set

2021年11月2日　19:29

左复合右复合：就是挨个找t，记住定义就行
P(A)就是A的子集

自反对称画个矩阵看，传递直接在原表达式上找

题 1. 给定 $A=\{1,2,3,4\}$ 和 A 上的关系 $R=\{\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle\}$，求：$R$ 的自反闭包、对称闭包及传递闭包.

解： $r(R)=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle\}$

$s(R)=\{\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle\}$

$t(R)=\{\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle\}$

由求自反闭包的过程可以得到：$r(R)=R\cup I_A$
上下界那里是在别的集合里求的

5. 设集合 $A=\{a,b,c,d\}$，R 是集合 A 上的二元关系，

$R=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle\}$ 问：

（1）R 具有什么性质？（自反、反自反、对称、反对称、传递关系）

（2）求 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$

答案：（1）自反，对称，传递.

（2）$r(R)=R$, $s(R)=R$, $t(R)=R$.

R 在 A 上自反 $\Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow\langle x,x\rangle\in R)$

R 在 A 上反自反 $\Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow\langle x,x\rangle\notin R)$

R 在 A 上对称 $\Leftrightarrow \forall x\forall y(x,y\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R\rightarrow\langle y,x\rangle\in R)$

R 在 A 上反对称 $\Leftrightarrow \forall x\forall y(x,y\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in R\rightarrow x=y)$

R 在 A 上传递 $\Leftrightarrow \forall x\forall y\forall z(x,y,z\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in R\rightarrow\langle x,z\rangle\in R)$

7. 设 R 是集合 $A=\{1,2,\ldots,10\}$ 上模 3 的同余关系，

则 $[2]_R=$ ________.

答案：$\{2,5,8\}$

8. 集合 A 的基数是3，则 A 有________个不同的

划分.

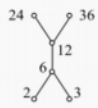
答案：5.

上界和上确界

设 $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ 是偏序集，B 是 A 的任何一个子集，若存在元素 $a\in A$，使得

对任意 $x\in B$，满足 $x\preccurlyeq a$，则称 a 为 B 的上界.

若元素 $a'\in A$ 是 B 的上界，元素 $a\in A$ 是 B 的任何一个上界，若均有 $a'\leqslant a$，则称 a' 为 B 的最小上界或上确界.



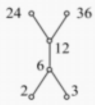
	{6, 12}	{2, 3}	{24, 36}	{2, 3, 6, 12}
上界	12, 24, 36	6, 12, 24, 36	无	12, 24, 36
上确界	12	6	无	12

下界和下确界

设 $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ 是偏序集，B 是 A 的任何一个子集，若存在元素 $a\in A$，使得

对任意 $x\in B$，满足 $a\preccurlyeq x$，则称 a 为 B 的下界.

若元素 $a'\in A$ 是 B 的下界，元素 $a\in A$ 是 B 的任何一个下界，若均有 $a\leqslant a'$，则称 a' 为 B 的最大下界或下确界.



	{6, 12}	{2, 3}	{24, 36}	{2, 3, 6, 12}
下界	2, 3, 6	无	2, 3, 6, 12	无
下确界	6	无	12	无

10. 设 $A=\{a,b,c,d\}$，A 上的等价关系

$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle\}\cup I_A$，则对应于 R 的 A 的划分是（　　）.

A. $\{\{a\},\{b,c\},\{d\}\}$　　B. $\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$

C. $\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$　　D. $\{\{a,b\},\{c,d\}\}$

答案：D

11. 假定 A 是所有正整数序对构成的集合，R 是 A

上的关系，定义为：

$$\langle a,b\rangle R\langle d,c\rangle \Leftrightarrow a+d=b+c$$

证明 R 是 A 上等价关系.

答案：证明：

（1）自反性

设 $a=b=c=d$

则 $a+d=b+c \Leftrightarrow a+a=a+a$

$\therefore \langle a,a\rangle R\langle a,a\rangle$

即 R 具有自反性.

（2）对称性

设 $b=d, a=c$

则 $a+d=b+c \Leftrightarrow a+b=b+a$

$\therefore \langle a,b\rangle R\langle b,a\rangle$

即 R 具有对称性.

（3）传递性

设 $d+e=c+f$　　①

则 $\langle d,c\rangle R\langle e,f\rangle$

又 $\because a+d=b+c$　　②

由①—②得：

由①—②得：

$c+f-b-c=d+e-a-d$

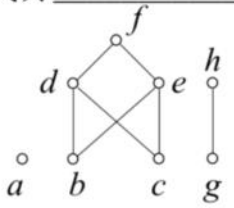
化简，$a+f=b+e$

$\therefore \langle a,b\rangle R\langle e,f\rangle$

即 R 具有传递性.

