第一部分　行列式

一、行列式的概念

$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 和 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{43}$.

二、数字型行列式的计算

1．(1) $a^n - a^{n-2}$；　　　(2) $[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$；

(3) $\prod\limits_{1\le j<i\le n+1}(i-j)$；　　　(4) $\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i d_i - b_i c_i)$.

解：(1) 解法一：仿照课本 P.15 例 11 的做法.

把 D_n 中的第 n 行依次与第 $n-1$ 行、第 $n-2$ 行，……，第 1 行对调（作 $n-1$ 次相邻对换），

再把第 n 列依次与第 $n-1$ 列、第 $n-2$ 列，……，第 1 列对调（作 $n-1$ 次相邻对换），得

$$D_n = (-1)^{2(n-1)}\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & a \end{vmatrix}$$

根据 P.14 例 10 的结论，有 $D_n = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix} = (a^2-1)\cdot a^{n-2} = a^n - a^{n-2}$

解法二：$D_n = \begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix} \overset{r_n - \frac{r_1}{a}}{=} \begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 0 & & a-\frac{1}{a} \end{vmatrix} = a^{n-1}\left(a-\frac{1}{a}\right) = a^n - a^{n-2}$

(2) 仿照课本 P.12 例 8.

(3) 利用范德蒙行列式的结论.

把第 $n+1$ 行依次与第 n 行、第 $n-1$ 行，……，第 1 行对调（作 n 次相邻对换），

把第 $n+1$ 行依次与第 $n-1$ 行、第 $n-2$ 行，……，第 2 行对调（作 $n-1$ 次相邻对换），

……

把第 $n+1$ 行依次与第 $n-1$ 行、第 $n-2$ 行对调（作 2 次相邻对换），

把第$n+1$行与第$n-1$行对调（作 1 次相邻对换），

接着，把第$n+1$列依次与第n列、第$n-1$列，……，第 1 列对调（作n次相邻对换），

把第$n+1$列依次与第$n-1$列、第$n-2$列，……，第 2 列对调（作$n-1$次相邻对换），

……

把第$n+1$列依次与第$n-1$列、第$n-2$列对调（作 2 次相邻对换），

把第$n+1$列与第$n-1$列对调（作 1 次相邻对换），

此时，利用范德蒙行列式，有

$$D_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix}1 & \cdots & 1 & 1\\ a-n & \cdots & a-1 & a\\ \vdots & & & \\ (a-n)^{n-1} & \cdots & (a-1)^{n-1} & a^{n-1}\\ (a-n)^{n} & \cdots & (a-1)^{n} & a^{n}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & \cdots & 1 & 1\\ a-n & \cdots & a-1 & a\\ \vdots & & & \\ (a-n)^{n-1} & \cdots & (a-1)^{n-1} & a^{n-1}\\ (a-n)^{n} & \cdots & (a-1)^{n} & a^{n}\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{1\le j<i\le n+1}[(a-n+i-1)-(a-n+j-1)]=\prod_{1\le j<i\le n+1}(i-j)$$

(4) 仿照课本 P.11 例 15.

2．本题即课本 P.21 例 13.

3．D（根据 P.14 例 10 的结论）.

三、抽象型行列式的计算

1．C.

解：

$$|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2|=|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1|+|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_2|=-|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|+|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=-m+n$$

2．-12.

解：

$$D_1=\begin{vmatrix}4a_{11} & 2a_{11}-3a_{12} & a_{13}\\ 4a_{21} & 2a_{21}-3a_{22} & a_{23}\\ 4a_{31} & 2a_{31}-3a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\overset{c_1\div 4}{=}4\begin{vmatrix}a_{11} & 2a_{11}-3a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & 2a_{21}-3a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & 2a_{31}-3a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\overset{c_2-c_1\times 2}{=}4\begin{vmatrix}a_{11} & -3a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & -3a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & -3a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$\overset{c_2\div(-3)}{=}(-12)\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=-12D=-12$$

3．(1) -2；(2) $-\dfrac{32}{27}$.

