MATEMATİK 2

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2021

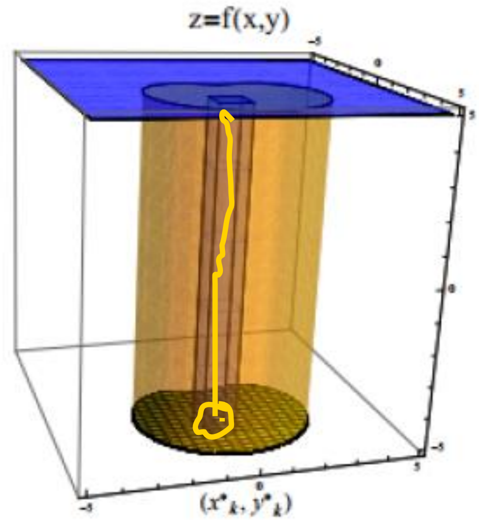
HACİM HESAPLARI

$z = f(x, y)$ fonksiyonunun uzayda bir yüzey tanımladığını bilmekteyiz. Buna göre *f(x,y)* , xoy düzleminde bir B bölgesi üzerinde sürekli ve pozitif bir fonksiyon iken f nin B bölgesi üzerindeki iki katlı integrali; xoy düzlemi üzerinde alt taraftan *z=0* düzlemiyle, üst taraftan *f(x,y)* yüzeyi ile, yanal yüzeyi de silindirik bir yüzeyle çevrilmiş bir silindirin hacmi olarak yorumlanabilir (Bkz. Şekil 1). Bu durumda hacim;

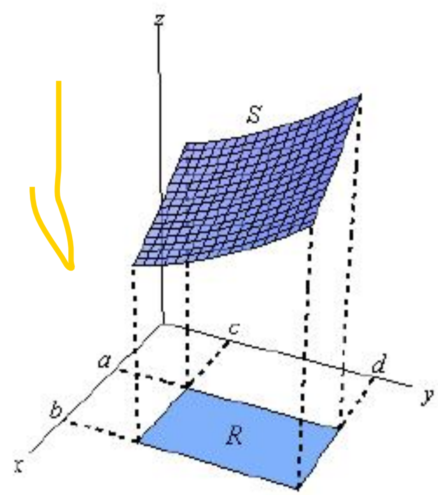
$$Hacim = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k = \iint_B f(x, y)dA$$

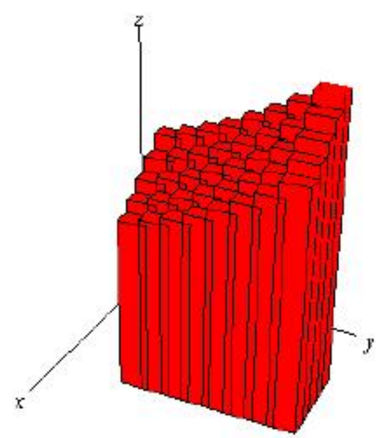
$$V == \iint_B f(x, y)dA$$

dir. Yukarıdaki eşitlik hacmin, taban alanı ΔA_k, yüksekliği $f(x_k, y_k)$ olan dik silindirlerin hacimleri toplamı olduğunu söyler. Bu integralin var olabilmesi için; *f(x,y)* fonksiyonunun B bölgesinde sürekli ve pozitif tanımlı olması gerektiği aşikardır.



Şekil 1.

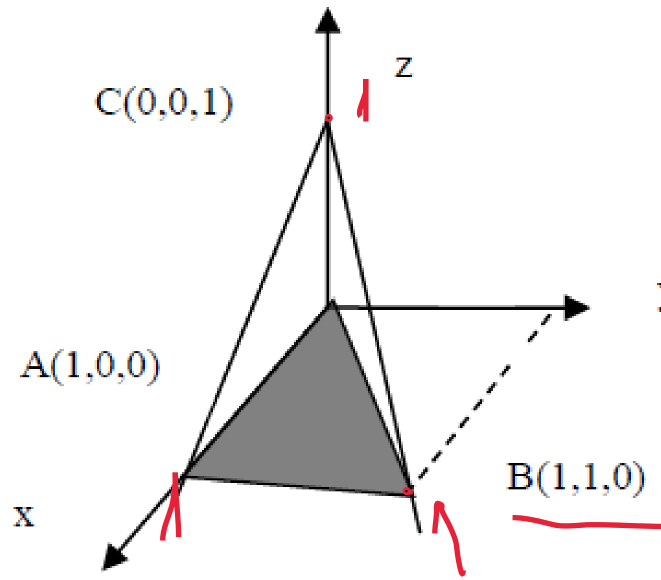




Örnek 1. Köşeleri O(0,0,0), A(1,0,0), B(1,1,0), C(0,0,1) olan piramidin hacmini veren iki katlı integrali ifade ediniz. (Bkz. Şekil)

