



Lojik Tasarım

Ders 5

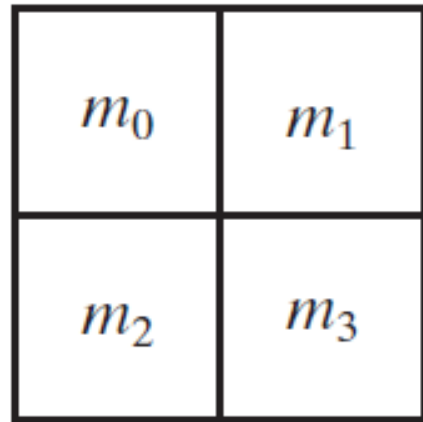
Kaynak:

M.M. Mano, M.D. Ciletti, "Digital Design with An Introduction to Verilog HDL"

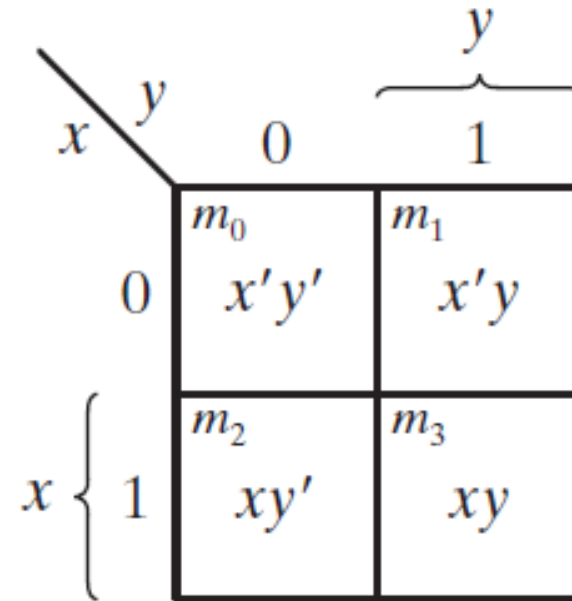
Boolean Fonksiyonlarının Basitleştirilmesi

- Diyagram Yöntemi (Karnough Diyagramı)
 - İki Değişkenli
 - Üç Değişkenli
 - Dört Değişkenli
 - Beş Değişkenli

İki Değişkenli Karnough Diyagramı (Haritası)

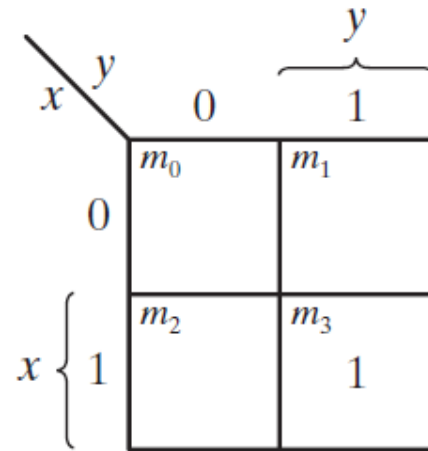


(a)

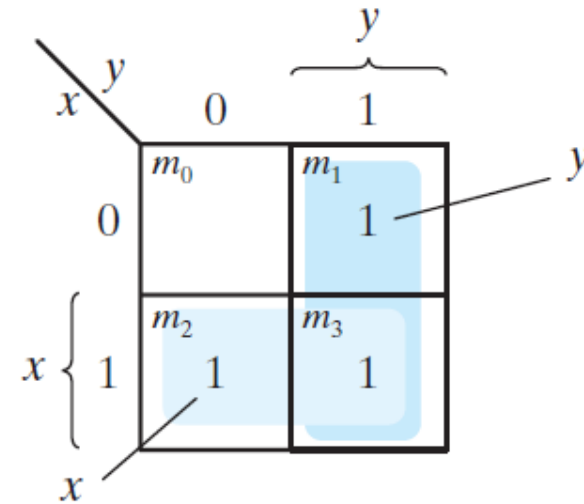


(b)

İki Değişkenli Karnough Diyagramı (Haritası)



(a) xy



(b) $x + y$

İki Değişkenli Karnough Diyagramı (Haritası)

Soru: $f = x'y' + xy' + xy$

lojik ifadesini Karnough haritası yöntemi kullanarak sadeleştiriniz.

		x	
		y	
y	0	0	1
	1		

Cevap: $f = x + y'$

İki Değişkenli Karnough Diyagramı (Haritası)

