

## 第一章 引力场

当物体存在时，其周围空间中就有与它共存的引力场存在，二者紧密联系，不可分离，谁也不可能单独存在。因而在引力场中，我们总是把场和场源一起研究，找出二者的联系关系。这些联系关系，就是我们用来指导生产实践的基础。比如在天体物理学中，我们用这些关系来研究星体的运行，在勘探地球物理学中，我们用这些关系来确定矿体的位置、大小和形状。

在引力场论中，一般需要解决下列两个问题：一个是正演问题，就是从已知场源分布求得场的分布；另一个是反演问题，就是从已知场的分布求得场源的分布。这两个问题的实质都是要解决场与场源之间的关系问题。所以引力场论的基本问题，就是决定场的性质对场源特征量（即质量的密度和位置）的依赖关系，掌握场的分布规律，并运用来指导生产实践。

### §1.1 场强度

(1) 场强度的定义 要研究场的性质，首先必须找到表示场的特征量，而且这个特征量还必须在实验的基础上引入。我们知道，一个试探质点放在引力场中某一点上时，作用在它上面的力  $f$  的大小和方向是可以测量出来的。这个力的方向是恒定的，力的大小既与场的本身性质有关，也与引入试探质点的质量  $m_0$  有关。但在场中任意确定地点，力与质量之比  $f/m_0$  是不变的，就是说，作用在单位质量上的力只与场的性质有关。因此我们有场强度的定义：场中某点的场强度  $F$  等于一单位质点在该处所受的力，即

$$F = \lim_{m_0 \rightarrow 0} \frac{f}{m_0} \quad (1.1-1)$$

场强度是表示场的性质的物理量，它只是座标的函数，而与用来

测量引力场强度的试探质点无关。

试探质点的主要特征是：(i) 质量很少，即质量少得使它的场在实际上不致改变所研究场中的质量分布；(ii) 几何尺度很小，即几何尺度小得近于一个质点，这样才能根据对它的作用来求得空间某一点的场强度。当然这些条件都是相对的，只要质量如此之小，以至在由它的存在而引起的变化的实验范围内，不能影响到观察结果的精确度就行了，式中取极限就是指这个意义来说的。

(2) 点质量的场强度 为了进一步研究场的性质，我们需要找出场强度与场源之间的关系。为了达到这个目的，我们利用牛顿的万有引力定律：

$$f_{12} = -k \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \quad (1.1-2)$$

式中  $m_1$ 、 $m_2$  为两个质点的质量， $f_{12}$  为  $m_1$  作用在  $m_2$  上的力， $r_{12}$  为由  $m_1$  画到  $m_2$  的矢径， $k$  为万有引力常数，其值等于  $6.67 \times 10^{-8}$  厘米·克·秒<sup>2</sup> (C. G. S.) 单位，负号表示引力。

万有引力定律是表示质点间的相互作用的实验定律。这里需要注意的是，作用在每一个质点上的力并不是另一个质点本身而是它们的场的作用。如果忽视了场的作用去理解相互作用，这就会导致超距作用的唯心学说。

在引用万有引力定律时，应注意条件，它对于质点的相互作用才是严格正确的，即物体的几何尺度比物体间的距离小得多时才能直接运用。

根据万有引力定律，某一场源质点  $m$  在  $P$  点激发的场强度 (即  $m_1 = m$ ， $m_2 = 1$ ) 为

$$F = -k \frac{m}{r^2} \quad (1.1-3)$$

式中  $m$  为场源的质量， $r = QP$  表示由场源点  $Q$  至观察点  $P$  的矢径 (图1.1-1)，负号表示引力，与  $r$  方向相反。

这就是我们求得的场强度与场源之间的关系式。由此可知，

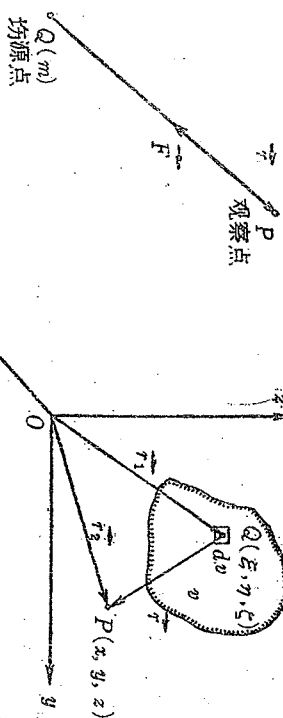


图 1.1-1

图 1.1-2

场中任意P点的场强度与场源质量成正比, 与该点至场源间的距离平方成反比。场强度这种距离平方反比性质的空间变化规律是引力场最基本的特征, 引力场的所有性质都可以由这一特征导出。

(3) 体质量分布的场强度 若空间中有两个以上的点质量, 由场的叠加原理知道, 场中任意一P点上的场强度, 等于每一质点单独存在时P点的场强度的矢量和, 即

$$\mathbf{F} = -k \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i, \quad (1.1-4)$$

式中 $r_i$ 是由质点 $m_i$ 画到P点的矢径。显然无论这一公式或者前一公式, 都只有在场内那些观察点才有意义, 这些观察点和质量 $m_i$ 的距离比起质量的线度要大得很多。

如果质量连续以体密度 $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ 分布在空间一体积 $v$ 中(图1.1-2), 则可将 $v$ 分为无数体积元 $dv$ , 使每个体积元中的质量为 $dm$ , 于是 $dm = \rho dv$ 。如果每个 $dm$ 对P(x, y, z)点而言满足质点的条件, 这就是说P点不在质量分布区域 $v$ 以内(即由Q至P的矢径 $r$ 大于质量分布区的线度), 则 $dm$ 在P点的场强度为

$$d\mathbf{F} = -k \frac{r}{r^3} dm = -k \frac{\rho r}{r^3} dv,$$

式中 $r = QP = r_2 - r_1$ , 这里 $r_1, r_2$ 分别为由原点O至场源点Q和观

察点P的矢径。若将此式对所有质量分布 $v$ 来求积分, 则全部质量所激发的场在P点的场强度为

$$\mathbf{F} = -k \int_v \frac{\rho \mathbf{r}}{r^3} dv, \quad (1.1-5)$$

式中  $\mathbf{r} = QP = r_2 - r_1 = i(x-\xi) + j(y-\eta) + k(z-\zeta)$ , 其长度为

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

在实际运算中, 我们常常用场强度矢量 $\mathbf{F}$ 沿坐标轴 $x, y, z$ 的三个投影 $X, Y, Z$ 。由(1.1-5)式可知

$$\begin{aligned} X &= -k \int_v \frac{\rho(x-\xi)}{r^3} dv, \\ Y &= -k \int_v \frac{\rho(y-\eta)}{r^3} dv, \\ Z &= -k \int_v \frac{\rho(z-\zeta)}{r^3} dv. \end{aligned} \quad (1.1-6)$$

旁义积分 以上是就观察点(P)在质量分布区( $v$ )以外而言。若P点在质量分布区以内或 $v$ 之边缘上(图1.1-3), 则 $r$ 将会趋于零, 因而(1.1-5)式可能失去意义而不成立。这时我们必须求一旁义积分来解决这个问题。

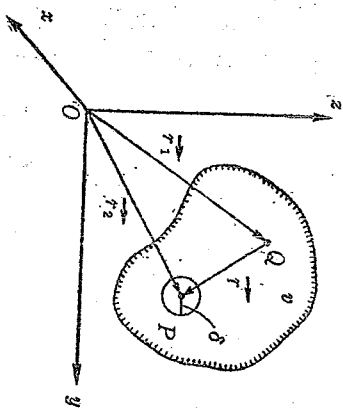


图 1.1-3

现在假设在 $v$ 内P点周围有一变域 $v_0$ , 其最大线度为 $\delta$ (图1.1-3)。如果我们挖去 $v_0$ 内包含的质量不计, 则 $v - v_0$ 即为体分布之内域, 而为 $v_0$  (和P点)之外域。这就是说P点恒为域外之点, 不在质量分布区域( $v - v_0$ )以内, 所以(1.1-5)式仍

可用来讨论  $P$  点的场强度。但要准确计算  $P$  点的场强，我们必须计算下列旁义积分：

$$F = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\sigma - \delta}^{\sigma + \delta} k \frac{\rho r}{r^3} dv. \quad (1.1-7)$$

实际上，若  $\rho(\xi, \eta, \zeta)$  为连续函数，则我们可以证明 (1.1-7) 式为一收敛性之旁义积分，其极限值等于 (1.1-5) 式之体积分。

总之，无论  $P$  点在质量分布区以外或以内，只要  $\rho(\xi, \eta, \zeta)$  为一连续函数， $P$  点的场强度总可以用 (1.1-5) 式之寻常积分或由 (1.1-7) 式之旁义积分来表示，而后的极限值完全和前者相同。

应该注意，当质量分布在一极薄的面上形成所谓面质量分布时，则需将上式中的  $\rho dv$  过渡为  $\sigma ds$  并求面积分，即得面分布的场强度，这里  $\sigma$  为单位面积的质量。

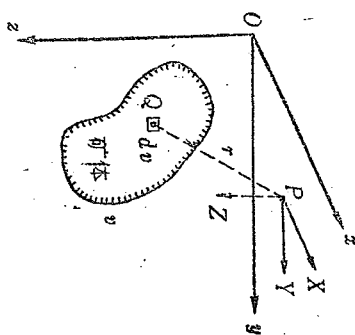


图 1.1-4

(4) 场强度公式的应用

在勘探地球物理学中，我们运用场强度公式 (1.1-6) 可以计算矿体在地球表面上各点引起的场强度沿重力方向的投影 (或重力异常  $\Delta g$ )。取坐标如图 1.1-4 所示，设  $Oxy$  平面为水平面， $Oz$  垂直向下，则矿体 (其相对密度为  $\rho$ ) 在地球表面上  $P(x, y, z)$  点激发的引力场的垂直分量为

$$\Delta g = Z = -k \int_v \frac{\rho(z-\zeta)}{r^3} dv, \quad (1.1-8)$$

式中

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

$$dv = d\xi d\eta d\zeta.$$

(5) 力线 有时为了形象化地说明场的一些性质，我们引入力线这个概念。在场中绘这样的曲线，使其上每点的切线都和

该点的场强矢量  $F$  方向相合，这些曲线就是力线。根据这个定义，力线上的线元  $dl$  应该平行于场强度矢量  $F$ ，也就是它们沿直角坐标轴的三个分量各自成比例，即

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z},$$

这就是力线的微分方程式，其中  $dx, dy, dz$  为  $dl$  的三个分量。若将上式写成下列两个微分方程式，则有

$$\frac{dx}{dz} = \frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{F_y}{F_z}$$

求积分后即得两个曲面方程式：

$$f_1(x, y, z) = c_1,$$

$$f_2(x, y, z) = c_2,$$

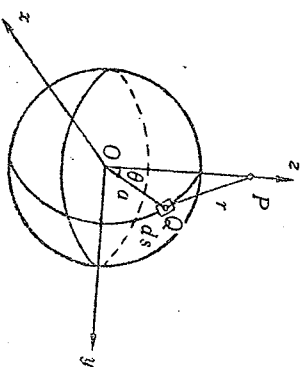
两者交线即力线方程式。

力线通常是这样绘的，使得通过单位横截面面积的力线数与该处的场强度成正比。因此  $F$  较大的地方，力线就比较密。力线这个概念是为了更直观的描述场而提出的，它本身没有什么物理意义，仅起着辅助性的作用。场强度与质量有密切的联系，力线和质量也有密切的联系。在引力场中，力线的起点在无限远处，终点则在质量所在处。因而如果我们绘出力线分布图，我们即可以沿着力线追踪场源的位置。

### 例题 1 一薄球壳的场强度

设有一均匀薄球壳，其面密度 (单位面积上的质量) 为  $\sigma$ ，其半径为  $a$ 。试求球壳内部和外部一点的场强度。

图 1.1-5



解：设取球心位于坐标轴的原点 (图 1.1-5)， $P$  点位于  $Oz$  轴上 (这并不失去普遍性)，其至  $O$  点的距离为  $z$ 。由于对称关系，球壳在  $P$  点的场强度，没有垂直于  $Oz$  轴的分量，只需计算沿  $Oz$

轴的场强度就行了, 即由 (1.1-6) 公式, 得

$$\begin{aligned} Z &= -k\sigma \int_S \frac{(z-a \cos \theta)}{r^3} ds \\ &= -k\sigma \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(z-a \cos \theta) a^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{(a^2+z^2-2az \cos \theta)^{3/2}} \\ &= -2\pi k\sigma a^2 \int_0^\pi \frac{(z-a \cos \theta) \sin \theta d\theta}{(a^2+z^2-2az \cos \theta)^{3/2}}. \end{aligned}$$

由于  $r^2 = a^2 + z^2 - 2az \cos \theta$ ,  
可知  $a \cos \theta = \frac{a^2 + z^2 - r^2}{2z}$ ,  $\sin \theta d\theta = \frac{rd\theta}{az}$ ,

若  $P$  点在球壳外 (即  $z > a$ ), 这时当  $\theta = 0$  时,  $r = z - a$ ;  
当  $\theta = \pi$  时,  $r = z + a$ . 把这些结果代入上式, 即得球外一点  
的场强度:

$$\begin{aligned} Z &= -\frac{\pi k\sigma a}{z^2} \int_{z-a}^{z+a} \frac{(z^2 - a^2) + r^2}{r^2} dr \\ &= -\frac{\pi k\sigma a}{z^2} \left[ -\frac{(z^2 - a^2)}{r} + r \right]_{z-a}^{z+a} \\ &= -\frac{4\pi k\sigma a^2}{z^2} \\ &= -k \frac{M}{z^2}, \quad (z > a), \end{aligned}$$

式中  $M = 4\pi a^2 \sigma$  为球壳的总质量。由此可知球壳外任一  $P$  点的场  
强度等于球壳全部质量集中在球心时在该点产生的场强度。

若  $P$  点在球壳内 (即  $z < a$ ), 这时当  $\theta = 0$  时,  $r = a - z$ ;  
当  $\theta = \pi$  时,  $r = a + z$ . 把这些结果代入上式, 即得球内一  $P$   
点的场强度:

$$Z = -\frac{\pi k\sigma a}{z^2} \int_{a-z}^{a+z} \frac{(z^2 - a^2) + r^2}{r^2} dr$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\pi k\sigma a}{z^2} \left[ -\frac{z^2 - a^2}{r} + r \right]_{a-z}^{a+z} \\ &= 0, \quad (z < a). \end{aligned}$$

换言之, 球壳内任一  $P$  点的场强度都等于零。

若将  $Z$  的值绘成曲线, 如图 1.1-6 所示, 可知  $Z$  的值从球内  
到球外的变化情况。在通  
过球面时, 场强度有一  
 $4\pi k\sigma$  的突变。

### 例题 2 一垂直台阶 (断层) 的 $\Delta g$ 的计算

设一无限长直角棱注  
体的一个垂直面延伸到无  
限远处, 这就形成一个在  
地质构造上所谓垂直台阶  
(断层) 的情况 (图 1.1-7)。  
假设台阶的平均质量密度  
为  $\rho$ , 埋藏深度为  $\zeta_1 \rightarrow \zeta_2$ 。  
现在要求台阶在地面上某  
一  $P$  点的场强度的垂直分  
量  $\Delta g$ 。

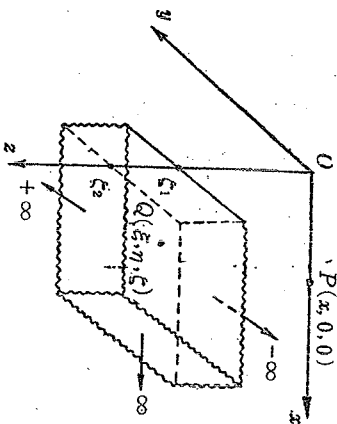


图 1.1-7

解: 设取坐标系如图  
所示,  $Oxy$  为地平面,  $Oz$   
轴垂直向下并通过台阶边  
缘。台阶上下平面平行于  
 $Oxy$  平面 (地面)。设观察者位于  $Oz$  轴上某一  $P(x, 0, 0)$  点上,  
场源点的坐标为  $Q(\xi, \eta, \zeta)$ , 则由 (1.1-8) 公式得知

$$\Delta g = Z = -k \int_V \frac{\rho(z-\zeta)}{r^3} dV = k\rho \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta d\xi d\eta d\zeta}{[(x-\xi)^2 + \eta^2 + \zeta^2]^{3/2}}.$$

首先对  $\eta$  求积分, 运用下列积分公式:

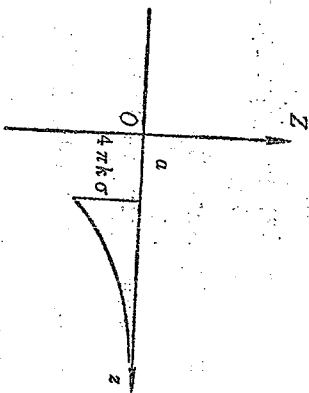


图 1.1-6

得到

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + \text{常数}$$

$$\begin{aligned} \Delta g &= k\rho \int_0^{\infty} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{c_2 d\xi d\zeta}{[(x-\xi)^2+\zeta^2]\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2+\zeta^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ &= 2k\rho \int_0^{\infty} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{c_2 d\xi d\zeta}{(x-\xi)^2+\zeta^2} \end{aligned}$$

其次对  $\zeta$  求积分, 得到

$$\Delta g = k\rho \left\{ \int_0^{\infty} \left[ \ln[(x-\xi)^2+\zeta_2^2] d\xi - \int_0^{\infty} \ln[(x-\xi)^2+\zeta_1^2] d\xi \right] \right\}.$$

