第十章　重积分

第一节 二重积分的概念与性质

1. 填空：（1）$\underline{21\pi}$；（2）$\underline{1}$.

2. 根据二重积分的几何意义，确定下列积分的值.

（1）解：所给积分表示半径为a上半球体体积，故

$$\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,d\sigma=\frac{2}{3}\pi a^3.$$

（2）解：$\iint\limits_D (b-\sqrt{x^2+y^2})d\sigma=\pi a^2(b-\frac{1}{3}a)$.

3. 解：$I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dxdy+\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 2}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dxdy+$

$$\iint\limits_{2\le x^2+y^2\le 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dxdy-\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 2}\sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,dxdy-$$

$$\iint\limits_{2\le x^2+y^2\le 4}\sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,dxdy$$

$$\le \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy-0-\iint\limits_{2\le x^2+y^2\le 4}dxdy$$

$$=\pi-[2^2\pi-(\sqrt{2})^2\pi]=\pi-2\pi=-\pi<0.$$

4. 根据二重积分的性质，比较下列积分的大小.

（1）（A）.

解析：D是以$(1,1)$为圆心、$\sqrt{2}$为半径的圆，当$(x,y)\in D$时，

有$0\le x+y\le 4$，于是 $\frac{x+y}{4}\le\sqrt{\frac{x+y}{4}}\le\sqrt[3]{\frac{x+y}{4}}$，

$(x,y)\in D$，但不恒等，因此（A）成立.

（2）（C）.

解析：D_1，D_2是以原点为圆心、半径分别为R和$\sqrt{2}R$的圆，

D_3是边长为$2R$的正方形，于是有$D_1\subset D_3\subset D_2$，因此（C）成立.

5. 利用二重积分的性质，估计下列积分的值.

（1）解：$\frac{7}{6}\pi<\iint\limits_D[3+\cos(x^2+y^2)\pi]d\sigma<\frac{4}{3}\pi$.

（2）解：$4\pi<\iint\limits_D(2+x^5+\frac{x^2y^2}{4+9x^4y^4})d\sigma<\frac{25}{6}\pi$.

第二节 二重积分的计算

1. 填空：（1）$\frac{1}{2}a^4$.（2）$-\frac{2}{5}$.（3）$\int_0^a (a-x)e^{m(a-x)}f(x)dx$.

（4）56π.

2. 选择：（1）D.（2）A.（3）C.（4）B.

3. 计算下列二重积分：

（1）解：$\iint\limits_D \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}d\sigma=\int_0^1\frac{y}{\sqrt{1+y^3}}dy\int_0^{\sqrt{y}}xdx$

$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{y^2}{\sqrt{1+y^3}}dy=\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$.

（2）解：$\iint\limits_D \cos(x+y)dxdy=\int_0^\pi dx\int_x^\pi \cos(x+y)dy$

$=\int_0^\pi[\sin(x+\pi)-\sin 2x]dx=-2$

（3）解：$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}d\sigma=\int_1^2 dy\int_{\frac{1}{y}}^{y}\frac{x^2}{y^2}dx=\frac{1}{3}\int_1^2(y-\frac{1}{y^5})dy=\frac{27}{64}$.

（4）解：$\iint\limits_D \frac{x\sin y}{y}dxdy=\int_0^1\frac{\sin y}{y}dy\int_y^{\sqrt{y}}xdx$

$=\frac{1}{2}\int_0^1(\sin y-y\sin y)dy=\frac{1}{2}(1-\sin 1)$.

4. 画出积分区域，并计算下列二重积分：

（1）解：区域D关于y轴对称，依对称性有

$\iint\limits_D(3x^3+y)dxdy=\iint\limits_D 3x^3dxdy+\iint\limits_D ydxdy=0+\iint\limits_D ydxdy$

$=\iint\limits_D ydxdy=2\iint\limits_{D_1}ydxdy$，其中$D_1$为$D$的第一象限的部分，

故$\iint\limits_D(3x^3+y)dxdy=2\int_0^1 ydy\int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}}dx=\frac{2}{5}$.

（2）解：$\iint\limits_D e^{x+y}dxdy=\int_{-1}^0 e^x dx\int_{-1-x}^{x+1}e^y dy+\int_0^1 e^x dx\int_{x-1}^{1-x}e^y dy$

$=e-\frac{1}{e}$.

