

MATEMATİK 2

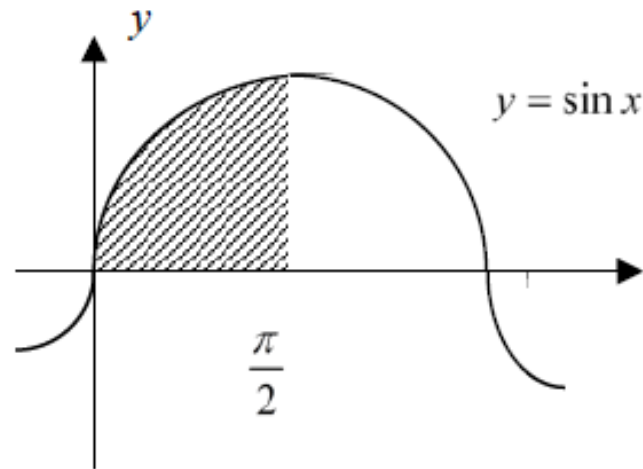
**Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü**

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2021

Örnek 21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin x} f(x, y) dy dx$

Çözüm: İntegralin tanımlamış olduğu bölge aşağıdaki taralı bölgedir . Buna göre,



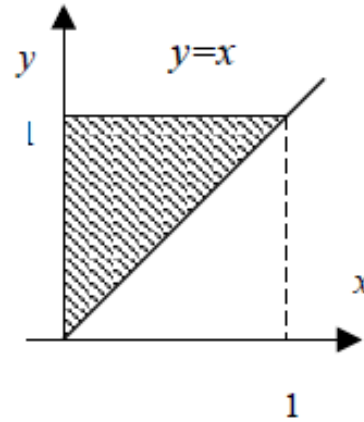
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin x} f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx dy \text{ dir.}$$

Aşağıdaki Örnek 22-Örnek 47. deki iki katlı integralleri verilen bölgeler üzerinde hesap ediniz.

Örnek 22. B bölgesi; köşeleri $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(0,1)$ olan üçgen ise

$$\iint_B x dx dy = ?$$

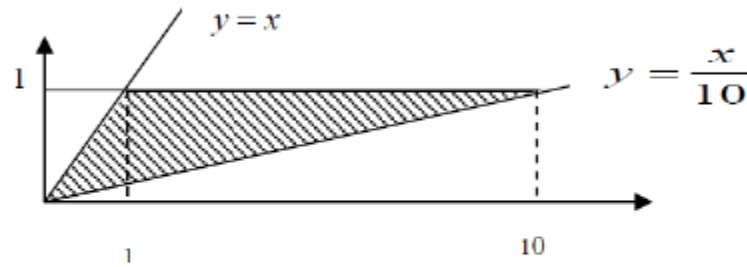
Çözüm: İntegrasyon bölgesi aşağıdaki şekilde gibidir.



Buna göre; $I = \int_0^1 \int_0^y x dx dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^y dy = \int_0^1 \frac{y^2}{2} dy = \left[\frac{y^3}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$ olur.

Örnek 24 B bölgesi; köşeleri $O(0,0)$, $A(10,1)$, $B(1,1)$ olan üçgen ise $\iint_B \sqrt{xy - y^2} dx dy = ?$

Çözüm:



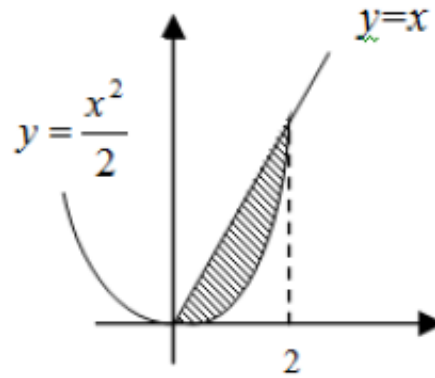
integrasyon bölgesini çevreleyen eğriler $y = 1$, $y = x$, $y = \frac{x}{10}$ doğruları olup;

$$I = \int_0^1 \int_y^{10y} \sqrt{xy - y^2} dx dy = \int_0^1 \int_y^{10y} \sqrt{y} \sqrt{x - y} dx dy = \int_0^1 \sqrt{y} \left[\frac{2\sqrt{(x-y)^3}}{3} \right]_y^{10y} dy = \int_0^1 18y^2 dy = \frac{18}{3} \left[y^3 \right]_0^1 = 6$$

olur.

