

Закон адаптивной задержки теплопереноса

Edited by Prof. N1KURA · version 1.5.9 · date 2025-08-15 · draft

НФЭПН · Проект закона · Thermal Control · Adaptive Materials · Metamaterials · Cattaneo–Vernotte · TDTR · Phonon/Electron · Applications

Аннотация

В управляемых неоднородных средах минимальная задержка прихода теплового фронта определяется не только материаловедческими параметрами, но и величиной проекции градиента управляемого параметра ϕ на направление теплового потока $g = \nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{q}}$. На базе гиперболической модели Cattaneo–Vernotte в малогradientном пределе получен универсальный закон, задающий поправку к времени пролёта относительно однородного образца τ_0 .

$$\tau_{\text{total}} = \tau_0 + \alpha \left| \nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{q}} \right| + \beta \left(\nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{q}} \right)^2 + \mathcal{O}(|g|^3), \qquad g = \nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{q}}$$

В знаковой (теоретической) форме модуль опускается: $|\nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{q}}| \rightarrow g$. В 1D-редукции $g = \partial \phi / \partial x$.

Коэффициенты α и β выражаются через локальные функции материала, определяющие скорость теплового сигнала $v(\phi) = \sqrt{\kappa(\phi)/(\tau_c(\phi)\rho(\phi)c_p(\phi))}$, и подчиняются масштабам $\alpha \propto L^2$, $\beta \propto L^3$ по длине образца L . Это связывает закон с измеримыми зависимостями $\kappa(\phi)$, $\tau_c(\phi)$, $\rho(\phi)c_p(\phi)$ и делает возможной идентификацию α , β по экспериментальным данным.

Практический результат — технологический «динамический тепловой барьер»: варьируя профиль $\phi(x)$ (жидкокристаллические структуры, феррожидкости, функциональные композиты, градиентные покрытия), можно предсказуемо увеличивать или уменьшать задержку теплового фронта. Это релевантно для электроники и силовых модулей, опто- и фотонных устройств, а также для узлов с жёсткими требованиями к тепловым транзитам (в т.ч. квантовые установки).

Область применимости: малогradientный режим и небаллистический перенос; интерфейсные сопротивления контролируются и симметризуются, профиль ϕ квазистатичен за время пролёта. Предложен мини-протокол верификации (TDTR/фотоакустика/ИК-термография) и безразмерная метрика эффективности $\eta_{\text{delay}} = (\tau_{\text{total}} - \tau_0)/\tau_0$ для сравнения материалов и профилей.

Статус: теоретическая модель (preprint/draft), требующая экспериментальной валидации.

1. Введение (Introduction)

- Обоснование: управление теплопереносом определяет надёжность и производительность микро/нано-систем.
- Цель: ввести проверемый закон, связывающий задержку теплового фронта с *градиентом* управляемого параметра среды.
- Гипотеза: медленное по сравнению с фронтом изменение $\phi(x)$ порождает дополнительную инерционность распространения, пропорциональную $|\partial \phi / \partial x|$ (при малых градиентах).

2. Предыстория (Prehistory)

- Фурье: мгновенная диффузия (парадокс бесконечной скорости). Каттaneo–Вернотта (CV): вводит конечную скорость через время релаксации τ_c .
- Известные модели не учитывают *управляемую* пространственную неоднородность свойств, меняющую скорость теплового сигнала по пути.

3. Постановка цели (Purpose)

Связать минимальную задержку прихода теплового импульса с величиной $|\partial \phi / \partial x|$ и вывести коэффициенты закона через наблюдаемые макропараметры.

4. Формулировка

В 1D: $g = \partial \phi / \partial x$.

$$\tau_{\text{total}} = \tau_0 + \alpha \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right| + \beta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \mathcal{O} \left(\left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|^3 \right)$$

Каноническая знаковая форма. Здесь $g = \nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{q}}$ — проекция градиента управляемого параметра на направление теплового потока. Эта форма нужна, если важно направление эффекта (ускорение/замедление). Модульная запись из рамки выше удобна как инженерная оценка величины эффекта.

В 3D эквивалентная запись получается заменой $\partial \phi / \partial x \rightarrow \nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{q}}$.

