– Gruplar –

Cebirsel Yapı ⇒ Bir küme üzerinde bir veya daha fazla ikili işlem tanımlanmış ise bu ikili işlemler ile birlikte o kümeye cebirsel yapı denir.

$\langle A, * \rangle$ A kümesi ve onun üzerinde $*$ işlemi

$\langle A, *, \Delta \rangle$ A kümesi ve onun üzerinde $*$ ve Δ işlemi

Grup $G \neq \emptyset$ bir küme ve $*$ G üzerinde bir ikili işlem

G_0 Kapalılık $(x, y \in G \Rightarrow x * y \in G)$

G_1 Birleşme $((x * y) * z = x * (y * z))$

G_2 Birim eleman $(a * e = a$ ve $e * a = a)$

G_3 G deki her elemanın $*$ işlemine göre tersi varsa $(a * a^{-1} = e$ ve $a^{-1} * a = e)$

G_0 ve G_1 sağlıyorsa Yarı Grup
G_0 G_1 ve G_2 sağlıyorsa monoid
G_0 G_1 G_2 ve G_3 sağlıyorsa Grup
} denir.

! $(G, *)$ bir grup ve $\forall\, a, b \in G$ için $a * b = b * a$ ise G'ye değişmeli grup denir.

Örnek $(\mathbb{Z}^+, +)$ grup mu?

✓ G_0 $2, 3 \in \mathbb{Z}^+$ $2+3=5$ $\mathbb{Z}^+$

✓ G_1 $(x+y)+z = x+(y+z)$

✗ G_2 $a+e=a$ $e+a=a$ $e=0 \notin \mathbb{Z}^+$ Yarı Grup,

G_3 Birim eleman değilse tersilik aranmaz

Permütasyon (simetrik) Grup

n elemanlı bir kümenin kendi üzerine 1-1 fonk. n'li permütasyon denir. Bu n'li permütasyonların tümünün oluşturduğu bileşke işlemine göre grup olur. Bu gruba permütasyon grubu denir S_n ile gösterilir.

$f(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ permütasyona k uzunluğunda bir devir denir.

Uzunluğu 1 olan devirlere özdeşlik fonk. denir.

$f \in S_n$ permütasyon mertebesi ayrık devirlerin ekokudur.

Örnek $f\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (1)\ (25)\ (346) = \underbrace{(25)}_{2}\underbrace{(346)}_{3}$

f nin uzunluğu $\text{Ekok}(2,3) = 6$

Örnek Ayrık olmayan devri ayrık olarak yazma

$(123456)\ (3456) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1235)(46)$

! Sağdan sola olacak şekilde

Eşlenik Eşit uzunlukta iki permütasyon olması yeterli

örnek $f\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$'nin $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ ile eşleniği

$\underline{f(1,3,4)(2,5)}$ tanım $\quad \underline{\sigma\ (1,3)(2,4,5)}$ sonuç $\Rightarrow f\sigma^{-1} = (134)(25) = (315)(42)$

2

Örnek $\langle \mathbb{Z}^+, . \rangle$ grup mu?

✓ G_0 $2,3 \in \mathbb{Z}^+$ $2.3 = 6 \in \mathbb{Z}^+$

✓ G_1 $((a.b).c = a.(b.c))$ monoid

✓ G_2 Birim eleman 1

✗ G_3 $a.a^{-1} = 1$ $a^{-1}.a = 1$

▽ G sonlu bir küme ise $(G, *)$ grubuna sonlu grup denir

$G = \{1, -1, i, -i\}$ sonlu bir gruptur ve mertebesi $|G| = 4$'tür.

Örnek Her $a, b \in \mathbb{R}^+$ için $a * b = \frac{a.b}{3}$ olsun. $\langle \mathbb{R}^+, * \rangle$ grup mu?

