班级　　　　　　　　学号　　　　　　　　姓名

第十章　重积分

一、本章概述：

- 重积分
  - 二重积分
    - 定义与性质
    - 计算方法
      - 直角坐标法
      - 极坐标法
  - 三重积分
    - 定义与性质
    - 计算方法
      - 直角坐标法
        - 投影法
        - 截面法
      - 柱面坐标法
      - 球面坐标法*
  - 应用
    - 几何
      - 曲顶柱体和一般空间立体的体积
      - 曲面的面积
    - 物理
      - 平面薄片和空间立体的质量
      - 静(力)矩和质心
      - 对坐标轴和原点的转动惯量
      - 物体对质点的引力

二、基本要求：

1．理解二重积分、三重积分的概念，了解并会应用重积分的性质。

2．熟练掌握利用直角坐标和极坐标计算二重积分的方法。

3．会利用直角坐标、柱面坐标、球面坐标计算三重积分。

4．会用重积分求立体体积、曲面面积、平面薄片和空间立体的质量、质心和转动惯量，平面薄片和空间立体对空间一质点的引力等几何与物理量。

三、基本方法：化重积分为累次积分计算

二重积分：一般思想是化为二次积分，根据被积函数与积分区域特点选择坐标系（直角坐标、极坐标）、积分次序并结合对称性计算二重积分。

三重积分：一般思想是化为三次积分，根据被积函数与积分区域特点选择坐标系（直角坐标、柱坐标和球坐标）、积分次序（投影法和截面法）并结合对称性计算三重积分。

第一节 二重积分的概念与性质

1. 填空：

（1）设积分区域 D 是圆环：$1 \le x^2 + y^2 \le 4$，则

$\iint\limits_D (2x^3 + 3\sin\frac{x}{y} + 7)dxdy$=________________；

（2）设积分区域 D 是以原点为中心、r 为半径的圆域，则

$\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\cos(xy)dxdy$=________________.

2. 根据二重积分的几何意义，确定下列积分的值.

（1）$\iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}d\sigma$，其中 D 为 $x^2 + y^2 \le a^2$；

（2）$\iint\limits_D (b - \sqrt{x^2 + y^2})d\sigma$，其中 D 为 $x^2 + y^2 \le a^2$，$b > a > 0$.

3. 确定积分 $I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} \sqrt[3]{1 - x^2 - y^2}dxdy$ 的符号.

4. 选择：

（1）设 $I_1=\iint\limits_D \frac{x+y}{4}d\sigma$， $I_2=\iint\limits_D \sqrt{\frac{x+y}{4}}d\sigma$，

$I_3=\iint\limits_D \sqrt[3]{\frac{x+y}{4}}d\sigma$，其中 D 为

$D=\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+(y-1)^2\le 2\}$，则　　（　　）

（A） $I_1<I_2<I_3$；　（B） $I_2<I_3<I_1$；

（C） $I_1<I_3<I_2$；　（D） $I_3<I_2<I_1$.

（2）设 $I_i=\iint\limits_{D_i} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma$， $i=1,2,3$，其中

$D_1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le R^2\}$，

$D_2=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2R^2\}$，

$D_3=\{(x,y)\,\|\,x|\le R,|\,y|\le R\}$，则　　（　　）

（A） $I_1<I_2<I_3$；　（B） $I_2<I_3<I_1$；

（C） $I_1<I_3<I_2$；　（D） $I_3<I_2<I_1$.

5. 利用二重积分的性质，估计下列积分的值.

（1） $\iint\limits_D [3+\cos(x^2+y^2)\pi]d\sigma$，其中 D 为 $x^2+y^2\le\frac{1}{3}$；

（2） $\iint\limits_D (2+x^5+\frac{x^2y^2}{4+9x^4y^4})d\sigma$，其中 D 为 $x^2+y^2\le 2$.

