北京林业大学 2004--2005 学年第一学期考试试卷解答

一、填空题(每空 3 分, 共 30 分)

1、设 A,B 都是 5 阶矩阵,且 $\left|A^{-1}\right|=-3,\left|B\right|=2$,则 $\left|\left|B\right|A\right|=$ $\underline{-\dfrac{32}{3}}$

2、设向量 $\alpha=[-1,-1,0,1],\beta=[1,2,-2,0]\in R^{4}$,则$\alpha$与$\beta$的夹角 $<\alpha,\beta>=$ $\underline{\dfrac{\pi}{4}}$

3、二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2-x_2x_3$ 对应的矩阵为 $\underline{\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&-3\end{bmatrix}}$.

4、若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 正定，则 λ 的取值范围是

$\underline{-2<\lambda<1}$.

5、设 $\alpha=(1\quad 1)^T\sqrt{a^2+b^2}$， $A_1=\alpha^T\alpha$， $A_2=\alpha\alpha^T$， $I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$， $B_2=A_2+I_2$， $A=\begin{bmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{bmatrix}$，

$B=\begin{bmatrix}A_1&O\\O&B_2\end{bmatrix}$ 则 $r(A)=\underline{\ 2\ }$； $r(B^*)=\underline{\ 3\ }$； $\left|AB\right|=\underline{\ 0\ }$； $B^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$

二、(8 分) 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}x&a&a&\dots&a\\a&x&a&\cdots&a\\a&a&x&\dots&a\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a&a&a&\dots&x\end{vmatrix}$$

解: $D=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&a&a&\dots&a\\1&x&a&\cdots&a\\1&a&x&\dots&a\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\1&a&a&\dots&x\end{vmatrix}$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a\ldots & a \\ & x-a & 0\cdots & 0 \\ & & x-a \quad \ldots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & x-a \end{vmatrix}=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

三、（8 分）解矩阵方程

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{求 } X=?$$

解：令 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1.5 & -3 & 2.5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\quad B^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0.5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

四、（10分）求a, b为何值时，方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$ 有唯一解、无解或有无穷多解？

在有解时，求其通解.

□□ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{bmatrix}$

$a\neq 1$,□□□ $\quad \left\{\dfrac{b-a+2}{a-1},\dfrac{a-2b-3}{a-1},\dfrac{b+1}{a-1},0\right\}$

$a=1, b\neq -1$, 无解

$a=1, b=-1$，无穷多解. □ $\quad x=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

五、（8 分）求向量组 $\alpha_1=[1,2,3,4]^T, \alpha_2=[2,3,4,5]^T, \alpha_3=[3,4,5,6]^T, \alpha_4=[4,5,6,7]^T$ 的一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

解：

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

极大无关组α_1，α_2，　$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$　$\alpha_4=-2\alpha_1+3\alpha_2$

六、（10 分）

设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$R^3$的一组标准正交基，且

$$\beta_1=\frac{1}{3}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2-\frac{2}{3}\alpha_3,\beta_2=\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{1}{3}\alpha_2+\frac{2}{3}\alpha_3,\beta_3=\frac{2}{3}\alpha_1-\frac{2}{3}\alpha_2-\frac{1}{3}\alpha_3$$

(1) 证明β_1,β_2,β_3也是R^3的一组标准正交基；（4分）

(2) 证明基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵为正交矩阵；（3分）

(3) 求向量$\alpha=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的坐标。（3分）

证明：　α_1　α_2　α_3 是 R^3 的一个标准正交基，所以有：

$$(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}\quad i,j=1,2,3\ \Rightarrow\ (\beta_i,\beta_j)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}\qquad i,j=1,2,3$$

(2)、过渡矩 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$ $=I_3$ 因为 $A^TA=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

所以 A 为正交矩阵

(3)、因为α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标是 $x=[1,2,-1]^T$，所以α　β_1,β_2,β_3 下的坐标是

$$y=A^{-1}x=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}\overset{A^{-1}=A^T}{=}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{3}\\ \frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

七、（12 分）设实对称矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$，问 A 是否能与对角阵相似？若能与对角阵相似，求对角阵 Λ 及可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$，并求 A^k（k 为正整数）.

解：$|\lambda I-A|=(\lambda+2)(\lambda-2)^3$

A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=-2$。

$\lambda_1=2$ 对应的特征向量为 $\xi_1=[1,-1,0,0]^T,\xi_2=[1,0,-1,0]^T,\xi_3=[1,0,0,-1]$

$\lambda_2=-2$ 对应的特征向量为 $\xi_4=[1,1,1,1]^T$

因为 A 有四个线性无关的特征向量，所以 A 可以对角化。

令 $P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & -2\end{bmatrix}=\Lambda$，$A^k=\begin{cases}2^k I_4,\ k\text{为偶数}\\ 2^{k-1}A,\ k\text{为奇数}\end{cases}$

八、（10 分）用非退化线性变换将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 化为标准型.

解：$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$，$|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$，$\therefore \lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=5$.

