MATEMATİK - 2

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2021

DİZİLER

1. Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1. *A boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere her $f:\mathbb{N}\to A$ fonksiyonuna dizi denir. $n\in\mathbb{N}$ için $f(n)=a_n$ ifadesine dizinin n. terimi veya genel terimi denir. Diziler değer kümelerine göre adlandırılır. Eğer değer kümesi reel sayılardan oluşuyorsa diziye reel sayılar dizisi, kompleks sayılardan oluşuyorsa kompleks sayılar dizisi, fonksiyonlardan oluşuyorsa fonksiyonel dizi adı verilir. Benzer şekilde örnekler çoğaltılabilir. Dizi küme olarak*

$$f=\{(n,a_n):n\in\mathbb{N}\}$$

şeklinde ifade edilir. Bir fonksiyon olan dizinin değer kümesi

$$(a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots)$$

şeklindedir. Bu kümede elemanların sırası önemli olduğundan küme parantezi yerine "( )" parantezi kullanılmaktadır. Başka bir ifade ile dizi

$$(a_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$a_1 \rightarrow$ 1. *terimi,*

$a_2 \rightarrow$ 2. *terimi,*

...

$a_n \rightarrow n$. *terimi göstermektedir.*

Örneğin,

$(3^n) = (3, 3^2, 3^3, \ldots, 3^n, \ldots)$ bir reel sayı dizisi,

$(2+ni) = (2+i, 2+2i, 2+3i, \ldots, 2+ni, \ldots)$ bir kompleks sayı dizisi,

$\left(\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}, \ldots\right)$ bir matris dizisi,

$\left(\frac{nx}{1+x^n}\right) = \left(\frac{x}{1+x}, \frac{2x}{1+x^2}, \frac{3x}{1+x^3}, \ldots, \frac{nx}{1+x^n}, \ldots\right)$ bir fonksiyonel dizidir.

Aşağıdaki dizi örneklerini inceleyiniz:

(1) $\left(\frac{1}{n}\right)=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right)$

(2) $(-2n)=(-2,-4,-6,-8,-10,\ldots,-2n,\ldots)$

(3) $\left((-1)^n\right)=\left(-1,+1,-1,+1,-1,\ldots,(-1)^n,\ldots\right)$

(4) $(n!)=(1!,2!,3!,4!,5!,\ldots,n!,\ldots)$

(5) $\left((-1)^n n^2\right)=\left(-1,+4,-9,+16,-25,\ldots,(-1)^n n^2,\ldots\right)$

(6) $(a_n : \text{Asal sayı})=(2,3,5,7,11,13,17,\ldots)$

(7) $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=\left(\left(1+\frac{1}{1}\right)^1,\left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\left(1+\frac{1}{3}\right)^3,\ldots,\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ldots\right)$

(8) $\left(\frac{1}{2n+1}\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\frac{1}{9},\frac{1}{11},\ldots,\frac{1}{2n+1},\ldots\right)$

(9) $\left(-3^n\right)=\left(-3,-3^2,-3^3,-3^4,-3^5,\ldots,-3^n,\ldots\right)$

(10) $\left(\frac{1}{n^2}\right)=\left(1,\frac{1}{2^2},\frac{1}{3^2},\frac{1}{4^2},\frac{1}{5^2},\ldots,\frac{1}{n^2},\ldots\right)$

Dizi doğal sayılar kümesinde tanımlı bir fonksiyon olduğundan fonksiyonlara ait pek çok özelliğe sahiptir. Bu bölümde reel sayı dizileri ele alınacak ve özellikleri incelenecektir.

Örnek 2.1.1. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$ dizisinin genel terimi $a_n = \frac{1}{n}$ olabileceği gibi $b_n = (n-1)(n-2)(n-3) + \frac{1}{n}$ de olabilir.

Uyarı 2.1.1. *Diziler genel terimleri ile verilmelidir. Genel terimi belirli olmayan bir dizinin sonlu sayıda teriminin bilinmesi bilinmeyen terimler hakkında belirleyici olmaz.*

Örnek 2.1.2. $a_{n+1} = a_n - \dfrac{1}{n(n+1)}$, $a_1 = 1$ kuralı ile verilen (a_n) dizisinin genel teriminin $a_n = \dfrac{1}{n}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$$a_2 = a_1 - \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2},$$

$$a_3 = a_2 - \frac{1}{2.3} = \frac{1}{3},$$

$$a_4 = a_3 - \frac{1}{3.4} = \frac{1}{4}, \ldots$$

şeklindedir. Her $n \geq 2$ için $a_n = \dfrac{1}{n}$ olduğunu tümevarım ile gösterelim:

$n=2$ için $a_2 = \dfrac{1}{2}$ olup verilen eşitlik $n=2$ için doğrudur.

Şimdi $n=k$ için verilen eşitliğin doğru olduğunu kabul edip $n=k+1$ için doğru olup olmadığını inceleyelim.

$n=k$ için $a_k = \dfrac{1}{k}$ olduğunu kabul edelim.

$n=k+1$ için $a_{k+1} = a_k - \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k+1}$ dir.

Bu durumda Tümevarım Kuralı gereği verilen eşitlik $n \geq 2$ için doğrudur.

Örnek 2.1.3. Terimleri $a_1 = 0.1$, $a_2 = 0.11$, $a_3 = 0.111$, $\ldots$ şeklinde olan dizinin genel terimini bulunuz.

Çözüm.

$$a_1 = 0.1 = \frac{1}{10} = \frac{1}{9}\cdot\frac{9}{10} = \frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10}\right),$$

$$a_2 = 0.11 = \frac{11}{100} = \frac{1}{9}\cdot\frac{99}{100} = \frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^2}\right),$$

$$a_3 = 0.111 = \frac{111}{1000} = \frac{1}{9}\cdot\frac{999}{1000} = \frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^3}\right),$$

$$\ldots$$

$$a_n = \frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right) \text{ dir.}$$

Elde edilen eşitliğin doğruluğunun Tümevarım Kuralı ile ispatı okuyucuya bırakıldı.

Örnek 2.1.5. $(a_n) = \left(\dfrac{3n+1}{n}\right)$ dizisinin ilk beş terimini yazınız. $\dfrac{37}{12}$ ve $\dfrac{15}{7}$ sayıları bu dizinin terimi midir? İnceleyiniz.

Çözüm.

$$a_1 = \frac{4}{1} = 4, \quad a_2 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4},$$

$$a_5 = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}\ , \ldots ,\ a_n = 3\frac{1}{n} \text{ dir.}$$

Bu durumda $\dfrac{37}{12} = 3\dfrac{1}{12}$ olduğundan $\dfrac{37}{12}$ sayısı verilen dizinin 12. terimidir. $\dfrac{15}{7} = 2\dfrac{1}{7}$ olduğundan $\dfrac{15}{7}$ ise bu dizinin terimi değildir.

Örnek 2.1.6. $(a_n) = \left(\dfrac{5n-8}{n}\right)$ dizisinin hangi terimleri tam sayıdır? İnceleyiniz.

Çözüm. $a_n = \dfrac{5n-8}{n} = 5 - \dfrac{8}{n}$ olduğundan 8 i tam olarak bölen doğal sayılar için terimler tam sayı olacaktır. Bu durumda 1., 2., 4. ve 8. terim tam sayıdır. Bu durumda $a_1 = -3$, $a_2 = 1$, $a_4 = 3$ ve $a_8 = 4$ tür.

Örnek 2.1.7. Genel terimi $a_n = 2+4+...+2n$ olan (a_n) dizisi veriliyor. Bu dizi için $a_n > 500$ şartını sağlayan en küçük n doğal sayısını bulunuz.

Çözüm.

$$a_n = 2+4+...+2n = 2(1+2+...+n) = n(n+1)$$

olduğundan $a_n > 500$ olması için $n(n+1) > 500$ olmalıdır. Bu durumda $n = 22$ dir.