本节作业总结：

第二节 二重积分的计算

1. 填空：

（1） $\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}|xy|\,d\sigma=$______________；

（2）设 f 为连续函数，区域 D 由直线 $x=-1$、$y=1$ 和曲线 $y=x^3$ 围成，则 $\iint\limits_D x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy=$____________；

（3）设 $f(x)$ 连续，a、m 为常数，把 $I=\int_0^a dy\int_0^y e^{m(a-x)}f(x)dx$ 写成定积分时，$I=$______________；

（4） $\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(x^2+4y^2+9)d\sigma=$______________.

2. 选择：

（1）设连续函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有定义，D_1 是 D 的在第一象限部分且其面积为 D 的面积的四分之一，则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=4\iint\limits_{D_1}f(x,y)d\sigma$ 成立的条件是（　　）.

(A) $f(x,y)$ 及 D 关于原点对称；

(B) D 关于 x 轴、y 轴对称，$f(x,y)$ 关于原点对称；

(C) D 关于原点对称，$f(x,y)$ 关于 x 轴、y 轴对称；

(D) D 与 $f(x,y)$ 都关于 x 轴、y 轴对称.

（2）设 $f(x,y)$ 在原点某邻域连续，区域 $D: x^2+y^2\le t^2$ 在该邻域内，$F(t)=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，则 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{F'(t)}{t}$ 的值是（　　）.

(A) $2\pi f(0,0)$；　　(B) 2π；

(C) $2\pi A$，A 为 D 的面积；　　(D) 不存在.

（3）设 $D: 0\le x\le\dfrac{\pi}{4}$，$-1\le y\le1$，则二重积分 $\iint\limits_D x\cos 2xy\,dxdy$ 的值是（　　）.

(A) 0；　(B) $-\dfrac{1}{2}$；　(C) $\dfrac{1}{2}$；　(D) $\dfrac{1}{4}$.

（4）设 $D: 0\le x\le\pi$，$0\le y\le\dfrac{\pi}{2}$，则 $\iint\limits_D \sin x\cos y\,dxdy=$（　　）.

(A) -2；　(B) 2；　(C) 0；　(D) 1.

3. 计算下列二重积分：

（1）$\iint\limits_D \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}d\sigma$，其中$D$：$0\le x\le 1$，$x^2\le y\le 1$.

（2）$\iint\limits_D \cos(x+y)dxdy$，其中$D$是由$x=0$，$y=x$，$y=\pi$所围成的区域.

（3）$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}d\sigma$，其中$D$是由$y=2$，$y=x$，$xy=1$所围成的区域.

（4）$\iint\limits_D \frac{x\sin y}{y}dxdy$，其中$D$是由$y=x$，$y=x^2$所围成.

4. 画出积分区域，并计算下列二重积分：

（1）$\iint\limits_D (3x^3+y)dxdy$，其中 D 是两条抛物线 $y=x^2$、$y=4x^2$ 之间，直线 $y=1$ 以下的闭区域.

（2）$\iint\limits_D e^{x+y}dxdy$，其中 $D=\{(x,y) \mid |x|+|y|\le 1\}$.

（3）$\iint\limits_D \frac{e^{xy}}{y^y-1}d\sigma$，其中 D 是由 $y=e^x$、$y=2$ 和 $x=0$ 所围成的区域.

5. 改变下列二次积分的积分次序.

（1）$\int_0^1 dx\int_{2x}^{x^2+1} f(x,y)dy$.

（2）$\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy$.

（3）$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$.

（4）$\int_0^1 dy \int_{1-y}^{1+y^2} f(x,y)dx$.

6. 设平板由曲线 $xy=1$ 及直线 $x+y=\dfrac{5}{2}$ 所围成，质量面密度为 $\dfrac{1}{x}$，求板的质量.

7. 求由坐标平面、平面 $x=4$、$y=4$ 及抛物面 $z=x^2+y^2+1$ 所围成的立体体积.

8. 计算二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}dxdy$，其中 D 是由直线 $x=-1$，$x=1$，$y=0$ 及 $y=2$ 所围成的区域.