$(-I-A)X=0$ 有基础解系 $X_1=[-1,1,0]^T$，$X_2=[-1,0,1]^T$，正交化、单位化得

$\xi_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}[-1,1,0]^T,\ \xi_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}[-1,-1,2]^T$；

$(5I-A)X=0$ 有基础解系 $X_3=[1,1,1]^T$，取 $\xi_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}[1,1,1]^T$。

令 $T=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]$，X=TY，则 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$.

九、（6 分）设实对称矩阵 A 和 B 是相似矩阵，证明：存在正交矩阵 T，使得 $T^{-1}AT=B$.

证：设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值，因为 $A\sim B$，所以 A 和 B 有相同的特征值，因此 B 的特征值

也是$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，又因为$A,B$为实对称矩阵，故存在正交矩阵$T_1,T_2$，使得

$$T_1^{-1}AT_1=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

$$T_2^{-1}BT_2=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

令$T=T_1T_2^{-1}$，则T为正交矩阵，且$T^{-1}AT=B$。

附：各章试题分值所占比例

Ch1	Ch2	Ch3	Ch4	Ch5	Ch6
16 分	18 分	18 分	16 分	16 分	16 分

北京林业大学 2006 －2007 学年第 2 学期试卷(A)解答

试卷名称： 线性代数Ⅱ　　**课程所在院系：** 理学院

考试班级： ________ **学号：** ________ **姓名：** ________ **成绩：** ________

一、填空题(将正确答案填在题中横线上)（每空 3 分，共计 30 分）

1、$\alpha=(1,-2,-3),\beta=(5,1,k)$，则时= 向量与正交　α　β

2．设α=(2，-1，5)，β=(-1,1,1)，则$\alpha+\beta$=(1 0 6)，$3\alpha-2\beta$=(8 -5 13)

3、如果一个向量组线性无关，那么它的任意一个部分组线性_无_关。

4、设三阶可逆矩阵A的特征值是1、$\frac{1}{3}$、2，则A^{-1}的特征值为1、3、$\frac{1}{2}$，且$|A^{-1}|=\frac{3}{2}$

5、设A是 3 阶方阵，且$|A|=5$，则$|A^*|=$ __25__

$|A^*|=|A|^{n-1}$

6、设 $A=\begin{pmatrix}2&3&0\\2&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 A^{-1}等于 $\begin{pmatrix}2&-\frac{3}{2}&0\\-1&1&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

7、设三阶方阵 $A=(\alpha,\gamma_1,\gamma_2),B=(\beta,2\gamma_1,-3\gamma_2)$，其中$\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2$均是三维列向量

$|A|=-\frac{1}{3}$，$|B|=3$，则$|A+B|=5$

8、设矩阵 $P=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&1\\2&1&2\end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&-2&0\\-2&-1&2\end{bmatrix}$，$Q=\begin{bmatrix}2&-2&2\\-2&0&0\\3&1&1\end{bmatrix}$，$B=PAQ$，初等变换、

初等变换不改变矩阵的秩

则 B 的秩等于__3____。

二、计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{vmatrix}$ (本大题 8 分)

解： $D\overset{\substack{r_4-r_1\\r_3-r_1\\r_2-r_1}}{=}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-2&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-2\end{vmatrix}=-8$

三、解答题(本大题 6 分)

a 取何值时，矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-3&6&-5&3\\0&1&-4&1&1\\4&-5&8&-9&a\end{pmatrix}$ 的秩是 2.

解: $A=\begin{pmatrix}2&-3&6&-5&3\\0&1&-4&1&1\\4&-5&8&-9&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-3&6&-5&3\\0&1&-4&1&1\\0&1&-4&1&a-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-3&6&-5&3\\0&1&-4&1&1\\0&0&0&0&a-7\end{pmatrix}$

$\Rightarrow a=7$时矩阵的秩为 2

四、解答题(本大题 10 分)

设 $\alpha_1=(2,1,3,-1),\alpha_2=(-1,1,-3,1),\alpha_3=(4,5,3,-1),\alpha_4=(1,5,-3,1)$,

求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组并将其余的向量用它线性表示.

解: $\begin{pmatrix}2&-1&4&1\\1&1&5&5\\3&-3&3&-3\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&5&5\\0&-3&-6&-9\\0&-6&-12&-18\\0&2&4&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&5&5\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore\alpha_1,\alpha_2$是一个极大线性无关组， $\alpha_3=3\alpha_1+2\alpha_2$， $\alpha_4=2\alpha_1+3\alpha_2$

五、解答题(本题 8 分)

求齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3+x_4-x_5=0\\2x_1+3x_2+x_3-x_4+2x_5=0\\3x_1+5x_2-x_3+x_5=0\\x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=0\end{cases}$ 的一个基础解系.

