Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова»

(БГТУ им. В.Г. Шухова)

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем

Индивидуальное домашнее задание №1

По дисциплине: «Математический анализ»

Вариант №3

Выполнил: студент группы ВТ-231

Борченко Александр Сергеевич

Проверил:

Хлопов Андрей Михайлович

Белгород 2023

Номер задания в кружочке

Вариант 3.

№2

$f(x)=x^4-8x^3+24x^2-50x+90$, $c=2$

$g(x)=x-2$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4-8x^3+24x^2-50x+90 & x-2 \\
\underline{x^4-2x^3} & \overline{x^3-6x^2+12x-26} \\
\quad -6x^3+24x^2-50x+90 & \\
\quad \underline{-6x^3+12x^2} & \\
\qquad 12x^2-50x+90 & \\
\qquad \underline{12x^2-24x} & \\
\qquad\quad -26x+90 & \\
\qquad\quad \underline{-26x+52} & \\
\qquad\qquad 38 \text{ (ост.)} &
\end{array}
$$

Ответ: $f(x)=(x-2)(x^3-6x^2+12x-26)+38.$

№3

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{5n+1}=\dfrac{3}{5}$. Указать $N(\varepsilon)$

Решение:

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{5n+1}=\dfrac{3}{5} := \forall\varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}:$

$\forall n>N \Rightarrow \left|\dfrac{3n-1}{5n+1}-\dfrac{3}{5}\right|<\varepsilon$. Решим полученное неравенство:

$\left|\dfrac{15n-5-15n-3}{25n+5}\right|<\varepsilon$; $\left|-\dfrac{8}{25n+5}\right|<\varepsilon$

Номер задания в кружочке

Т.к для любого натурального n выполняется $25n+5 > 0$ (т.к выражение выше <0), то имеем:

$$n > \frac{8}{25\varepsilon} + 5$$

Ответ: $N(\varepsilon) > \left[\frac{8}{25\varepsilon} + 5\right] + 5$

№4.

1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3} = \frac{9-24n+16n^2}{\cancel{n^3}-9n^2+\cancel{27n}-27-(\cancel{n^3}+9n^2+\cancel{27n}+27)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{9-24n+16n^2}{-18n^2-54} = \frac{\frac{9}{n^2}-\frac{24}{n^2}+\frac{16n^2}{n^2}}{-\frac{18n^2}{n^2}-\frac{54}{n^2}} = -\frac{16}{18} = \boxed{-\frac{8}{9}}$$

2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^5+3}-\sqrt{n-3}}{\sqrt{n^5+3}-\sqrt{n-3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{n^5}{n^5}+\frac{3}{n^5}}-\sqrt{\frac{n}{n^{54}}-\frac{3}{n^5}}}{\sqrt{\frac{n^5}{n^5}+\frac{3}{n^5}}-\sqrt{\frac{n}{n^{54}}-\frac{3}{n^5}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}} = \boxed{1}$$

Номер задания в кружочке

3) $$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{5+8n^3}-2n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\sqrt[3]{5+8n^3}-2n\right)\left(\left(\sqrt[3]{5+8n^3}\right)^2+2n\sqrt[3]{5+8n^3}+4n^2\right)}{\left(\sqrt[3]{5+8n^3}\right)^2+2n\sqrt[3]{5+8n^3}+4n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(5+\cancel{8n^3}-\cancel{8n^3}\right)}{\left(\left(\sqrt[3]{5+8n^3}\right)^2+2n\sqrt[3]{5+8n^3}+4n^2\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5n}{n^2\left(\sqrt[3]{\frac{5}{n^3}+8}\right)^2+2n^2\cdot\sqrt[3]{\frac{5}{n^3}+8}+4n^2} = \boxed{0}$$

4) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1}\right)^{-n^3} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3n-1+4n}{2n^2+3n-1}\right)^{-n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4n}{2n^2+3n-1}\right)^{-n^3} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4n}{2n^2+3n-1}\right)^{\frac{2n^2+3n-1}{4n}\cdot\frac{4n}{2n^2+3n-1}\cdot(-n^3)}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{4n}\cdot(-n^3)} = e^{-\infty} = \boxed{0}$$

№5

1) $$\lim_{x\to-1}\frac{7x^2+4x-3}{2x^2+3x+1} = \lim_{x\to-1}\left(\frac{\cancel{(x+1)}\cdot(7x-3)}{\cancel{(x+1)}\cdot(2x+1)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-1}\frac{7x-3}{2x+1} = \frac{7\cdot(-1)-3}{2\cdot(-1)+1} = \frac{-10}{-1} = \boxed{10}$$

2) $$\lim_{x\to4}\frac{x^2+3x-28}{x^3-64} = \lim_{x\to4}\frac{x^2+3x-28}{(x-4)(x^2+4x+16)} =$$

$$= \lim_{x\to4}\frac{(x+7)\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(x^2+4x+16)} = \frac{4+7}{4^2+4\cdot4+16} = \boxed{\frac{11}{48}}$$

Номер задания в кружочке

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+7x-2}{-x+3x^3-4} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{7x}{x^3}-\frac{2}{x^3}}{-\frac{x}{x^3}+\frac{3x^3}{x^3}-\frac{4}{x^3}} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4+2x-5}{2x^2+x+7} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x^2}\left(3x^2+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}} = \boxed{+\infty}$

5) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x-2}{x^3-x^2-x+1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x-2}{(x-1)^2\cdot(x+1)} = \boxed{-\infty}$

6) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\left(\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}\right)\left(\sqrt{3+2x}+\sqrt{x+4}\right)}{\left(3x^2-4x+1\right)\left(\sqrt{3+2x}+\sqrt{x+4}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3+2x-x-4}{(3x-1)(x-1)\cdot\sqrt{3+2x}+\sqrt{x+4}} = \dfrac{\cancel{x-1}}{(3x-1)\cancel{(x-1)}\cdot\sqrt{3+2x}+\sqrt{x+4}} =$

$= \dfrac{1}{(3\cdot 1-1)\left(\sqrt{3+2\cdot 1}+\sqrt{1+4}\right)} = \boxed{\dfrac{\sqrt{5}}{20}}$

7) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x^2-16}} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt[3]{x^2-16}\cdot\left(\sqrt{x}+2\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt[3]{x-4}} \cdot \dfrac{1}{\left(\sqrt{x}+2\right)\cdot\sqrt[3]{x+4}} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(x-4)^{\frac{2}{3}}}{\left(\sqrt{x}+2\right)\cdot\sqrt[3]{x+4}} =$

Номер задания в кружочке

$$= \frac{(4+4)^{\frac{2}{3}}}{\left(\sqrt{4}+2\right)\cdot\left(\sqrt[3]{4+4}\right)} = \frac{0}{8} = \boxed{0}$$

8) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+4}\right)^{-x} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{2x+4}\right)^{-x}$$

$$-x = -\frac{2x+4}{5}\cdot\frac{5}{2}+2 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{2x+4}\right)^{-\frac{2x+4}{5}\cdot\frac{5}{2}+2}$$

$$= \boxed{e^2\cdot\sqrt{e}}$$

9) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x\cdot\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2\cdot\frac{\sin x}{x}} =$$

$$\frac{\sin x}{x}\to 1$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{\cos 4x - 1}{x^2}.$$

$$\frac{1-\cos 2x}{2} = \sin^2 x \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(2x)}{x^2} =$$

$$= 2\cdot\lim_{x\to 0}4\cdot\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)^2 = 2\cdot\lim_{x\to 0}4$$

$$\downarrow 1$$

$$\lim c = c \Rightarrow 2\cdot 4 = \boxed{8.}$$

10) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\ln(1+2x)} = \qquad \ln(\beta) = \frac{\alpha}{\alpha}\ln(\beta) = \alpha\cdot\ln\left(\sqrt[\alpha]{\beta}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x\cdot\ln\left((2x+1)^{\frac{1}{2x}}\right)}$$

