线性代数总复习Ⅰ

考试班级________________学号_____________姓名_____________成绩____________

一、填空题（本题共 12 小题，每题 3 分，共 36 分）

1. 已知 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$，则 $x =$ ________________________.

2. 如果齐次方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 2\lambda x_2 = 0 \end{cases}$ 有非零解，那么 $\lambda =$ ____________.

3. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，则 $A^{-1} =$ ______________________________.

4. 设 A 为三阶方阵，且 $|A| = 2$ 则 $\left|3A^{-1} - A^*\right| =$ ________________________.

5. 已知矩阵 A 的秩为 n-1，且 η_1, η_2 为非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个互不相同的解，则 $Ax = b$ 的通解为____.

6. 设 $\alpha = (2, -1, 5)^T$，$\beta = (-1, 1, 1)^T$，则 $\alpha + \beta = \underline{(1\ ,0\ ,6)^T}$.

7. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则向量组 $\alpha_1 - \alpha_2$，$\alpha_2 - \alpha_3$，$\alpha_3 - \alpha_1$ 是__________________（填“线性相关”或“线性无关”）.

8. 矩阵 $\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 的全部特征值为_____________________.

9. 设三阶矩阵 A 的 3 个特征值为 2，3，4，则行列式 $|A|$=______________.

10. 与 $\alpha_1 = (1, -2, 3), \alpha_2 = (0, 2, -5)$ 都正交的单位向量为___________.

11. 若 3 元实二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的标准形为 $4y_1^2 - 3y_2^2$，则其规范形为_______.

12. 已知二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2$ 为正定二次型，则 λ 的取值范围为____________.

二、计算题（本题共 6 小题，每题 8 分，共 48 分）

1．计算行列式 $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & a-2 & 1 & \cdots & 1 \\ 3 & 1 & a-3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & 1 & \cdots & a-n \end{vmatrix}$.

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，矩阵 X 满足关系式 $A-XA=X$，求 X .

3. 线性方程组 $\begin{cases} x_1-3x_2-\ x_3=0 \\ x_1-4x_2+ax_3=b \\ 2x_1-x_2+3x_3=5 \end{cases}$，问：$a,b$ 取何值时，方程组无解、有唯一解、有无穷多解？

在有无穷多解时求出其全部解.

4. 设向量组 $\alpha_1=(1,2,-3,1),\alpha_2=(2,3,-1,2),\alpha_3=(3,1,-2,-2),\alpha_4=(0,4,-2,5)$，求其极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表出.

5. 设 n 维向量 $\alpha=(\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2})$，矩阵 $A=E-\alpha^T\alpha$， $B=E+2\alpha^T\alpha$，求 AB .

6. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3$ 通过正交变换化为标准形 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求参数 a 的值及所用的正交变换矩阵.

四、证明题(本大题共 3 小题, 共 16 分)

1. 设 n 阶矩阵阵 A 满足 $A^2+2A+3E=O$，证明 $A+3E$ 可逆，并求其逆矩阵. (6 分)

2. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 满足：（1） $\alpha_1\neq 0$；（2）每个 $\alpha_i(i=2,3,\cdots,s)$ 都不能由它前面的向量线性表示，即不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1}$ 线性表出. 证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关. （5 分）

3. 若 A 是正定矩阵， A^* 是其伴随矩阵，证明 A^* 是正定的.(5 分)