MATEMATİK 2

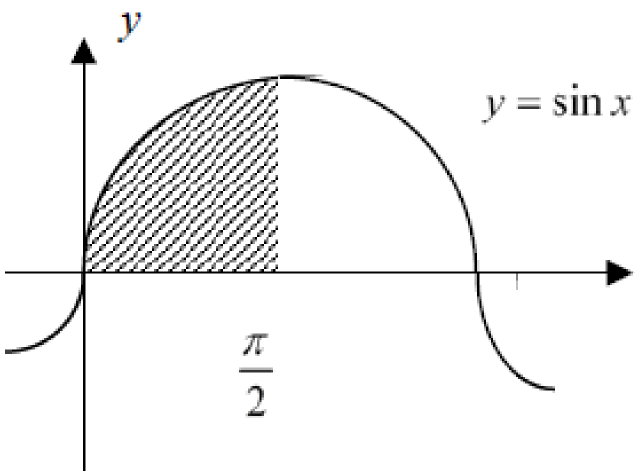
Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2021

Örnek 21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin x} f(x,y)\,dy\,dx$

Çözüm: İntegralin tanımlamış olduğu bölge aşağıdaki taralı bölgedir . Buna göre,



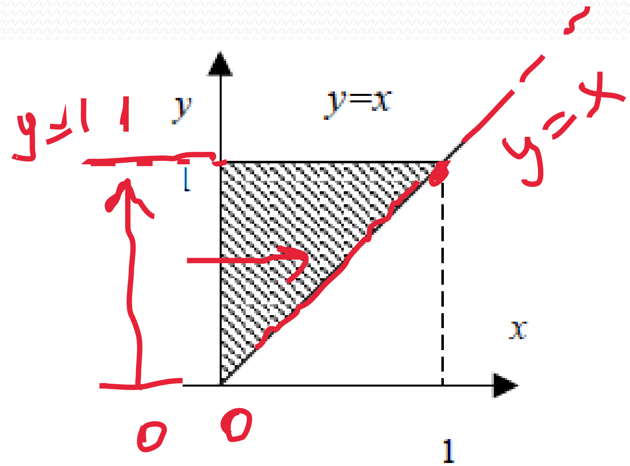
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin x} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^{1} \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{dir.}$$

Aşağıdaki Örnek 22-Örnek 47. deki iki katlı integralleri verilen bölgeler üzerinde hesap ediniz.

Örnek 22. B bölgesi; köşeleri $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(0,1)$ olan üçgen ise

$$\iint_B x\,dx\,dy = ?$$

Çözüm: İntegrasyon bölgesi aşağıdaki şekildeki gibidir.

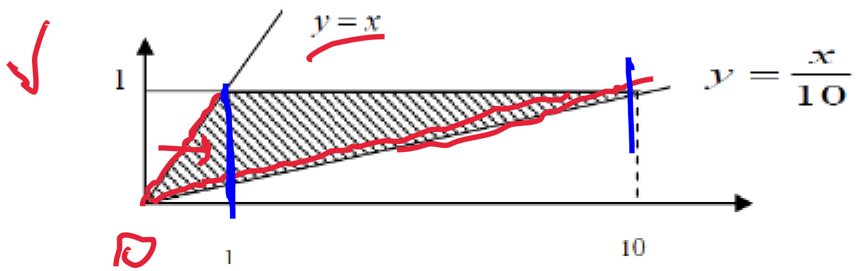


B={(x,y):

Buna göre; $I = \int_0^1 \int_0^y x\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} \right|_0^y dy = \int_0^1 \frac{y^2}{2} dy = \left[\frac{y^3}{6} \right|_0^1 = \frac{1}{6}$ olur.

Örnek 24 B bölgesi; köşeleri $O(0,0)$,$A(10,1)$,$B(1,1)$ olan üçgen ise $\iint\limits_{B} \sqrt{xy - y^2}\,dxdy = ?$

Çözüm:



integrasyon bölgesini çevreleyen eğriler $y = 1, y = x,\ y = \frac{x}{10}$ doğruları olup;

$$I = \int_0^1 \int_y^{10y} \sqrt{xy - y^2}\,dxdy = \int_0^1 \int_y^{10y} \sqrt{y}\sqrt{x-y}\,dxdy = \int_0^1 \sqrt{y}\left[\left. \frac{2\sqrt{(x-y)^3}}{3} \right|_y^{10y} dy = \int_0^1 18y^2 dy = \frac{18}{3}\left[\left. y^3 \right|_0^1 = 6 \right.\right.$$

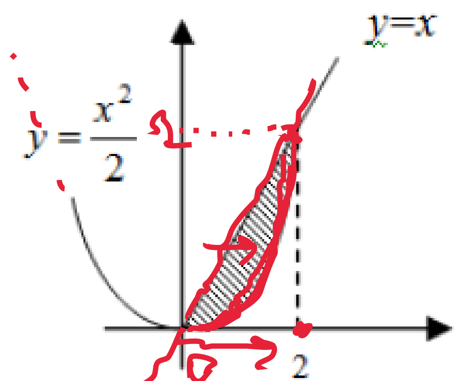
olur.

