 $\vec{b}=(1,0,1)$，平面的点法式方程为______________________，平面的一般方程为_______________________，平面的截距式方程为_____________________，平面的单位法向量为____________.

（2）设直线L的方程为$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$，当________________时，直线$L$过原点；当________________且__________________时，直线L平行于x轴但不与x轴相交；当__________________时，直线L与y轴相交；当____________________________________时，直线L与z轴重合.

2．求过三点$(1,-1,1)$，$(3,1,-3)$和$(0,1,2)$的平面方程.

3．求过点$(1,-1,1)$且垂直于两平面$x+y-2z=0$和$x-2y+5z=0$的平面方程.

4．求点$(1,2,1)$到平面$x+2y+2z-10=0$的距离.

5．求平面 $x-2y+z-5=0$ 与各坐标面的夹角的余弦.

6．分别求满足下列条件的平面方程：

（1）平行于 yOz 平面且经过点 $(2,-3,-2)$.

（2）通过 y 轴和点 $(2,-1,1)$.

（3）求平行于 x 轴，且经过两点 $(2,1,-2)$ 和 $(4,0,-1)$ 的平面方程；

本节作业总结：

第六节 空间直线及其方程

1．填空：

（1）直线 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{4}$ 和平面 $x-2z+4z=4$ 的关系是______________________________.

（2）过点 $(1,-1,0)$ 且与直线 $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-3}$ 平行的直线方程是____________________________.

（3）直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与直线 $\begin{cases} x-y=6 \\ 2y+z=3 \end{cases}$ 的夹角为__________________.

2．将直线一般方程 $\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x+y+z=5 \end{cases}$ 化为对称式方程和参数方程.

3．求过点 $(2,0,3)$ 且与直线 $\begin{cases} x-2y+4z=7 \\ 3x+5y-2z=-1 \end{cases}$ 垂直的平面方程.

4．求直线 $l_1:\begin{cases} x-3y+z-2=0 \\ x-y-z-1=0 \end{cases}$ 与直线 $l_2:\begin{cases} x+y-z+2=0 \\ y+2z-1=0 \end{cases}$ 夹角的余弦.

5．求点 $P(2,1,5)$ 在直线 L： $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{-1}$ 上的投影.

6．求通过直线 $L:\begin{cases}x-y+z-1=0\\2x+y+z-2=0\end{cases}$ 的两个互相垂直的平面，

其中一个平面平行于直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$.

本节作业总结：

第八章 自测题

1．填空：

（1）已知 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，而且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=$________________.

（2）向量 $\vec{a}=(1,-2,0)$，$\vec{b}=(-3,\lambda,\mu)$ 平行，则 $(\lambda,\mu)=$________.

（3）已知向量 $\overrightarrow{OM}$ 的模为10，且与 x 轴的夹角为 $\dfrac{\pi}{6}$，与 y 轴的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，与 z 轴的夹角为锐角，则 $\overrightarrow{OM}=$_________________.

（4）曲线 $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \\ z=b\theta \end{cases}$ (a、b 为常数)在 xOy 平面上投影曲线是

__________________________________.

（5）xOy 平面上曲线 $4x^2-y^2=16$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转曲面方程是______________________________.

（6）直线 $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$ 与平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的夹角 θ 的正弦 $\sin\theta=$______________________________.

（7）方程 $x^2-z^2=y$ 所表示的曲面名称为_________________.

（8）与两直线 $\begin{cases} x=2 \\ y=-2+t \\ z=1+t \end{cases}$ 及 $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 都平行，且过原点的平面方程是______________________________.

（9）已知动点 $P(x,y,z)$ 到 yOz 平面的距离与点 P 到点 $(-1,1,2)$ 的距离相等，则点 P 的轨迹方程为_________________________.

（10）与两平面 $x+2y-z-1=0$ 和 $x+2y-z+3=0$ 等距离的平面方程为___________________________________.

