线性代数总复习II答案

考试班级________________学号_____________姓名_____________成绩____________

试卷说明：

1. 本次考试为闭卷考试。本试卷共计 4 页，共 八 大部分，请勿漏答；
2. 考试时间为 120 分钟，请掌握好答题时间；
3. 答题之前，请将试卷和答题纸上的考试班级、学号、姓名填写清楚；
4. 本试卷答案全部写在试卷上；
5. 答题完毕，请将试卷正面向外摊开交回，不得带出考场；

考试中心提示：请你遵守考场纪律，诚信考试、公平竞争！

一、填空题（本题共 10 小题，每题 3 分，共 30 分）

1. 设行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=1$，$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=2$，则 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1-c_1 \\ a_2 & b_2-c_2 \end{vmatrix}=$ __--1__.

2. 设三阶行列式 $|-2A|=8$，则 $|A|=\underline{-1}$.

3. 设 $D(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$，则 $D(x)=0$ 的全部根为__$\underline{3,2}$__

4. 矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & y \end{bmatrix}$，$A=B$, 则 $\underline{x=1,\ y=-1}$.

5. 设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，则 $A^{-1}=\underline{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}}$.

6. 已知非齐次线性方程组 $AX=b$ 无解，则 $R(A)\underline{<}\ \ R(A,b)$（填“>”，“=”或“<”）.

7. 矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 中每一行诸元素之和为零时，则 $|A|=$___0_______.

特征值定义

8. 设 A 为 n 阶矩阵，E 为 n 阶单位矩阵. 若 A 有一个特征值为 -2, 则 $|2E+A|=$ __0___.

9. 已知 n 阶方阵 A 的特征多项式为 $|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$, 则 A 的全部特征值为

   $\underline{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n}$.

10. 设 $A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & b \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$是正交矩阵，则 $b=$____$-\frac{\sqrt{2}}{2}$____.

二、单项选择题(每小题 3 分，共 15 分)

1. 齐次方程组$\begin{cases}(k-1)x_1+2x_2=0 \\ 2x_1+(k-1)x_2=0\end{cases}$只有零解的充要条件是（ C ）

(A) $k\neq -1$ (B) $k\neq 3$ (C) $k\neq -1$且$k\neq 3$ (D) $k\neq -1$或$k\neq 3$

2. 设 A,B,X 均为 n 阶矩阵，且 A,B 可逆，则下列结论**错误**的是（ D ）.

(A) 若$AX=B$,则$X=A^{-1}B$ (B) 若$XA=B$,则$X=BA^{-1}$

(C) 若$AXB=C$,则$X=A^{-1}CB^{-1}$ (D) 若$ABX=C$,则$X=A^{-1}B^{-1}C$

3. 设 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}+a_{31} & a_{12}+a_{32} & a_{13}+a_{33}\end{pmatrix}, P_1=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

则 $B=$（ C ）成立.

(A) AP_1P_2 (B) AP_2P_1 (C) P_1P_2A (D) P_2P_1A

4. 设 $A_{m\times s}, B_{s\times n}$，则以下正确的结论是(A ,D)

(A) $R(AB)\leq R(A),\ \ R(AB)\leq R(B)$； (B) $R(AB)<R(A),\ \ R(AB)<R(B)$

(C) $R(AB)<R(A)+R(B)$； (D) $R(AB)\leq R(A)+R(B)$

5. n 阶矩阵 A 与 B 相似的充分条件是（ D ） 相似：B.A方. $B=P^{-1}AP$ 可逆

(A) $|A|=|B|$ (B) $R(A)=R(B)$ (C) A 与 B 有相同的特征多项式.

(D) A 与 B 有相同的特征多项式且 n 个特征值互不相同.