（3）解：$\iint\limits_D\frac{e^{xy}}{y^y-1}d\sigma=\int_1^2 dy\int_0^{\ln y}\frac{e^{xy}}{y^y-1}dx$

$=\int_1^2\frac{1}{y^y-1}dy\int_0^{\ln y}e^{xy}dx$

$=\int_1^2\frac{1}{y^y-1}\cdot(\frac{1}{y}e^{xy})\Big|_0^{\ln y}dy$

$$=\int_1^2 \frac{1}{y^y-1}\cdot\frac{1}{y}(y^y-1)dy=\int_1^2\frac{1}{y}dy=\ln 2.$$

5. 改变下列二次积分的积分次序：

（1）解：$\int_0^1 dx\int_{2x}^{x^2+1} f(x,y)dy$

$$=\int_0^1 dy\int_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{\sqrt{y-1}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx.$$

（2）解：$\int_0^{2a} dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy$

$$=\int_0^a dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx+\int_0^a dy\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx$$

$$+\int_a^{2a} dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)dx.$$

（3）解：$\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy+\int_1^4 dx\int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$

$$=\int_{-1}^2 dy\int_{y^2}^{y+2} f(x,y)dx.$$

（4）解：$\int_0^1 dy\int_{1-y}^{1+y^2} f(x,y)dx$

$$=\int_0^1 dx\int_{1-x}^1 f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x-1}}^1 f(x,y)dy.$$

6.

解：所求板的质量

$$m=\iint\limits_D \frac{1}{x}d\sigma=\int_{\frac{1}{2}}^2\frac{1}{x}dx\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x}dy=\int_{\frac{1}{2}}^2\frac{1}{x}\left(\frac{5}{2}-x-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=5\ln 2-3.$$

7. 解：立体在 xoy 面投影区域为 D：$0\le x\le 4$，$0\le y\le 4$，

所求立体体积为

$$V=\iint\limits_D z\,dxdy=\iint\limits_D (x^2+y^2+1)dxdy$$

$$=\int_0^4 dx\int_0^4 (x^2+y^2+1)dy$$

$$=\frac{560}{3}.$$

8. 解：用抛物线 $y=x^2$ 将 D 分成两个子区域 D_1 和 D_2，其中

$D_1:-1\le x\le 1,\ 0\le y\le x^2$，$D_2:-1\le x\le 1,\ x^2\le y\le 2$，

于是 $\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}dxdy=$

$$\iint\limits_{D_1}\sqrt{|y-x^2|}dxdy+\iint\limits_{D_2}\sqrt{|y-x^2|}dxdy$$

$$=2\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,dy+2\int_0^1 dx\int_{x^2}^2\sqrt{y-x^2}\,dy$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4 t dt=\frac{\pi}{2}+\frac{5}{3}.$$

9. 解：（1）$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\tan\theta\sec\theta}^{\sec\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

（2）$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{a\cos\theta}^{2a\cos\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$.

10. 将下列各题中的积分化为极坐标形式的二次积分:

（1）解：两个二次积分所对应的重积分的积分区域分别是

$$D_1: 0\le x\le 1, \sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2},$$

$$D_2: 1\le x\le 2, 0\le y\le\sqrt{4-x^2},$$

两者的并集是环形区域 $0\le\theta\le 2\pi, 1\le r\le 2$ 在第一象限的

部分，于是 $\int_0^1 dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

（2）解：$\int_0^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}dx\int_0^{Rx}f(\frac{y}{x})dy+\int_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^{R}dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}f(\frac{y}{x})dy$

$$=\int_{00}^{\arctan R}d\theta\int_0^R f(\tan\theta)\rho d\rho$$

$$=\frac{R^2}{2}\int_0^{\arctan R}f(\tan\theta)d\theta.$$

11. 利用极坐标计算下列各题：

（1）解：$\iint\limits_D\ln(1+x^2+y^2)d\boldsymbol{\sigma}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\ln(1+\rho^2)\rho d\rho$

$$=\pi(2\ln 2-1).$$

（2）解：$\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}d\boldsymbol{\sigma}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{a\sin\theta}\sqrt{a^2-\rho^2}\rho d\rho$

$$=-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{a\sin\theta}(a^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}}d(a^2-\rho^2)$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{2}{3}(a^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a\sin\theta}d\theta$$

$$=-\frac{a^3}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(|\cos^3\theta|-1)d\theta$$

$$=-\frac{a^3}{3}[2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta-\frac{\pi}{2}]=\frac{a^3}{6}(\pi-\frac{8-5\sqrt{2}}{6}).$$

（3）解：$\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}d\boldsymbol{\sigma}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\pi}^{2\pi}\sin\rho\,\rho d\rho=-6\pi^2$.

（4）解：$\iint\limits_D (x^2+y^2)d\boldsymbol{\sigma}$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} \rho^3 d\rho = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4^4\cos^4\theta - 2^4\cos^4\theta)d\theta$$

$$=60\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta = 120\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta = 120\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{45}{2}\pi .$$

12. 选用适当的坐标计算下列积分:

（1）解：上式内层积分不能直接计算，交换积分次序.

