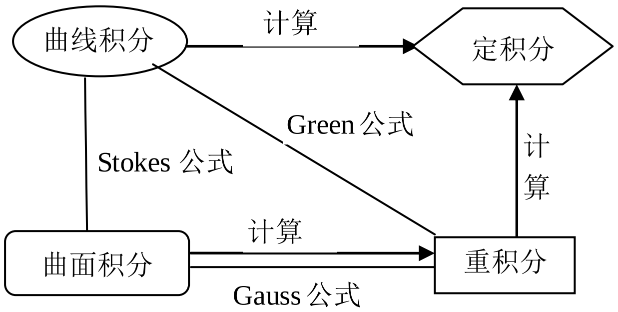
第十一章　曲线积分与曲面积分

本章概述：

一、各种积分之间的联系：



二、曲线积分的计算法

1．基本方法：转化为定积分计算，步骤如下：

（1）选择积分变量（用参数方程/直角坐标方程/极坐标方程）；

（2）确定积分上、下限（第一类/下小上大；第二类/下始上终）.

2．基本技巧：

（1）利用对称性及积分曲线的方程简化计算；

（2）利用积分与路径无关的等价条件；

（3）利用格林公式（注意加辅助线的技巧，一般取与坐标轴平行的直线）.

三、曲面积分的计算法

1．基本方法：转化为重积分计算，步骤如下：

（1）选择积分变量（代入曲面方程）；

（2）积分元素投影：第一类，无方向（面积元素）；第二类，有向投影（一投、二代、三定号）；

（3）确定二重积分域— 把曲面积分域投影到相关坐标面.

2．基本技巧：

（1）利用对称性及积分曲面方程简化计算；

（2）利用高斯公式（注意公式使用条件；添加辅助面时，一般取平行坐标面的平面）.

重点：曲线曲面积分的计算法.

难点：应用 Green 公式，Gauss 公式，Stokes 公式计算曲线曲面积分.

第一节 对弧长的曲线积分

1．填空：

（1）对弧长的曲线积分的计算公式

$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\phi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\phi'^2(t)}dt$ 中要求____

（填 $\alpha>\beta$，$\alpha=\beta$ 或 $\alpha<\beta$）.

（2）设光滑曲线 L 的弧长为 2π，则 $\int_L ds=$______________.

（3）设 L 为圆周 $x^2+y^2=1$，则 $\int_L y^2ds=$_______________.

（4）设 L 为圆周 $x^2+y^2=1,(x>0)$，则 $\int_L y^3ds=$____________.

（5）已知曲线 $L:y=x^2(0\le x\le\sqrt{2})$，则 $\int_L x\,ds=$___________.

2．计算下列对弧长的曲线积分：

（1）$\int_L(x^2+y)ds$，其中 L 为连接 $(0,0),(1,1)$ 的直线段.

（2）$\int_L(x+y)ds$，其中 L 上半圆周 $x^2+y^2=2$.

（3）$\int_L y\,ds$，其中 L 为由直线 $x=2,y=0,y^2=2x$ 所围图形的边界.

（4）$\int_{\Gamma}(x^2+y^2)ds$，其中Γ为螺旋线

$x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt(0\le t\le 2\pi)$.

（5）$\int_{L}\sqrt{x^2+y^2}ds$，其中L为$x^2+y^2=-2y$.

（6）$\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)ds$，其中$\Gamma$为$x^2+y^2+z^2=4$与平面

$z=1$的交线.

3．求均匀摆线$\begin{cases} x=8(t-\sin t), \\ y=8(1-\cos t), \end{cases}$ $(0\le t\le \pi)$的质心.

本节作业总结：

第二节 对坐标的曲线积分

1．填空：

（1）对坐标的曲线积分的计算公式

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$$

$$\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\phi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\phi(t)]\phi'(t)\}dt$$

中，下限α对应于L的______点，上限β对应于L的_______点.

（2）第二类曲线积分$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$化为第一类曲线积分是_____________________________________，其中α,β为有向光滑曲线L在点(x,y)处的________________的方向角.

