线性代数第一、二章测验

班级________姓名________学号_________成绩_______

1．设$D(x)=\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & x^3\\1 & 2 & 4 & 8\\1 & 3 & 9 & 27\\1 & 4 & 16 & 64\end{vmatrix}$，求出$D(x)=0$的全部根

解：$D(x)=(2-x)(3-x)(4-x)(3-2)(4-2)(4-3)=0$，

$x=2,x=3,x=4$

2. $\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\0 & 1 & -1\\-2 & 0 & 0\end{pmatrix}$，求$A$;

$2A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\0 & 1 & -1\\-2 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

解：$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\0 & 1 & -1\\-2 & 0 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & A_1\\A_2 & 0\end{pmatrix}$

$A=\left(A^{-1}\right)^{-1}=2\begin{pmatrix}0 & A_2^{-1}\\A_1^{-1} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\1 & 3 & 0\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

3．若方阵A满足$A^2=A$且$A\neq E$，E是单位矩阵,

试证明A不可逆.

证明：(反证法）假设A可逆，则A^{-1}存在，则由

$A^2=A\Rightarrow A^{-1}A^2=A^{-1}A\Rightarrow A=E$，这与$A\neq E$矛盾，所以假设不成立，即$A$不可逆.

错误证法(1):

$$A^2 = A \Rightarrow A(A-E)=0 \Rightarrow |A(A-E)|=0 \Rightarrow |A||A-E|=0$$

$\because A \neq E \Rightarrow |A-E| \neq 0$

$\therefore |A|=0$,故A不可逆.

$A \neq E \Rightarrow |A-E| \neq 0$ 错

反例: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

而 $|A-E| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

错误证法(2):

$A^2 = A \Rightarrow A(A-E)=0$

$\because A \neq E \Rightarrow A-E \neq 0$

$\therefore A=0$,故A不可逆.(矩阵乘法有非零的零因子)

4.已知 A,B 为 4 阶方阵，且$|A|=-2$，$|B|=3$，求

(1) $|5AB| = 5^4|A||B| = -6\times 5^4 = -3750$；

(2) $|-AB^T| = (-1)^4|A||B^T| = -6$；

(3) $|(AB)^{-1}| = |B^{-1}A^{-1}| = |B^{-1}||A^{-1}| = -\dfrac{1}{6}$；

(4) $|A^{-1}B^{-1}| = |A^{-1}||B^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}\bullet\dfrac{1}{|B|} = -\dfrac{1}{6}$；

(5) $|((AB)^T)^{-1}| = |((AB)^{-1})^T| = |(AB)^{-1}| = -\dfrac{1}{6}$

5. (1) 设 A 是方阵且 $A^2+A-8E=0$，E 是单位矩阵，证明：$A-2E$ 可逆；

(2) 对满足 (1) 中条件的 A，设矩阵 X 与之具有关系：

$$AX+2(A+3E)^{-1}A=2X+2E\text{，求 }X.$$

(1) 证：$\because A^2+A-8E=0 \Leftrightarrow A^2+A-6E=2E$

$$\Leftrightarrow (A+3E)(A-2E)=2E$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{A+3E}{2}\right)(A-2E)=E$$

$\therefore A-2E$ 可逆，$(A-2E)^{-1}=\dfrac{A+3E}{2}$；

(2) $\because AX+2(A+3E)^{-1}A=2X+2E$

$$\therefore AX-2X=2E-2(A+3E)^{-1}A \Leftrightarrow (A-2E)X=2E-2(A+3E)^{-1}A$$

$$\Leftrightarrow X=(A-2E)^{-1}2E-(A-2E)^{-1}2(A+3E)^{-1}A$$

又 $(A-2E)^{-1}=\dfrac{A+3E}{2}$，所以 $\Leftrightarrow X=A+3E-A=3E$

6. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{C_{i+1}+C_i} \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n(n+1)\prod_{i=1,\ldots,n} a_i$$

7. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\\1&0&-1&2\\5&1&-1&6\end{vmatrix}$，求$4A_{41}+3A_{42}+2A_{43}+A_{44}$ 其中A_{ij}是A的代数余子式．$i=1,2,3,4;\quad j=1,2,3,4$

解：

$$4\boldsymbol{A}_{41}+3\boldsymbol{A}_{42}+2\boldsymbol{A}_{43}+\boldsymbol{A}_{44}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\\1&0&-1&2\\4&3&2&1\end{vmatrix}=0$$

8. 已知 $A=\begin{pmatrix}-4&-3&1\\-5&-3&1\\6&4&-1\end{pmatrix}$，且 $A^2-AB=E$，E是单位矩阵,求B．

解：$\because A^2-AB=E,\therefore A(A-B)=E$

所以A可逆且$A^{-1}=A-B$，则$B=A-A^{-1}$

又 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*=\dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&1\\2&2&3\end{pmatrix}$,

故 $B=A-A^{-1}=\begin{pmatrix}-5&-2&1\\-4&-5&0\\4&2&-4\end{pmatrix}$。