$x^{\frac{1}{2}}\,dx$

$x.dy \quad dx$

Örnek 25. B bölgesi; $y=\frac{x^2}{2}$ parabolü ile $y=x$ doğrusunun sınırladığı bölge ise $\iint_B \frac{xdxdy}{x^2+y^2}=?$

Çözüm:



$\frac{x^2}{2}=x$

$x=$

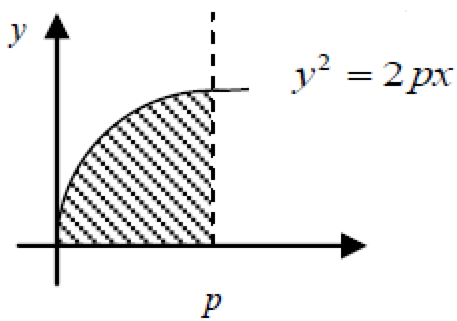
$x=$

$x=\mp\sqrt{2y}$

$$\int_0^2\int_{\frac{x^2}{2}}^{x}\frac{x}{x^2+y^2}\,dydx=\int_0^2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\Big|_{\frac{x^2}{2}}^{x}dx=\int_0^2\left[\frac{\pi}{4}-\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]dx=\left(\frac{\pi}{4}x-x\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+\ln(4+x^2)\right]_0^2=\ln 2$$

Örnek 26. B bölgesi; $y^2 = 2px$ parabolü ve y=0, $x = p$ doğruları tarafından sınırlanan bölge ise $\iint\limits_B xy^2 dxdy = ?$

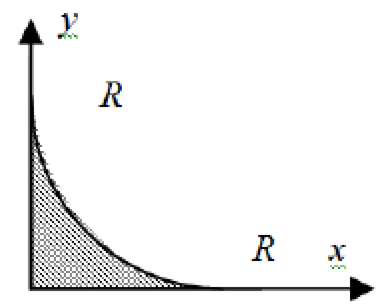
Çözüm: Verilen B bölgesi, aşağıdaki taralı bölgedir. Buna göre,



$$I = \int_0^{\sqrt{2}p} \int_{\frac{y^2}{2p}}^{p} xy^2 dxdy = \int_0^{\sqrt{2}p} y^2 [\ \frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{y^2}{2p}}^{p} dy = \int_0^{\sqrt{2}p} y^2 (\frac{p^2}{2} - \frac{y^4}{8p^2}) dy = [\ \frac{p^2}{6} y^3 - \frac{1}{56p^2} y^7 \Big|_0^{\sqrt{2}p} = \frac{4\sqrt{2}p^5}{21}$$

Örnek 27. B bölgesi; koordinat eksenleri ve $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=R^{\frac{2}{3}}$ astroid yayının birinci bölgedeki kısmı ile sınırlı bölge ise $\iint_B xydydx=?$

Çözüm:



$$I=\int_0^R\int_0^{(R^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}} xydydx=\int_0^R x\left[\frac{y^2}{2}\right|_0^{(R^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}} dx=\int_0^R \frac{x}{2}\left[(R^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\right]^2 dx$$

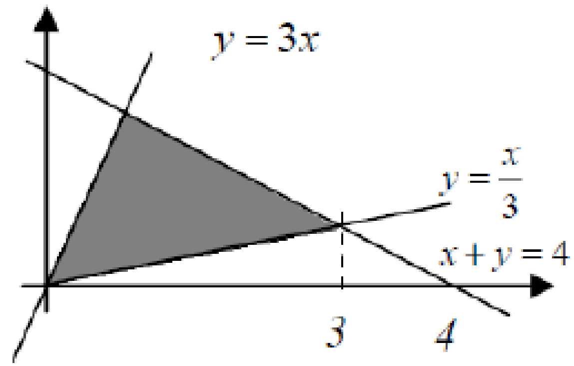
$$I=\frac{1}{2}\int_0^R x(R^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3\,dx=\frac{1}{2}\int_0^R\left(xR^2-3x^{\frac{5}{3}}R^{\frac{4}{3}}+3x^{\frac{7}{3}}R^{\frac{2}{3}}-x^3\right)dx$$

$$I=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2R^2}{2}-\frac{9}{8}x^{\frac{8}{3}}R^{\frac{4}{3}}+\frac{9}{10}x^{\frac{10}{3}}R^{\frac{2}{3}}-\frac{x^4}{4}\right|_0^R=\frac{7R^4}{80}$$

olur.

Örnek 28. B bölgesi; $y = 3x, x = 3y, x + y = 4$ eğrilerinin sınırladığı bölge ise; $\iint\limits_B x^2 dxdy = ?$

Çözüm:



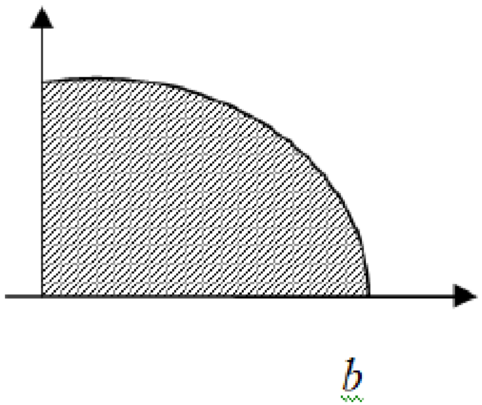
$$I = \int_0^1 \int_{\frac{x}{3}}^{3x} x^2 dydx + \int_1^3 \int_{\frac{x}{3}}^{4-x} x^2 dydx = \int_0^1 x^2 [y\Big|_{\frac{x}{3}}^{3x} dx + \int_1^3 x^2 [y\Big|_{\frac{x}{3}}^{4-x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{8x^3}{3} dx + \int_1^3 (4x^2 - \frac{4x^3}{3}) dx = \frac{26}{3}$$

Örnek 29. B bölgesi; $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ elipsinin birinci bölgede koordinat eksenleri ile sınırladığı bölge olduğuna göre; $\iint\limits_B \sqrt{a^2-y^2}\,dxdy=?$