最后用积分公式 (由分部积分而来):

$$\int \ln(a^2+x^2) dx = x \ln(a^2+x^2) - 2x + 2a \tan^{-1} \frac{x}{a} + \text{常数},$$

对  $\xi$  求积分, 得到

$$\begin{aligned} \Delta g &= k\rho \left\{ x \ln \frac{x^2 + \frac{\zeta_2^2}{2} + \tan^{-1} \frac{x}{\zeta_2}}{x^2 + \frac{\zeta_1^2}{2} + \tan^{-1} \frac{x}{\zeta_1}} + 2 \left[ \zeta_2 \left( \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{x}{\zeta_2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \zeta_1 \left( \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{x}{\zeta_1} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

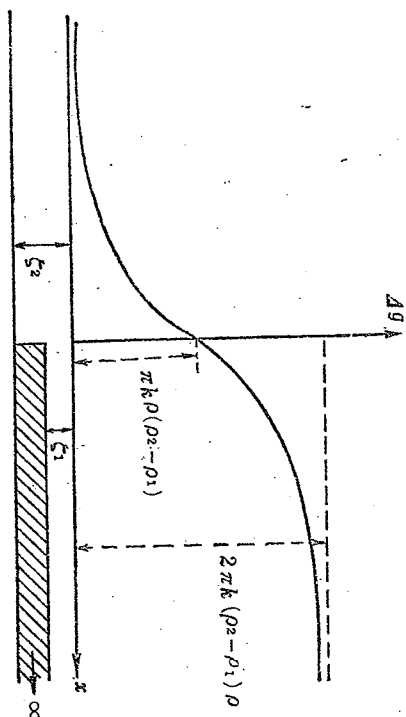


图 1.1-8

在垂直台阶的上方,  $\Delta g$  的变化如图 1.1-8 所示。当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $\Delta g = 0$ , 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $\Delta g = 2\pi k\rho (\zeta_2 - \zeta_1)$ ; 当  $x = 0$  时,  $\Delta g = \pi k\rho (\zeta_2 - \zeta_1)$ 。曲线形状显然随台阶深度  $\zeta_1$  和厚度  $(\zeta_2 - \zeta_1)$  而变。

例题 3 求一点质量的力线方程

设有一点质量位于直角坐标原点, 则由

$$F = -k \frac{m}{r^3} \mathbf{r},$$

得到

$$F_x = -km \frac{x}{r^3},$$

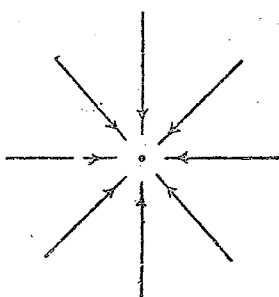
$$F_y = -km \frac{y}{r^3},$$

$$F_z = -km \frac{z}{r^3}.$$

所以

$$\frac{dx}{dz} = \frac{x}{z}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{y}{z},$$

图 1.1-9



求积分后得

$$x = c_1 z, \quad y = c_2 z.$$

由此可见, 一点质量的力线为通过它本身的直线簇中所有的直线 (图 1.1-9)。

## § 1.2 引力场的第一基本定律

(场强度的通量和散度)

以场强度的距离平方反比定律作基础, 我们来进一步研究场强度的空间变化与质量之间的联系关系, 从而更深刻的认识场的基本定律。这些基本定律一方面体现了场的本性, 另一方面形式简化, 在许多场合下便于运用。

现在我们来研究场强度的通量和散度, 从而求得引力场的第

——基本定律——高斯定律。

(1) 一个质点的场强通量。场强度  $F$  的通量  $N$  是这样规定的，就是等于场强度的法线分量的面积分：

$$N = \int_S F \cdot n ds, \quad (1.2-1)$$

式中  $n$  就是沿  $ds$  面的正法线方向的单位矢量。对于一点质量的情形，我们将一点质量的场强度公式代入上式，即得

$$N = \int_S F \cdot n ds = -km \int_S \frac{r \cdot n}{r^3} ds = -km \int_S \frac{\cos(n \cdot r) ds}{r^2},$$

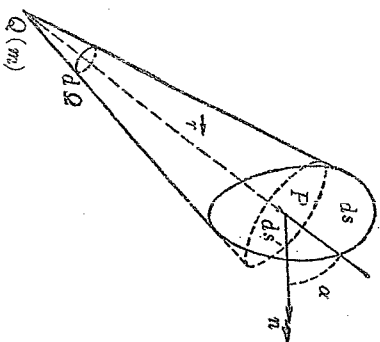
式中  $\cos(n \cdot r)$  为  $ds$  的法线与自场源点  $Q$  画到  $ds$  的矢径  $r$  间的夹角的余弦，即图 (1.2-1) 中的  $\alpha$  角的余弦。由图可知， $\alpha$  正是  $ds$

与  $ds'$  的法线夹角，而  $ds'$  是  $ds$  在垂直于  $r$  的平面上的投影。因此

$$\cos(n \cdot r) ds = \pm ds',$$

式中  $ds'$  是投影的绝对值。如果从  $Q$  点看到的是面积  $ds$  的内侧 (角  $< n, r >$  为锐角)，则这一乘积为正，如果看到的是  $ds$  的外侧 (角  $< n, r >$  为钝角)，则乘积为负。

图 1.2-1



垂直于矢径的面积  $ds'$  和

$$d\Omega = \frac{ds'}{r^2} = \frac{\cos(n \cdot r) ds}{r^2}.$$

现在规定立体角的正负号如下：如果从  $Q$  点看到的是  $ds$  的内侧，

则  $d\Omega$  规定是正的，如果看到的是  $ds$  的外侧，则  $d\Omega$  规定是负的。因此把这些结果代入通量表示式，则得：

$$N = \int_S F \cdot n ds = -km \int_S d\Omega = -km \Omega, \quad (1.2-2)$$

式中  $\Omega$  是整个  $S$  面对质点所张的立体角 (图 1.2-2)。

当  $S$  面为一闭合面时，立体角  $\Omega = \oint d\Omega = 4\pi$  或 0。事实上

点质量可以位于闭合面内，也可以位于闭合面以外。研究分布在面上的点质量是没有物理意义的，因为只有在质点的实际大小比起它至场中所研究地点的距离很小的条件下，我们才能利用点质量的概念。分布在表面上 (通过此面的场强矢量是我们所要观测的) 的点质量这一概念显然是不满足这一条件的。

如果质量位于闭合面  $S$  外部的一点  $Q$ ，那么从  $Q$  点可以作一束  $S$  面的切线 (图 1.2-3)。所有这些切线组成一个锥体， $S$  面与锥体的交线是一闭合线  $L$ ，这一闭合线将  $S$  面分成两部分： $S_1$  和  $S_2$ 。这两部分对  $Q$  点所张的立体角的大小是一样的。

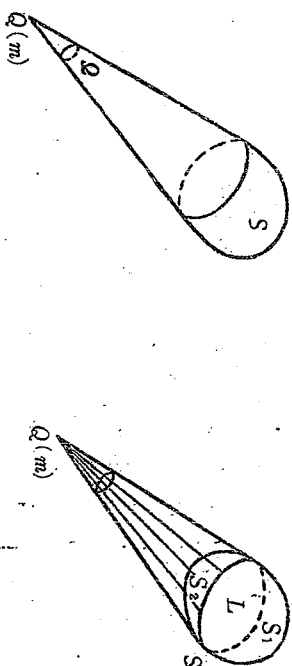


图 1.2-2

图 1.2-3

这个立体角是锥体的顶角，而从  $Q$  点看到的是一部分的内侧 ( $S_1$ ) 和另一部分的外侧 ( $S_2$ )。因此  $S_1$  和  $S_2$  面所张的立体角  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  等值而异号。因而通过  $S_1$  和  $S_2$  的场强矢量的通量其数值相等而符号相反，加起来等于零。由此可见，通过任一不包含质量  $m$  的闭合面之场强矢量  $F$  的通量等于零。

$$N = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = 0.$$

如果质量位于闭合面  $S$  以内 (图 1.2-4), 那么这个面对点质量所张的立体角  $\Omega = 4\pi$ 。因此在这场合下

$$N = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = -4\pi km.$$

如果我们规定上式中的  $m$  理解为位于  $S$  面内部的质量, 因而如果质量位于  $S$  面外, 就可以认为  $m = 0$ 。这样就可以把上述两种情形 (质量位于闭合面以内或以外), 只用一个公式来概括, 即

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = -4\pi km. \quad (1.2-3)$$

换言之, 场强矢量  $\mathbf{F}$  对于任意一闭合面  $S$  的通量  $N$  等于  $S$  所包围的质量的  $-4\pi k$  倍。这就是引力场的第一基本定律, 也就是场论中著名的高斯定律。

(2) 任意质量分布的场强通量 如果空间内存在的不只一个点质量, 而是一组质点, 那末我们可以由场的叠加原理求得这一质点组的场强通量:

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = -4\pi k \sum_i m_i. \quad (1.2-4)$$

式中  $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i$  为各质点  $m_i$  产生的场强矢量  $\mathbf{F}_i$  之矢量和。

如果质量是按体积分布, 其体密度为  $\rho$ , 则每一体积元  $dv$  中的质量  $dm$  等于  $\rho dv$ , 因而对于一非无限小体积  $v$  中的总质量等于

$$\sum_v m = \int_v \rho dv.$$

代入上式即得

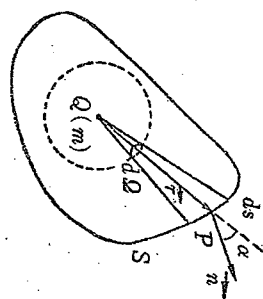


图 1.2-4

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = -4\pi k \int_v \rho dv, \quad (1.2-5)$$

式中  $v$  为  $S$  面内所包含的体积, 因而  $\int_v \rho dv$  表示  $S$  面以内所包含的全部质量。至于  $S$  面以外的质量分布, 上面已经证明过, 对于这个通量没有任何影响。所以高斯定律可以总结为:

在任意质量分布的引力场中, 场强矢量  $\mathbf{F}$  对于任意一闭合面  $S$  的通量等于  $S$  面所包围的全部质量的  $-4\pi k$  倍。

这就是我们要求的场强度的空间积分变化与质量分布之间的联系关系。这个关系是场中任一区域的表里联系, 也就是域表面上的场强通量与域内包含的质量的数量之间的联系。有了这个关系, 我们可以从域内质量的数量来确定域面通量; 反之, 如果已知域面通量, 则我们可以确定内含质量的总和。例如在地球物理勘探中我们可以利用这个关系来确定矿体的储量。

设在地面以下有一矿体, 如果我们在地面上 (设取为  $Oxy$  平面) 量出矿体通过这个面的通量  $N$ , 则我们可以证明

$$N = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dx dy = -2\pi k M,$$

因而可以求得矿体的储量  $M$  (总质量)。上式中的面积分是对地面求的,  $\mathbf{F}_n$  为地面上场强度的法线分量。这个公式实际上就是高斯定律的一个推论。因为对于一个矿体来说,

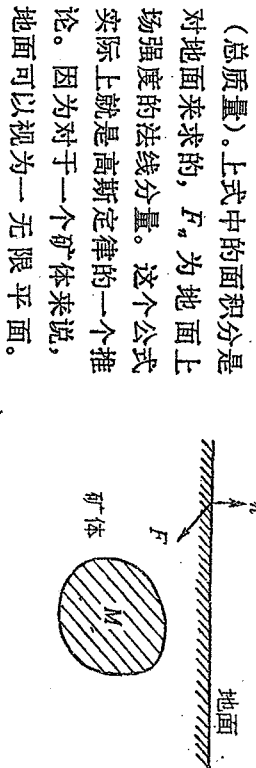


图 1.2-5

地面可以视为一无限平面。在矿体下面设想还有一个无限平面  $SS'$ , 它和地面构成矿体的一个封闭面 (图 1.2-5)。场强度对于这个封闭面的通量, 按高斯定律应该等于  $-4\pi k M$ , 地平面和  $SS'$  平面各分配一半, 因

而通过地面的通量为  $-2\pi khM$ 。

(3) 场强度的散度 以上我们研究了场强度的通量规律, 这是一个区域的面积分关系, 表示场中一个区域性的特性。现在我们来研究场中某一点上的定域化特性, 即研究场强度在某一点上的空间微分变化——散度。

散度是对于矢量场的一种导微运算, 它在直角坐标系中的意义表示场强矢量在沿场强矢量三分量方向的空间变化率。实际上散度更普遍的定义为定域化时场矢量的通量对体积之比的极限值:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds}{\Delta v},$$

式中  $\Delta v$  为  $S$  面所包围的微小体积。从这个定义可知散度之值完全和坐标选择无关。

根据数学上的高斯定理(体积分与面积分之间的联系关系), 我们可以将场强通量公式 (1.2-5) 写成下列形式:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dv = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = -4\pi k \int_V \rho dv.$$

不管积分区域如何选择, 这两个积分总是相等的, 特别是当积分定域化到某一点时, 也仍然是正确的。在这种情况下, 只有两个被积函数在空间每一点上彼此相等时, 上述情形才有可能。所以

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = -4\pi k\rho. \quad (1.2-6)$$

这就是引力场第一基本定律的微分表达式, 是高斯定律的定域化形式。它表示某点场强度的空间微分变化与该点上的质量密度之间的联系关系。这个联系关系说明, 场中每一点上场强度的散度只与该点的质量密度成比例, 而与其它点上的质量分布无关。如果某点没有质量密度存在, 则在该点的  $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ 。

仿照流体力学, 在速度矢量  $\mathbf{v}$  的场中, 那些  $\operatorname{div} \mathbf{v} \neq 0$  的点通常称为场的源, 而  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  的值则称为源强。当引用这个概念到引力场中时, 我们可以这样说, 引力场中的场源地点恒处在

场中那些也只有那些  $\operatorname{div} \mathbf{F} \neq 0$  之处。并且这些源头的强度 (在体质量分布的情况下) 等于  $-4\pi k\rho$ 。

### § 1.3 引力场的第二基本定律 (场强度的环流和旋度)

在前几节中, 我们从质量在引力场中受到的引力这一点出发, 研究了引力场的性质, 引入了场强度这个概念。现在我们从质量在场中移动时场力所作的功去研究场的性质。

(1) 场力所作的功 当一质量位于引力场中时, 它就受到一机械力的作用, 所以当它在场中有一无限小的位移  $d\mathbf{l}$  时, 场力所作的功是  $m\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ 。对于单位质量来说, 场力作的功为

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}.$$

当单位质量移动一非无限小的路程时 (图1.3-1), 场力所作的功是

$$A = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.3-1)$$

式中积分应理解为对路径  $L$  内从  $A$  到  $B$  的线积分。

(2) 功与路径无关 一般说来, 表示功的线积分之值, 不但与积分路径的起点和终点的位置有关, 而且也与路径的形状有关。但在引力场中, 我们可以证明, 这个积分只与路径的起点和终点有关, 而与路径的形状无关。下面我们来证明这一事实。

对于一质点  $m$  的场来说 (图1.3-1):

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -k \frac{m}{r^3} \cdot \mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} = -k \frac{m}{r^2} \cos \beta dl,$$

因为  $\cos \beta dl = dr$ , 所以上式变为

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -k \frac{m}{r^2} dr = d\left(-\frac{k m}{r}\right).$$

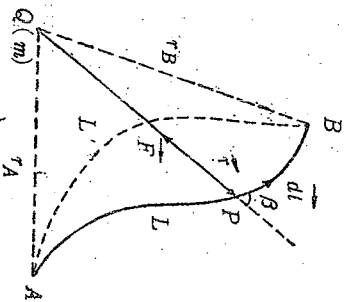


图 1.3-1



由此可见  $\oint_L F \cdot dl$  恰为一全微分，所以

$$A = \int_{r_A}^{r_B} F \cdot dl = \int_{r_A}^{r_B} dr \left( \frac{km}{r} \right) = -km \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right), \quad (1.3-2)$$

式中  $r_A$ 、 $r_B$  分别表示点质量  $m$  到路径  $L$  的起点  $A$  和终点  $B$  的距离。值得注意的是点质量在引力场中沿任意路径上场力作的功只与路径的起点和终点的位置有关，而与路径的形状无关。具体的说，场力沿路径  $L'$  上所作的功等于沿路径  $L$  上所作的功（图 1.3-1）。

(3) 场强度的环流 如果单位质量从场中某点出发，沿一闭合线移动又回到出发点时，则由于  $r_A = r_B$ ，场力所作的功等于零，即

$$\oint_L F \cdot dl = 0. \quad (1.3-3)$$

这个性质不仅对点质量的场成立，而且对所有各种质量分布的引力场都成立。这是由于任何质量分布都可以看作许多点质量的集合，它的场可以看作这些点质量场的叠加，因此，也满足上述条件。

上式 (1.3-3) 的左方是引力场强度  $F$  沿闭合曲线的积分，称为  $F$  的环流。场强度的环流等于零是引力场的一个基本性质，称为引力的场第二定律。引力场的第二定律实质上是能量守恒定律在引力场的特殊形式。因为我们知道，质量在引力场作用下沿着闭合路线移动，回到原处，一切都恢复了原状，实验证明场的状态没有发生任何变化，因而场的能量也不会有变化。如果环流  $\oint_L F \cdot dl > 0$ ，则引力场就对质量作了正功，质量将从场中获得能量。如果环流  $\oint_L F \cdot dl < 0$ ，则引力场就对质量作了负功，质量将损失能量。显然这两种情况都得出与上面相抵的结论，都违反了能量守恒定律，因而环流大于零或小于零都是不可能的，唯一的可能是环流等于零，这才是符合能量守恒原则的。