Çözüm:

B



Hacmi aranan cismin xoy düzlemindeki iz düşümü şekilde de görüldüğü gibi; $y=0$, $x=1$, $y=x$ doğruları ile sınırlanan bölgedir. Bu bölgeyi üst taraftan örten yüzey denklemi ise $x=1$ ve $z=1$

$z = 1 - x$

noktalarından geçen doğruyu kapsayan düzlem yani; $z + x = 1$ düzlemidir. Buna göre istenen piramitin hacmi;

$$V = \int_0^1 \int_y^1 (1-x)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^x (1-x)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[y - xy \Big|_0^x \right] dx$$

$$= \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{x^2}{2} -$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$$

biçiminde verilebilir.

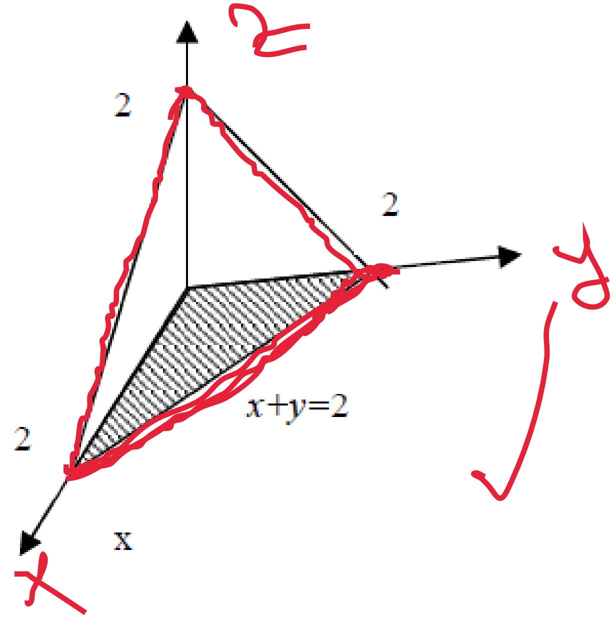
Örnek 2. Hacmi; $V=\int_0^2\int_0^{2-x}(2-x-y)\,dy\,dx$ iki katlı integrali ile hesaplanabilen cismi çiziniz.

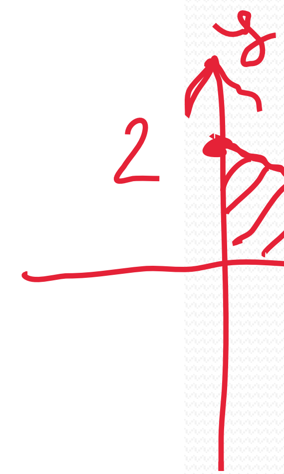
Çözüm: İntegrasyon sınırlarından; $x=0$, $x=2$ doğruları arasında kalan ve $y=0$ ' ın üstünde, $y=2-x$ doğrusunun altındaki B bölgesinin; hacmi aranan cimin xoy düzlemindeki izdüşümü olan bölge olduğunu görülmektedir. İntegrasyon içindeki fonksiyon ise; yukarıda bahsedilen B bölgesinin üst taraftan

$z=2-x-y$ düzlemi ile sınırlandığını anlatmaktadır. Bu düzlem denklemi; eksenleri $x=2$, $y=2$, $z=2$ noktalarında kesen düzlemdir. Buna göre;