解：(1) $|A|=\dfrac{1}{2}\neq 0$，A 可逆，$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*=2A^*$，$(2A)^{-1}=\dfrac{1}{2}A^{-1}=A^*$，于是

$$\left|(2A)^{-1}-3A^*\right|=\left|-2A^*\right|=(-2)^3\left|A^*\right|=(-2)^3\left|A\right|^{3-1}=-8\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=-2;$$

(2) 已知 $A^*A=AA^*=|A|E$，那么当 $|A|=\dfrac{1}{2}\neq 0$ 时，可得 $\left(\dfrac{1}{|A|}A\right)\cdot A^*=E$，从而 $\left(\dfrac{1}{3|A|}A\right)\cdot 3A^*=E$，故 $(3A^*)^{-1}=\dfrac{1}{3|A|}A=\dfrac{2}{3}A$，于是

$$\left|(3A^*)^{-1}-2A\right|=\left|\frac{2}{3}A-2A\right|=\left|-\frac{4}{3}A\right|=\left(-\frac{4}{3}\right)^3|A|=\left(-\frac{4}{3}\right)\times^3\frac{1}{2}=-\frac{32}{27}.$$

4．$|A+E|=0$.

解：因为$|A+E|=\left|A+AA^T\right|=\left|A(E+A^T)\right|=\left|A(E+A)^T\right|=|A|\cdot\left|(E+A)^T\right|=|A|\cdot|A+E|$，

所以$(1-|A|)\cdot|A+E|=0$．已知$|A|<0$，故$1-|A|\neq 0$，从而$|A+E|=0$.

5．$\left|B^{-1}-E\right|=24$.

解：因为 A,B 相似，所以 A,B 有相同的特征值 $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{5}$．令 $\varphi(B)=B^{-1}-E$，$\varphi(\lambda)=\lambda^{-1}-1$，若 λ 是 B 的特征值，p 是对应的特征向量，则

$$\varphi(B)p=(B^{-1}-E)p=B^{-1}p-Ep=\lambda^{-1}p-p=(\lambda^{-1}-E)p=\varphi(\lambda)p,$$

即 $\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(B)$ 的特征值，p 是对应的特征向量.

已知 $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)=2-1=1$，$\varphi\left(\dfrac{1}{3}\right)=3-1=2$，$\varphi\left(\dfrac{1}{4}\right)=4-1=3$，$\varphi\left(\dfrac{1}{5}\right)=5-1=4$，那么 $|\varphi(B)|=\left|B^{-1}-E\right|=1\times 2\times 3\times 4=24$.

四、行列式等于零的判定

1．C.　　　　2．B.

解： AB 是 m 阶矩阵，当 $m>n$ 时， $R(AB)\le\min(R(A),R(B))=\min(m,n)=n<m$，

$|AB|=0$，所以第 2 题选 B.

第二部分　矩阵

一、矩阵的概念及运算

1．C, G, I, J.　　　　2．C.　　　　3．D.　　　　4．C.

解：$|C|=\begin{vmatrix} O & 3A \\ B & O \end{vmatrix}=(-1)^{mn}\begin{vmatrix} 3A & O \\ O & B \end{vmatrix}$（经过 mn 次列的交换）$=(-1)^{mn}|3A|\cdot|B|$（根据 P.14 例 10 的结论）$=(-1)^{mn}3^m|A|\cdot|B|=(-1)^{mn}3^m ab$，所以第 4 题选 C.

二、伴随矩阵

1．C.

解：当 A 可逆时，A^* 也可逆且 $A^*=|A|A^{-1}$，$(A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}=|A|^{n-1}\cdot\dfrac{1}{|A|}A=|A|^{n-2}A$.

2．B.

解：当 A 可逆时，A^* 也可逆且 $A^*=|A|A^{-1}$，于是

$$(kA)^*=|kA|(kA)^{-1}=k^n|A|\cdot\frac{1}{k}A^{-1}=k^{n-1}|A|A^{-1}=k^{n-1}A^*.$$

3．D.

解：显然 $|C|=|A|\cdot|B|$，

$$CC^*=|C|E_{2n}=|A|\cdot|B|\begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_n \end{pmatrix}=|A|\cdot|B|\begin{pmatrix} |A|\cdot|B|E_n & O \\ O & |A|\cdot|B|E_n \end{pmatrix},$$

经过验证，只有选项 D 正确.

