第六节 高阶线性微分方程

- 线性微分方程
- 线性微分方程的解的结构

一、线性微分方程的形式

形如 $\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}}+P(x)\boxed{\frac{dy}{dx}}+Q(x)\boxed{y}=f(x)$

二阶线性微分方程

当 $f(x)=0$时，二阶齐次线性微分方程

当 $f(x)\neq 0$时，二阶非齐次线性微分方程

$$\boxed{y^{(n)}}+P_1(x)\boxed{y^{(n-1)}}+\cdots+P_{n-1}(x)\boxed{y'}+P_n(x)\boxed{y}=f(x)$$

n阶线性微分方程

二、线性微分方程的解的结构

1.二阶齐次线性方程解的结构

叠加原理

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (1)$$

定理1 如果函数$y_1(x)$与$y_2(x)$是方程 (1) 的两个解,

那么$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$也是 (1) 的**解,**（C_1,C_2是常数）

证 $[C_1y_1''+C_2y_2'']+P(x)[C_1y_1'+C_2y_2']$

$$+Q(x)[C_1y_1+C_2y_2] = C_1[y_1''+P(x)y_1'+Q(x)y_1]$$

$$+C_2[y_2''+P(x)y_2'+Q(x)y_2] = 0$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (1)$$

定理1 如果函数$y_1(x)$与$y_2(x)$是方程 (1) 的两个解,

那么$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$也是 (1) 的**解,** （C_1,C_2是常数）

$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 一定是通解吗

比如 $y_1(x)$ 是方程 (1) 的解,

$y_2(x)=2y_1(x)$也是方程 (1) 的解,

则 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = C_1y_1(x) + 2C_2y_1(x)$

$= (C_1 + 2C_2)y_1(x)$ 是通解吗？

定义 设$y_1(x)$，$y_2(x)$，…，$y_n(x)$为定义在区间I内的n个函数，如果存在n个不全为零的常数，使得当x在该区间内恒等式成立

$$k_1y_1 + k_2y_2 + \cdots + k_ny_n \equiv 0$$

那末称这n个函数在区间I内 **线性相关**.

否则称 **线性无关**.

如 $1, \cos^2 x, \sin^2 x \ (x \in (-\infty, +\infty))$ 线性相关

$1, x, x^2 \ (x \in (-\infty, +\infty))$ 线性无关

特别地 若在I上有 $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq$ 常数，

则函数$y_1(x)$与$y_2(x)$在I上线性无关.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (1)$$

定理2 如果函数$y_1(x)$与$y_2(x)$是方程 (1) 的两个线性无关的特解, 那末 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 也是(1)的通解.

为了求齐次线性方程的通解,
只要求它的两个线性无关的特解.

如 $y'' + y = 0$, $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$,

且 $\dfrac{y_2}{y_1} = \tan x \neq$ 常数, 通解 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

定理2 可推广到n 阶齐次线性方程.

推论 如果函数$y_1(x), y_2(x), \cdots y_n(x)$是$n$阶齐次线性方程

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0$$

的n个线性无关的解, 那么, 此方程的通解为

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x),$$

其中$C_1, C_2, \cdots C_n$为任意常数.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (1)$$

2.二阶非齐次线性方程解的结构

定理3 设y^*是二阶非齐次线性微分方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \qquad (2)$$

的一个特解, Y 是与(2)对应的齐次方程(1)的通解,

那么 $y = Y + y^*$是(2)的通解.

证: 只要将y代入验证即可

为了求非齐次线性方程的通解, 只要求出:

非齐次线性方程的一个特解和对应齐次线性方程的通解.

如 $y'' + y = x^2$ 是二阶非齐次线性方程，

已知 $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ 是对应齐次方程

$y'' + y = 0$ 的通解.

又容易验证 $y^* = x^2 - 2$ 是所给方程的一个特解.

$$\therefore y = Y + y^*$$

$$= C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2$$

是非齐次方程的通解.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (2)$$

定理4 设非齐次方程 (2) 的右端 $f(x)$ 是几个函数之和，如 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$

y_1^*, y_2^* 分别是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$

的特解，那么 $y_1^* + y_2^*$ 就是原方程的特解.

解的叠加原理

证： 只要代入验证即可

定理3和**定理4**也可推广到 n 阶非齐次线性方程.

练习 已知 $y_1 = 3, y_2 = 3 + x^2, y_3 = 3 + x^2 + e^x$

都是微分方程:

$$(x^2 - 2x)y'' - (x^2 - 2)y' + (2x - 2)y = 6x - 6$$

的解,求此方程的通解.

结论 非齐次线性方程的两个特解之差是对应齐次方程的特解.

已知$y_1=3, y_2=3+x^2, y_3=3+x^2+e^x$
都是微分方程:
$$(x^2-2x)y''-(x^2-2)y'+(2x-2)y=6x-6$$
的解,求此方程的通解.

解 $y_2-y_1=x^2, y_3-y_2=e^x$ $\because \frac{x^2}{e^x}\neq$ 常数,

所以, x^2, e^x 线性无关.

因而, 齐次线性方程的通解 $Y=C_1x^2+C_2e^x$

方程的通解为 $y=Y+y^*=C_1x^2+C_2e^x+3$

或 $y=C_1x^2+C_2e^x+3+x^2$

或 $y=C_1x^2+C_2e^x+3+x^2+e^x$

作 业

练习册7-6