第十二章　无穷级数

本章概述：本章主要知识点包括两部分：常数项级数和函数项级数，其中常数项级数包括正项级数、交错级数和任意项级数；函数项级数包括幂级数和傅里叶级数.

重点：数项级数敛散性的判断方法，特别是正项级数的敛散性判断方法；幂级数的收敛半径和收敛域求法；已知幂级数求其和函数的方法；给定函数的幂级数展开；傅里叶级数的敛散性判断；周期函数的傅里叶展开.

基本要求：掌握常数项级数敛散性判断方法，幂级数的收敛半径与收敛域求法；能利用直接和间接展开法将函数展开为幂级数；能求简单幂级数的和函数；能将周期为2π的周期函数展开为傅里叶级数.

第一节 常数项级数的概念与性质

1．填空：

（1）$2-\dfrac{3}{2}+\dfrac{4}{3}-\dfrac{5}{4}+\dfrac{6}{5}-\ldots$的一般项为________.

（2）已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{3^n}$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{3^n}=$______.

（3）级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$的部分和$s_n=$________，此级数的和$s=$____.

（4）已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$的部分和$s_n=$________，此级数的和$s=$________.

（5）若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛于$s$，则级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(u_n+u_{n-1})$的敛散性为________，若收敛，则收敛于________.

（6）若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$________.

2．根据级数收敛与发散的定义判断下列级数的敛散性，如果收敛，则求级数的和：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

（2）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$.

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{6}$.

3．判断下列级数的敛散性，如果收敛，则求级数的和：

（1）$-\frac{3}{4}+\frac{3^2}{4^2}-\frac{3^3}{4^3}+\ldots+(-1)^n\frac{3^n}{4^n}+\ldots$.

（2）$-\frac{3}{2}+\frac{3^2}{2^2}-\frac{3^3}{2^3}+\ldots+(-1)^n\frac{3^n}{2^n}+\ldots$.

（3）$\frac{1}{101}+\frac{2}{201}+\frac{3}{301}+\frac{4}{401}.+..+\frac{n}{100n+1}+\dots$.

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2^n}{3^n}+\frac{3}{n})$.

（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$.

（6）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$;

（7）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^n}{(1+n)^n}$；

本节作业总结：

第二节 常数项级数的审敛法

1．填空：

（1）若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$均为正项级数，其中$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，且$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k$（$k$为常数），则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性为____________.

（2）若对正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，有$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=\rho$，则当$\rho<1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$________；$\rho>1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$________；当$\rho=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$__________________.

（3）正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$有$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=k$（$k$为常数），则当________时，该级数收敛；当________时，该级数发散；当__________时，该级数可能收敛也可能发散.

（4）级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，当__________时，该级数收敛；当__________时，该级数发散.

（5）若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$有$\lim_{n\to\infty}nu_n=k(k\neq 0)$，则该级数________.

（6）若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}\max(u_n,v_n)$________；$\sum_{n=1}^{\infty}\min(u_n,v_n)$____________________.

2．选择：

（1）若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则(　　　)

（A）必有$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\rho<1$；（B）必有$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\rho<1$；

（C）　$u_n\geq u_{n+1}(n=1,2,3,...)$；（D）　以上都不正确.

（2）若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则(　　　)

（A）　$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$必收敛；　　　（B）　$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$必收敛；

（C） 其部分和数列有界；（D） 以上都不正确.

（3） 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (　　　)

（A） 绝对收敛；（B） 可能收敛也可能发散；
（C） 发散；（D） 条件收敛.

（4）若常数$b>0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+nb}$(　　　)

（A）发散；（B） 收敛；
（C） 条件收敛；（D） 绝对收敛.

3．用比较审敛法及其极限形式判断下列级数的敛散性：

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+2}$.

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(2n+1)}$.

（3） $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$.

（4） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}\ (a>0)$.

（5*） $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n})$.

4．用比值审敛法判断下列级数的敛散性：

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$.

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}$.

（3） $\sum_{n=1}^{\infty}n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

（4） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$.

5．用根值审敛法判别下列级数的敛散性：

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2n+1})^n$.

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$.

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{b}{a_n})^n$ （其中 $a_n \to a(n\to\infty), a>0, b>0$ ）.

6．判别下列级数的敛散性.

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}$ ；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{na+b}(a>0, b>0)$ ；

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

7．判别级数的敛散性，若收敛，指出条件收敛还是绝对收敛：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$．

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^2}{2^n}\cos n\pi$．

（3）$1.1-1.01+1.001-1.0001+\dots$．

（4*）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$．

8*．根据 x 的取值，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ 的敛散性．

9*. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \ (a_n>0)$ 是条件收敛的交错级数，证明

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 、$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 都是发散的.