Tanım 2.1.3. *Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $a_n = b_n$ *ise* (a_n) *dizisi* (b_n) *dizisine eşittir veya* (a_n) *ve* (b_n) *dizileri eşit dizilerdir denir.* $(a_n) = (b_n)$ *şeklinde gösterilir.*

Örnek 2.1.8. $(a_n) = (1+2+...+n)$ ve $(b_n) = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)$ dizilerini ele alalım. $1+2+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = b_n$ olup (a_n) ve (b_n) dizileri eşit dizilerdir.

Örnek 2.1.9. $(a_n) = \left(\sin\left(n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ dizisine eşit bir dizi bulunuz.

Çözüm. $\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}-1, & n \text{ tek}\\ 1, & n \text{ çift}\end{cases}$ olduğundan $(b_n)=((-1)^n)$ dizisi (a_n) dizisine eşittir.

Benzer şekilde $(c_n)=(\cos(n\pi))$ dizisi de (a_n) ve (b_n) dizilerine eşittir.

Tanım 2.1.4. *$c\in\mathbb{R}$ olmak üzere her $n\in\mathbb{N}$ için $a_n=c$ ise (a_n) dizisine sabit dizi denir ve*

$$(a_n)=(c,c,...,c,...)=(c)$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.5. $a, r \in \mathbb{R}$ *olmak üzere* $a_n = a + (n-1)r$ *genel terimi ile tanımlanan* (a_n) *dizisine aritmetik dizi denir ve*

$$(a_n) = (a, a+r, a+2r, \ldots, a+(n-1)r, \ldots)$$

şeklinde gösterilir. Yani bir dizinin ardışık terimleri arasındaki fark hep aynı sabit sayıya eşit ise diziye aritmetik dizi denir. Bu durumda aritmetik bir dizide her $n \in \mathbb{N}$ *için* $a_{n+1} - a_n = r$ *dir. Aritmetik bir dizinin ilk n terim toplamı*

$$\begin{aligned} S_n &= a + a + r + a + 2r + \ldots + a + (n-1)r \\ &= na + \frac{n(n-1)}{2} r \\ &= \frac{n}{2}(2a + (n-1)r) \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

Uyarı 2.1.2. *Aritmetik bir dizide birinci terim dışındaki her terim kendisinden önce gelen terim ile kendisinden sonra gelen terimin aritmetik ortalamasına eşittir.*

Örnek 2.1.10. $(a_n)=\left(\frac{n-3}{5}\right)$ dizisi aritmetik bir dizidir. Çünkü her $n\in\mathbb{N}$ için

$$a_{n+1}-a_n=\frac{n-2}{5}-\frac{n-3}{5}=\frac{1}{5}$$

dir. Bu durumda

$$(a_n)=\left(-\frac{2}{5},-\frac{1}{5},0,\frac{1}{5},\dots,\frac{n-3}{5},\dots\right)$$

dizisinde $a=-\frac{2}{5}$ ve $r=\frac{1}{5}$ tir.

Ayrıca $\frac{n-3}{5}=-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}(n-1)$ yazılabileceği açıktır ve bu dizinin ilk n terim toplamı

$$S_n=\frac{n}{2}(2a+(n-1)r)=\frac{n}{2}\left(2\left(-\frac{2}{5}\right)+(n-1)\frac{1}{5}\right)=\frac{n(n-5)}{10}$$

dur.

Tanım 2.1.6. $a, r \in \mathbb{R}$ *olmak üzere* $a_n = a.r^{n-1}$ *genel terimi ile tanımlanan* (a_n) *dizisine geometrik dizi denir ve*

$$(a_n) = (a, a.r, a.r^2, ..., a.r^{n-1}, ...)$$

şeklinde gösterilir. Yani bir dizinin ardışık terimleri arasındaki oran hep aynı sabit sayıya eşit ise diziye geometrik dizi denir. Bu durumda geometrik bir dizide her $n \in \mathbb{N}$ *için* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$ *dir. Geometrik bir dizinin ilk n terim toplamı*

$$S_n = a + a.r + a.r^2 + ... + a.r^{n-1}$$
$$= a(1 + r + r^2 + ... + r^{n-1}) = a\frac{1-r^n}{1-r}$$

şeklinde hesaplanır.

Uyarı 2.1.3. *Geometrik bir dizide birinci terim dışındaki her terim kendisinden önce gelen terim ile kendisinden sonra gelen terimin geometrik ortalamasına eşittir.*

Örnek 2.1.11. $1+r+r^2+\dots+r^{n-1}=\dfrac{1-r^n}{1-r}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Eşitliğin doğru olduğunu tümevarım ile gösterelim:

$n=1$ için $1=\dfrac{1-r}{1-r}=1$ olup verilen eşitlik $n=1$ için doğrudur.

$n=2$ için $1+r=\dfrac{1-r^2}{1-r}=1+r$ olup verilen eşitlik $n=2$ için de doğrudur.

Şimdi $n=k$ için verilen eşitliğin doğru olduğunu kabul edip $n=k+1$ için doğru olup olmadığını inceleyelim.

Kabulümüze göre

$n=k$ için $1+r+r^2+\dots+r^{k-1}=\dfrac{1-r^k}{1-r}$

dir. Kabulümüz ışığında

$$n=k+1 \text{ için } 1+r+r^2+\ldots+r^k=\frac{1-r^{k+1}}{1-r}$$

olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır.

$$\begin{aligned}1+r+r^2+\ldots+r^k &= (1+r+r^2+\ldots+r^{k-1})+r^k\\ &=\frac{1-r^k}{1-r}+r^k\\ &=\frac{1-r^{k+1}}{1-r}\end{aligned}$$

dir. Bu durumda Tümevarım Kuralı gereği verilen eşitlik bütün doğal sayılar için doğrudur.

Örnek 2.1.12. $(a_n)=\left(3.2^n\right)$ dizisi geometrik bir dizidir. Çünkü her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3.2^{n+1}}{3.2^n}=2$$

dir. Bu durumda

$$(a_n)=(6,6.2,6.2^2,\dots,6.2^{n-1},\dots)$$

dizisinde $a=6$ ve $r=2$ dir. Bu dizinin ilk n terim toplamı

$$S_n=a\frac{1-r^n}{1-r}=6\frac{1-2^n}{1-2}=6(2^n-1)$$

dir.

Tanım 2.1.7. *Bir aritmetik dizinin terimlerinin çarpma işlemine göre terslerinin oluşturduğu diziye harmonik dizi denir. Yani harmonik bir dizi*

$$(a_n) = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a+r}, \frac{1}{a+2r}, \ldots, \frac{1}{a+(n-1)r}, \ldots \right)$$

şeklindedir.

Uyarı 2.1.4. *Harmonik bir dizide birinci terim dışındaki her terim kendisinden önce gelen terim ile kendisinden sonra gelen terimin harmonik ortalamasına eşittir.*

Örnek 2.1.13. $(a_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$ dizisi harmonik bir dizidir. Çünkü $n > 1$

için $a_n = \dfrac{2}{\dfrac{1}{a_{n-1}} + \dfrac{1}{a_{n+1}}}$ dir.

2. Dizilerin Yakınsaklığı

Tanım 2.2.1. $a \in \mathbb{R}$ *olmak üzere her* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *sayısı için* (a_n) *dizisinin sonlu sayıdaki terimleri dışındaki bütün terimleri (hemen her terimi) a reel sayısının* ε*-komşuluğu içinde kalıyorsa* (a_n) *dizisinin limiti a dır denir ve*

$$(a_n) \to a \text{ veya } \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

şeklinde gösterilir.

