1. Множеством называется совокупность определенных вполне различаемых объектов, рассматриваемых как единое целое. Создатель теории множеств Георг Кантор давал следующее определение множества — «множество есть многое, мыслимое нами как целое».

2. Отдельные объекты, из которых состоит множество, называются элементами множества.

3. Множество называются конечным, если число его элементов конечно, то есть если существует натуральное число n, являющееся числом элементов множества. A={a 1 ,a 2 ,a 3 ,...,a n }.

4. Множество называется бесконечным, если оно содержит бесконечное число элементов. B={b 1 ,b 2 ,b 3 , ...}.

5. Пустое множество — множество, не содержащее ни одного элемента — ∅.

6. Число элементов в конечном множестве M называется мощностью множества M и обозначается |M|.

7. Два множества называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов, то есть представляют собой одно и тоже множество.

8. Счетное множество — это такое множество A, все элементы которого могут быть занумерованы в последовательность (может быть бесконечную) a 1 , a 2 , a 3 , ..., a n , ... так, чтобы при этом каждый элемент получил ишь один номер n и каждое натуральное число n было бы в качестве номера дано одному и лишь одному элементу нашего множества.

9.

1. **Определение 15.** Отображение $\overline{f}$ множества N всех натуральных чисел в множество функций называется последовательностью функций.

10.

Определение 16. Точка $x \in X$ называется точкой сходимости последовательности (f_n), если сходится последовательность чисел $f_1(x),\ldots$. Последовательность (f_n) называется точечно сходящейся, если множество всех точек сходимости совпадает с множеством X. Точечно сходящаяся последовательность обозначается знаком $f_n \to$. Функция f называется точечным пределом последовательности функций (f_n), если $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ для всех $x \in X$. Будем писать $f_n \to f$, если f есть точечный предел последовательности (f_n).

11.

Определение 17. Величина $\sup\limits_{x\in D_f}|f(x)|$. (D_f – область определения функции), конечная или бесконечная, называется равномерной нормой функции и обозначается $\|f\|_\infty$ или, короче, $\|f\|$.

12.

Определение 18. Функция f называется равномерным пределом последовательности функций (f_n), если $\|f - f_n\| \to 0$ при $n \to +\infty$. В этом случае будем писать $f_n \rightrightarrows f$.

13.

Теорема 3 *(о равномерном пределе произведения)*. Пусть $f_n \rightrightarrows f, g_n \rightrightarrows g$, $\|f_n\| < +\infty$, $\|g_n\| < +\infty$ для всех $n\in N$. Тогда $f_n \cdot g_n \rightrightarrows f \cdot g$ (подразумевается, что $X = D_{f_n} = D_{g_n} = D_f = D_g$ для всех $n\in N$).

14.

Определение 19. Последовательность функций (f_n) называется равномерно фундаментальной, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $n_\varepsilon \in N$, такой, что для всех $n > n_\varepsilon$ и $m > n_\varepsilon$ $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$.

Это условие можно переписать в эквивалентной форме $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in N$ $\forall n > n_\varepsilon \quad \forall p \in N \quad \|f_n - f_{n+p}\| < \varepsilon$.

15.

Теорема 4. *(критерий Коши)*. Последовательность функций (f_n) равномерно сходится тогда и только тогда, когда она равномерно фундаментальна.

16.

Теорема 5 *(о непрерывности предела)*. Пусть все функции f_n, $n\in N$ непрерывны в точке $x_0 \in X$, $X = D_{f_n}$ при всех $n\in N$. Если $f_n \rightrightarrows f$, то функция f непрерывна в точке x_0 .

17. Разность $\Delta x = x - x_0$ назовём приращением независимой переменной в точке x_0 , разность – $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ – соответствующим приращением функции.

18. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ разностное отношении функции f(x) для точек x_0 , и x.

19. Производная $y' = f'(x)$ характеризует скорость изменения функции $y = f(x)$.

20. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0, то она в этой точке непрерывна.

21. Касательная к графику функции в точке – это предельное положение секущей в данной точке. Производная функции в точке x_0 численно равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в данной точке.