4．C.

解：因为 $R(A^*)=1$，所以 $R(A)=2<3$，$|A|=0$，从而 $a=b$ 或 $a+2b=0$．其中

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+2b & b & b \\ a+2b & a & b \\ a+2b & b & a \end{vmatrix}=(a+2b)\begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 1 & a & b \\ 1 & b & a \end{vmatrix}=(a+2b)\begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 1 & a-b & 0 \\ 1 & 0 & a-b \end{vmatrix}=(a+2b)(a-b)^2$$

当$a=b$时，$A=\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$R(A)\le 1$，不合题意，舍去，故选 C.

5．$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$（利用$|A|=6$且$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A$求解）.

三、可逆矩阵

1．$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$（本题即课本 P.78 第 4(1)题）.

2．C.

3．C.

解法一：因为$A^{-1}+B^{-1}=E\cdot A^{-1}+B^{-1}\cdot E=(B^{-1}B)A^{-1}+B^{-1}(AA^{-1})=B^{-1}(B+A)A^{-1}$，

所以$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=(B^{-1}(B+A)A^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B$.

解法二：验证法.

$$\begin{aligned}(A^{-1}+B^{-1})[A(A+B)^{-1}B]&=A^{-1}[A(A+B)^{-1}B]+B^{-1}[A(A+B)^{-1}B]\\&=(A+B)^{-1}B+B^{-1}A(A+B)^{-1}B\\&=B^{-1}B(A+B)^{-1}B+B^{-1}A(A+B)^{-1}B\\&=B^{-1}[B(A+B)^{-1}+A(A+B)^{-1}]B\\&=B^{-1}[(A+B)(A+B)^{-1}]B\\&=E\end{aligned}$$

4．$(A-E)^{-1}=\dfrac{1}{2}(A+2E)$.

解：由条件$A^2+A-4E=O$可得，$A^2+A-2E=2E$，$(A+2E)(A-E)=2E$，于是

$\dfrac{1}{2}(A+2E)(A-E)=E$，故$(A-E)^{-1}=\dfrac{1}{2}(A+2E)$.

四、矩阵方程

(1) 证明：由 $2A^{-1}B = B-4E$ 可以推出 $(A-2E)B = 4A$，已知 A 可逆，即 $|A| \neq 0$，从而 $|A-2E| \neq 0$，$A-2E$ 也可逆.

(2) 解：由 $2A^{-1}B = B-4E$ 可以推出 $A(B-4E) = 2B$，设可逆矩阵 P 使 $(B-4E)P = F$，则 $\begin{pmatrix} B-4E \\ 2B \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} F \\ 2BP \end{pmatrix}$，即对矩阵 $\begin{pmatrix} B-4E \\ 2B \end{pmatrix}$ 作初等列变换，当把 $B-4E$ 变为 F 时，$2B$ 相应地变为 $2BP$.

若 $F = E$，则 $B-4E$ 可逆且 $P = (B-4E)^{-1}$，这时所给的方程有唯一解 $A = 2B(B-4E)^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} B-4E \\ 2B \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} -3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ \hline 2 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \overset{\substack{c_2 \div (-2) \\ c_3 \div (-2)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \overset{c_1 - c_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc} -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \overset{c_2 \div (-4)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\overset{c_2 - c_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

可见 $(B-4E) \overset{c}{\sim} E$，因此 $B-4E$ 可逆且 $A = 2B(B-4E)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

五、列满秩矩阵

C.

解：根据矩阵的秩的性质，容易排除选项 A、B．已知 $m \times n$ 矩阵 A 的秩 $R(A) = m < n$，即 A 是行满秩矩阵，则 A^T 是列满秩矩阵．若 $BA = O$，则 $A^T B^T = O$，于是 $B^T = O$，从而 $B = O$，故选项 C 正确．现举一反例说明选项 D 错误，即课本 P.109 第 12(2)题：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

六、正交矩阵

A.

解：显然选项 B、C 都正确.