(4) 场强度的旋度 以上关系是就场强度的环流而言，这是一个积分形式的关系式。现在我们从功的观点来研究场中某一点的定域化特性，即研究场强度在某一点上的旋度变化。

旋度是对于矢量场的一种导微运算，它在直角坐标系中的意义表示场强矢量在沿垂直场强度三分量方向的空间变化率。实际上旋度更普遍的定义为定域化时场矢量的环流对面积之比的极限值

$$\text{rot}_n F = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} F \cdot dl}{\Delta S},$$

式中  $\Delta S$  为  $L$  曲线所联系的面积， $n$  为  $\Delta S$  面的正法线，从这个定义可知旋度之值完全和坐标选择无关。

根据数学上的斯托克定理（面积分与线积分之间的联系系），我们可以将场强度的环流公式 (1.3-4) 表成下列形式：

$$\oint_L \text{rot } F \cdot n \, ds = \oint_L F \cdot dl = 0,$$

式中  $S$  是以回路  $L$  为周界的任意曲面（图 1.3-2）。不管积分区域如何选择，这个公式总是正确的，即使当积分定域化到某一点时，也仍然是正确的，因而被积函数必须等于零，即  $\text{rot } F \cdot n = 0$ 。又由于  $S$  面是在所给域中任意选取的，因而法线  $n$  的任意性很大，所以只有

$$\text{rot } F = 0. \quad (1.3-4)$$

换言之，在引力场中所有各点的场强度的旋度恒等于零。

由于某一点上的场强矢量的旋度与围绕该点的环流是分不开的，而且线积分  $\oint_L F \cdot dl$  与路径无关的必要和充分的条件是  $\text{rot } F$

$= 0$ ，所以上述积分定律 (1.3-3) 和微分定律 (1.3-4) 是完全等效的。就物理实质而言，二者说明同一特性，即场力作功与路径无关。

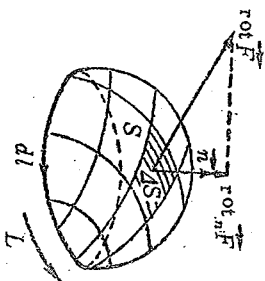


图 1.3-2

## § 1.4 引力场的势及其梯度

在本节内,我们将要根据场力做功与路径无关这一基本定律引入引力场中的势这个概念。

(1) 势的定义 由于场力做功与路径无关,只决定于路径的起点( $P_0$ )和末点( $P$ )的位置,所以我们可以引入相应的标量函数 $U(P_0)$ 和 $U(P)$ 使功 $A$ [参看(1.3-2)式]等于

$$A = \int_{P_0}^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = U(P) - U(P_0),$$

$$\text{或} \quad U(P) = U(P_0) + \int_{P_0}^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}.$$

这个函数称为引力场的势,它是位置坐标的单值函数。 $U(P)$ 是任意观察点 $P$ 的势, $U(P_0)$ 为某一选定点 $P_0$ 的势,为一任意固定的常数。由于 $P_0$ 的任意性,所以在 $U(P)$ 的定义中可以有一人为常数之差。因而 $U(P_0)$ 有时称为标准点的势, $P_0$ 为我们选取的标准点。

在一般的计算问题中,当质量分布在有限空间时,我们将标准点选取在无限远处,即与观察点不发生场的干扰之处,因而设 $U(\infty) = 0$ ,在这样的条件下,场中任意 $P$ 点的势由下列表示式来决定:

$$U(P) = U(\infty) + \int_{\infty}^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l},$$

$$\text{或} \quad U = \int_{\infty}^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}, \quad U(\infty) = 0. \quad (1.4-1)$$

换言之,场中任意 $P$ 点的势等于将一单位质量从无限远处移至 $P$ 点时场力所做之功。这就是引力势的定义,它是继场强之后另一描述场的特性的物理量。前者是从力的观点出发,后者是从功的观点出发,二者是互相联系的。

显然,势这个概念之所以具有确定的意义(势的单值性),只是因为场力所做功与路径的形状无关,否则沿不同路径到达某一点 $P$ ,场力会做不同的功,因而 $P$ 点具有不同的势,这种多值势是不能显示场的客观特性的。

其次要注意的是势这个概念是相对的(势的相对性)。 $P$ 点的势实际上是 $P$ 点与 $P_0$ (标准点)点之间的势差,不过后者的值被我们预先选取为零罢了。

(2) 点质量的势 将点质量的场强代入势的定义(1.4-1)中,即得点质量 $m$ 的场中任一 $P$ 点的势:

$$U = \int_{\infty}^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\infty}^P \frac{km}{r^3} \cdot \mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\infty}^P k \frac{m}{r^2} dr,$$

$$\text{或} \quad U = k \frac{m}{r}, \quad r \neq 0, \quad (1.4-2)$$

式中 $r$ 为由 $m$ 到 $P$ 点的矢径之值。

对于一质点组而言,场中任一 $P$ 点的势,由于场的叠加性,显然应等于各质点在 $P$ 点产生的势之代数和,

$$U = k \sum_i \frac{m_i}{r_i}, \quad (1.4-3)$$

式中 $r_i$ 为质点 $m_i$ 至 $P$ 点的距离。当然无论这一公式(1.4-3)或前一公式(1.4-2)都只在场内那些点上才有意义,这些点和各质点 $m_i$ 的距离比起这些质量的实际大小要大得很多。也就是说,只有在 $r$ 的值为非无限小时才有意义,因为 $r \rightarrow 0$ 时, $U \rightarrow \infty$ 。

(3) 体质量分布的势 对于一连续质量分布的体质量密度 $\rho$ 来说,如果 $P$ 点在质量分布区域以外,则按(1.1-5)式和(1.4-1)式我们有

$$U = \int_{\infty}^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\infty}^P \left( - \frac{k\rho \mathbf{r} \cdot d\mathbf{l}}{r^3} \right) = - \int_{\infty}^P \left[ \int_{\infty}^r \left( \frac{dr}{r^2} \right) \right] \rho dv,$$

$$\text{或} \quad U = k \int_{\infty}^P \frac{\rho dv}{r}, \quad (1.4-4)$$

式中  $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$  为任一观察点  $P(x, y, z)$  到质量分布区域  $v$  内某一体元  $dv = d\xi d\eta d\zeta$  之间的距离。

如果观察点  $P$  位于质量分布区域  $v$  以内, 则 (1.4-4) 式中被积函数里的  $r$  有趋于零的可能, 但是这个公式在这种场合下仍然是有限的。例如, 在球极坐标中, 体元  $dv$  可以表示成下式:

$$dv = r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\varphi,$$

式中  $\theta$  为极角,  $\varphi$  为方位角,  $r$  为由  $Q$  点至  $P$  点 (设取在原点) 之间的距离。因此根据 (1.4-4) 式中场的势为

$$U = k \int_v \rho r \sin \theta \, dr d\theta d\varphi.$$

由此可见, 即使在  $r \rightarrow 0$  时, 被积函数依然是有限的。实际上, 如果观察点  $P$  在质量分布区域  $v$  以内或在区域的边界上, 则我们可以用规定质量的内部的场强度  $F$  一样的办法 (§1.1), 用一旁义积分来规定质量内部的势:

$$U = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{v-\delta} \frac{k\rho dv}{r}, \quad (1.4-5)$$

式中  $\rho$  为质量连续分布的体密度,  $v_\delta$  为包含  $P$  点的一变域, 其最大线径度为  $\delta$ 。同样我们也可以证明 (1.4-5) 为一收敛性之旁义积分, 其值与 (1.4-4) 式相同。

总之, 设在引力场中某一区域  $v$  内, 质量分布的体密度  $\rho$  为一连续的 (或分区连续的) 函数, 则此质量分布的场强矢量  $F$  和势函数  $U$  可以分别由 (1.1-5) 式和 (1.4-4) 式之正常积分来表示, 或由 (1.1-7) 式和 (1.4-5) 式之收敛性旁义积分来表示, 后者之值分别与前二式的值相同, 故  $F$  和  $U$  在整个场内均为连续的函数。

应该注意, 当质量分布为面分布时, 则需将  $\rho dv$  过渡到  $\sigma ds$  并求面积分, 则得到面质量分布的势。

(4) 势的梯度与场强度的关系 为了进一步分析势的特性

及其与场强度之间的关系, 让我们来研究势的空间变化——梯度。由于场中自  $A$  到  $B$  点的势的增量为

$$U_B - U_A = \int_A^B F \cdot dl = \int_A^B F \cdot dl,$$

当  $B$  无限靠近  $A$  时, 此增量可写成一微分

$$dU = F \cdot dl = F_i dl_i,$$

式中  $F_i$  为  $F$  沿  $dl$  方向的分量,  $dl$  为线元的长度。此式可以写成下列形式

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial l_i}. \quad (1.4-6)$$

换言之, 场强沿  $dl$  方向的分量等于势在该方向的方向导数。这里写偏导数而不写成常导数的原因是:  $U$  不仅可以沿  $dl$  方向变化, 而且可以沿其它方向变化, 所以  $F_i$  仅表示沿某一  $dl$  方向的  $U$  之偏导数。

在直角坐标系中, 场强度沿坐标轴的三分量应为

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (1.4-7)$$

根据梯度定义,

$$\text{grad } U = i \frac{\partial U}{\partial x} + j \frac{\partial U}{\partial y} + k \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (1.4-8)$$

我们有

$$F = \text{grad } U. \quad (1.4-9)$$

换言之, 引力场中任一点的场强度  $F$  等于该点的势的梯度。

梯度更普遍的定义是

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial n} n,$$

式中  $n$  为一指向  $U$  (势) 增加最快的方向的单位矢量,  $\frac{\partial U}{\partial n}$  为沿  $n$  方面的空间变化率。由此可知梯度的值完全与坐标选择无关。因为  $U$  沿  $l$  方向的导数等于  $U$  之梯度  $\text{grad } U$  沿  $l$  方向投影

$\text{grad} U$ , 即

$$\frac{\partial U}{\partial l} = l \cdot \text{grad} U = \text{grad} U \cdot l,$$

式中  $l$  为一单位矢量。所以

$$F_l = \frac{\partial U}{\partial l} = \text{grad} U \cdot l.$$

这就是说, 场强度沿任意  $l$  方向的分量等于势之梯度沿该方向的投影。

(5) 等势面 凡势之值相等的各点所构成的曲面称为等势面。

我们知道场的势一般是空间点的坐标  $x, y, z$  的函数。如果我们要找出场中势相等的各点, 只需使  $U(x, y, z)$  等于一定的值就可以了。因此得到等势面的方程式如下:

$$U(x, y, z) = c (\text{常数}).$$

给常数  $c$  以不同的值, 就得到一等势面簇, 其中每个等势面上各点势的值就等于这面相应的常数  $c$  值。

等势面和力线处处正交这是一个很重要的特性, 这一特性可直接由等势面和力线的定义求得。因为在等势面上任意两点间的势差为零, 即

$$dU = 0.$$

如果以  $dl$  表示任意方向的微分位移, 则

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = \text{grad} U \cdot dl,$$

设取  $dl$  沿等势面切面方向, 则从上式可知  $dU = 0$ , 即

$$\text{grad} U \cdot dl = 0.$$

因为  $\text{grad} U$  和  $dl$  一般都不等于零, 所以二者必须垂直。但因  $\text{grad} U$  恒等于  $F$ ,  $dl$  也在平行于等势面的切面中, 所以在任意点的  $F$  恒与通过该点的等势面垂直, 即力线与等势面正交。

等势面和力线一样都是一种形象化的办法, 帮助我们了解场的分布和变化的, 这些概念没有什么直接的物理意义, 仅起着辅助性的作用。

### 例题 求一点质量场的等势面

设点质量  $m$  位于直角坐标系原点  $(0, 0, 0)$ , 则它在任意点  $P(x, y, z)$  的势:

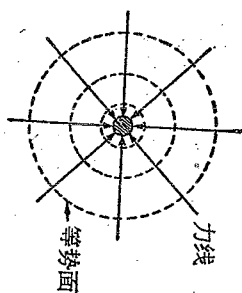


图 1.4-1

$$U = \frac{km}{r} = \frac{km}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

因而等势面的方程式为:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{km}{c} = c (\text{常数}),$$

$$\text{或 } x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{km}{c}\right)^2 = c^2,$$

式中  $c_1 = km/c$  为某一常数。这是表示球心位于原点的球面方程式。因此, 点质量周围场中的等势面为以该质点为中心的球面簇 (图1.4-1)。

### § 1.5 具有面质量分布的场 场强通过面分布的连续性

以上系就点质量和体质量分布而言。下面我们将要研究面质量分布的情况, 特别是面质量分布两侧的场强度和势的连续性。

(1) 具有面质量分布的场强和势 首先假设观察点  $P$  位于面质量分布  $S$  面以外 (图1.5-1)。如果设有一面密度  $\sigma$  分布在一直规的  $S$  面上, 则在  $S$  面以外一点  $P$  的场强度  $F$  和势  $U$  分别为

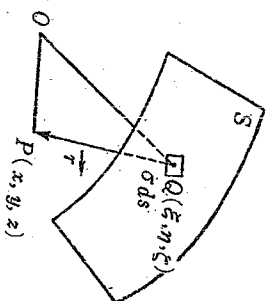


图 1.5-1

$$F = -k \int_S \frac{\sigma r}{r^3} ds, \quad U = k \int_S \frac{\sigma}{r} ds, \quad (1.5-1)$$

式中  $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ ,  $\sigma$  为一连续 (或分区连续) 函数。并且, 对于  $S$  面以外各点有

$$\text{grad} U = F.$$

$$(1.5-2)$$

其次假设  $P$  点在质量分布面以内, 则我们可以用下列旁义积分来规定  $P$  点的势,

$$U = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S-S_0} k \frac{\sigma ds}{r}. \quad (1.5-3)$$

式中  $S_0$  为在  $S$  面上包围  $P$  点的变域, 其最大线径度为  $\delta$ 。我们可以证明上式为一收敛性之旁义积分, 其值等于 (1.5-1) 式之值。

因此我们可以证明有面质量分布时, 只要  $\sigma$  为一连续函数, 则  $U$  在任何处 (面外或面内) 均存在, 而且为一连续函数。

但是在  $S$  面以内的场强  $F$  就不能象 (1.1-7) 式一样可以用一旁义积分来表示。因为这样的旁义积分是发散性的而不是收敛性的, 因而不存在。所以我们只能用高斯定律来研究  $S$  面附近的场强。

(2) 场强法线分量的不连续性 设在曲面  $S$  上的面密度为  $\sigma$ 。任意取这一面的外法线方向为  $n$ , 并规定指标 1 和 2 分别表示面的内侧和外侧 (内外是对

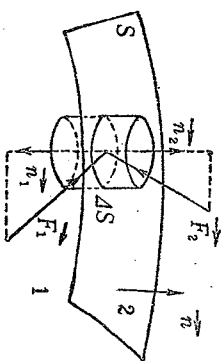


图 1.5-2

法线  $n$  而言)。现在研究面上一点附近所画出的圆柱体, 它的高  $dl$  垂直于这个质量面 (图 1.5-2)。设  $\Delta S$  为  $S$  面被圆柱体割切出来的面积元; 柱体的上下底都平行于  $\Delta S$  并近似的等于  $\Delta S$ 。若  $\Delta S$  充分小, 则  $\sigma$  在这个范围内可以看成常量, 同时上底及下底各点的场强度亦可分别看成一常量, 设各等于  $F_2$  及  $F_1$ 。这样一来, 高斯定律应用于此柱体表面上, 即得

$$\begin{aligned} N &= F_1 \cos(F_1 \cdot n_1) \Delta S + F_2 \cos(F_2 \cdot n_2) \Delta S + N' \\ &= -4\pi k \sigma \Delta S, \end{aligned}$$

式中  $n_1$  和  $n_2$  分别表示上下底的外法线 (单位矢量);  $N'$  表示通过柱体侧面的通量。由于法线  $n_2$  的方向和法线的  $n$  方向相同, 而  $n_1$  的方向和  $n$  的方向恰相反, 所以

$$F_1 \cos(F_1 \cdot n_1) = F_{1n_1} = -F_{1n}$$

$$F_2 \cos(F_2 \cdot n_2) = F_{2n_2} = +F_{2n}$$

这里  $F_{1n_1}$  和  $F_{2n_2}$  分别表示  $F_1$  沿  $n_1$  和  $F_2$  沿  $n_2$  方向的投影, 而  $F_{1n}$  和  $F_{2n}$  分别为沿  $n$  方向的投影。将上式代入通量公式中去, 则得

$$N = (F_{2n} - F_{1n}) \Delta S + N' = -4\pi k \sigma \Delta S.$$

假设  $\Delta S$  固定而  $dl \rightarrow 0$ , 则通过柱体侧面的通量  $N'$  将趋于零。于是

$$N = (F_{2n} - F_{1n}) \Delta S = -4\pi k \sigma \Delta S,$$

由此可得

$$F_{2n} - F_{1n} = -4\pi k \sigma. \quad (1.5-4)$$

换言之, 在面质量两边相邻两点上的场强矢量  $F$  的法线分量发生一突变, 其值等于面质量密度的  $4\pi k$  倍。场强矢量的法线分量在曲面两侧的差值  $F_{2n} - F_{1n}$  通常称为  $F$  的面散度, 常以  $\text{Div } F$  表示之。针对这个名称来说, 有时把  $\text{div } F$  称为  $F$  的体散度。显然, 若  $S$  面上某处的面质量密度  $\sigma = 0$ , 则该处场强矢量  $F$  的面散度等于零, 即  $F_n$  是连续的。

