第五、六章小测验

一、选择题（每题 3 分，共 42 分）

1. 设 X 为随机变量, $EX=\mu, DX=\sigma^2$, 则 $P\{|X-\mu|\geq 3\sigma\}$ 满足(　　).

A. $\leq\frac{1}{9}$　　B. $\leq\frac{1}{3}$　　C. $\geq\frac{1}{9}$　　D. $\geq\frac{1}{3}$

2. 设对目标独立地发射 400 发炮弹,已知每发炮弹的命中率为 0.2 由中心极限定理,则命中 60 发～100 发的概率可近似为(　　).

A. $\Phi(2.5)$　　B. $2\Phi(1.5)-1$　　C. $2\Phi(2.5)-1$　　D. $1-\Phi(2.5)$

3. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布, $EX_i=\mu, DX_i=\sigma^2, i=1,2,\cdots,n,$ 当 $n\geq 30$ 时,下列结论中错误的是(　　).

A. $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 近似服从 $N(n\mu, n\sigma^2)$ 分布　B. $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ 近似服从 $N(0,1)$ 分布

C. X_1+X_2 服从 $N(2\mu, 2\sigma^2)$ 分布　D. $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 不近似服从 $N(0,1)$ 分布

4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本,则 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 必然满足(　)

A.独立但分布不同;　B.分布相同但不相互独立;　C 独立同分布;　D.不能确定

5. 设总体均值为 μ,方差为 σ^2, n 为样本容量,下式中错误的是(　　).

A. $E(\overline{X}-\mu)=0$　B. $D(\overline{X}-\mu)=\frac{\sigma^2}{n}$　C. $E(\frac{S^2}{\sigma^2})=1$　D. $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

6. 下列关于统计学“三大分布”的判断中，错误的是（　　）.

A. 若 $F\sim F(n_1,n_2)$, 则 $\frac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$　B. 若 $T\sim t(n)$, 则 $T^2\sim F(1,n)$

C. 若 $X\sim N(0,1)$, 则 $X^2\sim\chi^2(1)$　D. 在正态总体下 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

7. 设 $\bar{X}_i, S_i^2$ 表示来自总体 $N(\mu_i,\sigma_i^2)$ 的容量为 n_i 的样本均值和样本方差 $(i=1,2)$，且两总体相互独立，则下列不正确的是（　　）.

A. $\frac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$　　B. $\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$

C. $\frac{\overline{X}_1-\mu_1}{S_1/\sqrt{n_1}} \sim t(n_1)$　　D. $\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2-1)$

8. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(0,1)$ 的样本, $\overline{X}, S^2$ 分别为样本均值与样本方差,

则(　　). A. $\overline{X} \sim N(0,1)$　B. $n\overline{X} \sim N(0,1)$　C. $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$　D. $\frac{\overline{X}}{S} \sim t(n-1)$

9. 给定一组样本观测值 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 且得 $\sum_{i=1}^{9} X_i = 45, \sum_{i=1}^{9} X_i^2 = 285$, 则样本方差 S^2

的观测值为 (　　).　A. 7.5　B.60　C. $\frac{20}{3}$　D. $\frac{65}{2}$

10. 设 X 服从 $t(n)$ 分布, $P\{|X| > \lambda\} = a$，则 $P\{X < -\lambda\}$ 为(　　).

A. $\frac{1}{2}a$　B. $2a$　C. $\frac{1}{2}+a$　D. $1-\frac{1}{2}a$

11. 设 $X_1, X_2, \cdots$, X_n 是来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，则 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从分

布为（　　）.　A. $\chi^2(n)$　B. $\chi^2(n-1)$　C. $N(0,n^2)$　D. $N(0,\frac{1}{n})$

12. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 是来自正态总体 $N(0,2^2)$ 的简单随机样本，若

$Y = a(X_1+2X_2)^2 + b(X_3+X_4+X_5)^2 + c(X_6+X_7+X_8+X_9)^2$ 服从 χ^2 分布，则 a,b,c 的值分别为（　　）.