Birleşme: $(a*b)*c = a*(b*c) \Rightarrow \dfrac{\frac{ab}{3}.c}{3} = \dfrac{a\frac{bc}{3}}{3}$ ✓

Birim eleman: $a * e = a$ $\boxed{e=3}$

$e * a = a$ $\boxed{e=3}$

Ters Eleman: $a^{-1} * a = e$ $\frac{a^{-1}.a}{3} = 3$ $a^{-1} = 9/a \leftarrow \mathbb{R}^+$ Her elemanın tersi var

$a * a^{-1} = e$ $\frac{a\,a^{-1}}{3} = 3$ $a^{-1} = 9/a$

Örnek Her $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ için $a * b = a + b + ab$ olsun. $\langle \mathbb{R} \setminus \{-1\}, * \rangle$ Abel grup kontrol?

Birleşme özelliği

$(a*b)*c = a*(b*c)$

$a+b+ab+c+ac+bc+abc$

$=$

$a+b+c+bc+ab+ac+abc$

✓

Birim eleman

$a * e = a$

$e * a = a$

$a+e+ac = a$

$\boxed{e=0}$

✓

Ters olması

$a^{-1} * a = 0$

$a * a^{-1} = 0$

$\boxed{a^{-1} = \frac{-a}{1+a}}$

✓

▽ Değişme özelliği

$a * b = b * a$

$a+b+ab = b+a+ba$

✓

Abel grup

3

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus 0$

Cayley Tabloları

$G(e, a, b, c)$ kümesini ve aşağıda tanımlanan $*$ işlemini göz önüne alalım

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Her satırda ve her sütunda her eleman 1 kez yazılacak

∃ birim eleman

Homomorfizma ve izomorfizma

$(G, *)$ ve (H, Δ) iki grup olsun. $f: G \to H$ bir fonksiyon olsun.

$f(a*b) = f(a) \Delta f(b)$ ise f'ye homomorfizma denir.

f birebir ve örten ise izomorfizma denir

G grubu kendi üzerine bir izomorfizma ise ($f: G \to G$) f'ye otomorfizma denir.

Örnek $\mathbb{R}^*$ da tanımlı $f(x) = 3x$ fonk. homomorfizma mı?

$\forall a, b \in \mathbb{R}^*$ $f(a.b) = f(a).f(b)$ olmalı

$f(a.b) = 3ab = \underset{f(a)}{\underline{3a}}\ b \neq f(b)$ homomorfizma değil

Örnek $(G, \cdot)$ ve $(\mathbb{Z}, +)$ grupları verilsin. $f: G \to \mathbb{Z}$ $\forall a^k \in G$ için $f(a^k) = k$

$k \in \mathbb{Z}$ olsun f'nin izomorfizma old. göster

$\forall a^s, a^t \in G$, $s, t \in \mathbb{Z}$ için $f(a^s.a^t) = f(a^{s+t}) = s+t$ } homomorfizma

$f(a^s) = f(a^t) \Rightarrow a^s = a^t$ (1-1)

Örten mi?

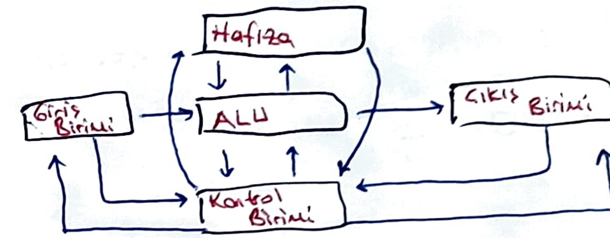
$\forall k \in \mathbb{Z}$ için $f(a^k) = k$ old. için örten

Sağlamayan değer yok

Graf

①

Bilgisiyarın temel işleyiş modülü



Nesneleri olayları süreçleri gerçeklerden soyutlaştırarak yalnız birimler ve bunlar arasındaki ilişkileri gösteren yapıya graf denir.

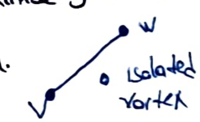
Yönsüz (undirected) bir graf

boş olmayan sonlu sayıda düğümlerden ve düğümler arasında bulunan sonlu sayıda bulunan kavisler kümesinden oluşur.

Kenarlar (Edges)

Kenar bir çift düğüm ile etiketlenmiş olup $e=(v,w)$ şeklinde gösterilir.