Limiti a reel sayısına eşit olan (a_n) *dizisine a reel sayısına yakınsıyor denir. a reel sayısına yakınsayan* (a_n) *dizisine yakınsak dizi adı verilir. Yakınsak olmayan dizilere ise ıraksak dizi denir.*

Diziler için limit tanımı farklı bir şekilde de ifade edilebilir:

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere her $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sayısına karşılık $n(\varepsilon) < n$ şartını sağlayan n doğal sayıları için

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

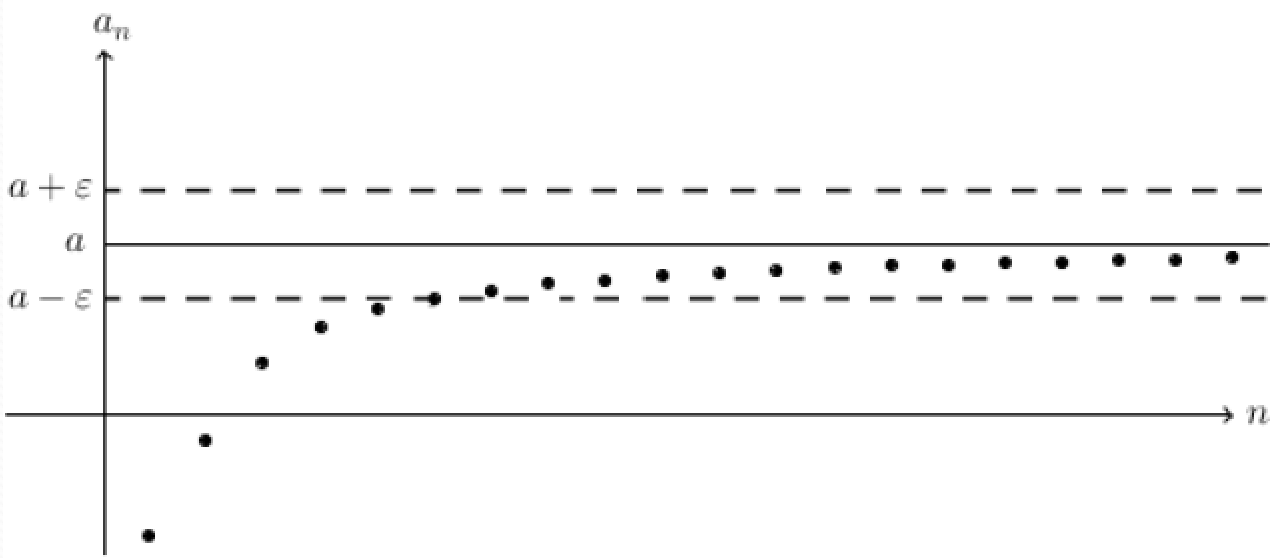
olacak şekilde ε a bağlı bir $n(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa (a_n) dizisinin limiti a dır denir. Her $n(\varepsilon) < n$ için

$$|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

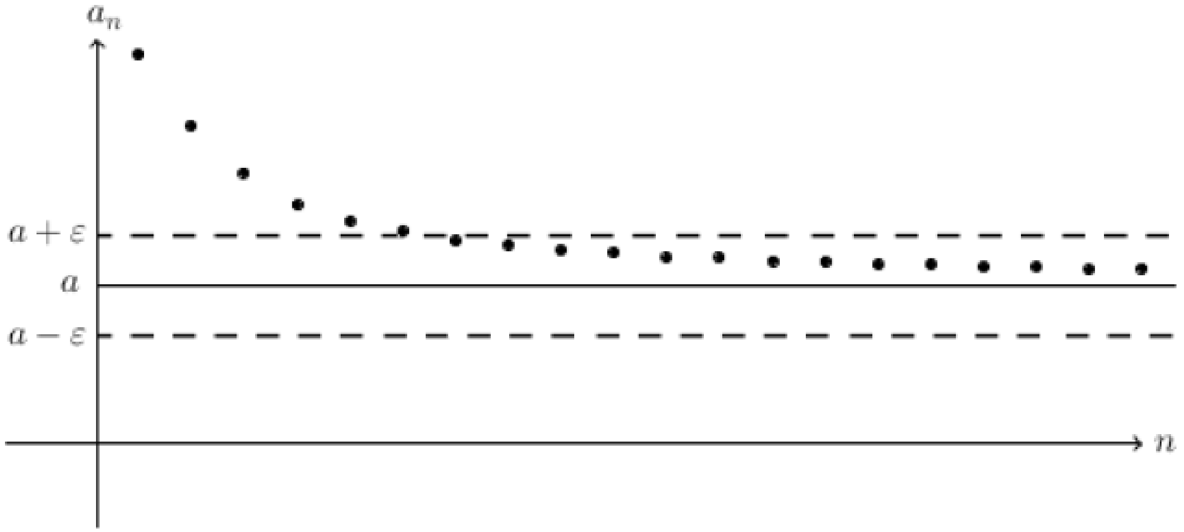
ifadesinin anlamı $a_{n(\varepsilon)+1}, a_{n(\varepsilon)+2}, \ldots$ terimlerinin hepsinin kesin olarak a nın ε-komşuluğunda bulunması ve sonlu sayıda olan $a_1, a_2, \ldots, a_{n(\varepsilon)}$ terimlerinin ise bu komşuluğun dışında kalmasıdır.

Uyarı 2.2.1. *Burada* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *sayısı* a_n *sayısı ile a sayısı arasındaki hata,* $n(\varepsilon)$ *doğal sayısı da* (a_n) *dizisinin a sayısına ne kadar hızlı yakınsadığının ölçüsü olarak düşünülebilir.*

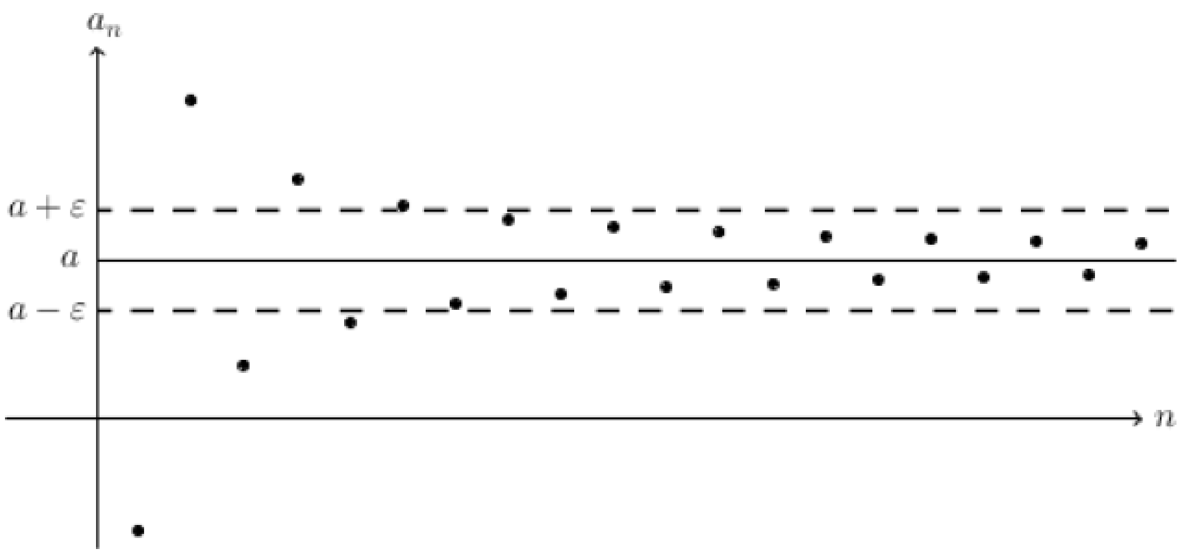
Dizilerin yakınsaklık tanımını göz önünde bulundurarak aşağıdaki grafikleri inceleyiniz.



Şekil 2.2.1.



Şekil 2.2.2.



Şekil 2.2.3.

Tanım 2.2.2. *Limiti sıfır olan dizilere sıfır dizisi denir.*

Teorem 2.2.1. (a_n) *dizisinin limitinin a olması için gerek ve yeter şart* $(a_n - a)$ *dizisinin sıfır dizisi olmasıdır.*

Örnek 2.2.1. $(a_n)=\left(\dfrac{2n+1}{3n+2}\right)$ dizisinin $\dfrac{2}{3}$ sayısına yakınsadığını gösteriniz.

