Lojik Tasarım

Ders 3

Kaynak:
M.M. Mano, M.D. Ciletti, “Digital Design with An Introduction to Verilog HDL”

Boolean Cebri ve Lojik Kapılar

Temel Tanımlar

1. *Kapalılık.* İkili işlem, S'deki her eleman çiftine yine S'de tek bir elemanı karşı düşürecek bir kural belirliyorsa, S kümesi bu ikili işleme göre kapalıdır. Örneğin N doğal sayılar kümesi $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ aritmetik toplama kurallarıyla artı (+) ikili işlemine göre kapalıdır, çünkü herhangi bir $a, b \in N$, $a + b = c$ işlemiyle tek bir $c \in N$ elde edilebilir. Buna karşılık, doğal sayılar kümesi aritmetik çıkarma kurallarıyla eksi ikili işlemine göre kapalı değildir, çünkü $2 - 3 = -1$ ve $2, 3 \in N$ iken $(-1) \notin N$'dir.

Temel Tanımlar

Birleşme Kuralı

2. *Associative law.* A binary operator * on a set S is said to be associative whenever

$$(x * y) * z = x * (y * z) \text{ for all } x, y, z, \in S$$

Değişme Kuralı

3. *Commutative law.* A binary operator * on a set S is said to be commutative whenever

$$x * y = y * x \text{ for all } x, y \in S$$

Birim Elemanı

4. *Identity element.* A set S is said to have an identity element with respect to a binary operation * on S if there exists an element $e \in S$ with the property that

$$e * x = x * e = x \text{ for every } x \in S$$

Example: The element 0 is an identity element with respect to the binary operator + on the set of integers $I = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, since

$$x + 0 = 0 + x = x \text{ for any } x \in I$$

Temel Tanımlar

Ters

Dağılma Kuralı

5. *Inverse.* A set S having the identity element e with respect to a binary operator $*$ is said to have an inverse whenever, for every $x \in S$, there exists an element $y \in S$ such that

$$x * y = e$$

Example: In the set of integers, I, and the operator $+$, with $e = 0$, the inverse of an element a is $(-a)$, since $a + (-a) = 0$.

6. *Distributive law.* If $*$ and $\cdot$ are two binary operators on a set S, $*$ is said to be distributive over $\cdot$ whenever

$$x * (y \cdot z) = (x * y) \cdot (x * z)$$

Boolean Cebrinin Aksiyomatik tanımı

1. (a) The structure is closed with respect to the operator $+$.
   (b) The structure is closed with respect to the operator $\cdot$.
2. (a) The element 0 is an identity element with respect to $+$; that is, $x + 0 = 0 + x = x$.
   (b) The element 1 is an identity element with respect to $\cdot$; that is, $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.
3. (a) The structure is commutative with respect to $+$; that is, $x + y = y + x$.
   (b) The structure is commutative with respect to $\cdot$; that is, $x \cdot y = y \cdot x$.
4. (a) The operator $\cdot$ is distributive over $+$; that is, $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.
   (b) The operator $+$ is distributive over $\cdot$; that is, $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$.
5. For every element $x \in B$, there exists an element $x' \in B$ (called the *complement* of x) such that (a) $x + x' = 1$ and (b) $x \cdot x' = 0$.
6. There exist at least two elements $x, y \in B$ such that $x \neq y$.

İki Değerli Boolean Cebri

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	x'
0	1
1	0

1. That the structure is *closed* with respect to the two operators is obvious from the tables, since the result of each operation is either 1 or 0 and $1, 0 \in B$.

2. From the tables, we see that

(a) $0 + 0 = 0 \qquad 0 + 1 = 1 + 0 = 1;$
(b) $1 \cdot 1 = 1 \qquad 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0.$

This establishes the two *identity elements,* 0 for + and 1 for $\cdot$, as defined by postulate 2.