解：对系数矩阵作初等变换：

$A=\begin{pmatrix}1&2&-2&1&-1\\2&3&1&-1&2\\3&5&-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2&1&-1\\0&-1&5&-3&4\\0&-1&5&-3&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&8&-5&7\\0&1&-5&3&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

得同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -8x_3 + 5x_4 - 7x_5 \\ x_2 = 5x_3 - 3x_4 + 4x_5 \end{cases}$， 取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

得一个基础解系：$a_1 = (-8,5,1,0,0)$，$a_2 = (5,-3,0,1,0)$，$a_3 = (-7,4,0,0,1)$

六、解答题(本题 10 分)

当 k 取何值时，方程组 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = k \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 15 \end{cases}$ 有解，并求出此时的通解.

解：$(A,b) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & k \\ 5 & 4 & 6 & 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 6 & 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & -1 & 1 & 3-3k \\ 0 & 0 & 0 & 12-2k \end{pmatrix}$

$\therefore$ 当 $k=6$ 时，方程组有解且有无穷多解

此时 $(A,b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 6 & 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\therefore X = k_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$

七、证明题(本题 6 分)

若其中是阶方阵0, 是阶单位矩阵, 证明可逆并求 $(A+I)$ ， $(A+I)^{-1}$.

证明:可逆·且$A^2-2A-4I=0, \Rightarrow (A+I)(A-3I)=I, \Rightarrow (A+I)$ ， $(A+I)^{-1}=(A-3I)$

八、证明题(本题 8 分)

□ **n**□□□□□□□□ □□ $D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0.$

证明： 根据 $a_{ij} = -a_{ji}$ 得

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{21} & \cdots & -a_{n1} \\ -a_{12} & -a_{22} & \cdots & -a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^n D_n.$$

所以当 n 为奇数时 $D_n = -D_n$ 得 $D_n = 0$.

九 、解答题(本题 14 分)

设 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，

（1）求 A 的特征值和特征向量

（2）求正交矩阵 T， 使 $T'AT$ 为对角阵， 并写出对角阵。

解：（1）A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=3$ 3

当 $\lambda_1=1$ 时， $E-A=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ ，

对应于 $\lambda_1=1$ 的特征的向量为 $k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $(k_1\neq 0)$

当 $\lambda_2=\lambda_3=3$ 时，$3E-A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ ，

对应于 $\lambda_2=3$ 的特征向量为 $x_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$x_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 。

（2）将 x_1,x_2,x_3 单位化

$\alpha_1=\dfrac{x_1}{|x_1|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{pmatrix}$， $\alpha_2=\dfrac{x_2}{|x_2|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 6

令 $T=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$， 则 T 是正交阵， 且 $T'AT=\begin{pmatrix}1&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix}$

北京林业大学 2005-2006 学年第一学期考试试卷 B

试卷名称：<u>　　线性代数　　　　　　　　</u>　　课程所在院系：________

考试班级________学号________姓名________成绩________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九
得分									
阅卷人									

一、填空题(每空 3 分, 共 24 分)

1、 已知 $A^2+2A+2I=O$,则 $(A+I)^{-1}=$________

答案：$-(A+I)$

2、 设$A=\begin{bmatrix}1 & x & 3\\ 0 & -1 & 4\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$,已知矩阵 A 的秩 r(A)=2,则 $x=$______

答案：$\frac{3}{8}$

3、设 $\lambda=2$ 是可逆矩阵 A 的一个特征值, 则矩阵$\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$有一个特征值等于____

答案：$\frac{3}{4}$

4、 从 R^2 的基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$,到基 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$的过渡矩阵为______。

答案：$\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{bmatrix}$

5、 $\beta=(2,0,0)$ 在基 $\alpha_1=(1,1,0)$，$\alpha_2=(1,0,1)$，$\alpha_3=(0,1,1)$ 下的坐标是________。

答案：$(1,1,-1)$

6、 设 A 为 n 阶矩阵，若 $|5I-A|=0$，则 A 必有一特征值为________________.

答案：5

7、实对称阵 A 的所有特征值为1, 2, -3，则对应二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$ 的标准形为

______________。

答案：$\underline{f = y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2}$

8、 二次型 $2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3$ 的规范形是______________。

答案：$\underline{f = y_1^2 - y_2^2}$

二、（10 分）计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ & & & \dots & & \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}$$

答案：$D \xlongequal{r_i + r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 2n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} = n!$

三、（8 分）解矩阵方程

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ 求 } X$$

答案：令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1.5 & -3 & 2.5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$，$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 10 & -4 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}$

四、（10 分）求向量组

$$\alpha_1 = [1,2,3,0],\quad \alpha_2 = [-1,-2,0,3],\quad \alpha_3 = [2,4,6,0],$$
$$\alpha_4 = [1,-2,-1,0],\quad \alpha_5 = [0,0,1,1]$$

的一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表示。

答案：

一个极大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \end{bmatrix}$$

$$\alpha_3 = 2\alpha_1, \alpha_5 = \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2$$

五、（10 分）求常数k值，使方程组

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & kx_3 & = & 4 \\ -x_1 & + & kx_2 & + & x_3 & = & k^2 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -4 \end{cases}$$

