Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова»**

**(БГТУ им. В.Г. Шухова)**

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем

# Индивидуальное домашнее задание №1

**По дисциплине:** «Математический анализ»

**Вариант №3**

**Выполнил: студент группы** ВТ-231

Борченко Александр Сергеевич

**Проверил:**

Хлопов Андрей Михайлович

Белгород 2023

Борменко А. ВТ-231

№2

1

$x^4-8x^3+24x^2-50x+90$, $c=2$

$$
\begin{array}{l|l}
-\,x^4-8x^3+24x^2-50x+90 & x-2 \\
\underline{x^4-2x^3} & \boxed{x^3-6x^2+12x-26} \\
-\,-6x^3+24x^2-50x+90 & \\
\underline{-6x^3+12x^2} & \\
-\,12x^2-50x+90 & \\
\underline{12x^2-24x} & \\
-\,-26x+90 & \\
\underline{-26x+52} & \\
38 \text{ (ост)} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
-\,x^3-6x^2+12x-26 & x-2 \\
\underline{x^3-2x^2} & \boxed{x^2-4x+4} \\
-\,-4x^2+12x-26 & \\
\underline{-4x^2+8x} & \\
-\,4x-26 & \\
\underline{4x-8} & \\
-18 \text{ (ост.)} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
-\,x^2-4x+4 & x-2 \\
\underline{x^2-2x} & \boxed{x-2} \\
-\,-2x+4 & \\
\underline{-2x+4} & \\
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
-\,x-2 & x-2 \\
\underline{x-2} & 1 \\
0 &
\end{array}
$$

~~$x^4+2x^3-3x^2-4x+2$~~ Борменко А. ВТ-231 2

$$x^4-8x^3+24x^2-50x+90=38-18\cdot(x-2)+(x-2)^2+(x+2)^3.$$

## №3

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{5n+1}=\frac{3}{5}:=\forall\varepsilon>0.\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\forall n>N\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\frac{3n-1}{5n+1}-\frac{3}{5}\right|>\varepsilon$$

$$\left|\frac{15n-5-15n-3}{25n+5}\right|>\varepsilon$$

$$\left|\frac{-8}{25n+5}\right|<\varepsilon$$

Для любого натурального $n$ выполняется $25n+5>0$, то $n<\frac{-8}{\varepsilon}+5$.

Ответ: $N(\varepsilon)>\left[-\frac{8}{\varepsilon}+5\right]+5$

## №4

1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3}=\frac{9-24n+16n^2}{n^3-9n^2+27n-27-(n^3+9n^2+27n+27)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9-24n+16n^2}{-18n^2-54}=\frac{\frac{9}{n^2}-\frac{24n}{n^3}+\frac{16n^2}{n^2}}{-\frac{18n^2}{n^2}-\frac{54}{n^2}}=-\frac{16}{18}=\boxed{-\frac{8}{9}}$$

Борченко А. ПТ-231

3

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^5+3}-\sqrt{n-3}}{\sqrt[5]{n^5+3}-\sqrt{n-3}} = \boxed{e}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{5+8n^3}-2n\right) = \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{8}{5}} \cdot \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[5]{\dfrac{8+5}{x^3}} - \dfrac{2}{x^{\frac{3}{5}}}\right)$

$= \boxed{\infty}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1}\right)^{-n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\left(\dfrac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1}\right)^{n^3}}$

Используя свойство: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{b\cdot x} = e^{a\cdot b}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+4\cdot\dfrac{n}{2n^2+3n-1}\right)^{\frac{2n^2+3n-1}{4n}\cdot n^3\cdot 4\cdot\frac{n}{2n^2+3n-1}} =$

$= e^{4\cdot n\cdot\frac{n^3}{2n^2+3n-1}} = e^{\infty} = \boxed{\infty}$

$\sqrt{5}$

1) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{7x^2+4x-3}{2x^2+3x+1} = \boxed{10}$

Не стал расписывать, т.к. в этих номерах нет ошибок, только там, где ошибки, там распишу.

2) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2+3x-28}{x^3-64} = \boxed{\dfrac{11}{48}}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+7x-2}{-x+3x^3-4} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4+2x-5}{2x^2+x+7} = \boxed{+\infty}$

Борченко А. ВТ-231

4

5) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x-2}{x^3-x^2-x+1} = \boxed{-\infty}$

6) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1} = \boxed{\dfrac{\sqrt{5}}{20}}$

7) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x^2-16}} = \boxed{0}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{-x} = \boxed{e^2\cdot\sqrt{e}}$

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{x\cdot\sin x} =$ по формуле косинуса двойного угла: $1-\cos(x) = 2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2$

$1-\cos 4x = 2\sin(2x)^2$

$\sin 2x \sim 2x$

$\sin x \sim x$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} 2\cdot\dfrac{(2x)^2}{x\cdot x} = \boxed{8}$

10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\ln(1+2x)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \sin 3x \sim \lim\limits_{x\to 0} 3x$

$\lim\limits_{x\to 0} \ln(2x+1) \sim \lim\limits_{x\to 0} 2x$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} 3\cdot\dfrac{x}{\ln(1+2x)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{x}{x} = \boxed{\dfrac{3}{2}}$

11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x} = \boxed{-\dfrac{5}{3}}$

Борисенко А. ВТ-231

5

№6.

$f(x) = \frac{3x}{1-x}$; $\varphi(x) = \frac{x}{4+x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x(4+x)}{(1-x)x} = -3$$

$-3 \neq 0 \Rightarrow f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \to 0$ являются б.м. одного порядка.

Ответ: доказано.

№7.

$f(x) = -5x^2 - 9$ ; $x_0 = 3$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-3| < \delta$

$|-5x^2 - 9 - (-5\cdot 3^2 - 9)| < \varepsilon$

$|-5x^2 - \cancel{9} + 45 + \cancel{9}| < \varepsilon$

$|-5x^2 + 45| < \varepsilon$

$|-5(x^2-9)| < \varepsilon$

$|-5(x-3)(x+3)| < \varepsilon$

$|x+3| = |(x-3)+6| < \delta + 6$

$|-5(x-3)(x+3)| < \delta(\delta+6)$

$\delta(\delta+6) < \frac{\varepsilon}{-5}$

$\delta^2 + 6\delta + \frac{\varepsilon}{5} < 0 \quad | \cdot 5$

Борченко А.
БТ-231

6

$5\delta^2+30\delta+\varepsilon<0$

$D=900-4\cdot5\cdot\varepsilon=900-20\varepsilon$

$\delta(\varepsilon)=\dfrac{-30+\sqrt{900-20\varepsilon}}{10}$

$\boxed{\text{Ответ: } \delta(\varepsilon)=\dfrac{-30+\sqrt{900-20\varepsilon}}{10}.}$

№8

$f(x)=\dfrac{x+5}{x-3}$; $x_1=3$, $x_2=4$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

$x_1=3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+5}{x-3}=\dfrac{8}{0}=\infty$

В точке $x_1=3$ функция не определена $\Rightarrow$
$\Rightarrow f(3)$ не является непрерывной.

$x_2=4 \Rightarrow \lim\limits_{x\to4}\dfrac{x+5}{x-3}=\dfrac{9}{1}=9$

В точке $x_2=4$ $f(4)$ является непрерывной

Ответ: в точке $x_1=3$ функция не является непрерывной. В точке $x_2=4$ функция является непрерывной

№9.

$f(x)=\begin{cases}3x+4, & x\le-1\\ x^2-2, & -1<x<2\\ x, & x\ge2\end{cases}$

Решение: Борченко А. ВТ-231 7

Функция меняет свое аналитическое задание в точках $x_1=-1$; $x_2=2$

Вычислю пределы:

$x_1=-1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1-0} 3\cdot(-1-0)+4=1$; $\lim\limits_{x\to -1+0}(3\cdot(-1+0)+4)=1$

Пределы равны, функция по равному ограничена и слева, и справа.

В точке $x_1=-1$ функция определена:

$f(-1)=3\cdot(-1)+4=1$

Функция в точке $x=-1$ непрерывна

$x_2=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=2$; $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=2$

$f(2)=2$ функция непрерывна.

Построю график.