$z=2-x-y$

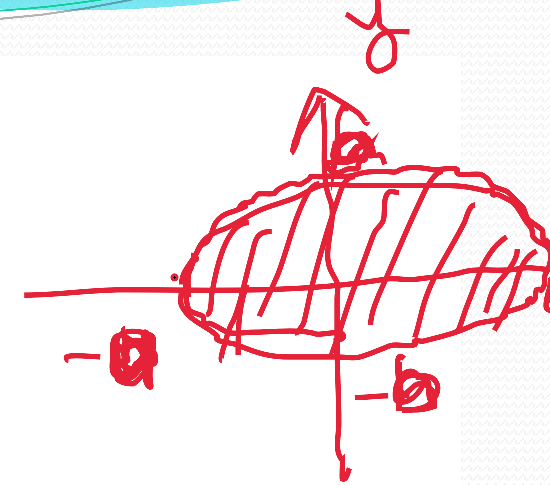
$B=\{(x,y)$





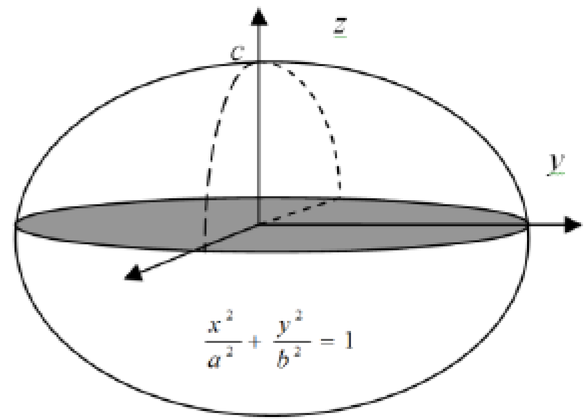
olup, bu yukarıdaki integral ile verilen cisimdir.

$x = \mp \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$



Örnek 6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ elipsoidinin hacmini hesaplayınız.

Çözüm: Hacmi aranan elipsoid aşağıda verilmiştir.



$B = \{(x,y)$

Bu tür cisimlerin hacimleri bulunurken önceki bölümlerde olduğu gibi simetri özelliğinin kullanılması tercih edilmelidir. Yani; cismin $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ daki hacminin bulunması yeterlidir. Cismin $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ daki kısmının xoy deki izdüşümü olan integrasyon bölgesi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsinin birinci dördüldeki kısmıdır. Bu bölgeyi de üstten örten yüzey denklemi ;

$$z = f(x,y) = c\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}$$

$B = \{(x,y) : -b$

dir. Buna göre istenen hacim;

$$V = 8\int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dydx$$

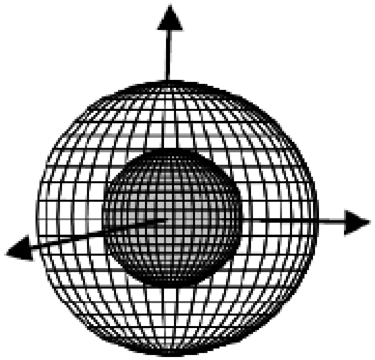
dır.Burada, $\left.\begin{array}{l} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{array}\right\}$ homotetik dönüşümü uygulanırsa, parametrelerin değişim aralıkları ve dönüşümün Jakobiyeni $j = abr$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ olur.

$$V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 c\sqrt{1-\frac{\cancel{a^2}r^2\cos^2\theta}{\cancel{a^2}}-\frac{\cancel{b^2}r^2\sin^2\theta}{\cancel{b^2}}}\,abrdrd\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 abcr\sqrt{1-r^2}\,drd\theta$$

$$V = -\frac{8}{3}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left((1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 d\theta = \frac{4}{3}\pi abc\ br^3$$ elde edilir.

Örnek 7. $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ eşitsizlikleri ile tanımlanan bölgenin hacmini hesaplayınız.

Çözüm:



Şekilde de görüldüğü gibi $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ eşitsizliği ile verilen cisim; yarıçapı 3 olan kürenin içinde yarıçapı 1 olan kürenin dışında kalan bölgedir. Başka bir değişle istenen hacim; yarıçapı 3 olan kürenin hacminden, yarıçapı 1 birim olan kürenin hacminin çıkarılması ile bulunur.

$$V = \int_{-3}^{+3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} 2\sqrt{9 - x^2 - y^2}\, dydx - \int_{-1}^{+1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dydx$$

$$V=\int_{-3}^{+3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} 2\sqrt{9-x^2-y^2}\,dydx-\int_{-1}^{+1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2-y^2}\,dydx$$

