

## 2 Hata Hesabı

### Hata Nedir?

Herhangi bir fiziksel büyüklüğün ölçülen değeri ile gerçek değeri arasındaki farka hata denir. Ölçülen bir fiziksel büyüklüğün sayısal değeri, yapılan deneysel hatalardan dolayı hiç bir zaman gerçek değeri ile ifade edilemez. Ölçüm sonucu bulunan sayısal değer duyarlılığı ve güvenilirliği yapılan hataların sınırı ile belirlenir. Hatanın işaretini tespit etmek imkansızdır. Bundan ötürü hata sınırı,  $\pm a$  belirsizliği ile verilir. Örneğin;  $16.3 \pm 0.5$  ifadesinin anlamı şudur; ölçülen güvenilir değer 16.3 dür. Ancak hakiki değer, 16.3 den 0.5 daha büyük veya küçük olması mümkündür. Hata sınırı belli olmayan bir deneysel sonucun, bilimsel bir değeri yoktur. Bu nedenle deneysel çalışmalarımızda yaptığımız ölçmelerde yapılan hataların ayrı ayrı belirlenmesi ve bunların deneysel sonuca etkisinin ortaya çıkarılması gerekir. Hata sistematik ve istatistik (raslantısal) olmak üzere iki türdür.

Sistematik hatalar, deney yapılan aletlerin ayarsızlığı, izlenen yöntemin yanlışlığı şeklinde sıralanabilir. Yararlanılan matematiksel bağıntıların eksikliğinden de kaynaklanır. Bu tür hatalar sonuca, her zaman aynı yönde etki eder. Deneysel sonuç gerçek değerinden sürekli olarak ya daha büyük yada daha küçük olur.

İstatistik hatalar, ölçü aletlerinin duyarlılıklarının sınırlı olması ölçülen büyüklük veya ölçüm sisteminin kararsız olmasından kaynaklanır. Bu tür hatalar küçük ve çift yönlü hatalardır. Bu hatalar aynı ölçmenin çok sayıda tekrarlanması ile görülebilir. Elde edilen sonuçlar farklı olup belli bir değer etrafında (ortalama değer) dağılım gösterir. Ortalama değer ile her bir ölçme sonucu arasındaki farkların cebirsel toplamı sıfırdır. Bu sonuç bize aynı bir büyüklük için tekrarlanan çok sayıda ölçmede yapılan istatistik (rastgele) hataların toplam etkisinin sıfır olduğunu gösterir. Bu tür hataların etkisini azaltmak için ölçüm sayısı artırılır.

### Mutlak Hata

Ölçülen bir fiziksel büyüklüğün gerçek değeri  $X_0$  ile, ölçülen  $X_0$  değeri arasındaki farka  $X_0$  'ın mutlak hatası denir.

$$\text{Mutlak hata} = \pm \Delta X = X_0 - X \quad (2.1)$$

$$\text{Gerçek değer} = X_0 = X \pm \Delta X \quad (2.2)$$

$X_0$  gerçek değeri genel olarak tam bilinmediğinden  $\Delta X$  'in de tam değeri bilinemez.  $\Delta X$  'in ancak yaklaşık değeri bazı yollardan hesaplanabilir. Uygulamada mutlak hatanın görünen değeri belirlenebilir. Bu da ölçülen değer ile bir çok ölçümler sonucu elde edilen en iyi değer arasındaki farka eşittir.

### Bağıl Hata

Mutlak hata  $\Delta X$  'in ölçülen değer  $X$ 'e oranına bağıl hata denir.

$$\text{Bağıl hata} = \frac{\Delta X}{X} \quad (2.3)$$

$$\text{Yüzde Bağıl Hata} = \frac{\Delta X}{X} 100 \quad (2.4)$$

## Aritmetik Ortalama

Aynı bir ölçümün çok sayıda tekrarlanması sonucu elde edilen ölçü değerleri belli bir değer etrafında dağılım gösterirler. Böyle bir merkezi değere ortalama denir.  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  N ölçme sonucunda bulunan değerler ise bunların aritmetik ortalaması;

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N} \quad (2.5)$$

O halde bir büyüklük N kez ölçülmüşse, ortalama değeri ölçüm sonucu olarak alınabilir.