对于 (1.5-4) 式我们还特别强调两点: 第一, 式中  $n$  的方向是由空间域 1 指向空间域 2 那一方, 否则公式的形式应改为  $F_{1n} - F_{2n} = -4\pi k \sigma$ ; 第二, 由于  $S$  面上各点的  $\sigma$  可以不同, 所以  $\sigma$  和  $F_{2n}$ 、 $F_{1n}$  均为面上各点位置的函数。比如当  $\sigma$  取  $A$  点的值时, 式中  $F_{2n}$  和  $F_{1n}$  也必取面上  $A$  点两侧的值。

由于  $F_{2n}$  和  $F_{1n}$  可以分别表示成面质量两侧的势之梯度沿法线方向  $n$  的投影  $\frac{\partial U}{\partial n}$ , 即

$$F_{2n} = \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right)_2, \quad F_{1n} = \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right)_1,$$

所以 (1.5-4) 式也可以表示成下列形式:

$$\left( \frac{\partial U}{\partial n} \right)_2 - \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right)_1 = -4\pi k \sigma, \quad (1.5-5)$$

由此可见, 当通过一具有面质量密度为  $\sigma$  的质量面  $S$  时, 势函数  $U$  的变化是连续的, 但其梯度的法线分量  $\left( \frac{\partial U}{\partial n} = F_n \right)$  发生一突变, 其值等于面质量密度  $\sigma$  的  $-4\pi k$  倍。

(3) 场强切线分量的连续性 为了研究一质量面  $S$  两侧的场强度切线分量的变化情况, 让我们在  $S$  面上任一点附近作一闭合回路  $L_1$ , 如图 1.5-3 中所示之  $abcd$ , 并使  $\overline{ab}$  和  $\overline{cd}$  线平行地并列于  $S$  面之两侧,  $\overline{ad}$  和  $\overline{bc}$  充分小并平行于  $S$  的法线。按势场的性质, 场强沿闭合回路  $L_1$  的环流等于零, 即

$$\oint_{L_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{ab} + \int_{cd} + \int_{da} + \int_{bc} = 0.$$

假设  $ad$  和  $bc$  为无限小值, 则后两积分趋于零。同时因  $ab$  和  $cd$  无限接近  $S$  面, 所以式中  $\vec{F} \cdot d\vec{l}$  应变为  $\vec{F}$  之切线分量  $F_t$  的线积分,

于是上式变为

$$\int_{ab} \vec{F}_1 \cdot d\vec{l} + \int_{cd} \vec{F}_2 \cdot d\vec{l} = 0,$$

$$\text{或} \quad \int_{ab} F_{1t} dl - \int_{cd} F_{2t} dl = 0,$$

式中  $F_{1t}$ 、 $F_{2t}$  分别表示质量面两侧邻近处的场强  $\vec{F}_1$  和  $\vec{F}_2$  沿  $S$  面的切线方向的投影,  $dl$  表示  $\overline{ab}$ 、 $\overline{cd}$  上的线元。当  $ab$ 、 $cd$  无限靠近  $S$  面时, 则二线全同于  $L$ , 所以上式可以写成

$$\int_L (F_{1t} - F_{2t}) dl = 0.$$

式中  $L$  表示  $S$  面上与  $\overline{ab}$ 、 $\overline{cd}$  平行的一段曲线,  $dl$  表示沿  $L$  的线元。由于  $L$  的选择是任意的, 所以要使上式成立, 只有

$$F_{1t} = F_{2t}. \quad (1.5-6)$$

对  $S$  上任一点都成立。换言之, 在任意质量曲面的两侧, 场强度的切线分量经过曲面处是连续的。

**例题 一均匀圆薄板的场强度和势**

设一均匀圆薄板 (图 1.5-4a), 其面质量密度为  $\sigma$ , 其厚度为  $l$ 。试求沿垂直轴上任一点  $P(0, 0, z)$  的势和场强度。

设圆薄板之体密度  $\rho$  为一常量, 则  $\sigma = \rho l$  亦为一常量。由于半径为  $r$ , 宽度为  $dr$  的圆环在  $P$  点产生的势为

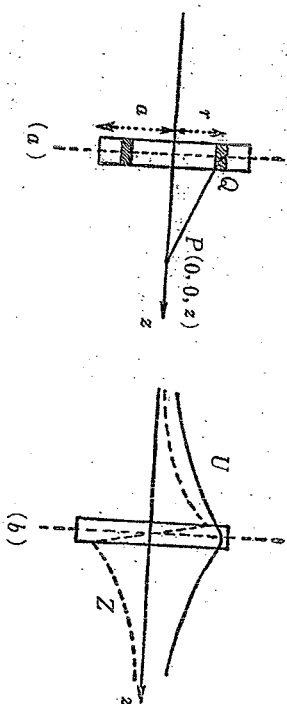


图 1.5-4

所以整个圆板的势为

$$U(z) = 2\pi k \sigma \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = 2\pi k \sigma \left[ \sqrt{a^2 + z^2} - \sqrt{z^2} \right]. \quad (1.5-7)$$

这里我们假定  $l$  是十分小于  $z$ , 并且到极值  $l \rightarrow 0$ ,  $0 \rightarrow \infty$  时, 面密度  $\sigma = \rho l$  仍为一常量。

由于对称关系, 场强度  $\vec{F}$  沿三个坐标轴的投影 ( $X, Y, Z$ ) 中, 仅  $Z$  分量存在, 其值等于

$$Z = \frac{\partial U}{\partial z} = 2\pi k \sigma \left[ \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2}} \right].$$

当  $z$  很大时, 即距圆板很远时, 圆盘可以视为一点质量, 因而  $U$  之值为  $\frac{k\sigma\pi a^2}{|z|}$ 。当距圆板很近时,  $U$  在圆板两侧保持连续

(图 1.5-4b), 其值为  $2\pi\sigma k a^2$ 。另一方面, 场强度则发生不连续现象, 在正  $z$  方面具有的值恰与负  $z$  方面具有的值有不同的符号 (图 1.5-4b)。实际上, 当沿正负两方向使  $z \rightarrow 0$  时, 则有

$$Z_{+0} = -2\pi k \sigma, \quad Z_{-0} = +2\pi k \sigma. \quad (1.5-8)$$

因此, 通过一面质量圆薄板时, 势的变化连续, 而势之梯度的法线分量则发生一突变

$$Z_{+0} - Z_{-0} = -4\pi k \sigma. \quad (1.5-9)$$

## § 1.6 泊松方程和拉普拉斯方程 引力场的边值问题

当我们研究了引力场的第一和第二两个基本定律之后，特别是在引入势这个概念之后，我们有可能把这两个基本定律总结为一个统一的规律，这个统一的规律就是用势表示出来的泊松方程和拉普拉斯方程。求解引力场的许多问题，就是以这些方程式为基础的。

(1) 泊松方程和拉普拉斯方程 在引力场中我们曾经研究过场强度的两个方面的性质，得到了两个基本定律的定域化形式为：

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} &= -4\pi k\rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{F} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.6-1)$$

根据第二基本定律我们引入了势这个概念，因而求得势的梯度与场强度的关系式：

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} U.$$

反之，从这个公式出发，我们可以求得第二基本定律。一切势场都是无旋场，这个可以由直接计算求得：

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0.$$

由此可知  $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$  和  $\mathbf{F} = \operatorname{grad} U$  是完全等效的。

综合这两个定律，我们便得到著名的泊松方程：

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \nabla^2 U = -4\pi k\rho. \quad (1.6-2)$$

在直角坐标系中，

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi k\rho.$$

对于场中没有质量分布的那些区域 ( $\rho=0$ )，那么泊松方程就变成拉普拉斯方程：

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \nabla^2 U = 0, \quad (1.6-3)$$

或者，在直角坐标系中：

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

根据散度和梯度的定义，我们有

$$\nabla^2 U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \frac{\partial U}{\partial n} ds}{\Delta v}.$$

由此可知泊松方程和拉普拉斯方程的意义为：引力场中的势是这样分布的，若在场中任一  $P$  点周围取一无限小闭曲面  $S$ ，其体积为  $\Delta v$ ，那么势沿该面的法线方向导数  $\frac{\partial U}{\partial n}$  的通量对  $\Delta v$  之比的极限值，在质量分布区以内等于  $-4\pi k\rho$ ，而在质量分布不存在的区域，则等于零。势的这种分布规律是引力场的基本特性，因而泊松方程和拉普拉斯方程是引力场的基本方程式，场论中的许多问题就是对他们求解而得到的。

(2) 引力场的边值问题 在总结出泊松方程和拉普拉斯方程以后，场论的问题就变成下列两类问题：

(i) 当我们知道了体密度  $\rho$  和面密度  $\sigma$  时，就可以根据边界条件对泊松方程和拉普拉斯方程求解，确定出场的势（或场强度）。这叫做正演问题。

(ii) 反之，当我们知道了场的势  $U$  及其梯度时，我们就可以根据泊松方程来确定场中某点的体质量密度

$$\rho = -\frac{1}{4\pi k} \nabla^2 U, \quad (1.6-4)$$

并根据 (1.5-5) 式来确定面质量密度

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi k} \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right) - \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right)_1 \right\}. \quad (1.6-5)$$

这叫做反演问题。

引力场的基本方程（泊松方程和拉普拉斯方程）用在解决反演问题时，这是一个微分过程，显而易见，只能得到唯一的解答，但在解正演问题的时候，这是一个积分过程，结论就不那么简单了，其中有未确定的积分常数出现。下面我们将要证明，只有具备了某些边界条件，正演问题才有唯一的解答。

唯一性定理 如果在空间中某一区域  $v$  内，各点的质量密度

$\rho$  和  $\sigma$  和这个区域的边界面  $S$  上各点的势或其梯度 (场强度) 为已知时, 那么这个区域中由泊松方程解出的势 (或场强度) 是唯一的 (或差一常数)。

现在我们用反证法来证明这个定理。假设满足上述边界条件的泊松方程的解在区域  $v$  内的函数值不是唯一的, 而是有两组解答  $U_1$  和  $U_2$ 。我们可以证明它们在  $v$  内相等。

设取一点函数  $U'$  表示两解之差, 即

$$U' = U_1 - U_2,$$

因为  $U_1$  和  $U_2$  都满足泊松方程, 即

$$\nabla^2 U_1 = -4\pi k\rho, \quad \nabla^2 U_2 = -4\pi k\rho,$$

两者相减得

$$\nabla^2 U' = 0,$$

即  $U'$  满足拉普拉斯方程。

为了进一步证明, 让我们先求得一个数学公式, 叫做格林定理。设在数学上的高斯定理

$$\oint_S \operatorname{div} a \, dv = \oint_S a \cdot n \, ds$$

中, 取

$$a = U \operatorname{grad} V = U \nabla V,$$

式中  $U$ 、 $V$  为  $v$  内和  $S$  上任意两个连续函数, 其一次和二次微商也是连续存在的。于是

$$\operatorname{div} a = \operatorname{div}(U \nabla V) = U \nabla^2 V + (\nabla U) \cdot (\nabla V).$$

又因

$$a \cdot n = U \operatorname{grad}_n V = U \frac{\partial V}{\partial n},$$

代入, 即得格林定理

$$\int_v \{U \nabla^2 V + (\nabla U) \cdot (\nabla V)\} dv = \oint_S U \frac{\partial V}{\partial n} ds. \quad (1.6-6)$$

设在格林定理中, 取  $U = V = U'$ , 这样就得到

$$\int_v (\nabla U')^2 dv = \oint_S U' \frac{\partial U'}{\partial n} ds. \quad (1.6-7)$$

因为解正问题时,  $U_1$  和  $U_2$  应该在  $S$  面上具有已知值, 而已知值只有一个, 所以在整个  $S$  面上  $U' = U_1 - U_2 = 0$ , 因而

$$\int_v (\nabla U')^2 dv = 0. \quad (1.6-8)$$

由于上式之被积函数是正值, 积分不可能等于零, 除非被积函数本身在积分域中恒等于零, 即

$$\nabla U' = 0. \quad (1.6-9)$$

所以

$$U' = C \text{ (常数)}, \quad (1.6-10)$$

上式在  $v$  中任意一点都成立, 所以当点由任意方向趋近于此边界  $S$  面时,  $U'$  恒保持  $C$  值, 并等于边界上的  $U'$  值。但在边界上  $U'$  恒等于零, 所以  $C = 0$ , 于是在  $v$  中任意点上有

$$U' = 0.$$

即

$$U_1 = U_2.$$

由此可见, 已知的两个解完全相同。这就证明了当解正问题时, 已知边界上各点的势之值, 可以确定  $v$  内各点势只有唯一的解。

若已知的不是  $S$  面上各点的势而是场强度, 则在  $S$  面上

$$\nabla U_1 = \nabla U_2 = \text{已知值},$$

因而

$$\nabla U' = 0,$$

$$\frac{\partial U'}{\partial n} = \operatorname{grad}_n U' = \nabla U' \cdot n = 0.$$

这样, 我们由 (1.6-7) 式仍可得到 (1.6-8) 式, 因而也得到

$$\nabla U' = 0,$$

$$\nabla U_1 = \nabla U_2,$$

$$F_1 = F_2,$$

或即对  $v$  内任一点都成立。于是得出结论: 当解正问题时, 已知边界上各点的场强之值, 可以确定  $v$  内各点场强度只有唯一的解。然



而这一情形我们不能证明  $v$  内各点的势是否只有唯一的解。因为在这种情形之下不能证明 (1.6-10) 式中  $C$  等于零, 此时  $C$  为一不确定的常数。这就是说, 在这种情形之下 (即场强度在  $S$  面上为已知),  $v$  内的势可以是相差一任意常数  $C$  的不同解答。

唯一性定理对我们以后解场论中的实际问题是很重要的, 因为它首先告诉我们, 唯一确定引力场的因素是什么 (泊松方程和边界条件), 因而指出解场论问题的方法; 其次它还告诉我们, 不管采用什么方法, 只要找到一组能够满足已给泊松方程及已知边界条件的解答, 它就是唯一正确的解答, 不可能再存在另一个解满足这些要求。巧妙的利用这一点, 可以使场论中一系列的繁杂数学演算大为简化。

最后我们来讨论一下在勘探地球物理学中所遇到的解的多值性问题。在前面我们已经说过, 在解反演问题时, 必须知道场中各点的势。但在地球物理勘探中实际测到的是地面上某一区域或空中距地面某一高度上的势及其微商, 没有得到全部场域内势函数的值, 因而在解反演问题时, 要想唯一确定地下场源物质的分布规律是不可能的。在这种情形下只有给予附加条件, 才能得到单值的解。比如一个球形矿体, 只要球的位置和总质量保持不变, 它在地面上产生的势总是不变的, 然而球的半径因而球的大小是多种多样的。对于这种原因造成的解的多值性, 通常的办法是确定场源物质的密度, 当知道了密度以后, 我们就可以唯一地得到场源物质的分布规律 (形状、大小和位置)。

### 例题 1 无限平面薄的板场

解: 设  $abcd$  为一无限大平面薄板, 其密度为  $\rho$ 。设取坐标如图 1.6-1 所示。从对称性知道, 在垂直  $z$  轴的平面内, 一切点的势都相同。场的势

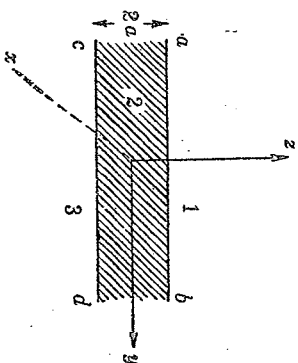


图 1.6-1

只与坐标  $z$  有关。因此

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

在区域 1 和 3 内 ( $\rho=0$ ), 势满足拉普拉斯方程:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U_3}{\partial z^2} = 0,$$

它们的解为

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= Cz + D, \\ U_3 &= C'z + D', \end{aligned} \right\}$$

式中  $C, D, C', D'$  为积分常数。

在区域 2 中, 势满足泊松方程式:

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} = -4\pi\rho\sigma,$$

因为  $\rho$  为常数, 所以

$$U_2 = -2\pi\rho\sigma z^2 + Az + B,$$

式中  $A, B$  为积分常数。于是我们得到具有六个任意常数的三个方程式。因为这些方程都描述同一个势函数, 所以需要连续的和平滑的由一个方程转到另一个方程。所以我们有下列边界条件。

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } z=a \text{ 时, } U_1 &= U_2, \quad \frac{\partial U_1}{\partial z} = \frac{\partial U_2}{\partial z}; \\ \text{当 } z=-a \text{ 时, } U_2 &= U_3, \quad \frac{\partial U_2}{\partial z} = \frac{\partial U_3}{\partial z}. \end{aligned} \right\}$$

此外, 在  $xOy$  平面两边的势应当是对称的, 也就是说还有一个对称条件:

$$U(z) = U(-z).$$

对于区域 1 和 3, 这对称条件给出

$$Cz + D = -C'z + D',$$

所以  $C = -C', D = D'.$

对于区域 2, 这对称条件给出

$$-2\pi\rho\sigma z^2 + Az + B = -2\pi\rho\sigma z^2 - Az + B,$$

所以

$$A=0.$$

设  $z=0$  之点的  $U_2=0$ , 则我们有  $B=0$ .