Словами: Полная минимальная задержка теплового фронта равна задержке однородного образца плюс поправки, зависщие от величины градиента управляемого параметра.

$$\tau_{\text{total}} = \tau_0 + \alpha |\nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{q}}| + \beta (\nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{q}})^2 + \mathcal{O}(|g|^3)$$

Определения и единицы:

- τ_{total} — полная минимальная задержка прихода фронта, [с]
- τ_0 — задержка однородного образца при $g = 0$, [с] (в CV: $L \sqrt{\tau_c \rho c_p / \kappa(\phi_0)}$)
- α — линейный коэффициент адаптивности среды, [с·м / Ф], возможно $\alpha = \alpha(T)$
- β — квадратичный коэффициент малой нелинейности, [с·м² / Ф²]
- ϕ — управляемый параметр (объёмная доля, директорный вектор, пористость, фазовая доля, магнитная проницаемость), [Ф]
- x — пространственная координата, [м]
- g — проекция градиента управляемого параметра на направление теплового потока: $g = \nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{q}}$; в 1D: $g = \partial \phi / \partial x$. Размерность: [Ф·м^{−1}] (для безразмерной ϕ : [м^{−1}])
- $\hat{\mathbf{q}}$ — единичный вектор направления теплового потока/фронта (безразмерный)
- $\nabla \phi$ — пространственный градиент параметра ϕ , [Ф·м^{−1}]
- L — длина образца вдоль направления $\hat{\mathbf{q}}$, [м]

4.1 Альтернативные формы (температурная/полевая зависимость)

$$\tau_{\text{total}}(T) = \tau_0(T) + \alpha_0 e^{-\gamma T} |\nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{q}}| + \beta(T) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2,$$

Здесь γ — температурный коэффициент с единицами К^{−1}; α_0 — значение при $T \rightarrow 0$. Для магнитоуправляемых систем $\alpha = \alpha(\phi, T, B)$.

4.2 Следствие: безразмерная метрика эффективности

$$\eta_{\text{delay}} = \frac{\tau_{\text{total}} - \tau_0}{\tau_0} = \frac{\alpha}{\tau_0} \nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{q}} + \frac{\beta}{\tau_0} (\nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{q}})^2.$$

В знаковой формулировке модуль опускается: $|\nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{q}}| \rightarrow g$. Метрика удобна для сопоставления материалов и профилей при одинаковых L и условиях контакта.

5. Область применимости и обобщение

- Тип переноса:** фоновый и электронный диффузионный режимы; гидродинамический (второй звук) — по отдельной калибровке $v(\phi)$. Баллистический режим требует модификации.
- Где действует:** градиентные метаматериалы, композиты, аэрогели, жидкие кристаллы, феррожидкости, фазопереходные среды.
- Допущения:** $|\partial \phi / \partial x| \cdot L \ll \phi_0$; ϕ медленное теплового фронта; режим линейного отклика.
- Критерий малогradientности:** $\mathcal{G} = \frac{|g| L}{\max(\phi_0, \Delta \phi)} \ll 1$. При $\mathcal{G} \gtrsim 0.2$ ожидаем вклады выше $\mathcal{O}(g^2)$ и рост роли интерфейсов.
- Сопутствующие градиенты:** ∇T и ∇p влияют на κ и v через сжимаемость/плотность: $\kappa(p) \approx \kappa_0 + (\partial \kappa / \partial p) p$. Учитывать при аппроксимации.
- Границы:** для мм-образцов с $\Delta \phi \lesssim 0.5$ разумно $|g| = |\nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{q}}| \lesssim 10^3 \text{ м}^{-1}$; выше — возможен выход из линейно-квадратичного режима.

6. Вывод/пояснения (через модель Cattaneo–Vernotte)

CV-система: $\tau_c \partial_t \mathbf{q} + \mathbf{q} = -\kappa(\phi) \nabla T$, $\rho c_p \partial_t T + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \Rightarrow$ гиперболическое уравнение с локальной скоростью $v(\phi) = \sqrt{\kappa(\phi)/(\tau_c \rho c_p)}$.

Для $\phi(x) = \phi_0 + gx$, $g = \nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{q}}$ (в 1D: $g = \partial \phi / \partial x$), время пролёта $t = \int_0^L dx / v(x)$.