（3）对坐标的曲线积分与曲线的方向__________（有关或无关）.

（4）已知一质点在力$\vec{F}=2\vec{i}+3\vec{j}$的作用下，沿$xOy$面内光滑曲线$L$从点$A$移动到点$B$，则力$\vec{F}$所做的功$W=$__________.

（5）若函数$P(x,y)$，$Q(x,y)$在有向光滑曲线L上连续，则下列各式成立的是________.

（a）

$$\int_{L^-}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=-\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

（b）$\int_{L^-}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.

2．计算下列对坐标的曲线积分：

（1）$\int_L xdy+ydx$，其中L为$x=y^2$上从点$B(1,1)$到点$A(1,-1)$的一段弧.

（2）$\int_L (x^2+y^2)dx$，其中L为从点$A(0,0)$经上半圆周$x^2+y^2=2x$ $(y>0)$到点$B(1,1)$的一段弧.

（3）$\oint_L x^3 y dx + xy^2 dy$，其中 L 为 $x^2 = y$ 与 $y = 1$ 所围成闭区域的整个边界（按顺时针方向绕行）.

（4）$\int_\Gamma y^2 dx + xy dy + zx dz$，其中 Γ 为从点 $(0,0,0)$ 到点 $(1,2,1)$ 的直线段.

（5）$\int_L (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$，其中 L 为曲线 $y = 1 - |1 - x|$ 从对应于 $x = 0$ 的点到 $x = 2$ 的点.

（6）$\oint_\Gamma (z - y) dx + (x - z) dy + (x - y) dz$，其中 Γ 是曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x - y + z = 2, \end{cases}$ 从 z 轴正向往 z 轴负向看，Γ 的方向是顺时针方向.

（7）$\int_L \sin 2xdx + 2(x^2-1)ydy$，其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(\pi,0)$ 的一段.

3. 把 $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 化为对弧长的曲线积分，其中 L 为沿曲线 $y=\sqrt{x}$ 从点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,1)$.

4. 一个粒子沿 $\overrightarrow{r(t)} = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + 2t\vec{k}$ 所给出的螺旋线移动，受到力 $\vec{F} = x\vec{i} + z\vec{j} - xy\vec{k}$ 的作用. 求作用在粒子上的力当 $0 \le t \le 3\pi$ 时所做的总功.

5. 设 L 为 xOy 面内直线 $y=c$ 上从点 (a,c) 到点 (b,c) 的一段，证明：$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b P(x,c)dx$.

本节作业总结：

第三节　格林公式及其应用

1．填空：

（1）格林公式$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$ 中，L 是 D 的______________边界.（正向或负向）

（2）闭曲线上的积分$\oint_L xdy-ydy$ 的几何意义是________________________________.

（3）若函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在单连通区域 G 上满足$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，则曲线积分$\int_L Pdx+Qdy$ 在 G 内与路径无关. _______（判断题）.

2．利用 Green 公式，计算下列曲线积分：

（1）$\oint_L xy^2dy-x^2ydx$，其中 L 为正向圆周 $x^2+y^2=9$.

（2）$\oint_L (e^y+y)dx+(xe^y-2y)dy$，其中 L 为以 $O(0,0),A(1,2)$ 及 $B(1,0)$ 为顶点的三角形负向边界.

（3）$\int_L -x^2ydx+xy^2dy$，其中 L 为 $x^2+y^2=6x$ 的上半圆周从点 $A(6,0)$ 到点 $O(0,0)$ 及 $x^2+y^2=3x$ 的上半圆周从点 $O(0,0)$ 到点 $B(3,0)$ 连成的弧 AOB.

（4）$\oint_L \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$，其中$L$为正向圆周$x^2+(y+1)^2=4$.

（5）$\int_L \sin 2xdx+2(x^2-1)ydy$，其中$L$是曲线$y=\sin x$上从点$(0,0)$到点$(\pi,0)$的一段.

3．利用曲线积分，求圆$x^2+y^2+6y=0$围成图形的面积；

4．计算下列曲线积分：

（1）$\int_L e^x(1-2\cos y)dx+2e^x\sin ydy$，其中$L$为曲线$y=\sin x$上由点$A(\pi,0)$到点$O(0,0)$的一段弧.