已知 A 是正交阵，$AA^T = E$，那么 $A+E = A+AA^T = A(E+A^T) = A(A+E)^T$，$|A+E| = |A|\cdot|(A+E)^T| = |A|\cdot|A+E|$，于是 $(1-|A|)\cdot|A+E| = 0$．若 $|A| = -1$，则 $|A+E| = 0$，从而 $\lambda = -1$ 是 A 的特征值，故选项 D 也正确.

七、矩阵的初等变换与初等矩阵

1．C.　　　　2．C.

解:显然 $B = AP_1P_2 = AP_2P_1$,于是 $B^{-1} = P_2^{-1}P_1^{-1}A^{-1} = P_1^{-1}P_2^{-1}A^{-1}$.因为 $P_1 = P_1^{-1}$,$P_2 = P_2^{-1}$,所以 $B^{-1} = P_2P_1A^{-1} = P_1P_2A^{-1}$，故第 2 题选 C.

八、矩阵的秩

1．C.　　　　2．B.

解：$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix} = [(n-1)a+1](1-a)^{n-1}$，若 $R(A) = n-1 < n$，则 $|A| = 0$，$a = \dfrac{1}{1-n}$ 或 $a = 1$．当 $a = 1$ 时，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$，$R(A) = 1$，不合题意，舍去，故第 2 题选 B.

第三部分 线性方程组

一、线性方程组的解的判定

本题即课本 P.75 例 13.

二、齐次线性方程组的通解（基础解系）

1. $\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$（本题即课本 P.79 第 15 题）.

解：设所求的齐次线性方程组为 $Ax = 0$，其中 A 是 $m \times n$ 矩阵．由通解的表达式不难看出，一共有四个未知数 x_1, x_2, x_3, x_4，其中 x_3, x_4 是自由变量，故 $n = 4$，$R(A) = 4 - 2 = 2$，$m \geq R(A) = 2$．由 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 - 2c_2 \\ -3c_1 + 4c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ 得 $\begin{cases} x_1 = 2x_3 - 2x_4 \\ x_2 = -3x_3 + 4x_4 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$.

显然 $x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0$ 与 $x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0$ 不等价，此即为所求齐次线性方程组.

2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$（本题即课本 P.109 第 22 题）.

解：因为 ξ_1, ξ_2 是 4 维向量，所以方程组有 4 个未知数，即系数矩阵 A 的列数等于 4．另一方面，因为基础解系含 2 个线性无关的解向量，所以 $R(A) = 4 - 2 = 2$，方程的个数可以是任意 $m(\geq 2)$ 个．考虑构造一个 2×4 矩阵 A，且 $R(A) = 2$.

解法一　因为 $A\xi_1 = 0$，$A\xi_2 = 0$，所以 $A\left(\dfrac{\xi_2 - 2\xi_1}{3}\right) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$，记 $\xi_3 = (1, 0, -1, -2)^T$，

显然 ξ_1 和 ξ_3 线性无关，构成齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系，那么通解可表示为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

容易看出：可令 x_1， x_2 做自由变量，那么 $x_3 = -x_1 + 2x_2$， $x_4 = -2x_1 + 3x_2$．于是取 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 即是所求，对应的齐次方程组为 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$.

解法二

ξ_1, ξ_2 是 $Ax = 0$ 的基础解系

$\Leftrightarrow$ $AB = A(\xi_1, \xi_2) = O$ 且 $R(A) = 2$，其中 $B = (\xi_1, \xi_2)$

$\Leftrightarrow$ $B^T A^T = O$ 且 $R(A^T) = 2$

$\Leftrightarrow$ A^T 的两个列向量是 $B^T x = 0$ 的两个线性无关的解，其中 A 是 2×4 矩阵

$\Leftrightarrow$ A^T 的两个列向量是 $B^T x = 0$ 的基础解系（因为 $R(B) = 2$）

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

基础解系为 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$， $\eta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，于是 $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，从而 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

对应的齐次方程组为 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$.

3． $x = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 c 是任意常数.