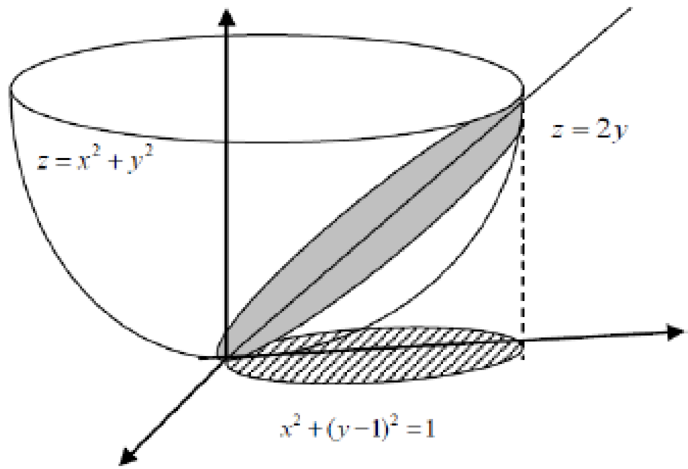
$$V=2\int_0^{2\pi}\int_0^{3}\sqrt{9-r^2}\,rdrd\theta-2\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\sqrt{1-r^2}\,rdrd\theta$$

$$V=2\int_0^{2\pi}[-\frac{1}{3}(9-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 d\theta-2\int_0^{2\pi}[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 d\theta$$

$$V=18\int_0^{2\pi}d\theta-\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{104\pi}{3}br^3$$

Örnek 10. $z = x^2 + y^2$ paraboloidinden $z = 2y$ yüzeyinin ayırdığı cismin hacmini hesaplayınız.

Çözüm: Verilen yüzeylerin sınırladıkları bölge,



yüzeylerin ortak çözümünden, $2y = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$ çemberinin sınırladığı B bölgesinin cismin xoy deki iz düşüm bölgesi olduğu bulunur. O halde aranan hacim,

$$V = \iint_B [2y - (x^2 + y^2)]dxdy$$

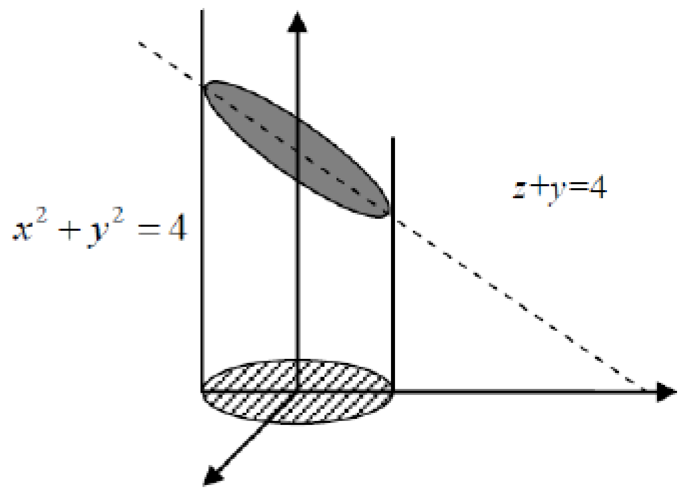
dir. B bölgesi dairesel bir bölge olduğundan kutupsal koordinatlara geçildiğinde;

$$V=\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}(2r\sin\theta-r^2)rdrd\theta=\int_0^{\pi}\left(\frac{2}{3}r^3\sin\theta-\frac{r^4}{4}\right|_0^{2\sin\theta}d\theta=\int_0^{\pi}\frac{4}{3}\sin^4\theta\, d\theta=\frac{\pi}{8}\,br^3$$

elde edilir.

Örnek 11. $x^2+y^2=4$ silindiri ve $z=0$, $y+z=4$ düzlemleri ile sınırlanan cismin hacmini hesaplayınız. (Bkz. Şekil)

Çözüm: Verilen yüzeyler ile sınırlanan cisim,



yukarıdaki şekildeki gibidir. Bu cismin *xoy* düzlemine izdüşümü $x^2 + y^2 = 4$ dairesidir. Kutupsal koordinatlara geçilirse,

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} için \; |J| = r \;,\; 0 \le r \le 2 \;,\; 0 \le \theta \le 2\pi$$

olup,

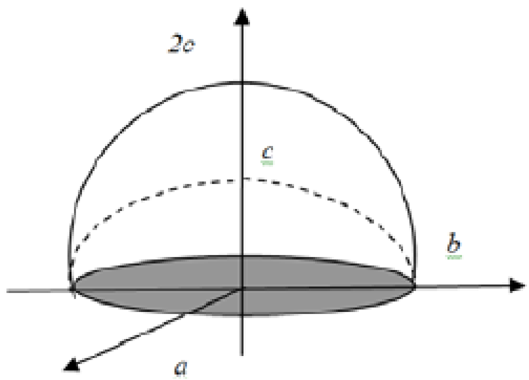
$$V = \iint_B (4-y)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 - r\sin\theta)rdrd\theta = \int_0^{2\pi} [2r^2 - \frac{r^3}{3}\sin\theta\Big|_0^2 d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi}\left(8 - \frac{8}{3}\sin\theta\right)d\theta = 16\pi br^3$$

elde edilir.