Örnek 25. B bölgesi; $y = \frac{x^2}{2}$ parabolü ile $y = x$ doğrusunun sınırladığı bölge ise $\iint_B \frac{x dx dy}{x^2 + y^2} = ?$

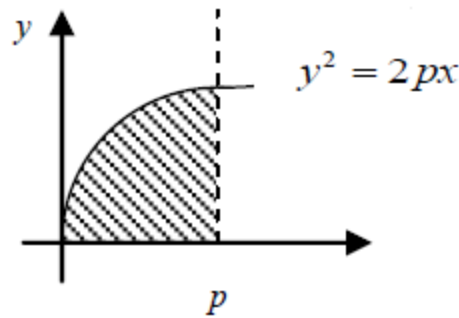
Çözüm:



$$\int_0^2 \int_{\frac{x^2}{2}}^x \frac{x}{x^2 + y^2} dy dx = \int_0^2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \Big|_{\frac{x^2}{2}}^x dx = \int_0^2 \left[\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{x}{2}\right) \right] dx = \left(\frac{\pi}{4}x - x \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \ln(4 + x^2) \right) \Big|_0^2 = \ln 2$$

Örnek 26. B bölgesi; $y^2 = 2px$ parabolü ve $y=0$, $x=p$ doğruları tarafından sınırlanan bölge ise $\iint_B xy^2 dx dy = ?$

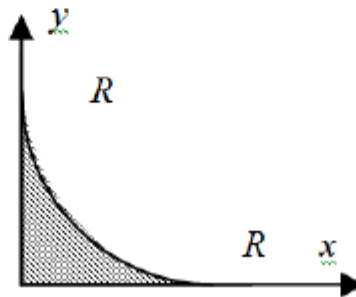
Çözüm: Verilen B bölgesi, aşağıdaki taralı bölgedir. Buna göre,



$$I = \int_0^{\sqrt{2}p} \int_{\frac{y^2}{2p}}^p xy^2 dx dy = \int_0^{\sqrt{2}p} y^2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\frac{y^2}{2p}}^p dy = \int_0^{\sqrt{2}p} y^2 \left(\frac{p^2}{2} - \frac{y^4}{8p^2} \right) dy = \left[\frac{p^2}{6} y^3 - \frac{1}{56p^2} y^7 \right]_0^{\sqrt{2}p} = \frac{4\sqrt{2}p^5}{21}$$

Örnek 27. B bölgesi; koordinat eksenleri ve $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$ astroid yayının birinci bölgedeki kısmı ile sınırlı bölge ise $\iint_B xy dy dx = ?$

Çözüm:



$$I = \int_0^R \int_0^{(R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}} xy dy dx = \int_0^R x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{(R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}} dx = \int_0^R \frac{x}{2} \left[(R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \right]^2 dx$$

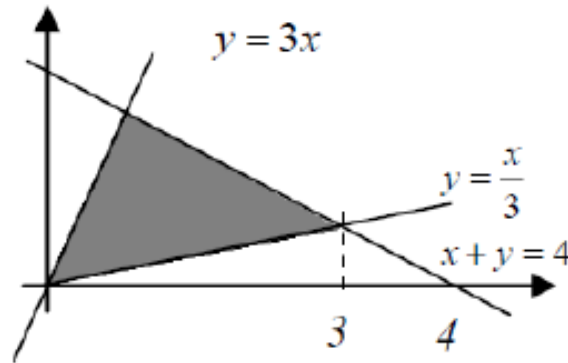
$$I = \frac{1}{2} \int_0^R x (R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3 dx = \frac{1}{2} \int_0^R \left(xR^2 - 3x^{\frac{5}{3}}R^{\frac{4}{3}} + 3x^{\frac{7}{3}}R^{\frac{2}{3}} - x^3 \right) dx$$

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2 R^2}{2} - \frac{9}{8} x^{\frac{8}{3}} R^{\frac{4}{3}} + \frac{9}{10} x^{\frac{10}{3}} R^{\frac{2}{3}} - \frac{x^4}{4} \right]_0^R = \frac{7R^4}{80}$$

olur.

Örnek 28. B bölgesi; $y = 3x, x = 3y, x + y = 4$ eğrilerinin sınırladığı bölge ise; $\iint_B x^2 dx dy = ?$

Çözüm:

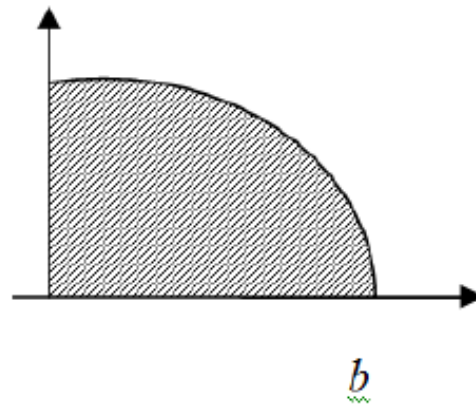


$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_{\frac{x}{3}}^{3x} x^2 dy dx + \int_1^3 \int_{\frac{x}{3}}^{4-x} x^2 dy dx = \int_0^1 x^2 \left[y \right]_{\frac{x}{3}}^{3x} dx + \int_1^3 x^2 \left[y \right]_{\frac{x}{3}}^{4-x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{8x^3}{3} dx + \int_1^3 \left(4x^2 - \frac{4x^3}{3} \right) dx = \frac{26}{3} \end{aligned}$$

Örnek 29. B bölgesi; $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ elipsinin birinci bölgede koordinat eksenleri ile sınırladığı bölge olduğuna göre; $\iint_B \sqrt{a^2 - y^2} dx dy = ?$