9. 将二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 化为极坐标下的二次积分，其中积分区域 D 是

（1）由 $y=0$，$x=1$ 及 $y=x^2$ 所围成；

（2）圆 $x^2+y^2=ax$ 与圆 $x^2+y^2=2ax\ (a>0)$ 之间的区域.

10. 将下列各题中的积分化为极坐标形式的二次积分：

（1）$\int_0^1 dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$；

（2）$\int_0^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}} dx \int_0^{Rx} f(\frac{y}{x})dy + \int_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^{R} dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(\frac{y}{x})dy$.

11. 利用极坐标计算下列各题.

（1）$\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$，其中 $D: x^2+y^2 \le 1$.

（2）$\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,d\sigma$， $D: x^2+y^2 \le ay, |y| \ge |x|$ $(a>0)$.

（3）$\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$， $D: \pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2$.

（4）$\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma$， $D: x^2+y^2 \geq 2x$， $x^2+y^2 \leq 4x$.

12. 选用适当的坐标计算下列积分：

（1）$\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x} \sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2} \sin\frac{\pi x}{2y}dy$.

（2）$\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma$，其中$D$是由直线$y=x$， $y=x+a$， $y=a$， $y=3a$ $(a>0)$所围成的闭区域.

（3）$\iint\limits_D x(y+1)d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\geq 1, x^2+y^2-2x\leq 0\}$.

（4）$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}d\sigma$，其中$D$由直线$y=x$，$x=2$及上半圆周$y=\sqrt{2x-x^2}$所围成的区域.

本节作业总结：

第三节 三重积分

1. 填空：

（1）设 $\Omega: 0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le c$，则

$\iiint\limits_{\Omega} xyzdv$=______________；

（2）设 $\Omega: z \ge 0, z \le \sqrt{3(x^2+y^2)}, x^2+y^2 \le y$，将三重积分

$I = \iiint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dv$ 写成柱坐标系下的三次积分，则

$I =$______________.

2. 将下列三重积分化为三次积分：

（1）将积分 $I = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$ 化为直角坐标系下的三次积分，

其中 Ω 由柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=1$，$z=2$ 围成.

（2）将 $I = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x,y,z)dz$ 化为柱面坐标系下的三次积分.

（3）将 $I = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$ 化为球面坐标系下的三次积分，

其中 Ω 由 $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}$，$0 \le x \le y \le \sqrt{3}x$ 所围成.

3. 利用直角坐标计算下列三重积分：

（1） $\int_1^2 dx\int_1^x dy\int_0^{\frac{\pi}{2xy}}\sin(xyz)dz$.

（2） $\iiint\limits_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}\,dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $y=\sqrt{1-x^2-z^2}$，$x^2+z^2=1$ 与平面 $y=1$ 所围成的区域.

（3） $\iiint\limits_{\Omega} z^2\,dxdydz$，其中 Ω 由 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$ 所围成的区域.

4. 利用柱面坐标计算下列三重积分：

（1） $\iiint\limits_{\Omega} dv$，其中 Ω 由曲面 $x^2+y^2=2ax$，$x^2+y^2=2az\ (a>0)$ 与平面 $z=0$ 所围成的有界闭区域.

（2）$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,dv$，其中$\Omega$为$x^2+y^2\le z^2$，$1\le z\le 2$.

5*. 利用球面坐标计算下列三重积分：

（1）$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$， Ω由$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=1$所围成.

（2）$\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}}}\,dv$（$n$为正整数），其中$\Omega$由$1\le x^2+y^2+z^2\le 4$所确定.

6. 选用适当的坐标计算下列三重积分：

（1）$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}z^2dz$.

（2）$\iiint\limits_{\Omega} e^{|z|}dv$（$n$ 为正整数），其中 Ω ： $x^2+y^2+z^2\le 1$.