Номер задания в кружочке

По 2 замечательному пределу:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2\ln(e)\cdot x} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}$$

$$= \boxed{\frac{3}{2}}$$

11) $$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-5x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2-5x}{3x\cdot\underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{\to 1}} =$$

$$= \frac{3x-5}{3} = \frac{3\cdot 0-5}{3} = \boxed{-\frac{5}{3}}$$

№6 $f(x) = \frac{3x}{1-x}$, $\varphi(x) = \frac{x}{4+x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{3x(4+x)}{(1-x)x} = -3$$

$-3 \neq 0 \Rightarrow f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x\to 0$ являются бесконечно малыми одного порядка.

Ответ: доказано.

№7

$f(x) = -4x^2+9$, $x_0 = 4$.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x, 0 < |x-4| < \delta \Rightarrow$

$|-4x^2+9+55| = |-4x^2+64| < \varepsilon$

$|4(4-x)(4+x)| < \varepsilon,$

Номер задания в кружочке

№7

$f(x) = -5x^2 - 9, \ x_0 = 3$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, \ 0 < |x-3| \ (|f(x) - f(x_0)|) < \delta$

$\Rightarrow |-5x^2 - 9 + 54| \Rightarrow |-5x^2 + 45| < \varepsilon.$

$|-5(x-3)(x+3)| < \varepsilon$

$|x+3| = |(x-3)+6| \le \delta + 6$

$|-5(x-3)(x+3)| < \delta(\delta+6) < \frac{\varepsilon}{-5}$

Рассмотрю выражение:

$\delta(\delta+6) < \frac{\varepsilon}{-5}$

$\delta^2 + 6\delta + \frac{\varepsilon}{-5} < 0$

$D = 36 - 4 \cdot \frac{1}{5}\varepsilon = 36 - \frac{4}{5}\varepsilon$

$$\boxed{\delta(\varepsilon) = \frac{-6 + \sqrt{36 - \frac{4}{5}\varepsilon}}{2}}$$

Ответ: $\frac{-6 + \sqrt{36 - \frac{4}{5}\varepsilon}}{2}$

№8

$f(x) = \frac{x+5}{x-3}, \ x_1 = 3, \ x_2 = 4$

Номер задания в кружочке

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$x_1 = 3 \Rightarrow \lim_{x \to 3} \frac{x+5}{x-3} = \left[\frac{8}{0}\right] = \infty.$$

В точке $x_1 = 3$ функция не определена $\Rightarrow f(3)$ не является непрерывной.

$$x_2 = 4 \Rightarrow \lim_{x \to 4} \frac{x+5}{x-3} = \frac{9}{1} = 9.$$

В точке $x_2 = 4$ $f(4)$ является непрерывной

Ответ: в точке $x_1 = 3$ функция не является непрерывной. В точке $x_2 = 4$ функция является непрерывной.

№9

$$f(x) = \begin{cases} 3x+4, & x \le -1 \\ x^2-2, & -1 < x < 2 \\ x, & x \ge 2 \end{cases}$$

Решение:

Функция меняет свое аналитическое ~~решение~~ задание в точках $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Вычисляю пределы:

$$x_1 = -1 \Rightarrow \lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} 3 \cdot (-1-0) + 4 = 1$$

$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = 3 \cdot (-1+0) + 4 = 1$$

Пределы равны, функция по равному ограничена и слева, и справа.

В точке $x_1=-1$ функция определена:
$f(-1)=(3\cdot(-1)+4)=1$
Функция в точке $x=-1$ непрерывна

$x_2=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to2-0} f(x)=2; \lim\limits_{x\to2+0} f(x)=2$

$f(2)=2$ функция непрерывна.
Построю график.

x^2-2

x	-1	0	1	2
y	–	-2	-1	–

не сущ.   не сущ.