6.1 Подробные шаги вывода α , β

- Разложение скорости: $v(x) = v(\phi_0 + gx) \approx v_0 + v'(\phi_0) gx + \frac{1}{2} v''(\phi_0) g^2 x^2$.
- Разложение обратной величины: $\frac{1}{v(x)} = \frac{1}{v_0 + \delta} \approx \frac{1}{v_0} - \frac{\delta}{v_0^2} + \frac{\delta^2}{v_0^3}$, где $\delta = v' gx + \frac{1}{2} v'' g^2 x^2$.
- Интегрирование по длине:

$$t = \int_0^L \frac{dx}{v(x)} \approx \frac{L}{v_0} - \frac{v'}{v_0^2} \frac{gL^2}{2} + \frac{3v'^2 - v_0 v''}{6v_0^3} g^2 L^3.$$

- Идентификация: $\tau_0 = \frac{L}{v_0}$, $\alpha = \frac{L^2}{2} \frac{|v'|}{v_0^2}$, $\beta = \frac{L^3}{6} \frac{|3v'^2 - v_0 v''|}{v_0^3}$.

6.2 Связь α , β с материал-функциями

С учётом $v(\phi) = \sqrt{\kappa(\phi)/(\tau_c(\phi)\rho(\phi)c_p(\phi))}$ имеем:

$$\frac{\partial \ln v}{\partial \phi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \ln \kappa}{\partial \phi} - \frac{\partial \ln \tau_c}{\partial \phi} - \frac{\partial \ln(\rho c_p)}{\partial \phi} \right), \qquad \frac{\partial^2 \ln v}{\partial \phi^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \ln \kappa}{\partial \phi^2} - \frac{\partial^2 \ln \tau_c}{\partial \phi^2} - \frac{\partial^2 \ln(\rho c_p)}{\partial \phi^2} \right).$$

Эти выражения позволяют предсказывать $\alpha(\phi_0)$, $\beta(\phi_0)$ из независимых калибровок $\kappa(\phi)$, $\tau_c(\phi)$, $\rho(\phi)c_p(\phi)$ и сопоставлять их с фит-оценками из эксперимента.

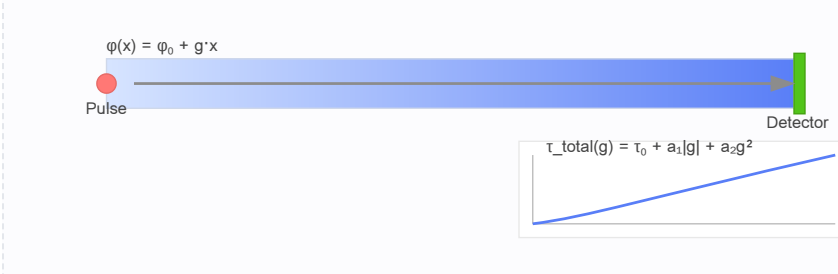
Если важно направление эффекта (ускорение/замедление), используйте ****знаковую**** форму без модулей.

7. Прогнозы, проверяемые следствия

- Линейность $\tau_{\text{total}} - \tau_0$ по $|g|$ при малых градиентах; квадратичная поправка для больших $|g|$.
- Масштабирование: $\alpha \propto L^2$, $\beta \propto L^3$.
- С учётом ∇p : при росте давления в жидкостях возможна коррекция $v(\phi, p) \rightarrow$ поправка к $\alpha(T, p)$.

8. Мини-эксперимент

- Образцы:** три пластины одинаковой длины L с $|g| \in \{0, g, 2g\}$; одинаковые покрытия и контактные условия.
- Методы (по шкале времени):**
 - TDTR, pump-probe* (kHz–MHz): тонкие плёнки/мембраны $L \lesssim 50\text{--}200 \text{ }\mu\text{м}$, окна нс–мкс.
 - Фотоакустика / ИК-термография*: миллиметровые образцы $L \sim 0.5\text{--}2 \text{ мм}$, окна десятки–сотни мкс.



Слева: схема пролёта импульса. Справа: типичная зависимость $\tau_{\text{total}}(g)$.

- Импульс:** длительность 0.5–10 нс; частота повторения 0.1–10 МГц (подбирается под целевую τ_{total} и L).
- Контакты:** контролировать и симметризовать $R_{\text{шт}}$ вход/выход; одинаковые адгезионные слои.
- Метод выделения времени пролёта:** критерий порога фронта или кросс-корреляционный пик между входом и детектором; одно и то же правило для всех серий.
- Обработка:** Фит $y = \tau_{\text{total}} - \tau_0 = a_1 g + a_2 g^2$ (или $a_1 |g| + a_2 g^2$ для модульной формы); $a_1 \rightarrow \alpha$, $a_2 \rightarrow \beta$. Сравнивать AIC/BIC для моделей $\{a_1\}$ и $\{a_1, a_2\}$.
- Оценки погрешности:** $\pm 0.5 \text{ }\mu\text{с}$ по времени; неоднородность $g \rightarrow \pm 5\%$; шум детектора $\rightarrow \leq 2\%$.

