第八节 二阶常系数非齐次线性微分方程

- $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型
- $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x]$ 型

本节课讨论 $y'' + py' + qy = f(x)$

二阶常系数非齐次线性方程解法

根据线性微分方程解的结构理论,

只要找到对应的齐次方程的通解 Y, 和非齐次方程的一个特解 y^*,即可得到非齐次方程的通解:

$$y = Y + y^*$$

难点 如何求非齐次方程特解?

方法 待定系数法.

本节主要考虑$f(x)$是两种常见形式时，对应特解的求法.

一、$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$型

$y''+py'+qy=P_m(x)e^{\lambda x}$

其中λ是常数，$P_m(x)$是m次多项式

设非齐次方程特解为 $y^*=Q(x)e^{\lambda x}$

求导代入原方程，得

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+\underbrace{(\lambda^2+p\lambda+q)}_{\neq 0}Q(x)=P_m(x)$$

(1)若λ不是特征方程的根

可设 $Q(x)=Q_m(x)$

将$Q_m(x)$代入到上式，确定其系数.

进而得到非齐次方程的特解 $y^*=Q_m(x)e^{\lambda x}$.

$$y'' + py' + qy = P_m(x)e^{\lambda x}$$

$$Q''(x) + \underbrace{(2\lambda + p)}_{\neq 0}Q'(x) + \underbrace{(\lambda^2 + p\lambda + q)}_{= 0}Q(x) = P_m(x)$$

(2)若λ是特征方程的单根

可设 $Q(x) = xQ_m(x)$

将$Q_m(x)$代入到上式，确定其系数

进而得到非齐次方程的特解 $y^* = Q_m(x)e^{\lambda x}$.

$$\boxed{y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)}$$

$$Q''(x) + \underbrace{(2\lambda + p)}_{=0} Q'(x) + \underbrace{(\lambda^2 + p\lambda + q)}_{=0} Q(x) = P_m(x)$$

(3)若λ是特征方程的重根

可设$Q(x) = x^2 Q_m(x)$, 根据上式确定$Q_m(x)$系数.

进而得到非齐次方程的特解

$$y^* = x^2 Q_m(x) e^{\lambda x}$$

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

综上讨论，上述非齐次方程的特解可按如下规则设定:

设 $y^* = x^k e^{\lambda x} Q_m(x)$， $k = \begin{cases} 0 & \lambda\text{不是根} \\ 1 & \lambda\text{是单根} \\ 2 & \lambda\text{是重根} \end{cases}$

$Q_m(x)$的系数由待定系数方法确定.

注 上述结论可推广到n阶常系数非齐次线性微分方程(k是重根次数).

例 求方程 $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$ 的通解.

解 此题 $f(x) = 3x + 1$ 属于 $P_m(x)e^{\lambda x}$ 型.

其中 $m = 1, \lambda = 0$

(1) 求对应齐次方程的通解

特征方程 $r^2 - 2r - 3 = 0$ 特征根 $r_1 = 3,\ r_2 = -1$

对应齐次方程通解 $Y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$

(2) 求非齐次方程的特解

设 $y* = x^{\overset{0}{k}} e^{\overset{0}{\lambda x}} Q_{\underset{1}{m}}(x)$,

λ=0不是特征方程的根, 设 $y^* = b_0 x + b_1$

求方程 $y''-2y'-3y=3x+1$ 的通解.

$$y^*=b_0x+b_1$$

对应齐次方程通解

$$Y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$$

将$y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$ 代入方程, 得

$$-3b_0x-2b_0-3b_1=3x+1 \quad \therefore \begin{cases} b_0=-1 \\ b_1=\dfrac{1}{3} \end{cases},$$

非齐次方程的特解 $y^*=-x+\dfrac{1}{3}$

原方程通解为 $y=Y+y^*$

$$=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}-x+\frac{1}{3}$$

例 求方程$y''-3y'+2y=xe^{2x}$ 的通解.

解 此题 $f(x)=xe^{2x}$ 属于$P_m(x)e^{\lambda x}$ 型.