Çözüm:

$$\left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$$

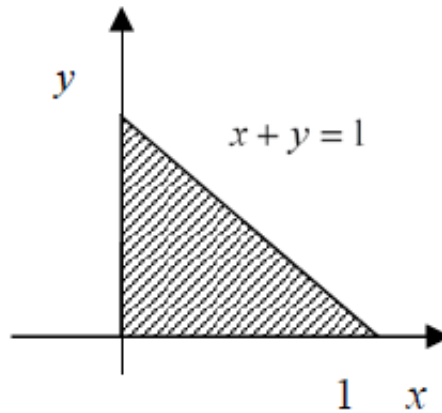


$$I = \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2 - y^2} dx dy = \int_0^a [\sqrt{a^2 - y^2} x]_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-y^2}} dy = \int_0^a \frac{b}{a} (a^2 - y^2) dy = [bay - \frac{by^3}{3a}]_0^a = \frac{2ba^2}{3} \text{ olur.}$$

Örnek 30. B bölgesi; köşeleri $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$ olan üçgen bölgesi olduğuna göre

$$\iint_B xy dx dy = ?$$

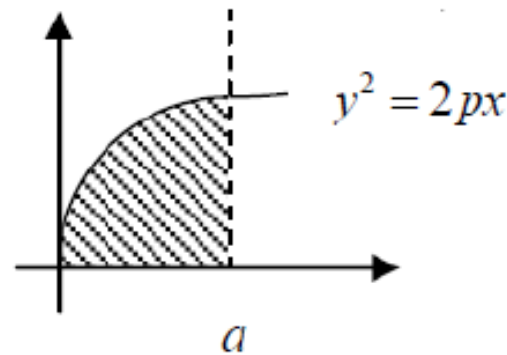
Çözüm:



$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} xy dy dx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

Örnek 32. B bölgesi; $y = 0$, $y^2 = 2px$, $x = a$ tarafından sınırlanan bölge ise, $\iint_B x dx dy = ?$

Çözüm:



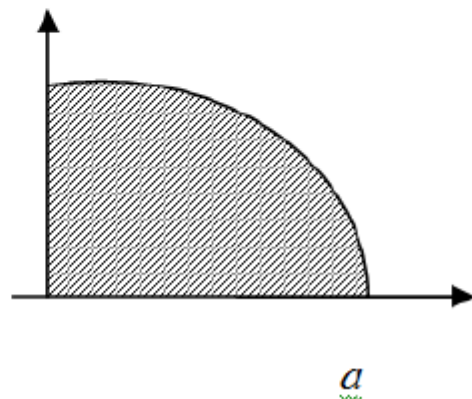
$$I = \int_0^a \int_0^{\sqrt{2px}} x dy dx = \int_0^a [xy]_0^{\sqrt{2px}} dx = \int_0^a x\sqrt{2px} dx = \sqrt{2p} \int_0^a x^{\frac{3}{2}} dx = \sqrt{2p} \frac{2}{5} [x^{\frac{5}{2}}]_0^a = \frac{2}{5} a^2 \sqrt{2pa}$$

Örnek 33. B bölgesi; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi tarafından sınırlanan aşağıdaki taralı bölge olduğuna göre

$$\iint_B y^2 dx dy = ?$$

Çözüm:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

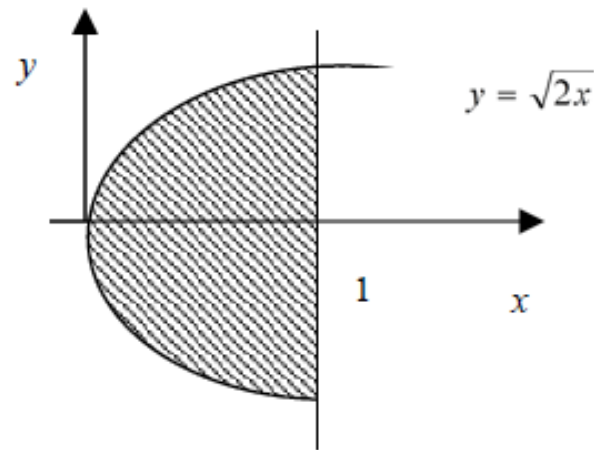


$$\begin{aligned} I &= \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y^2 dy dx = \int_0^a \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{b^3}{3a^3} \int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{b^3}{3a^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4 \cos^4 \theta d\theta = \frac{b^3 a}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4} \cos^2 2\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{4} \right] d\theta = \frac{b^3 a \pi}{16} \end{aligned}$$

Örnek 34. B bölgesi; $y^2 = 2x$ parabolü $x=1$ ile doğrusunun sınırladığı bölge ise

$$\iint_B (x^2 + y^2) dx dy = ?$$

Çözüm: Taralı alan integrasyon bölgesi olduğuna göre;