Çözüm. Her $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ sayısına karşılık $n(\varepsilon)<n$ şartını sağlayan n doğal sayıları için

$$|a_n-a|=\left|\frac{2n+1}{3n+2}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$$

olacak şekilde ε a bağlı bir $n(\varepsilon)$ doğal sayısının var olduğunu göstermeliyiz. $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ sayısı verilmiş olsun.

$$|a_n-a|=\left|\frac{2n+1}{3n+2}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{6n+3-6n-4}{9n+6}\right|=\frac{1}{9n+6}<\varepsilon$$

olduğundan $\dfrac{1}{9n+6}<\varepsilon$ olup $9n+6>\dfrac{1}{\varepsilon}$ ve $n>\dfrac{1-6\varepsilon}{9\varepsilon}$ dur. Yani

$n(\varepsilon)=\dfrac{1-6\varepsilon}{9\varepsilon}$ olarak bulunur. Bu durumda limit tanımına göre (a_n)

dizisinin limiti $\frac{2}{3}$ tür. Burada $n(\varepsilon)$ doğal sayısı $\frac{1-6\varepsilon}{9\varepsilon}$ sayısının tam kısmıdır. Yani $n(\varepsilon)=\left[\!\left[\frac{1-6\varepsilon}{9\varepsilon}\right]\!\right]$ dur.

$\varepsilon=\frac{1}{100}$ olarak seçilirse $n(\varepsilon)=\left[\!\left[\frac{1-6\varepsilon}{9\varepsilon}\right]\!\right]= 10,4 \;=10$ olarak hesaplanır. Bunun anlamı ise dizinin 10. terimden sonraki bütün terimlerinin, $\frac{2}{3}$ ün $\frac{1}{100}$ komşuluğunda olduğudur. Yani her $10<n$ için

$$a_n \in \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{100},\frac{2}{3}+\frac{1}{100}\right)=\left(\frac{197}{300},\frac{203}{300}\right)$$

dür. Dizinin terimlerini inceleyelim:

$$a_1 = \frac{3}{5} = \frac{180}{300} \notin \left(\frac{197}{300}, \frac{203}{300}\right), \qquad a_2 = \frac{5}{8} = \frac{187,50}{300} \notin \left(\frac{197}{300}, \frac{203}{300}\right),$$

$$a_3 = \frac{7}{11} \cong \frac{190,90}{300} \notin \left(\frac{197}{300}, \frac{203}{300}\right), \qquad a_4 = \frac{9}{14} \cong \frac{192,86}{300} \notin \left(\frac{197}{300}, \frac{203}{300}\right),$$

$$a_5 = \frac{11}{17} \cong \frac{194,12}{300} \notin \left(\frac{197}{300}, \frac{203}{300}\right), \qquad a_6 = \frac{13}{20} = \frac{195}{300} \notin \left(\frac{197}{300}, \frac{203}{300}\right),$$

$$a_7 = \frac{15}{23} \cong \frac{195,65}{300} \notin \left(\frac{197}{300}, \frac{203}{300}\right), \qquad a_8 = \frac{17}{26} \cong \frac{196,15}{300} \notin \left(\frac{197}{300}, \frac{203}{300}\right),$$

$$a_9 = \frac{19}{29} \cong \frac{196,55}{300} \notin \left(\frac{197}{300}, \frac{203}{300}\right), \qquad a_{10} = \frac{21}{32} \cong \frac{196,88}{300} \notin \left(\frac{197}{300}, \frac{203}{300}\right),$$

$$a_{11} = \frac{23}{35} \cong \frac{197,14}{300} \in \left(\frac{197}{300}, \frac{203}{300}\right), \qquad a_{12} = \frac{25}{38} \cong \frac{197,37}{300} \in \left(\frac{197}{300}, \frac{203}{300}\right),$$

$$a_{13} = \frac{27}{41} \cong \frac{197,56}{300} \in \left(\frac{197}{300}, \frac{203}{300}\right), \qquad a_{14} = \frac{29}{44} \cong \frac{197,73}{300} \in \left(\frac{197}{300}, \frac{203}{300}\right),$$

$$a_{15} = \frac{31}{47} \cong \frac{197,87}{300} \in \left(\frac{197}{300}, \frac{203}{300}\right), \ldots$$

Benzer şekilde, $\varepsilon = \dfrac{1}{1000}$ olarak seçilirse

$$n(\varepsilon) = \left[\!\left[\frac{1-6\varepsilon}{9\varepsilon} \right]\!\right] = 110,4 = 110$$

olarak hesaplanır. Bunun anlamı ise dizinin 110. terimden sonraki bütün terimlerinin, $\dfrac{2}{3}$ ün $\dfrac{1}{1000}$ komşuluğunda olduğudur.

Örnek 2.2.2. $(a_n)=\left(\dfrac{3n^2+7n+2}{n^2+2n}\right)$ dizisinin limitinin 3 olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Her $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ sayısına karşılık $n(\varepsilon)<n$ şartını sağlayan n doğal sayıları için

$$|a_n-a|=\left|\frac{3n^2+7n+2}{n^2+2n}-3\right|<\varepsilon$$

olacak şekilde ε a bağlı bir $n(\varepsilon)$ doğal sayısının var olduğunu göstermeliyiz. $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ sayısı verilmiş olsun.

$$|a_n-a|=\left|\frac{3n^2+7n+2}{n^2+2n}-3\right|=\left|\frac{n+2}{n^2+2n}\right|=\frac{n+2}{n^2+2n}=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

olduğundan $n>1/\varepsilon$ dur. Yani $n(\varepsilon)=1/\varepsilon$ olarak bulunur. Bu durumda limit tanımına göre (a_n) dizisinin limiti 3 tür. Burada $n(\varepsilon)$ doğal sayısı $1/\varepsilon$ sayısının tam kısmıdır.

$\varepsilon = 1/10$ olarak seçilirse $n(\varepsilon) = 10$ olarak hesaplanır. Bunun anlamı ise dizinin 10. terimden sonraki bütün terimlerinin, 3 ün $1/10$ komşuluğunda olduğudur. Yani her $10 < n$ için $a_n \in \left(\frac{29}{10}, \frac{31}{10}\right)$ dur.

Lemma 2.2.1. *Her* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *için* $0 \le c < \varepsilon$ *ise* $c = 0$ *dır.*

Teorem 2.2.2. *Yakınsak her dizinin bir tek limiti vardır.*

Teorem 2.2.3. (a_n) *dizisinin bütün terimleri a sabit sayısına eşit ise yani* $(a_n) = (a)$ *ise* $(a_n) \to a$ *dır.*

2.3. Monoton Diziler

Tanım 2.3.1. (a_n) *bir reel sayı dizisi olsun. Eğer her* $n \in \mathbb{N}$ *için*

(1) $a_n < a_{n+1}$ *ise* (a_n) *dizisine artan dizi,*

(2) $a_n \leq a_{n+1}$ *ise* (a_n) *dizisine azalmayan dizi,*

(3) $a_n > a_{n+1}$ *ise* (a_n) *dizisine azalan dizi,*

(4) $a_n \geq a_{n+1}$ *ise* (a_n) *dizisine artmayan dizi,*

adı verilir.

Bir dizi artan (azalan) ise diziye monoton artan (monoton azalan) dizi adı verilir.

Örnek 2.3.1. Aşağıdaki dizilerin monotonluk durumunu inceleyiniz.

(1) $(a_n) = (n^2)$ **(2)** $(a_n) = \left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ **(3)** $(a_n) = (a)$

(4) $(a_n) = \left(\dfrac{n^2+1}{n}\right)$ **(5)** $(a_n) = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$ **(6)** $(a_n) = ((-1)^n)$

(7) $(a_n) = (n + (-1)^n)$ **(8)** $(a_n) = (2n + (-1)^n)$

(9) $(a_n) = \left(\begin{cases} \dfrac{n-1}{2}, & n \text{ tek} \\ \dfrac{n}{2}, & n \text{ çift} \end{cases}\right)$ **(10)** $(a_n) = \left(\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right)$

(11) $(a_n) = \left(\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$ **(12)** $(a_n) = (n^p)$

Çözüm. (1) $a_n = n^2$ ve

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

dir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $2n+1 > 0$ olduğundan $(a_n) = (n^2)$ dizisi artandır.

(2) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ ve

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = -\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

dir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $-\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2} < 0$ olduğundan $(a_n) = \left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ dizisi

azalandır.

(3) $a_n = a$ ve $a_{n+1} - a_n = 0$ olduğundan $(a_n) = (a)$ sabit dizisi hem

azalmayan hem de artmayandır.