Örnek 13. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{4c^2}=1$ $(z \geq 0)$ yarım elipsoidi ile üstten, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ yarım elipsoidi ile alttan sınırlanan cismin hacmini hesaplayınız.

Çözüm: Verilen elipsoidlerin sınırladığı cismin hacmi,



$$V=\iint_B \left(2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right)dxdy$$

dir. Elipsoid yüzeylerinin xoy düzlemindeki izdüşümü $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsi olup homatetik koordinatlara geçilirse, $\left.\begin{array}{l} x=ar\cos\theta \\ y=br\sin\theta \end{array}\right\}$ *için* $|J|=abr$, $0\leq r\leq 1$, $0\leq\theta\leq 2\pi$

olur. Buradan;

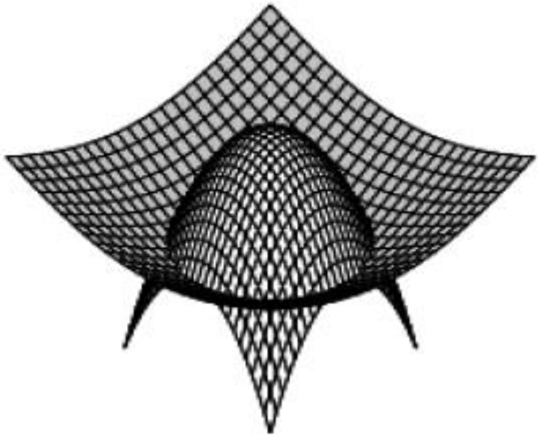
$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^1 (2c\sqrt{1-r^2}-c\sqrt{1-r^2})abrdrd\theta = abc\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}rd\,\rho d\theta$$

olur.

$$=abc\int_0^{2\pi}[-\frac{1}{3}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 d\theta = \frac{2}{3}\pi abc\; br^3$$

Örnek 14. $z=x^2+9y^2$ ve $z=18-x^2-9y^2$ paraboloidleri ile sınırlanan cismin hacmini hesaplayınız.

Çözüm:



Paraboloidlerin kesişim eğrisinin, $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ elipsi olduğu yüzeylerin ortak çözümlerinden kolaylıkla bulunabilir. Buna göre;

$$V=4\int_0^1\int_0^{\sqrt{9-9y^2}}[(18-x^2-9y^2)-(x^2+9y^2)]dxdy=4\int_0^1\int_0^{\sqrt{9-9y^2}}(18-2x^2-18y^2)dxdy$$

$$V=4\int_0^1[18x-\frac{2}{3}x^3-18xy^2\Big|_0^{\sqrt{9-9y^2}}dy$$

$$V=4\int_0^1\left[18\sqrt{9-9y^2}-\frac{2}{3}(9-9y^2)\sqrt{9-9y^2}-18y^2\sqrt{9-9y^2}\right]dy$$

$$V=144\int_0^1\left(1-y^2\right)^{\frac{3}{2}}dy=144\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta=144\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{1}{4}(1+\cos 2\theta)^2]d\theta=36\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)d\theta=27\pi\ \ br^3$$

Örnek 15. $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\le 0)$ yarım küre yüzeyi ile alttan, $z=a-\sqrt{x^2+y^2}$ konisi ile üstten sınırlanan cismin hacmini hesaplayınız.

