第七节 常系数齐次线性微分方程

- 二阶常系数齐次线性方程定义
- 二阶常系数齐次线性方程解法
- n阶常系数齐次线性方程解法

一、二阶常系数齐次线性方程定义

在二阶齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (1)$$

中，如果 y'、y的系数$P(x), Q(x)$均为常数，

即(1)式成为 $y'' + py' + qy = 0 \quad (2)$

其中p, q为常数, 称(2)为二阶常系数齐次线性微分方程.

如果p, q不全为常数，称(2)为二阶变系数齐次线性微分方程.

二、二阶常系数齐次线性方程解法

——— 特征方程法

$y'' + py' + qy = 0$ 二阶常系数齐次线性方程

设解为 $y = e^{rx}$，其中r为待定常数. 将其代入方程, 得

$$(r^2 + pr + q)e^{rx} = 0$$

$\because e^{rx} \neq 0$, 故有 $r^2 + pr + q = 0$ 特征方程

特征根 $r_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$

$r^2+pr+q=0$ 特征方程

特征根 r 的不同情况决定了方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解的不同形式.

※有两个不相等的实根 $(\Delta>0)$

$$r_1=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2},\quad r_2=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2},$$

两个特解线性无关

$$y_1=e^{r_1x},\quad y_2=e^{r_2x},\quad \frac{y_1}{y_2}=e^{(r_1-r_2)x}\neq \text{常数}$$

得齐次方程的通解为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

※有两个相等的实根 $(\Delta = 0)$

$$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2},$$ 一特解为 $y_1 = e^{r_1 x}$,

还需要求另一个特解 y_2, 且 $\boxed{\frac{y_2}{y_1} \neq \text{常数}}$

设 $y_2 = u(x)e^{r_1 x}$, 其中$u(x)$为待定常数.

将 y_2， y_2'， y_2''代入到方程 $y'' + py' + qy = 0$, 化简得

$$u'' + \underbrace{(2r_1 + p)}_{=0}u' + \underbrace{(r_1^2 + pr_1 + q)}_{=0}u = 0,$$

知 $u'' = 0$, 取 $u(x) = x$, 则 $y_2 = xe^{r_1 x}$,

得齐次方程的通解为$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x} = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$

※有一对共轭复根 $(\Delta < 0)$ $r_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{4q - p^2}\, i}{2}$,

$$r_1 = \alpha + i\beta, \quad r_2 = \alpha - i\beta,$$

$$y_1 = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) \qquad y_2 = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

y_1, y_2为方程 $y'' + py' + qy = 0$的两个线性无关的解.

为了得到实数形式的解,

用欧拉(Euler)公式:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

重新组合

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

仍然是原方程的解

$$\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2} \neq 常数$$

得齐次方程的通解为

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

总之 二阶常系数齐次线性方程求解 $y'' + py' + qy = 0$

(1) 写出相应的特征方程 $r^2 + pr + q = 0$

(2) 求出特征根

(3) 根据特征根的不同情况,得到相应的通解

特征根的情况	通解的表达式
实根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
实根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

由常系数齐次线性方程的特征方程的根确定其通解的方法称为**特征方程法**.

例 求方程 $y''-2y'-3y=0$ 的通解.

解 特征方程 $r^2-2r-3=0$

特征根 $r_1=-1, r_2=3$

故所求通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$$

例 求方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解.

解 特征方程 $r^2+2r+5=0$

特征根 $r_{1,2}=-1\pm 2i$

故所求通解为

$$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$$

例 解初值问题 $\begin{cases} 16y'' - 24y' + 9y = 0, \\ y\big|_{x=0} = 4, \quad y'\big|_{x=0} = 2. \end{cases}$

解 特征方程 $16r^2 - 24r + 9 = 0$

特征根 $r = \dfrac{3}{4}$ (二重根)

所以方程的通解为 $4 = (C_1 + C_2 0)e^{\frac{3}{4}0}$

$$\Rightarrow C_1 = 4 \Rightarrow y' = \left((4 + C_2 x)e^{\frac{3}{4}x}\right)'$$

$$\Rightarrow 2 = \left(3 + C_2 + \frac{3}{4}C_2 0\right)e^{\frac{3}{4}0} \Rightarrow C_2 = -1$$

特解 $y = (4 - x)e^{\frac{3}{4}x}$.

三、n阶常系数齐次线性方程解法

$$y^{(n)}+P_1y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}y'+P_ny=0$$

特征方程 $r^n+P_1r^{n-1}+\cdots+P_{n-1}r+P_n=0$

特征方程的根r	通解中的对应项
若r是k重实根	给出k项$(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})e^{rx}$
若$\alpha\pm i\beta$ 是 k重共轭复根	给出$2k$项 $e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x$ $+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$

注意 n次代数方程有n个根，而特征方程的每一个根都对应着通解中的一项，且每一项各有 一个任意常数.

例 求方程 $y^{(4)}-2y'''+5y''=0$ 的通解.

解 特征方程 $r^4-2r^3+5r^2=0,$

即 $r^2(r^2-2r+5)=0.$

特征根 $r_1=r_2=0$ 和 $r_{3,4}=1\pm 2i.$

故所求通解为

$$y=C_1+C_2x+e^x(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x)$$

例 求方程 $y^{(5)}+y^{(4)}+2y'''+2y''+y'+y=0$ 的通解.

解 特征方程 $r^5+r^4+2r^3+2r^2+r+1=0$

$$(r+1)(r^2+1)^2=0$$

特征根 $r=-1$(单根)，$r_{2,3}=\pm i$ 二重共轭复根，

对应的特解 $y_1=e^{-x}$,

$$y_2=\cos x,\ y_3=\sin x,\ y_4=x\cos x,\ y_5=x\sin x$$

故所求通解

$$y=C_1e^{-x}+(C_2+C_3x)\cos x+(C_4+C_5x)\sin x$$

例 求方程 $\dfrac{d^4w}{dx^4}+\beta^4 w=0$ 的通解$(\beta>0)$.

解 特征方程 $r^4+\beta^4=0$

$$r^4+\beta^4=r^4+2r^2\beta^2+\beta^4-2r^2\beta^2=(r^2+\beta^2)^2-2r^2\beta^2$$

$$=(r^2+\beta^2-\sqrt{2}\beta r)(r^2+\beta^2+\sqrt{2}\beta r)=0$$

特征根 $\boxed{r_{1,2}=\dfrac{\beta}{\sqrt{2}}(1\pm i)}$ $\boxed{r_{3,4}=-\dfrac{\beta}{\sqrt{2}}(1\pm i)}$

对应的特解 $e^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}x}\left(C_1\cos\dfrac{\beta}{\sqrt{2}}x+C_2\sin\dfrac{\beta}{\sqrt{2}}x\right)$

$$e^{-\frac{\beta}{\sqrt{2}}x}\left(C_3\cos\frac{\beta}{\sqrt{2}}x+C_4\sin\frac{\beta}{\sqrt{2}}x\right)$$

故所求通解

$$w=e^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}x}\left(C_1\cos\frac{\beta}{\sqrt{2}}x+C_4\sin\frac{\beta}{\sqrt{2}}x\right)+e^{-\frac{\beta}{\sqrt{2}}x}\left(C_3\cos\frac{\beta}{\sqrt{2}}x+C_4\sin\frac{\beta}{\sqrt{2}}x\right)$$

作 业

练习册　7-7