第四节　一阶线性微分方程

- **一阶线性微分方程**
- **小结**

一、一阶线性微分方程

一阶线性微分方程的标准形式

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}+P(x)\boxed{y}=\boxed{Q(x)}$$

自由项

当$Q(x)\equiv 0$,上面方程称为齐次的;

当$Q(x)\not\equiv 0$,上面方程称为非齐次的.

如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+x^2$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x\sin t+t^2$, 线性的;

$yy'-2xy=3$, $y'-\cos y=1$, 非线性的.

一阶线性微分方程的解法

1. 线性齐次方程 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=0.$

(使用分离变量法)

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx, \qquad \int\frac{dy}{y}=-\int P(x)dx,$$

$$\ln|y|=-\int P(x)dx+C_1,$$ (C_1为任意常数)

齐次方程的通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$ $(C=\pm e^{C_1})$

2. 线性非齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

对应的线性齐次方程的通解是 $Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$,

显然线性非齐次方程的解不会是如此,但它们之间应存在某种共性.

设想 非齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$的解是

$$y=\boxed{C(x)}\,e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

待定函数

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

对 $y=C(x)e^{-\int P(x)dx}$ 求导，得

$$y'=C'(x)e^{-\int P(x)dx}+C(x)e^{-\int P(x)dx}\cdot[-P(x)]$$

将 y, y' 代入原方程,得

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx}+C(x)[-P(x)]e^{-\int P(x)dx}$$

$$+P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$$

从而$C(x)$满足方程 $C'(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$

即 $\int C'(x)\mathrm{d}x = \int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C$$

$y = \boxed{C(x)}e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$的解.

一阶线性非齐次微分方程的通解为

$$y = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right]$$

常数变易法 把齐次方程通解中的常数变易为待定函数的方法.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)}$$

一阶线性方程解的结构

$$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\boxed{Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}+\boxed{e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}$$

对应齐次方程通解　　　　非齐次方程的一个特解

注　一阶线性方程解的结构及解非齐次方程的常数变易法对高阶线性方程也适用.

例 求方程 $y'-\dfrac{2}{x+1}y=(x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解.

解 先解对应的齐次线性方程 $y'-\dfrac{2}{x+1}y=0$

分离变量 $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{2dx}{x+1}$

两端积分 $\ln|y|=\ln(x+1)^2+\ln C_1$

即 $y=\pm C_1(x+1)^2=C(x+1)^2$

常数变易，令 $\boxed{y=u(x)(x+1)^2}$

两端求导，得 $\boxed{y'=u'(x)(x+1)^2+2u(x)(x+1)}$

代入，得 $u'=(x+1)^{\frac{1}{2}}$，积分得 $u(x)=\dfrac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C$

再代入得通解 $y=[\dfrac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C](x+1)^2$

例 如图所示,平行于y轴的动直线被曲线 $y=f(x)$ 与$y=x^3\,(x\geq 0)$截下的线段PQ之长数值上等于阴影部分的面积, 求曲线 $y=f(x)$.

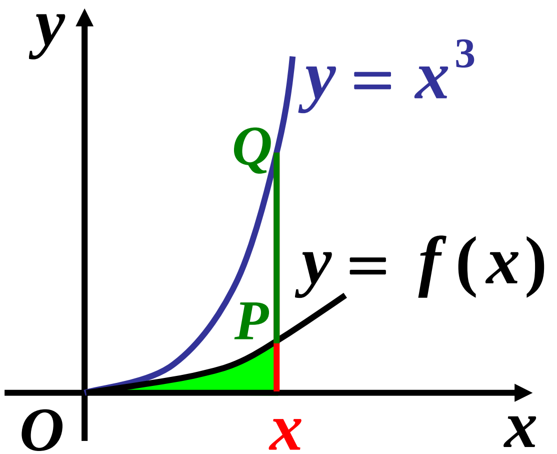
解 $x^3-f(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$

$$[x^3-f(x)]'=[\int_0^x f(x)\mathrm{d}x]'$$

$$3x^2-f'(x)=f(x)$$

即 $y'+y=3x^2$

一阶非齐次线性方程



$$y' + y = 3x^2$$

$$\int_0^x y\,dx = x^3 - y$$

$$P(x) = 1,\quad Q(x) = 3x^2$$

$$y = e^{-\int dx}\left[\int 3x^2 e^{\int dx}\,dx + C\right] = e^{-x}\left[\int 3x^2 e^x\,dx + C\right]$$

$$= Ce^{-x} + 3x^2 - 6x + 6$$

$y|_{x=0} = 0$, 得 $C = -6$,

所求曲线为 $y = 3(-2e^{-x} + x^2 - 2x + 2)$

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$

例　静脉输液问题.