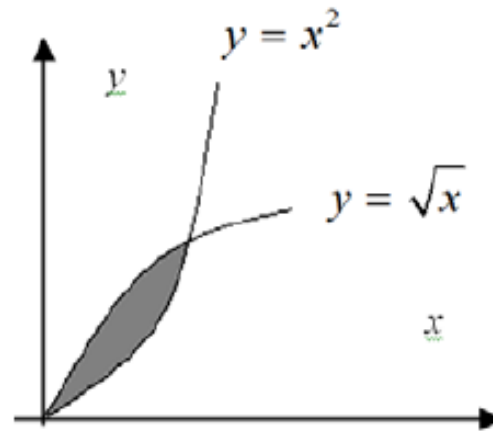


$$I = 2 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2x}} (x^2 + y^2) dy dx = 2 \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2x}} dx = 2 \int_0^1 \left(x^2 \sqrt{2x} + \frac{2x\sqrt{2x}}{3} \right) dx$$

$$I = 2 \left[\frac{2\sqrt{2}}{7} x^{\frac{7}{2}} + \frac{4\sqrt{2}}{15} x^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = \frac{116\sqrt{2}}{105}$$

Örnek 35. B bölgesi; $y = x^2$ ve $y^2 = x$ parabollerinin sınırladığı bölge ise $\iint_B (x + y) dx dy = ?$

Çözüm:

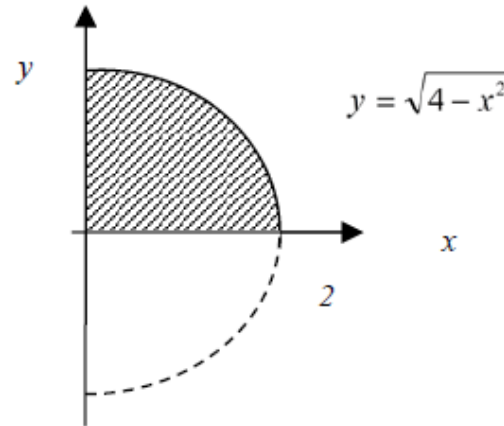


$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x + y) dy dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(x\sqrt{x} + \frac{x}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx$$

$$I = \left(\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{10}$$

Örnek 36. B bölgesi; $x^2 + y^2 = 4$ çemberinin sınırladığı aşağıdaki şekildeki taralı bölge olduğuna göre $\iint_B (2-x) dx dy = ?$

Çözüm:



$$I = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (2-x) dy dx = \int_0^2 [2y - xy]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_0^2 (2\sqrt{4-x^2} - x\sqrt{4-x^2}) dx$$

$$I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt + \frac{1}{3} (4-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt - \frac{8}{3}$$

$$I = 4 \left(\frac{\sin 2t}{2} + t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{8}{3} = 2\pi - \frac{8}{3}$$

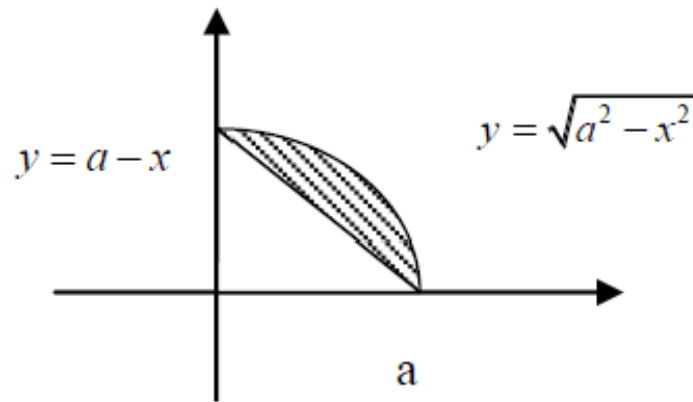
Örnek 37. Aşağıdaki iki katlı integrallerin değerlerini integrasyon sıralarını değiştirerek hesaplayınız.

$$\text{a) } I = \int_0^a \int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} y dy dx \quad \text{b) } I = \int_0^4 \int_0^{\frac{x^2}{2}} x dy dx \quad \text{c) } I = \int_0^1 \int_{2-2x^2}^2 xy dy dx$$

$$\text{d) } I = \int_1^{e^2} \int_0^{\ln x} 2x dy dx \quad \text{e) } I = \int_0^3 \int_{y^2}^{3y} x dx dy \quad \text{f) } I = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} y dx dy \quad \text{g) } I = \int_0^1 \int_x^1 e^x dy dx$$

Çözüm:

a) $x = 0, x = a, y = a - x, y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ile sınırlanan bölge şekildeki taralı bölgedir. İntegrasyon sırası değiştirildiğinde,

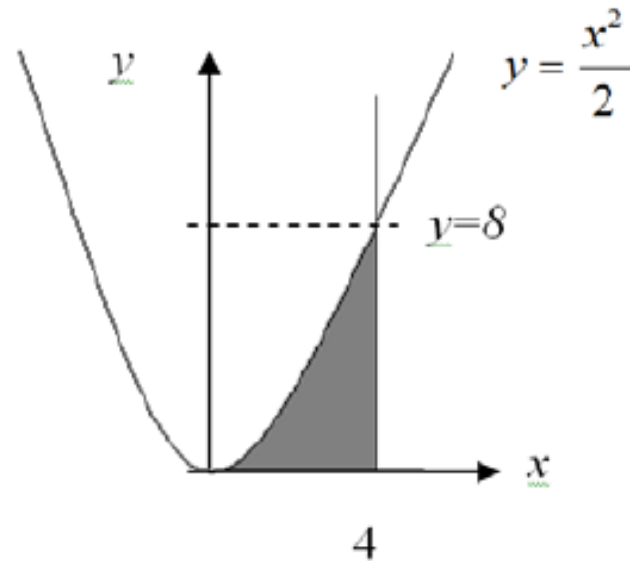


$$I = \int_0^a \int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} y dx dy = \int_0^a \left[yx \Big|_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} \right] dy = \int_0^a y(\sqrt{a^2-y^2} - a + y) dy$$

$$I = -\frac{1}{3}(a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} - a\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \Big|_0^a = \frac{a^3}{3}$$

olur.

