[redacted]

№2

$x-c: \; x^5+x^4-7x^3+12x^2+6x-2$

$c=-5$

	1	1	−7	12	6	−2
−5	1	−4	13	−53	271	−1357

остат.

$x^5+x^4-7x^3+12x^2+6x-2 \,/\, x+5 =$

$= (x^4-4x^3+13x^2-53x+271)\cdot$

$\cdot(x+5)-1357$

№3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+15}{6-n} = -5$$

Для $\forall \varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon) \in N$, что для $\forall\, n \in N$ выполняется неравенство:

$$\left| \frac{5n+15}{6-n} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{5n+15}{6-n} + 5 \right| < \varepsilon$$

$$30 \quad -5n$$

$$\left| \frac{5n+15+5(6-n)}{6-n} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{45}{6-n} \right| < \varepsilon$$

Для $\forall n$ выполняется следующее неравенство:

$$6-n < \frac{45}{\varepsilon}$$

$$n > \left| 6 + \frac{45}{\varepsilon} \right|$$

$$N(\varepsilon) > \left| 6 + \frac{45}{\varepsilon} \right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3-(2n+3)^3}{(2n+1)^2+(2n+3)^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3+12n^2+6n+1-(8n^3+36n^2+54n+27)}{4n^2+4n+1+4n^2+12n+9}=\lim_{n\to\infty}\frac{-24n^2-48n-26}{8n^2+16n+10}=$$

$$=\frac{-\frac{24n^2}{n^2}-\frac{48n}{n^2}-\frac{26}{n^2}}{\frac{8n^2}{n^2}+\frac{16n}{n^2}+\frac{10}{n^2}}=\frac{-24}{8}=-3$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^8+6}-\sqrt{n-6}}{\sqrt[8]{n^8+6}+\sqrt{n-6}}=\frac{\sqrt{\frac{n^8}{n^2}+\frac{6}{n^2}}-\sqrt{\frac{n}{n^2}-\frac{6}{n^2}}}{\sqrt[8]{\frac{n^8}{n^8}+\frac{6}{n^8}}+\sqrt{\frac{n}{n^2}-\frac{6}{n^2}}}=\frac{\sqrt{n^6}}{1}=+\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^3-1}\right)=$$

$$=\left|\begin{array}{l} n=\frac{1}{x}\\ x=\frac{1}{n}\\ x\to\frac{1}{\infty}=0 \end{array}\right|=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\frac{8x^3+1}{x^3}}}{x}\cdot\left(x\sqrt{-\frac{x^3-1}{x^3}}-\sqrt{2x^2+1}\right)=$$

$$= -\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{8x^3+1}\left(\frac{\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{x}} - \sqrt{2x^2+1}\right)}{x^{\frac{5}{2}}} =$$

$$= -\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{8 \cdot 0^3 + 1} \cdot \left(\frac{\sqrt{1-0^3}}{\cdot 0} - \sqrt{2 \cdot 0^2 + 1}\right)}{0 \cdot 0} = -\infty$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n^3+2} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{11}{6n+4}\right)^{3n^3+2} =$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{11}{6n+4}\right) = ^{-\frac{6n+4}{11}\left(-\frac{99n^2-66n+44}{18}\right)+ \frac{10}{9}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\overset{\text{II}}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{e^{\frac{99n^2-66n+44}{18}}} = \lim_{n \to \infty} -\frac{99n^2-66n+44}{18} = \left| \begin{matrix} n = \frac{1}{x} \quad x = \frac{1}{n} \\ x \to \frac{1}{\infty} = 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{18}\lim_{x\to 0} - \frac{44x^2 - 66x + 99}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{18}\lim_{x\to 0} - \frac{44\cdot 0^2 + 66\cdot 0 - 99}{0^2} =$$