## Ortalama Değerin Standart Hatası

Ortalama değer ölçülerin dağılımı ile ilgili olarak daima değişebilir. Dolayısıyla ortalama değer de bir standart sapması vardır. Buna standart hata denir ve aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\Delta X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N(N-1)}} \quad (2.6)$$

Böyle ölçülen X fiziksel büyüklüğünün değeri;

$$X = \bar{X} \pm \Delta X \quad (2.7)$$

şeklinde gösterilir.

## Bir Kez Ölçüm Yapıldığında Hata

Ölçmelerin çok sayıda tekrarlanması mümkün olmayan durumlarda, ölçme hatalarının bulunmasında en uygun yol, kullanılan ölçü aletlerinin en küçük iki bölme çizgisi arasının yarısını almaktır. Örneğin en küçük bölümü 1 mm olan bir metre ile ölçülen uzunluk için en büyük hata  $\Delta X = 0.5mm$  alınmalıdır.

## Bileşik Büyüklüklerin Hatası

Eğer sonuç ölçülen çeşitli verilere bağlıysa ve her cins verinin hatası biliniyorsa sonuçtaki hatanın hesaplanması gerekir. Genel olarak Q, ölçülen  $x, y, z, \dots$  verilerinin bir fonksiyonuysa ve bu verilerin hataları sırasıyla  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$  biliniyorsa Q'nun standart hatası aşağıdaki gibi hesaplanır. Eğer  $x, y, z, \dots$  ölçü aletleri ile ölçülüyorsa  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$  ilgili ölçü aletinin hatası olarak alınır. Eğer  $Q = f(x, y, z, \dots)$  ise Q'nun hatası  $\Delta Q$ ,

$$\Delta Q = \sqrt{\left(\frac{dQ}{dx} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dy} \Delta y\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dz} \Delta z\right)^2 + \dots} \quad (2.8)$$

şeklinde verilir.

## Basit İşlemlerde Hata Hesapları

### Toplama - Çıkarmada

$$Q = x \pm y \quad (2.9)$$

iken x'in ve y'nin hataları  $\Delta x$  ve  $\Delta y$  ise

$$\Delta Q \cong \Delta x + \Delta y \quad (2.10)$$

### Çarpma-Bölmede

$$Q = x.y \quad \text{veya} \quad Q = \frac{x}{y} \quad (2.11)$$

iken x'in ve y'nin hataları  $\Delta x$  ve  $\Delta y$  ise;

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} \Rightarrow \Delta Q \cong Q \left( \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} \right) \quad (2.12)$$

### Üstel Fonksiyonlarda

$$Q = x^n \quad (2.13)$$

iken  $x$ 'in hatası  $\Delta x$  ise

$$\frac{\Delta Q}{Q} = n\left(\frac{\Delta x}{x}\right) \Rightarrow \Delta Q \cong Q\left(n\frac{\Delta x}{x}\right) \quad (2.14)$$

### Trigonometrik Fonksiyonlarda

$$Q = \sin x \quad (2.15)$$

iken ( $x$  ve  $\Delta x$  radyan cinsinden olmak üzere)  $x$ 'in hatası  $\Delta x$  olsun. Bu durumda

$$\Delta Q = \cos x \cdot \Delta x \quad (2.16)$$

$x$  ve  $\Delta x$  derece cinsinden verilmiş ise o zaman

$$\Delta Q = \cos x \cdot \Delta x \frac{\pi}{180} \quad (2.17)$$

yazabiliriz.