b) (Bkz.Şekil 1)

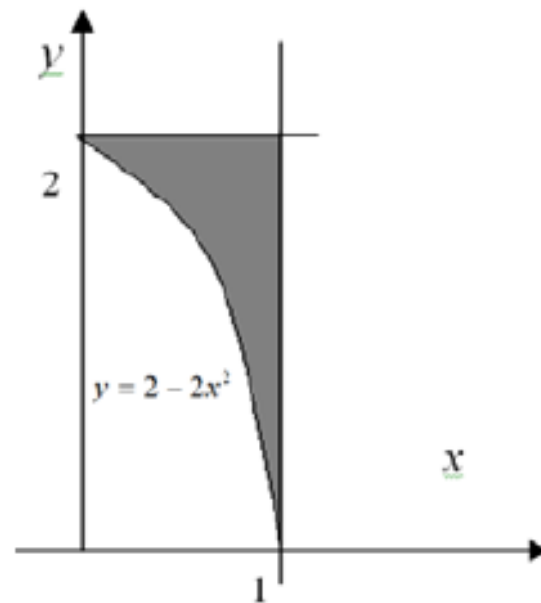


Şekil.1

$$I = \int_0^8 \int_{\sqrt{2y}}^4 x dx dy = \int_0^8 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\sqrt{2y}}^4 dy = \int_0^8 (8 - y) dy = \left(8y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^8 = 32$$

c) (Bkz.Şekil 2)

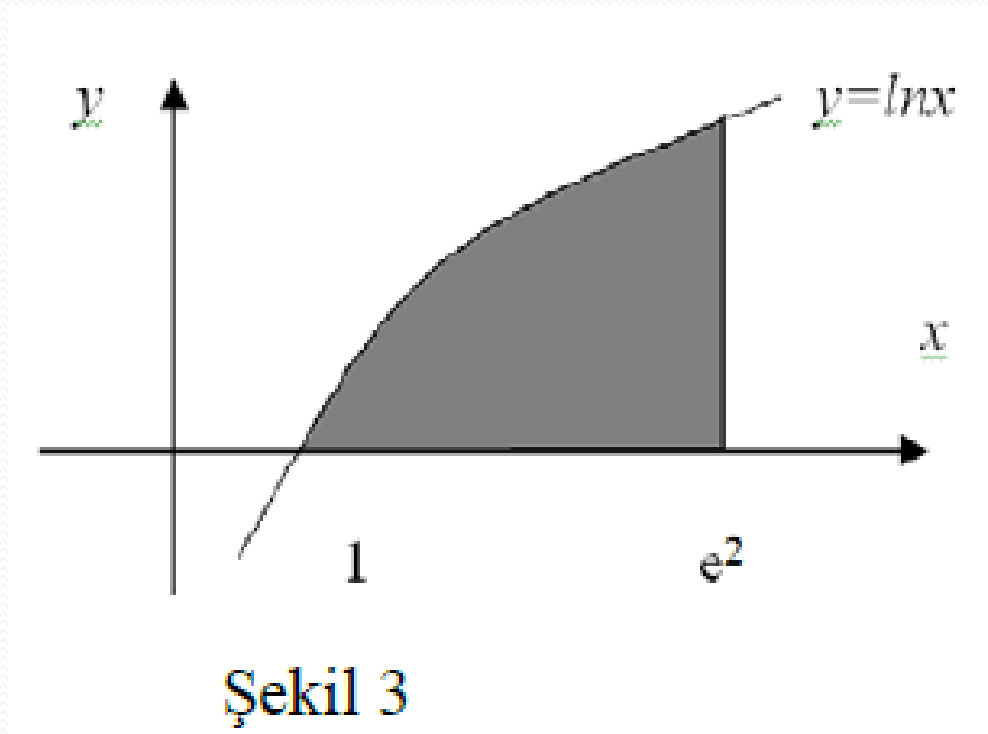
$$\int_0^2 \int_{\sqrt{1-\frac{1}{2}y}}^1 xy dx dy = \int_0^2 y \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\sqrt{1-\frac{1}{2}y}}^1 dy = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{y^2}{2} dy = \frac{1}{2} \left[\frac{y^3}{6} \right]_0^2 = \frac{2}{3}$$