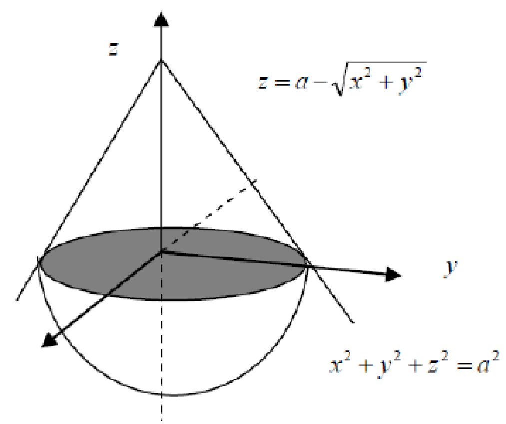
Çözüm: Hacmi aranan cismin xoy düzlemindeki izdüşümü $x^2+y^2=a^2$ dairesidir. Bölge dairesel olduğundan kutupsal koordinatlara geçilirse;

$$V=\iint\limits_B \left(a-\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)dxdy$$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^a (a-r+\sqrt{a^2-r^2})rdrd\theta$$

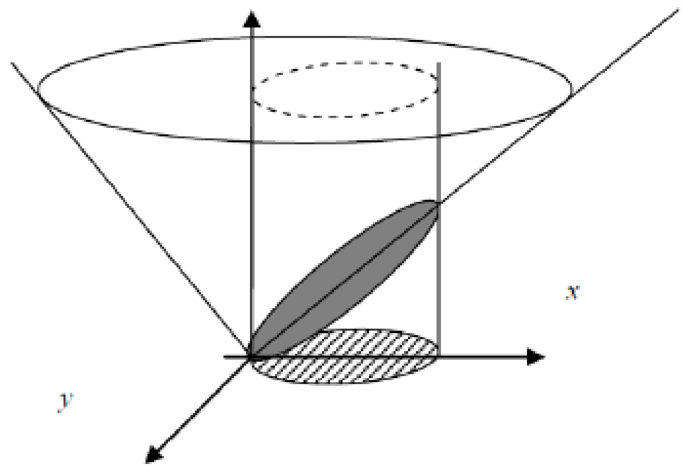
$$V=\int_0^{2\pi}\left[\frac{a}{2}r^2-\frac{1}{3}r^3-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right|_0^a d\theta=\frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}d\theta=a^3\pi br^3$$

tür.



Örnek 16. Denklemi $z=\sqrt{x^2+y^2}$ olan koni yüzeyi ile üstten, $x^2+y^2-2x=0$ olan dik silindirleri ile yanlardan ve $z=0$ düzlemi ile de alt taraftan sınırlanan cismin hacmini hesaplayınız.

Çözüm:



$x^2+y^2-2x=0$ eğrisinin xoy de sınırladığı bölgenin kutupsal koordinatlardaki karşılığı,

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\theta \\ y&=r\sin\theta \end{aligned}\right\} \text{\textit{için}}\ j=r\ ,\ 0\le r\le 2\cos\theta\ ,\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

olup,

$$V=\iint_B \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} r\, r\,drd\theta = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\Big|_0^{2\cos\theta} d\theta$$

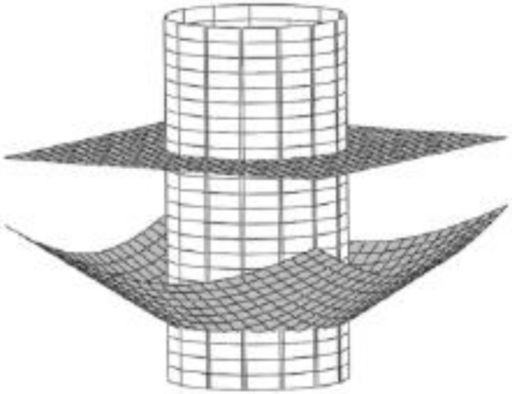
$$V=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\cos^3\theta d\theta = \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta(1-\sin^2\theta)d\theta$$

$$V=\frac{16}{3}\left(\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{32}{9}\,br^3$$

elde edilir.

Örnek 17. $x^2+y^2=1$ silindirinin içinde, $z=\sqrt{x^2+y^2}$ nin üstünde $z=4$ düzleminin altında kalan cismin hacmini bulunuz. (Bkz.Şekil)

Çözüm:



$V=\iint\limits_{B}\left(4-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$ olup, B bölgesi dairesel bölge olduğundan;

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{1}(4-r)rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\left(2r^2-\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 d\theta=\frac{10}{3}\pi br^3 \quad \text{olur.}$$

Kaynaklar:

1. A. H. Berksoy, O. Özkan, Mühendisler İçin Çözümlü Kalkülüs, S.Ü. Basımevi, 2010
2. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus II**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2010.
3. J. Stewart, Kalkülüs Kavram ve Kapsam (Diferansiyel ve İntegral Hesap), TÜBA, 2010.