3. The *commutative* laws are obvious from the symmetry of the binary operator tables.

İki Değerli Boolean Cebri

4. (a) The *distributive* law $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ can be shown to hold from the operator tables by forming a truth table of all possible values of x, y, and z. For each combination, we derive $x \cdot (y + z)$ and show that the value is the same as the value of $(x \cdot y) + (x \cdot z)$:

x	y	z	$y + z$	$x \cdot (y + z)$	$x \cdot y$	$x \cdot z$	$(x \cdot y) + (x \cdot z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

(b) The *distributive* law of + over · can be shown to hold by means of a truth table similar to the one in part (a).

5. From the complement table, it is easily shown that

(a) $x + x' = 1$, since $0 + 0' = 0 + 1 = 1$ and $1 + 1' = 1 + 0 = 1$.
(b) $x \cdot x' = 0$, since $0 \cdot 0' = 0 \cdot 1 = 0$ and $1 \cdot 1' = 1 \cdot 0 = 0$.

Thus, postulate 1 is verified.

Boolean Cebrine İlişkin Temel Teoremler

Postulates and Theorems of Boolean Algebra

Postulate 2	(a)	$x + 0 = x$	(b)	$x \cdot 1 = x$
Postulate 5	(a)	$x + x' = 1$	(b)	$x \cdot x' = 0$
Theorem 1	(a)	$x + x = x$	(b)	$x \cdot x = x$
Theorem 2	(a)	$x + 1 = 1$	(b)	$x \cdot 0 = 0$
Theorem 3, involution		$(x')' = x$		
Postulate 3, commutative	(a)	$x + y = y + x$	(b)	$xy = yx$
Theorem 4, associative	(a)	$x + (y + z) = (x + y) + z$	(b)	$x(yz) = (xy)z$
Postulate 4, distributive	(a)	$x(y + z) = xy + xz$	(b)	$x + yz = (x + y)(x + z)$
Theorem 5, DeMorgan	(a)	$(x + y)' = x'y'$	(b)	$(xy)' = x' + y'$
Theorem 6, absorption	(a)	$x + xy = x$	(b)	$x(x + y) = x$