(4) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n}$ ve

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^2+1}{n+1} - \frac{n^2+1}{n} = \frac{n^2+n-1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n(n+1)}$$

dir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $1 - \dfrac{1}{n(n+1)} > 0$ olduğundan $(a_n) = \left(\dfrac{n^2+1}{n} \right)$ dizisi artandır.

(5) $a_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$ ve

$$a_{n+1} - a_n = \left(1 + \frac{1}{(n+1)^2} \right) - \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) = -\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

dir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $-\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2} < 0$ olduğundan $(a_n) = \left(1 + \dfrac{1}{n^2} \right)$ dizisi azalandır.

(6) $a_n = (-1)^n$ olup n çift ise $a_n = 1$, n tek ise $a_n = -1$ dir. Bu nedenle $(a_n) = ((-1)^n)$ dizisi ne artan ne azalandır. Yani $(a_n) = ((-1)^n)$ dizisi monoton değildir.

(7) $a_n = n + (-1)^n$ ve

$$a_{n+1} - a_n = ((n+1) + (-1)^{n+1}) - (n + (-1)^n) = 1 + 2(-1)^{n+1}$$

dir. Bu durumda $a_{n+1} - a_n$ farkı n çift ise negatif, n tek ise pozitiftir. Yani $(a_n) = (n + (-1)^n)$ dizisi monoton değildir.

(8) $a_n = 2n + (-1)^n$ ve

$$a_{n+1} - a_n = (2(n+1) + (-1)^{n+1}) - (2n + (-1)^n) = 2 - 2(-1)^n$$

dir. Bu durumda $a_{n+1} - a_n$ farkı n çift ise sıfır, n tek ise pozitiftir. Yani $a_{n+1} - a_n \geq 0$ olup $(a_n) = (2n + (-1)^n)$ dizisi azalmayandır.

(9) $a_n = \begin{cases} \dfrac{n-1}{2}, & n \text{ tek} \\ \dfrac{n}{2}, & n \text{ çift} \end{cases}$ ve

$$n = 2k+1 \text{ için } a_{2k+3} - a_{2k+1} = \frac{2k+2}{2} - \frac{2k}{2} = 1 > 0 \text{ olduğundan}$$

verilen dizinin tek indisli terimleri kendi içinde artandır.

Benzer şekilde $n = 2k$ için $a_{2k+2} - a_{2k} = \dfrac{2k+2}{2} - \dfrac{2k}{2} = 1 > 0$

olduğundan dizinin çift indisli terimleri de kendi içinde artandır.

Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} - a_n \geq 0$ olduğundan verilen dizi azalmayandır.

(10) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ ve

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{(n+2)^{n+1} n^n}{(n+1)^{n+1}(n+1)^n} = \frac{(n+2)^{n+1} n^n}{(n+1)^{2n+1}}$$

$$= \frac{(n+2)^{n+1} n^{n+1}(n+1)}{(n+1)^{2n+2} n} = \frac{(n^2+2n)^{n+1}(n+1)}{((n+1)^2)^{n+1} n}$$

$$= \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$$

dir. Bernoulli eşitsizliğinden

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \geq 1-(n+1)\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}$$

olduğundan $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ olup $a_{n+1} - a_n \geq 0$ elde edilir. Bu nedenle

$(a_n) = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ dizisi azalmayandır.

(11) Bernoulli eşitsizliğinden $n>1$ için

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1+n\cdot\frac{1}{n^2-1} > 1+n\cdot\frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{n}$$

yazılabilir. Bu durumda

$$1+\frac{1}{n} < \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

olup

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

elde edilir ki bu $a_{n-1} > a_n$ anlamına gelir. Yani verilen dizi azalandır.

(12) $a_n = n^p$ ve

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^p - n^p$$

dir. Bu durumda $(a_n) = (n^p)$ dizisi $p>0$ için artan, $p<0$ için azalan ve $p=0$ için sabit dizi olup hem artan hem de azalandır.

2.4. Alt Diziler

Tanım 2.4.1. (a_n) *dizisi verilmiş olsun. Her* $k \in \mathbb{N}$ *için* $n_k < n_{k+1}$ *olacak şekilde doğal sayıların* (n_k) *dizisini düşünelim. Yani* (n_k) *dizisi artan bir doğal sayı dizisi olsun. Bu durumda* (a_{n_k}) *dizisine* (a_n) *dizisinin bir alt dizisi denir ve* $(a_{n_k}) \subseteq (a_n)$ *şeklinde gösterilir. (Yani* (a_n) *dizisinin terimleri içinden belirli bir kural ile seçilen terimlerin oluşturduğu diziye* (a_n) *dizisinin bir alt dizisi denir.)*

Örnek 2.4.1. $(a_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$ dizisini ele alalım. $(n_k) = (2k)$ olarak seçilirse elde edilen $(a_{n_k}) = \left(\dfrac{1}{2k}\right)$ dizisi (a_n) dizisinin bir alt dizisidir. Bu durum

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2k}, \ldots\right) \subseteq \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$$

şeklinde gösterilebilir.

Benzer şekilde $(b_n) = ((-1)^n)$ dizisi için $(n_k) = (2k)$ olarak seçilirse elde edilen $(b_{n_k}) = ((-1)^{2k})$ dizisi de (b_n) dizisinin bir alt dizisi olur. Bu durum

$$(1,1,1,\ldots,1,\ldots) \subseteq (-1,1,-1,\ldots,(-1)^n,\ldots)$$

şeklinde gösterilebilir.

Örnek 2.4.2. $\left(\dfrac{6k+4}{10k+3}\right)$ ve $\left(\dfrac{7k+5}{8k-10}\right)$ dizilerinin $(a_n) = \left(\dfrac{3n+1}{5n-2}\right)$ dizisinin alt dizisi olup olmadıklarını inceleyiniz.

Çözüm. $\left(\dfrac{6k+4}{10k+3}\right)$ dizisinin (a_n) dizisinin bir alt dizisi olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\dfrac{3n_k+1}{5n_k-2} = \dfrac{6k+4}{10k+3}$ olmalıdır. Bu eşitlikten $(n_k) = (2k+1)$ elde edilir. Bu dizi artan bir doğal sayı dizisi olduğundan $\left(\dfrac{6k+4}{10k+3}\right)$ dizisi (a_n) dizisinin bir alt dizisidir. Bu durum

$$\left(\frac{10}{13},\frac{16}{23},\frac{22}{33},\ldots,\frac{6k+4}{10k+3},\ldots\right)\subseteq\left(\frac{4}{3},\frac{7}{8},\frac{10}{13},\ldots,\frac{3n+1}{5n-2},\ldots\right)$$

şeklinde gösterilebilir.

$\left(\frac{7k+5}{8k-10}\right)$ dizisinin (a_n) dizisinin bir alt dizisi olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\frac{3n_k+1}{5n_k-2}=\frac{7k+5}{8k-10}$ olmalıdır. Bu eşitlikten

$(n_k)=\left(\frac{2k}{k+5}\right)$ elde edilir. Bu dizi bir doğal sayı dizisi olmadığından $\left(\frac{7k+5}{8k-10}\right)$ dizisi (a_n) dizisinin bir alt dizisi değildir.

Uyarı 2.4.1. *Artan bir dizinin terimleri içinden belirli bir kural ile seçilen terimlerin oluşturduğu dizinin de artan bir dizi olacağı açıktır. Benzer şekilde azalan bir dizinin terimleri içinden belirli bir kural ile seçilen terimlerin oluşturduğu dizinin de azalan bir dizi olacağı açıktır.*

Teorem 2.4.1. (1) (a_n) *dizisi azalmayan (artan) bir dizi ise her alt dizisi de azalmayan (artan) bir dizidir.*

(2) (a_n) *dizisi artmayan (azalan) bir dizi ise her alt dizisi de artmayan (azalan) bir dizidir.*

Teorem 2.4.2. (a_n) *dizisi bir a reel sayısına yakınsıyor ise bu dizinin her* (a_{n_k}) *alt dizisi de aynı a reel sayısına yakınsar.*

Sonuç 2.4.1. *Eğer* (a_n) *dizisinin iki alt dizisi iki farklı sayıya yakınsıyor ise* (a_n) *dizisi ıraksaktır.*

Sonuç 2.4.2. *Eğer* (a_n) *dizisinin ıraksak bir alt dizisi var ise* (a_n) *dizisi de ıraksaktır*

Tanım: (a_n) bir reel terimli dizi ve C de (a_n) dizisinin alt dizilerinin limitlerinin kümesi olsun. C genişletilmiş reel sayılar kümesinin bir alt kümesidir. $Sup(C)$ sayısına (a_n) dizisinin üst limiti denir ve $\lim Sup(a_n)$ veya $\overline{\lim}(a_n)$ sembollerinden biriyle gösterilir. $İnf(C)$ sayısına (a_n) dizisinin alt limiti denir ve $\lim İnf(a_n)$ veya $\underline{\lim}(a_n)$ sembollerinden biriyle gösterilir.