Şekil 2

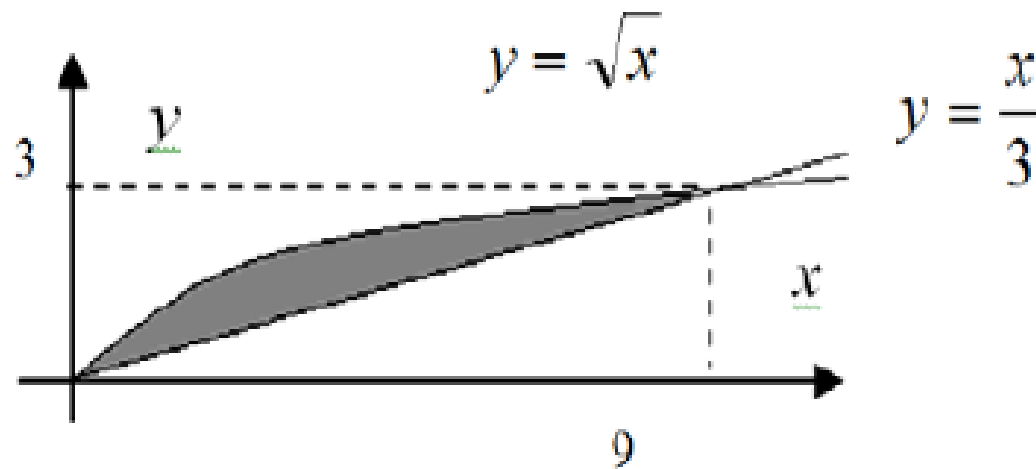
d) (Bkz.Şekil 3) Verilen integral için integrasyon sırası değiştirilirs

$$I = \int_0^2 \int_{e^y}^{e^2} 2x dx dy = \int_0^2 \left[x^2 \right]_{e^y}^{e^2} dy = \int_0^2 (e^4 - e^{2y}) dy = \frac{3e^4 + 1}{2}$$



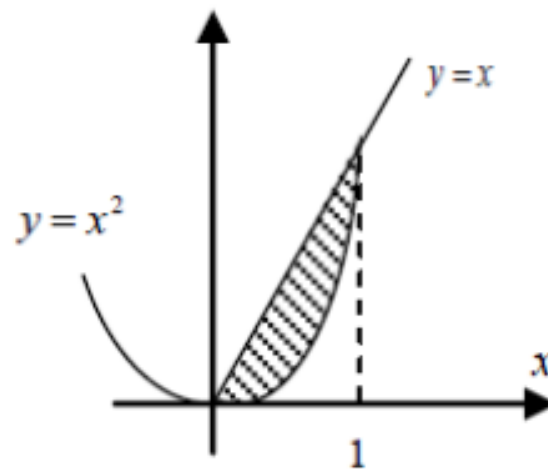
Şekil 3

$$\text{e) (Bkz.Şekil 4) } I = \int_0^9 \int_{\frac{x}{3}}^{\sqrt{x}} x dy dx = \int_0^9 [xy]_{\frac{x}{3}}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^9 \left(x\sqrt{x} - \frac{x^2}{3} \right) dx = \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^3}{9} \right]_0^9 = \frac{81}{5}$$



Şekil 4

f) (Bkz.Şekil 5)

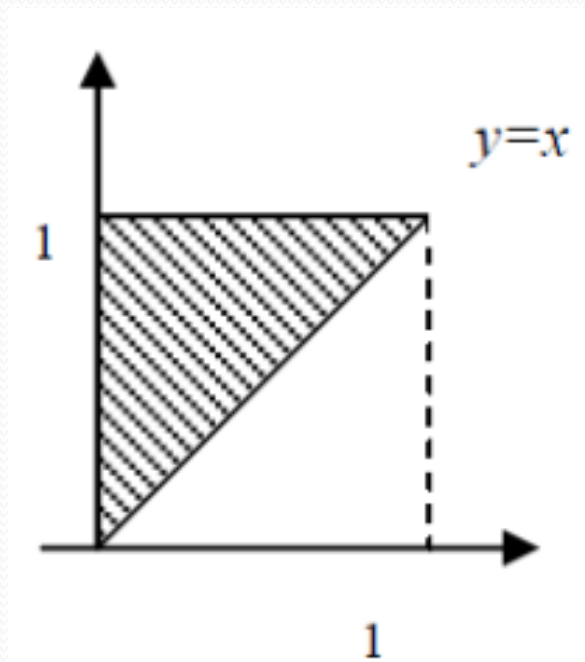


Şekil 5

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^x y dy dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^x dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10} \right]_0^1 = \frac{1}{15}$$

g) (Bkz.Şekil 6)

$$I = \int_0^1 \int_0^y e^x dx dy = \int_0^1 [e^x]_0^y dy = \int_0^1 (e^y - 1) dy = [e^y - y]_0^1 = e - 2$$