答案：
$$|A| = -(k+1)(k-4)$$

$|A| \neq 0,$□□□□$k \neq -1 \quad k \neq 4,$ 　　　　.

$$k=-1, \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \end{bmatrix} \text{无解}$$

$$k=4\text{时}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & 16 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

特解$(0,4,0)^T$；齐次通解：$k(-3,-1,1)^T$

非齐次通解为：$x = (0,4,0)^T + k(-3,-1,1)^T$

六、（10 分）设$\alpha = (1,1,1)^T$，$\beta = (1,2,2)^T$

1. 求一个与α, β都正交的向量γ。

2.利用施密特正交化方法，把向量组$\{\alpha, \beta, \gamma\}$化为标准正交基

解：（1）设$\gamma = (x_1, x_2, x_3)^T$，由$\begin{cases} (\alpha, \gamma) = x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ (\beta, \gamma) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

由于$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，可解得$\gamma = k(0,1,-1)^T$，$k$为任意常数。——4 分

（2）γ与α, β都正交，只需正交化α, β。

$\eta_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^T$，$\eta_2 = (\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})^T$，$\eta_3 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})^T$，　——9 分

七、（10 分）设 3 阶矩阵 A 的特征值$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -1$，对应的特征向量为$X_1 = (1,0,0)^T$，$X_2 = (1,1,0)^T, X_3 = (1,1,1)^T$，求$A$及$A^{99}$

解：令 $P=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=\Lambda$， ——— 2 分

$P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$， $A=P\Lambda P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&0&-1\\0&0&-1\end{bmatrix}$ ——— 6 分

$A^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}=P\begin{bmatrix}1^{99}&0&0\\0&0&0\\0&0&(-1)^{99}\end{bmatrix}P^{-1}=P\Lambda P^{-1}=A$ ——— 8 分

八、（10 分）设$A=\begin{bmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{bmatrix}$，求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵，并给出 $P^{-1}AP$

解：特征根为：$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-2$ ——— 4 分

当 $\lambda_1=1$ 时，$p_1=(0,0,1)^T,p_2=(-2,1,0)^T$

当 $\lambda_3=-2$ 时，$p_3=(-1,1,1)^T$ ——— 8 分

故 $P=(p_1,p_2,p_3)$， $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{bmatrix}$ ——— 10 分

九、（8 分）t 取何值时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=t(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3$ 正定？

解：f 对应的实对称矩阵 $A=\begin{bmatrix}t&-1&1\\-1&t&-1\\1&-1&t\end{bmatrix}$， ——— 2 分

由 $|A_1|=t>0$，$|A_2|=\begin{vmatrix}t&-1\\-1&t\end{vmatrix}=t^2-1>0$，$|A|=(t+2)(t-1)^2>0$ —6 分

可解得 $t>1$，此时 f 正定。 ———8 分

北京林业大学 2007-2008 学年第一学期考试试卷 A

试卷名称： 线性代数 I ______ **课程所在院系：** ______

考试班级______**学号**______**姓名**______**成绩**______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
阅卷人									

试卷说明：

1. 考试时间为 120 分钟，请掌握好答题时间；
2. 答题之前，请将试卷和答题纸上的考试班级、学号、姓名填写清楚；
3. 本试卷所有试题答案写在 试卷 上；（特殊要求请详细说明）
4. 答题完毕，请将试卷和答题纸正面向外对叠交回，不得带出考场；

一、填空题(每空 3 分，共计 33 分)

1、设 A,B 为 3 阶方阵，且 $|A|=-1,|B|=2$ 则行列式 $|2(A^TB^{-1})^2|=$ __2__.

2、设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 均为 4 维列向量，且矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)$，$B=(\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3)$，$C=(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2)$，如果 $|A|=a,|B|=b$，则行列式 $|C|=$ $\boldsymbol{b-a}$.

3、若 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-3&1\\4&1&-1\end{pmatrix}$，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 基础解系中解向量的个数为__1__.

4、设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有唯一解的充要条件是__r(A，b)=r(A)=n__，有无穷多解的充分必要条件是__r(A，b)=r(A)<n__

5、设向量 $\alpha=(1,a,b)^T$ 与向量 $\alpha_1=(2,2,2)^T,\alpha_2=(3,1,3)^T$ 都正交，则 $a=$ __0__，$b=$ __-1__.

6、实对称矩阵 A 的特征值都是__实__数.

7、已知 3 阶矩阵 A 的特征值是 $1,2,3$，则 (A^*A^{-1}) 的三个特征值为 $\mathbf{6,\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3}}$.

8、若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的，

则 t 的取值范围是 $\boldsymbol{-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}}$.

9、存在 m 阶可逆矩阵 P 与 n 阶可逆矩阵 Q,使得 $A=PBQ$.这是 $m\times n$ 矩阵 A 与 B 等价（相抵）的__充要__条件.