把这些条件代入即得:

$$\left. \begin{aligned} U_2 &= -2\pi\rho z^2, \\ U_1 &= U_3 = C|z| + D. \end{aligned} \right\}$$

在区域 2 和 1 的边界上, 应满足下列条件:

$$\left. \begin{aligned} U_1|_{z=a} &= U_2|_{z=a}, & C a + D &= -2\pi\rho a^2, \\ \frac{\partial U_1}{\partial z} \Big|_{z=a} &= \frac{\partial U_2}{\partial z} \Big|_{z=a}, & C &= -4\pi\rho a, \end{aligned} \right\}$$

因此

$$D = 2\pi\rho a^2.$$

现在, 所有常数都确定了。代入即得

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= 4\pi\rho a \left( \frac{a}{2} - z \right), & z > +a; \\ U_2 &= -2\pi\rho z^2, & -a \leq z \leq +a; \\ U_3 &= 4\pi\rho a \left( \frac{a}{2} + z \right), & z \leq -a. \end{aligned} \right\}$$

因为场强度  $F = \text{grad} U = \frac{\partial U}{\partial z} k$ , 所以在相应各区间的场强度为:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= -4\pi\rho a k, \\ F_2 &= -4\pi\rho z k, \\ F_3 &= +4\pi\rho a k. \end{aligned} \right\}$$

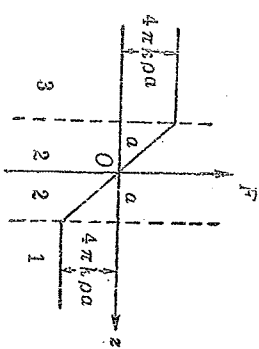


图 1.6-2

### 例题 2 均匀质量球体的场

解: 由于质量分布是球形对称, 势只与离开  $O$  点的距离  $r$  有

关, 即  $U = U(r)$ 。我们引入球极坐标系, 则

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right).$$

因此对球内和球外两个区域的方程式为 (见图 1.6-3)

$$\text{在球内: } \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U_1}{\partial r} \right) = -4\pi\rho,$$

$$\text{在球外: } \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U_2}{\partial r} \right) = 0,$$

式中  $\rho$  为球的质量密度。上列齐次方程的解为

$$U_2 = -\frac{C}{r} + D.$$

而非齐次方程的特解应该是  $ar^2$  的形式, 我们求出它是  $-\frac{2}{3}\pi\rho r^2$ 。

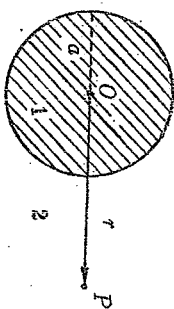


图 1.6-3

因此

$$U_1 = -\frac{2}{3}\pi\rho r^2 - \frac{A}{r} + B.$$

根据下列极限条件有:

当  $r=0$  时,  $U_1$  为有限值,  $\therefore A=0$ ;

当  $r=\infty$  时,  $U_2=0$ ,  $\therefore D=0$ 。

又根据下列边界条件, 我们有: 当  $r=a$  时

$$\left\{ \begin{aligned} U_1|_{r=a} &= U_2|_{r=a}, & \therefore -\frac{2}{3}\pi\rho a^2 + B &= -\frac{C}{a}; \\ \left( \frac{\partial U_1}{\partial r} \right)_{r=a} &= \left( \frac{\partial U_2}{\partial r} \right)_{r=a}, & \therefore -\frac{4}{3}\pi\rho a &= -\frac{C}{a^2}. \end{aligned} \right.$$

解之, 得:

$$C = -\frac{4}{3}\pi a^3 \rho, \quad B = 2\pi a^2 \rho.$$

代入即得

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= 2\pi a^2 k \rho - \frac{2}{3} \pi k \rho r^2, & r \leq a, \\ U_2 &= -\frac{4}{3} \pi a^3 k \frac{\rho}{r}, & r \geq a. \end{aligned} \right\}$$

因为场强度  $F = \text{grad } U$ , 所以

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= -\frac{4}{3} \pi k \rho r, & r \leq a, \\ F_2 &= -\frac{4}{3} \pi a^3 k \frac{\rho}{r^2}, & r \geq a. \end{aligned} \right\}$$

由此可见, 球内某点的场强与该点至球心的距离  $r$  成正比, 而球外某点的场强则与该点至球心的距离  $r$  的平方成反比 (图 1.6-4)。

若引入球体的总质量  $m = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$ , 则

$$F_2 = -\frac{km}{r^2}.$$

由此可见, 一个质量球体在球外一点所产生的引力场和假定把全部质量集中在球心处的点质量所产生的场强相同。

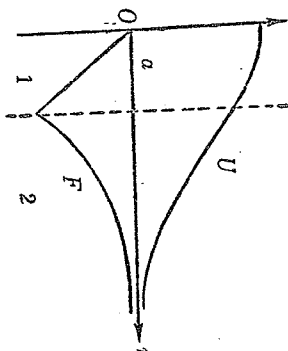
若引入  $m_1 = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$ ,

这是半径为  $r$  的小球内的总质

$$F_1 = -\frac{km_1}{r^2}.$$

量, 则

图 1.6-4



由此可见, 一个质量球体在球内距球心为  $r$  处所生的引力场强, 仅与半径为  $r$  的小球内所包含的质量有关, 与小球外的质量无关, 而且场强的大小和把小球内所含的全部质量集中于球心处的点质量所产生的场强相同。

## § 1.7 泊松方程的积分 格林函数 狄义赫利问题和诺依曼问题

在本节中, 我们将要求得泊松方程的积分表示式, 这个表示式就是体质量分布的势的表示式 (1.4-4), 所用的证明可以避免先前从点质量的公式推导体质量分布的公式的缺点。根据这积分表示式, 我们可以进一步研究边界值问题的解, 特别是狄义赫利问题和诺依曼问题的解。

(1) 泊松方程的积分表示式 引力场的重要问题之一是根据已知的质量分布求出场的分布。如果质量分布为已知, 泊松方程式就使我们求出引力场的势的显式来。这一微分方程式在一定边界条件下求解 (积分), 显然必须和我们先前所导出的势的积分公式相同, 即

$$U = k \int \frac{\rho dv}{r}.$$

为了解决这个问题, 我们须知道两个补充定理。

(i) 函数  $V = \frac{1}{r}$  满足拉普拉斯方程  $\nabla^2 V = 0$ , 并且除在

$r = 0$  的地点外, 处处有限。这个定理可以直接将

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

对  $x, y, z$  求偏导数来证明。

(ii) 格林定理。在高斯定理

$$\int_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \text{div } \mathbf{a} dv$$

中, 设取

$$\mathbf{a} = U \text{grad } V - V \text{grad } U,$$

则我们能够证明下列形式的格林定理

$$\oint_S \left[ U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right] ds = \int_V (U \nabla^2 V - V \nabla^2 U) dv, \quad (1.7-1)$$

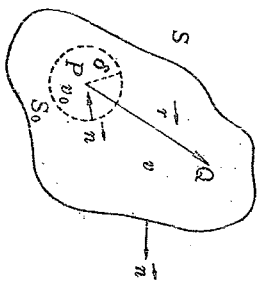


图 1.7-1

可以完全在S面内，也可以一部分在S面外。设在 $v$ 内选择任意一点 $P(x, y, z)$ ，并求该点的势 $U(x, y, z)$ ，这个势的微商在整个区域内是一连续函数。

设在格林公式中，取函数 $U$ 为 $P$ 点的势，取函数 $V = \frac{1}{r}$ ，

这里 $r$ 是以 $P$ 点为起点（固定点）至场中各点的距离。这个函数 $\frac{1}{r}$ 及其微商，除在 $P$ 点以外，在整个空间都是连续的并且是有限的。

因为格林定理只适用于两个标量 $U$ 和 $V$ 及它们的微商都是连续的区域，所以 $P$ 点必须从积分区域中除去。为了做到这一点，我们在 $P$ 点周围绘一半径为 $r_0$ 的任意小球面 $S_0$ ，并从 $v$ 中挖去 $S_0$ 所包围的体积 $v_0$ ，则在 $v-v_0$ 区域内， $U$ 和 $V$ 具有格林定理所要求的连续性。因此在这种场合下，格林定理变为

$$-\int_{v-v_0} \nabla^2 U dv = \oint_{S+S_0} \left[ U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right] ds, \quad (1.7-2)$$

式中积分区域是 $S$ 与 $S_0$ 之间的区域，体积分符号下的指标为 $v-v_0$ ，面积分符号下的指标为 $S+S_0$ （即在二面上求积分）。

现在研究展布在 $S_0$ 面上的面积分。因为球面 $S_0$ 的外法线（对积分体积 $v-v_0$ 来说）指向球的中心 $P$ 点，而 $r$ 则沿此方向减少，所以在 $S_0$ 面上有

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{r_0^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{\partial U}{\partial r}.$$

式中 $U$ 和 $V$ 为区域 $v$ 内及域面 $S$ 上任意两个连续函数，其一次和二次导数也是连续存在的。

现在来解决我们所提出的问题。设在场中给一任意的正规的闭合面 $S$ ，面内包含的体积为 $v$ （图1.7-1）。质量分布

将这些式子代入前面式子的面积分中，然后再应用积分学中的中值定理，即得

$$\begin{aligned} \oint_{S_0} \left\{ U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right\} ds &= \oint_{S_0} \left\{ \frac{U}{r_0^2} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial U}{\partial r} \right\} ds \\ &= \left\{ \frac{1}{r_0^2} \bar{U} + \frac{1}{r_0} \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} \right) \right\} \oint_{S_0} ds = 4\pi \bar{U} + 4\pi r_0 \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} \right), \end{aligned}$$

式中 $\bar{U}$ 和 $\left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} \right)$ 分别表示 $U$ 和 $\frac{\partial U}{\partial r}$ 在球面 $S_0$ 上的平均值，并且

$$\oint_{S_0} ds = 4\pi r_0^2.$$

现在来求 $r_0 \rightarrow 0$ （即 $S_0$ 包紧着 $P$ 点）的极限值。这对上式中的后一项变成零，而势 $U$ 在无限小球面上的平均值 $\bar{U}$ 和势在球心 $P$ 点的值 $U_P$ 可以看作是相等的，因此

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} \left\{ U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right\} ds = U_P.$$

由此可知，在 $r_0 \rightarrow 0$ 的极限情形下，方程式(1.7-2)具有下列形式：

$$-\frac{1}{4\pi} \int_v \nabla^2 U dv = U_P + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ U \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right\} ds,$$

或

$$U_P = \frac{1}{4\pi} \int_v -\nabla^2 U dv + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right] ds, \quad (1.7-3)$$

式中体积分可以遍及于表面 $S$ 所包围的整个体积，因为当 $r_0 \rightarrow 0$ 时， $v_0 \rightarrow 0$ 。由此可见，场中任一区域 $v$ 内任意 $P$ 点的势 $U_P$ 可以表示成一体积分和一面积分之和。

当 $U$ 满足泊松方程时，则(1.7-3)式变为

$$U_P = k \int_v \frac{\rho dv}{r} + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right] ds. \quad (1.7-4)$$

在特殊情况下，当  $U$  满足拉普拉斯方程时，则 (1.7-3) 式变为

$$U_P = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right] ds. \quad (1.7-5)$$

换言之，场中任一区域  $v$  内任意  $P$  点的势  $U_P$ ，等于域内质量分布在  $P$  点产生的势与区域界面上的势及其法向微商有关的一个面积分之和。在特殊情况下，域内不包含质量时，域内任意  $P$  点的势可以用域之界面上与势及其法向微商有关的一个面积分来表示。由此可见，上述面积分显然表示体积  $v$  以外的质量分布在  $P$  点产生的势。

我们将体积  $v$  了解为整个无限空间（也就是说将包围  $v$  的边界  $S$  面搬到无穷远处去），并且对  $U$  及其微商加上下列边界条件：在无限远处  $U \rightarrow 0$  的速度不比  $\frac{1}{r}$  的速度来得慢； $\frac{\partial U}{\partial n} \rightarrow 0$  不比  $\frac{1}{r^2}$  的速度来得慢，即

$$\text{当 } r \rightarrow \infty \text{ 时, } rU \text{ 和 } r^2 \frac{\partial U}{\partial n} \text{ 仍为有限值。} \quad (1.7-6)$$

这个边界条件的物理意义为：在无限远处势  $U$  趋于零，场强  $F$  也趋于零，这就是说所有质量都位于观察者所在空间内的有限区域内。在解泊松方程式求势时，只有满足了 (1.7-6) 式所述的条件，才可以求得我们所需要的引力场的势。

在上述边界条件之下，当边界面搬到无穷远处时，(1.7-4) 式中最后一项面积分趋于零。因为当  $r \rightarrow \infty$ ，积分的被积函数趋于零的速度不比  $\frac{1}{r^3}$  趋近于零来得慢，而面积分面的增大只和  $r^2$  成正比，因此当  $r \rightarrow \infty$  时，(1.7-4) 式变为

$$U = k \int_v \frac{\rho dv}{r}.$$

式中  $r$  是体质量元  $\rho dv$  到场中观察点  $P$  的距离，并且积分遍及质量所在的整个空间，由此更加明确 (1.7-4) 式中之面积分系  $S$

面以外的质量分布在  $P$  点产生的势。

(2) 狄义赫利问题和诺依曼问题 设在引力场中取一个以曲面  $S$  为界的体积  $v$ 。现在让我们来研究下列边界问题：

试求出势函数  $U(x, y, z)$  在  $v$  内部能满足下列方程式：

$$\nabla^2 U = 4\pi\rho \text{ 或 } \nabla^2 U = 0,$$

而且能满足下列二边界条件中的任意一个条件：

I. 在  $S$  面上， $U|_S = f_1$  (第一种边界问题)；

II. 在  $S$  面上， $\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_S = f_2$  (第二种边界问题)。

上式中的  $f_1$  和  $f_2$  是已给的函数，而  $\frac{\partial U}{\partial n}$  是沿曲面  $S$  的外法线方向的导数。

这些边界条件的物理意义是很明显的。一个是边界上的势为已知，另一个是边界上的势的法线微商(场强度)为已知。拉普拉斯方程的第一种边界问题，通常称为狄义赫利问题；而第二种边界问题，通常称为诺依曼问题。若  $P$  点(观察点)在  $S$  面以内，则称为内部问题；若  $P$  点在  $S$  面以外，则称为外部问题。由前一节证明的唯一性定理可知，狄义赫利内部和外部问题的解是唯一确定的，而诺依曼内部问题的解则不是唯一确定的，可以有一常数之差。但是诺依曼外部问题，因为为势在无限远处等于零的条件，所以解仍然是唯一的。

格林函数 为了解狄义赫利问题和诺依曼问题，我们首先引入格林函数这个概念。在格林公式 (1.7-1) 中

$$\int_v (U^2 \nabla^2 V - V \nabla^2 U) dv = \oint_S \left( U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds,$$

假设  $U$  在所研究的域中满足拉普拉斯方程，取为引力场的势函数，而  $V$  取为任意一个调和函数，因而有

$$\nabla^2 U = 0, \quad \nabla^2 V = 0.$$

于是

$$\oint_S \left( U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds = 0.$$

由于  $U$  满足拉普拉斯方程, 由公式 (1.7-5) 知道

$$U_s = \frac{1}{4\pi} \oint_s \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right] ds.$$

若把上两式中的前一式乘上  $\frac{1}{4\pi}$ , 并与后一式相加, 则得

$$U_s = \frac{1}{4\pi} \oint_s \left[ G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds, \quad (1.7-7)$$

式中

$$G = \frac{1}{r} + V \quad (1.7-8)$$

是含  $P(x, y, z)$  与  $Q(\xi, \eta, \zeta)$  两点的函数, 称为格林函数, 其中  $P$  点是定点 (观察点),  $Q$  点是变点,  $r$  为从  $Q$  至  $P$  点的距离。

格林函数  $G$  在区域  $v$  内部, 除了在  $P=Q$  点外到处满足方程

$$\nabla^2 G = 0.$$

但在  $P=Q$  点上, 函数  $G$  有形状如  $\frac{1}{r}$  的奇异性。

在狄义赫利问题中, 让我们选择这样的函数  $V$ , 使

$$G|_s = 0,$$

这就是说

$$V|_s = -\frac{1}{r}.$$

这样定出的函数  $G$  就叫做: 方程式  $\nabla^2 U = 0$  的狄义赫利问题的点格林函数。格林函数使我们给出方程  $\nabla^2 U = 0$  的狄义赫利问题的解的显式。事实上, 由公式 (1.7-7) 得

$$U_s = -\frac{1}{4\pi} \oint_s U \frac{\partial G}{\partial n} ds. \quad (1.7-9)$$

应该注意: 上式是用格林公式推得的, 所以函数  $U$  和  $G$  及曲面  $S$  都必须满足格林公式中所规定的条件, 即  $U$  和  $G$  及其导数在  $v$  中是连续的, 且在  $v$  内它们的二阶导数都存在, 又  $S$  面为一平滑的曲面。

在诺依曼问题中, 让我们选择这样的函数  $V$ , 使

$$\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_s = 0,$$

这就是说

$$\frac{\partial V}{\partial n} \Big|_s = -\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right).$$

这样定出的函数  $G$  就叫做: 方程式  $\nabla^2 U = 0$  的诺依曼问题的点格林函数。格林函数使我们给出方程  $\nabla^2 U = 0$  的显式。事实上, 由公式 (1.7-7) 得

$$U_s = \frac{1}{4\pi} \oint_s G \frac{\partial U}{\partial n} ds. \quad (1.7-10)$$

半空间的情况 现在来讨论半空间的情况, 即要求一个在半空间  $z > 0$  上的调和函数  $U(x, y, z)$ 。设在已知半平面  $z = 0$  上的边值为:

$$\begin{aligned} U|_{z=0} &= f_1(\xi, \eta), \quad (\text{狄义赫利问题}) \\ \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{z=0} &= f_2(\xi, \eta). \quad (\text{诺依曼问题}) \end{aligned}$$