Şekil 6

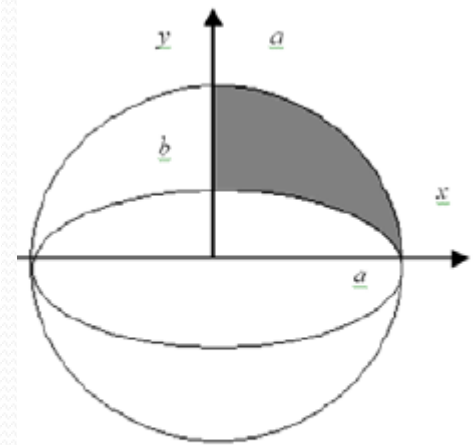
Örnek 38. B bölgesi; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi, $x^2 + y^2 = a^2$ çemberi ve $x = 0$ doğrusu tarafından birinci bölgede sınırladıkları bölge olduğuna göre ($b < a$)

$$I = \iint_B xy dx dy$$

integralini hesaplayınız. (Bkz.Şekil 7)

Çözüm:

$$I = \int_0^a \int_{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} xy dy dx = \frac{1}{2} \int_0^a [xy^2]_{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^a [x(a^2 - x^2) - x \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)] dx$$
$$I = \frac{1}{2} \int_0^a [(a^2 - b^2)x + (\frac{b^2}{a^2} - 1)x^3] dx = \frac{1}{2} [(a^2 - b^2) \frac{x^2}{2} + (\frac{b^2}{a^2} - 1) \frac{x^4}{4}]_0^a = \frac{a^2(a^2 - b^2)}{8}$$

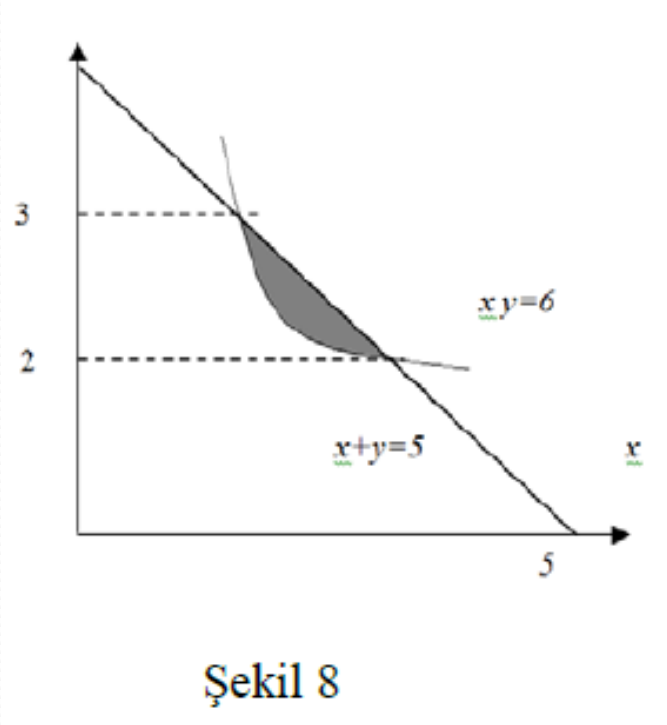


Şekil 7

olur.

Örnek 39. B bölgesi; $xy=6$ ve $x+y=5$ eğrileri ile sınırlanan aşağıdaki taralı bölge olduğuna göre $I = \iint_B dx dy$ integralini hesaplayınız. (Bkz.Şekil 8)

Çözüm: $I = \int_2^3 \int_{\frac{6}{y}}^{5-y} dx dy = \int_2^3 \left[x \right]_{\frac{6}{y}}^{5-y} dy = \int_2^3 \left(5 - y - \frac{6}{y} \right) dy = \left[5y - \frac{y^2}{2} - 6 \ln y \right]_2^3 = \frac{5}{2} + 6 \ln \frac{2}{3}$ dir.



Şekil 8

Örnek 40. $f(x, y) = xe^{xy}$ fonksiyonunun $B = [0, 2] \times [0, 1]$ bölgesindeki değerini hesaplayınız.

Çözüm:
$$\iint_B xe^{xy} dy dx = \int_0^2 \int_0^1 xe^{xy} dy dx = \int_0^2 \left[e^{xy} \right]_0^1 dx = \int_0^2 (e^x - 1) dx = [e^x - x]_0^2 = e^2 - 3$$

Örnek 41. $I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2x \arcsin y}{1-y^2} dy dx = ?$

Çözüm : Verilen integralin integrasyon sırası değiştirildiğinde;

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2x \arcsin y}{1-y^2} dy dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} \frac{2x \arcsin y}{1-y^2} dx dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2 \arcsin y}{1-y^2} \bigg|_0^{\sqrt{1-y^2}} dy$$

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \arcsin y dy = \left(y \arcsin y + \sqrt{1-y^2} \right) \bigg|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{olur.}$$

Örnek 42. $I = \int_0^{\ln 16} \int_{\frac{x}{e^2}}^4 \frac{\arctan y}{\ln y} dy dx = ?$

Çözüm : İntegrasyon sırası değiştirildiğinde;

$$I = \int_0^{\ln 16} \int_{\frac{x}{e^2}}^4 \frac{\arctan y}{\ln y} dy dx = \int_1^4 \int_0^{2 \ln y} \frac{\arctan y}{\ln y} dx dy = 2 \int_1^4 \arctan y dy$$

$$I = 2 \left[y \arctan y - \frac{1}{2} \ln(1 + y^2) \right]_1^4 = 8 \arctan 4 + \ln \left(\frac{2}{17} \right) - \frac{\pi}{2}$$

olur.