Çözüm:

$$\left(\frac{x}{b}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2=1$$

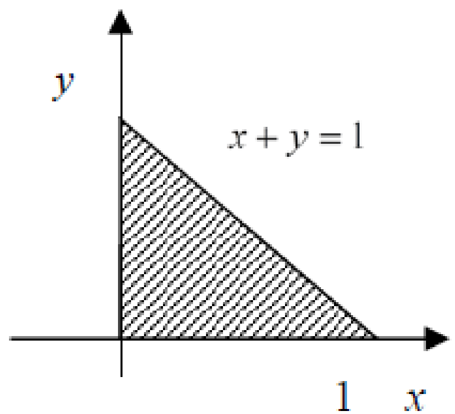


$$I=\int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-y^2}\,dxdy=\int_0^a [\sqrt{a^2-y^2}\;x\Big|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-y^2}}\;dy=\int_0^a \frac{b}{a}\left(a^2-y^2\right)dy=[bay-\frac{by^3}{3a}\Big|_0^a=\frac{2ba^2}{3}\ \text{olur.}$$

Örnek 30. B bölgesi; köşeleri $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$ olan üçgen bölgesi olduğuna göre

$$\iint_B xydxdy = ?$$

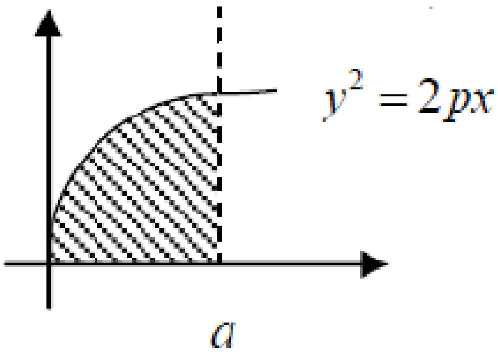
Çözüm:



$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} xydydx = \int_0^1 [\frac{xy^2}{2}\Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x - 2x^2 + x^3\right) dx = \frac{1}{2}[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{24}$$

Örnek 32. ***B*** **bölgesi;** $y=0,\; y^2=2px, x=a$ **tarafından sınırlanan bölge ise,** $\iint_B x\,dx\,dy=?$

Çözüm:



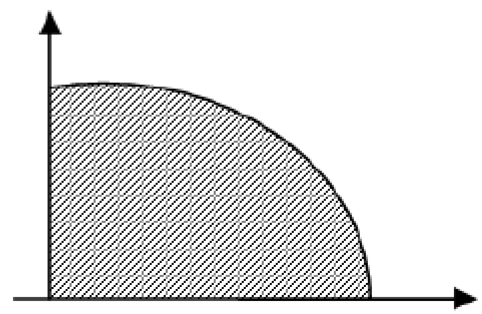
$$I=\int_0^a\int_0^{\sqrt{2px}} x\,dy\,dx=\int_0^a [xy\Big|_0^{\sqrt{2px}}\,dx=\int_0^a x\sqrt{2px}\,dx=\sqrt{2p}\int_0^a x^{\frac{3}{2}}dx \;=\sqrt{2p}\,\frac{2}{5}[x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^a=\frac{2}{5}a^2\sqrt{2pa}$$

Örnek 33. B bölgesi; $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsi tarfından sınırlanan aşağıdaki taralı bölge olduğuna göre

$$\iint_B y^2 dxdy = ?$$

Çözüm:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$



a

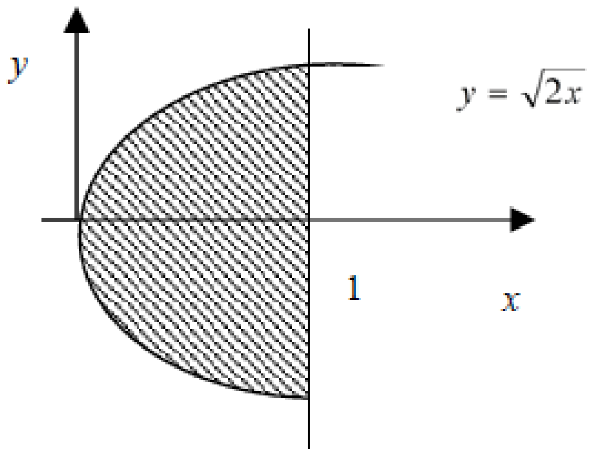
$$I=\int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y^2 dydx = \int_0^a \Big[\frac{y^3}{3} \Big|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{b^3}{3a^3}\int_0^a \left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$=\frac{b^3}{3a^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4 \cos^4\theta d\theta = \frac{b^3 a}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{4}\cos^2 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{4}\right]d\theta = \frac{b^3 a\pi}{16}$$

Örnek 34. B bölgesi; $y^2 = 2x$ parabolü $x = 1$ ile doğrusunun sınırladığı bölge ise

$$\iint_B \left(x^2 + y^2\right) dxdy = ?$$

Çözüm: Taralı alan integrasyon bölgesi olduğuna göre;

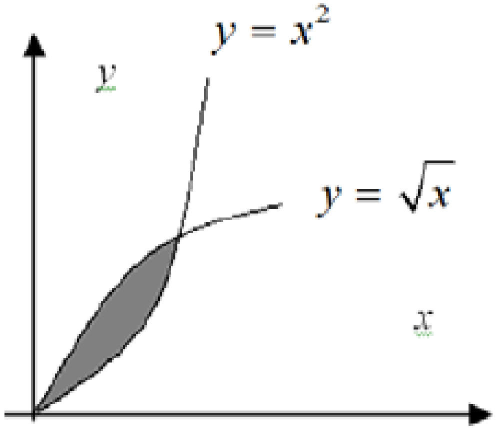


$$I = 2\int_0^1 \int_0^{\sqrt{2x}} \left(x^2 + y^2\right) dydx = 2\int_0^1 [x^2 y + \frac{y^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{2x}} dx = 2\int_0^1 \left(x^2\sqrt{2x} + \frac{2x\sqrt{2x}}{3} \right) dx$$

$$I = 2[\frac{2\sqrt{2}}{7} x^{\frac{7}{2}} + \frac{4\sqrt{2}}{15} x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 = \frac{116\sqrt{2}}{105}$$