对于一个地球物理工作者来说, 在实际重力测量中, 除航空测量外, 一般只能获得势或势的法向导数在地表上的值。若把地面近似的看成无限大平面情况下来求上述问题的解, 即根据地面测量结果来计算空间中其它平面上的势, 进行所谓空间解析延拓, 这就需要求解上述两类问题。

设  $r$  为由变点  $Q(\xi, \eta, \zeta)$  到定点  $P(x, y, z)$  的距离 (图 1.7-2), 其中  $z > 0$ ,  $r$  是由变点  $Q(\xi, \eta, \zeta)$  到点  $P(x, y, -z)$  的距离,  $P'$  是  $P$  的对称点。在半空间内  $z <$

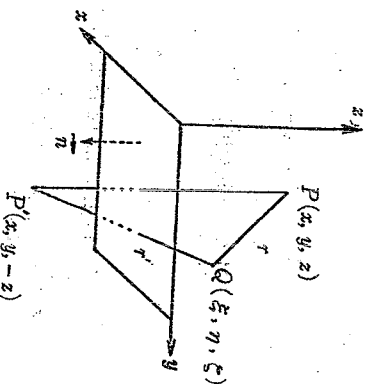


图 1.7-2

0上,  $\frac{1}{r}$  是点  $Q$  的调和函数, 因为  $P'$  位于这半空间之外。若  $Q$

出现在  $Oxy$  (地表) 平面  $z = 0$  上, 则显然有  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r'}$ 。

在狄义赫利问题时, 格林函数显然有下列的形式:

$$G = \frac{1}{r} - \frac{1}{r'}, \quad (1.7-11)$$

式中

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}, \\ r' = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}.$$

这样就可满足在界面  $Oxy$  上时,  $G|_s = 0$  的条件。对于半空间  $z > 0$  来讲, 平面  $z = 0$  的向外法线的方向是与  $Oz$  轴相反的方向,

这就是说,  $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial \zeta}$ , 因而

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_s = -\left. \frac{\partial G}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = -\left[ \frac{z-\zeta}{r^3} + \frac{z+\zeta}{r'^3} \right]_{\zeta=0} \\ = -\frac{2z}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}}.$$

所以半空间的狄义赫利问题的解为

$$U_P = -\frac{1}{4\pi} \int_s U \frac{\partial G}{\partial n} ds$$

$$= \frac{z}{2\pi} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \frac{f(\xi, \eta)}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}} d\xi d\eta. \quad (1.7-12)$$

在解诺依曼问题时, 格林函数显然具有下列形式:

$$G = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}. \quad (1.7-13)$$

这样就可以满足  $Q$  点在界面  $Oxy$  上时,

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_s = -\left. \frac{\partial G}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = -\left[ \frac{z-\zeta}{r^3} - \frac{z+\zeta}{r'^3} \right]_{\zeta=0} = 0$$

的条件。同时

$$G|_s = \left[ \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right]_{\zeta=0} = \frac{2}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}}.$$

所以半空间的诺依曼问题的解为

$$U_P = \frac{1}{4\pi} \int_s G \frac{\partial U}{\partial n} ds \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \frac{f(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} d\xi d\eta. \quad (1.7-14)$$

## § 1.8 平面场

质量分布可以具有这样一种对称性, 它使势函数  $U$  不依赖于某一个坐标, 比如不依赖于  $z$  坐标, 这时场中每一点的势只需两个变数  $(x, y)$  来确定, 于是拉普拉斯方程化为下面的形状:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0. \quad (1.8-1)$$

在这种情形下, 在任何一个平行于  $Oz$  轴的直线上, 势  $U$  保持有相同的值, 或者换句话说, 在平行于  $Oxy$  平面的任何平面上,  $U$  的值的分布是同样的 (其实只要考虑  $Oxy$  平面就行了), 所以这种场称为平面场 (图1.8—1)。

产生这种场的最简单的质量分布就是一无限直长的均匀细线, 其线密度 (单位长的质量) 为  $\lambda$ 。利用高斯定律, 我们很容易证明这种质量分布的引力场强度  $F$  等于

$$F = -\frac{2\lambda k}{r^2} r, \quad (1.8-2)$$

场强度的方向与细线垂直, 式中  $r = QP$  为  $Q$  点至  $P$  点的垂直距离。由上式知道,  $P$  点的场强度恰如一质量  $m = 2\lambda$  置于  $Q$  点  $(\xi, \eta)$ , 并以反比于距离的一次方的引力  $F$  吸引  $P$  点的单位质量 (图1.8—1)。

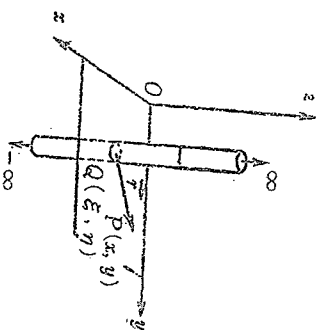


图 1.8-1

这种力场的势是一种对数势，我们可以根据  $F = \text{grad } U$  的关系式来求得。由于

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{2\lambda k}{r},$$

求积分后得

$$U = -2\lambda k \int \frac{dr}{r} = -2\lambda k \ln r + C = 2\lambda k \ln \left( \frac{1}{r} \right) + C.$$

若选取  $r = 1$  处的势为零，则  $C = 0$ ，所以

$$U = 2\lambda k \ln \frac{1}{r}. \quad (1.8-3)$$

对数势是两个自变量的拉普拉斯方程的解，用直接微分法不难表明这个事实，这解绕极点 ( $r = 0$ ) 有圆对称，在极点处它变为无限大。对数势与体积势的区别，就是对数势在无限远处不趋于零，但在无限远处有对数奇点。

现在我们来计算  $P$  点的场强度的分量

$$\left. \begin{aligned} X &= -2\lambda k \frac{x-\xi}{r^2}, \\ Y &= -2\lambda k \frac{y-\eta}{r^2}, \end{aligned} \right\} \quad (1.8-2)$$

式中  $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ 。

若有数个质点，那么根据力场的叠加原理，诸点的势应相加；若有数根直线，沿这些直线都有质量分布，则各条直线的势亦应相加。

若集合一束不同线质量密度的细线构成一无限长柱体，柱体之横截面  $S$  上的面质量密度为  $\sigma$ （实际上是单位长度单位面积上的质量）（图1.8-2）。在质量分布区以外，这种质量分布的引力场恰如一平面（柱之横截面）质量（面密度为  $\sigma$ ）与距离之一次方成反比的引力场强度为

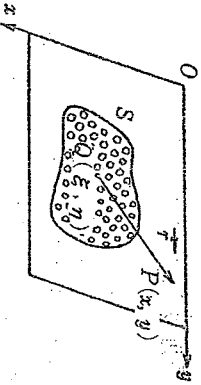


图 1.8-2

$$F = -2k \int_S \frac{\sigma r}{r^2} ds, \quad (1.8-4)$$

或者沿直角坐标系的两个分量为

$$\left. \begin{aligned} X &= -2k \int_S \frac{\sigma(x-\xi)}{r^2} ds, \\ Y &= -2k \int_S \frac{\sigma(y-\eta)}{r^2} ds, \end{aligned} \right\} \quad (1.8-4)'$$

式中  $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ 。

对于这种场的势应为下列形式：

$$U = 2k \int_S \sigma \ln \left( \frac{1}{r} \right) ds. \quad (1.8-5)$$

以上系统观察点在质量分布区以外而言的，这时  $P$  点的对数势满足两个变量的拉普拉斯方程。假使  $P$  点在质量分布区以内，那么必须再作进一步的研究，这时我们可以计算  $P$  点的势和场强度的旁义积分，并证明其极限值存在，而且等于 (1.8-5) 和 (1.8-4) 式中的值。

在勘探地球物理学中，我们有时会遇见很长的水平柱状矿体，如果矿体埋藏深度比起柱体长度来说很小，则这种情形就可视为平面场来处理，它的势就是一种对数势。

平面场中的高斯定律 对于平面场来说，我们可以证明也有类似高斯定律 (1.2-5) 的平面场公式存在。设在平面场中，垂直于质量柱体的  $S$  平面上取任意曲线  $L$ （其实是无限长柱面与  $S$  平面横截时的交线），曲线的外法线（其实是柱面的法线）为  $n$ （单位矢量），则平面的通量（其实是柱面单位高度通过的通量）应该定义为场强度的法线分量沿曲线的线积分，即

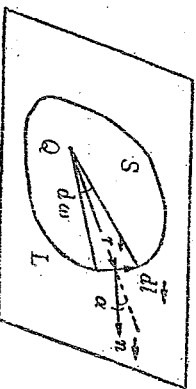


图 1.8-3



$$N = \oint_L F \cdot n dl.$$

若将 (1.8-4) 式代入, 即得

$$\begin{aligned} N &= \oint_L F \cdot n dl = -2k \oint_L \oint_S \frac{\sigma r \cdot n}{r^2} dl ds \\ &= -2k \oint_L \sigma ds \oint_S \frac{r \cdot n}{r^2} dl, \end{aligned}$$

式中线积分的被积函数显然为  $dl$  在  $L$  曲线内部某一点  $Q$  (质量所在处) 所张之平面角:

$$\frac{r \cdot n}{r^2} dl = \frac{dl \cos \alpha}{r} = d\omega.$$

对于一闭合曲线来说, 若  $Q$  点在  $L$  线域内或域外, 则有

$$\begin{aligned} \oint_L d\omega &= 2\pi \quad (Q \text{ 点在 } L \text{ 线域内}), \\ &= 0 \quad (Q \text{ 点在 } L \text{ 线域外}). \end{aligned}$$

因此

$$\oint_L F \cdot n dl = -4\pi k \oint_S \sigma ds, \quad (1.8-6)$$

换言之, 对于任意闭合曲线  $L$ , 平面场的通量等于  $-4\pi k$  倍于  $L$  域内所包含的总质量。显然域外质量的通量等于零。因而上式中的  $\sigma$  应该理解为域内质量柱体单位高度单位面积的质量。

平面场中的泊松方程式: 设  $U$  和  $V$  为两个变数 ( $x, y$ ) 的函数, 连同它们的一次导数, 在平面域内是连续的, 其二次导数存在, 域之边缘为一光滑曲线  $L$ , 则有平面格林公式:

$$\oint_L (U \nabla^2 V - V \nabla^2 U) ds = \oint_L \left( U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) dl. \quad (1.8-7)$$

假设在这个公式中, 选取  $V=1$ ,  $U$  为平面场的势函数, 则有

$$\oint_S \nabla^2 U ds = \oint_L \frac{\partial U}{\partial n} dl.$$

由于  $F = \text{grad } U$ ,  $F \cdot n = \frac{\partial U}{\partial n}$ , 所以由公式 (1.8-6) 知道

$$\begin{aligned} \oint_S \nabla^2 U ds &= \oint_L F \cdot n dl = -4\pi k \oint_S \sigma ds, \\ \oint_S (\nabla^2 U + 4\pi k \sigma) ds &= 0. \end{aligned}$$

或

因为这个式子对任何面积  $S$  都成立, 所以

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 U &= -4\pi k \sigma, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= -4\pi k \sigma. \end{aligned} \right\} \quad (1.8-8)$$

换言之, 在平面场中, 对数势满足两个变数的泊松方程式。如果在所研究区域内  $\sigma=0$ , 则对数势满足拉普拉斯方程

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 U &= 0, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.8-9)$$

注意, 公式 (1.8-8) 的右边在这里为  $-4\pi k \sigma$ , 而在一般势论书中, 则为  $-2\pi k \sigma$ 。这是因为一般书上, 对数势前没有乘数 2, 而我们这里是从场强度公式 (万有引力定律) 出发推导出对数势来的, 前面应该有一乘数 2 存在 (1.8-5), 因此发生了二倍之差。

泊松方程式的积分式 在平面场中, 泊松方程式的积分式, 可以用推导三度空间的泊松方程式的积分式一样求得, 不过这里需要从平面格林

公式 (1.8-7) 出发。

设在平面格林公式中, 选取  $U$  为平面场中  $P$  点的势, 取  $V = \ln\left(\frac{1}{r}\right)$ , 这里  $r=QP$ , 而  $Q$  点为域中任意变点,  $P$  点为某一固

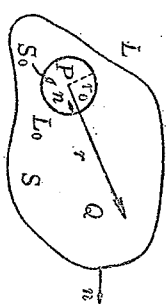


图 1.8-4

定点。这个函数  $\ln\left(\frac{1}{r}\right)$  是满足二度拉普拉斯方程的，除在  $r=0$  点（及无限远处）外，在整个空间平面内是连续的，因而  $P$  点必须从积分域中除去。设在  $P$  点周围画一小圆  $L_0$ （图1.8-4），其半径为  $r_0$ ，并从  $S$  中挖去  $L_0$  所包围的面积  $S_0$ ，则在  $S-S_0$  域内， $U$  和  $V$  都具有格林定理所要求的连续性。因此在这种情况下，格林定理变为

$$-\int_{S-S_0} \nabla^2 U \ln\left(\frac{1}{r}\right) ds = \oint_{L+L_0} \left[ U \frac{\partial}{\partial n} \ln\left(\frac{1}{r}\right) - \ln\left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial U}{\partial n} \right] dl, \quad (1.8-10)$$

式中积分域是  $S-S_0$  平面区域。

现在来研究展布在  $L_0$  曲线上的线积分。因为在  $L_0$  曲线上，域的向外法线  $n$  系指向  $P$  点，而  $r$  为从  $P$ （固定点）到  $Q$  的距离，所以  $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}$ 。因此我们很容易证明

$$\begin{aligned} & \oint_{L_0} \left[ U \frac{\partial}{\partial n} \ln\left(\frac{1}{r}\right) - \ln\left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial U}{\partial n} \right] dl \\ &= \oint_{L_0} \left[ U \frac{\partial}{\partial n} \ln\left(\frac{1}{r_0}\right) \frac{\partial U}{\partial r} \right] dl = \left[ \frac{\bar{U}}{r_0} + \ln\left(\frac{1}{r_0}\right) \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} \right] \oint_{L_0} dl \\ &= 2\pi \bar{U} + 2\pi r_0 \ln\left(\frac{1}{r_0}\right) \frac{\partial \bar{U}}{\partial r}, \end{aligned}$$

式中  $\bar{U}$  和  $\frac{\partial \bar{U}}{\partial r}$  分别为  $U$  和  $\frac{\partial U}{\partial r}$  在圆  $L_0$  上的平均值，并且  $\oint_{L_0} dl = 2\pi r_0$ 。当  $r_0 \rightarrow 0$  时，上式之右端第一项趋于  $2\pi U(P)$ ，而第二项则趋于零。因此，在求极限后，公式 (1.8-10) 变为

$$U_P = -\frac{1}{2\pi} \int_S \nabla^2 U \ln\left(\frac{1}{r}\right) ds + \frac{1}{2\pi} \oint_L \left[ \ln\left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial U}{\partial n} \right] dl$$

$$-U \frac{\partial}{\partial n} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \Big|_{L_0}. \quad (1.8-11)$$

由此可见，平面场中任意一区域  $S$  内，某一点  $P$  的势  $U_P$  可表示成一个面积分和一线积分之和。

当  $U$  满足泊松方程时，则 (1.8-11) 式变为

$$\begin{aligned} U_P &= 2k \int_S \ln\left(\frac{1}{r}\right) ds + \frac{1}{2\pi} \oint_L \left[ \ln\left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \right] dl. \end{aligned} \quad (1.8-12)$$

式中右边第一项与 (1.8-5) 式相同。这就是说，如果所有平面场质量分布均在  $L$  曲线以内，则后一线积分等于零。

如果  $U$  满足拉普拉斯方程时，即  $\sigma=0$ ，则 (1.8-11) 式变为

$$U_P = \frac{1}{2\pi} \oint_L \left[ \ln\left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \right] dl. \quad (1.8-13)$$

平面场的格林函数 当满足拉普拉斯方程时，我们完全可以用求三度空间的格林函数一样的办法来求得平面场的格林函数和以及格林函数表示出来的势：

$$\left. \begin{aligned} G &= \ln\left(\frac{1}{r}\right) + V \\ U_P &= \frac{1}{2\pi} \oint_L \left[ G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] dl \end{aligned} \right\} \quad (1.8-14)$$

因而对狄义赫利问题的解为

$$U_P = -\frac{1}{2\pi} \oint_L U \frac{\partial G}{\partial n} dl, \quad (1.8-15)$$

和对于诺依曼问题的解为

$$U_P = \frac{1}{2\pi} \oint_L G \frac{\partial U}{\partial n} dl. \quad (1.8-16)$$

半平面的情况 在半平面的情况下， $L$  曲线变为一无限长直线，设取为  $Ox$  轴，如图 1.8-5 所示。现在来求平面场中，半平面的狄义赫利问题和诺依曼问题。

在求解半平面狄义赫利问题的解时，我们假设格林函数等于

$$G = \ln\left(\frac{1}{r}\right) - \ln\left(\frac{1}{r'}\right), \quad (1.8-17)$$

式中  $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ ,  $r' = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}$  这样的格林函数显然可满足  $Q$  点在界线  $LOx$  上时 ( $r=r'$ )  $G|_L=0$  的条件。因而

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_L &= -\left. \frac{\partial G}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = -\left[ \frac{(y-\eta)}{r^2} + \frac{(y+\eta)}{r'^2} \right]_{\eta=0} \\ &= -\frac{2y}{(x-\xi)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