静脉输入葡萄糖是一种重要的医疗技术.为了研究这一过程,需要知道t时刻中血液中的葡萄糖含量. 设$G(t)$为时刻t血液中葡萄糖含量,且设葡萄糖以常数$k(g/\text{min})$的固定速率输入到血液中,与此同时,血液中的葡萄糖还会转化为其他物质或转移到其他地方,其速率与血液中的葡萄糖含量成正比.试列出描述这一现象的微分方程, 并解之.

解 因为血液中的葡萄糖含量的变化率$\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}$等于增加速率与减少速率之差,而增加速率为常数$k$, 减少速率为$\alpha G$, 其中$\alpha$为正的比例常数, 所以

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}=k-\alpha G,$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = k - \alpha G,}$$

即 $\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} + \alpha G = k$. 关于**G**的一阶非齐次线性方程.

由通解公式, 得

$$G(t) = e^{-\int \alpha \mathrm{d}t}\left[\int k e^{\int \alpha \mathrm{d}t} \mathrm{d}t + C\right] = \frac{k}{\alpha} + Ce^{-\alpha t}.$$

设$G(0)$表示最初血液中葡萄糖的含量,则可确定出

$$C = G(0) - \frac{k}{\alpha},$$

于是 $G(t) = \dfrac{k}{\alpha} + [G(0) - \dfrac{k}{\alpha}]e^{-\alpha t}$.

例 解方程 $y\ln y\,\mathrm{d}x + (x - \ln y)\mathrm{d}y = 0$

分析 若将方程写成 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{y\ln y}{x - \ln y}$

则它既不是线性方程, 又不能分离变量.

若将方程写成 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\dfrac{x - \ln y}{y\ln y} = -\dfrac{1}{y\ln y}x + \dfrac{1}{y}$

即 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{1}{y\ln y}x = \frac{1}{y}$$

以x为未知函数, y 为自变量的 一阶非齐次线性方程.

$$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$y\ln y\mathrm{d}x+(x-\ln y)\mathrm{d}y=0$$

解 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{1}{y\ln y}x=\frac{1}{y}$$

$P(y)$ $Q(y)$

$$x=e^{-\int\frac{1}{y\ln y}\mathrm{d}y}\left(\int\frac{1}{y}e^{\int\frac{1}{y\ln y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)$$

$$=\frac{1}{\ln y}\left(\int\frac{1}{y}\ln y\mathrm{d}y+C\right)=\frac{1}{2}\ln y+\frac{C}{\ln y}$$

此外,$y=1$也是原方程的解.

注

解方程时,通常不计较哪个是自变量哪个是因变量,视方便而定,关键在于找到两个变量间的关系.解可以是显函数,也可以是隐函数,甚至是参数形式的.

例 求解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x+y}$

解题提示 方程中出现 $f(xy), f(x\pm y)$, $f(x^2\pm y^2), f(\dfrac{y}{x})$ 等形式的项时, 通常要做相应的**变量代换** $u=xy, x\pm y, x^2\pm y^2, \dfrac{y}{x}, \cdots$

解 令 $x+y=u$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1$,

代入原式得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1=\dfrac{1}{u}$, 可分离变量方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x+y}$$

分离变量得 $\frac{u}{u+1} du = dx$

积分得 $u - \ln|u+1| = x + C,$

将 $u=x+y$代回，所求通解为

$$y - \ln|x+y+1| = C,$$

或 $x = C_1 e^y - y - 1,$ $C_1 = \pm e^C$

另解 方程变形为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = x + y$ 一阶线性方程.

小结一阶微分方程

可分离变量的微分方程 $g(y)dy = f(x)dx$

解法：分离变量$\Rightarrow$ 两端积分 $\Rightarrow$ 隐式(或显式)通解

齐次方程 $y' = f(\frac{y}{x})$, 令 $u = \frac{y}{x}$

一阶线性微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$

$$y = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right]$$

一阶微分方程的***解题程序***

(1) 审视方程, 判断方程类型;

(2) 根据不同类型, 确定解题方案;

(3) 如果方程做了变量替换， 则变量替换后得出的解, 最后一定要还原为原变量.

作业

练习册7-4