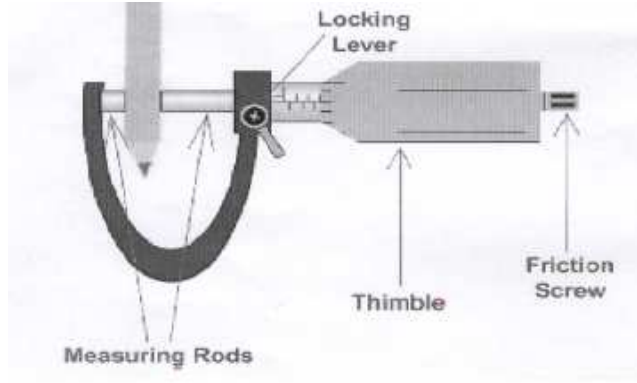
# 5 Temel Ölçümler

## Amaç

Temel ölçümler, anlamlı rakamlar ve hata hesabı konusunda deneyim kazanmak üzere mikrometre ve kompas yardımı ile cisimlerin uzunluklarının ölçülmesi, hacimlerinin ve yoğunluklarının hesaplanması.

## Genel Bilgiler

İnce bir levhanın kalınlığı, bir telin veya çubuğun kalınlığı, küçük bir bilyanın çapı çok defa mikrometre ile ölçülür. Mikrometre bölmeli cetvel şeklindeki bir sabit kısım ile kol üzerinde dönebilen bir vidadan oluşur (Şekil 5.1). Mikrometrenin yapısındaki vidanın bir tam dönüşü 0.5 mm'ye karşılık gelmektedir. Vida üzerindeki verniye 50 eşit taksimata bölünmüştür. Kalınlığı ölçülecek cisim mikrometrenin uçları



Şekil 5.1: Mikrometre

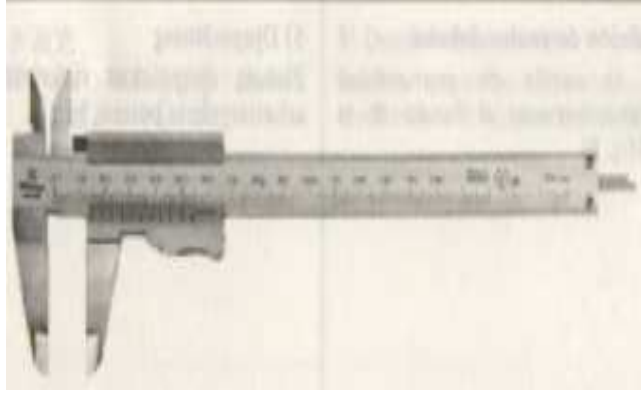
arasına yerleştirildiğinde, cismin kalınlığı mm cinsinden aşağıdaki bağıntı yardımıyla bulunur. Burada  $d$ , cismin ölçülen uzunluğu  $N$ , cetvel üzerinden okunan değeri  $n$  ise vida üzerindeki sabit cetvelin yatay çizgisi ile çakışan çizgi sayısıdır.

$$d = N + \frac{n}{100} \quad (5.1)$$

Cisimlerin kalınlığı, silindir ve kürelerin dış çapı, boruların iç çapı ve bazı cisimlerin (tüp ve şişe gibi) derinliğini ölçmekte sürgülü kompas ile ölçülür. sürgülü kompas, üzerine milimetrik taksimat çizilmiş  $L$  cetveliyle, bunun hizasında kaydırılabilen verniyeden oluşur (Şekil 5.2). Kompasın uçları arasına iyice yerleştirilen ve şekil değişikliğine uğramayacak biçimde hafifçe sıkıştırılan cismin ölçmek istenen uzunluğunun değeri mm cinsinden;

$$L = N + \frac{n}{10} \quad (5.2)$$

ile verilir.  $L$  cismin ölçülen uzunluğunu,  $N$  cetvelin sıfırından itibaren okunan sayısını,  $n$  ise verniye üzerinde cetveldeki bölmelerden biri ile çakışan çizgi sayısını gösterir.