İşlem Önceliği

1. Parantez
2. DEĞİL (NOT)
3. VE (AND)
4. VEYA (OR)

Boolean Fonksiyonlarının Doğruluk Tabloları

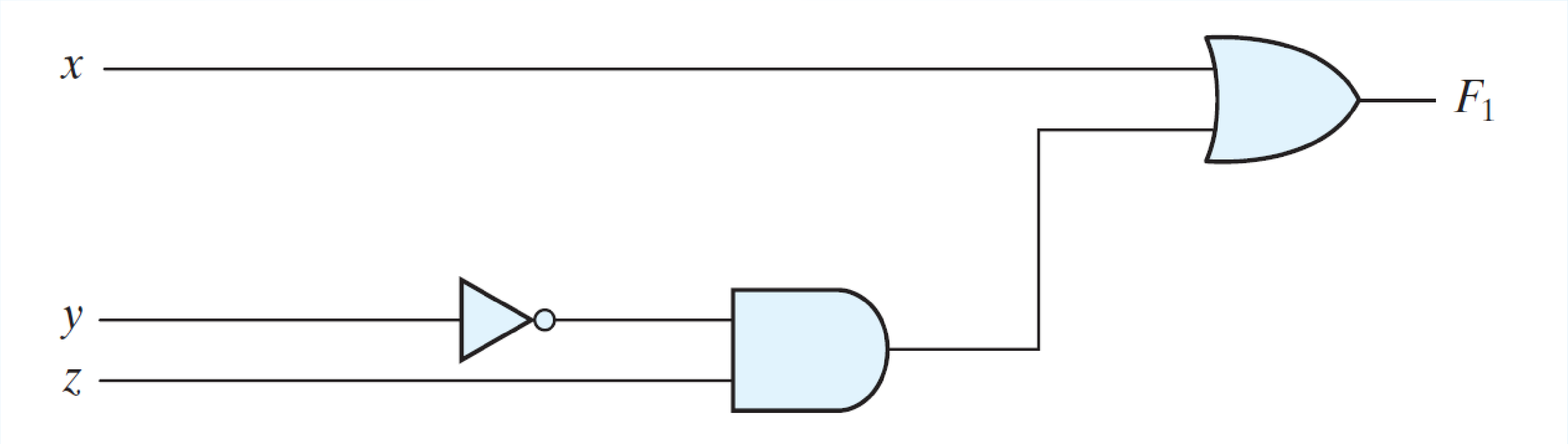
$$F_1 = x + y'z$$

$$F_2 = x'y'z + x'yz + xy'$$

x	*y*	*z*	F_1	F_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

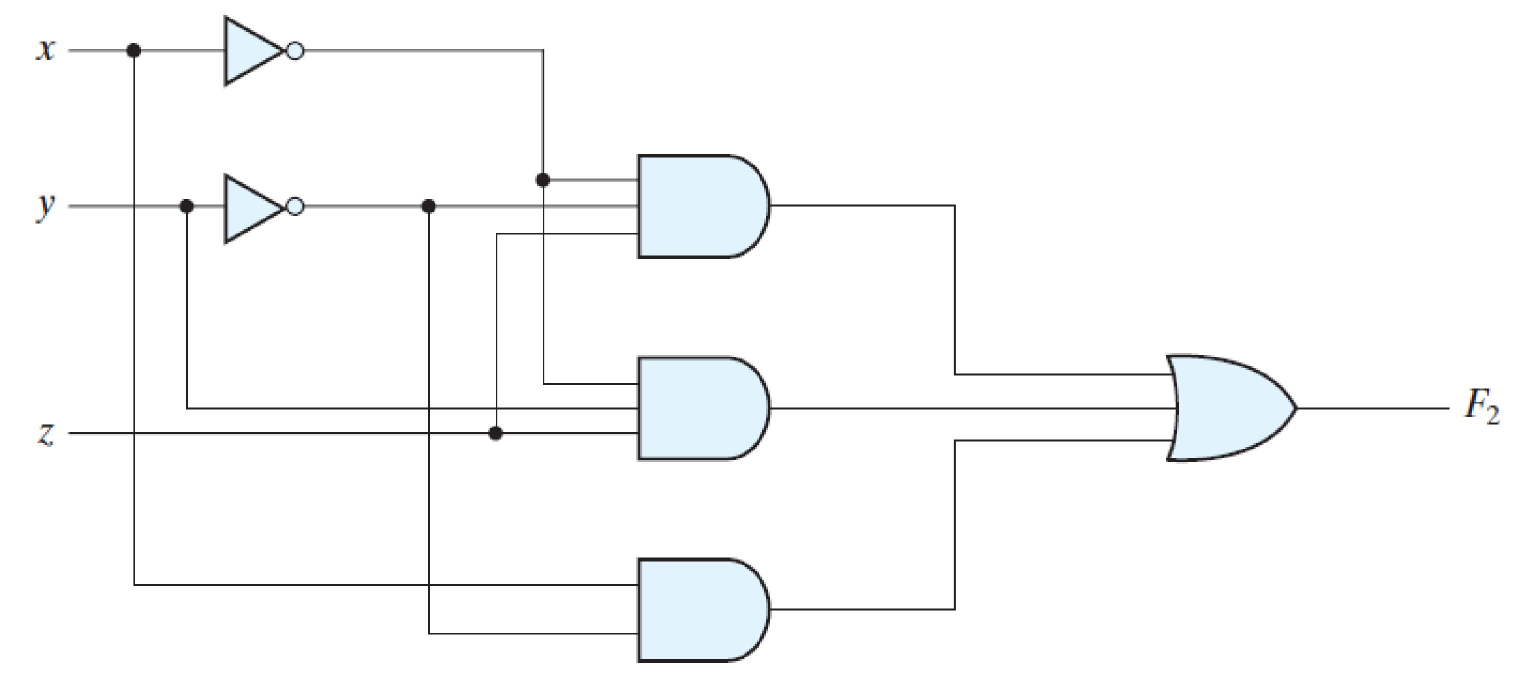
Boolean Fonksiyonlarının Lojik Kapılar ile Gerçeklenmesi