Örnek 2.5.3.

(1) $(a_n)=\left((-1)^{n-1}\dfrac{n}{n+1}\right)$ dizisi için

$$\lim\inf(a_n)=-1 \quad \text{ve} \quad \lim\sup(a_n)=1$$

olduğundan (a_n) dizisi ıraksaktır.

(2) $(a_n)=\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ dizisi için

$$\lim\inf(a_n)=1 \quad \text{ve} \quad \lim\sup(a_n)=1$$

olduğundan $(a_n)\to 1$ olup (a_n) dizisi yakınsaktır.

(3) $(a_n)=\left((-1)^n n^2\right)$ dizisi için

$$\lim\inf(a_n)\to-\infty \quad \text{ve} \quad \lim\sup(a_n)\to+\infty$$

olduğundan (a_n) dizisi ıraksaktır.

(4) $(a_n)=\left(\dfrac{(-1)^n}{n^3}\right)$ dizisi için

$$\lim\inf(a_n)=0 \quad \text{ve} \quad \lim\sup(a_n)=0$$

olduğundan $(a_n)\to 0$ olup (a_n) dizisi yakınsaktır.

(5) $(a_n) = (-n^2)$ dizisi için

$$\liminf(a_n) \to -\infty \quad \text{ve} \quad \limsup(a_n) \to -\infty$$

olduğundan (a_n) dizisi ıraksaktır.

2.6. Hemen-Hemen Eşit Diziler

Tanım 2.6.1. *(a_n) ve (b_n) dizilerini göz önüne alalım. $a_{k+n} = b_{t+n}$ olacak şekilde k ve t doğal sayıları varsa bu dizilere sonlu sayıdaki terimleri dışındaki terimleri eşit diziler veya hemen-hemen eşit diziler denir. Yani sonlu sayıdaki terimleri hariç diğer bütün terimleri eşit olan dizilere hemen-hemen eşit diziler adı verilir.*

Örnek 2.6.1. $a_n = \begin{cases} 2n+1, & n < 7 \\ \dfrac{1}{n}, & n \geq 7 \end{cases}$ ve $b_n = \begin{cases} 2n-1, & n < 9 \\ \dfrac{1}{n-1}, & n \geq 9 \end{cases}$ genel terimleri ile verilen (a_n) ve (b_n) dizileri hemen-hemen eşit dizilerdir.

Ayrıca (a_n) ve (b_n) sıfır dizisidir.

Teorem 2.6.1. (a_n) *ve* (b_n) *dizileri hemen-hemen eşit diziler olmak üzere* (a_n) *dizisinin limitinin a olması için gerek ve yeter şart* (b_n) *dizisinin limitinin de a olmasıdır.*

Dizilerin Sınırlılığı

Tanım 2.7.1. *Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $a_n \leq M$ *olacak şekilde* $M \in \mathbb{R}$ *sayısı varsa* (a_n) *dizisi üstten sınırlıdır denir.* (a_n) *dizisinin üst sınırlarının en küçüğüne en küçük üst sınır (eküs) denir ve* $ek\ddot{u}s(a_n)$ *ya da* $\sup(a_n)$ *ile gösterilir. Benzer şekilde her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $m \leq a_n$ *olacak şekilde* $m \in \mathbb{R}$ *sayısı varsa* (a_n) *dizisi alttan sınırlıdır denir.* (a_n) *dizisinin alt sınırlarının en büyüğüne en büyük alt sınır (ebas) denir ve* $ebas(a_n)$ *ya da* $\inf(a_n)$ *ile gösterilir.*

Hem alttan hem üstten sınırlı olan dizilere sınırlı diziler denir. Yani her $n \in \mathbb{N}$ *için* $|a_n| \leq M$ *olacak şekilde* $M \in \mathbb{R}^+$ *sayısı varsa* (a_n) *dizisi sınırlıdır.*

Örnek 2.7.1. $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ ve $(b_n) = \left(\frac{3n+1}{n}\right)$ dizileri sınırlıdır. Çünkü

$$|a_n| = \left|\frac{1}{n}\right| \le 1 \text{ ve } |b_n| = \left|\frac{3n+1}{n}\right| = \left|3 + \frac{1}{n}\right| \le 3 + \left|\frac{1}{n}\right| \le 3 + 1 = 4$$

tür.

Örnek 2.7.2. $a_n = 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$ şeklinde tanımlanan dizinin monotonluk ve sınırlılık durumunu inceleyiniz.

Çözüm. $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ olduğundan

$$a_n = 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}$$

dir. Bu durumda

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}>0$$

olup (a_n) dizisi artandır.

$a_n=2-\dfrac{1}{n+1}$ olduğundan her $n\in\mathbb{N}$ için $a_n<2$ olup (a_n) dizisi sınırlıdır. Burada $\dfrac{3}{2}\le a_n<2$ olduğuna dikkat edilmelidir.

Örnek 2.7.4.

(1) $(a_n)=\left(\dfrac{1}{n}\right)$ dizisinde her $n\in\mathbb{N}$ için $0<a_n\le 1$ dir.

(2) $(a_n)=\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ dizisinde her $n\in\mathbb{N}$ için $-1\le a_n\le\dfrac{1}{2}$ dir.

(3) $(a_n)=\left((-1)^n\right)$ dizisinde her $n\in\mathbb{N}$ için $-1\le a_n\le 1$ dir.

(4) $(a_n)=\left(\dfrac{n^2-1}{2}\right)$ dizisinde her $n\in\mathbb{N}$ için $a_n\ge 0$ dır.

Uyarı 2.7.1. (a_n) *ve* (b_n) *dizileri için*

(1) (a_n) *dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart* $(|a_n|)$ *dizisinin sınırlı olmasıdır.*

(2) (a_n) *ve* (b_n) *sınırlı diziler ise* $(a_n \mp b_n)$ *ve* $(a_n b_n)$ *dizileri de sınırlıdır. Ancak* $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ *dizisi sınırlı olmayabilir. (Örneğin* $(a_n)=\left(\dfrac{1}{n}\right)$ *ve* $(b_n)=\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ *sınırlı dizileri için* $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)=(n)$ *dizisi sınırlı değildir.)*

Teorem 2.7.1. (a_n) *dizisi yakınsak ise sınırlıdır.*

Teorem 2.7.2. (a_n) *dizisi monoton ve sınırlı ise yakınsaktır.*

Uyarı 2.7.2. *Sınırlı olmayan monoton bir dizi ıraksaktır.*

Teorem 2.7.3. $(a_n) \to a$ *ise* $(|a_n|) \to |a|$ *dır.*

Teorem 2.7.4. *Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $a_n \leq b_n$ *şartını sağlayan* (a_n) *ve* (b_n) *dizilerini ele alalım. Eğer* $(a_n) \to a$ *ve* $(b_n) \to b$ *ise* $a \leq b$ *dir.*

Teorem 2.7.5. *Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $0 \leq a_n$ *şartını sağlayan* (a_n) *dizisini ele alalım. Eğer* $(a_n) \to a$ *ise* $\left(\sqrt{a_n}\right) \to \sqrt{a}$ *dır.*

Teorem 2.7.6. (Sandviç Teoremi) *Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *şartını sağlayan* (a_n), (b_n) *ve* (c_n) *dizilerini ele alalım. Eğer* $(a_n) \to a$ *ve* $(c_n) \to a$ *ise* $(b_n) \to a$ *dır.*

Örnek 2.7.6. $\left(\frac{1}{2^n}\right) \to 0$ dır. Çünkü her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$ dir.