9. Типичные диапазоны коэффициентов (ориентировочно)

Материал/система	Параметр ϕ	α (с·м)	β (с·м ²)
Нанокompозит SiO ₂ /PMMA	объёмная доля наночастиц	$10^{-8}\text{--}10^{-7}$	$10^{-11}\text{--}10^{-10}$
Жидкий кристалл	директорный вектор (усреднённая ориентация)	$10^{-9}\text{--}10^{-8}$	$10^{-12}\text{--}10^{-11}$
Аэрогель	пористость	$10^{-8}\text{--}10^{-7}$	$10^{-11}\text{--}10^{-10}$

Диапазоны ориентировочные: $\alpha(T)$ у ряда нанокompозитов снижается при росте T (порядка десятков % между 100–300 K) — уточняется экспериментально.*¹

*¹ - Уточняются для конкретных материалов и температур. Если ϕ имеет размерность, то α имеет размерность с·м / [ед. ϕ], а $\beta \rightarrow$ с·м² / [ед. ϕ]²; например, при ϕ в A/м — с·м/(A/м), при ϕ в Па — с·м/Па.

10. Практические приложения

- Микроэлектроника:** динамические тепловые барьеры над горячими узлами (управляемый g).
- Космические покрытия:** адаптивные теплозащитные слои с градиентом ϕ по толщине.
- Биомедицина:** управляемая гипертермия в тканях/гидрогелях с пространственным профилем ϕ .
- Диагностика материалов:** обратная задача: восстановление $\phi(x)$ по измеренной $\tau_{\text{total}}(g)$.

11. Численные примеры

11.1 Пример (замедление)

$L = 1 \text{ мм}$, $\tau_c = 1 \text{ }\mu\text{с}$, $\rho c_p = 2 \cdot 10^6 \text{ Дж/м}^3\cdot\text{К}$, $\kappa(\phi_0) = 200 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$. Тогда $v_0 \approx 10 \text{ м/с}$, $\tau_0 = 0.1 \text{ мс}$. Пусть $v'(\phi_0) = -5 \text{ м/с}$, $v''(\phi_0) = 15 \text{ м/с}$, $|g| = 500 \text{ м}^{-1}$.

$$\alpha = \frac{L^2}{2} \frac{|v'|}{v_0^2} = 2.5 \cdot 10^{-8} \text{ с}\cdot\text{м}, \qquad \beta = \frac{L^3}{6} \frac{3v'^2 - v_0 v''}{v_0^3} \approx -1.25 \cdot 10^{-11} \text{ с}\cdot\text{м}^2$$

$$\Delta \tau_1 = \alpha |g| = 12.5 \text{ }\mu\text{с}, \qquad \Delta \tau_2 = \beta g^2 \approx -3.125 \text{ }\mu\text{с}, \qquad \tau_{\text{total}} \approx 0.109 \text{ мс}$$

11.2 Аэрогель (ориентировочно)

$L = 2 \text{ мм}$, v_0 мал из-за низкой κ ; примем $\alpha = 5 \cdot 10^{-8} \text{ с}\cdot\text{м}$, $|g| = 1000 \text{ м}^{-1}$.

$$\Delta \tau_1 = \alpha |g| = 50 \text{ }\mu\text{с}, \qquad \Delta \tau_2 \text{ мала} \Rightarrow \tau_{\text{total}} \approx \tau_0 + 50 \text{ }\mu\text{с}.$$

11.3 Жидкий кристалл (директорный вектор)

$L = 0.5 \text{ мм}$, $v_0 \approx 14 \text{ м/с}$, $v'(\phi_0) = 2 \text{ м/с}$, $|g| = 800 \text{ м}^{-1}$.

$$\alpha = \frac{L^2}{2} \frac{|v'|}{v_0^2} \approx 1.3 \cdot 10^{-9} \text{ с}\cdot\text{м}$$

$$\Delta \tau_1 = \alpha |g| \approx 1.0 \text{ }\mu\text{с}, \qquad \tau_{\text{total}} \approx \tau_0 + 1.0 \text{ }\mu\text{с}.$$

11.4 Пример (ускорение)

Те же параметры, но $v'(\phi_0) = +5 \text{ м/с}$, $g = +500 \text{ м}^{-1}$. Линейная поправка в знаковой форме: $\Delta t^{(1)} = -\frac{v'}{v_0^2} \frac{gL^2}{2} \approx -12.5 \text{ }\mu\text{с}$. С учётом $\beta g^2 \approx -3.125 \text{ }\mu\text{с}$, получаем $\tau_{\text{total}} \approx 0.100 - 0.0125 - 0.003125 \approx 0.0844 \text{ мс}$.