Soru: $f = xy' + x'y + x'y'$

lojik ifadesini Karnough haritası yöntemi kullanarak sadeleştiriniz.

		x	
		y	
y	0	0	1
	1		

Cevap: $f = x' + y'$

İki Değişkenli Karnough Diyagramı (Haritası)

Soru: $f = x'y' + xy$

lojik ifadesini Karnough haritası yöntemi kullanarak sadeleştiriniz.

		x	
		y	
y	0	0	1
	1		

Cevap: $f = x'y' + xy$

İki Değişkenli Karnough Diyagramı (Haritası)

Soru: $f = x + xy'$

lojik ifadesini Karnough haritası yöntemi kullanarak sadeleştiriniz.

		x	
		y	
y	0	0	1
	1		

Cevap: $f = x$

Üç Değişkenli Karnough Diyagramı (Haritası)

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

(a)

		y			
		00	01	11	10
x	0	m_0 $x'y'z'$	m_1 $x'y'z$	m_3 $x'yz$	m_2 $x'yz'$
	1	m_4 $xy'z'$	m_5 $xy'z$	m_7 xyz	m_6 xyz'
		z			

(b)

Üç Değişkenli Karnough Diyagramı (Haritası)

Soru: $f = x'yz' + xy'z + xyz + x'y'z'$

lojik ifadesini Karnough haritası yöntemi kullanarak sadeleştiriniz.

x,y		z			
		00	01	11	10
0	0				
	1				

Cevap: $f = x'z' + xz$

Üç Değişkenli Karnough Diyagramı (Haritası)

Soru: $f(x, y, z) = \Sigma(2, 3, 4, 5)$

lojik ifadesini Karnough haritası yöntemi kullanarak sadeleştiriniz.

y,z x					
		00	01	11	10
0	0				
	1				

Cevap: $f = x'y + xy'$

Üç Değişkenli Karnough Diyagramı (Haritası)

Soru: $f(x, y, z) = \Sigma(3, 4, 6, 7)$

lojik ifadesini Karnough haritası yöntemi kullanarak sadeleştiriniz.

$\begin{matrix} y,z \\ x \end{matrix}$					
		00	01	11	10
x	0				
	1				

Cevap: $f = yz + xz'$

Üç Değişkenli Karnough Diyagramı (Haritası)

Soru: $f = x'y'z' + xy'z' + xy'z + x'y'z$

lojik ifadesini Karnough haritası yöntemi kullanarak sadeleştiriniz.

y,z		x			
		00	01	11	10
x	0				
	1				

x,y		z				
		00	01	11	10	
		0				
		1				

Cevap: $f = y'$

Üç Değişkenli Karnough Diyagramı (Haritası)

Soru: $f = xyz + xy + x + x'y'z'$

lojik ifadesini Karnough haritası yöntemi kullanarak sadeleştiriniz.

x,y		z			
		00	01	11	10
0	0				
	1				

Cevap: $f = x + y'z'$

Üç Değişkenli Karnough Diyagramı (Haritası)

Soru: $f(x, y, z) = \Sigma(0, 2, 4, 5, 6)$

lojik ifadesini Karnough haritası yöntemi kullanarak sadeleştiriniz.

y,z x					
		00	01	11	10
0	0				
	1				

Cevap: $f = xy' + z'$

Üç Değişkenli Karnough Diyagramı (Haritası)

Soru: $f = A'C + A'B + AB'C + BC$ lojik ifadesini

- a) Mintermlerin toplamı biçiminde ifade edin
- b) En basit biçimi çarpımların toplamı şeklinde ifade edin

B,C A					
		00	01	11	10
0	0				
	1				

Cevap: $f(A, B, C) = \sum(1, 2, 3, 5, 7)$

$$f = A'B + C$$

Dört Değişkenli Karnough Diyagramı

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

(a)

$wx \backslash yz$		y			
		00	01	11	10
w	00	m_0 $w'x'y'z'$	m_1 $w'x'y'z$	m_3 $w'x'yz$	m_2 $w'x'yz'$
	01	m_4 $w'xy'z'$	m_5 $w'xy'z$	m_7 $w'xyz$	m_6 $w'xyz'$
	11	m_{12} $wxy'z'$	m_{13} $wxy'z$	m_{15} $wxyz$	m_{14} $wxyz'$
	10	m_8 $wx'y'z'$	m_9 $wx'y'z$	m_{11} $wx'yz$	m_{10} $wx'yz'$

(b)

Dört Değişkenli Karnough Diyagramı

$$f = a'bc'd + a'b'c'd + a'b'cd + a'bcd + a'bc'd' + a'bcd'$$

lojik ifadesini Karnough haritası yöntemi kullanarak sadeleştiriniz.