Ayrık düğüm (Isolated Vortex) kenar bağlantısı olmayan düğüm.



Paralel Kenarlar

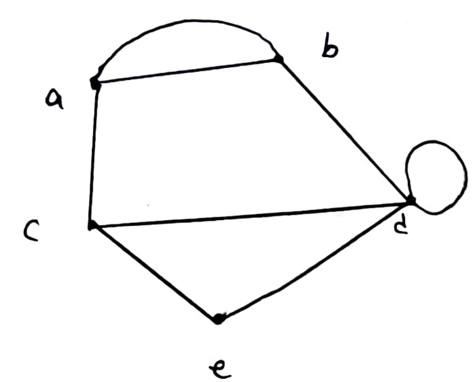
iki veya daha fazla kenar bir düğüm çifti ile bağlanmıştır.

a ve b iki paralel kenar ile birleşti.

Döngüler (Loops)

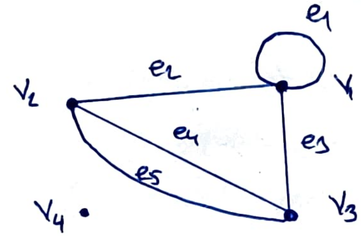
Kenarın başlangıç ve bitiş nok. aynı düğümdür

d düğümü gibi



③

- Yönsüz bir grafta, herhangi 2 düğümü bağlayan en az bir kavis varsa, bu 2 düğüm komşu düğümdür. → V_1, V_2



- Yönsüz bir grafta herhangi 2 kavisin en az 1 ortak düğüm noktası varsa, bu 2 kavis komşu kavistir. → e_2, e_3
- Kavis kümesi boş olan grafa tamamen bağlı olmayan graf denir.
- Tek düğümden veya tek graftan oluşan grafa ilkel graf denir.

Düğüm Derecesi

Yönsüz bir grafta bir düğümün derecesi $\sigma(V)$. Aksi belirtilmedikçe loop kavis dereceyi 2 artırır.

$\sigma(V_1)=4$ $\sigma(V_2)=3$ $\sigma(V_3)=3$ $\sigma(V_4)=0$

$\sigma(V_i)=0$ ise V_i izole edilmiş veya tek düğüm denir.

$\sigma(V_i)=1$ ise bu tip düğümlere pendant ya da uç düğüm denir.

Bütün kavislerin oluşturduğu kümeye çakışım kümesi denir.

Tüm düğümlerin derecesi aynı olan ve r derecesine sahip bir yönsüz graf "r dereceli düzenli graf veya r derece denir.

④

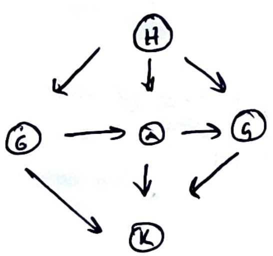
$G=(V,E)$ Yönsüz bir graf olsun. G grafı için

$$\sum_{i=1}^{|V|} \sigma(v_i) = 2|E|$$

Yönlü Graf

Her bir kenarı sıralı bir düğüm çifti ile ilişkilendirilmiş ve her kenarı yönlüdür.

Yönlendirilmiş Yönlendirilmemiş Karışık Graf



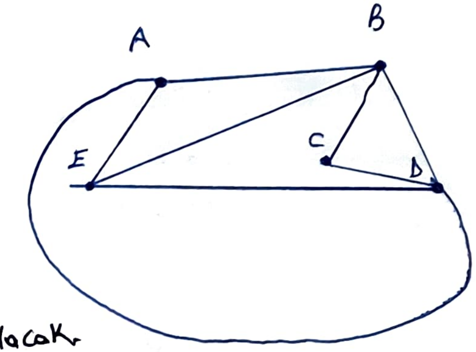
Kavislerin bir tepeden çıkıp diğerine gitmesinin gösterilmesi gerekir. Bu durum 1 okla gösterilir.
Bu kaviste yönü oku varsa buna yönlendirilmiş ya da yönlü graf denir.
(Yönlü graf = Digraph)

Eğer grafta hem yönlendirilmiş hem de yönlendirilmemiş kavis varsa bu grafa karışık graf denir.