二、（8 分）计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}x_1&a&\cdots&a\\a&x_2&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&a&\cdots&x_n\end{vmatrix}$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$□□□□□□□□□□ a.

解：

$$\boldsymbol{D=(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{x_i-a})\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)}$$

三、（10 分）解矩阵方程

已知 $AX=B+2X$，Ⅲ= $A\begin{pmatrix}3&1&1\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\-1&1\end{pmatrix}$，求矩阵 X．

解：

$$\because (A-2I)X=B, |A-2I|=1\neq 0$$

$$\therefore X=(A-2I)^{-1}B=\begin{pmatrix}1&-2\\1&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

四、（12分）已知方程组 $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-x_4=1\\3x_1-5x_2+5x_3-3x_4=2\\2x_1-3x_2+2x_3-2x_4=a\end{cases}$，当 a 为何值时方程组无解？当 a 为何值时方程组有解？并求解．

解：

$$\because \begin{pmatrix}1&-2&3&-1&1\\3&-5&5&-3&2\\2&-3&2&-2&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&1\\0&1&-4&0&-1\\0&1&-4&0&a-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&1\\0&1&-4&0&-1\\0&0&0&0&a-1\end{pmatrix}$$

所以（1） $a\neq 1$ 时无解；

(2) $a=1$ 时有解，

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&1\\0&1&-4&0&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-5&-1&-1\\0&1&-4&0&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

通解为 $\begin{cases} x_1 = -1 + 5k_1 + k_2 \\ x_2 = -1 + 4k_1 \\ x_3 = k_1 \\ x_4 = k_2 \end{cases}$

五、（8 分）已知向量组

$$\alpha_1=(1,-2,-1,-2,2)^T,\alpha_2=(4,1,2,1,3)^T,\alpha_3=(2,5,4,-1,0)^T,\alpha_4=(1,1,1,1,\frac{1}{3})^T$$

试证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关；并求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组；将其余向量表示成此极大线性无关组的线性组合.

证：

$$\because A=\begin{pmatrix}1&4&2&1\\-2&1&5&1\\-1&2&4&1\\-2&1&-1&1\\2&3&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&2&1\\0&9&9&3\\0&6&6&2\\0&9&3&3\\0&-5&-4&-\frac{5}{3}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&2&1\\0&3&3&1\\0&0&0&0\\0&0&-6&0\\0&-5&-4&-\frac{5}{3}\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&4&2&1\\0&3&3&1\\0&0&0&0\\0&0&-6&0\\0&-5&-4&-\frac{5}{3}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&0&1\\0&3&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-5&0&-\frac{5}{3}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{1}{3}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$\therefore \boldsymbol{r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3}$，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关；$\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$ 是向量组的一个极大线性无关组，且 $\boldsymbol{\alpha_4=-\frac{1}{3}\alpha_1+\frac{1}{3}\alpha_2}$

六、（10 分）已知 $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$ 和 β_1,β_2,β_3 是线性空间 R^3 的两组基, 其中

$$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(0,0,1)^T$$

$$\beta_1=(1,2,-1)^T,\beta_2=(2,2,-1)^T,\beta_3=(2,-1,-1)^T$$

(1) 求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵 A.

(2) 设向量 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $(1,-2,-1)^T$，求 α 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标.

解：（1）设 $\because \boldsymbol{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A}$

$$\therefore (\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3})^{-1}(\boldsymbol{\beta_1,\beta_2,\beta_3})=A$$

$$\therefore\begin{pmatrix}1&0&0&1&2&2\\1&1&0&2&2&-1\\1&1&1&-1&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&2&2\\0&1&0&1&0&-3\\0&1&1&-2&-3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&2&2\\0&1&0&1&0&-3\\0&0&1&-3&-3&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&0&-3\\-3&-3&0\end{pmatrix}$$

(2) 设向量α在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为 X=$(1,-2,-1)^T$，$\alpha$在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的坐标为 Y，则

$$Y=A^{-1}X=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&0&-3\\-3&-3&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-\frac{8}{3}\\\frac{5}{3}\end{pmatrix}$$

七、(14 分) 求正交变换 $X=QY$，将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

化为标准形，并写出正交矩阵 Q.

解：解：$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$，$|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$，$\therefore \lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=5$.

$(-I-A)X=0$ 有基础解系 $X_1=[-1,1,0]^T$，$X_2=[-1,0,1]^T$，正交化、单位化得

$\xi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}[-1,1,0]^T$，$\xi_2=\frac{1}{\sqrt{6}}[-1,-1,2]^T$；

$(5I-A)X=0$ 有基础解系 $X_3=[1,1,1]^T$，取 $\xi_3=\frac{1}{\sqrt{3}}[1,1,1]^T$。

令 $T=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]$，X=TY，则 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$.

八、(5 分) 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为实对称矩阵，$r(A)=r<n$，且 $A^2=2A$. 求 A 的迹 $tr(A)$.