（3）$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，其中 Ω 是由两个半球面

$z=\sqrt{A^2-x^2-y^2}$，$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(A>a)$ 及平面 $z=0$ 所围成的区域.

7. 曲面 $x^2+y^2=az$ 将球体 $x^2+y^2+z^2\le 4az$ 分成两部分，求此两部分体积之比.

8. 形如 $z=x^2+y^2$ 形容器，已盛有 8π cm³ 的水，今又注入 120π cm³ 的水，问水面升高多少？

本节作业总结：

第四节 重积分的应用

1. 填空：

（1）设立体 Ω 由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与 $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围成，则 Ω 的表面积 A =______________；

（2）曲线 $ay = x^2$ 及 $x + y = 2a\ (a > 0)$ 所围闭区域 D 的形心为______________.

2. 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ 上求满足 $z^2 \geq x^2 + y^2$ 的那部分的面积.

3. 求半球面 $z = \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}$ 及旋转抛物面 $x^2 + y^2 = 2az$ 所围成的立体的整个表面积（$a > 0$）.

4. 在半径为 R 的均匀半圆形薄片的直径上，要接上一个一边与直径等长的均匀矩形薄片，为了使整个均匀薄片的质心恰好落在圆心上，问接上去的均匀薄片另一边的长度为多少？

5. 已知单位立方体$0 \le x \le 1$，$0 \le y \le 1$，$0 \le z \le 1$在点(x, y, z)处的密度与该点到原点距离的平方成正比，求这立体的质心坐标.

6. 设一由$y = \ln x$， x轴及$x = e$所围成的均匀薄板，其密度为$\mu = 1$，求此板绕直线$x = t$旋转的转动惯量$I(t)$，并问t为何值时$I(t)$最小？

7．证明：由$x = a$，$x = b$，$y = f(x)$及x轴所围城的平面图形绕x轴旋转一周所形成的立体对x轴的转动惯量$(\mu = 1)$为$I_x = \dfrac{\pi}{2}\int_a^b f^4(x)dx$， $f(x)$为正值连续函数.

本节作业总结：

第十章 自测题

1. 填空：

（1）二次积分 $\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy=$_______________；

（2）二重积分 $\iint\limits_D \min\{x,y\}dxdy=$_______________，其中

$D=\{(x,y)\,|\,x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1\}$；

（3）$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\int_0^{\sqrt{t}}dx\int_{x^2}^{t}\sin y^2dy}{(e^{t^2}-1)\arctan t^{\frac{3}{2}}}=$_______________；

（4）与三次积分 $\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y}f(x,y,z)dz$ 对应的积分次序为 x,y,z 的三次积分是_______________；

（5）$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}[\dfrac{z^3\ln(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}+1]dv=$_______________.

2. 选择：

（1）设 D 是平面上以 $A(1,1)$，$B(-1,1)$，$C(-1,-1)$ 为顶点的三角形，D_1 是 D 的第一象限部分，则二重积分 $\iint\limits_D (xy+cox\sin y)d\sigma=$（　　　　）.

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y d\sigma$；　　(B) $2\iint\limits_{D_1} xyd\sigma$；

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)d\sigma$；　　(D) 0.

（2）记 $I_1=\iint\limits_{D_1}|xy|d\sigma$，$I_2=\iint\limits_{D_2}|xy|d\sigma$，$I_3=\iint\limits_{D_3}|xy|d\sigma$，其中 $D_1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，$D_2=\{(x,y)\,\|\,x|+|y|\le 1\}$，$D_3=\{(x,y)\,\|\,x|+|y|\le\sqrt{2}\}$，则下列关系式中（　　　　）成立.

(A) $I_1<I_2<I_3$；　　(B) $I_1<I_3<I_2$；

(C) $I_2<I_1<I_3$；　　(D) $I_2<I_3<I_1$.

（3）二次积分 $\int_{-1}^0 dx\int_{x+1}^{1+x^2}f(x,y)dy$ 等于（　　　　）.