$$F_1 = x + y'z$$



Boolean Fonksiyonlarının Lojik Kapılar ile Gerçeklenmesi

$$F_2 = x'y'z + x'yz + xy'$$



Boolean Fonksiyonlarının Sadeleştirilmesi

Aşağıdaki Boolean fonksiyonunu minimum sayıdaki değişkene indirgeyerek sadeleştirin.

$$x\,(x'+y) = ?$$

Boolean Fonksiyonlarının Sadeleştirilmesi

Aşağıdaki Boolean fonksiyonunu minimum sayıdaki değişkene indirgeyerek sadeleştirin.

$$x + x'y = ?$$

Boolean Fonksiyonlarının Sadeleştirilmesi

Aşağıdaki Boolean fonksiyonunu minimum sayıdaki değişkene indirgeyerek sadeleştirin.

$$(x + y)(x + y') = \ ?$$

Boolean Fonksiyonlarının Sadeleştirilmesi

Aşağıdaki Boolean fonksiyonunu minimum sayıdaki değişkene indirgeyerek sadeleştirin.

$$xy + x'z + yz = \ ?$$

Boolean Fonksiyonlarının Sadeleştirilmesi

Aşağıdaki Boolean fonksiyonunu minimum sayıdaki değişkene indirgeyerek sadeleştirin.

$$(x+y)(x'+z)(y+z) = \ ?$$

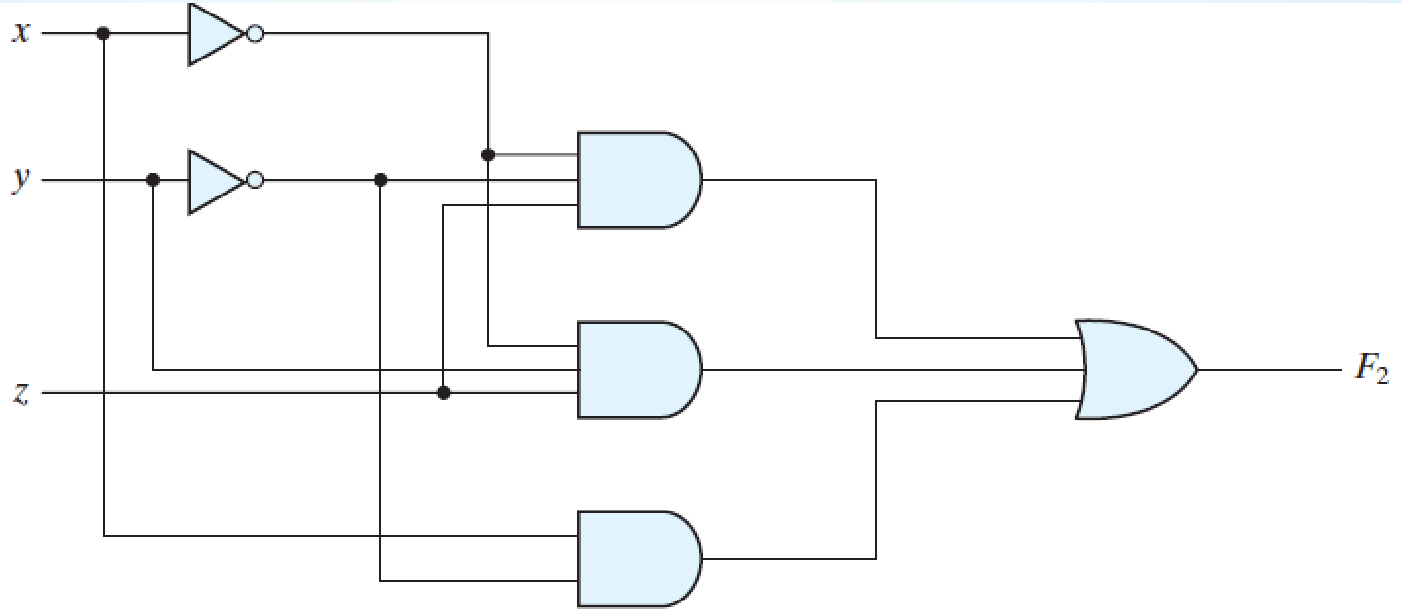
Boolean Fonksiyonlarının Sadeleştirilmesi

