线性代数 3、4、5 章练习答案

班级________姓名________学号________成绩________

1．单项选择题

(1). 已知 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\ (m>2)$ 线性无关，则【 D 】

（A）对任意一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$；

（B） $m>n$；（书 P90 定理 5(2)）

（C）对任意 n 维向量 β，有 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关；

反例：$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ 线性无关，但是 $e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 显然不能由 e_1,e_2 线性表示

（D） $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\ (m>2)$ 中任意两个向量均线性无关；

(2). 设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩 $R(A)=m<n$， B 为 n 阶方阵，则【 B 】

（A） $A_{m\times n}$ 的任意 m 阶子式均不为零.（存在一个 m 阶子式不为零就可以）

（B）当秩 $R(B)=n$ 时有秩 $R(AB)=m$. $\left(\because A\overset{c}{\sim}AB,\Rightarrow R(A)=R(AB)\right)$

（C） $A_{m\times n}$ 的任意 m 个列向量均线性无关.

（肯定至少会存在一个含有 m 个向量的部分组是线性无关，但是，不一定每个含有 m 个向量的部分组都是线性无关的。反例请学生们自己举！）

（D） $\left|A^TA\right|\neq 0$.

$\left(\because \left|A^TA\right|\neq 0\Rightarrow R(A^TA)=n,\Rightarrow n=R(A^TA)\leq R(A)=m,\Rightarrow m\geq n \text{与已知相矛盾}\right)$

【参见书上 P. 70 ⑦】

2. 设 4 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有三个线性无关的特解 η_1,η_2,η_3，

且 $R(A)=2$，则方程组的通解 $x=c_1\left(\eta_1-\eta_2\right)+c_2\left(\eta_2-\eta_3\right)+\eta_3,\quad c_1,c_2$ 为任意常数

证明：　$\because \eta_1,\eta_2,\eta_3$,线性无关,$\therefore$ 它各互不相同，否则产生矛盾。

且 $\eta_1-\eta_2$，$\eta_2-\eta_3$ 是 $Ax=0$ 的非零解.

又设 $k_1(\eta_1-\eta_2)+k_2(\eta_2-\eta_3)=0,\Rightarrow k_1\eta_1+k_2\eta_2-(k_1+k_2)\eta_3=0$

$\because \eta_1,\eta_2,\eta_3$,线性无关,$\therefore k_1=k_2=0$，故 $\eta_1-\eta_2$，$\eta_2-\eta_3$ 线性无关

又 $\because R(A)=2,n=4,\Rightarrow n-R(A)=2,$

$\Rightarrow Ax=0$ 的基础解系中含有2个解向量

3.　讨论 λ 取何值时线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+\lambda x_2+x_3=1\\ x_1+x_2+\lambda x_3=1\end{cases}$ 有解，并求解.

解　方程组的增广矩阵为 $\begin{pmatrix}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&1&1\\1&1&\lambda&1\end{pmatrix}$，系数行列式为

$$\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

（1）　当 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq -2$ 时，方程有唯一解，此时

$$\begin{pmatrix}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&1&1\\1&1&\lambda&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\lambda+2&\lambda+2&\lambda+2&3\\1&\lambda&1&1\\1&1&\lambda&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&\dfrac{3}{\lambda+2}\\1&\lambda&1&1\\1&1&\lambda&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&\dfrac{3}{\lambda+2}\\0&\lambda-1&0&\dfrac{\lambda-1}{\lambda+2}\\0&0&\lambda-1&\dfrac{\lambda-1}{\lambda+2}\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&\frac{3}{\lambda+2}\\0&1&0&\frac{1}{\lambda+2}\\0&0&1&\frac{1}{\lambda+2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{\lambda+2}\\0&1&0&\frac{1}{\lambda+2}\\0&0&1&\frac{1}{\lambda+2}\end{pmatrix},$$

故得解为 $x_1=x_2=x_3=\dfrac{1}{\lambda+2}$；

（2）当 $\lambda=-2$ 时，增广矩阵 $\begin{pmatrix}-2&1&1&1\\1&-2&1&1\\1&1&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&1&1&1\\1&-2&1&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}$，无解；

（3）当 $\lambda=1$ 时，增广矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，有无穷多组解,

同解方程为 $x_1=1-x_2-x_3$ （x_2,x_3 为自由未知量）, 原方程的同解是:

$$\xi=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad c_1,c_2\text{是任意常数}$$

4． 已知向量空间 R^3 中的四个向量：

$$\alpha_1=(1,1,0)^T,\ \alpha_2=(1,1,1)^T,\ \alpha_3=(2,2,1)^T,\ \alpha_4=(-1,-1,1)^T,$$

求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩与一个最大线性无关组，并将其余向量用最大无关组线性表示。

解: $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\1&1&2&-1\\0&1&1&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\0&0&0&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1&-2\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow R(A)=2\Rightarrow r\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}=2$

显然 α_1,α_2 线性无关，故 α_1,α_2 就是一个最大线性无关组

$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2,\alpha_4=-2\alpha_1+\alpha_2$