Örnek 35. B bölgesi; $y = x^2$ ve $y^2 = x$ parabollerinin sınırladığı bölge ise $\iint\limits_B (x+y)\,dxdy = ?$

Çözüm:

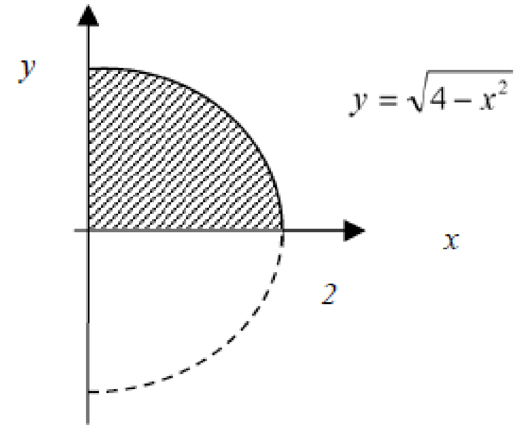


$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x+y)\,dydx = \int_0^1 [xy + \frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(x\sqrt{x} + \frac{x}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx$$

$$I = \left(\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right|_0^1 = \frac{3}{10}$$

Örnek 36. B bölgesi; $x^2+y^2=4$ çemberinin sınırladığı aşağıdaki şekildeki taralı bölge olduğuna göre $\iint\limits_B (2-x)dxdy=?$

Çözüm:



$$I=\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}(2-x)\,dydx=\int_0^2\left[2y-xy\right|_0^{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_0^2\left(2\sqrt{4-x^2}-x\sqrt{4-x^2}\right)dx$$

$$I=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt+\frac{1}{3}\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt-\frac{8}{3}$$

$$I=4\left(\frac{\sin 2t}{2}+t\right|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{8}{3}=2\pi-\frac{8}{3}$$

Örnek 37. Aşağıdaki iki katlı integrallerin değerlerini integrasyon sıralarını değiştirerek hesaplayınız.

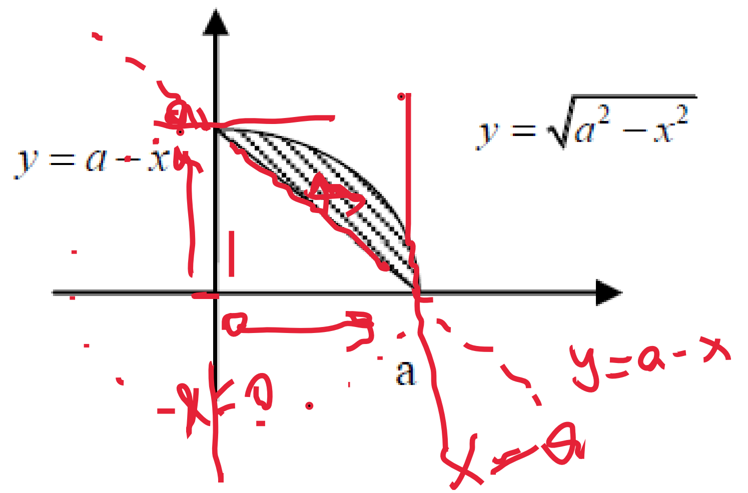
a) $I=\int_0^a \int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy\,dx$ **b)** $I=\int_0^4 \int_0^{\frac{x^2}{2}} x\,dy\,dx$ **c)** $I=\int_0^1 \int_{2-2x^2}^{2} xy\,dy\,dx$

d) $I=\int_1^{e^2} \int_0^{\ln x} 2x\,dy\,dx$ **e)** $I=\int_0^3 \int_{y^2}^{3y} x\,dx\,dy$ **f)** $I=\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} y\,dx\,dy$ **g)** $I=\int_0^1 \int_x^1 e^x\,dy\,dx$

$y = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$

Çözüm:

a) $x = 0, x = a \;\; y = a - x, y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ile sınırlanan bölge şekildeki taralı bölgedir. İntegrasyon sırası değiştirildiğinde,



$x = a - y$

$x = \sqrt{a^2 - y^2}$

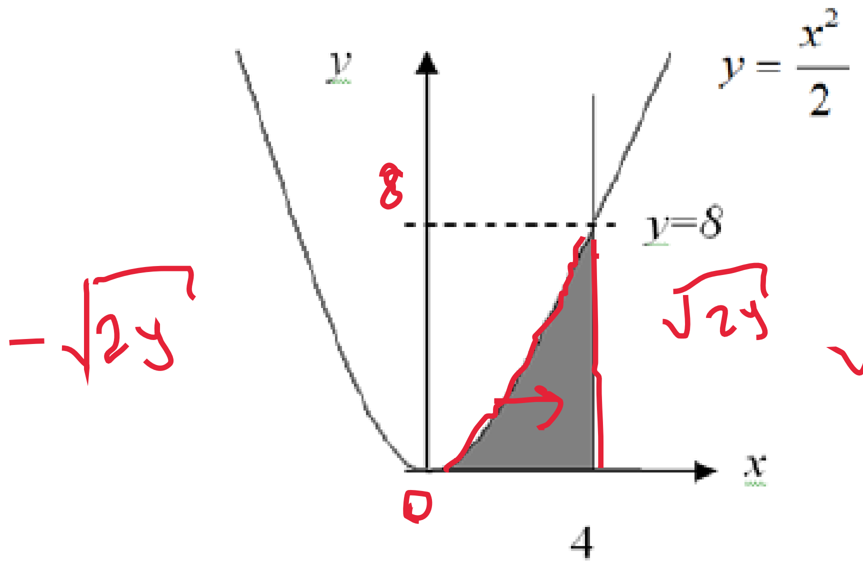
$$I = \int_0^a \int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} y\,dx\,dy = \int_0^a \left[yx \Big|_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} \right] dy = \int_0^a y(\sqrt{a^2 - y^2} - a + y)\,dy$$