10* 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n b_n\right|$ 、$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 及

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|a_n\right|}{n}$ 均收敛.

本节作业总结：

第三节 幂级数

1．填空：

（1）若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-2)^n$ 在 $x=-2$ 处收敛，则此级数在 $x=5$ 处敛散性为____________；级数 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_n$ 的敛散性为____________.

（2）若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，则当 $0<\rho<+\infty$ 时，幂级数的收敛半径为__________；当 $\rho=0$ 时，收敛半径为__________；当 $\rho=+\infty$ 时，收敛半径为__________.

（3）$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的收敛半径 $R=$________，收敛区间为__________.

（4）若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n x^{n+1}$ 的收敛半径分别为 R_1、R_2，则 R_1、R_2 具有关系____________.

（5）若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是 R，则其和函数在开区间__________上是连续的.

2．选择：

（1）函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域是（　　　）

(A) $[-1,1]$；(B) $[-1,1)$；(C) $(-1,1)$；(D) $(-1,1]$.

（2）已知函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n!}$，则（　　　）

（A）任意 x 处均发散；
（B）任意 x 处均绝对收敛；
（C）任意 x 处均条件收敛；
（D）仅在 $(-1,0)\cup(0,1)$ 内收敛，其他的 x 处都发散.

（3）阿贝尔[1]定理指出：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=x_1\,(x_1\neq 0)$ 处收敛，则（　　　）

（A）　适合 $|x|<|x_1|$ 的一切 x 都能使级数绝对收敛；

[1] 阿贝尔（N．H．Abel），1802 年出生于挪威，与高斯、勒让德、傅里叶、柯西、雅克比等均为同时代的杰出数学家，但其数学才华一直不被当时数学界认可，直到 1829 年在贫病交加中英年早逝后，人们才逐渐认识到阿贝尔的数学发现的重要性。在当今数学理论中，以阿贝尔名字命名的定理和概念多达几十个。2002 年，挪威政府设立阿贝尔数学奖，以纪念这位才华横溢的数学家。

（B） 级数在 $x<x_1$ 的一切 x 都收敛，但不一定绝对收敛；

（C） 适合 $x<x_1$ 的一切 x 都能使级数绝对收敛；

（D） 适合 $|x|<|x_1|$ 的一切 x 都能使级数收敛，但不一定绝对收敛.

（4）若 $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{c_{n+1}}{c_n}|=\frac{1}{4}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n x^{2n}$ （ ）

（A） 在 $|x|<4$ 时绝对收敛；（B） 在 $|x|>\frac{1}{4}$ 时发散；

（C） 在 $|x|<2$ 时绝对收敛；（D） 在 $|x|>\frac{1}{2}$ 时发散.

（5^*）设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 3，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为（ ）

（A） $(-3,3)$；（B） $(-2,4)$；

（C） $(-4,2)$；（D） $(-4,4)$.

（6）设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n\left(x-2\right)^n$ 在 $x=-2$ 处收敛，则此级数在 $x=4$ 处（ ）

(A)发散；(B)绝对收敛；

(C)条件收敛；(D)不能确定敛散性.

（7）若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 R，那么（ ）

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=R$；(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=R$；

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=R$；(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 不一定存在.

3. 求下列幂级数的收敛域：

（1） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)}$.

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^n}{n^2}$.

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{(2x-3)^n}{2n-1}$.

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot 2^n \cdot x^{2n}$.

（5*）$\sum_{n=1}^{\infty}(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n})x^n$.

4. 求下列幂级数的收敛域与和函数：

（1）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$.

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}2nx^{2n-1}$.

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n}$.

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1}$.

本节作业总结：

第四节 函数展开成幂级数

1．将下列函数展开成 x 的幂级数，并求展开式成立的区间：

（1）a^x.

（2）$\ln(a+x)(a>0)$.

（3*）$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

（4）$\int_0^x t\cos t\mathrm{d}t$.

2． 求 e^x 在 $x_0=1$ 处的幂级数展开式.

3． 将 $\dfrac{1}{4-x}$ 展开为 $x-2$ 的幂级数.

4．求 $\sin x$ 在 $x_0=\frac{\pi}{6}$ 处的幂级数展开式.

5．求 $\frac{x}{x^2-5x+4}$ 在 $x_0=5$ 处的幂级数展开式.