5. 已知：$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$

(1) 试求一个正交变换 $x=Py$ ，将上面的二次型化为标准形;

(2) 判断上述二次型是否为为正定的，为什么？

解: (1) 由已知，$\Rightarrow f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 的矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow |A-\lambda E|=\begin{pmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{pmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-10),$$

故得特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=10$

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，由

$$\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad \text{解得:}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

由施密特正交化后，再单位化，可得两个正交的单位特征向量

$$p_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$p_2^*=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{-4}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix},\ \text{再单位化后得}\ p_2=\frac{\sqrt{5}}{3}\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}$$

当 $\lambda_3=10$ 时，由

$$\begin{pmatrix}-8 & 2 & -2\\ 2 & -5 & -4\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{解得}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_3\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

单位化后得 $p_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$

得正交阵 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5} & \frac{2\sqrt5}{15} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{4\sqrt5}{15} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt5}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$， $P^TAP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix}=\Lambda$.

$\Rightarrow$由正交变换 $x=Py,$

$\Rightarrow f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=(Py)^T A(Py)=y^T\left(P^TAP\right)y=y^T\Lambda y$

$\Rightarrow f(x_1,x_2,x_3)$的标准形为：$y_1^2+y_2^2+10y_3^2$

(2) 此二次型是一个正定二次型，因为它的矩阵的三个特征值都是正数.

6. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为实对称矩阵，$R(A)=r<n$， 且 $A^2=2A$，

求 A的迹 $Tr(A)$

解：设 λ 为 A 的任意一个特征值，$\Rightarrow Ap=\lambda p,\ p\neq 0$

$\because A^2=2A,\Rightarrow A^2p=2Ap,\Rightarrow \lambda^2p=2\lambda p,$

$\Rightarrow \lambda^2p-2\lambda p=0\Rightarrow(\lambda^2-2\lambda)p=0,$

$\because p\neq 0,\Rightarrow \lambda^2-2\lambda=0\Rightarrow\lambda(\lambda-2)=0\quad\Rightarrow\lambda=0$或$\lambda=2$，

［注意］若 A 为实对称矩阵， 则 A 的 n 个特征值必为实数。

由此可得，实对称矩阵 A 的特征值必须是满足方程 $\lambda^2-2\lambda=0$ 的实

根，所以 A 的特征值只能是 2 或者 0 ，到底有多少个 2？有多少个 0 呢？

$$\text{因为} A \text{与} \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{相似}, \Rightarrow R(A) = R(\Lambda)$$

$\because R(A) = r < n, \Rightarrow \Lambda$ 的主对角线上共有 r 个2，$(n-r)$ 个0.

$$\Rightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 2,$$
$$\lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \cdots = \lambda_n = 0,$$
$$Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 2r$$

7．设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ $(m > 1)$ 线性无关，且 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m$，

判断向量组 $\beta - \alpha_1, \beta - \alpha_2, \cdots, \beta - \alpha_m$ 的线性相关性.

解：$\because \beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m$，于是有：

$$\begin{cases} \beta - \alpha_1 = \alpha_2 + \cdots + \alpha_m \\ \beta - \alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta - \alpha_m = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{m-1} \end{cases}$$

$$\text{也即} \left(\beta - \alpha_1, \beta - \alpha_2, \cdots \beta - \alpha_m\right) = \left(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\because \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & \cdots & 1 \\ m-1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m-1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{m-1}(m-1) \neq 0, \quad (\because 已知m>1)$$

$\therefore R(\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots\beta-\alpha_m) = R(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m)$ （书P67定理2，P69②）

$\because \alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$线性无关，$\therefore R(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m)=m$，

$\Rightarrow R(\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots\beta-\alpha_m)=m$

$\Rightarrow \beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots\beta-\alpha_m$线性无关 (书P88定理4)

8．设 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a+1 & 2a & 3a+1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，且存在 3 阶非零方阵 B 使 $BA=0$，求 a

解 $\because BA=0 \Rightarrow A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=0$，令$B^{\mathrm{T}}=(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3)$，

$A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3)=(A^{\mathrm{T}}\beta_1,\ A^{\mathrm{T}}\beta_2,\ A^{\mathrm{T}}\beta_3)=(0,0,0)$

$\Rightarrow A^{\mathrm{T}}\beta_1=0$，$A^{\mathrm{T}}\beta_2=0$，$A^{\mathrm{T}}\beta_3=0$，又$\because B\neq 0$，故存在某个$\beta_j\neq 0\ (j=1,2,3)$

使$A^{\mathrm{T}}\beta_j=0$，也即3元齐次线性方程组$A^{\mathrm{T}}x=0$有非零解，所以$R(A^{\mathrm{T}})<3$，

$$因此\ A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a+1 & 2a & 3a+1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & a-1 & 2a-2 & 3a-3 \\ 0 & 1-a & 1-a & 2-2a \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & a-1 & 2a-2 & 3a-3 \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 \end{pmatrix} \Rightarrow a=1,\ R(A^{\mathrm{T}})=R(A)=1<3$$