(A) $\int_0^1 dy\int_{-1}^{y-1}f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{-1}^{\sqrt{y-1}}f(x,y)dx$；

(B) $\int_0^1 dy\int_{-1}^{y-1}f(x,y)dx$；

(C) $\int_0^1 dy\int_{-1}^{y-1}f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{-1}^{-\sqrt{y-1}}f(x,y)dx$；

(D) $\int_1^{\sqrt{2}} dy\int_{-1}^{-\sqrt{y-1}}f(x,y)dx$.

（4）记 $I=\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{1}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}f(z)dz$，则下列等式中正确的是（　　　　）.

(A)　$I=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\phi\int_{\frac{1}{\cos\phi}}^{2\cos\phi}f(r\cos\phi)r^2\sin\phi dr$；

(B)　$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_1^{1+\sqrt{1-\rho^2}}f(z)dz$；

(C)　$I=\int_0^{\pi}d\theta\int_1^2 dz\int_0^{\sqrt{2z-z^2}}\rho^2 f(z)d\rho$；

(D)　$I=\int_{-1}^{1}dx\int_0^{-\sqrt{2z-z^2}}dz\int_0^{\sqrt{z^2-2z-x^2}}f(z)dy$.

（5）设 $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_0^{1-x^2-y^2}f(x,y,z)dz=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dv$，

则积分区域 Ω 的边界点在（　　　　）处的切平面与平面 $\pi: x+y+z=1$ 平行.

(A)　$(0,0,1)$；　(B)　$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$；　(C)　$(\frac{1}{2},0,\frac{1}{4})$；　(D)　$(0,\frac{1}{2},\frac{1}{4})$.

3. 计算下列二重积分：

（1）$\iint\limits_{D}\left(\frac{y^2}{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+y^2-1}}\right)d\sigma$，$D$ 由 $x=\sqrt{9-y^2}$，$x=\sqrt{2-y^2}$ 及 $y^2=3x^2$ 围成.

（2）$\iint\limits_{D}(2+|x-y|)d\sigma$，$D: 0\le y\le\sqrt{1-x^2}$，$0\le x\le 1$.

(3)　$\int_0^1 dx\int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}-1}\frac{dy}{\sqrt{(x^2+y^2)(4-x^2-y^2)}}$.

4. 已知 $f(x)$ 具有三阶连续导数，且

$f(0)=f'(0)=f''(0)=-1$， $f(2)=-\dfrac{1}{2}$，计算二次积分

$I=\int_0^2 dx\int_0^x \sqrt{(2-x)(2-y)}\, f'''(y)dy$.

5. 求抛物面 $z=x^2+y^2+1$ 的一个切平面，使得它与该抛物面及圆柱面 $(x-1)^2+y^2=1$ 围成的立体体积最小，并求出这个最小的体积.

6. 试证 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} f(z)dxdydz=\pi\int_{-1}^1 f(u)(1-u^2)du$. 并利用这个式子计算 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}(z^4+z^2\sin^3 z)dxdydz$.

7. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}|\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1|\,dv$，其中 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围成的立体.

8. 曲面$x^2+y^2+az=4a^2$将球体$x^2+y^2+z^2\le 4az$分成两部分，求含有z轴那部分的体积.

9. 在球心位于原点，半径为a的均匀半球体靠圆形平面的一侧拼接一个底半径与球半径相等、材料相同的圆柱体，并使拼接后的整个物体的重心在球心，试确定圆柱体的高.

10. 考研题练练看

（1）（2010 年数学一，4 分）设$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le z\le 1\}$，则$\Omega$的形心的竖坐标$\bar{z}$ =______________；

（2）（2012 年数学三，4 分）由曲线$y=\dfrac{4}{x}$和直线$y=x$及$y=4x$在第一象限中围成的平面图形的面积为______________；

（3）（2011 年数学二，4 分）设平面区域D由直线$y=x$，圆$x^2+y^2=2y$及y轴所组成，则二重积分$\iint\limits_D xyd\sigma$ =______________；

（4）（2009 年数学一，4 分）设$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$，则$\iiint\limits_\Omega z^2dxdydz$=______________.