Aşağıdaki Boolean fonksiyonunu minimum sayıdaki değişkene indirgeyerek

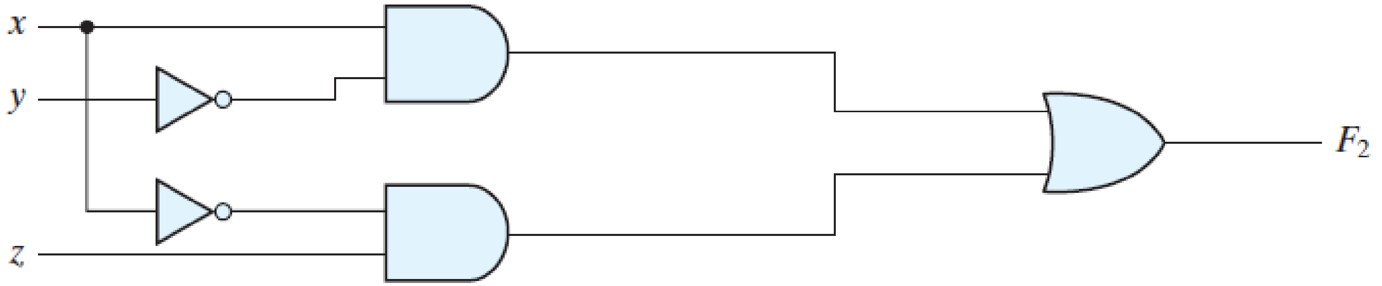
$$F_2 = x'y'z + x'yz + xy'$$

$$x'y'z + x'yz + xy' = \ ?$$

Boolean Fonksiyonlarının Sadeleştirilmesi



(a) $F_2 = x'y'z + x'yz + xy'$



(b) $F_2 = xy' + x'z$

Fonksiyonun Tümleyeni

Aşağıdaki Boolean fonksiyonunun tümleyenini hesaplayınız

$$
\begin{aligned}
(A + B + C)' &= (A + x)' && \text{let } B + C = x \\
&= A'x' && \text{by theorem 5(a) (DeMorgan)} \\
&= A'(B + C)' && \text{substitute } B + C = x \\
&= A'(B'C') && \text{by theorem 5(a) (DeMorgan)} \\
&= A'B'C' && \text{by theorem 4(b) (associative)}
\end{aligned}
$$

Fonksiyonun Tümleyeni

Aşağıdaki Boolean fonksiyonlarının tümleyenini hesaplayınız

$$F_1' = (x'yz' + x'y'z)' = (x'yz')'(x'y'z)' = (x + y' + z)(x + y + z')$$

$$\begin{aligned} F_2' = [x(y'z' + yz)]' &= x' + (y'z' + yz)' = x' + (y'z')'(yz)' \\ &= x' + (y + z)(y' + z') \\ &= x' + yz' + y'z \end{aligned}$$

Gelecek Hafta

- Minterim (MINTERM) ve Maksterim (MAKSTERM)