Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова»

(БГТУ им. В.Г. Шухова)

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем

Лабораторная работа №1.3

По дисциплине: «Дискретная математика»

Тема: «Теоретико-множественные тождества»

Выполнил: студент группы ВТ-231

Борченко Александр Сергеевич

Проверили:

Островский Алексей Мячиславович

Рязанов Юрий Дмитриевич

Белгород 2024

Цель работы: изучить методы доказательства теоретико-множественных тождеств.

Задание:

Два теоретико-множественных выражения (ТМВ) назовём тождественными, если их значения равны при любых значениях входящих в них множеств. Тождественность теоретико-множественных выражений B1 и B2 будем обозначать как B1 ~ B2. Если B1 и B2 не тождественны, то будем писать $\overline{\mathrm{B1} \sim \mathrm{B2}}$.

Дано множество ТМВ (см. варианты заданий).

Нужно получить все двухэлементные подмножества этого множества, состоящие из тождественных ТМВ, и составить из них тождества. Для проверки тождественности ТМВ использовать методы доказательства теоретико-множественных тождеств:

1) метод эквивалентных преобразований;

2) теоретико-множественный метод.

Применяя метод эквивалентных преобразований, нужно ТМВ преобразовать в совершенную нормальную форму Кантора, используя разложение Шеннона.

Для сокращения количества проверок на тождественность ТМВ можно использовать следующие правила:

1) если B1 ~ B2, то B2 ~ B1;

2) если B1 ~ B2 и B2 ~ B3, то B1 ~ B3;

3) если B1 ~ B2 и B2 ~ B3, то B1 ~ B3.

Для автоматизации проверки тождественности ТМВ рекомендуется разработать программное обеспечение (ПО). Функциональность разрабатываемого ПО согласовать с преподавателем.

Вариант №2

Вариант 2. Дано множество ТМВ:

$\{\bar{C} - (\bar{C} - (\bar{B} \cap A \,\Delta\, B)),\ C \,\Delta\, (A \cup B) \,\Delta\, (C \cap A),\ (A - C) \cap (C - A \cup B),$

$(A \cup B) \cap ((\bar{A} \cup B) \cap \bar{B} \cup \bar{C}),\ \overline{A \cap B} \cap C \cup A \cap \bar{C}\}$

Применю метод эквивалентных преобразований. Нужно ТМВ преобразовать в совершенную нормальную форму Кантора, используя разложение Шеннона

Выражение №1:

$$\bar{C} - (\bar{C} - (\bar{B} \cap A \,\Delta\, B))$$

Разложение Шеннона для выражения №1:

$\bar{C} - (\bar{C} - (\bar{B} \cap A \,\Delta\, B)) =$

$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap (\bar{\emptyset} - (\bar{\emptyset} - (\bar{\emptyset} \cap \emptyset \,\Delta\, \emptyset)) \cup$

$\bar{A} \cap \bar{B} \cap C \cap (U - (U - (\bar{\emptyset} \cap \emptyset \,\Delta\, \emptyset)) \cup$

$\bar{A} \cap B \cap \bar{C} \cap (\bar{\emptyset} - (\bar{\emptyset} - (\bar{U} \cap \emptyset \,\Delta\, U)) \cup$

$A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap (\bar{\emptyset} - (\bar{\emptyset} - (\bar{\emptyset} \cap U \,\Delta\, \emptyset)) \cup$

$A \cap B \cap \bar{C} \cap (\bar{\emptyset} - (\bar{\emptyset} - (\bar{U} \cap U \,\Delta\, U)) \cup$

$A \cap \bar{B} \cap C \cap (\bar{U} - (\bar{U} - (\bar{\emptyset} \cap U \,\Delta\, \emptyset)) \cup$

$\bar{A} \cap B \cap C \cap (\bar{U} - (\bar{U} - (\bar{U} \cap \emptyset \,\Delta\, U)) \cup$