Şekil 5.2: Kompas

### Deneyin Yapılışı

1. Kompas yardımı ile dikdörtgenler prizmasının uzunluklarını (a,b,c) 5 farklı yerden ölçünüz. Belirlediğiniz sonuçları Tablo-5.1'e yerleştiriniz ve gerekli hata hesaplarını yapınız.

n	a(mm)	b(mm)	c(mm)	$(a - \bar{a})^2$	$(b - \bar{b})^2$	$(c - \bar{c})^2$
1						
2						
3						
4						
5						
	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$	$\sum(\Delta a_i)^2$	$\sum(\Delta b_i)^2$	$\sum(\Delta c_i)^2$

Tablo 5.1: Dikdörtgenler prizması için kompas ile elde edilen sonuçlar

$$m_{\text{prizma}} = \dots \pm 0.001\text{g} \quad (5.3)$$

Burada  $\pm 0.001$ , hassas terazinin ölçüm hatasıdır.

2. Dikdörtgenler prizmasını hacim ve yoğunluklunun ortalama değerlerini hesaplayınız.

$$\bar{V}_d = \bar{a}\bar{b}\bar{c} = \dots = \dots \text{mm}^3 = \dots \text{cm}^3 \quad (5.4)$$

$$\bar{\phi}_d = \frac{\bar{m}_{\text{prizma}}}{\bar{V}_d} = \dots = \dots \frac{\text{g}}{\text{mm}^3} = \dots \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \quad (5.5)$$

3. Mikrometre ile silindirin çapını (R) ve ykseklğini (h) 5 farklı yerinden lnz. Belirlediğiniz sonuçları Tablo 5.2'ye yerleştiriniz ve gerekli hata hesaplarını yapınız.

n	R(mm)	r(mm)	h(mm)	$(r - \bar{r})^2$	$(h - \bar{h})^2$
1					
2					
3					
4					
5					
		$\bar{r}$	$\bar{h}$	$\Sigma(\Delta r)^2$	$\Sigma(\Delta h)^2$

Tablo 5.2: Silindir için mikrometre ile elde edilen sonuçlar

$$m_{\text{silindir}} = \dots \pm 0.001\text{g} \quad (5.6)$$

4. Silindirin hacim ve yoğunluklunun ortalama değerlerini hesaplayınız.

$$\bar{V} = \pi \bar{r}^2 \bar{h} = \dots = \dots \text{mm}^3 = \dots \text{cm}^3 \quad (5.7)$$

$$\bar{\phi}_s = \frac{\bar{m}_{\text{silindir}}}{\bar{V}_s} = \dots = \dots \frac{\text{g}}{\text{mm}^3} = \dots \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \quad (5.8)$$

5. Kitapın birinci bölümünde ifade edilen basit işlemlerde hata hesabı ve standart sapma yöntemini kullanarak, dikdörtgenler prizması ve silindir için hacim ve yoğunluk değerlerine ait hata bağıntılarını yazınız. Hata bağıntılarına ait hesaplamaları yapınız ve sonucu aşağıdaki şekilde yazınız.

Silindir için:

$$V_s = \bar{V}_s \pm \Delta V_s = \dots \text{mm}^3 = \dots \text{cm}^3 \quad (5.9)$$

$$\phi_s = \bar{\phi}_s \pm \Delta \phi_s = \dots \frac{\text{g}}{\text{mm}^3} = \dots \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \quad (5.10)$$

Dikdörtgenler prizması için:

$$V_d = \bar{V}_d \pm \Delta V_d = \dots \text{mm}^3 = \dots \text{cm}^3 \quad (5.11)$$

$$\phi_d = \bar{\phi}_d \pm \Delta \phi_d = \dots \frac{\text{g}}{\text{mm}^3} = \dots \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \quad (5.12)$$