其中 $m=1,\ \lambda=2$

(1) 求对应齐次方程的通解

特征方程 $r^2-3r+2=0$ 特征根 $r_1=1,\ r_2=2$

对应齐次方程通解 $Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$

(2) 求非齐次方程的特解

$\lambda=2$是特征方程的单根, 设 $y^*=x^?(Ax+B)e^{2x}$

例 求方程 $y''-3y'+2y= x e^{2x}$ 的通解.

对应齐次方程通解
$$Y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$$

$$y^*=x(Ax+B)e^{2x}$$

将 $y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$ 代入方程, 得

$$2Ax+B+2A=x \qquad \therefore \begin{cases} A=\dfrac{1}{2}, \\ B=-1 \end{cases}$$

非齐次方程的特解 $y^*=x(\frac{1}{2}x-1)e^{2x}$

原方程通解为 $y=Y+y^*$

$$=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+x(\frac{1}{2}x-1)e^{2x}$$

练习 (B)是微分方程 $y''-y=e^x+1$ 的一个特解.

$A.\ ae^x+b$ $B.\ axe^x+b$

$C.\ ae^x+bx$ $D.\ axe^x+bx$

提示 根据线性微分方程的性质, 可先求方程

$$y''-y=e^x \qquad y_1^*=xae^x$$

和 $$y''-y=1 \qquad y_2^*=b$$

的特解, 两个解的和就是原方程的特解.

练习 微分方程 $y''-3y'+2y=3x-2e^x$ 的特解 y^* 的形式为 $y^*=($ ***D*** $)$.

A. $(ae^x+b)e^x$　　B. $(ae^x+b)xe^x$

C. $(ax+b)+ce^x$　　D. $(ax+b)+cxe^x$

解 对应的齐次微分方程 $y''-3y'+2y=0$

特征方程 $r^2-3r+2=0$

特征根 $r=1, r=2$

$y''-3y'+2y=3x$　　$y_1^*=ax+b$

$y''-3y'+2y=-2e^x$　　$y_2^*=cxe^x$

二、$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$ 型

$$f(x)=e^{\lambda x}[P_l\cos\omega x+P_n\sin\omega x]$$

用欧拉(Euler)公式:
$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

$$=e^{\lambda x}[P_l\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2}+P_n\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i}]$$

$$=(\frac{P_l}{2}+\frac{P_n}{2i})e^{(\lambda+i\omega)x}+(\frac{P_l}{2}-\frac{P_n}{2i})e^{(\lambda-i\omega)x}$$

$$=\boxed{P(x)e^{(\lambda+i\omega)x}}+\overline{P}(x)e^{(\lambda-i\omega)x}$$

$$f(x)=\boxed{P(x)e^{(\lambda+i\omega)x}}+\overline{P}(x)e^{(\lambda-i\omega)x}$$

设 $y''+py'+qy=P(x)e^{(\lambda+i\omega)x}$，特解 $y_1^*=x^kQ_me^{(\lambda+i\omega)x}$

设 $y''+py'+qy=\overline{P}(x)e^{(\lambda-i\omega)x}$，特解 $y_2^*=x^k\overline{Q}_me^{(\lambda-i\omega)x}$

原方程特解 $y^*=x^ke^{\lambda x}[Q_me^{i\omega x}+\overline{Q}_me^{-i\omega x}]$ 欧拉公式

$$=x^ke^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$$

其中 $R_m^{(1)}(x),R_m^{(2)}(x)$ 是 m 次多项式，$m=\max\{l,n\}$

注 上述结论可推广到 n 阶常系数非齐次线性微分方程.

$$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$$

$$y^*=x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$$

$$m=\max\{l,n\},\quad k=\begin{cases}0 & \lambda\pm i\omega\text{不是根}\\ 1 & \lambda\pm i\omega\text{是单根}\end{cases}$$

这种形式的方程求特解的一般步骤:

1.解特征方程$r^2+pr+q=0$

2.判断$\lambda\pm i\omega$是不是特征方程的根，确定k的取值.

3.求出m,确定$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$的一般形式.

4.将y^*代入到原方程，确定$R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$的系数.

例 求方程 $y'' + y = x\cos 2x$ 的一个特解.