解：设 $\boldsymbol{\lambda}$ 为 A 的特征值，$\boldsymbol{x\neq 0}$ 为对应的特征向量

$$\because A^2=2A,\therefore A^2x=2Ax\Rightarrow \lambda^2=2\lambda,\therefore \lambda=0,2$$

又 $\boldsymbol{r(A)=r<n}$，所以知 $\boldsymbol{\lambda=2}$ 为 $\boldsymbol{r(A)}$ 重特征值，$\boldsymbol{\lambda=0}$ 为 $\boldsymbol{n-r(A)}$ 重特征值，故

$tr(A)=2r(A)=2r$。

北京林业大学 2008--2009 学年第一学期试卷 A

试卷名称：线性代数（56 学时）　　课程所在院系：理学院

考试班级__________学号__________姓名__________成绩__________

试卷说明：

1. 本次考试为 闭 卷考试。认真审题，请勿漏答；
2. 考试时间为 120 分钟，请掌握好答题时间；
3. 本试卷所有试题答案写在 试卷 纸上，其它无效；
4. 答题完毕，请将试卷纸正面向外对叠交回，不得带出考场；

一、判断题（下列命题你认为正确的在题后括号内打“√”，错的打“×”）（每小题 3 分，共 12 分）

1、若方程组 $Ax=0$ 含有自由未知量，则方程组 $Ax=b$ 将有无穷多解.（ × ）

2、一个 n 阶矩阵 A 为非奇异的，当且仅当 A 相抵于 I（I 是单位矩阵.（ √ ）

3、任何两个迹相同的 n 阶矩阵是相似的.（ × ）

4、设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则 $r(A)=r(A^T)$.（ √ ）

二、单项选择题(在每小题四个备选答案中选出一个正确答案, 填在题中括号内)（每题 3 分，共 15 分）

1、已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=M$，　则 $\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{vmatrix}=$（ A ）

(A) k^2M；　(B) kM；　(C) k^4M；　(D) kM^2 .

2、A,B 均为 $n(n\geq 2)$ 阶方阵，且 $AB=O$，则（ C ）.

(A) A,B 均为零矩阵；　(C) A,B 至少有一个矩阵为奇异矩阵；

(B) A,B 至少有一个为零矩阵；　(D) A,B 均为奇异矩阵.

3、$m>n$ 是 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性相关的（ A ）条件.

(A) 充分；　(B) 必要；　(C) 充分必要；　(D) 必要而不充分的；

4、设 ξ_1,ξ_2 为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，η_1,η_2 为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，则（ C ）.

(A) $2\xi_1+\eta_1$ 为 $Ax=0$ 的解；　(B) $\eta_1+\eta_2$ 为 $Ax=b$ 的解；

(C) $\xi_1+\xi_2$ 为 $Ax=0$ 的解；　　　　(D) $\eta_1-\eta_2$ 为 $Ax=b$ 的解.

5、 设 A 是正交矩阵，α_j 是 A 的第 j 列，则 α_j 与 α_j 的内积等于（　　B　　）

(A)　0；　　　　(B)　1；　　　　(C)　2；　　　　(D)　3

三、填空(将正确答案填在题中横线上，每题 3 分，共 21 分)

1、设 A 为三阶方阵，且 $|A|=2$，则 $\left|(2A^T)^{-1}\right| =$ __1/16__

2、设 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma$ 都是 3 维行向量，且行列式

$$\begin{vmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_1\\ \beta_2\\ \gamma\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_2\\ \beta_1\\ \gamma\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ \gamma\end{vmatrix}=2，\text{则}\begin{vmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\ \beta_1+\beta_2\\ 2\gamma\end{vmatrix}=\underline{\quad 16\quad}.$$

3、设 A 是 4 阶矩阵，若齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系中含有一个解向量，
则 $AA^*=$ __O__

4、设矩阵 $D=\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}$，若 A、B 可逆，则 D 也可逆且 $D^{-1}=\underline{\begin{pmatrix}A^{-1} & O\\ O & B^{-1}\end{pmatrix}}$

5、若方程组 $\begin{cases}2x_1-3x_2+6x_3-5x_4=3\\ x_2-4x_3+x_4=1\\ 4x_1-5x_2+8x_3-9x_4=k\end{cases}$ 有解，则 $k=$ __7__

6、设 $\alpha_1=(k,1,1),\alpha_2=(0,2,3),\alpha_3=(1,2,1)$，则当 $k=$ __1/4__ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关。

7、t 满足 $\underline{-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}}$ 时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$ 是正定的.