本节作业总结：

第五节 函数的幂级数展开式的应用

1．利用函数的幂级数的展开式求下列各数的近似值：

（1）$\ln 5$（误差不超过 0．01）.

（2）$\cos 18^{\circ}$（误差不超过 0．0001）.

（3）求 $\int_0^{0.5} \frac{1-\cos x}{x^2} \mathrm{d}x$ 的近似值，误差不超过 0．0001；

2．利用函数的幂级数求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - \arctan x}{x^3}$.

本节作业总结：

第七节 傅里叶级数

1．填空：

（1）三角函数系$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots \cos nx, \sin nx \ldots$的正交性是指____.

（2）若函数 $f(x)$ 是周期为2π 的周期函数，且

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$，则 $a_0=$____________，

$a_n=$___________________，$b_n=$_____________________.

（3）周期为2π 的奇函数展开成傅里叶级数

$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$时，系数为________________.

（4）设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，在区间$[-\pi,\pi]$有

$$f(x)=\begin{cases}1-x,-\pi \le x < 0\\ 1+x,0 < x \le \pi\end{cases},$$

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=\pi$ 处收敛于______________.

（5）狄利克雷[2]收敛定理指出，如果 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，并且满足两个条件：____和____，则 $f(x)$ 的傅里叶级数_______________，且当 x 是连续点时，级数收敛于____________，当 x 是间断点时，级数收敛于____________________.

2．下列函数以 2π 为周期，且在$[-\pi,\pi)$ 上取值如下，试将其展开成傅里叶级数：

（1） $f(x)=e^{2x}$.

[2] 狄利克雷（J．L．Dirichlet，1805-1859），德国数学家，在数论、分析学和数学物理上有卓越贡献，解析数论的创始人之一。

（2） $f(x)=\sin^4 x$.

3．在指定区间内把函数 $f(x)=x$ 展开为傅里叶级数

（1） $-\pi<x<\pi$；（2） $0<x<2\pi$.

4．将函数 $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$ 在 $[0,\pi]$ 上展开成余弦级数，并讨论收敛性情况.

5．将函数 $f(x)=\frac{\pi}{4}$ 在 $[0,\pi]$ 上展开成正弦级数，并由此证明：

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots.$$

本节作业总结：

第八节 一般周期函数的傅里叶级数

1．填空：

（1）周期为 $2l$ 的函数 $f(x)$ 展开为傅里叶级数的系数为____.

（2）周期为 $2l$ 的奇函数 $f(x)$ 展开为傅里叶数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x$，

其中 $b_n =$________________________.

2．已知 $f(x)=\begin{cases} x, 0 \le x < \frac{l}{2} \\ l-x, \frac{l}{2} \le x \le l \end{cases}$，试将 $f(x)$ 展为正弦级数.

3．已知 $f(x)$ 以 2 为周期，其在 $-1 \le x \le 1$ 上的表达式为 $f(x)=2+|x|$，试将 $f(x)$ 展开为傅里叶级数，并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

本节作业总结：

第十二章 自测题

1．填空：

（1）如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛于 s，则对这个级数任意项加括号后所得到的新级数____________________.

（2）给定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，并用$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$中的全体正项和负项构造两个新级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$．如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$的敛散性分别为______________________；如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$的敛散性分别为_________________________.

（3）若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x_1=0$处收敛，则其收敛半径 R 必不小于__________；若该幂级数在$x_2=3$处发散，则收敛半径 R 必不大于___________.

（4）周期为 2 的周期函数$f(x)$在[0,2)上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<\dfrac{3}{2}, \\ 0, & \dfrac{3}{2}\le x<2, \end{cases},$$

记 $s(x)$ 为 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数，则$s(-\frac{1}{2})=$_________，$s(\frac{5}{2})=$_________，$s(\frac{1999}{2})=$_________.

2．选择：

（1）下列级数中条件收敛的级数是（　　）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n-1}{n+10}$；　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^2}$；

（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$；　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n}$.

（2）设级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n 2^n$收敛，则级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$（　　）

（A）绝对收敛；　（B）条件收敛；

（C）发散；　（D）敛散性不能确定.

（3）已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-\lambda\ln n}$收敛，则必有（　　）

（A）　$\lambda > \ln 2$；　　　　　　（B）　$\lambda=0$；

（C）　$\lambda=1$；　　　　　　　（D）　$\lambda > \dfrac{1}{\ln 2}$.

（4）若 b 为大于零的常数，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{1+nb}$（　　　）

（A）　绝对收敛；　　　　　　（B）　条件收敛；

（C）　发散；　　　　　　　　（D）　与 b 的取值有关.