解：因为 $R(A) = n - 1$，所以 $Ax = 0$ 的基础解系中只包含一个解向量．已知 n 阶矩阵 A 的

各行元素之和均等于零，那么 $A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$，即 $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ 是 $Ax=0$ 的解．综上所述，所求的通解为 $x=c\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，其中 c 是任意常数．

三、非齐次线性方程组的通解

1． $x=c\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$，其中 c 是任意常数（本题即课本 P.109 第 27 题）．

解：因为四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3，所以对应的齐次线性方程组的基础解系只包含一个解向量，构造如下： $2\eta_1-(\eta_2+\eta_3)=\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$，

于是四元非齐次线性方程组的同解可表示为 $x=c\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$，其中 c 是任意常数．

2． $x=c\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，其中 c 是任意常数（本题即课本 P.110 第 30 题）．

解：因为 $a_1=2a_2-a_3$，所以 $a_1-2a_2+a_3+0\cdot a_4=0$，即 $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$ 是 $Ax=0$ 的解．

因为矩阵 $A=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ 中，a_2,a_3,a_4 线性无关，$a_1=2a_2-a_3$，所以 $R(A)=3$，四元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系中只包含一个解向量．

因为$b=a_1+a_2+a_3+a_4=(a_1,a_2,a_3,a_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，所以$Ax=b$一定有解，$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$就是其中一个特解．综上所述，$Ax=b$的通解是$x=c\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，其中$c$是任意常数．

3．B．

第四部分　向量组

三、向量组的线性组合

1．(1) $\alpha=-4$且$\beta\neq 0$；(2) $\alpha\neq -4$；(3) $\alpha=-4$且$\beta=0$，此时$b=ca_1-(2c+1)a_2+a_3$．

本题即课本 P.109 第 28 题．思路：

(1) $R(a_1,a_2,a_3)<R(a_1,a_2,a_3,b)$；

(2) $R(a_1,a_2,a_3)=R(a_1,a_2,a_3,b)=3$；

(3) $R(a_1,a_2,a_3)=R(a_1,a_2,a_3,b)<3$．

2．B．

思路：分别判断下列两种情形的秩的关系．

(1) $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1})$和$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，如果相等，则$\alpha_m$可由(Ⅰ)线性表示；

(2) $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},\beta)$和$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta)$，如果相等，则$\alpha_m$可由(Ⅱ)线性表示．

解：由题设可知，$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta)$且

$$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1})<R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},\beta)=R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1})+1.$$

于是

- $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1})<R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},\beta)\leq R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta)=R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，

  即α_m不能由(Ⅰ)线性表示；

- 既然α_m不能由(Ⅰ)线性表示，那么$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1})+1$成立，从而$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},\beta)=R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta)$，即$\alpha_m$可由(Ⅱ)线性表示.

四、向量组的线性相关性

1．本题即课本 P.107 第 3 题.

解法一：利用向量组线性表示的性质（P.83 定理 1 至 P.85 定理 3）

(1) 因为$R(a_2,a_3)\le R(a_2,a_3,a_4)\le R(a_2,a_3)+1$，且$R(a_2,a_3,a_4)=3$，所以$R(a_2,a_3)=2$.

又$R(a_1,a_2,a_3)=2$，所以根据 P.84 定理 2 可知，a_1能由a_2,a_3线性表示.

(2) 因为$R(a_1,a_2,a_3,a_4)\ge R(a_2,a_3,a_4)=3$，且$R(a_1,a_2,a_3)=2$，

所以$R(a_1,a_2,a_3)<R(a_1,a_2,a_3,a_4)$，从而$a_4$不能由$a_1,a_2,a_3$线性表示.

解法二：利用向量组线性相关的性质（P.89 定理 5）

(1) 因为$R(a_2,a_3,a_4)=3$，所以a_2,a_3,a_4线性无关，从而其部分组a_2,a_3也线性无关.

又$R(a_1,a_2,a_3)=2<3$，所以a_1,a_2,a_3线性相关.

根据 P.89 定理 5 结论(3)可知，a_1能由a_2,a_3线性表示.