上式两项的积分区域为

$$D_1: 1\le x\le 2, \sqrt{x}\le y\le x ,$$

$$D_2: 2\le x\le 4, \sqrt{x}\le y\le 2 ，\quad D = D_1 + D_2 ,$$

求出交点 $M_1(1,1)$，$M_2(2,2)$，$M_3(4,2)$，于是积分区域为

$D: 1\le y\le 2, y\le x\le y^2$，采用直角坐标计算二重积分，

$$\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x} \sin\frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2} \sin\frac{\pi x}{2y} dy = \iint\limits_D \sin\frac{\pi x}{2y} dxdy$$

$$=\int_1^2 dy\int_y^{y^2} \sin\frac{\pi x}{2y} dx = \frac{4}{\pi^3}(\pi+2) .$$

（2）解：选用直角坐标计算二重积分

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)d\boldsymbol{\sigma} = \int_a^{3a} dy\int_{y-a}^{y} (x^2+y^2)dx$$

$$=\int_a^{3a}\left[\frac{x^3}{3}+xy^2\right]_{y-a}^{y} dy \quad = 14a^4 .$$

（3）解：选用极坐标计算二重积分

$$\iint\limits_D x(y+1)d\boldsymbol{\sigma}$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta\int_1^{2\cos\theta} \rho\cos\theta(\rho\sin\theta+1)\rho d\rho$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta\int_1^{2\cos\theta} (\rho^3\cos\theta\sin\theta+\rho^2\cos\theta)d\rho$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{1}{4}2^4\cos^5\theta\sin\theta-\sin\theta\cos\theta+\frac{8}{3}\cos^4\theta-\frac{1}{3}\cos\theta\right]d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(8\cos^4\theta-\cos\theta)d\theta = \frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4} .$$

（本题亦可用对称性计算）.

（4）解：选用极坐标计算

$$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} d\boldsymbol{\sigma} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_{2\cos\theta}^{\frac{2}{\cos\theta}} \frac{1}{\rho^3}\cdot\rho d\rho$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}(\cos\theta-\frac{1}{\cos\theta})d\theta=-\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}-\ln(\sqrt{2}+1)\right].$$

第三节 三重积分

1. 填空:

（1）$\underline{\frac{1}{8}a^2b^2c^2}$.（2）$\underline{\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\sin\theta}d\rho\int_0^{\sqrt{3}\rho}f(\sqrt{\rho^2+z^2})\rho dz}$.

2. 将下列三重积分化为三次积分：

（1）解：$I=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_1^2 f(x,y,z)dz$.

（2）解：由已给三次积分的积分限可知，积分区域Ω为

$x^2+y^2+(z-1)^2\le 1$，即

$$\Omega:0\le\theta\le 2\pi,0\le\rho\le 1,1-\sqrt{1-\rho^2}\le z\le 1+\sqrt{1-\rho 2},$$

故 $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_{1-\sqrt{1-\rho^2}}^{1+\sqrt{1-\rho^2}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho dz$.

（3）解：积分区域Ω为 $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{3},0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},0\le r\le 1$，

故

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^1 f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi dr$$

3. 利用直角坐标计算下列三重积分 L

（1）解：$\int_1^2 dx\int_1^x dy\int_0^{\frac{\pi}{2xy}}\sin(xyz)dz=-\int_1^2 dx\int_1^x\frac{1}{xy}\cos(xyz)\Big|_0^{\frac{\pi}{2xy}}dy$

$$=\int_1^2 dx\int_1^x\frac{1}{xy}dy=\int_1^2\frac{1}{x}\ln x dx=\frac{1}{2}\ln^2 2.$$

（2）解：

$$\Omega:-1\le x\le 1,\ -\sqrt{1-x^2}\le z\le\sqrt{1-x^2},\ \sqrt{1-x^2-z^2}\le y\le 1$$

$$\iiint_{\Omega}y\sqrt{1-x^2}dxdydz=\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dz\int_{\sqrt{1-x^2-z^2}}^1 y\sqrt{1-x^2}dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\cdot[1-(1-x^2-z^2)]dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}(x^2+z^2)dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}[2x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}]dx$$

$$=2\int_0^1[x^2(1-x^2)+\frac{(1-x^2)^2}{3}]dx=\frac{28}{45}.$$

（3）解：利用“先二后一”法计算.

$$\iiint_\Omega z^2dxdydz=\int_0^c z^2dz\iint_{D_z}dxdy=\int_0^c z^2dz\iint_{0\le\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\le1-\frac{z}{c}}dxdy$$

$$=\int_0^c z^2\cdot\frac{1}{2}a(1-\frac{z}{c})\cdot b(1-\frac{z}{c})dz=\frac{abc^3}{60}.$$

4. 利用柱面坐标计算下列三重积分:

（1）解：由对称性，只要计算在第一卦线Ω_1内的 2 倍即可，

$\Omega_1:0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le\rho\le2a\cos\theta,0\le z\le\frac{\rho^2}{2a}$，所以

$$\iiint_\Omega dv=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}d\rho\int_0^{\frac{\rho^2}{2a}}\rho dz=4a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta$$

$$=\frac{3}{4}\pi a^3.$$

（2）解：$\Omega=\Omega_1+\Omega_2$

$\Omega_1:0\le\theta\le2\pi,0\le\rho\le1,1\le z\le2$，

$\Omega_1:0\le\theta\le2\pi,1\le\rho\le2,\rho\le z\le2$

$$\iiint_\Omega\sqrt{x^2+y^2}dv=\iiint_{\Omega_1}\sqrt{x^2+y^2}dv+\iiint_{\Omega_2}\sqrt{x^2+y^2}dv$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1d\rho\int_1^2\rho^2dz+\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2d\rho\int_\rho^2\rho^2dz$$

$$=\frac{2\pi}{3}+2\pi\int_0^1\rho^2(2-\rho)d\rho=\frac{5\pi}{2}.$$

5[*]. 利用球面坐标计算下列三重积分.