2．选择：

（1）求两平面 $x+2y-z-3=0$ 和 $2x+y+z+5=0$ 的夹角是（　　）

（A）$\dfrac{\pi}{2}$；　（B）$\dfrac{\pi}{4}$；　（C）$\dfrac{\pi}{3}$；　（D）π.

（2）一质点在力 $\vec{F}=3\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$ 的作用下，从点 $A(1,2,0)$ 移动到点 $B(3,2,-1)$，当力的单位是牛顿，位移的单位是米时，求力 F 所作的功是(　　)

（A）5 焦耳；　（B）10 焦耳；

（C）3 焦耳；　（D）9 焦耳.

（3）点 $M(2,-1,10)$ 到直线 $L:\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{1}$ 的距离是(　　)

（A）$\sqrt{138}$； （B）$\sqrt{118}$； （C）$\sqrt{158}$； （D）1.

（4）设 ΔABC 的顶点为 $A(3,0,2), B(5,3,1), C(0,-1,3)$，求三角形的面积是( ).

（A）$\frac{3\sqrt{6}}{2}$； （B）$\frac{3\sqrt{6}}{4}$； （C）$\frac{3}{2}$； （D）3.

（5）求平行于 z 轴，且过点 $M_1(1,0,1)$ 和 $M_2(2,-1,1)$ 的平面方程．是( ).

（A）$2x+3y-5=0$； （B）$x-y+1=0$；

（C）$x+y+1=0$； （D）$x+y-1=0$.

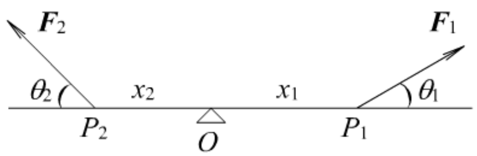
3．已知点 $A(1,1,0)$ 和点 $B(0,1,2)$，试在 x 轴上求一点 C，使得 ΔABC 的面积最小.

4．求曲线 $\begin{cases} x^2-2y^2+z^2=4 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ 在各坐标平面上的投影曲线方程.

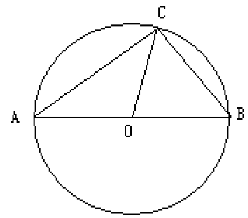
5．已知两条直线的方程是 $L_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-4}{-1}$，$L_2: \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{1}$，求过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程.

6．在过直线$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$ 的所有平面中，求和原点距离最大的平面．

7．在杠杆上支点 O 的一侧与点 O 的距离为 x_1 的点 P_1 处，有一与 $\overrightarrow{OP_1}$ 成角 θ_1 的力 $\overrightarrow{F_1}$ 作用着；在点 O 的另一侧与点 O 的距离为 x_2 的点 P_2 处，有一与 $\overrightarrow{OP_2}$ 成角 θ_2 的力 $\overrightarrow{F_2}$ 作用着．那么 $\theta_1,\theta_2,x_1,x_2,\left|\overrightarrow{F_1}\right|,\left|\overrightarrow{F_2}\right|$ 满足怎样的条件才能使杠杆保持平衡？



8．试用向量证明直径所对的圆周角是直角．



9．画出下列各曲面所围立体的图形：

（1）$3x+4y+6z=12, x=0, y=0, z=0$.

（2）$2z=x^2+y^2$，$z=2$.

（3）$z=\sqrt{x^2+y^2}$，$z=4-x^2-y^2$.

（4）$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$，$z=x^2+y^2$；

10．考研题练练看：

（1）（2006 年数学一，4 分）点$(2,1,0)$到平面$3x+4y+5z=0$的距离$d=$_____.

（2）（2013 年数学一，10 分）设直线L过$A(1, 0, 0)$和$B(0, 1, 1)$两点，将L绕z轴旋转一周得到曲面Σ，Σ与平面z=0, z=2 所围成的立体为Ω．平面Σ的方程；求Ω的形心坐标.

本章作业纠错与总结：