第五节 可降阶的高阶微分方程

- $y^{(n)} = f(x)$ 型的方程
- $y'' = f(x, y')$ 型的方程
- $y'' = f(y, y')$ 型的方程
- 小结 思考题 作业

一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的方程

特点 左端是未知函数 y 的 n 阶导数,右端是自变量 x 的一个已知函数,且不含未知函数 y 及其导数 y'.

两边积分 $$y^{(n-1)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C_1$$

再积分 $$y^{(n-2)} = \int [\int f(x)\mathrm{d}x + C_1]\mathrm{d}x + C_2$$

$$\cdots\cdots$$

接连积分 n 次,得到含有 n 个任意常数的通解.

例 求解方程 $\boxed{y''' = e^{3x} - \cos x}$

解 将方程积分三次, 得

$$\boxed{y'' = \frac{1}{3}e^{3x} - \sin x + C_1}$$

$$\boxed{y' = \frac{1}{9}e^{3x} + \cos x + C_1 x + C_2}$$

$$y = \frac{1}{27}e^{3x} + \sin x + C_1' x^2 + C_2 x + C_3$$

最后得到的就是方程的通解.

二、$y'' = f(x, y')$ 型的方程

特点　方程缺 y.

解法　设 $y' = p,\ y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = p'$. 将$p$作为新的未知函数,

则方程变为 $p' = f(x, p)$

这是一个关于变量 x, p 的一阶微分方程.

如果其通解为 $p = p(x, C_1)$,则由 $y' = p(x, C_1)$

再积分一次,可求出原方程的通解

$$y = \int p(x, C_1)\mathrm{d}x + C_2$$

例 解方程 $\begin{cases} y'' = \dfrac{3x^2 y'}{1+x^3} \\ y\big|_{x=0} = 1,\ y'\big|_{x=0} = 4 \end{cases}$

解 因方程中不含未知函数y, 属 $y'' = f(x, y')$ 型

令 $y' = p,\ y'' = p'$, 代入原方程, 得

$$p' = \frac{3x^2 p}{1+x^3}$$

p的可分离变量的一阶方程

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{3x^2}{1+x^3}\mathrm{d}x \Rightarrow \ln|p| = \ln\left|1+x^3\right| + \ln C_1$$

令 $C = \pm C_1 \Rightarrow p = C(1+x^3)$, 由初始条件 $y'\big|_{x=0} = 4$

知C=4, 所以 $y' = 4(1+x^3)$

关于y的可分离变量方程

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{3x^2 y'}{1+x^3} \\ y\big|_{x=0} = 1,\ y'\big|_{x=0} = 4 \end{cases}$$

$$y' = 4(1+x^3)$$

$$\mathrm{d}y = 4(1+x^3)\mathrm{d}x \Rightarrow y = x^4 + 4x + C_2$$

再由初始条件 $y\big|_{x=0} = 1$, 知$C_2 = 1$

故所求解为

$$y = x^4 + 4x + 1$$

对于不含有 y、y'、$\cdots$、$y^{(k-1)}$ 的n阶方程

$$F(x, y^{(k)}, \cdots y^{(n)}) = 0$$

只需作变换,令 $p = y^{(k)}$.

方程就可化为$n-k$阶方程

$$F(x, p, \cdots, p^{(n-k)}) = 0$$

求出通解后,再积分k次,即可求得原方程的通解.

例 解方程 $y^{(5)} - \frac{1}{x} y^{(4)} = 0.$

解 令 $p = y^{(4)}$, 则方程变为 $p' - \frac{1}{x} p = 0,$

可分离变量方程

由分离变量法解得 $p = C_1 x$. 于是

$$y^{(4)} = C_1 x,$$

积分4次

所以原方程的通解为

$$y = C_1 x^5 + C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5$$

三、$y'' = f(y, y')$ 型的方程

特点　方程缺自变量x

解法　设 $y' = \frac{dy}{dx} = p$　　$p = p(y) = p(y(x))$

则 $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$, 方程变成

$p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$.这是关于变量 y , p 的一阶方程.

设它的通解为 $y' = p = \varphi(y, C_1)$. 分离变量并积分,

得通解为 $\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$

例　求方程 $y'' = \dfrac{1+y'^2}{2y}$ 的通解.　　属 $y'' = f(y, y')$ 型

解　设 $y' = p$,　则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 代入原方程

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = \frac{1+p^2}{2y}$$

可分离变量方程

$$\Rightarrow \frac{2p\,\mathrm{d}p}{1+p^2} = \frac{\mathrm{d}y}{y} \Rightarrow \ln(1+p^2) = \ln|y| + \ln C$$

$$\Rightarrow 1+p^2 = C_1 y \Rightarrow p = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$$

即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$

可分离变量方程

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \pm\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} = \pm x + C_2$$

属 $y'' = f(y, y')$ 型

例 求方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

解 设 $y' = p$, 则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 代入原方程

$$y \cdot p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p^2 = 0, \quad \text{即} \quad p\left(y \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p\right) = 0$$

由 $y \cdot \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p = 0$, 可得 $p = C_1 y$, $\therefore \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C_1 y$

原方程通解为 $y = C_2 e^{C_1 x}$

练习 求微分方程 $y^2y''+1=0$ 的积分曲线,使该积分曲线过点 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, 且在该点的切线斜率为2.

解 方程 $y^2y''+1=0$，属 $y''=f(y,y')$ 型

设 $y'=p$, 则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 代入方程, 得

$$y^2p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=-1\Rightarrow\frac{p^2}{2}=\frac{1}{y}+C_1,\ \text{由}\ y'\Big|_{(0,\frac{1}{2})}=2,\ \text{得}\ C_1=0,$$

$$\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm\sqrt{\frac{2}{y}}\Rightarrow\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}=\pm\sqrt{2}x+C_2\Rightarrow C_2=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

所求积分曲线为 $y^{\frac{3}{2}}=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}x+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$

四、小结

三种类型的可降阶的高阶微分方程

解法:

通过代换将其化成较低阶的方程来求解.

作 业

练习册7-5