$A \cap B \cap C \cap (\bar{U} - (\bar{U} - (\bar{U} \cap U \,\Delta\, U)) =$

$$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap \emptyset$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} \cap C \cap \emptyset$$

$$\boldsymbol{\bar{A} \cap B \cap \bar{C} \cap U}$$

$$\boldsymbol{A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap U}$$

$$\boldsymbol{A \cap B \cap \bar{C} \cap U}$$

$$A \cap \bar{B} \cap C \cap \emptyset$$

$$\bar{A} \cap B \cap C \cap \emptyset$$

$$A \cap B \cap C \cap \emptyset$$

Совершенная НФК для выражения №1: $\bar{A}B\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C} \cup AB\bar{C}$.

Выражение №2:

$$C \Delta (A \cup B) \Delta (C \cap A)$$

Разложение Шеннона для выражения №2:

$C \Delta (A \cup B) \Delta (C \cap A) =$

$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap (\emptyset \Delta (\emptyset \cup \emptyset) \Delta (\emptyset \cap \emptyset)) \cup$

$\overline{A} \cap \overline{B} \cap C \cap (U \Delta (\emptyset \cup \emptyset) \Delta (U \cap \emptyset)) \cup$

$\overline{A} \cap B \cap \overline{C} \cap (\emptyset \Delta (\emptyset \cup U) \Delta (\emptyset \cap \emptyset)) \cup$

$A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap (\emptyset \Delta (U \cup \emptyset) \Delta (\emptyset \cap U)) \cup$

$A \cap B \cap \overline{C} \cap (\emptyset \Delta (U \cup U) \Delta (\emptyset \cap U)) \cup$

$A \cap \overline{B} \cap C \cap (U \Delta (U \cup \emptyset) \Delta (U \cap U)) \cup$

$\overline{A} \cap B \cap C \cap (U \Delta (\emptyset \cup U) \Delta (U \cap \emptyset)) \cup$

$A \cap B \cap C \cap (U \Delta (U \cup U) \Delta (U \cap U)) =$

$$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \emptyset$$

$$\boldsymbol{\overline{A} \cap \overline{B} \cap C \cap U}$$

$$\boldsymbol{\overline{A} \cap B \cap \overline{C} \cap U}$$

$$\boldsymbol{A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap U}$$

$$\boldsymbol{A \cap B \cap \overline{C} \cap U}$$

$$\boldsymbol{A \cap \overline{B} \cap C \cap U}$$

$$\overline{A} \cap B \cap C \cap \emptyset$$

$$\boldsymbol{A \cap B \cap C \cap U}$$

Совершенная НФК для выражения №2: $\overline{A}\overline{B}C \cup \overline{A}B\overline{C} \cup A\overline{B}\overline{C} \cup AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup ABC$.

Выражение №3:

$$(A - C) \cap (\mathrm{C} - \mathrm{A} \cup \mathrm{B})$$

Разложение Шеннона для выражения №3:

$(A - C) \cap (\mathrm{C} - \mathrm{A} \cup \mathrm{B}) =$

$\bar{\mathrm{A}} \cap \bar{\mathrm{B}} \cap \bar{\mathrm{C}} \cap ((\emptyset - \emptyset) \cap (\emptyset - \emptyset \cup \emptyset)) \cup$

$\bar{\mathrm{A}} \cap \bar{\mathrm{B}} \cap C \cap ((\emptyset - \mathrm{U}) \cap (\mathrm{U} - \emptyset \cup \emptyset)) \cup$

$\bar{\mathrm{A}} \cap B \cap \bar{\mathrm{C}} \cap ((\emptyset - \emptyset) \cap (\emptyset - \emptyset \cup \mathrm{U})) \cup$

$\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}} \cap \bar{\mathrm{C}} \cap ((\mathrm{U} - \emptyset) \cap (\emptyset - \mathrm{U} \cup \emptyset)) \cup$

$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \bar{\mathrm{C}} \cap ((\mathrm{U} - \emptyset) \cap (\emptyset - \mathrm{U} \cup \mathrm{U})) \cup$