$$= -\infty$$

№5

$$\lim_{x\to 3} \frac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 - 7x + 3} = \lim_{x\to 3}\left(\frac{x(3x+2) - 3(3x+2)}{x(2x-1) - 3(2x-1)}\right) = \lim_{x\to 3}\left(\frac{(3x+2)(x-3)}{(2x-1)(x-3)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 3}\left\{\frac{3x+2}{2x-1}\right\} = \lim_{x\to 3} \frac{3\cdot 3+2}{2\cdot 3-1} =$$

$$= \frac{11}{5}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+2x}{x^2+4x+4} = \lim_{x\to -2} \frac{x(x+2)}{(x+2)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x}{x+2} = \frac{-2}{-2+2} = \frac{-2}{0}$$

не существует

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4-2x^2-7}{3x^4+3x+5} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^4}{x^4}-\frac{2x^2}{x^4}-\frac{7}{x^4}}{\frac{3x^4}{x^4}+\frac{3x}{x^4}+\frac{5}{x^4}} =$$

$$= \cancel{3}\ \lim$$

$$= \frac{3}{3} = 1$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{x^3+x^2-x^2-x-x-1}{x^4+x^3-x^3-x^2+x^2+x+x+1} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{x^2(x+1)-x(x+1)-(x+1)}{x^3(x+1)-x^2(x+1)+x(x+1)+1(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x-1)}{(x+1)(x^3-x^2+x+1)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{x^2-x-1}{x^3-x^2+x+1} =$$

$$= \frac{(-1)^2-(-1)-1}{(-1)^3-(-1)^2-1+1} = -\frac{1}{2} =$$

$$= -0{,}5$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{11x^3+3x}{2x^2-2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{11x^3}{x^2}+\frac{3x}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{11x+\frac{3}{x}}{2-\frac{2}{x}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-4}\frac{\sqrt{x+20}-4}{x^3+64}=\lim_{x\to-4}\frac{\sqrt{x+20}-4}{x^3+64}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt{x+20}+4}{\sqrt{x+20}+4}=\lim_{x\to-4}\frac{x+20-16}{(x+4)(x^2-4x+16)\cdot}$$

$$\overline{\cdot(\sqrt{x+20}+4)}=\lim_{x\to-4}\frac{1}{(x^2-4x+16)(\sqrt{x+20}+4)}=$$

$$=\frac{1}{((-4)^2-4\cdot(-4)+16)\cdot(\sqrt{-4+20}+4)}=$$

$$=\frac{1}{384}$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt[3]{x^3+8}}=\frac{\sqrt[3]{(x^3+8)^2}}{3\sqrt[3]{(x-6)^2}\cdot x^2}=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$f(x)=\sqrt[3]{x-6}+2 \underset{x\to -2}{=} 0$$

$$g(x)=\sqrt[3]{x^3+8} \underset{x\to -2}{=} 0$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{((-2)^3+8)^2}}{3\cdot\sqrt[3]{(-2-6)^2}\cdot(-2)^2}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{x+2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{2}+\frac{5}{2}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

$$\frac{1}{x}\to 0$$

$$=e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos^3 4x}{3x^2}=$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} - \frac{(\cos 4x - 1)(\cos 4x)(\cos 4x + 1)}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} (-1 \cos 4x)(\cos 4x + 1) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\cos 4x - 1}{x^2} = -\frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\cos 4x - 1}{x^2} =$$

$$= -\frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 2x}{x^2} =$$

$$= \frac{4}{3}\lim_{x\to 0} 4\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)^2 =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$= \frac{4}{3}\lim_{x\to 0} 4 = \frac{16}{3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+4x^2)}{2x^3} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{4\ln(4x^2+1)^{\frac{1}{4x^2}}}{x} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{4\ln(e)}{x}$$

$$\lim_{x\to -0} \frac{4\ln(e)}{x} = \frac{4\ln(e)}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to +0} \frac{4\ln(e)}{x} = \frac{4\ln(e)}{+0} = \infty$$

$$\lim_{x\to -0} \frac{4\ln(e)}{x} \neq \lim_{x\to +0} \frac{4\ln(e)}{x} \Rightarrow$$