(2) 反证法　设a_4能由a_1,a_2,a_3线性表示. 已经证明“a_1能由a_2,a_3线性表示”成立，故a_4能由a_2,a_3线性表示，这与$R(a_2,a_3,a_4)=3$矛盾，假设不成立，故a_4不能由a_1,a_2,a_3线性表示.

2．D.

证明：因为A组可由向量B组线性表示，所以$R(A)\le R(B)$. 又$R(A)\le r$，$R(B)\le s$，当$r>s$时，可以推出$R(A)\le s<r$，故向量组A必线性相关.

3．B.

4．本题即课本 P.107 第 9 题.

解法一：$b_1-b_2+b_3-b_4=(a_1+a_2)-(a_2+a_3)+(a_3+a_4)-(a_4+a_1)=0$，得证.

解法二：根据题意有，$(b_1,b_2,b_3,b_4)=(a_1,a_2,a_3,a_4)\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$，简记为 $B=AK$.

$$K=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\overset{r_2-r_1}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\overset{r_3-r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\overset{r_4-r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$R(K)=3$，于是 $R(B)=R(AK)\le\min\{R(A),R(K)\}\le R(K)=3<4$，从而矩阵 B 的列向量组线性相关.

解法三：设有一组实数 k_1,k_2,k_3,k_4 使得 $k_1b_1+k_2b_2+k_3b_3+k_4b_4=0$，即

$$(k_1+k_4)a_1+(k_1+k_2)a_2+(k_2+k_3)a_3+(k_3+k_4)a_4=0,$$

(1) 若 a_1,a_2,a_3,a_4 线性相关，则 $(k_1+k_4),(k_1+k_2),(k_2+k_3),(k_3+k_4)$ 可以不全为零，从而 k_1,k_2,k_3,k_4 不全为零，于是 b_1,b_2,b_3,b_4 线性相关.

(2) 若 a_1,a_2,a_3,a_4 线性相关，则 $\begin{cases}k_1+k_4=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\\k_3+k_4=0\end{cases}$，即 $\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，

因为 $\begin{vmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=0$，所以 $\begin{cases}k_1+k_4=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\\k_3+k_4=0\end{cases}$ 有非零解，从而 b_1,b_2,b_3,b_4 线性相关.

解法四：设有一组实数 k_1,k_2,k_3,k_4 使得 $k_1b_1+k_2b_2+k_3b_3+k_4b_4=0$，即

$$(k_1+k_4)a_1+(k_1+k_2)a_2+(k_2+k_3)a_3+(k_3+k_4)a_4=0,$$

显然，当 $\begin{cases}k_1+k_4=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\\k_3+k_4=0\end{cases}$，即 $\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ 时，上式肯定成立.

因为$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$，所以$\begin{cases} k_1+k_4=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \\ k_3+k_4=0 \end{cases}$有非零解，从而$b_1,b_2,b_3,b_4$线性相关.

五、向量组的秩

（本题即课本 P.109 第 12(2)题）.

解：$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a_1,a_2,a_3构成一个最大无关组，$a_4=a_1+3a_2-a_3$，$a_5=-a_2+a_3$.

第五部分　方阵的特征值和特征向量

二、特征值和特征向量的概念、性质及计算

1．$\lambda_1=2$，$\lambda_2=4$（本题即课本 P.118 例 5）.

解法一：课本 P.118 例 5 的解法；

解法二：利用特征值的性质，有$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2=6 \\ \lambda_1\lambda_2=8 \end{cases}$，解得$\lambda_1=2$，$\lambda_2=4$.

2．本题即课本 P.135 第 8 题.

证明：因为$R(A)+R(B)<n$，所以$R(A)<n$.

$R(A)<n \Leftrightarrow |A|=0 \Leftrightarrow \lambda=0$是$A$的特征值.

同理，$\lambda=0$也是B的特征值，故A，B有相同的特征值.

A，B对应于特征值$\lambda=0$的特征向量依次是$Ax=0$和$Bx=0$的非零解.

A，B对应于特征值$\lambda=0$有相同的特征向量$\Leftrightarrow \begin{cases} Ax=0 \\ Bx=0 \end{cases}$有非零解$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}x=0$有非零解

$\Leftrightarrow R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}<n$.

