Abteilung für
Angewandte Mathematik

Sommersemester 2020
Prof. Dr. Sören Bartels, Pascal Weyer

Praktikum zur Numerik Teil 2

Projektblatt 3 – 8. Juni 2020

Abgabe: per E-Mail an die Tutoren bis Montag, den 22. Juni 2020, 9:00 Uhr

---

Homepage: `aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss20/num`

Hinweis: Bitte erläutern Sie bei allen Aufgaben Ihre Beobachtungen in einigen Sätzen.

Wir benutzen folgende Funktionen $f_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ in den ersten beiden Projekten:

$$f_1(x) = \sin(5x) + 0.5\mathrm{i}\cos(x) \quad f_2(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\pi - 1/4, \pi + 1/4], \\ 0, & x \notin [\pi - 1/4, \pi + 1/4], \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \pi), \\ -1, & x \in [\pi, 2\pi], \end{cases} \quad f_4(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \pi), \\ 2\pi - x, & x \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Projekt 6 (4 Punkte)**.** Implementieren Sie die schnelle komplexe Fourier-Synthese als rekursive Funktion `my_ifft` und benutzen Sie diese sowie Bemerkung 13.2(i) in »Numerik 3x9«, um eine Funktion `my_fft` für die komplexe Fourier-Transformation zu definieren. Verwenden Sie Ihre Routine, um die Fourier-Transformation der Vektoren $y \in \mathbb{C}^n$ definiert durch $y_j = f_r(2\pi j/n)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, $r = 1, 2, 3, 4$, mit $n = 2^s$, $s = 1, 2, \dots, 5$, zu berechnen. Stellen Sie die zugehörigen komplexen trigonometrischen Polynome grafisch dar. Nutzen Sie bei der Erstellung Ihres Programms die `Matlab`-Realisierung komplexer Zahlen.

Projekt 7 (4 Punkte)**.** Verwenden Sie Ihre im vorigen Projekt erhaltene Routine `my_fft` oder die `Matlab`-Routine `fft`, um für $n = 2^s$, $s = 1, 2, \dots, 5$, komplexe Koeffizienten $(\beta_k)_{k=0,1,\dots,n-1}$ und $(\delta_k)_{k=0,1,\dots,n-1}$ zu berechnen, sodass für die Funktionen

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k e^{\mathrm{i}kx}, \quad q(x) = \sum_{k=-n/2}^{n/2-1} \delta_{k+n/2} e^{\mathrm{i}kx}$$

die Interpolationseigenschaft $p(x_j) = f_r(x_j)$ beziehungsweise $q(x_j) = f_r(x_j)$ für $j = 0, 1, \dots, n-1$, $r = 1, 2, 3, 4$ und mit $x_j = 2\pi j/n$ erfüllt ist. Hierbei muss das Ergebnis von `fft` noch durch die Länge des Eingabevektors dividiert werden. Plotten Sie jeweils den Real- und Imaginärteil der Funktionen p und q. Stellen Sie auch das Frequenzspektrum $|\beta_k|$ bzw. $|\delta_k|$ als Funktion von k graphisch dar.

Projekt 8 (3 Bonus-Punkte)**.** Modifizieren Sie Ihr Programm zu Berechnung interpolierender kubischer Splines aus Projekt 5(ii) dahingehend, dass es periodische Randbedingungen anwendet. Interpolieren Sie damit die folgende Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$:

$$f(x) = \begin{bmatrix} (2 + \cos(2q\pi x))\cos(2p\pi x) \\ (2 + \cos(2q\pi x))\sin(2p\pi x) \\ \sin(2q\pi x) \end{bmatrix}$$

für $p = 1$ und eine natürliche Zahl $q > 2$ Ihrer Wahl und $2^s\, q + 1$ äquidistante Stützstellen für $s = 0, 1, 2, 3$. Wenden Sie Ihre Interpolations-Routine dafür auf alle Komponenten separat an und stellen Sie das Ergebnis graphisch mithilfe der Funktion `plot3` dar. Probieren Sie gerne auch andere natürliche Zahlen p und q aus. Sie erhalten dabei sogenannte »Torus-Knoten«.