$\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}} \cap \mathrm{C} \cap ((\mathrm{U} - \mathrm{U}) \cap (\mathrm{U} - \mathrm{U} \cup \emptyset)) \cup$

$\bar{\mathrm{A}} \cap B \cap \mathrm{C} \cap ((\emptyset - \mathrm{U}) \cap (\mathrm{U} - \emptyset \cup \mathrm{U})) \cup$

$\mathrm{A} \cap B \cap \mathrm{C} \cap ((\mathrm{U} - \mathrm{U}) \cap (\mathrm{U} - \mathrm{U} \cup \mathrm{U})) =$

$$\bar{\mathrm{A}} \cap \bar{\mathrm{B}} \cap \bar{\mathrm{C}} \cap \emptyset$$

$$\bar{\mathrm{A}} \cap \bar{\mathrm{B}} \cap C \cap \emptyset$$

$$\bar{\mathrm{A}} \cap B \cap \bar{\mathrm{C}} \cap \emptyset$$

$$\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}} \cap \bar{\mathrm{C}} \cap \emptyset$$

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \bar{\mathbf{C}} \cap \mathbf{U}$$

$$\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}} \cap \mathrm{C} \cap \emptyset$$

$$\bar{\mathrm{A}} \cap B \cap \mathrm{C} \cap \emptyset$$

$$\mathrm{A} \cap B \cap \mathrm{C} \cap \emptyset$$

Совершенная НФК для выражения №3: $\mathrm{AB}\bar{\mathrm{C}}$

Выражение №4:

$$(A \cup B) \cap ((\overline{\text{A}} \cup B) \cap \overline{\text{B}} \cup \overline{\text{C}})$$

Разложение Шеннона для выражения №4:

$(A \cup B) \cap ((\overline{\text{A}} \cup B) \cap \overline{\text{B}} \cup \overline{\text{C}}) =$

$\overline{\text{A}} \cap \overline{\text{B}} \cap \overline{\text{C}} \cap ((\emptyset \cup \emptyset) \cap ((\overline{\emptyset} \cup \emptyset) \cap \overline{\emptyset} \cup \overline{\emptyset}) \cup$

$\overline{\text{A}} \cap \overline{\text{B}} \cap C \cap ((\emptyset \cup \emptyset) \cap ((\overline{\emptyset} \cup \emptyset) \cap \overline{\emptyset} \cup \overline{\text{U}}) \cup$

$\overline{\text{A}} \cap B \cap \overline{\text{C}} \cap ((\emptyset \cup \text{U}) \cap ((\overline{\emptyset} \cup \text{U}) \cap \overline{\text{U}} \cup \overline{\emptyset}) \cup$

$\text{A} \cap \overline{\text{B}} \cap \overline{\text{C}} \cap ((\text{U} \cup \emptyset) \cap ((\overline{\text{U}} \cup \emptyset) \cap \overline{\emptyset} \cup \overline{\emptyset}) \cup$

$\text{A} \cap \text{B} \cap \overline{\text{C}} \cap ((\text{U} \cup \text{U}) \cap ((\overline{\text{U}} \cup \text{U}) \cap \overline{\text{U}} \cup \overline{\emptyset}) \cup$

$\text{A} \cap \overline{\text{B}} \cap \text{C} \cap ((\text{U} \cup \emptyset) \cap ((\overline{\text{U}} \cup \emptyset) \cap \overline{\emptyset} \cup \overline{\text{U}}) \cup$

$\overline{\text{A}} \cap B \cap \text{C} \cap ((\emptyset \cup \text{U}) \cap ((\overline{\emptyset} \cup \text{U}) \cap \overline{\text{U}} \cup \overline{\text{U}}) \cup$