22. Если функция $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные в точке x то:

1. Их сумма $f(x) + g(x)$ имеет производную в точке x причем $(f(x) * g(x))' = f'(x) + g'(x)$
2. Их произведение $f(x) * g(x)$ имеет производную в точке x, причем $(f(x) * g(x))' = f'(x) * g(x) + g'(x) * f(x)$
3. При дополнительном условии $g(x) \neq 0$ их отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ имеет производную в точку x, причем $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$

23. Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 а функция $z = g(x)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, то $h(x)$ имеет производную в точке x_0 причем $h'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$.

24. Пусть функция $y = y(x)$ дифференцируема в точку x_0 и имеет обратную функцию $x = x(y)$ в окрестности точки $y_0 = y(x_0)$. Кроме того

$y'(x_0) \neq 0$ тогда обратная функция дифференцируема в точке y_0 причем

$x'(y) = \frac{1}{y'(x)}$.

25. Если функции $\psi(t)$ (пси), $\varphi(t)$ дифференцируемы и $\varphi(t)' \neq 0$

то заданная параметрически функция $y = y(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$ будет также дифференцируема, причем $y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)'}$ Одна и та же переменная (пример y) может рассматриваться либо как функция x либо как функция t. В подобных ситуациях для уточнения по какой переменной происходит дифференцирование вместо штриха употребляют нижний индекс $y'(t) = y'_t$.

26. Передел $\lim_{(x\to 0)} = \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (Первый замечательный предел)

27. Показательная функция $y = e^x$ с основанием е называется экспонентой.

28. Логарифмическая функция по основанию е называется натуральным логарифмом

29. Гиперболический синус shx = $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$

30. Гиперболический косинус chx = $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$

31. Гиперболический тангенс thx = $\frac{shx}{chx}$

32. Гиперболический котангенс cthx = $-\frac{chx}{shx}$

33. Разность квадратов гиперболической функции $ch^2x - sh^2 = 1$

34. Двойной гиперболический синус sh2x = 2shx*chx

35. Двойной гиперболический косинус $ch2x = ch^2x + sh^2x$

36. Число а называется пределом функции f(x) при x стремящемся к x_0, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое достаточно малое положительное число δ, что в проколотой окрестности $\acute{v}_\delta$ (x_0) точки x_0 выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$
$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$

37. Пределы функции при $x \to x_0 + 0$ и при $x \to x_0 - 0$ называются односторонними. Приближение к предельной точке слева(+) или справа(-)

38. Двухсторонний предел $x \to x_0$ (одновременно слева и справа)

38.

Определение 32. Пределы функции при $x \to x_0 +$ и при $x \to x_0 -$ будем называть **односторонними пределами**, а предел при $x \to x_0$ – **двусторонним.**

39.

Теорема 23 (о связи двустороннего предела функции с односторонними**).** Двусторонний предел функции при $x \to x_0$ существует тогда и только тогда, когда существуют оба соответствующих односторонних предела и они равны. При этом двусторонний предел равен односторонним.

Определение 30. Число a называется **пределом функции** $f(x)$ при x стремящемся к x_0, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое достаточно малое положительное число δ , что в проколотой окрестности $\dot{u}_\delta(x_0)$ точки x_0 выполняется неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$

$$\left\{a=\lim_{x\to x_0} f(x)\right\} \overset{df}{\Leftrightarrow} \{\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ x\in\dot{u}_\delta(x_0)\Rightarrow|f(x)-a|<\varepsilon\}$$

Число x_0 называется предельной точкой. Условие $x\in\dot{u}_\delta(x_0)$, очевидно, эквивалентно неравенству $0<|x-x_0|<\delta$.

Геометрический смысл этого определения иллюстрируется рис. 1: если значения x

попадают в интервал $(x_0-\delta,x_0)$ или $(x_0,x_0+\delta)$, то соответствующие значения y попадают в интервал $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$.

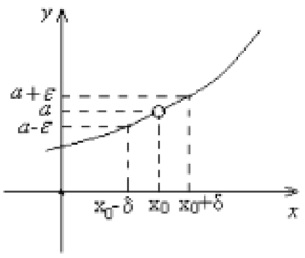


Рис. 1. Геометрический смысл определения предела.

Если элементарная функция $f(x)$ определена в точке x_0, то ее предел при x, стремящемся к x_0, часто равен ее значению в этой точке (в этом случае функция называется непрерывной): $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Например, $\lim_{x\to 0}\sin x=0$, $\lim_{x\to 0}\cos x=1$ и т.д.