Örnek 43. $I = \int_{-2}^4 \int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{x=y+1} xy dx dy$ integralini integrasyon sırasını değiştirerek hesaplayınız.

Çözüm:
$$I = \int_{-3}^{-1} \int_{-\sqrt{2(x+3)}}^{\sqrt{2(x+3)}} xy dy dx + \int_{-1}^5 \int_{x-1}^{\sqrt{2(x+3)}} xy dy dx = \int_{-3}^{-1} \frac{xy^2}{2} \Big|_{-\sqrt{2(x+3)}}^{\sqrt{2(x+3)}} dx + \int_{-1}^5 \frac{xy^2}{2} \Big|_{x-1}^{\sqrt{2(x+3)}} dx = \frac{104}{3}$$

Örnek 44. Aşağıdaki integrali integrasyon sırasını değiştirip, integrallerden birini hesaplayınız.

$$\int_{-2}^2 \int_{\frac{4-y^2}{4}}^{4-y^2} \left(\frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x+4}{2} \right) dx dy$$

Çözüm: İntegrasyon sırası değiştirildiğinde;

$$I = \int_0^1 \int_{-\sqrt{4-x}}^{-\sqrt{4-4x}} \left(\frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x+4}{2} \right) dy dx + \int_0^1 \int_{\sqrt{4-4x}}^{\sqrt{4-x}} \left(\frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x+4}{2} \right) dy dx + \int_1^4 \int_{-\sqrt{4-x}}^{\sqrt{4-x}} \left(\frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x+4}{2} \right) dy dx$$

olur. Bölge ox eksenine göre simetrik, aynı zamanda

$$\frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^2 (-y)}{\sqrt{x^2 + (-y)^2}} = -\frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

olduğundan;

$$I = \int_{-2}^2 \int_{\frac{4-y^2}{4}}^{4-y^2} \left(\frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x+4}{2} \right) dx dy = 2 \int_0^2 \int_{\frac{4-y^2}{4}}^{4-y^2} \frac{x+4}{2} dx dy = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} + 4x \right) \Big|_{\frac{4-y^2}{4}}^{4-y^2} dy$$

$$I = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{16} y^5 + \frac{13}{6} y^3 + 39y \right) \Big|_0^2 = \frac{152}{3}$$

Örnek 45. $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4} dx dy = ?$

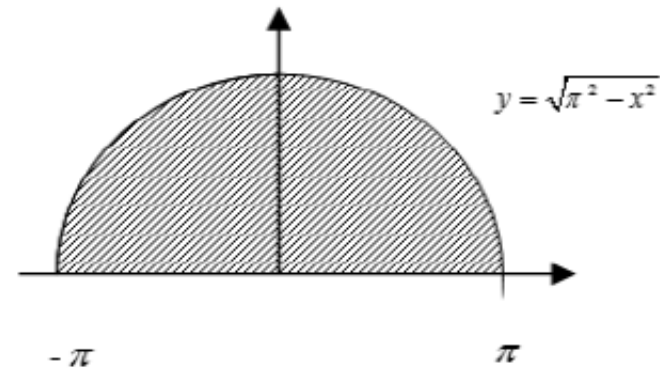
Çözüm: Verilen integralin mevcut integral sırasına göre çözülemeyeceği açıktır. Ancak B bölgesi çizilip, integrasyon sırası değiştirilirse

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4} dx dy = \int_0^2 \int_0^{x^3} e^{x^4} dy dx = \int_0^2 x^3 e^{x^4} dx = \frac{1}{4} \left(e^{x^4} \right)_0^2 = \frac{1}{4} (e^{16} - 1)$$

olur.

Örnek 46.

$$\int_0^{\pi} \int_{-\sqrt{\pi^2-y^2}}^{\sqrt{\pi^2-y^2}} \frac{x \sin x}{\sqrt{\pi^2-x^2}} dx dy = ?$$



Çözüm: İntegrasyon sırası değiştirildiğinde integralin değeri;

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\sqrt{\pi^2-x^2}} \frac{x \sin x}{\sqrt{\pi^2-x^2}} dy dx = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx = -x \cos x + \sin x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

olur.

Örnek 47. $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \sqrt{x^4 + 1} \, dx dy = ?$ integralinin değerini integrasyon sırasını değiştirerek hesaplayınız.

Çözüm: Verilen integralin B bölgesi çizilip, integrasyon sırası değiştirilirse;

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \sqrt{x^4 + 1} \, dx dy = \int_0^2 \int_0^{x^3} \sqrt{x^4 + 1} \, dy dx = \int_0^2 x^3 \sqrt{x^4 + 1} \, dx = \frac{1}{6} \left(17^{\frac{3}{2}} - 1 \right)$$

olur.

Kaynaklar:

1. A. H. Berksoy, O. Özkan, Mühendisler İçin Çözümlü Kalkülüs, S.Ü. Basımevi, 2010
2. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus II**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2010.
3. J. Stewart, Kalkülüs Kavram ve Kapsam (Diferansiyel ve İntegral Hesap), TÜBA, 2010.