四、设 $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$,且 $AX=B+X$，求 X.　（8 分）

五、设 $\alpha_1=(1,-1,2,4),\alpha_2=(0,3,1,2),\alpha_3=(3,0,7,14),\alpha_4=(2,1,5,6),\alpha_5=(1,-1,2,0)$

解 由 $AX=B+X$，$(A-I)X=B$，$|A-I|=\begin{vmatrix}4 & 1 & -2\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10 & 5\\ 5 & 3\end{vmatrix}\neq 0$，$A-I$ 可逆

求已知的向量组的一个含有 α_1,α_5 的极大线性无关组，并将其余向量用它线性表示。(8 分)

$$\therefore X=(A-I)^{-1}B\Rightarrow((A-I),B)=\begin{pmatrix}4 & 1 & -2 & 1 & -3\\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2\\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & -3 & -4 & -3 & -7\\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -2 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

[illegible]

向量组的一个含有α_1,α_5的极大线性无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$，$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2$； $\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

六、求方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0 \\ x_1-x_2-4x_3-3x_4=0 \end{cases}$的基础解系，并用它表示出方程组的通解.（10分）

解：对系数矩阵作初等变换：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 & -5 \\ 0 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \text{基础解系是}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

通解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ （k_3,k_4为任意常数）

七、 已知$\alpha_1=(1,1,0,0)$, $\alpha_2=(0,0,1,1)$, $\alpha_3=(1,0,0,4)$, $\alpha_4=(0,0,0,2)$ 是R^4的一组基， 设$\varepsilon_1=(1,0,0,0)$, $\varepsilon_2=(0,1,0,0)$, $\varepsilon_3=(0,0,1,0)$, $\varepsilon_4=(0,0,0,1)$，(8 分)

1、 求由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$到基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$的过渡矩阵.

2、 求ε_3在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的坐标.

解：由基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$到基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的过渡矩阵为$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

所以由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$到基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$的过渡矩阵为 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$

故向量ε_3在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的坐标为: $(0,1,0,-\frac{1}{2})$

八、用正交变换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-5x_1^2+x_2^2-x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3$为标准形， 并写出 所用

正交变换。(12 分)

解：$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=-5x_1^2+x_2^2-x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda+5 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda-1 & 0 \\ -3 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ \lambda-1 & 0 \end{vmatrix}+(\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda+5 & -2 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$=-9(\lambda-1)+(\lambda+1)[(\lambda-1)(\lambda+5)-4]=-9(\lambda-1)+(\lambda+1)[\lambda^2+4\lambda-9]$$

$$=-9\lambda+9+\lambda^3+4\lambda^2-9\lambda+\lambda^2+4\lambda-9=\lambda(\lambda^2+5\lambda-14)=\lambda(\lambda+7)(\lambda-2)$$

$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=2,\quad \lambda_3=-7$

$$e_1=\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right)^T,e_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},.\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T,e_3=\left(\frac{-4}{\sqrt{21}},\frac{1}{\sqrt{21}},\frac{2}{\sqrt{21}}\right)^T$$

正交矩阵 $P=\left[e_1 \quad e_2 \quad e_3\right]$经正交变换 $x=Py$，$f\left(x_1,x_2,x_3\right)$化为标准形：$2y_2^2-7y_3^2$

九、设 A,B 为 $n\times n$ 矩阵，证明: 如果 $AB=O$，那么 秩(A)+秩$(B)\le n$．(6 分)

证明：将 B 分块为：$B=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$，因为已知 $AB=O$

所以 $AB=A(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)=(A\beta_1,A\beta_2,\ldots,A\beta_n)=(0,0,\cdots,0)$

$\Rightarrow A\beta_i=0;(i=1,2,\cdots,n)\Rightarrow \beta_i$ 是方程组 $Ax=0$ 的解

取出方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系：$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$，其中 $r=$ 秩 (A)

所以 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 可由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 线性表出

故 秩$(B)=$秩$\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\}\le$ 秩$\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}\}=n-$秩$(A)$

$\Rightarrow$秩(A)+秩$(B)\le n$

北京林业大学 2009--2010 学年第一学期试卷

试卷名称：线性代数（56 学时 A 卷）　　课程所在院系：理学院

一、填空题(每小题 3 分，共 30 分)

1、行列式$\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ x+1 & (x+1)^2 & (x+1)^3 \\ x+2 & (x+2)^2 & (x+2)^3 \end{vmatrix} = \underline{2x(x+1)(x+2)}$。

2、设A为三阶方阵，已知$|A|=3$，则$|6A^{-1}-A^*| = \underline{\quad 9 \quad}$。

3、方程$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = 0$的解为$\underline{x=0, x=1, x=2}$。

4、设三阶矩阵A的三个特征值为$1,2,3$，则$|A^2-A+I| = \underline{\quad 21 \quad}$。

5、设$r(A)=3$，$r(B)=5$，则$r(A+B) \le \underline{\quad 8 \quad}$，$r(AB) \le \underline{\quad 3 \quad}$。

6、设矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & k \\ -1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$的秩为 2，则常数$k = \underline{\quad 1 \quad}$。

7、设$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$，则$A = \underline{\begin{pmatrix} -1 & 8 & 9 \\ -1 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}$。

8、已知向量组$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$[illegible]$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -2 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$线性相关，则$a = \underline{\quad 1 \quad}$。

9、已知实向量空间R^3有两组基$(I)\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；$(II)\beta_1=\alpha_1+\alpha_2, \beta_2=\alpha_2+\alpha_3, \beta_3=\alpha_3$，