Örnek 2.7.7. $\left(\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\right) \to 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n < 1$ olduğu açıktır. Öte yandan Bernoulli eşitsizliğinden

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-n\cdot\frac{1}{n^2} = 1-\frac{1}{n}$$

yazılabilir. $(1) \to 1$ ve $\left(1-\frac{1}{n}\right) \to 1$ olduğundan Sandviç Teoremine göre $\left(\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\right) \to 1$ dir.

Tanım 2.8.1. (a_n), (b_n) *dizileri ve* $\alpha \in \mathbb{R}$ *sayısı verilmiş olsun.*

(1) $(a_n)+(b_n)=(a_n+b_n)$ *dizisine toplam dizisi,*

(2) $(a_n)-(b_n)=(a_n-b_n)$ *dizisine fark dizisi,*

(3) $(a_n).(b_n)=(a_n b_n)$ *dizisine çarpım dizisi,*

(4) $\alpha(a_n)=(\alpha a_n)$ *dizisine* $\alpha \in \mathbb{R}$ *ile* (a_n) *dizisinin çarpımı,*

(5) *Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $b_n \neq 0$ *olmak üzere* $\left(\dfrac{1}{b_n}\right)$ *dizisine* (b_n) *dizisinin çarpma işlemine göre tersi,*

(6) *Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $b_n \neq 0$ *olmak üzere* $\dfrac{(a_n)}{(b_n)}=\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ *dizisine bölüm dizisi adı verilir.*

Teorem 2.8.1. *Eğer* $(a_n)\to a$ *ve* $(b_n)\to b$ *ise* $(a_n+b_n)\to a+b$ *dir.*

Uyarı 2.8.1. *Iraksak iki dizinin toplamı yakınsak olabilir.*

Örneğin $(a_n)=\left(\dfrac{n^2}{n+1}\right)$ ve $(b_n)=(-n)$ *dizileri ıraksak olduğu halde* $(a_n+b_n)=\left(\dfrac{-n}{n+1}\right)\to -1$ *dir.*

Teorem 2.8.2. *Eğer* $(a_n)\to a$ *ve* $(b_n)\to b$ *ise* $(a_n b_n)\to ab$ *dir.*

Teorem 2.8.3. (a_n) *sıfır dizisi ve* (b_n) *sınırlı bir dizi ise* $(a_n b_n)\to 0$ *dır.*

Teorem 2.8.4. $(b_n)\to b$ *ve* $b\neq 0$ *olmak üzere her* $n\in\mathbb{N}$ *için* $b_n\neq 0$ *ise* $\left(\dfrac{1}{b_n}\right)\to\dfrac{1}{b}$ *dir.*

2.11. Cauchy Dizisi

Tanım 2.11.1. *Her* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *sayısına karşılık* $n(\varepsilon) \le n, m$ *için* $|a_n - a_m| < \varepsilon$ *olacak şekilde* ε *a bağlı bir* $n(\varepsilon)$ *doğal sayısı varsa* (a_n) *dizisine Cauchy dizisi denir*

Örnek 2.11.1. $(a_n) = \left(\frac{3n}{2n+1}\right)$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz.

Çözüm. (a_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu göstermek için her $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sayısına karşılık $n(\varepsilon) < m < n$ şartını sağlayan m ve n doğal sayıları için $|a_n - a_m| < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir $n(\varepsilon)$ doğal sayısının var olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır.

$$a_n = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2n+1}$$ şeklinde yazılabilir. $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ verilmiş olsun.

$n(\varepsilon) < m < n$ için

$$|a_n - a_m| = \left| \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2n+1} \right) - \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2m+1} \right) \right|$$

$$= \frac{3}{2} \left| \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2n+1} \right| \leq \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2n+1} \right)$$

dir. Buradan

$$\frac{3}{2} \left(\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2n+1} \right) < \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2n(\varepsilon)+1} + \frac{1}{2n(\varepsilon)+1} \right) = \frac{3}{2n(\varepsilon)+1}$$

elde edilir. $\frac{3}{2n(\varepsilon)+1}$ ifadesinin ε dan küçük olması için $n(\varepsilon)=\frac{3-\varepsilon}{2\varepsilon}$ şeklinde seçilmelidir. Bu durumda her $n(\varepsilon)<m<n$ için $|a_n-a_m|<\varepsilon$ ifadesi gerçeklenir. Yani (a_n) bir Cauchy dizisidir.

Örnek 2.11.2. $(a_n)=\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $a_n=\frac{3n-1}{3n+1}=1-\frac{2}{3n+1}$ şeklinde yazılabilir. $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ verilmiş olsun. $n(\varepsilon)<m<n$ için

$$
\begin{aligned}
|a_n-a_m| &= \left|\left(1-\frac{2}{3n+1}\right)-\left(1-\frac{2}{3m+1}\right)\right| \\
&= \left|\frac{-2}{3n+1}+\frac{2}{3m+1}\right| \le \frac{2}{3n+1}+\frac{2}{3m+1}
\end{aligned}
$$

dir. Buradan

$$\frac{2}{3n+1}+\frac{2}{3m+1}<\frac{2}{3n(\varepsilon)+1}+\frac{2}{3n(\varepsilon)+1}=\frac{4}{3n(\varepsilon)+1}$$

elde edilir. $\dfrac{4}{3n(\varepsilon)+1}$ ifadesinin ε dan küçük olması için $n(\varepsilon)=\dfrac{4-\varepsilon}{3\varepsilon}$ şeklinde seçilmelidir. Bu durumda her $n(\varepsilon)<m<n$ için $|a_n-a_m|<\varepsilon$ ifadesi gerçeklenir. Yani (a_n) bir Cauchy dizisidir.

Teorem 2.11.1. *Reel sayılardan oluşan bir (a_n) dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart (a_n) dizisinin Cauchy dizisi olmasıdır.*

Teorem 2.11.2. *Her Cauchy dizisi sınırlıdır.*

Uyarı 2.11.1. *Sınırlı olan her dizi Cauchy dizisi değildir. Örneğin $((-1)^n)$ dizisi sınırlıdır ancak Cauchy dizisi değildir.*

Teorem 2.11.3. *Bir Cauchy dizisinin her alt dizisi yine bir Cauchy dizisidir.*

Örnek 2.11.4. $(a_n)=\left(\dfrac{2n+1}{3n+2}\right)$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Çünkü

$\left(\dfrac{2n+1}{3n+2}\right)\to\dfrac{2}{3}$ tür.

Örnek 2.11.5. $(a_n)=\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right)$ dizisinin yakınsak olduğunu

(1) Limit tanımını kullanarak,

(2) Yakınsak dizilere ait hesaplama kurallarını kullanarak,

(3) Monoton dizilere ait özellikleri kullanarak,

(4) Cauchy dizisinin tanımını kullanarak gösteriniz.

Çözüm. **(1)** Her $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ sayısına karşılık $n(\varepsilon)<n$ şartını sağlayan n doğal sayıları için

$$\left|\frac{2n+1}{n+1}-2\right|<\varepsilon$$

olacak şekilde ε a bağlı bir $n(\varepsilon)$ doğal sayısının var olduğunu gösterirsek (a_n) dizisinin limiti 2 dir ve (a_n) dizisi yakınsak bir dizidir. $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sayısı verilmiş olsun.

$$\left|\frac{2n+1}{n+1}-2\right| = \left|-\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

olduğundan $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$ olup $n > \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ dur. Yani $n(\varepsilon) = \left[\!\left[\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]\!\right]$ olarak bulunur. Dolayısı ile (a_n) dizisi yakınsak bir dizidir.

(2) $a_n = \dfrac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$ olup $\left(\dfrac{1}{n}\right) \to 0$ olduğundan $(a_n) \to 2$ dir.

(3) $a_{n+1} - a_n = \dfrac{2(n+1)+1}{(n+1)+1} - \dfrac{2n+1}{n+1} = \dfrac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$ olduğundan (a_n) dizisi artan bir dizidir.