（5）若 $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n \ldots (a_0 \neq 0)$ 是一等差数列，则幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为（　　　）

（A）　$(-1,1)$；　　　　　　（B）　$[-1,1)$；

（C）　$(-1,1]$；　　　　　　（D）　$[-1,1]$.

（6）若函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，在区间 $[0,2\pi)$ 上有 $f(x)=x^2$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=0$ 收敛于（　　）

（A）　0；　　　　　　　　（B）　π^2；

（C）　$2\pi^2$；　　　　　　　（D）　$4\pi^2$.

3．判别下列级数的敛散性，若收敛指出绝对收敛或条件收敛：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^n}{n^n}$.

（2）$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} \sin \dfrac{n\pi}{4}$.

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\text{-}\ln n}$.

（4*）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^p}(p>0)$.

4．求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ 的收敛域.

5．求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的和函数.

6．将函数$\ln(1+x-2x^2)$ 展开为x 的幂级数，并求收敛域.

7．将函数 $f(x)=\begin{cases} x, 0\le x<\dfrac{\pi}{2} \\ 0, \dfrac{\pi}{2}\le x<\pi \end{cases}$ 展开为正弦级数，并求其和函数 $s(x)$ 在 $x=-\dfrac{3}{2}\pi, x=\dfrac{5}{4}\pi$ 的值.

8．考研题练练看：

（1）（2011 年数学一，4 分）设数列 $\{a_n\}$ 单减且收敛于 0，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k \quad (n=1,2,\ldots)$ 无界，则幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x-1)^k$ 的收敛域为（　　）

（A） $(-1,1]$；　　（B） $[-1,1)$；

（C） $[0,2)$；　　（D） $(0,2]$.

（2）（2011 年数学三，4 分）设 $\{u_n\}$ 是数列，则下列命题正确的是（　　）

（A） 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛；

（B） 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

（C） 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛；

（D） 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

（3）（2012 年数学三，4 分）已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^a}$绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-a}}$条件收敛，则$\alpha$ 的取值范围为（　　）

（A）$0<\alpha\le\frac{1}{2}$；　（B）$\frac{1}{2}<\alpha\le 1$；

（C）$1<\alpha\le\frac{3}{2}$；　（D）$\frac{3}{2}<\alpha<2$.

（4）（2013 年数学一，4 分）设 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|$，

$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx(n=1,2,\ldots)$，令

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin n\pi x$，则$S(-\frac{9}{4})$=（　　）

（A）$\frac{3}{4}$；　（B）$\frac{1}{4}$；

（C）$-\frac{1}{4}$；　（D）$-\frac{3}{4}$.

（5）（2013 年数学三，4 分）设$\{a_n\}$为正项数列，下列选项正确的是（　　）

（A）若 $a_n>a_{n+1}$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a^n$ 收敛；

（B）若$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a^n$ 收敛，则 $a_n>a_{n+1}$；

（C）若$\sum_{n=1}^{\infty}a^n$ 收敛，则存在常数$P>1$，使$\lim_{n\to\infty}n^P a_n$ 存在；

（D）若存在常数$P>1$，使$\lim_{n\to\infty}n^P a_n$ 存在，则$\sum_{n=1}^{\infty}a^n$ 收敛.

（6）（2010 年数学一，10 分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域与和函数.

（7）（2012 年数学二,4 分）设 $a_n > 0(n=1,2,3\cdots)$，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，则数列$\{S_n\}$有界是数列$\{a_n\}$收敛的（　　）

（A）充分必要条件；　　（B）充分非必要条件；

（C）必要非充分条件；　　（D）非充分也非必要.

（8）（2012 年数学一，10 分）求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$的收敛域与和函数.

（9）（2013 年数学一，10 分）设数列$\{a_n\}$满足条件：$a_0=3$，$a_1=1$，$a_{n-2}-n(n-1)a_n=0(n\geq 2)$，$S(x)$是幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的和函数.

（i）证明：$S''(x)-S(x)=0$；

（ii）求$S(x)$的表达式.

（10）（2014 年数学一，10 分）设数列$\{a_n\},\{b_n\}$

满足$0<a_n<\frac{\pi}{2},0<b_n<\frac{\pi}{2}$， $\cos a_n - a_n = \cos b_n$

且级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛.

（1） 证明$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$；

（2） 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$收敛.

（11）（2014 年数学三，10 分）

求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$的收敛域、和函数.

本章作业纠错与总结：