Моделирование гравитации

Для расчета силы гравитации на различных высотах над поверхностью планеты используем закон всемирного тяготения:

$$F_г (h) = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}$$

где:

$F_г$ - сила гравитации,

G - гравитационная постоянная (6.674×10^{-11} Н · м^2 · кг$^{-2}$),

M - масса планеты,

m - масса ракеты,

r - расстояние от центра планеты (на высоте h это будет r = R + h, где R - радиус планеты, h - высота.

Зависимость силы гравитации от высоты

При увеличении высоты сила гравитации будет уменьшаться. На высоте h сила гравитации рассчитывается по формуле:

$$F_г (h) = \frac{G \cdot M \cdot m}{(R + h)^2}$$

где:

R - радиус планеты,

h высота над поверхностью.

Моделирование аэродинамического сопротивления

Сила сопротивления воздуха рассчитывается по формуле:

$$F_{сопр} = \frac{1}{2} \cdot C_a \cdot p(h) \cdot v^2 \cdot A$$

где:

Ca - коэффициент аэродинамического сопротивления (зависит от формы ракеты),

p - плотность атмосферы на высоте h,

υ - скорость ракеты относительно воздуха,

A - площадь поперечного сечения ракеты.

Изменение плотности атмосферы с высотой:

Плотность атмосферы с высотой изменяется по экспоненциальному закону:

$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{H}}$

где:

p_0 - плотность воздуха на уровне моря,

H - масштабная высота атмосферы (около 8000 м для Земли).

Таким образом, сила сопротивления будет зависеть от высоты, так как плотность воздуха уменьшается с ростом высоты.

Моделирование тяги и изменения массы ракеты

Для расчета изменения массы ракеты в зависимости от времени работы двигателя используем уравнение Циолковского:

$$\Delta\upsilon = I_{sp} \cdot g_0 \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right)$$

где:

$\Delta\upsilon$ - изменение скорости ракеты (импульс),

I_{sp} - удельный импульс (характеризует эффективность двигателя),

g_0 - ускорение свободного падения на поверхности Земли (9.81 м/с²),

m_0 - начальная масса ракеты,

m(t) масса ракеты в момент времени t.

При этом, масса ракеты m(t) зависит от времени работы двигателя, так как расходуется топливо. Обычно предполагается, что ракета теряет топливо с постоянной скоростью т, то есть:

$m(t) = m_0 – m_p \cdot t$

где:

m_p - массовый расход топлива.

Тяга ракеты:

$$F_т(t) = F_{max} \cdot \left(1 - \frac{t}{t_{burn}}\right)$$

где:

F_{max} - максимальная тяга,

t_{burn} – время работы двигателя.

В конце работы двигателя, когда топливо заканчивается, тяга падает до нуля.

Формула Циолковского :

$$dv = S \times ln\frac{m_0}{m}, \text{где}$$

v – конечная скорость ракеты,

m_0 – начальная масса ракеты,

m – конечная масса ракеты,

S – скорость истечение продуктов сгорания из сопла двигателя.

Интегрируем формулу по времени:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{S \times \frac{dm}{dt}}{m}, \text{где}$$

$\frac{dm}{dt}$ – скорость изменения массы.

Предположим, что

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{M_T}{t_0}, \text{где}$$

M_T – масса топлива ступени,

t_0 – время её работы.

Тогда мы получим дифференциальное уравнение, решая которое можно выяснить, какой формулой выражается зависимость массы ракеты от времени:

$$m(t) = M_{T_1} - \frac{M_t}{t_0} \times t, \text{где}$$

M_{T_1} – масса ракеты с учётом оставшегося топлива и ступеней,

$\frac{M_t}{t_0}$ – скорость сжигания топлива.

Также для фиксирования моментов отсоединения частей с топливом и двигателями нам нужно знать время, за которое в них сжигается топливо. Выразим его через массовый расход топлива:

$$s_i = \frac{m_i - m_{i_{dry}}}{a_i}, \text{где}$$

i – номер отбрасываемых частей.

Подставляя данные из таблицы, находим время отсоединения каждой ступени $t_1 = 41$ с., $t_2 = 129$ с., $t_3 = 484\ c$. Теперь, подставив значение массы всей ракеты и отдельных её частей, получим формулу зависимости массы от времени до достижения орбиты (то есть до 499-ой секунды).

Применим выведенные формулы для получения кусочной функции зависимости массы от времени:

$$\begin{cases} t = 0;\ m(t) = 26995, \\ 0 < t \le 41;\ m(t) = 26995 - \dfrac{2810\ \times 4}{41} \times t, \\ 41 < t \le 129;\ m(t) = 12\,625 - \dfrac{2000 \times 4}{88} \times (t - 41) \\ 129 < t \le 155; m(t) =\ 3780 - \dfrac{2000}{352} \times (t - 129) \\ 155 < t \le 158; m(t) =\ 3632 \\ 158 < t \le 484; m(t) = 3780 - \dfrac{2000}{352} \times (t - 155) \\ 484 < t <\ 499; m(t) = 990 \end{cases}$$

ВАЖНО:

Поскольку информация о компонентах ракеты была взята из игровой модели KSP, возможна погрешность в вычислениях массы ракеты на отдельных участках времени.

Второй закон Ньютона для ракеты, движущейся в поле гравитации и под действием аэродинамического сопротивления, выглядит следующим образом:

1). $F_{рез} = m \cdot a$

2). $F_{рез} = F_т - F_г - F_{сопр}$

⇨ $F_т - F_г - F_{сопр} = m(t) \cdot a(t)$

где:

$F_{рез}$ - результирующая всех сил,

$F_т$ - тяга ракеты,

$F_г$ - сила гравитации,

$F_{сопр}$ - сила аэродинамического сопротивления,

m(t) масса ракеты в момент времени t,

a(t) - ускорение ракеты в момент времени t.

Учитывая, что сила гравитации и сила сопротивления зависят от высоты h, а масса и ускорение ракеты изменяются со временем, уравнение движения ракеты можно записать как:

$$m(t) \cdot a(t) = F_т - \frac{G \cdot M \cdot m(t)}{(R+h)^2} - \frac{1}{2} \cdot C_a \cdot p(h) \cdot v^2 \cdot A$$

Сила $F_т$ Направлена вертикально вверх, однако ракета движется под углом α, меняющимся от 0˚ до 90˚

Следовательно $F_т$ принимает значение, равное $F_т \times \cos\alpha$ в зависимости от угла α.

Финальная формула выглядит так:

$$m(t) \cdot a(t) = F_т \times \cos\alpha - \frac{G \cdot M \cdot m(t)}{(R+h)^2} - \frac{1}{2} \cdot C_a \cdot p(h) \cdot v^2 \cdot A$$

Таким образом, можно моделировать движение ракеты, учитывая изменения гравитации, сопротивления воздуха, массы ракеты и тяги по времени.

Чтобы расчитать высоту, на которую поднялась ракета H в конкретный момент врмени t.

1. Ускорение является производной от скорости по времени: $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$

Значит, чтобы найти скорость, нужно взять первообразную от ускорения:

$$v(t) = \int a(t)\,dt + v_0$$

$$v(t) = at + v_0$$

Где v_0 – начальная скорость(скорость в момент времени t = 0)

2. Скорость является производной от расстояния по времени: $v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$

$$s(t) = \int v(t)\,dt + s_0$$

$$s(t) = \int \ (at + v_0)dt = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$$

Гле s_0 – начальная позиция (расстояние в момент времени t = 0)

Поскольку движение ракеты происходит вертикально вверх, искомое расстояние и будет высотой H, на которую поднимется ракета.

H(t) = s(t)