$\text{A} \cap B \cap \text{C} \cap ((\text{U} \cup \text{U}) \cap ((\overline{\text{U}} \cup \text{U}) \cap \overline{\text{U}} \cup \overline{\text{U}}) =$

$$\overline{\text{A}} \cap \overline{\text{B}} \cap \overline{\text{C}} \cap \emptyset$$

$$\overline{\text{A}} \cap \overline{\text{B}} \cap C \cap \emptyset$$

$$\boldsymbol{\overline{\text{A}} \cap B \cap \overline{\text{C}} \cap \text{U}}$$

$$\boldsymbol{\text{A} \cap \overline{\text{B}} \cap \overline{\text{C}} \cap \text{U}}$$

$$\boldsymbol{\text{A} \cap \text{B} \cap \overline{\text{C}} \cap \text{U}}$$

$$\text{A} \cap \overline{\text{B}} \cap \text{C} \cap \emptyset$$

$$\overline{\text{A}} \cap B \cap \text{C} \cap \emptyset$$

$$\text{A} \cap B \cap \text{C} \cap \emptyset$$

Совершенная НФК для выражения №4: $\overline{\text{A}}B\overline{\text{C}} \cup \text{A}\overline{\text{B}}\overline{\text{C}} \cup \text{A}\text{B}\overline{\text{C}}$.

Выражение №5:

$$\overline{A \cap B} \cap C \cup A \cap \bar{C}$$

Разложение Шеннона для выражения №5:

$\overline{A \cap B} \cap C \cup A \cap \bar{C} =$

$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap (\overline{\emptyset \cap \emptyset} \cap \emptyset \cup \emptyset \cap \bar{\emptyset}) \cup$

$\bar{A} \cap \bar{B} \cap C \cap (\overline{\emptyset \cap \emptyset} \cap U \cup \emptyset \cap \bar{U}) \cup$

$\bar{A} \cap B \cap \bar{C} \cap (\overline{\emptyset \cap U} \cap \emptyset \cup \emptyset \cap \bar{\emptyset}) \cup$

$A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap (\overline{U \cap \emptyset} \cap \emptyset \cup U \cap \bar{\emptyset}) \cup$

$A \cap B \cap \bar{C} \cap (\overline{U \cap U} \cap \emptyset \cup U \cap \bar{\emptyset}) \cup$

$A \cap \bar{B} \cap C \cap (\overline{U \cap \emptyset} \cap U \cup U \cap \bar{U}) \cup$

$\bar{A} \cap B \cap C \cap (\overline{\emptyset \cap U} \cap U \cup \emptyset \cap \bar{U}) \cup$

$A \cap B \cap C \cap (\overline{U \cap U} \cap U \cup U \cap \bar{U}) =$

$$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap \emptyset$$

$$\boldsymbol{\bar{A} \cap \bar{B} \cap C \cap U}$$

$$\bar{A} \cap B \cap \bar{C} \cap \emptyset$$

$$\boldsymbol{A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap U}$$

$$\boldsymbol{A \cap B \cap \bar{C} \cap U}$$

$$\boldsymbol{A \cap \bar{B} \cap C \cap U}$$

$$\boldsymbol{\bar{A} \cap B \cap C \cap U}$$

$$A \cap B \cap C \cap \emptyset$$

Совершенная НФК для выражения №5: $\bar{A}\bar{B}C \cup A\bar{B}\bar{C} \cup AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$.

Преобразовав каждое выражение можно заметить, что совершенная НФК выражения №1 и совершенная НФК выражения №4 содержит тождественно равные конституенты. Можно сделать вывод о том, что ТМВ №1 и ТМВ №4 образовывают необходимое двухэлементное подмножество, так как эти ТМВ тождественны по первому правилу, а именно: «если В1 ~ В2, то В2 ~ В1»

Теперь воспользуюсь теоретико-множественным методом. Суть теоретико-множественного метода заключается в том, что нужно подставить под множества A, B, C индексы конституент.

При таком методе тождество будет доказано, если совпадет конечный результат. Напишу программу на языке C.