解 这是二阶常系数非齐次线性方程. 且 $f(x)$属于 $e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x\right]$ 型.

$$(\lambda = 0,\quad \omega = 2, P_l(x) = x,\ P_n(x) = 0)$$

分析对应的齐次方程 $y'' + y = 0$

特征方程 $r^2 + 1 = 0$ 特征根 $r = \pm i$

因为$\lambda \pm iw = \pm 2i$不是特征方程的根

设其特解为

$$y^* = x^{\overset{0}{k}} e^{\overset{0}{\lambda} x}[R_{\underset{1}{n}}^{(1)}(x)\cos \overset{2}{\omega} x + R_{\underset{1}{n}}^{(2)}(x)\sin \overset{2}{\omega} x]$$

设其特解为

$$y^* = x^{\overset{0}{k}} e^{\overset{0}{\lambda} x}[R_{\underset{1}{m}}^{(1)}(x)\cos \overset{2}{\omega} x + R_{\underset{1}{m}}^{(2)}(x)\sin \overset{2}{\omega} x]$$

$$= (ax+b)\cos 2x + (cx+d)\sin 2x$$

将 $y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$代入原方程 $y'' + y = x\cos 2x$

$$(-3ax - 3b + 4c)\cos 2x - (3cx + 3d + 4a)\sin 2x = x\cos 2x$$

所以 $-3a = 1 \quad -3b + 4c = 0, -3c = 0, -3d - 4a = 0$

解之 $\quad a = -\dfrac{1}{3}, b = 0, c = 0, d = \dfrac{4}{9}$

原方程的一个特解为 $y^* = -\dfrac{1}{3}x\cos 2x + \dfrac{4}{9}\sin 2x$

第七章主要内容及教学要求

1. 了解微分方程、解、通解、初始条件和特解等概念.

2. 掌握可分离变量的方程及一阶线性方程的解法.

3. 会解齐次方程，

并从中领会用变量代换求解方程的思想.

4. 会用降阶法解下列方程:

$$y^{(n)}=f(x), y''=f(x,y')\text{和}y''=f(y,y').$$

5. 理解二阶线性微分方程解的结构.

6. 掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法,

并了解高阶常系数线性微分方程的解法.

7. 会求自由项形如: $P_m(x)e^{\lambda x}$

的二阶常系数非齐次线性微分方程的特解.

8. 会用微分方程解一些简单的几何和物理问题.

作 业

练习册　7-8

练习 设函数 $y=y(x)$满足微分方程 $\boxed{y''-3y'+2y=2e^x}$,其图形在点(0,1)处的切线与曲线 $y=x^2-x+1$在该点处的切线重合,求函数y的解析表达式.

解 二阶常系数线性非齐次方程

此题 $f(x)=2e^x$属于 $P_m(x)e^{\lambda x}$ 型. $(m=0,\lambda=1)$

(1) 求对应齐次方程的通解

特征方程 $r^2-3r+2=0,$

特征根 $r_1=1,\ r_2=2,$

对应齐次方程通解 $Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$

设函数 $y = y(x)$满足微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$,其图形在点(0,1)处的切线与曲线 $y = x^2 - x + 1$在该点处的切线重合,求函数y的解析表达式.

(2) 求非齐次方程的特解

$\lambda = 1$特征根 $r_1 = 1$

设 $y^* = x^1 A e^x$ (λ=1是单根)

解得 $A = -2$ 即 $y^* = -2xe^x$

所以原方程通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 2xe^x$

(3) 求原方程的特解 (求函数y的解析表达式)

$y = x^2 - x + 1 \Rightarrow y' = 2x - 1$, 且 $y'(0) = -1$,

将点(0,1)的坐标代入通解，得 $1 = C_1 + C_2$

将通解 $\boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 2xe^x}$ 求导，得

$$\boxed{\begin{array}{c} 1 = C_1 + C_2 \\ y'(0) = -1 \end{array}}$$

$$y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} - 2e^x - 2xe^x$$

由题意,得 $y'(0) = C_1 + 2C_2 - 2 = -1$

即 $C_1 + 2C_2 = 1$

联立$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 2C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases}$ 将之代入通解得

$$y = e^x - 2xe^x$$

所以,函数y的解析表达式为 $y = (1-2x)e^x$