$-\frac{1}{2} \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2}$

$$I = -\frac{1}{3}(a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} - a\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^a = \frac{a^3}{3}$$

olur.

b) (Bkz.Şekil 1)



Şekil.1

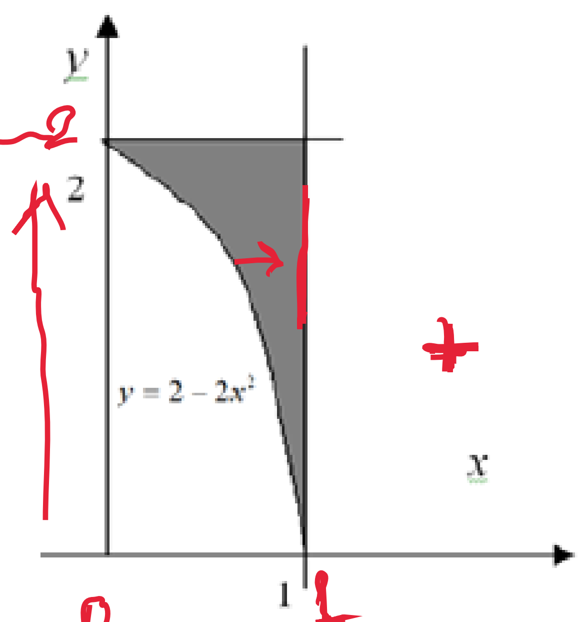
$x^2 = 2y$

$x = \sqrt{2y}$

$$I=\int_0^8 \boxed{\int_{\sqrt{2y}}^4} x\,dx\,dy=\int_0^8 \left[\frac{x^2}{2}\right|_{\sqrt{2y}}^{4} dy=\int_0^8 (8-y)\,dy=\left(8y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^8=32 \ \text{br}^3$$

c) (Bkz.Şekil 2)

$$\int_0^2 \int_{\sqrt{1-\frac{1}{2}y}}^{1} xy\,dx\,dy = \int_0^2 y\left[\frac{x^2}{2}\right|_{\sqrt{1-\frac{1}{2}y}}^{1} dy = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{y^2}{2}\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{y^3}{6}\right|_0^2 = \frac{2}{3} \text{ br}^2$$



Şekil 2

$y = 2 - 2x^2$

$2x^2 = 2 - y$

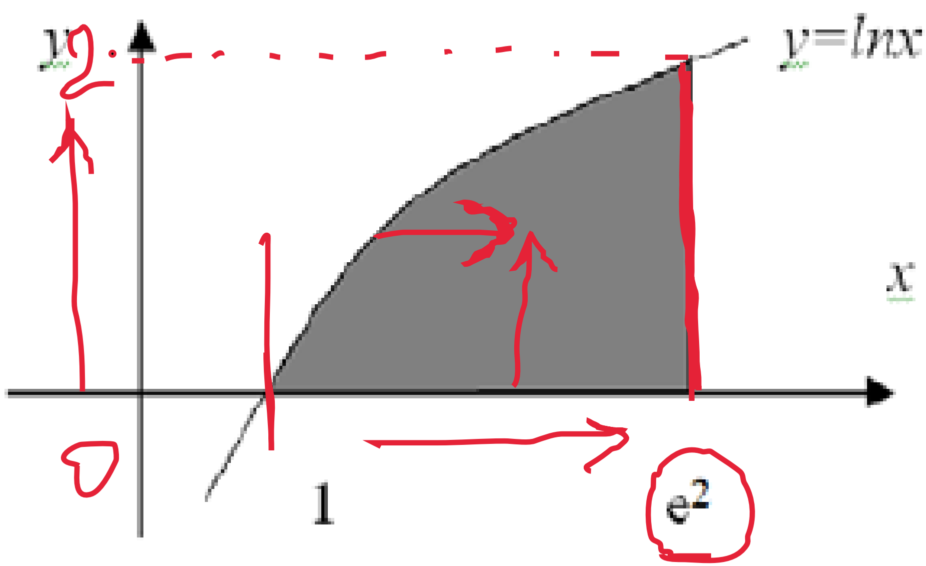
$x^2 = 1 - \frac{1}{2}y$

$x = \mp\sqrt{1 - \frac{1}{2}y}$

d) (Bkz.Şekil 3) Verilen integral için integrasyon sırası değiştirilirs

$$I=\int_0^2\int_{e^y}^{e^2} 2x\,dx\,dy=\int_0^2 [x^2\Big|_{e^y}^{e^2}dy=\int_0^2 (e^4-e^{2y})\,dy=\frac{3e^4+1}{2}$$ br^3 ;