（1）解：$\because\ \Omega:0\le\theta\le2\pi,0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},0\le r\le\frac{1}{\cos\varphi}$，

$$\therefore\iiint_\Omega\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}r\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4\cos^4\varphi}d\cos\varphi=\frac{\pi}{6}(2\sqrt{2}-1).$$

（2）解：$\Omega:0\le\theta\le2\pi,0\le\varphi\le\pi,1\le r\le2$，

（ i ）当$n\ne3$时，

$$\iiint_\Omega\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}}}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_1^2\frac{r^2\sin\varphi}{r^n}dr$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_1^2r^{2-n}dr\ 2\pi\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi}\cdot\left[\frac{r^{3-n}}{3-n}\right]\Bigg|_1^2$$

$$=\frac{4\pi(2^{3-n}-1)}{3-n};$$

（ii）当 $n=3$ 时，

$$\iiint_{\Omega}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}}}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_1^2\frac{r^2\sin\varphi}{r^3}dr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_1^2\frac{1}{r}dr\ 2\pi[-\cos\varphi]_0^{\pi}\cdot[\ln r]\Big|_1^2$$

$$=4\pi\ln 2.$$

6. 选用适当的坐标计算下列三重积分:

（1）解：积分区域 Ω 是由 zox 面、yoz 面及曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $x^2+y^2+z^2=2$ 所围成，用柱面坐标计算，

$$\Omega:0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\rho\le 1,\ \rho\le z\le\sqrt{2-\rho^2},$$

$$\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}z^2dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1d\rho\int_{\rho}^{\sqrt{2-\rho^2}}z^2\rho\,dz$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3}\int_0^1\rho z^3\Big|_{\rho}^{\sqrt{2-\rho^2}}d\rho=\frac{\pi}{6}\int_0^1\rho\left[(2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}-\rho^3\right]d\rho$$

$$=\frac{\pi}{6}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}(2-\rho^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{5}\rho^5\right]_0^1=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{4\sqrt{2}-2}{5}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}-1}{15}\pi.$$

（2）解：用柱面坐标计算.

积分区域 Ω 是关于 $z=0$ 对称且被积函数是关于 z 的偶函数， $\Omega_1:0\le\theta\le 2\pi,0\le\rho\le 1,0\le z\le\sqrt{1-\rho^2}$

$$\iiint_{\Omega}e^{|z|}dv=2\iiint_{\Omega_1}e^zdv=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1d\rho\int_0^{\sqrt{1-\rho^2}}e^z\rho\,dz$$

$$=4\pi\int_0^1\rho(e^{\sqrt{1-\rho^2}}-1)d\rho$$

$$=4\pi\int_0^1\rho e^{\sqrt{1-\rho^2}}d\rho-4\pi\int_0^1\rho\,d\rho$$

$$=4\pi\int_0^1\rho e^{\sqrt{1-\rho^2}}d\rho-2\pi\ \underline{\underline{\sqrt{1-\rho^2}=u}}$$

$$=4\pi\int_0^1ue^udu-2\pi=2\pi.$$

（3）解：用球面坐标计算.

$$\Omega:0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ a\le r\le A,$$

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_a^Ar^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi d\varphi\int_a^Ar^4dr=\frac{4\pi}{15}(A^5-a^5).$$

7. 解：先求两曲面的交线 $\begin{cases}x^2+y^2=az\\x^2+y^2+z^2=4az\end{cases}$，得交线

$$\begin{cases} x^2+y^2=3a^2 \\ z=3a \end{cases}$$

$$\Omega_1: 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\rho\le\sqrt{3}a, \frac{\rho^2}{a}\le z\le 2a+\sqrt{4a^2-\rho^2}$$

$$V_1=\iiint\limits_{\Omega_1} dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}a}d\rho\int_{\frac{\rho^2}{a}}^{2a+\sqrt{4a^2-\rho^2}}\rho\,dz$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{3}a}\rho\left[2a+\sqrt{4a^2-\rho^2}-\frac{\rho^2}{a}\right]d\rho=\frac{37}{6}\pi a^3,$$

而球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi(2a)^3=\frac{32}{3}\pi a^3$，从而

$$V_2=V-V_1=\frac{32}{3}\pi a^3-\frac{37}{6}\pi a^3=\frac{27}{6}\pi a^3,$$

于是，两部分体积之比为 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{37}{27}$.