A. $\frac{1}{8},\frac{1}{12},\frac{1}{16}$　B. $\frac{1}{20},\frac{1}{12},\frac{1}{16}$　C. $\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}$　D. $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$

13. 设随机变量 X 和 Y 相互独立,且都服从正态分布 $N(0,3^2)$,设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 和

$Y_1, Y_2, \cdots, Y_9$ 分别是来自两总体的简单随机样本,则统计量 $U = \frac{\sum_{i=1}^{9} X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{9} Y_i^2}}$ 服从分布是

(　　).

A. $t(9)$　B. $t(8)$　C. $N(0,81)$　D. $N(0,9)$

14.设 $X_1, X_2, \cdots, X_5$ 是来自正态总体 N（μ, σ^2 ）的样本，其样本均值和样本方差分别为 $\bar{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i$ 和 $s^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2$，则 $\frac{\sqrt{5}(\bar{X} - \mu)}{S}$ 服从（　　　）

A.t(4)　　　B.t(5)　　　C.$\chi^2(4)$　　　D. $\chi^2(5)$

二、填空题（每题 3 分，共 24 分）

1.设 $X_1, X_2, \cdots, X_8$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_8$ 是分别来自总体 N（2，1）和总体 N（1，1）的两个相互独立的简单随机样本，则 $P(\bar{X} - \bar{Y} \le 2)$=______.

2.设 μ_n 为 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数，p 是事件 A 在每次试验中发生的概率，则对任意的 $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{\mu_n}{n} - p| < \varepsilon\}$ =__________.

3.设随机变量 X 服从均匀分布 $U[0,6]$，Y 服从二项分布 $B(12, \frac{1}{4})$，且 X, Y 相互独立，根据切比雪夫不等式有 $P(X - 3 < Y < X + 3) \ge$______.

4. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$， $Y \sim N(0,4)$ 且相互独立， 设 Z=X^2+ $\frac{1}{C}$ Y^2， 则当 C=__________时，Z~$\chi^2(2)$.

5．设 X_1, X_2, X_3, X_4 为来自总体 $N(0,1)$ 的样本，设 $Y = (X_1 + X_2)^2 + (X_3 + X_4)^2$, 则当 C=_____时，$CY \sim \chi^2(2)$.

6．设 $X \sim N(\mu, 4)$, $Y \sim \chi^2(n)$ 且相互独立，则 $T = \frac{X - \mu}{2\sqrt{Y}}\sqrt{n}$ 服从_______分布.

7.一颗骰子连续掷 4 次，点数总和记为 X，估计 $P(10 < X < 18)$=______________.

8．设 $X_1, X_2, \cdots, X_{17}$ 是总体 $N(\mu, 4)$ 的样本，S^2 是样本方差，若 $P(S^2 > a) = 0.01$，则 a =___________.

（注：$\chi^2_{0.01}(17) = 33.4$，$\chi^2_{0.005}(17) = 35.7$，$\chi^2_{0.01}(16) = 32.0$，$\chi^2_{0.005}(16) = 34.2$ ）

三、计算题（共 24 分）

1.（6 分）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 来自正态母体 $N(10, 2^2)$， $\overline{X}$ 是样本均值，满足

$P(9.02 \le \overline{X} \le 10.98) = 0.95$，试确定样本容量 n 的大小。（注：$\Phi(1.96)=0.975$）

2.（8 分）一生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量是随机的。假设每箱平均重 50 千克，标准差为 5 千克。若用最大载重量为 5 吨的汽车承运，试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱，才能保障不超载的概率大于 0.977。（$\Phi(2) = 0.977$，其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数。）

3. （10 分）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，现对 X 进行 160 次独立重复观测，以 V 表示观测值不大于 0.5 的次数，用中心极限定理求 $P(V < 50)$ 的近似值。（查表：$\Phi(\frac{10}{\sqrt{30}}) = 0.97$）

四．证明题（共10分）

1. 设随机变量 X 服从分布 $F(n, n)$，求证：$P(X \le 1) = P\{X \ge 1\} = 0.5$

2. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，$S^2 = \frac{1}{n\text{-}1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 是样本方差，证明 $E(S^2) = \sigma^2$