$\Rightarrow x = e^y$



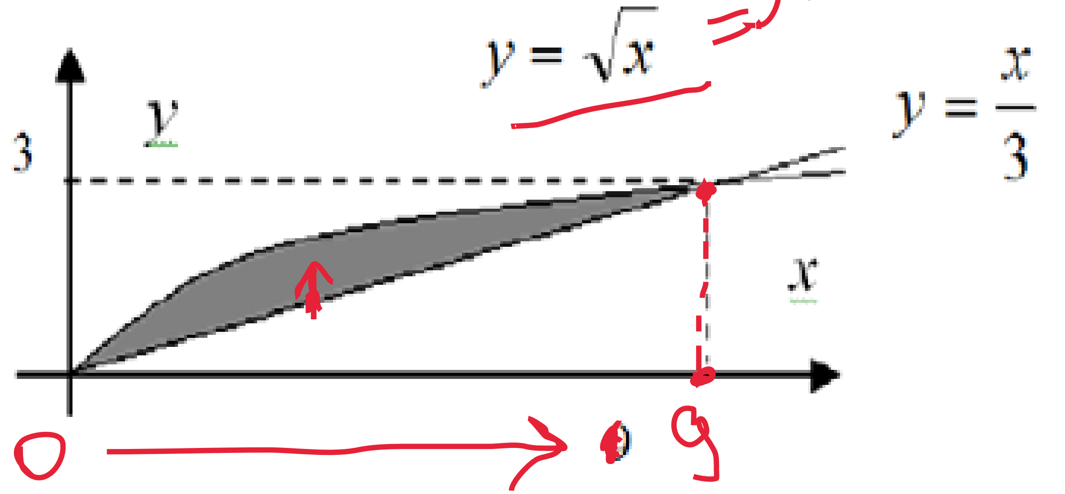
Şekil 3

$y = \ln(e^{2}$

e) (Bkz.Şekil 4) $I= \int_0^9 \int_{\frac{x}{3}}^{\sqrt{x}} x\,dy\,dx = \int_0^9 [xy \Big|_{\frac{x}{3}}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^9 \left(x\sqrt{x} - \frac{x^2}{3} \right) dx = [\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^3}{9} \Big|_0^9 = \frac{81}{5}$ br

$\Rightarrow x = y^2$

$\Rightarrow x = 3y$



Şekil 4

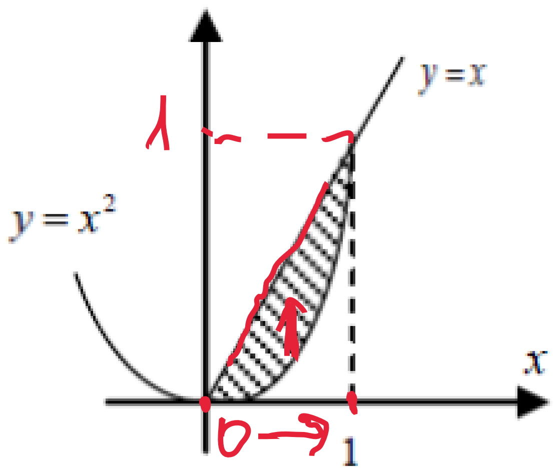
$\frac{x}{3} = \sqrt{x}$

$x^2 = 9x$

$x = 0,\ x =$

f) (Bkz.Şekil 5)

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} y\,dx\,dy$$



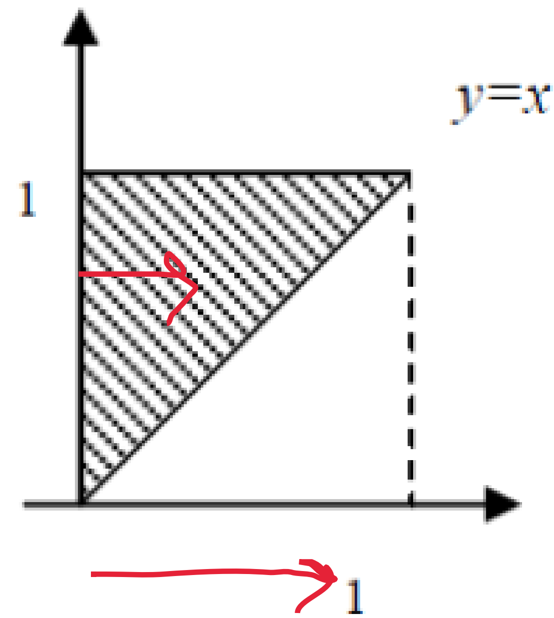
Şekil 5

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} y\,dy\,dx = \int_0^1 [\frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2}\right) dx = [\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10}\Big|_0^1 = \frac{1}{15}$$

br^3

g) (Bkz.Şekil 6)

$$I=\int_0^1\int_0^y e^x\,dxdy=\int_0^1 [e^x\Big|_0^y\,dy=\int_0^1 (e^y-1)dy=[e^y-y\Big|_0^1=(e-2)\ \text{b}$$



Şekil 6

Örnek 38. B bölgesi; $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsi, $x^2+y^2=a^2$ çemberi ve $x=0$ doğrusu tarafından birinci bölgede sınırladıkları bölge olduğuna göre $(b<a)$

$$I=\iint_B xydydx$$

$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{\ldots}$

integralini hesaplayınız. (Bkz.Şekil 7)

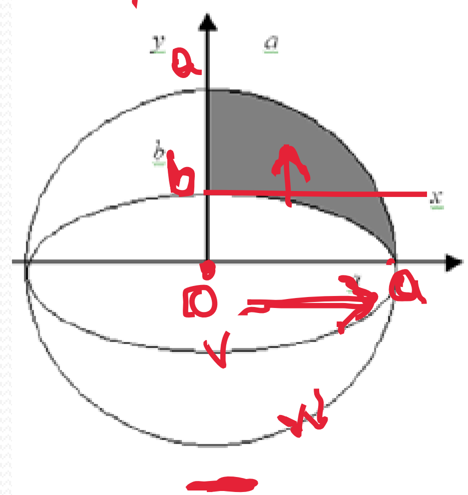
Çözüm:

$$I=\int_0^a \int_{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} xydydx=\frac{1}{2}\int_0^a [xy^2\Big|_{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dx=\frac{1}{2}\int_0^a [x(a^2-x^2)-x\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)]dx$$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^a [(a^2-b^2)x+(\frac{b^2}{a^2}-1)x^3]dx=\frac{1}{2}[(a^2-b^2)\frac{x^2}{2}+(\frac{b^2}{a^2}-1)\frac{x^4}{4}\Big|_0^a=\frac{a^2(a^2-b^2)}{8}$$

br^3

olur.