Однако, в общем случае, функция может быть не определена в точке x_0, но при этом иметь предел при $x\to x_0$. Чтобы подчеркнуть это, на рис. 1 точка (x_0 , a) изображена в виде пустого кружочка.

41.

Определение 33. Число a называется пределом функции $y=f(x)$ при x, стремящемся к $+\infty$, если при достаточно больших x значения y будут сколь угодно близки к числу a . Более точно это определение формулируется так.

Определение 34. Число a называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к $+\infty$, если для любого, сколь угодно малого, положительного числа ε существует такое достаточно большое положительное число δ, что при $x>\delta$ выполняется неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$, то есть

$$\left\{a=\lim_{x\to+\infty} f(x)\right\} \Leftrightarrow^{df} \{\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ x>\delta \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon\}.$$

Определение 35. Число a называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к ∞, если для любого, сколь угодно малого, положительного числа ε существует такое достаточно большое положительное число δ , что при $|x|>\delta$ выполняется неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$:

$$\left\{a=\lim_{x\to+\infty} f(x)\right\} \Leftrightarrow^{df} \{\forall\varepsilon>0 | \exists\delta>0:\ |x|>\delta \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon\}.$$

Неравенство $|x|>\delta$ эквивалентно условию $x\in u_\delta(\infty)=u_\delta(-\infty)\cup u_\delta(+\infty)$ Другими словами, число a называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности, если оно является пределом этой функции как при x, стремящемся к $+\infty$, так и при x, стремящемся к $-\infty$.

Геометрический смысл этого определения представлен на рис. 5.

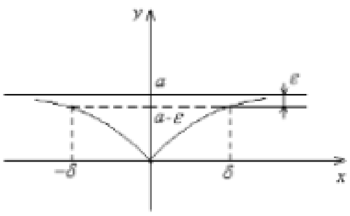


Рис. 5. Геометрический смысл предела функции при $x\to\infty$.

42.

Теорема 24. Предел постоянной равен этой постоянной: $\lim_{x\to\infty} C = C$.

43.

Определение 37. Функция $y=f(x)$ называется ограниченной сверху на интервале (a,b) , если $\exists\, M\in R$: $f(x)<M$, $\forall x\in(a,b)$.

44.

Определение 38. Функция $y=f(x)$ называется ограниченной на интервале (a,b) снизу, если $\exists\, m\in R$: $f(x)>m$, $\forall x\in B$.

45.

Определение 39. Функция y=f(x) называется ограниченной на интервале (a,b), если она ограничена на этом интервале и снизу, и сверху.

Функция является ограниченной на интервале (a,b) тогда и только тогда, когда $\exists\ \mu \in R: |f(x)|< \mu\ \ \forall x\in(a,b)$. Совершенно аналогично дается определение ограниченной (сверху, снизу) функции на сегменте или полуинтервале.

46.

Определение 40. Функция называется локально ограниченной в * (или ограниченной при x→*), если существует окрестность $\dot{u}_\delta(*)$, в которой эта функция ограничена.

47.

Определение 41. Функция называется неограниченной в точке * (при x→*), если для любого (сколь угодно большого) числа M>0 и для любого числа δ>0 найдется хотя бы одна точка $x_1 \in \dot{u}_\delta(*)$ такая, что $|f(x_1)|> M$:

$\forall M>0$ и $\forall \delta>0\ \exists\ x_1\in u_\delta(*): |f(x_1)|>M$.

48.

Определение 42. Функция *f(x)* называется бесконечно большой (*б.б.*) при x→* $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon): x\in\dot{u}_\delta(*) \Rightarrow |f(x)|>\varepsilon$.

Если функция является бесконечно большой (б.б.) при x→*, говорят, что ее предел при этом стремлении аргумента равен бесконечности:

$$\lim_{x\to *} f(x)=\infty.$$

49.

1. **Определение 45.** Функция f(x) называется бесконечно малой (б.м.) при x→*, если ее предел при этом стремлении равен нулю:

$$\{f(x)-б.м.\ \text{при}\ x\to *\} \overset{df}{\Leftrightarrow} \{\lim_{x\to *} f(x)=0\}.$$

Другими словами, функция f (x) называется б.м. при x →*, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ x\in\dot{u}_\delta(*)\Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$$

50.