Ayrıca $a_n = \frac{2n+1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1} < 2$ olduğundan (a_n) dizisi üstten sınırlı bir dizidir.

(a_n) dizisi artan ve üstten sınırlı bir dizi olduğundan $(a_n) \to \sup(a_n)$ olup yakınsak bir dizidir.

(4) $a_n = 2 - \frac{1}{n+1}$ şeklinde yazılabilir. $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ verilmiş olsun. $n(\varepsilon) < m < n$ için

$$|a_n - a_m| = \left| \left(2 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(2 - \frac{1}{m+1}\right) \right|$$
$$= \left| \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} \right| \leq \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1}$$

dir. Buradan

$$\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n+1}\right)<\left(\frac{1}{n(\varepsilon)+1}+\frac{1}{n(\varepsilon)+1}\right)=\frac{2}{n(\varepsilon)+1}$$

elde edilir. $\frac{2}{n(\varepsilon)+1}$ ifadesinin ε dan küçük olması için $n(\varepsilon)=\left[\!\left[\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right]\!\right]$ şeklinde seçilmelidir. Bu durumda her $n(\varepsilon)<m<n$ için $|a_n-a_m|<\varepsilon$ ifadesi gerçeklenir. Yani (a_n) bir Cauchy dizisidir.

Dolayısıyla (a_n) dizisi yakınsak bir dizidir.

Fibonacci Dizisi

Ortaçağın en büyük matematikçilerinden biri olan Leonardo Fibonacci tarafından bulunan bu dizi tavşanlar ile ilgili bir problemin çözümünde ortaya çıkmıştır. Fibonacci tarafından yazılan ve Fibonacci Sayıları ile Altın Oran konularını anlatan "Liber Abaci" adlı kitaptaki problem şöyledir:

Tavşan Problemi: *Dört yanı duvarlar ile çevrili bir yere bir çift tavşan konulmuştur. Her bir çift tavşanın bir ay içinde yeni bir çift tavşan yavruladığı, her yeni çift tavşanın erginleşmesi için bir ay gerektiği ve tavşanların hiç ölmediği varsayılırsa 100 ay sonunda dört duvarın arasında kaç çift tavşan olur?*

Bu durumda tavşan çiftlerinin sayısı aylara göre şu sıralamayı ortaya koyar: **1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …**

Görüldüğü gibi ilk iki sayı hariç her sayı kendisinden önce gelen iki sayının toplamına eşittir. Bu sayılar,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\,,\; F_0 = F_1 = 1\,,\; n > 1$$

denklemi ile formüle edilebilir. Çünkü

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 1 = 2\,,$$

$$F_3 = F_2 + F_1 = 2 + 1 = 3\,,$$

$$F_4 = F_3 + F_2 = 3 + 2 = 5\,,$$

$$F_5 = F_4 + F_3 = 5 + 3 = 8\,,$$

$$F_6 = F_5 + F_4 = 8 + 5 = 13\,, \ldots$$

şeklindedir. Bu diziye Fibonacci Dizisi, dizinin terimlerine de Fibonacci Sayıları adı verilir.

Fibonacci sayı dizisindeki sayıların birbiriyle oranı olan ve Altın Oran denilen **1,618…** *sayısı doğada, sanatta ve hayatın her alanında görülen ve estetik ile bağdaştırılan bir sayıdır.*

$$\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\frac{13}{8},\frac{21}{13},\frac{34}{21},\frac{55}{34},\ldots \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}618\ldots$$

Altın Oran'a ilişkin matematik bilgisi ilk kez M. Ö. 3. yüzyılda Euclid in "Elementler" adlı yapıtında kayda geçmiştir. Mısırlılar ve Yunanlılar tarafından keşfedilmiş, mimaride ve sanatta kullanılmıştır. Tarihte, sanatçılar bu özelliği kullanıp göze hoş görünen eserler meydana getirmişlerdir. Örneğin Mona Lisa tablosunun boyunun enine oranı Altın Oran'ı verir. Altın Oran, matematik ve sanatta bir bütünün parçaları arasında gözlemlenen, uyum açısından en estetik boyutları verdiği sanılan geometrik ve sayısal bir oran bağıntısıdır.

Bir $[AB]$ doğru parçasının Altın Oran'a uygun biçimde iki parçaya bölünmesi gerektiğinde, bu doğru öyle bir C noktasından bölünmelidir ki $|AC|$ nin (büyük parçanın uzunluğunun), $|CB|$ ye (küçük parçanın uzunluğuna) oranı ile $|AB|$ nin (doğrunun bütününün uzunluğunun) $|AC|$ ye (büyük parçanın uzunluğuna) oranı eşit olmalıdır.

Şekil 2.12.2.

Bu oran φ ile gösterilir.

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033988749894... \ (\textit{Altın Sayı})$$

. Problemler

1. Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin limitlerini bulunuz.

(1) $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$ **(2)** $\left(\dfrac{n-2}{2n+3}\right)$ **(3)** $\left(\dfrac{2}{3n}\right)$

(4) $\left(\dfrac{n}{n^2+1}\right)$ **(5)** $\left(\dfrac{\sin n}{n^2}\right)$ **(6)** $\left(3-\dfrac{1}{3^{n-1}}\right)$

(7) $\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$ **(8)** $\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ **(9)** $\left(\dfrac{2n}{e^n}\right)$

(10) $\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$ **(11)** $\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}\right)$ **(12)** $\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)$

(13) $\left(\dfrac{n}{1+\sqrt{n}}\right)$ **(14)** $\left(\dfrac{3^n}{5^{n+1}}\right)$ **(15)** $\left(\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}\right)$

(16) $\left(\dfrac{3n^2-1}{n^2+3n}\right)$ **(17)** $\left(\dfrac{2n^2+3n-1}{5n^2+10}\right)$ **(18)** $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

(19) $\left(\dfrac{n^2+n-1}{3n^2+1}\right)$ **(20)** $\left(\dfrac{2n}{n!+n^3}\right)$ **(21)** $\left(\dfrac{1}{n!-3^n}\right)$

(22) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ **(23)** $\left(\dfrac{1+(-1)^n}{n}\right)$ **(24)** $\left(\dfrac{n}{n+2}-\dfrac{n+2}{n}\right)$

(25) $\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$ **(26)** $\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^n$ **(27)** $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$

2.13.2. Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin sınırlılık durumunu inceleyiniz.

(1) $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ **(2)** $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ **(3)** $\left(\dfrac{n^2-1}{2}\right)$

(4) $\left(\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)$ **(5)** $\left((-1)^n\right)$ **(6)** $\left(n^2\right)$

(7) $\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$ **(8)** $\left(1+2+3+\cdots+n\right)$

(9) $\left(\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\right)$

2.13.3. Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin monotonluk durumunu inceleyiniz.

(1) $\left(1-\dfrac{1}{n^3}\right)$ **(2)** $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ **(3)** $\left(\dfrac{n^3+1}{n^2}\right)$

(4) $\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)$ **(5)** $\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)$ **(6)** (n^3)

(7) $\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$

(8) $\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$

(9) $\left(\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\right)$

2.13.5. Aşağıdaki dizilerin alt ve üst limitlerini bulunuz.

(1) $\left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$ **(2)** $\left((-1)^n \dfrac{n}{n+2}\right)$ **(3)** $\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$

(4) $\left((-1)^n\right)$ **(5)** $\left(1+n^{(-1)^n}\right)$ **(6)** $\left(-n^2\right)$

2.13.9. Aşağıda genel terimi verilen dizilerin Cauchy dizisi olduğunu tanımı kullanarak gösteriniz.

(1) $\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)$ **(2)** $\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)$ **(3)** $\left(\dfrac{2n}{3n+1}\right)$

2.13.10. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + (-1)^n \dfrac{1}{n+1}$ şeklinde tanımlanan (a_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz.

2.13.11. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{n+1}$ şeklinde tanımlanan (a_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olmadığını gösteriniz.

KAYNAKLAR:

1. Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA, Analiz III Diziler ve Seriler, Dizgi Ofset, 2017.

2. G. B. Thomas ve Ark., Thomas Calculus I, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.