Şekil 7

$xy = 6$, $y = \cancel{5x}$

$x = 5 - y$.

Örnek 39. B bölgesi; $xy=6$ ve $x+y=5$ eğrileri ile sınırlanan aşağıdaki taralı bölge olduğuna göre $I=\iint\limits_B dxdy$ integralini hesaplayınız. (Bkz.Şekil 8)

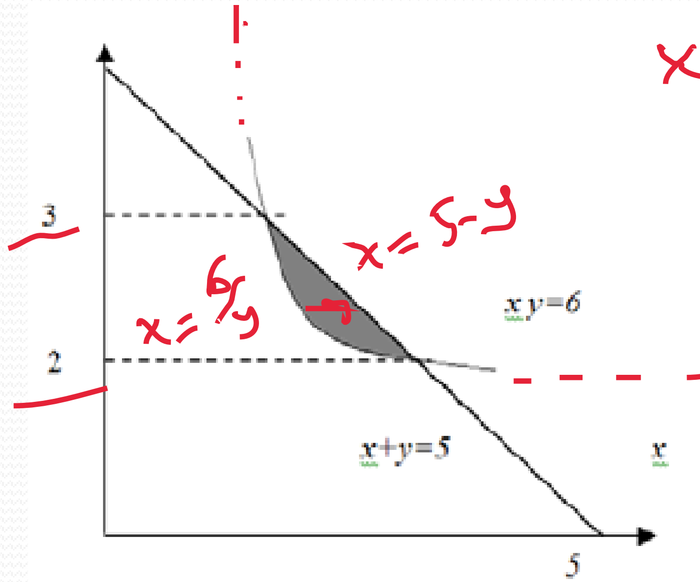
Çözüm: $I=\int\limits_2^3\int\limits_{\frac{6}{y}}^{5-y} dxdy=\int\limits_2^3 [x\Big|_{\frac{6}{y}}^{5-y} dy=\int\limits_2^3 (5-y-\frac{6}{y})dy=[5y-\frac{y^2}{2}-6\ln y\Big|_2^3=\frac{5}{2}+6\ln\frac{2}{3}$ dir.

br^2

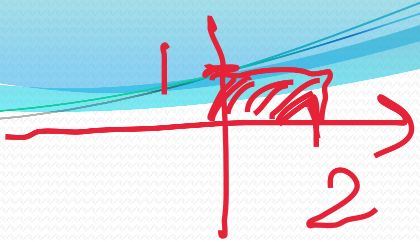
$x = \frac{6}{y}$

y

$-y$



Şekil 8



Örnek 40. $f(x,y)=xe^{xy}$ fonksiyonunun $B=[0,2]\times[0,1]$ bölgesindeki değerini hesaplayınız.

Çözüm: $\iint\limits_B xe^{xy}\,dydx=\int\limits_0^2\int\limits_0^1 xe^{xy}\,dydx=\int\limits_0^2 [\,e^{xy}\Big|_0^1 dx=\int\limits_0^2 \left(e^x-1\right)dx=[e^x-x\Big|_0^2=e^2-3$ br^3

Örnek 41. $I=\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{2x\arcsin y}{1-y^2}\,dy\,dx=?$

Çözüm : Verilen integralin integrasyon sırası değiştirildiğinde;

$$I=\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{2x\arcsin y}{1-y^2}\,dy\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}}\frac{2x\arcsin y}{1-y^2}\,dx\,dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left.\frac{x^2\arcsin y}{1-y^2}\right|_{0}^{\sqrt{1-y^2}}dy$$

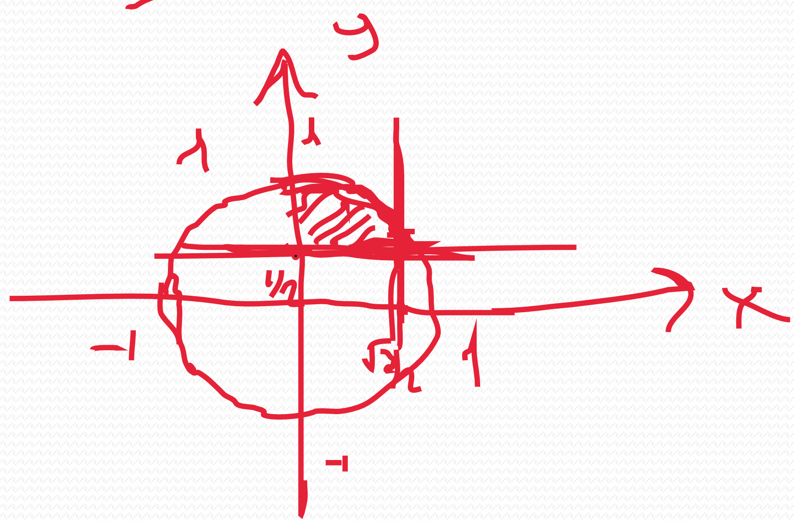
$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\arcsin y\,dy=\left(y\arcsin y+\sqrt{1-y^2}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}==\frac{5\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}\ br^3\ \text{olur.}$$

$x=0,\quad x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$y=\frac{1}{2},\quad y=\sqrt{1-x^2}$

$x^2+y^2=1.$

1,7



$B = \{(x,y) : 0 \leq \cancel{x} \leq \ln 16,$

Örnek 42. $I = \int_0^{\ln 16} \int_{e^{\frac{x}{2}}}^{4} \frac{\arctan y}{\ln y} \, dy dx = ?$

$x = 0,$

$x = \ln(16)$

$y =$

y

Çözüm : İntegrasyon sırası değiştirildiğinde;

$$I = \int_0^{\ln 16} \int_{e^{\frac{x}{2}}}^{4} \frac{\arctan y}{\ln y} \, dy dx = \int_1^4 \int_0^{2\ln y} \frac{\arctan y}{\ln y} \, dx dy = 2\int_1^4 \arctan y \, dy$$

$$I = 2\left[y \arctan y - \frac{1}{2}\ln(1+y^2) \Big|_1^4 \right] = 8\arctan 4 + \ln\left(\frac{2}{17}\right) - \frac{\pi}{2}$$

br^3

olur.