②

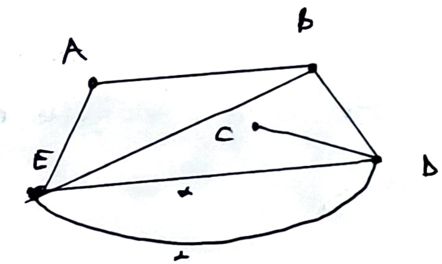
Basit Graf

- Paralel kenar olmayacak.
- Döngü olmayacak.
- Kenarların değeri olmayacak.
- 〃 yönü 〃
- Düğüm ve kenar sınıfa ayrılmayacak.



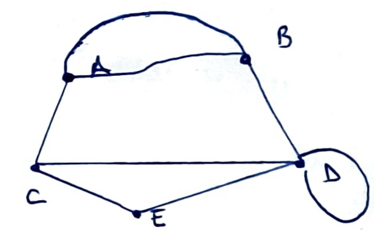
Çoklu Graf

İki ya da daha fazla düğüm arasında birden fazla hat (paralel hat) bu tür graflara çoklu graf denir.
Çoklu graf da yönsüz ve çevrimsiz.



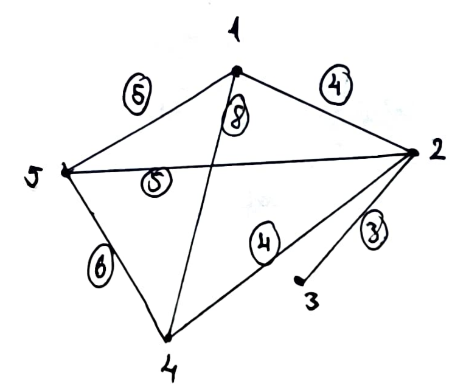
Pseudo Graf

Yönsüz paralel kenar döngü içerir.
Yönsüz grafların en temel hali.



Ağırlıklı Graf

Her bir kenarına nümerik bir değer, ağırlık verilmiş bir graftır.



Paralel Kenar 2 veya daha fazla kenar bir düğüm çifti ile bağlı.
Döngü Kenarın başlangıç ve bitiş nok. aynı düğümdür.
Basit graf Paralel kenar - döngü - kenarların değeri - kenarların yönü olmayacak. Düğüm ve kenarlar sınıfa ayrılmayacak.

Çoklu graf Basit graf + paralel hat.

Pseudo graf Yönsüz + paralel kenar + döngü içeren

Düğüm derecesi Düğüme bağlı olan kavis sayısı + (Loop +2 olur)

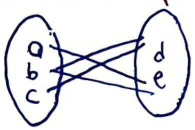
Düğüm " 0 ise izole edilmiş 1 ise pendant (uç düğüm)

Dereceler toplamı kavis sayısının 2 katıdır.

Tam Graf Yönsüz grafta düğüm=n kavis s.= $\frac{n(n-1)}{2}$ derece$(n-1)$

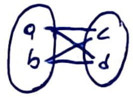
Platon Graf r dereceli düzenli grafların çok yüzlü olanı

Bipartite Graf



$V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$
$V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$

Tam Bipartite Graf



2 düğümünde farklı alt kümelerin elemanı olmak şartında

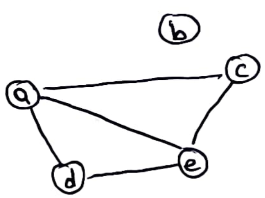
Planar Graf Grafın kenarlarını birbirini kesmeyecek şekilde çizmesi

Alt Graf Ana grafın tüm düğümleri + bazı kenarlar

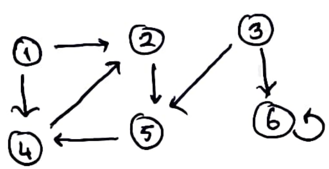
Çember Graf $n \geq 3$ △ □ ⬠

Tekerlek Graf Çember grafın ortasında düğüm olan

Graf Komşuluk Lis.