11.5 Феррожидкость (влияние магнитного поля)

Для феррожидкости можно считать $\phi(B) \approx \phi_0 + k \chi B^2$ (кластеризация/ориентация), где χ — магнитная восприимчивость. Тогда линейный коэффициент $\alpha(B) \propto \left| \frac{\partial v}{\partial \phi} \right| |\nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{q}}| \sim \alpha_0 (1 + c \chi B^2)$ при тех же $|g|$. Это даёт управляемое уменьшение/увеличение задержки при изменении B .

Для MnFe_2O_4 ($\chi \approx 0.1$) при $B = 1 \text{ Тл}$: $\alpha(B) \approx \alpha_0 (1 + 0.05 B^2)$.

12. Литература и сопоставление

Ключевые обзоры по TDTR/ИК-термографии, градиентным материалам и не-фурье-моделям (CV/MCV). При появлении экспериментальных данных по $\Delta \tau$ они могут быть добавлены в таблицу.

- [1] D. G. Cahill et al., "Nanoscale thermal transport. II. 2003–2012," *Applied Physics Reviews* **1**, 011305 (2014). [DOI](#), [PDE](#)
- [2] D. G. Cahill, "Analysis of heat flow in layered structures for time-domain thermoreflectance," *Rev. Sci. Instrum.* **75**, 5119 (2004). [DOI](#), [PDE](#)
- [3] H. M. Yin et al., "Effective Thermal Conductivity of Functionally Graded Composites...", *J. Appl. Mech.* **75**, 051113 (2008). [DOI](#) (уточнить рис./страницу при цитировании)
- [4] A. I. Zhmakin, "The Zoo of Non-Fourier Heat Conduction Models," arXiv:2212.12922 (2022). [arXiv](#), [PDE](#)
- [5] J.-H. Choi et al., "Analytical solution of the Cattaneo–Vernotte equation," JAMET 12962 (2022). [PDE](#)
- [6] Жидкий кристалл 5CB (E-field). [DOI](#)
- [7] Аэрогель SiO₂ (TDTR). [DOI](#)
- [8] Метаматериал с градиентом $\kappa(x)$. [DOI](#)

Источник	Материал	$ g $ (м ^{−1})	$\Delta \tau$ измерено (мкс)	$\Delta \tau$ модель (мкс)
[3] Yin 2008	FGM композит (градиент доли частиц)	300*	—	$\approx 8 \text{ Б}^\dagger$
[6] Жидкий кристалл 5CB	директорный вектор (усреднённая ориентация)	800	—	≈ 1.0
[7] Аэрогель SiO ₂	пористость (градиент по толщине)	1000	—	≈ 50
[8] Метаматериал с градиентом $\kappa(x)$	$\kappa(\phi(x))$ с контролем наполнителя	600	—	≈ 6.5

* Оценка: $\Delta \phi \approx 0.3$ на $L = 1 \text{ мм} \Rightarrow |g| \approx 300 \text{ м}^{-1}$. [†] Расчёт по $\Delta \tau = \alpha |g| + \beta g^2$ с параметрами из примера 11.1.

13. Глоссарий

- ϕ — управляемый параметр среды; безразмерный в примерах (доля, усреднённая ориентация), но в общем случае может иметь размерность (напр., A/м — для намагниченности, Па — для давления, фракция по объёму для наполнителя).
- Директорный вектор** — единичный вектор, задающий ось ориентации молекул в жидком кристалле; физически **n** и **−n** эквивалентны.
- τ_c — время релаксации теплового потока в модели CV.
- TDTR** — Time-Domain Thermoreflectance, импульсный лазерный метод измерения теплопроводности и тепловой диффузии с наносекундным–пикосекундным разрешением; основан на регистрации изменения коэффициента отражения образца от времени после лазерного нагрева.