（2）$\int\limits_L (2xy+x)dx+x^2dy$，其中 L 为由点 $A(a,0)$ 经曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限的部分到点 $B(0,b)$　$(a,b>0)$.

5．求 a,b 应满足什么条件，使得曲线积分 $\int_L \frac{aydx+bxdy}{x^2}$ 在右半平面 $x>0$ 内与路径无关.

6．验证下列 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 在 xoy 面内为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求出这样一个函数 $u(x,y)$：

（1）$2xydx+x^2dy$.

（2）$(3x^2+\sin y)dx+x\cos ydy$.

（3）$(e^{xy}+xye^{xy})dx+x^2e^{xy}dy$.

7．设函数 $f(u)$ 具有一阶连续导数，证明对任何光滑封闭曲线 L，有 $\oint_L f(xy)(y\,dx+x\,dy)=0$.

8．设变力 $\vec{F}=(2x^2+y^2)\vec{i}+(2xy-1)\vec{j}$ 确定了一个力场，证明质点在此场中移动时，场力所做的功与路径无关.

本节作业总结：

第四节　对面积的曲面积分

1．填空：

（1）设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$，则 $\iint\limits_{\Sigma} dS=$________________.

（2）面密度 $\rho(x,y,z)$ 的光滑曲面 Σ 的质量 $M=$______________.

（3）设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$，则 $\iint\limits_{\Sigma} y\,dS=$______________.

（4）设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，则 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=$________________.

（5）设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，则 $\iint\limits_{\Sigma} z^2\,dS=$____________.

（6）已知积分曲面由 $z=z(x,y)$ 给出，则面积元素

$dS=$______________________________.

2．计算下列对面积的曲面积分：

（1）$\iint\limits_{\Sigma}(2x+y+2z)dS$，其中 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限的部分.

（2）$\iint\limits_{\Sigma} z\,dS$，其中 Σ 为 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ $(z\le 1)$ 的部分.

（3）$\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{dS}{(1+x+y)^2}$，其中 Σ 为 $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$ 围成四面体的整个边界.

（4） $\iint\limits_{\Sigma}(2x^3y+yz+3z)dS$，其中 Σ 为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 所截的部分.

3．求 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在 $4x^2+y^2=a^2$ 内的面积.

4．已知非均匀曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=c$ 被平面 $z=h(0<h<c$ 所截的部分，面密度为 $\rho(x,y,z)=\dfrac{1}{z}$，求曲面的质量.

5．求均匀曲面 $x^2+y^2+z^2=1\ (x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$ 的质心.

6．求均匀半球面 $x^2+y^2+z^2=1\ (x\geq 0)$ 对 x 轴的转动惯量.

本节作业总结：

第五节　对坐标的曲面积分

1．填空：

（1）对坐标的曲面积分与曲面的方向________（无关或有关）.

（2）已知$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy$存在，则

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy+\iint\limits_{\Sigma^-} R(x,y,z)dxdy=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

（3）已知曲面由方程$z=z(x,y)$给出，假设ΔS在xOy面上的投影区域面积为$(\Delta\sigma)_{xy}$，则ΔS在xOy面上的投影$(\Delta S)_{xy}$为

$$(\Delta S)_{xy}=\begin{cases}\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, & \cos\gamma>0\\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, & \cos\gamma<0\\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, & \cos\gamma=0\end{cases}.$$

（4）已知曲面由方程$z=z(x,y)$给出，取其上侧，则

$$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

中，$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$

（5）设曲面Σ是$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$的上侧，则

$$\iint\limits_{\Sigma} xydydz+xdzdx+x^2dxdy=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

2．计算下列对坐标的曲面积分：

（1）$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)zdxdy$，其中$\Sigma$为曲面$z=1-x^2-y^2$在第一卦限部分的上侧.

（2）$\iint\limits_{\Sigma}(x+1)dydz+ydzdx+dxdy$，其中$\Sigma$为$x+y+z=1$在第一卦限的部分且取法线的方向与$z$轴的夹角为锐角.