8. 解：设水面高度为 h cm，

从而容器由 $z=x^2+y^2$ 及 $z=h$ 所围成，

$$\Omega: 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\rho\le\sqrt{h}, \rho^2\le z\le h,$$

容积 $V=\iiint\limits_{\Omega} dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{h}}d\rho\int_{\rho^2}^{h}\rho\,dz=\frac{\pi}{2}h^2$

当 $V_1=8\pi$ cm 时，有 $\frac{\pi}{2}h^2=8\pi\Rightarrow h_1=4$ cm，

当 $V_2=V_1+120=128$ cm 时，有

$\frac{\pi}{2}h^2=128\pi\Rightarrow h_2=16$ cm，从而水面升高了

$16-4=12$ cm.

第四节　重积分的应用

1. 填空：

（1）$\underline{\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)+\sqrt{2}\pi}$.（2）$\underline{(-\frac{a}{2},\frac{8}{5}a)}$.

2. 解：球面 $x^2+y^2+z^2=2a^2$ 与锥面 $z^2=x^2+y^2$ 的交线方程

为 $x^2+y^2=a^2$，

两部分在 xoy 面上的投影区域为：$D: x^2+y^2\le a^2$，　所求

面积为

$$A=2\iint\limits_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=2\iint\limits_D\frac{\sqrt{2}a\,dxdy}{\sqrt{2a^2-x^2-y^2}}$$

$$=2\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{\rho d\rho}{\sqrt{2a^2-\rho^2}}=4\pi a^2(2-\sqrt{2}).$$

3. 解：半球面 $z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$ 与旋转抛物面 $x^2+y^2=2az$ 的交线为 $\begin{cases} x^2+y^2=2a^2 \\ z=a \end{cases}$，

两曲面所围立体在 xoy 上的投影区域为

$D: x^2+y^2\le 2a^2$，所求立体整个表面积为

$$A=A_1+A_2$$

$$=\iint_D \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}}dxdy+\iint_D \frac{\sqrt{a^2+x^2+y^2}}{a}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2-\rho^2}}\rho d\rho+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{\sqrt{a^2+\rho^2}}{a}\rho d\rho$$

$$=2\pi\left[-\frac{\sqrt{3}a}{2}\cdot 2\sqrt{3a^2-\rho^2}\right]_0^{\sqrt{2}a}+2\pi\left[\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(a^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{2}a}$$

$$=\frac{16}{3}\pi a^2.$$

4. 解：设接上去的均匀薄片长度为 b，则有

$$0=\frac{\iint_D y d\sigma}{\iint_D d\sigma}=\frac{\int_{-R}^{R}dx\int_{-b}^{\sqrt{R^2-x^2}}ydy}{\frac{\pi R^2}{2}+2Rb}=\frac{\frac{2}{3}R^3-b^2R}{\frac{\pi R^2}{2}+2Rb},$$

解之得 $b=\dfrac{\sqrt{6}}{3}R$.

5. 解：设立方体密度为 $\mu=k(x^2+y^2+z^2)$，k 为常数，于是

$$M=\iiint_\Omega \mu dv=\int_0^1dx\int_0^1dy\int_0^1k(x^2+y^2+z^2)dz=k,$$

$$M_{yz}=\iiint_\Omega x\mu dv=\int_0^1dx\int_0^1dy\int_0^1x\cdot k(x^2+y^2+z^2)dz=\frac{7}{12}k,$$

$\bar{x}=\dfrac{M_{yz}}{M}=\dfrac{7}{12}$，同理可求得 $\bar{y}=\dfrac{7}{12}$，$\bar{z}=\dfrac{7}{12}$，于是质心坐标为 $(\dfrac{7}{12},\dfrac{7}{12},\dfrac{7}{12})$.

6. 解：$I(t)=\iint_D(x-t)^2dxdy=\int_1^e dx\int_0^{\ln x}(x-t)^2dy$

$$=\int_1^e(x-t)^2\ln x dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_1^e\ln x d(x-t)^3$$

$$=\frac{1}{3}(x-t)^3\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{3}\int_1^e(x-t)^3\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{1}{3}(e-t)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2t+3xt-t^3\ln x\right)\Bigg|_1^e$$

$$=t^2-\frac{1}{2}(e^2+1)t+\frac{2}{9}e^2+\frac{1}{9},$$

令 $I'(t)=0$，即 $2t-\frac{1}{2}(e^2+1)=0$，得 $t=\frac{1}{4}(e^2+1)$，

又 $I''(t)=2>0$，所以当 $t=\frac{1}{4}(e^2+1)$ 时，$I(t)$ 最小.