Теорема 30. Алгебраическая сумма конечного числа б.м. – есть б.м.:

$$\{\alpha(x),\beta(x)\ -\ б.м.\ \text{при}\ x\to *\}\ \Rightarrow\ \{h(x)=\alpha(x)+\beta(x)\ -\ б.м.\ \text{при}\ x\to *\}$$

51.

Теорема 31. Произведение б.м. $\alpha(x)$ при x→* на локально ограниченную $f(x)$ при этом стремлении есть функция б.м. при x→*.

52.

Следствие 2. Произведение б.м. на постоянную – есть б.м.

53.

Теорема 33. Если функция $f(x)$ – б.б. при $x\to*$, то функция $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ – б.м. при этом стремлении аргумента.

54.

Теорема 35. (О единственности предела). Если предел функции $f(x)$ существует, то он единственен.

55.

Теорема 36. Пусть существуют конечные пределы $\lim_{x\to*} f(x)=a$, $\lim_{x\to*} g(x)=b$.

Тогда существует конечный предел суммы функций $\varphi(x)=f(x)+g(x)$ при $x\to*$ и он равен $a+b$: $\lim_{x\to*}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to*} f(x)+\lim_{x\to*} g(x)$.

* - 1 из 6 вариантов:

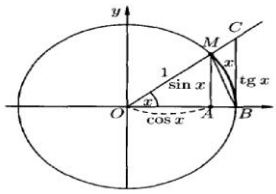
1) x->x0;   2) x = 0;   3) x > x0;   4) x->∞;   5) x->(+∞);   6) x->(-∞);

55. Пусть существует конечные пределы $\lim_{x\to*} f(x) = a$ и $\lim_{x\to*} g(x) = b$,тогда существует конечный предел суммы функции ϕ(фи)= f(x)+g(x)=a+b: $\lim_{x\to*} f(x) + g(x) = \lim_{x\to*} f(x) + \lim_{x\to*} g(x)$.

56. Пусть существует конечные пределы $\lim_{x\to*} f(x) = a$ и $\lim_{x\to*} g(x) = b$,тогда существует конечный предел суммы функции ϕ(фи)= f(x)×g(x)=a × b: $\lim_{x\to*} f(x) \times g(x) = \lim_{x\to*} f(x) \times \lim_{x\to*} g(x)$.

57. Постоянную можно выносить за знак предела. Действительно пусть c – постоянная. Тогда $\lim_{x\to*} c \times f(x) = \lim_{x\to*} c \times \lim_{x\to} f(x) = c \times \lim_{x\to*} f(x)$ (поскольку предел постоянной равен этой постоянной).

58. Пусть существует конечные пределы $\lim_{x\to*} f(x) = a$ и $\lim_{x\to*} g(x) = b$, при этом b≠0 тогда существует конечный предел частного ϕ(фи) $= \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$: $\lim_{x\to*} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to} f(x)}{\lim_{x\to} g(x)}$.



Первый замечательный предел: $\lim_{x\to0}\frac{sinx}{x} = 1$

59. Следствия из теоремы о первом замечательном пределе:

1) Предел $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x} = a$;

2) Предел $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$;

3) Предел $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$;

4) Предел $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$;

5) Предел $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(x^2)} = \frac{1}{2}$;

60. Предел $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ называют вторым замечательным пределом.

61. Следствия из теоремы о втором замечательном пределе:

1) Предел $\lim_{x\to 0}((1+x)^{\frac{1}{x}}) = e$;

2) Предел $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$;

3) Предел $\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{x}})-1}{x} = 1$;

4) Предел $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = (e^a)$;

62. Если существует конечный предел $\lim_{x\to *}\frac{f(x)}{g(x)}$, то f(x) и g(x) называют б.м (б.б) одного порядка малости (роста) при $x \to *$.

63. См пункт 62.

64. Если предел $\lim_{x\to *}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$, то функции f(x) и g(x) называются эквивалентными при $x \to *$ (при этом используется обозначение $f(x) \sim g(x)$ при $x \to *$).

65.

$$\sin x \sim x$$
$$tgx \sim x$$
$$\arcsin x \sim x$$
$$arctgx \sim x$$

$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$$
$$\ln(1+x) \sim x$$
$$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$$
$$e^x - 1 \sim x$$
$$a^x - 1 \sim x\ln a$$
$$\sqrt[p]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{p}$$

66. Разность двух эквивалентных б.м функций f(x) и g(x) имеет высший порядок малости по сравнению с каждой из них.