所以半平面狄义赫利问题的解为

$$U_p = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi, \quad (1.8-18)$$

式中  $f_1(\xi)$  为  $U$  在界线  $L$  的已知值。

对半平面诺依曼问题求解时，若取

$$G = \ln\left(\frac{1}{r}\right) + \ln\left(\frac{1}{r'}\right) \quad (1.8-19)$$

则显然满足下列条件：

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_L = -\left. \frac{\partial G}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = -\left[ \frac{(y-\eta)}{r^2} - \frac{(y+\eta)}{r'^2} \right]_{\eta=0} = 0.$$

所以半平面诺依曼问题的解为

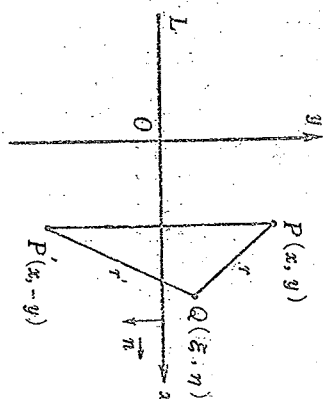


图 1.8-5

$$U_p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \ln\left(\frac{1}{r}\right) f_2(\xi) d\xi$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\xi) \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\xi) \ln[(x-\xi)^2 + y^2] d\xi. \end{aligned} \quad (1.8-20)$$

式中  $f_2(\xi)$  为  $\frac{\partial U}{\partial n}$  在界线上的已知值。

## §1.9 重力场

以上我们研究了静止物体的引力场，本节我们将要研究一个特殊物体——地球的重力场。我们知道，地球不但有围绕太阳的公转，而且还有围绕地轴的自转，因而它不是一个静止物体，所以我们不能仅研究它的引力场，还须研究随地球自转运动的观察者所体验的离心力场。所谓重力场就是指这两种场的总和。

(1) 重力及重力场的概念 地球的重力就是要一切物体拉向地心附近的作用力。设取一试探质量  $m$ ，放在地球表面附近空间任意一点  $P$  上，则  $m$  即受到一个拉向地心的作用力  $f$ ，这个力的大小与  $m$  及该处重力加速度  $g$  之积相等，其方向与  $g$  的方向相同 (图 1.9-1)，即

$$f = mg. \quad (1.9-1)$$

这个力就是重力。在厘米·克·秒单位制中， $f$  的单位为达因， $g$  的单位为厘米/秒<sup>2</sup>， $m$  的单位为克。在重力测量学中，为了纪念首先研究重力现象的意大利科学家伽里略，将厘米/秒<sup>2</sup>这一单位命名为“伽”。在实际工作中，有时觉得伽的单位太大，不便于利用，因而采用千分之一伽为实用单位，命名为毫伽。

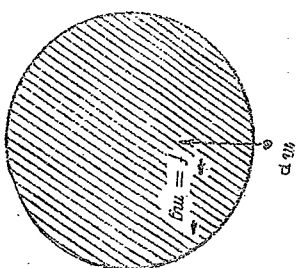


图 1.9-1

从场理论的概念来看,如果一质点放在空间内任何一点上都受到力的作用,则空间内就有力场存在。在地球周围空间存在的力场,其场强度 $G$ 等于重力 $f$ 与试探质量 $m_0$ 之比,方向与重力相同,即

$$G = \lim_{m_0 \rightarrow 0} \frac{f}{m_0} = g, \quad (1.9-2)$$

这种场称为重力场。

从上式可以看出,重力场的场强度矢量 $G$ ,实际上就是重力加速度 $g$ ,它是单位质量所受的力。由于重力 $f$ 与试探质量 $m_0$ 有关,不易体现场的本质,同时讨论起来也不很方便,所以在重力测量学中,总是研究场强度 $g$ 而不再提 $f$ 了。并且为了方便起见,我们常常直接把 $g$ 称为“重力”。但必须注意,这里所指“重力”不是真正的重力,其单位虽然是加速度的单位,其含义仍然是单位质量所受的力。

地球的重力值大致为980伽或980,000毫伽左右。但实际测量结果和理论计算都说明,重力的大小和方向随观察位置的变化而变化,同时也随时间而略微改变。

地球的重力现象,实质上是牛顿万有引力在地球周围的具体表现。因为万有引力具有无所不及处处皆有的特性,所以在地球上任一 $P$ 点处的质量,就受到整个地球内部和地表以外的一切物体,如空中的大气和宇宙中的日月星辰等物质的吸引力。此外,由于地球本身是一个旋转的体系,在这个体系中进行着各种力学过程,包括万有引力引起的一切过程。特别是对于一个跟随地球旋转的观察者而言,他必须还受到一些惯性力的作用,如离心力和科里奥利力。因此,在地面上任何一点所观测到的重力,实质上就是全部宇宙空间质量的万有引力和因地球自转所引起的惯性力的总和。

由于所有这些吸引物质对于地面上不同质点的相互位置 and 分布情况都各不相同,因而首先可以理解,对于地面上不同地点所测得的重力值将会各不相同。其次,由于日月星辰的运行,大气的流动,以及地球内部所发生的地壳运动,即使对于同一地点,

由于各种物质分布状态在不同时间以内也发生了变化,因此同样可以理解,我们在不同时间内观察同一地点的重力值,就会得到不同的数值。

不过要注意的是,重力随时间的变化,其数量级仅仅是全部重力值中极微小的一部分。例如,大气对重力的影响约为0.05毫伽,日月的最大影响分别约为0.2和0.1毫伽,至于其它天体以量化的数量级在地面各点的平均重力值980,000毫伽中是极微小的,因而一般可以略去不计。只有在作特殊高精度重力观测时,这些影响才是不可以忽略的,而需要按一定步骤进行校正。

现在来讨论惯性力的问题。首先,由于地球相对于惯性坐标系转动所引起的科里奥利力,从理论力学知道这个力等于

$$K = 2v \times w,$$

式中 $w$ 为地球自转的角速度矢量, $v$ 是运动物体相对于地面的线速度。由于大多数重力观测法是用静力平衡法,物体的速度为零,所以没有科里奥利力的作用。至于利用动力学测定重力的方法,也可以使科里奥利力的作用方向恰与测量点的重力所产生的运动速度方向相垂直。这样也没有科里奥利力的影响。

其次,对于惯性坐标转动所引起的离心力,理论计算指出,这一数值最大可达平均重力值的1/300左右,对于重力测量学而言,这种数量级的重力变化已经不算小了,完全是不可以忽略的了。

总之,根据以上讨论可知,地球的重力主要是由地球内部质量的万有引力和因地球自转所引起的离心力二者所决定:即

$$g = F + C \quad (1.9-3)$$

式中 $F$ 表示地球内部质量的引力场场强度, $C$ 表示地球自转所引起的离心力场场强度。二者的空间分布状态如图1.9-2所示。

图中的椭圆表示地球的某一子午圈,中间半虚线椭圆表示地球的赤道, $O$ 为地心, $SN$ 为地球自转轴。由图可知,地表任意 $P$ 点的引力场 $F$ 大致指向地心,但不一定通过 $O$ 点;离心力场 $C$ 则永远保持与 $SN$ 垂直,且方向向外。至于 $C$ 与 $F$ 二者数值之比,上面

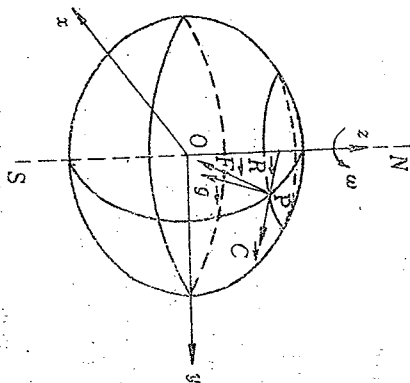


图 1.9-2

式中  $\omega$  为地球自转的角速度,  $R$  为从转动轴到  $P$  点的垂直矢径。所以离心力的作用方向是沿转动轴垂直向外的方向, 其相应的方向余弦为:  $\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, 0$ 。因而  $C$  在相应坐标轴上的分量为

$$\left. \begin{aligned} C_x &= \omega^2 R \cdot \frac{x}{R} = \omega^2 x, \\ C_y &= \omega^2 R \cdot \frac{y}{R} = \omega^2 y, \\ C_z &= \omega^2 R \cdot 0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.9-4)'$$

将表示引力场强度分量的公式 (1.1-6) 与表示离心力场场强度分量的公式 (1.9-4)' 相应分别相加, 即得出重力沿直角坐标系三坐标轴的相应分量:

$$\left. \begin{aligned} g_x &= -k \int \frac{\rho(x-\xi)}{r^3} dv + \omega^2 x, \\ g_y &= -k \int \frac{\rho(y-\eta)}{r^3} dv + \omega^2 y, \\ g_z &= -k \int \frac{\rho(z-\zeta)}{r^3} dv. \end{aligned} \right\} \quad (1.9-5)$$

因而  $P$  点的重力  $g$  的数值显然为

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2}$$

由于引力场场强度和离心力场场强度是处处连续而有限的, 所以重力场场强度也是处处连续而有限的。

(2) 重力势及其特征 利用偏导数求原函数的方法, 可以发现上式 (1.9-5) 中表示  $g_x, g_y, g_z$  的三个不同公式恰恰是下列函数

$$W(x, y, z) = k \int \frac{\rho dv}{r} + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2), \quad (1.9-6)$$

对  $x, y, z$  的偏导数, 亦即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= g_x, & \frac{\partial W}{\partial y} &= g_y, & \frac{\partial W}{\partial z} &= g_z, \end{aligned} \right\} \quad (1.9-7)$$

或  $g = \text{grad} W$ 。

因此函数  $W(x, y, z)$  就是重力场的势函数, 简称为重力势。这个势函数的存在说明重力场是一个势场, 也就是说, 场力做功与路径无关, 亦即场强度的环流积分等于零。

设  $U$  和  $V$  分别表示上式 (1.9-6) 之右端第一项和第二项, 并注意 (1.9-4) 和 (1.9-5) 式, 则得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= F_x, & \frac{\partial U}{\partial y} &= F_y, & \frac{\partial U}{\partial z} &= F_z, \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= C_x, & \frac{\partial V}{\partial y} &= C_y, & \frac{\partial V}{\partial z} &= C_z, \end{aligned} \right\} \quad (1.9-8)$$

式中  $F_x, F_y, F_z$  分别表示 (1.9-5) 式中右端第一项, 即引力场场强度。由此可知,  $U$  和  $V$  两函数对三个坐标轴的偏导数, 分别等于引力场及离心力场的场强度在相应坐标轴上的三个分量, 所以  $U$  和  $V$  显然分别表示引力势和离心力势, 因而 (1.9-6) 式可写为

$$W = U + V. \quad (1.9-8)'$$

换言之, 重力势等于引力势和离心力势之和。

由于引力势和离心力势是处处连续而有限的, 所以重力势也

是处处连续而有限的，显然其一次导数也是连续而有限的。

等势面 由 (1.9-7) 式可知，重力势沿任意方向  $s$  的方向导数就等于重力在该方向的分力，即

$$\frac{\partial W}{\partial s} = g \cos(\mathbf{g}, \mathbf{s}). \quad (1.9-9)$$

式中  $(\mathbf{g}, \mathbf{s})$  为  $\mathbf{g}$  与  $\mathbf{s}$  之间的夹角。

首先假设  $\mathbf{s}$  与  $\mathbf{g}$  垂直，则有  $\frac{\partial W}{\partial s} = 0$ ，所以

$W = \text{常数}$ ，

或  $W(x, y, z) = C$  (常数)。

若将上式解出  $z$ ，可得一曲面方程式：

$$z = f(x, y, C).$$

在上式之右端，若给以不同的常数  $C$ ，就得到一族曲面，称为重力等势面，也就是我们经常所说的水准面。如果海洋面完全是平静的，那么海洋面就是一个重力等势面，这个水准面称为大地水准面（或里斯金格大地水准面）。在研究地球形状的大地测量学中，就把这个水准面作为地球的形状，并把这个面延伸到各个大陆底下，形成一个完整的封闭面。所以研究地球形状的问题，实际上也就是研究重力等势面之一的大地水准面的形状问题。

由上面讨论可知，重力等势面与重力方向是互相垂直的。

其次，假设  $\mathbf{s}$  和  $\mathbf{g}$  平行时，即

$$\frac{\partial W}{\partial s} = -\frac{\partial W}{\partial n} = g,$$

这里  $\partial n$  表示等势面沿外法线方向的位移。这个式子说明，等势面上各点的重力值，等于等势面在该点沿向内法线方向的梯度（或沿外法线方向的负梯度），这是等势面的另一特性。从这个特性可以看出，等势面上各点的重力值并不相等。

若将上式换成有限量，则得

$$g \cdot \Delta n = -\Delta W,$$

设取两个相邻的水准面，则两个面上的重力势之差是一个常数。

即  $\Delta W = \text{常数}$ ，所以

$$g \cdot \Delta n = \text{常数}.$$

这个式子说明，两个水准面间的距离  $\Delta n$ ，与面上的重力值  $g$  成反比。因为水准面上的  $g$  并不处处相等，所以两相邻水准面间的距离并不是处处相等的，也就是水准面并不处处平行。另一方面，由于各点的  $g$  值都是有限值，所以  $\Delta n$  永远不等于零，亦即两水准面无论相隔多么近，总是不能交叉或相切，而是一个单值的函数。

泊松方程和拉普拉斯方程 我们知道，在质量分布区域以内引力势满足泊松方程  $\nabla^2 U = -4\pi k\rho$ ；在质量分布区域以外，它满足拉普拉斯方程  $\nabla^2 U = 0$ 。由于离心力势的二次偏导数等于

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \omega^2, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \omega^2, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

所以它满足下列关系式：

$$\nabla^2 V = 2\omega^2. \quad (1.9-10)$$

由此可知，重力势满足下列方程式：

$$\left. \begin{aligned} \text{对于外部各点: } \nabla^2 W &= \nabla^2 U + \nabla^2 V = 2\omega^2, \\ \text{对于内部各点: } \nabla^2 W &= -4\pi k\rho + 2\omega^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.9-11)$$

由此可见，重力势及其一次导数（重力）虽然是处处连续的，但其二次导数是不连续的，在外部各点等于常数  $(2\omega^2)$ ，在内部各点等于  $2\omega^2 - 4\pi k\rho$ 。

注意以上所列各式与坐标系选择有关，即把地球自转轴取为  $z$  坐标轴。

(3) 重力势的导数 假设空间一点  $P$  处的重力势为  $W$ 。设自  $P(x, y, z)$  点作一位移  $\Delta S$  至  $P'(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$  点，重力势变为  $W + \Delta W$ ，则根据多元函数的泰劳展开式，可以求出重力势函数的增量  $\Delta W$  的表示式如下：

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{\partial W}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial W}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial W}{\partial z} \Delta z \\ &+ \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \Delta y^2 + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \Delta z^2 + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y \right. \end{aligned}$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} \Delta y \Delta z + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x} \Delta z \Delta x \left. \right\} + \frac{1}{3!} \left[ \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \Delta x^3 + \dots \right],$$

式中  $\frac{\partial W}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}$  等分别为重力势函数对相应坐标的一次、二次和三次导数(或称微商), 通常以  $W_x$ ,  $W_{xy}$ ,  $W_{xxx}$  等来表示:

$$\left. \begin{aligned} W_x &= \frac{\partial W}{\partial x} = g_x, \\ W_{xy} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right) = \frac{\partial g_y}{\partial x} = \frac{\partial g_x}{\partial y}, \\ W_{xxx} &= \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.9-12)$$

由此可知, 在用级数展开式求相邻两点的势差时, 就常常需要计算势的一次、二次或高次微商, 因而研究势的这些微商的性质是非常重要的。

重力势的一次微商共有三个:  $W_x$ ,  $W_y$ ,  $W_z$ , 其物理意义上面已经讲过(1.9-7), 就是重力场在相应坐标轴上的分量  $g_x$ ,  $g_y$ ,  $g_z$ 。这个结论无论观察点  $P$  在或不在质量分布区域都是正确的。这就说明了, 在这种情况下, 我们对(1.9-6)式在积分号下求势的一次导数是完全正确的, 即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= k \int_v \frac{\rho}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) dv + \omega^2 x = -k \int_v \frac{\rho(x-\xi)}{r^3} dv + \omega^2 x, \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= k \int_v \frac{\rho}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) dv + \omega^2 y = -k \int_v \frac{\rho(y-\eta)}{r^3} dv + \omega^2 y, \\ \frac{\partial W}{\partial z} &= k \int_v \frac{\rho}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) dv + 0 = -k \int_v \frac{\rho(z-\zeta)}{r^3} dv. \end{aligned} \right\} \quad (1.9-13)$$

重力势的二次导数一共有六个:  $W_{xx}$ ,  $W_{yy}$ ,  $W_{zz}$ ,  $W_{xy}$ ,  $W_{yz}$ ,  $W_{zx}$ 。

$W_{xy} = W_{yx}$ ,  $W_{xz} = W_{zx}$ 。由(1.9-12)式可以看出, 它们的物理意义就是分别表示为  $g_x$  在  $x$  方向的空间变化率,  $g_y$  在  $y$  方向的空间变化率等等。

求势的二次导数比求势的一次导数要复杂得多。因为在求势的一次导数时, 无论观察点  $P$  在或不在质量分布区域, 在积分号下求导数法都是正确的。但在求势的二次导数时, 只有  $P$  点位于质量分布区域以外, 在积分号下求导数法才是正确的, 否则是不正确的<sup>②</sup>。下面我们仅对引力势进行讨论, 因为离心力势没有在积分号下求导数的情况。