7．解：曲线 $y=f(x)$ 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转曲面为

$$f(x)=\sqrt{y^2+z^2},$$

设 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，则曲面在柱面坐标系下的方程为

$$\rho=f(x),$$

于是 $I_x=\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)dxdydz$

$$=\int_a^b dx\iint\limits_{D_{yz}}\rho^2\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_a^b dx\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{f(x)}\rho^3 d\rho$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_a^b f^4(x)dx.$$

第十章　自测题

1. 填空：

（1）$\underline{\frac{1}{2}(1-e^{-4})}$.（2）$\underline{\frac{1}{12}}$.（3）$\underline{\frac{2}{7}}$.（4）$\underline{\int_0^1 dz\int_z^1 dy\int_{z-y}^{1-y}f(x,y,z)dx}$.

（5）$\underline{=\frac{4}{3}\pi}$.

2. 选择：

（1） A. （2） C.（3） C .（4） A.（5） B.

3. 计算下列二重积分：

（1）解：$D:-\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{3},\sqrt{2}\le\rho\le 3$，

$$\iint\limits_D\left(\frac{y^2}{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+y^2-1}}\right)d\sigma$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\sqrt{2}}^3\left(\frac{\rho^2\sin^2\theta}{\rho\cos\theta}+\frac{1}{\sqrt[3]{\rho^2-1}}\right)\rho d\rho$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}d\theta\int_{\sqrt{2}}^3\rho^2 d\rho+2\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\sqrt{2}}^3\frac{1}{\sqrt[3]{\rho^2-1}}\rho d\rho$$

$$=\frac{2(27-2\sqrt{2})}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\sqrt{2}}^3(\rho^2-1)^{-\frac{1}{3}}d(\rho^2-1)$$

$$=\frac{2(27-2\sqrt{2})}{3}\left[\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]+\frac{3}{2}\pi.$$

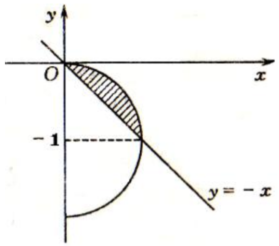
（2）解：$\iint\limits_D(2+|x-y|)d\sigma=\iint\limits_D 2d\sigma+\iint\limits_D|x-y|d\sigma$

$$=2\cdot\frac{\pi}{4}+\iint\limits_{D_1}(x-y)d\sigma+\iint\limits_{D_2}(y-x)d\sigma$$

$$=\frac{\pi}{2}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1(\cos\theta-\sin\theta)\rho^2d\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(\sin\theta-\cos\theta)\rho^2d\rho$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1).$$

(3) 解：利用极坐标计算，积分区域如图所示，



$$\int_0^1 dx\int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}-1}\frac{dy}{\sqrt{(x^2+y^2)(4-x^2-y^2)}}$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta\int_0^{-2\sin\theta}\frac{\rho d\rho}{\rho\sqrt{4-\rho^2}}$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta\int_0^{-2\sin\theta}\frac{d\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0\left[\arcsin\frac{\rho}{2}\right]_0^{-2\sin\theta}d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0\arcsin[\sin(-\theta)]d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0(-\theta)d\theta=\frac{\pi^2}{32}.$$

4. 解：交换积分次序

$$I=\int_0^2 dy\int_y^2\sqrt{(2-x)(2-y)}f'''(y)dx$$

$$=\int_0^2\left[-\frac{2}{3}\sqrt{(2-x)^3(2-y)}f'''(y)\right]_y^2 dy$$

$$=\int_0^2\frac{2}{3}(2-y)^2 f'''(y)dy$$

$$=\frac{2}{3}(y-2)^2 f''(y)\Big|_0^2-\int_0^2\frac{4}{3}(y-2)f''(y)dy$$

$$=-\frac{8}{3}f''(0)-\left[\frac{4}{3}(y-2)f'(y)\right]_0^2+\int_0^2\frac{4}{3}f'(y)dy$$

$$=-\frac{8}{3}f''(0)-\frac{8}{3}f'(0)+\frac{4}{3}[f(2)-f(0)]=6.$$

5. 解：设 $M(x_0,y_0,z_0)$ 是抛物面上任意一点，则过此点的切平面方程为 $z=2x_0x+2y_0y+[1-(x_0^2+y_0^2)]$，

切平面与抛物面及圆柱面所围立体在 xoy 面上投影为

$D:(x-1)^2+y^2\le 1$，其立体体积

$$V=\iint_D\{(x^2+y^2+1)-[2x_0x+2y_0y+(1-x_0^2-y_0^2)]\}dxdy$$

$$=\iint_D(x_0^2+y_0^2)dxdy+\iint_D(x^2+y^2)dxdy-2\iint_D(x_0x+y_0y)dxdy$$

$$=(x_0^2+y_0^2)\pi+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^3d\rho$$

$$-2x_0\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\cos\theta d\rho$$

$$=(x_0^2+y_0^2)\pi+\frac{3}{2}\pi-2x_0\pi\ ,$$

令 $\dfrac{\partial V}{\partial x_0}=2x_0\pi-2\pi=0$，$\dfrac{\partial V}{\partial y_0}=2y_0\pi=0$，

得惟一驻点 $(1,0)$，此时切点为 $M(1,0,2)$，切平面方程为

$z=2x$，最小体积为 $V_{\min}=V(1,0)=\dfrac{\pi}{2}$.