则由基(I)到基(II)的过渡矩阵$P = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$。

10、二次型$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2(x_2+x_3)^2$ <u>不是</u>（是、不是）正定的。

二、单选题（每小题 3 分，共 15 分）

1、如果$\begin{vmatrix} a & 3 & 1 \\ b & 0 & 1 \\ c & 2 & 1 \end{vmatrix}=1$，则$\begin{vmatrix} a+1 & b+2 & c+3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$（ B ）。

$(A)\,0$　　　$(B)\,6$　　　$(C)\,1$　　　$(D)\,3$

2、下列命题成立的是（ B ）。

(A) 若 $A \neq O$，则$|A| \neq 0$；　　(B) 若$|A| \neq 0$，则 $A \neq O$；

(C) 若 $AB = AC$，则 $B = C$；　(D) 若 $AB = O$，则 $A = O$ 或 $B = O$。

3、向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$线性无关的充要条件是（ D ）。

(A) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 均不为零向量；

(B) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 中有一个部分向量组线性无关；

(C) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 中任意两个向量的对应分量不成比例；

(D) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 中任意一个向量都不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示。

4、设非齐次线性方程组 $Ax = b$ 中，系数矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 且 $r(A) = r$，则（ C ）。

(A) 当 $m = n$ 时，方程组 $Ax = b$ 有惟一解；

(B) 当 $r = n$ 时，方程组 $Ax = b$ 有惟一解；

(C) 当 $r = m$ 时，方程组 $Ax = b$ 有解；

(D) 当 $r < n$ 时，方程组 $Ax = b$ 有无穷多解。

5、设 n 阶矩阵 A 可逆，则 A（ D ）。

(A) 必有 n 个不同的特征值；　　(B) 必有 n 个线性无关的特征向量；

(C) 必相似于一可逆的对角矩阵；　(D) 特征值必不为零。

三、（10 分）解矩阵方程 $AX = B$，其中 $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$。

解：$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 3 & 5 & 7\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}14 & -8\\ 25 & -15\\ 33 & -18\end{pmatrix}$

四、（10 分）验证向量组 $\alpha_1=(3$ [illegible] $5)^T,\alpha_2=(2\ \ -5\ \ 0\ \ -3)^T,\alpha_3=(5\ 0\ \ -1\ 2)^T$，

$\alpha_4=(3$ [illegible] $-3\ \ 5)$ 的线性相关性，若线性相关，试求其中一个向量由其余向量线性表出的表达式。

解：$\begin{pmatrix}3 & 2 & 5 & 3\\ 4 & -5 & 0 & 3\\ -2 & 0 & -1 & -3\\ 5 & -3 & 2 & 5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 0\\ 0 & 1 & -5 & 6\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$r(A)=3$，向量组线性相关，

$\alpha_1=-\frac{1}{2}\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_3+\frac{1}{2}\alpha_4$，或 $\alpha_2=-2\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4$，

或 $\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4$，　　　或 $\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$。

五、（10 分）求非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3+x_4=1\\ 2x_1-x_2+x_3+2x_4=3\\ x_1-x_3+x_4=2\\ 3x_1-x_2+3x_4=5\end{cases}$ 的一般解。

解：$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 0 & 3 & 5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

六、（8 分）求一个正交变换，化二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ 为标准形。

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda-4 & 4\\ -2 & 4 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-9)$；

特征值$\lambda=9$对应特征向量$(1,-2,2)^T$，

二重特征值$\lambda=0$对应特征向量(x_1,x_2,x_3)，满足$-x_1+2x_2-2x_3=0$，

取两正交向量$(2,1,0)$和$(1,-2,-\frac{5}{2})$。

单位化后得 $Q=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{4}{5} & -\frac{2}{3}\\ 0 & -1 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$，$Q^TAQ=diag(0,0,9)$，

做正交变换$x=Qy$，得标准型$f=9y_3^2$。

七、（10分）设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\beta_1=\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3$，$\beta_2=2\alpha_1+\alpha_3$，

$\beta_3=4\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3$，证明$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关。

证明：设$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$，

$\Rightarrow(x_1+2x_2+4x_3)\alpha_1+(-x_1+x_3)\alpha_2+(2x_1+x_2-2x_3)\alpha_3=0$，

已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，得$\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3=0\\ -x_1 \qquad\quad +x_3=0\\ 2x_1+x_2-2x_3=0\end{cases}$，

系数行列式$\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=-5\neq0$，齐次线性方程组只有零解，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关。

八、（7分）证明：设A为$(2n+1)$阶正交矩阵，且$|A|=1$，则1是A的一个特征值。

证明：$\left|I-A\right|=\left|AA^T-A\right|=\left|A\right|\left|A^T-I\right|=\left|A^T-I\right|$

$=(-1)^n\left|I-A^T\right|=-\left|I-A\right|$，$\therefore\left|I-A\right|=0$，1是 A 的一个特征值。