$y =$

Örnek 43. $I=\int_{-2}^{4}\int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{x=y+1} xy\,dx\,dy$ integralini integrasyon sırasını değiştirerek hesaplayınız.

Çözüm: $I=\int_{-3}^{-1}\int_{-\sqrt{2(x+3)}}^{\sqrt{2(x+3)}} xy\,dy\,dx+\int_{-1}^{5}\int_{x-1}^{\sqrt{2(x+3)}} xy\,dy\,dx=\int_{-3}^{-1}\frac{xy^2}{2}\Big|_{-\sqrt{2(x+3)}}^{\sqrt{2(x+3)}}dx+\int_{-1}^{5}\frac{xy^2}{2}\Big|_{x-1}^{\sqrt{2(x+3)}}dx=\frac{104}{3}$

Örnek 44. Aşağıdaki integrali integrasyon sırasını değiştirip, integrallerden birini hesaplayınız.

$$\int_{-2}^{2}\int_{\frac{4-y^2}{4}}^{4-y^2}\left(\frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x+4}{2}\right)dxdy$$

√

Çözüm: İntegrasyon sırası değiştirildiğinde;

$$I=\int_0^1\int_{-\sqrt{4-x}}^{-\sqrt{4-4x}}\left(\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x+4}{2}\right)dydx+\int_0^1\int_{\sqrt{4-4x}}^{\sqrt{4-x}}\left(\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x+4}{2}\right)dydx+\int_1^4\int_{-\sqrt{4-x}}^{\sqrt{4-x}}\left(\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x+4}{2}\right)dydx$$

olur. Bölge ox eksenine göre simetrik, aynı zamanda

$$\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x^2(-y)}{\sqrt{x^2+(-y)^2}}=-\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

olduğundan;

$$I=\int_{-2}^{2}\int_{\frac{4-y^2}{4}}^{4-y^2}\left(\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x+4}{2}\right)dxdy=2\int_0^2\int_{\frac{4-y^2}{4}}^{4-y^2}\frac{x+4}{2}dxdy=\int_0^2\left(\frac{x^2}{2}+4x\right)\Bigg|_{\frac{4-y^2}{4}}^{4-y^2}dy$$

$$I=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{16}y^5+\frac{13}{6}y^3+39y\right)\Bigg|_0^2=\frac{152}{3}$$

Örnek 45. $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4}\,dxdy = ?$

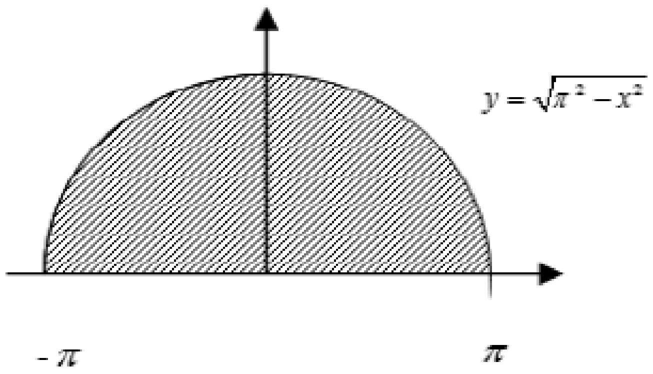
Çözüm: Verilen integralin mevcut integral sırasına göre çözülemeyeceği açıktır. Ancak B bölgesi çizilip, integrasyon sırası değiştirilirse

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4}\,dxdy = \int_0^2 \int_0^{x^3} e^{x^4}\,dydx = \int_0^2 x^3 e^{x^4}\,dx = \frac{1}{4}\left(e^{x^4}\right|_0^2 = \frac{1}{4}\left(e^{16}-1\right)$$

olur.

Örnek 46.

$$\int_0^{\pi}\int_{-\sqrt{\pi^2-y^2}}^{\sqrt{\pi^2-y^2}} \frac{x\sin x}{\sqrt{\pi^2-x^2}}dxdy = ?$$



Çözüm: İntegrasyon sırası değiştirildiğinde integralin değeri;

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\sqrt{\pi^2-x^2}} \frac{x\sin x}{\sqrt{\pi^2-x^2}}dydx = \int_{-\pi}^{\pi} x\sin x dx = -x\cos x + \sin x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

olur.

Örnek 47. $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \sqrt{x^4+1}\,dxdy = ?$ integralinin değerini integrasyon sırasını değiştirerek hesaplayınız.

Çözüm: Verilen integralin *B* bölgesi çizilip, integrasyon sırası değiştirilirse;

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \sqrt{x^4+1}\,dxdy = \int_0^2 \int_0^{x^3} \sqrt{x^4+1}\,dydx = \int_0^2 x^3\sqrt{x^4+1}dx = \frac{1}{6}\left(17^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$

olur.

Kaynaklar:

1. A. H. Berksoy, O. Özkan, Mühendisler İçin Çözümlü Kalkülüs, S.Ü. Basımevi, 2010
2. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus II**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2010.
3. J. Stewart, Kalkülüs Kavram ve Kapsam (Diferansiyel ve İntegral Hesap), TÜBA, 2010.