6. 证：由“先二后一”法，

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le1}f(z)dxdydz=\int_{-1}^1f(z)\iint_{x^2+y^2\le1-z^2}d\sigma=\int_{-1}^1f(z)\cdot\pi(1-z^2)dz$$

$$=\pi\int_{-1}^1f(u)(1-u^2)du\ ;$$

由对称性知，

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le1}(z^4+z^2\sin^3z)dxdydz=\iiint_{x^2+y^2+z^2\le1}z^4dxdydz$$

$$=\pi\int_{-1}^1u^4(1-u^2)du=2\pi\int_0^1(u^4-u^6)du=\frac{4\pi}{35}.$$

7. 解：用上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 将积分域 Ω 分成上下两部

分，分别记为 Ω_1 和 Ω_2，则

$$\iiint_\Omega|\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1|dv=\iiint_{\Omega_1}(\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1)dv$$

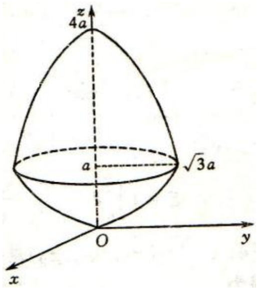
$$+\iiint_{\Omega_2}(1-\sqrt{x^2+y^2+z^2})dv$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_1^{\frac{1}{\cos\varphi}}(r-1)r^2\sin\varphi dr+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^1(1-r)r^2\sin\varphi dr$$

$$=\frac{\pi}{12}(3\sqrt{2}-4)+\frac{\pi}{12}(2-\sqrt{2})=\frac{\pi}{6}(\sqrt{2}-1).$$

8. 解：如图，采用“先二后一”法，

$$V=\int_0^a\pi(4az-z^2)dz+\int_a^{4a}\pi(4a^2-az)dz=\frac{37}{6}\pi a$$

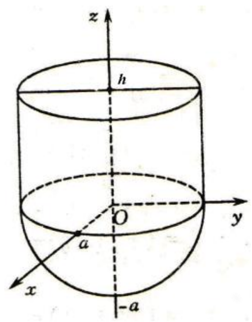


9. 解：设拼接圆柱体的高为h，

依题意知，应有重心坐标，$\bar{x}=0$，$\bar{y}=0$，$\bar{z}=0$，重心$M(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$

$$\bar{z}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega} zdv=\frac{1}{V}\left[\int_{-a}^{0} z(a^2-z^2)dz+\int_{0}^{h} z\pi a^2 dz\right]$$

$$=\frac{1}{V}\left(\frac{1}{2}\pi a^2h^2-\frac{1}{4}\pi a^4\right),$$



令 $\bar{z}=0$，得 $h=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，所求圆柱体的高为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

10. 考研题练练看：

（1）$\underline{\dfrac{2}{3}}$.　（2）$\underline{4\ln 2}$.　（3）$\underline{\dfrac{7}{12}}$.（4）$\underline{\dfrac{4\pi}{15}}$.

（5） D .（6）B. （7） A. （8）D. （9） D.

（10）解：$I=\iint\limits_{D} r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}drd\theta$

$$=\iint\limits_{D} r\sin\theta\sqrt{1-r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta}rdrd\theta$$

$$=\iint\limits_{D} y\sqrt{1-(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}dy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2+y^2}d(1-x^2+y^2)$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1[1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]dx=\frac{1}{3}-\frac{3\pi}{16}.$$

（11）解：积分区域$D=D_1+D_2$，其中

$$D_1=\{(x,y)\,|\,0\le y\le 1,\sqrt{2}y\le x\le\sqrt{1+y^2}\},$$

$$D_2=\{(x,y)\,|\,-1\le y\le 0,-\sqrt{2}y\le x\le\sqrt{1+y^2}\},$$

$$\iint\limits_{D}(x+y)^3dxdy=\iint\limits_{D}(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)dxdy$$

$$=\iint_D (3x^2y+y^3)dxdy+\iint_D (x^3+3xy^2)dxdy,$$

因为区域D关于x轴对称，被积函数$3x^2y+y^3$是y的奇函数，

所以 $\iint_D (3x^2y+y^3)dxdy=0$，

$$\iint_D (x+y)^3dxdy=\iint_D (x^3+3xy^2)dxdy$$

$$=2\iint_{D_1}(x^3+3xy^2)dxdy$$

$$=2\int_0^1 dy\int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}}(x^3+3xy^2)dx=\frac{14}{15}.$$