（3）$\oiint\limits_{\Sigma} xz^2 dydz$，其中$\Sigma$为$x^2+y^2+z^2=9$的外侧.

（4）$\iint\limits_{\Sigma} \dfrac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$, 其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被平面$z=1$与$z=2$所截得部分的下侧.

（5）$\iint\limits_{\Sigma} yz\sqrt{1-z^2}+\cos y \quad dxdy$ 其中Σ为圆柱面$x^2+z^2=1$被平面$y=0, y=2$所截得部分的外侧.

3．已知Σ为平面$2x+2y+z=2$第一卦限部分的上侧，把

$$\iint\limits_{\Sigma} x\,dydz + y\,dzdx + (x+z)\,dxdy$$化为对面积的曲面积分后，

再计算.

4. 已知Σ为抛物面$z=8-(x^2+y^2)$在xOy面上方部分的下侧，

把$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$化为

对面积的曲面积分.

本节作业总结：

第六节　Gauss 公式　通量与散度*

1．利用高斯公式计算下列曲面积分：

（1）$\oiint\limits_{\Sigma}(x^3-\cos ye^z)dydz-2x^2ydzdx+(x^2\sin y+z)dxdy$，其中$\Sigma$为平面$x=0,y=0,z=0,x=1,y=1,z=1$围成的立方体$\Omega$的表面外侧.

（2）$\oiint\limits_{\Sigma}(x-y)dxdy+x(y-z)dydz+e^zdzdx$，其中$\Sigma$由$x^2+y^2=9,z=0,z=1$所围空间闭区域$\Omega$的整个边界曲面的外侧.

（3）$\iint\limits_{\Sigma}xydydz+xdzdx+x^2dxdy$，其中$\Sigma$为上半球面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$的上侧.

（4）$\iint\limits_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy$，其中$\Sigma$为上半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧.

（5）$\iint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+(z^2-2z)dxdy$，其中$\Sigma$为

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $z=0$ 与 $z=1$ 之间部分的外侧.

（6*）$\oiint\limits_{\Sigma} \dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$，其中$\Sigma$为曲面

$2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

本节作业总结：

第七节 Stokes公式 *环流量与旋度

1．利用斯托克斯公式计算下列曲线积分：

（1）$\oint_\Gamma x^2y^3dx+dy+zdz$，$\Gamma$为$xOy$面内圆周$x^2+y^2=a^2$逆时针方向.

（2）$\oint_\Gamma (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$，$\Gamma$为平面$x+y+z=1$在第一卦限部分三角形的边界，从$x$轴正向看去是逆时针方向.

（3）$\oint_\Gamma ydx+zdy+xdz$，其中Γ为圆周$x^2+y^2+z^2=a^2, x+z=0$，从x轴正向看为逆时针方向.

本节作业总结：

第十一章 自测题

1．填空：

（1）已知 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，其周长为 a，则 $\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)ds=$__________________.

（2）已知 L 为直线 $x=1$ 上从点 $(1,2)$ 到点 $(1,3)$ 的直线段，则 $\int_L 5\sqrt{x^2+y}\sin x dx+x^3e^{x^2-1}dy=$__________.

（3）设 L 是以点 $(0,0)$，$(0,1)$，$(1,1)$ 为顶点的三角形正向边界，则 $\oint_L xy^2dx+x^2ydy=$________________.

（4）曲线积分 $\int_L F(x,y)(ydx+xdy)$ 与路径无关，则可微函数 $F(x,y)$ 应满足条件________________________.

（5）设 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限的部分，取上侧，则 $\iint\limits_{\Sigma}(y^2-z^2)dydz+2(z^2-x^2)dzdx-3(x^2-y^2)dxdy=$_______.

2．求下列曲线积分：

（1）$\int_\Gamma x^2ds$，其中 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $x+y+z=0$ 所截得的圆周.

（2）$\int_L (e^x\sin y-2(x+y))dx+(e^x\cos y-x)dy$，其中 L 为从点 $A(2,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的一段弧.