Код программы:

```c
#include <stdio.h>
#include <stdbool.h>
#include <string.h>

typedef unsigned int set;
//Универсом
set U = {0,1,2,3,4,5,6,7};
/*Выбрано от 0 до 7 включительно, т.к
 * в формуле 2^n, где n - кол-во вариантов.
 * Следовательно, универмом будет 2^3 = 8, а
 * мощность каждого множества 2^(n-1)*/

set TMV1(set a, set b, set c) {
//act(i) - поочередные действия
    set act1 = ~b;//дополнение до U
    set act2 = act1 & a;//пересечение с a
    set act3 = act2 ^ b;//симм. разность между act2 и b
    set addition_c = ~c;/*дополнение до U
сделано для удобства и сокращения
 количества действий*/
    set act4 = addition_c - act3;//дополнение до U c разность 3 действия
    set act5 = addition_c - act4;//дополнение до U c разность 4 действия
    return act5;//Результат ТМВ1
}

set TMV2(set a, set b, set c) {
    set act1 = a | b;//объединение a и b
    set act2 = c & a;//пересечение c и a
    set act3 = c ^ act1;//симм. разность c и действия 1
    set act4 = act3 ^ act2;//симм. разность действия 3 и 2
    return act4;//Результат ТМВ2
}

set TMV3(set a, set b, set c) {
    set act1 = a - c;//разность a и c
    set act2 = c - a;//разность c и a
    set act3 = act2 | b;//объединение 2 действия с b
    set act4 = act1 & act3;//пересечение действия 1 и 3
    return act4;//Результат ТМВ3
}

set TMV4(set a, set b, set c) {
    set addition_a = ~a;//дополнение до U a
    set addition_b = ~b;//дополнение до U b
    set addition_c = ~c;//дополнение до U c
    set act1 = addition_a | b;//дополнение до U a объединение b
    set act2 = act1 & addition_b;//действие 1 пересечение дополнение до U b
    set act3 = act2 | addition_c;//действие 2 обьединение дополнение до U c
    set act4 = a | b;//a объединение b
    set act5 = act4 & act3;//действие 4 пересечение действие 3
    return act5;//Результат ТМВ4
}
```

```
set TMV5(set a, set b, set c) {
    set addition_c = ~c;//дополнение до U c
    set act1 = a & b;//a пересечение b
    set act2 = ~act1;//дополнение до U всего действия 1
    set act3 = act2 & c;//действие 2 пересечение с
    set act4 = a & addition_c;//a объединение дополнение до U c
    set act5 = act3 | act4;//действие 3 объединение действия 4
    return act5;//Результат ТМВ5
}

void Set_theoretic_method() {

    bool identit[5][5] = {0};//число 5 - т.к 5 тождественности

    memset(identit, 1, sizeof(identit));
    for (size_t i = 0; i < 5; i++)
        identit[i][i] = false;

    set a = {{1, 3, 5, 7}, &U};//расположение множества по кругам
    set b = {{2, 3, 6, 7}, &U};//расположение множества по кругам
    set c = {{4, 5, 6, 7}, &U};//расположение множества по кругам

    set t1 = TMV1(a, b, c);
    set t2 = TMV2(a, b, c);
    set t3 = TMV3(a, b, c);
    set t4 = TMV4(a, b, c);
    set t5 = TMV5(a, b, c);

    set sets[] = {t1, t2, t3, t4, t5};
    for (size_t i = 0; i < 5; i++)
        for (size_t j = 0; j < 5; j++)
            if (sets[i] != sets[j])
                identit[i][j] = false;

    for (size_t i = 0; i < 5; i++)
        for (size_t j = 0; j < 5; j++)
            if (identit[i][j])
                printf("\n%zu%zu", i + 1, j + 1);

}

int main() {
    Set_theoretic_method();
    return 0;
}
```

Результат выполнения программы:

```
"C:\Users\Александр\CLionProjects\

14
41
Process finished with exit code 0
```

Результат совпал с результатом, полученным методом эквивалентных преобразований. Следовательно ТМВ №1 и ТМВ №4 образовывают необходимое двухэлементное подмножество, так как эти ТМВ тождественны по первому правилу, а именно: «если В1 ~ В2, то В2 ~ В1»

Вывод: в ходе выполнения лабораторной работы я изучил и применил методы доказательства теоретико-множественных тождеств.