下面$R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} < n$成立.

$R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = R(A^T, B^T) \le R(A^T) + R(B^T) = R(A) + R(B) < n$，得证.

3．25（本题即课本 P.135 第 13 题，仿照课本 P.120 例 9 的解法）.

解：已知A的特征值为 1, 2, －3，那么$|A| = -6$，A可逆，于是$A^* = |A|A^{-1} = -6A^{-1}$，所以$A^* + 3A + 2E = -6A^{-1} + 3A + 2E$，记作$\varphi(A)$．记$\varphi(\lambda) = -6\lambda^{-1} + 3\lambda + 2$，于是$\varphi(1) = -1$，$\varphi(2) = 5$，$\varphi(-3) = -5$是$\varphi(A)$的特征值，从而有

$$|\varphi(A)| = |-6A^{-1} + 3A + 2E| = \varphi(1)\varphi(2)\varphi(-3) = (-1)\times 5\times(-5) = 25.$$

4．本题即课本 P.136 第 24(1)题.

证明：因为$a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$，$a_1 \ne 0$，所以$A = aa^T = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$是对称矩阵，且$A \ne O$．于是$1 \le R(A) = R(aa^T) \le R(a) = 1$，即$R(A) = 1 < n (n \ge 2)$，$|A| = 0$，故$\lambda = 0$是$A$的特征值.

根据$R(A) = 1$可得对应特征值$\lambda = 0$恰有$n-1$个线性无关的特征向量.

再根据课本 P.124 定理 7 可得，$\lambda = 0$是A的$n-1$重特征值.

三、方阵的相似对角化

1．$x = 3$（本题即课本 P.135 第 15 题）.

解：矩阵A的特征多项式

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & x \\ 4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & x \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1-\lambda \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$= (2-\lambda)(1-\lambda)(5-\lambda) - 4(1-\lambda) = (1-\lambda)^2(6-\lambda)$

得$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = 6$.

对应单根$\lambda_3=6$，可求得线性无关的特征向量一个，故矩阵A可对角化的充分必要条件是对应重根$\lambda_1=\lambda_2=1$有 2 个线性无关的特征向量，即方程组$(A-E)x=0$有 2 个线性无关的解，亦即系数矩阵$(A-E)$的秩等于 1.

由$A-E=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&0&x\\4&0&4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&x-3\\0&0&0\end{pmatrix}$，要$R(A-E)=1$，得$x-3=0$，即$x=3$.

因此，当$x=3$时，矩阵可以A相似对角化.

2．(1) $\lambda=-1,a=-3,b=0$；A不能相似对角化（本题即课本 P.135 第 16 题）.

解：

(1) $(A-\lambda E)p=\begin{pmatrix}2-\lambda&-1&2\\5&a-\lambda&3\\-1&b&-2-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-\lambda\\a+2-\lambda\\b+1+\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$,

即$\begin{cases}-1-\lambda=0\\a+2-\lambda=0\\b+1+\lambda=0\end{cases}$，得$\lambda=-1,a=-3,b=0$.

(2) $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&2\\5&-3-\lambda&3\\-1&0&-2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda-1=-(\lambda+1)^3$

得$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$.

矩阵A可对角化的充分必要条件是对应重根$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$有 3 个线性无关的特征向量，即方程组$(A+E)x=0$有 3 个线性无关的解，亦即系数矩阵$(A+E)$的秩等于 0.

显然$(A+E)$不是零矩阵，系数矩阵$(A+E)$的秩不等于 0，因此矩阵A不能相似对角化.

3．$A=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}$（本题即课本 P.136 第 23 题）.

解：因为 3 是对称矩阵A的二重特征值，根据课本 P.124 定理 7 可得，对应的线性无关特征

向量恰有两个，记作 p_2, p_3，下面求 p_2, p_3.

因为 A 是对称矩阵，根据课本 P.124 定理 6 可得，p_2, p_3 应满足方程 $p_1^T x = 0$，即 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

它的基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，取 $p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，构造可逆矩阵

$P = (p_1, p_2, p_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，因为 $P^{-1}AP = \Lambda$，所以 $A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.