（3*）$\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以 $(1,0)$ 为圆心，2 为半径的正向圆周.

（4）$\oint_\Gamma (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$，$\Gamma$ 为球面三角 $x^2+y^2+z^2=1, x>0, y>0, z>0$ 的边界线，沿它的方向前进时，球面三角形总在右方.

3．在过点 $O(0,0)$ 和 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y=\alpha\sin x(\alpha>0)$ 中，求一条曲线 L，使该曲线从 O 到 A 积分 $\int_L (1+y^3)dx+(2x+y)dy$ 的值最小.

4．设曲线积分 $\int_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 与路径无关，其中 φ 具有连续的导数，且 $\varphi(0)=0$，计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+y\varphi(x)dy$.

5．确定常数 λ，使在右半平面 $x.>0$ 上向量

$\vec{A}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\vec{i}-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\vec{j}$ 为某二元函数

$u(x,y)$ 的梯度，并求 $u(x,y)$.

6． 计算下列曲面积分：

（1）$\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{\rho(x,y,z)}dS$，其中 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分，$\rho(x,y,z)$ 为点 $O(0,0,0)$ 到平面 π 的距离，π 为 Σ 在点 $P(x,y,z)\in\Sigma$ 处的切平面.

（2）$\iint\limits_{\Sigma}x^2dS$，其中 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=1$ 介于 $z=0$ 与 $z=2$ 之间的部分.

（3）$\iint\limits_{\Sigma}(8y+1)xdydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy$，其中 Σ 是曲线 $\begin{cases}x=0\\ z=\sqrt{y-1},1\le y\le 3\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所成的曲面，它的法矢量与 y 轴正向的夹角恒大于 $\frac{\pi}{2}$.

（4）$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+(z+1)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中$\Sigma$为下半球面 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

（5）$\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dydz+[2f(x,y,z)+y])dzdx+[f(x,y,z)+z]dxdy$，其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，Σ 为平面 $x-y+z=1$在第一卦限部分的上侧.

7．考研题练练看：

（1）（2012 年数学一，4 分）设 $\Sigma=\{(x,y,z)\,|\,x+y+z=1,x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0\}$，则 $\iint\limits_{\Sigma}y^2dS=$________________.

（2）（2012 年数学一, 10 分）已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$，再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段, 计算曲线积分 $I=\int\limits_L 3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy$.

（3）（2011 年数学一，4 分）曲线 $y=\int_0^x \tan t dt (0 \le x \le \frac{\pi}{4})$ 的弧长 $s=$________.

（4）（2011 年数学一，4 分）设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L xzdx+xdy+\frac{y^2}{2}dz=$________.

（5）（2010 年数学一，4 分）已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x| (x\in[-1,1])$，起点是 $(-1,0)$，终点是 $(1,0)$，则曲线积分 $\int_L xydx+x^2dy=$________.

（6）(2013 年数学一，4 分）设 $L_1: x^2+y^2=1$，$L_2: x^2+y^2=2$，$L_3: x^2+2y^2=2$，$L_4: 2x^2+y^2=2$ 为四条逆时针方向的平面曲线，记 $I_i=\oint_{L_i}(y+\frac{y^3}{6})dx+(2x-\frac{x^3}{3})dy (i=1,2,3,4)$，则 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=$（　　）

（A）I_1；　（B）I_2；　（C）I_3；　（D）I_4.

（7）（2010 年数学一，10 分）设 P 为椭球面 $S: x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直，求点 P 的轨迹 C，并计算曲面积分

$$I=\iint_\Sigma \frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$$，其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

（8）（2014 年数学一，4 分）设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 和平面 $y+z=0$ 的交线，从 $\boldsymbol{z}$ 轴正方向往负方向看是逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L zdx+ydz=$______________.

（9）（2014 年数学一，10 分）

设曲面 $\Sigma: z=x^2+y^2 (z\le 1)$ 的上侧，计算曲面积分：

$\iint\limits_{\Sigma}(x-1)^3 dydz+(y-1)^3 dzdx+(z-1)dxdy$.

本章作业纠错与总结：