三、（本题 10 分）设 $D=\begin{vmatrix}1&2&-1&6\\2&2&5&4\\0&2&2&-5\\4&2&1&2\end{vmatrix}$，求 $A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}$

$$A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}=\begin{vmatrix}1&2&1&6\\2&2&1&4\\0&2&1&-5\\4&2&1&2\end{vmatrix}=0$$

不是"加边"
是"换边"

四、（本题 10 分）已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$，$B$ 为三阶矩阵，且满足 $A^2=E+AB$，求矩阵 B.

$$\because |A|=-1\neq 0,\therefore A\text{可逆},A^2=E+AB\Leftrightarrow AB=A^2-E\Leftrightarrow B=A^{-1}(A^2-E)=A-A^{-1}$$

$$B=A-A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

五、（本题 10 分）已知向量组 $\alpha_1=(1,3,0,5)^T,\alpha_2=(1,2,1,4)^T,\alpha_3=(1,1,2,3)^T$，

$\alpha_4=(1,-3,6,-1)^T$，$\alpha_5=(1,a,3,b)^T$ 的秩为 2.

（1）求 a,b 的值

（2）求此向量组的一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

解：令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$，则对其进行初等行变换有

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\3&2&1&-3&a\\0&1&2&6&3\\5&4&3&-1&b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&6&3\\0&0&0&0&a\\0&0&0&0&b-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-5&-2\\0&1&2&6&3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$，由 $r(A)=2$ 得

$a=0,b=2$，其中一个极大无关组为：α_1,α_2

由最后矩阵可知：$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_4=-5\alpha_1+6\alpha_2,\alpha_5=-2\alpha_1+3\alpha_2$

.

六、（本题 12 分） 化二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3$ 为标准形，并写出所用的正交线性替换.

解：二次型的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}$，由 $\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-1&\lambda-2&-1\\0&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$ 得

$\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=3$.

分别求出其特征向量为：$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\eta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ 且彼此是正交的；

单位化得 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ $\varepsilon_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ $\varepsilon_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

令 $P=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，则 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)\overset{x=Py}{=}y_2^2+3y_3^2$.

七、（本题 6 分）设 λ_1,λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 α_1,α_2 . 试证：

$c_1\alpha_1+c_2\ \alpha_2\ (c_1c_2\neq0)$ 不是 A 的特征向量.

证 ：反正法，假设 $c_1\alpha_1+c_2\ \alpha_2\ (c_1c_2\neq0)$ 是 A 的特征向量，对应的特征值为 λ，则

$A(c_1\alpha_1+c_2\ \alpha_2)=\lambda(c_1\alpha_1+c_2\ \alpha_2)$，又 $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1,A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$，则有

$$A(c_1\alpha_1+c_2\ \alpha_2)=c_1\lambda_1\alpha_1+c_2\ \lambda_2\alpha_2=c_1\lambda\alpha_1+c_2\ \lambda\alpha_2$$
$$\Leftrightarrow c_1(\lambda_1-\lambda)\alpha_1+c_2\ (\lambda_2-\lambda)\alpha_2=0$$

因为 α_1,α_2 是属于不同的特征值得特征向量，故线性无关，故

$c_1(\lambda_1-\lambda)=c_2\,(\lambda_2-\lambda)=0$

$\because c_1c_2\neq 0$

$\therefore \lambda_1-\lambda=\lambda_2-\lambda=0$

即$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，矛盾

所以假设不成立，即$c_1\alpha_1+c_2\,\alpha_2\,(c_1c_2\neq 0)$ 不是 A 的特征向量。

八、(本题 7 分)向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$， $\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\cdots$， $\beta_s=\alpha_s+\alpha_1$ ，

试讨论向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的线性相关性.

解:设有数$x_1,x_2,\cdots,x_s$ 使得$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_s\beta_s=0$, 即

$$(x_1+x_s)\alpha_1+(x_1+x_2)\alpha_2+\cdots+(x_{s-1}+x_s)\alpha_s=0\ .$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, 所以$\begin{cases}x_1+x_s=0\\x_1+x_s=0\\\cdots\ \ \cdots\\x_1+x_s=0\end{cases}$.

该方程组的系数行列式$D=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&0\\0&1&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=1+(-1)^{s+1}$,

(1) 当s 为奇数时， $D=2\neq 0$, 方程组只有零解，

$x_1,x_2,\cdots,x_s$ 必全为零, 向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的线性无关；

(2) 当s 为偶数时， $D=0$, 方程有非零解，

即存在不全为零的数$x_1,x_2,\cdots,x_s$ 使$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_s\beta_s=0$,

向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性相关.