综上，R 是 A 上等价关系.

13. 已知偏序集$\langle A,R\rangle$的哈斯图如下图所示，则关系R的的表达式为______________.



答案：$I_A\cup\{\langle b,d\rangle,\langle b,e\rangle,\langle b,f\rangle,\langle c,d\rangle,\langle c,e\rangle,$

$\langle c,f\rangle,\langle d,f\rangle,\langle e,f\rangle,\langle g,h\rangle\}$

题 1. 设$A=\{a,b,c\}$，A上的二元运算$*$、$\circ$，如下表所示，求出关于$*$、$\circ$运算的单位元、零元和所有可逆元素的逆元.

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	b
c	c	b	c

解：单位元是a，没有零元，且$a^{-1}=a$，$b^{-1}=c$，$c^{-1}=b$.

单位元是a，零元是b，只有a有逆元，$a^{-1}=a$.

题 1：半群、群和独异点的关系是______________.

答案：群$\subseteq$独异点$\subseteq$半群

4. 集合$A=\{0,1,2,3,4\}$上的代数运算$\otimes$的运算表如下，求关于运算$\otimes$的幺元、零元和所有可逆元.

答案：幺元：1.

$\otimes$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

幺元：乘自己是别人
零元：乘别人是自己
逆元：看怎么×是幺元

8. 已知$Q^*=Q-\{0\}$，Q是有理数集，$\forall m,n\in Q^*$，

$n*m=\frac{1}{7}nm$，证明$(Q^*,*)$是群.

答案： 证明：

（1）封闭

由题意，$0\notin Q^*$,m,n均不为零.

$\therefore n*m=\frac{1}{7}mn\neq 0$.

即$n*m\in Q^*$，满足封闭性.

（2）设$\forall x\in Q^*$

$(n*m)*x=\frac{1}{7}nm*x=\frac{1}{49}nmx$

$n*(m*x)=n*\frac{1}{7}mx=\frac{1}{49}nmx$

$\therefore (n*m)*x=n*(m*x)$

即满足结合性.

$(Q^*,*)$是半群.

（3）该运算的幺元是7

$\therefore (Q^*,*)$是独异点.

（4）对于$\forall x$，均存在逆元x^{-1}

综上，$(Q^*,*)$是群.

5. 无向图G具有生成树，当且仅当______. G的所有生成树中____________的生成树称为最小生成树.

答案：G是连通图，权最小

2) **如果能将无向图G画在平面上使得除顶点处外无边相交，则称G为可平面图，简称为平面图.**

a) K_1（平凡图），K_2，K_3，K_4都是平面图，K_5-e（K_5删除任意一条边）也是平面图，完全二部图$K_{1,n}(n\geqslant 1)$，$K_{2,n}(n\geqslant 2)$也都是平面图.

b) K_5和$K_{3,3}$，它们都是非平面图.

2. 欧拉公式

连通平面图G的顶点数、边数和面数分别为n,m和r，则有$n-m+r=2$.

题 1. 设G是连通平面图，有5个顶点，6个面，则G的边数是（ ）.

$A.5$条　　$B.6$条　　$C.9$条　　$D.11$条

答案： C

题 2. 图G是一个简单的连通平面图，顶点数为8，其无限面的次数为5，其余面都为三角形，（次数为3），计算平面图的边数和面数.

解： 设平面图G的边数为m，面数为r.

$$\begin{cases}8-m+r=2\\5+3(r-1)=2m\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=16\\r=10\end{cases}$$

因此，平面图G的边数为16，面数为10.

设G是$n(n\geqslant 3)$阶m条边的简单平面图，则$m\leqslant 3n-6$.

注： 一个简单连通图，若不满足$m\leqslant 3n-6$，则一定是非平面图，但满足该不等式的简单连通图未必是平面图.

题 1. 设图G有V个结点e条边，当$V>3$，若不满足$e\leqslant 3V-6$，它一定不是平面图.（ ）

答案： 正确

4. 图G是一个简单且连通的平面图，顶点数为11，其无限面的次数为8，其余有限面的次数都为6，计算平面图G的边数和面数.

答案：设平面图G的边数为m，面数为r.

$$\begin{cases} 11 - m + r = 2 \\ 8 + 6(r-1) = 2m \end{cases}$$

解得：$\begin{cases} m = 13 \\ r = 4 \end{cases}$