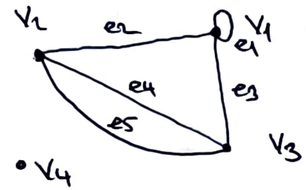


a → c, d, e
b →
c → a, e
d → a, e
e → a, c, d



1 → 2 → 4 → /
2 → 5 → /
3 → 6 → 5 → /
4 → 2 → /
5 → 4 → /
6 → 6 → /

Yönsüz Graflarda Komşuluk Matrisi

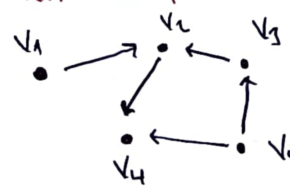


	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	1	1	1	0
V_2	1	0	2	0
V_3	1	2	0	0
V_4	0	0	0	0

δV_1 2+1+1=4
δV_2 1+2=3
δV_3 1+2=3
δV_4 0

Komşuluk matrisi simetrik

Yönlü Graflarda Komşuluk Matrisi



	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
V_1	0	1	0	0	0
V_2	0	0	0	1	0
V_3	0	1	0	1	0
V_4	0	0	0	0	0
V_5	0	0	1	1	0

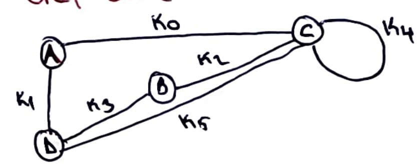
indegree

V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
0	2	1	2	0

outdegree

V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
1	1	1	0	2

Graf Bitişiklik Matrisi



Komşuluk M.

	A	B	C	D
A	0	0	1	1
B	0	0	1	1
C	1	1	1	1
D	1	1	1	0

	K_0	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
A	1	1	0	0	0	0
B	0	0	1	1	0	0
C	1	0	1	0	1	1
D	0	1	0	1	0	1

Yol Bir düğümden diğerine giderken izlenecek yol

Basit Yol Ancak ve ancak bir düğüm bir yolda birden fazla kullanılmamış.

Uzunluk Kenarların uzunlukları toplamı.

Bağlı Graf Tüm düğümler arasında en az 1 yol varsa bağlı graf.

Bağlı olmayan Graf 2 düğüm arasında yol yoksa. bağlı olmayan graf

Euler Graf Tüm kavislerden 1 kere geçmek şartıyla başlangıca geri dönülmesi.

Tüm kavisleri dolaşıp 1 kere geçerek başladığı ve bittiği konum farklıysa

Yarım euler graf.

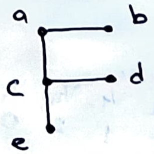
Euler formülü $v - e + f =$ euler

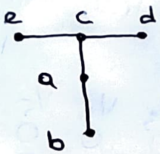
v: düğüm, e: kavis, f: bölge (dışarıda sayılır)

Hamilton Graf

Bir kavisten birden fazla geçmeden tüm düğümlere 1 kez gelerek kapalı yola denir.

İzomorfik Graf Kavislerde değişiklik yapmadan birbirine dönüşen graf

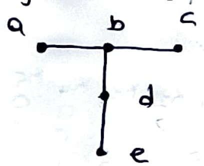


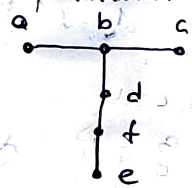


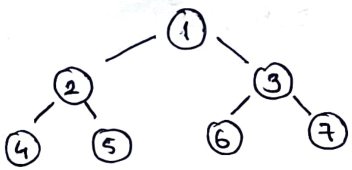
Düğüm kavis bileşen sayısı eşit

Birbirine karşılık gelen düğümler aynı derece

Homeomorfik Graf Bir graf diğer bir grafın kavislerine, derecesi 2 olan düğümler ekleyerek ya da çıkararak aynı grafın elde edilmesi







inorder 4 2 5 1 6 3 7

Preorder 1 2 4 5 3 6 7

Postorder 4 5 2 6 7 3 1