предела в ~~этой~~ точке $x \to 0$ не существует

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin \pi(x+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\cdot \pi x} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\pi x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{\pi x(\sqrt{x+1}+1)} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{\pi} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{0+1}+1}$$

$$= \frac{1}{2\pi}$$

№6

$f(x) = 1 - \cos 4x$

$\varphi(x) = x \sin 2x$

Для сравнения бесконечно малых функций нужно взять предел $x \to a$ отношения этих функций

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{2x^2\,\frac{\sin 2x}{2x}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-1}{2x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}4\cdot\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2=\lim_{x\to 0}\underline{4}\Rightarrow$$

в $\Rightarrow f(x)$ и $\varphi(x)$ – одного порядка

№7

$f(x)=-3x^2-9 \quad x_0=3$

функция есть непрерывная

$\delta(\varepsilon)$ – ?

Определение непрерывности в точке имеет следующий вид: для $\forall$ $\delta(\varepsilon)$ что для

$\forall x \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Для текущего примера имеем следующую запись:

$\forall \varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, для $\forall x$

$0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |-3x^2 - 9 - (-3 \cdot 3^2 - 9)| < \varepsilon$

$|-3x^2 - 9 + 36| < \varepsilon$

$|-3x^2 + 27| < \varepsilon$

$|-3(x^2 - 9)| < \varepsilon$

$|-3(x-3)(x+3)| < \varepsilon$

$|x+3| = |(x-3)+6|$

$|(x-3)+6| \leq \delta + 6$

$-3(x-3)(x+3) < -3\delta(\delta+6) < \varepsilon$

$(x-3)(x+3) < \delta(\delta+6) < \frac{\varepsilon}{-3}$

$\delta(\delta+6) < -\frac{\varepsilon}{3}$

$\delta(\delta+6) + \frac{\varepsilon}{3} < 0$

$\delta^2 + 6\delta + \frac{\varepsilon}{3} < 0$

$$D = 36 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = 36 - \frac{4\varepsilon}{3}$$

$$\delta_1 = \frac{-6 + \sqrt{36 - \frac{4\varepsilon}{3}}}{2}$$

$$\delta_2 = \frac{-6 - \sqrt{36 - \frac{4\varepsilon}{3}}}{2} \text{ — н.к.}$$

$$\delta = \frac{-6 + \sqrt{36 - \frac{4\varepsilon}{3}}}{2}$$

№8

Определение: функция $f(x)$ является непрерывной в точке $\cancel{x_1, x_2}$ x_1, x_2 если левый и правый пределы равны и совпадают со значением функции в точке

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2} \qquad x_1 = 2$$

$$\lim_{x \to x_1 - 0} \frac{x+1}{x-2} = \qquad x_2 = 3$$

$$= \lim_{x \to 2-0} \frac{2-0+1}{2-0-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to x_1+0} \frac{x+1}{x-2} = \lim_{x \to 2+0} \frac{2+0+1}{2+0-2} =$$

$= \infty \Rightarrow$ левый и правый предел не совпадают, таким образам функция не являетая непрерывной

№9

Исследовать функцию на непрерывность и построить её график

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le 0 \\ (x+1)^2, & 0 < x \le 2 \\ -x+4, & x > 2 \end{cases}$$

точка 0:

$$\lim_{x \to 0-0} (x+1) = +1$$

$$\lim_{x \to 0+0} (x+1) = +1$$

$$\lim_{x \to 0+0} (x+1)^2 = +1$$

$$\lim_{x \to 0-0} (x+1)^2 = +1$$

точка 2:

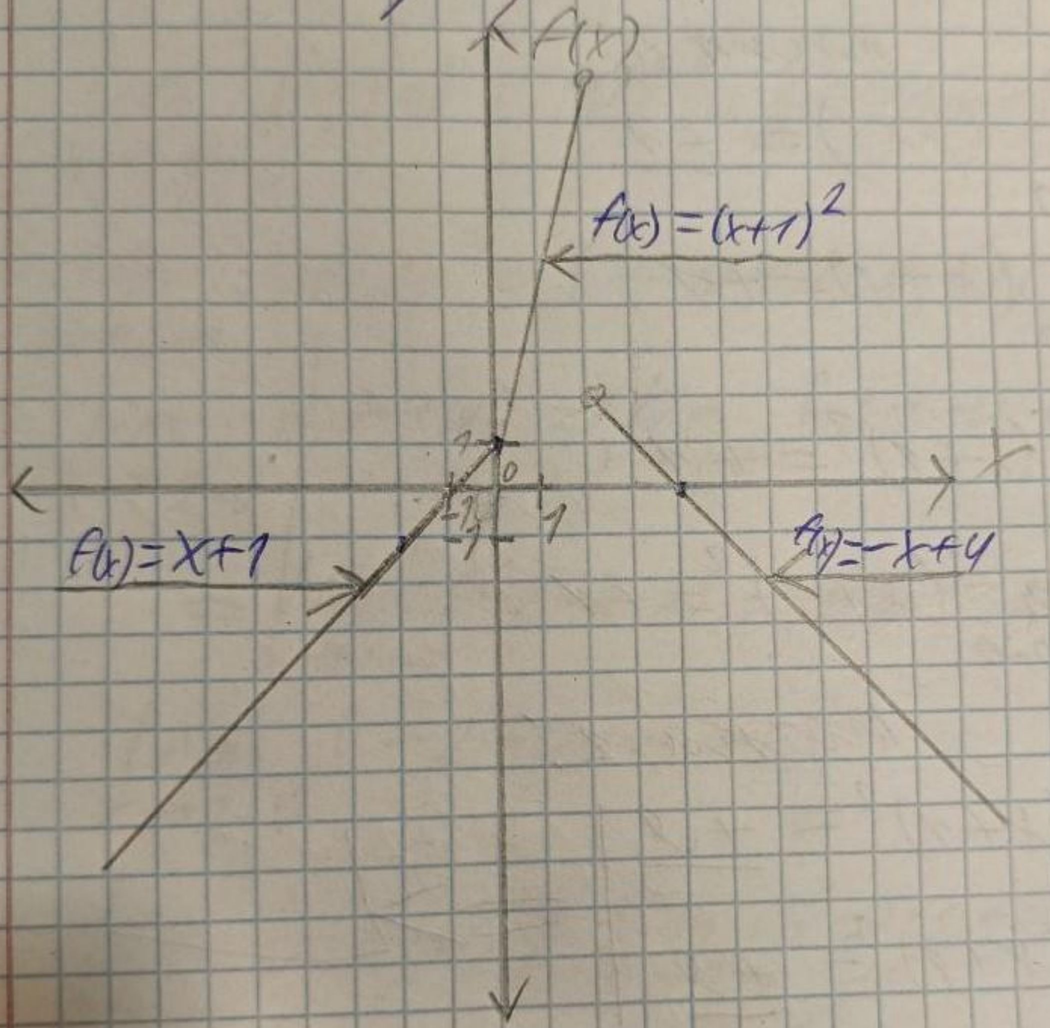
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2-0} (x+1)^2 = +9 \\ \lim\limits_{x \to 2+0} (x+1)^2 = +9 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2-0} (-x+4) = -2+0+4 = +2 \\ \lim\limits_{x \to 2+0} (-x+4) = -2-0+4 = +2 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ разрыв в точке 2, так как пределы не совпадают

Графики:



$f(x)=(x+1)^2$

$x=2 \quad f(x)=x^2+2x+1=4+4+1=9$

$x=0 \quad f(x)=x^2+2x+1=1$

$f(x)=x+1$

$x=0 \quad f(x)=1$

$x=-2 \quad f(x)=-1$