假设观察点  $P$  位于质量分布以外, 则  $U(P)$  的二次微商可以用积分号下求微分法算出如下:

$$\left. \begin{aligned} U_{xx} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = k \int_v \frac{3(x-\xi)^2 - r^2}{r^5} \rho dv, \\ U_{yy} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = k \int_v \frac{3(y-\eta)^2 - r^2}{r^5} \rho dv, \\ U_{zz} &= \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = k \int_v \frac{3(z-\zeta)^2 - r^2}{r^5} \rho dv, \\ U_{xy} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 3k \int_v \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{r^5} \rho dv, \\ U_{yz} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = 3k \int_v \frac{(y-\eta)(z-\zeta)}{r^5} \rho dv, \\ U_{zx} &= \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = 3k \int_v \frac{(z-\zeta)(x-\xi)}{r^5} \rho dv, \\ U_{\Delta} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 3k \int_v \frac{(y-\eta)^2 - (x-\xi)^2}{r^5} \rho dv. \end{aligned} \right\} \quad (1.9-14)$$

② 详细证明参考: A. H. 吉洪诺夫著“数学物理方程”上册第 361—367 页(1956年中文版)。

由此可见, 在这样情况下势满足拉普拉斯方程式:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

假设观察点  $P$  位于质量分布区域以内, 则  $U(P)$  的二次微商不能用这种方法求得, 因为上列各式之旁义积分对质量分布以内各点不是绝对收敛的。事实上我们用一种特殊的方式取极限而得到的二次微商就与上列各式不同, 比如<sup>③</sup>

$$\left. \begin{aligned} U_{xx} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(P) = k \int_V \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{r} \right) dv - \frac{4\pi}{3} k \rho(P), \\ U_{yy} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(P) = k \int_V \rho \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{r} \right) dv - \frac{4\pi}{3} k \rho(P), \\ U_{zz} &= \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}(P) = k \int_V \rho \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{r} \right) dv - \frac{4\pi}{3} k \rho(P), \end{aligned} \right\} \quad (1.9-15)$$

由此可见, 在这种情况下  $U$  满足泊松方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} &= k \int_V \rho \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{r} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{r} \right) \right] dv - 4\pi k \rho(P) = -4\pi k \rho(P) \end{aligned}$$

式中的积分所以等于零, 是因为  $\frac{1}{r}$  是调和函数 (即满足拉普拉斯方程式的函数) 的缘故。

(4) 重力势的二次导数的意义 上述六个二次导数中, 可以用仪器 (重力扭秤) 测量出来的只是下列四个:

$$W_{xx}, W_{yy}, W_{zz}, W_{zz} = W_{yy} - W_{xx}.$$

这些重力势的二次导数分别表示重力分量在相应坐标轴上的空间变化率。前二者 ( $W_{xx}, W_{yy}$ ) 称为重力“梯度”值; 后二者 ( $W_{yy}, W_{zz}$ ) 称为“曲率”值。这四个二次导数既然可以用仪器

③ 详细证明见 A. H. 吉洪诺夫: 数学物理方程, 上册第364—367页。

直接测量出来, 因而弄清楚它们的意义是很必要的, 下面就分别来叙述这些导数的意义。

重力“梯度”值 我们知道一个变量的二次导数可以视为另一个变量的一次导数, 正如物理学中的加速度是路程对时间的二次导数, 但它又可以看成是速度对时间的一次导数。重力“梯度”值正是这样, 它既是重力势对不同坐标轴的二次导数, 同时也是重力场强度的  $z$  分量 ( $g_z$ ) 对相应坐标轴的一次导数, 例如

$$\left. \begin{aligned} W_{xx} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (g_x), \\ W_{yy} &= \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (g_y). \end{aligned} \right\} \quad (1.9-16)$$

如果我们选取坐标系使  $Oz$  轴竖直向下,  $Oxy$  平面为水平面, 则上列二式所表示的物理意义是很明显的, 前一式表示重力场强度的垂直分量在水平  $Ox$  轴方向的变化率; 后一式表示重力场强度的垂直分量在水平  $Oy$  轴方向的变化率, 它们的大小直接反映重力垂直分量在水平方向变化率, 所以称为重力“梯度”值。重力“梯度”值是一个矢量, 它们既有大小, 又有方向。

显然在水平面上, 沿任意方向  $s$  的重力“梯度”值 (称为水平“梯度”值) 为

$$G = \frac{\partial g_z}{\partial s}.$$

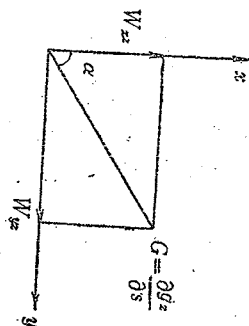


图 1.9-3

这个量可以由沿  $s$  方向的重力“梯度”值  $W_{xx}$  和沿  $y$  方向的重力“梯度”值  $W_{yy}$  求得。如图 1.9-3 所示, 按矢量合成方法不难看出:

$$\left. \begin{aligned} W_{xx} &= G \cos \alpha, \quad W_{yy} = G \sin \alpha, \\ G &= \sqrt{W_{xx}^2 + W_{yy}^2}, \quad \tan \alpha = \frac{W_{yy}}{W_{xx}}, \end{aligned} \right\} \quad (1.9-17)$$



式中  $\alpha$  为  $G$  与  $W_{xz}$  的夹角。

重力等势面的“曲率”值 根据前一节知道，场中任意等势面可以用下列方程式表示：

$$W(x, y, z) = C.$$

为了讨论方便起见，我们把坐标系原点选取在这个等势面上，并令  $z$  轴与等势面的切面垂直，现在来研究原点附近等势面的形状和它与原点处重力势二次导数  $W_{xy}$ ,  $W_{xz}$  的关系。

要研究重力势的二次导数，首先把势函数  $W(x, y, z)$  在原点附近用泰劳级数对原点展开：

$$\begin{aligned} W(x, y, z) = & W(0, 0, 0) + (W_x)_0 x + (W_y)_0 y + (W_z)_0 z \\ & + \frac{1}{2} (W_{xx})_0 x^2 + \frac{1}{2} (W_{yy})_0 y^2 + \frac{1}{2} (W_{zz})_0 z^2 \\ & + (W_{xy})_0 xy + (W_{yz})_0 yz + (W_{xz})_0 xz + \dots \end{aligned} \quad (1.9-18)$$

式中脚标“0”表示这些偏导数在原点处的数值。因为  $(x, y, z)$  是等势面上一点的坐标，所以

$$W(x, y, z) = W(0, 0, 0) = C.$$

同时由于  $z$  轴与等势面的法线一致，所以

$$(W_x)_0 = (W_y)_0 = 0, \quad (W_z)_0 = g.$$

又假设  $r, s, t$  三个符号分别表示下列意义

$$r = (W_{xx})_0, \quad s = (W_{yy})_0, \quad t = (W_{zz})_0.$$

把这些结果代入 (1.9-18) 式中，并通过简单的运算，便得到了等势面在原点附近的方程式

$$\begin{aligned} z = & -\frac{1}{2g} \{ (rx^2 + 2sxy + ty^2) + (W_{xz})_0 x^2 \\ & + 2(W_{xz})_0 xy + 2(W_{yz})_0 yz + \dots \}. \end{aligned}$$

由于我们研究的是原点附近的情况，因此式中  $x, y, z$  为微小量。如果我们把  $x, y$  看作是一级微量，则  $z$  一定是二级或更高级的微量，因此我们可以将上式中后面几个含  $z$  的项略去，便得到：

$$z = -\frac{1}{2g} (rx^2 + 2sxy + ty^2). \quad (1.9-19)$$

显然这是一个二次曲面的方程式。这个结果说明，在很小范围内等势面可以看成是一个二次曲面。

为了要研究等势面的曲率，现在我们用通过  $z$  轴的一个平面  $Q$  来截取这个等势面。设  $Q$  与  $x$  轴的夹角为  $\varphi$ ，这样截取的结果可以得到一个曲线  $L$  (图1.9-4)。若这个截线  $L$  上的一点  $P$  的坐标为  $(d, z)$ ，这里  $d$  为  $P$  点到  $z$  轴的垂直距离。显然  $d$  与  $x, y$  的关系为

$$x = d \cos \varphi, \quad y = d \sin \varphi.$$

将上面这个关系式代入 (1.9-19) 式，便得  $L$  曲线的方程式为

$$\begin{aligned} z = & -\frac{1}{2g} (r \cos^2 \varphi + 2s \cos \varphi \sin \varphi + t \sin^2 \varphi) d^2, \\ \text{或} \quad z = & f(\varphi) d^2, \end{aligned} \quad (1.9-20)$$

式中  $f(\varphi) = -\frac{1}{2g} (r \cos^2 \varphi + 2s \cos \varphi \sin \varphi + t \sin^2 \varphi)$ 。

从微分几何知道，(1.9-20) 式在原点的曲率为

$$\frac{1}{\rho} + \frac{\left( \frac{d^2 z}{d\varphi^2} \right)}{\left[ 1 + \left( \frac{dz}{d\varphi} \right)^2 \right]^{3/2}} = 2f(\varphi)$$

或  $\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{g} (r \cos^2 \varphi + 2s \cos \varphi \sin \varphi + t \sin^2 \varphi)$ , (1.9-21)

这里  $\rho$  为  $L$  曲线在原点的曲率半径。由上式可知， $L$  曲线的曲率是  $\varphi$  的函数，即当截面  $Q$  依  $z$  轴旋转时，它所截取的曲线  $L$  在原点处的曲率也随之改变。并且可以证明  $Q$  面在某两个特殊的方位时，曲率将分别为极大与极小，而且它们互相垂直。这个特殊方位可以用求极值的方法求得，即从

$$\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{\rho} \right) = 0,$$

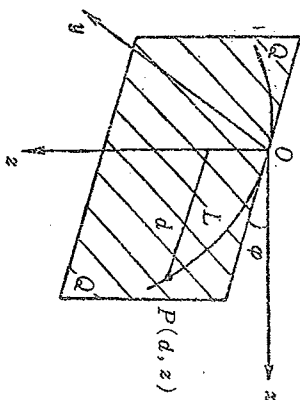


图 1.9-4

经过运算后得到

$$-2r \cos \varphi \sin \varphi + 2s \cos^2 \varphi - 2s \sin^2 \varphi + 2t \sin \varphi \cos \varphi = 0,$$

$$(t-r) \sin 2\varphi = -2s \cos 2\varphi,$$

或解之, 得

$$\tan 2\varphi = -\frac{2s}{t-r} = -\frac{2W_{xy}}{W_{yy} - W_{xx}} = -\frac{2W_{xy}}{W_{\Delta}}. \quad (1.9-22)$$

显然上式应该有两个根, 一个相当于等势面在原点的最大曲率, 另一个则相当于它在原点处的最小曲率。如果一个根为 $\varphi_0$ , 则另一根必须是 $\varphi_0 + \pi/2$ 。将此结果代入(1.9-21)式, 即得等势面在坐标原点处曲率的最大值和最小值分别为

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{\rho_1}\right)_{\text{极大}} &= -\frac{1}{g} (r \cos^2 \varphi_0 + 2s \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 + t \sin^2 \varphi_0), \\ \left(\frac{1}{\rho_2}\right)_{\text{极小}} &= -\frac{1}{g} (r \sin^2 \varphi_0 - 2s \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 + t \cos^2 \varphi_0). \end{aligned} \right\} \quad (1.9-23)$$

若将上列二式相减, 使得

$$\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} = -\frac{1}{g} [(\varphi - t) \cos 2\varphi_0 + 2s \sin 2\varphi_0] = -\frac{1}{g} [W_{\Delta} - 2W_{xy} \tan 2\varphi_0] \cos 2\varphi_0. \quad (1.9-24)$$

若利用(1.9-22)式, 消去上式中 $W_{xy}$ , 则得到

$$\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{g} [W_{\Delta} + W_{\Delta} \tan^2 2\varphi_0] \cos 2\varphi_0 = \frac{1}{g} \frac{W_{\Delta}}{\cos 2\varphi_0}. \quad (1.9-25)$$

为了讨论方便起见, 引入下列符号:

$$R = g \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right), \quad (1.9-26)$$

于是(1.9-25)式可写为下列形式:

$$W_{\Delta} = R \cos 2\varphi_0. \quad (1.9-27)$$

从(1.9-22)和(1.9-27)两式, 我们可以求得

$$\left. \begin{aligned} R &= \sqrt{(W_{\Delta})^2 + (2W_{xy})^2}, \\ \varphi_0 &= \frac{1}{2} \left( \tan^{-1} \frac{2W_{xy}}{W_{\Delta}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.9-28)$$

由此可知 $R$ 这个量可以由观测值 $W_{\Delta}$ 和 $W_{xy}$ 求出来, 而 $R$ 的意义可以由其定义知道它与坐标原点的曲率有一定的关系, 它可以代表等势面在这一点的弯曲程度。因此在重力测量学中给它一个特定的名称, 称为“曲率矢量”。同时可以看出, 这个矢量永远大于或等于零。当等势面为球面时,  $R=0$ 。因此,  $R$ 的大小可以看成是等势面曲面在某一点上与球面间的偏差度。

应该注意, 这里所谓“曲率”值 $R$ 与数学中的曲率意义并不相同, 它仅代表等势面弯曲的程度, 绝非真正的曲率, 而是最大曲率与最小曲率之差的 $g$ 倍。

同样应该注意, 前面所述的重力“梯度”值, 这个“梯度”也与一般所谓梯度有别, 前者表示重力的 $z$ 分量沿某一水平方向的空间变化率, 而后者表示函数沿变化最大方向的空间变化率。

#### 例题 1 球体引力势的二次微商运算

设球体的半径为 $R$ , 相对质量为

$$M = \frac{3}{4} \pi (\rho - \rho_0) R^3,$$

式中 $\rho$ 为球体的密度,  $\rho_0$ 为围岩的密度,  $\rho - \rho_0$ 为球体对围岩的相对密度。设球心位于地面下 $c$ 深处。在球心上方取坐标原点并使 $Oz$ 轴垂直向下, 试求球体对地面上(即 $Oxy$ 平面)某一测线上各点势的二次微商。由于球心位

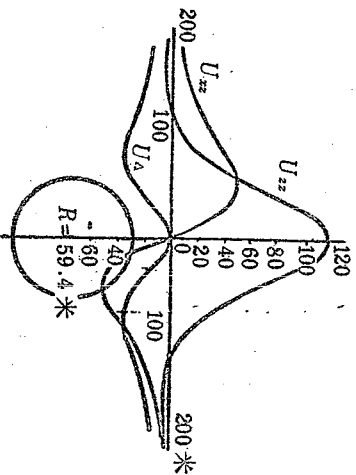


图 1.9-5

于  $z$  轴上, 只须找出  $x$  轴上各点的二次微商  $U_{zz}$ 、 $U_{\Delta}$  和  $U_{zz}$  值就够了。

按这样选取的坐标系, 公式 (1.9-14) 中  $\xi$ 、 $\eta$ 、 $y$ 、 $z$  等都等于零。由于球体可以视为一点质量来求球外一点的势, 所以不需要积分, 因此按 (1.9-14) 式我们有 (图1.9-5) 上的曲线是

$$U_{zz} = -3 kM \frac{x\xi}{(x^2 + \xi^2)^{5/2}},$$

$$U_{\Delta} = -3 kM \frac{x^2}{(x^2 + \xi^2)^{5/2}},$$

$$U_{zz} = kM \frac{2\xi^2 - x^2}{(x^2 + \xi^2)^{5/2}}.$$

表示这些微商变化的情况, 这里设取球心位置的深度为 100 米, 球的半径为 59.4 米, 球的相对密度  $\rho - \rho_0 = 1$ 。

#### 例题 2 球体的反演问题

设已知球体的二次微商 ( $U_{zz}$ ,  $U_{\Delta}$ ) 的观察曲线, 现在来求解反演问题。从例题 1 中我们已知球体的  $U_{zz}$  之表达式为

$$U_{zz} = -3 kM \frac{x\xi}{(x^2 + \xi^2)^{5/2}},$$

式中  $\xi$  为球的埋藏深度。求微商  $\frac{dU_{zz}}{dx}$  并使它等于零。就可求得

相当于二次微商之极大与极小值的横坐标  $x$  值如下

$$x_1 = -\frac{1}{2}\xi, \quad (\text{极大})$$

$$x_2 = +\frac{1}{2}\xi. \quad (\text{极小})$$

若将  $x_1$  代入上式, 即得  $U_{zz}$  的极大值

$$(U_{zz})_{\text{极大}} = \frac{48kM}{25\sqrt{5}\xi^3} = 0.859 \frac{kM}{\xi^3}.$$

从上述三个方程式, 就能根据实际测得之  $U_{zz}$  曲线求得球体之视质量  $M$  和球心深度  $\xi$ 。

对二次微商  $U_{\Delta}$  也有同样情况, 因为

$$U_{\Delta} = -\frac{3kMx^2}{(x^2 + \xi^2)^{5/2}},$$

使  $\frac{dU_{\Delta}}{dx}$  等于零, 解这一方程式得到

$$x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}\xi, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}\xi$$

其中  $x_1$ ,  $x_3$  相当于  $U_{\Delta}$  的极小值的横坐标位置,  $x_2$  则为极大值的横坐标位置。若将  $x_1$  或  $x_3$  代入上式, 即得  $U_{\Delta}$  之极小值

$$(U_{\Delta})_{\text{极小}} = -\frac{18\sqrt{3}kM}{25\sqrt{5}\xi^3} = -0.558 \frac{kM}{\xi^3}$$

从上述二关系式就能确定球体的总质量  $M$  和球体埋藏的深度  $\xi$ 。