（12）解：令$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$，则$\theta\in[0,\pi]$，

$$\iint_D xyd\sigma=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{1+\cos\theta}\rho\cos\theta\rho\sin\theta\rho d\rho$$

$$=\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^{1+\cos\theta}\rho^3d\rho$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta(1+\cos\theta)^4d\theta$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos\theta(1+\cos\theta)^4d\cos\theta\qquad（令 t=\cos\theta）$$

$$=-\frac{1}{4}\int_1^{-1}t(1+t)^4dt=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}t(1+t)^4dt=\frac{16}{15}.$$

（13）解：曲线$y=\sqrt{x}$与$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$的交点为$(1,1)$，故积分区域

为$D=\{(x,y)\,|\,0<x<1,\sqrt{x}<y<\frac{1}{\sqrt{x}}\}$，所以

$$\iint_D e^xxydxdy=\int_0^1xe^xdx\int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}ydy=\int_0^1xe^x\frac{1}{2}(\frac{1}{x}-x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(e^x-x^2e^x)dx=\frac{1}{2}.$$

（14）解：根据二重积分的计算法

$$\iint_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy=\int_0^1x\left(\int_0^1yf''_{xy}(x,y)dy\right)dx,$$

$$\int_0^1yf''_{xy}(x,y)dy=\int_0^1yd_y(f'_x(x,y)$$

$$=yf'_x(x,y)\Big|_{y=0}^{y=1}-\int_0^1f'_x(x,y)dy=f'_x(x,1)-\int_0^1f'_x(x,y)dy$$

$$=-\int_0^1f'_x(x,y)dy，于是，$$

$$原式=\int_0^1x\left(-\int_0^1f'_x(x,y)dy\right)dx$$

$$=-\int_0^1\left(\int_0^1xf'_x(x,y)dx\right)dy=-\int_0^1\left(\int_0^1xdf(x,y)\right)dy$$

$$=-\int_0^1\left(xf(x,y)\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 f(x,y)dx\right)dy$$

$$=-\int_0^1\left(f(1,y)-\int_0^1 f(x,y)dx\right)dy=\iint_D f(x,y)dxdy=a\,.$$

（15）解：由对称性可得

$$\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy=\iint_D \frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D \frac{(x+y)\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2 r\sin\pi r dr$$

$$=-\frac{3}{4}.$$

（16）解：$\iint\limits_{D_t} f'(x+y)dxdy=\iint\limits_{D_t} f(t)dxdy$

$$\Rightarrow\quad \int_0^t dx\int_0^{t-x} f'(x+y)dy=\frac{1}{2}t^2 f(t)$$，另外，

$$\iint_{D_t} f'(x+y)dxdy=\int_0^t dx\int_0^{t-x} f'(x+y)dy$$

$$=\int_0^t[f(x+y)]_{y=0}^{y=t-x}dx=\int_0^t[f(t)-f(x)]dx$$

$$=tf(t)-\int_0^t f(x)dx\,,$$

即　$tf(t)-\int_0^t f(x)dx=\frac{1}{2}t^2 f(t)$，两边关于$t$求导，得

$$f(t)+tf'(t)-f(t)=tf(t)+\frac{1}{2}t^2 f'(t)\,,$$

$$\Rightarrow\quad f'(t)(t-\frac{1}{2}t^2)=tf(t)\,,$$

$$\Rightarrow \frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{t}{t-\frac{1}{2}t^2}=\frac{1}{1-\frac{t}{2}}\ (t\neq 0)\,,$$

$$\Rightarrow \ln|f(t)|=-2\ln|1-\frac{t}{2}|+\ln C\,,$$

$$f(t)=\frac{C}{(1-\frac{t}{2})^2}\,,\quad f(0)=1\Rightarrow C=2\,,$$

$$f(t)=\frac{2}{(1-\frac{t}{2})^2}=\frac{8}{(2-t)^2}$$，则

$$f(x)=\frac{8}{(2-x)^2}\,.$$

（17）解：（i）过点 $A(1,0,0)$， $B(0,1,1)$ 两点直线方向向量为

$\vec{s}=(-1,1,1)$，直线方程为$\frac{x-0}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$

$\Rightarrow\begin{cases}x=1-z\\ y=z\end{cases}$，直线$L$绕$z$旋转一周的曲面方程为

$\Sigma:x^2+y^2=(1-z)^2+z^2\Rightarrow\ \Sigma:x^2+y^2=2z^2-2z+1$；

（ii）显然$\bar{x}=0$，$\bar{y}=0$，

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz}{\iiint\limits_{\Omega}dxdydz}$$

$$=\frac{\int_0^2 zdz\iint\limits_{x^2+y^2\le 2z^2-2z+1}dxdy}{\int_0^2 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 2z^2-2z+1}dxdy}$$

$$=\frac{\pi\int_0^2 z(2z^2-2z+1)}{\pi\int_0^2(2z^2-2z+1)dz}=\frac{7}{5},$$

形心坐标　$(0,0,\frac{7}{5})$.