（5）（2010 年数学一，4 分）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$ =（　　）.

(A) $\int_0^1 dx\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$；　(B) $\int_0^1 dx\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$；

(C) $\int_0^1 dx\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$；　(D) $\int_0^1 dx\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$.

（6）（2012 年数学三，4 分）设函数 $f(t)$ 连续，则二次积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^{2} f(r^2) r dr = (\qquad).$$

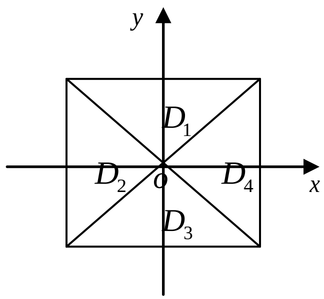
(A) $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} f(x^2+y^2) dy$；

(B) $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2) dy$；

(C) $\int_0^2 dx \int_{1+\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} f(x^2+y^2) dy$；

(D) $\int_0^2 dx \int_{1+\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2) dy$.

（7）（2009 年数学一，4 分）如图，正方形 $\{(x,y) \| x| \le 1, |y| \le 1\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k\ (k=1,2,3,4)$，$I_k = \iint\limits_{D_k} y\cos x dxdy$，则 $\max\limits_{1\le k\le 4}\{I_k\} = (\qquad)$.



(A) I_1； (B) I_2； (C) I_3； (D) I_4.

（8）（2014 年数学一，4 分）设 $f(x)$ 是连续函数，

则 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y) dx = (\qquad).$

（A）$\int_0^1 dx \int_0^{x-1} f(x,y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy$

（B）$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} f(x,y) dy$

（C）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr$

（D）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$

（9）（2012 年数学二，4 分）设区域 D 由曲线 $y=\sin x$，$x=\pm\frac{\pi}{2}$，$y=1$ 围成，则 $\iint\limits_D (x^5 y - 1) dxdy = (\qquad)$.

(A) π； (B) 2； (C) -2； (D) $-\pi$.

（10）（2010 年数学二，10 分）计算二重积分 $I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\,drd\theta$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le r\le\sec\theta,0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\}$.

（11）（2010 年数学三，10 分）计算二重积分 $\iint\limits_D (x+y)^3dxdy$，其中 D 由曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 及 $x-\sqrt{2}y=0$ 围成.

（12）（2012 年数学二，10 分）计算二重积分 $\iint\limits_D xyd\sigma$，其中 D 为曲线 $r=1+\cos\theta\ (0\le\theta\le\pi)$ 与极轴围成.

（13）（2012 年数学三，10 分）计算二重积分 $\iint\limits_D e^x xydxdy$，其中 D 是以曲线 $y=\sqrt{x}$，　$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的无界区域.

（14）（2011 年数学一，11 分）已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0$， $f(x,1)=0$， $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=a$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$，计算二重积分

$$\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy.$$

（15）（2014 年数学二， 10 分）设平面区域

$D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4, x\ge 0.y\ge 0\}$. 计算

$$\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$$

（16）（2011 年数学三，10 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有连续导数， $f(0)=1$，且满足 $\iint\limits_{D_t} f'(x+y)dxdy=\iint\limits_{D_t} f(t)dxdy$，其中 $D_t=\{(x,y)\,|\,0\le y\le t-x, 0\le x\le t\}\ (0<t\le 1)$，求 $f(x)$ 的表达式.

（17）（2013 年数学一，10 分）设直线 L 过 $A(1,0,0)$， $B(0,1,1)$ 两点，将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ，Σ 与平面 $z=0$，$z=2$ 所围成的立体为 Ω，

（i）求曲面 Σ 的方程；

（ii）求 Ω 的形心坐标.

本章作业纠错与总结：