<i>c, d</i> <i>a, b</i>	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$$f = a'b + a'd$$

Dört Değişkenli Karnough Diyagramı

$$f(a, b, c, d) = \sum(0, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15)$$

lojik ifadesini Karnough haritası yöntemi kullanarak sadeleştiriniz.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>f</i>
0	0	0	0	0	
1	0	0	0	1	
2	0	0	1	0	
3	0	0	1	1	
4	0	1	0	0	
5	0	1	0	1	
6	0	1	1	0	
7	0	1	1	1	
8	1	0	0	0	
9	1	0	0	1	
10	1	0	1	0	
11	1	0	1	1	
12	1	1	0	0	
13	1	1	0	1	
14	1	1	1	0	
15	1	1	1	1	

<i>a, b</i> \ <i>c, d</i>					
		00	01	11	10
00					
01					
11					
10					

$$f(a, b, c, d) = b'd' + cd + ab' + bd$$

Dört Değişkenli Karnough Diyagramı

$$F(w, x, y, z) = \Sigma(0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14)$$

lojik ifadesini Karnough haritası yöntemi kullanarak sadeleştiriniz.

y, z w, x		00	01	11	10
00					
01					
11					
10					

$$F = y' + w'z' + xz'$$

Dört Değişkenli Karnough Diyagramı

$$F = A'B'C' + B'CD' + A'BCD' + AB'C'$$

lojik ifadesini Karnough haritası yöntemi kullanarak sadeleştiriniz.

<i>C, D</i> <i>A, B</i>		<i>00</i>	<i>01</i>	<i>11</i>	<i>10</i>
<i>00</i>					
<i>01</i>					
<i>11</i>					
<i>10</i>					

$$F = B'D' + B'C' + A'CD'$$

Beş Değişkenli Karnough Diyagramı

Beş değişkenli çözümlemede $2^5=32$ durum bulunmaktadır.

$a=0$

d, e b, c		d, e			
		00	01	11	10
b, c	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

$a=1$

d, e b, c		d, e			
		00	01	11	10
b, c	00	16	17	19	18
	01	20	21	23	22
	11	28	29	31	30
	10	24	25	27	26

Beş Değişkenli Karnough Diyagramı

$f(a, b, c, d, e) = \sum(0, 2, 4, 6, 9, 13, 21, 23, 25, 29, 31)$ lojik ifadesini Karnough haritası yöntemi ile sadeleştiriniz.

a=0				
d, e b, c				
	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

a=1				
d, e b, c				
	00	01	11	10
00	16	17	19	18
01	20	21	23	22
11	28	29	31	30
10	24	25	27	26

$$f = a'b'e' + ace + bd'e$$

Fazla değişkenli lojik fonksiyonlar

- 6 değişkenli bir fonksiyonda $2^6=64$ değişik durum bulunmaktadır
- 6 ve daha fazla değişkene sahip lojik fonksiyonların basitleştirilmesinde Karnaugh haritası yöntemini kullanmak zor ve karmaşık olabilir.
- Bu nedenle bu tür fonksiyonların sadeleştirilmesinde farklı yöntemler tercih edilir.
- İlerleyen derslerde farklı yöntemlere değinilecektir.

Farketmez (etkisiz) Koşullar (Don't Care)

Aşağıda verilen doğruluk tablosu verilen lojik fonksiyonu sadeleştiriniz

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>f</i>
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0

$$f = bd' + b'd + cd$$

<i>a, b</i> \ <i>c, d</i>					
		00	01	11	10
00					
01					
11					
10					

Farketmez (etkisiz) Koşullar (Don't Care)

Verilen her iki lojik ifade aynıdır

$$f(w, x, y, z) = \sum(1,3,7,11,15)$$

$$f(w, x, y, z) = \sum_m(1,3,7,11,15) + \sum_d(0,2,5)$$

$$d(w, x, y, z) = \sum(0,2,5)$$

y, z w, x				
	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$$f = yz + w'x'$$

Örnek:

- En anlamlı biti a en az anlamlı biti d olan ve girişleri abcd olarak isimlendirilmiş bir lojik sisteme BCD sayılar uygulanmaktadır. Sisteme Uygulanan sayı 4'den küçükse 0, diğer durumlarda ise 1 üretmektedir. İlgili lojik sistemin
 - a) Doğruluk tablosunu oluşturunuz
 - b) Karnough haritası yöntemi ile sadeleştiriniz
 - c) Sadeleştirilmiş ifadenin lojik devresini çizin

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>f</i>
0	0	0	0	
0	0	0	1	
0	0	1	0	
0	0	1	1	
0	1	0	0	
0	1	0	1	
0	1	1	0	
0	1	1	1	
1	0	0	0	

<i>a, b</i> \ <i>c, d</i>		<i>00</i>	<i>01</i>	<i>11</i>	<i>10</i>
<i>a, b</i>	<i>00</i>				
	<i>01</i>				
	<i>11</i>				
	<i>10</i>				

Faktörizasyon

- Bir lojik ifadede bir değişkenin, değişken grubunun ve bir grubun kısmi parantez dışına alınarak lojik ifadenin tamamının ya da bir kısmının çarpanlarına ayrılması işlemidir.
- Faktörizasyon genellikle minimumlaştırmadan sonra uygulanır.
- Bazı fonksiyonlar minimumlaştırılmaz haldeyken bile faktörizasyon uygulanabilir.

$$f = ab'c' + a'bc' + a'b'c + abc$$

$$f = a(b'c' + bc) + a'(bc' + b'c)$$

$$f = a(b \oplus c)' + a'(b \oplus c)$$

$$ax' + a'x = a \oplus x$$

$$f = a \oplus (b \oplus c)$$

Toplamların çarpımı ve Çarpımların toplamları biçimindeki ifadelerin sadeleştirilmesi

$f = b'd' + b'c' + a'c'd$ lojik ifadesini doğruluk tablosunu oluşturunuz

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>f</i>
0	0	0	0	
0	0	0	1	
0	0	1	0	
0	0	1	1	
0	1	0	0	
0	1	0	1	
0	1	1	0	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	0	1	
1	0	1	0	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	0	1	
1	1	1	0	
1	1	1	1	

Toplamların çarpımı ve Çarpımların toplamları biçimindeki ifadelerin sadeleştirilmesi

$$f = b'd' + b'c' + a'c'd$$

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>f</i>
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

İfadenin değili yada tümleyeni (f') doğruluk tablosundaki 0 konumları değerlendirilerek bulunabilir

<i>c, d</i> <i>a, b</i>		00	01	11	10
00				0	
01	0			0	0
11	0	0	0	0	0
10				0	

$$f' = ab + cd + bd'$$

Çarpımların toplamları biçimindeki ifadelerin sadeleştirilmesi

$$f' = ab + cd + bd'$$

Lojik ifadesinin tümleyenini hesaplırsak fonksiyonun kendisi elde edilir

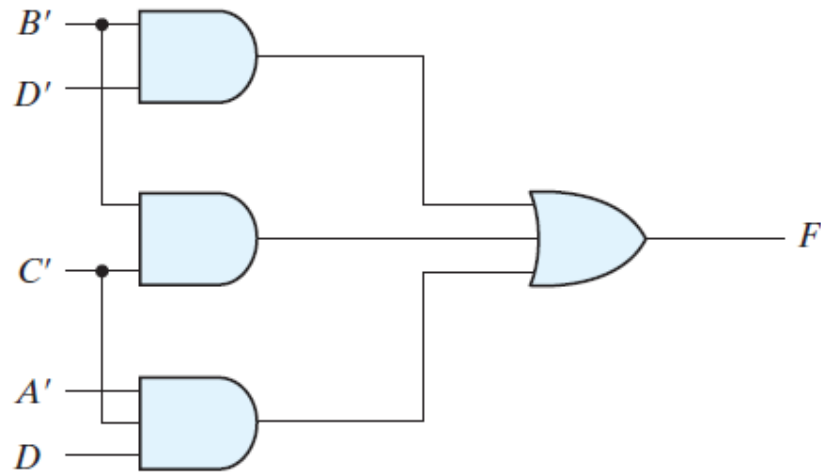
DeMorgan kuralı uygulanırsa;

$$f = (a' + b')(c' + d')(b' + d)$$

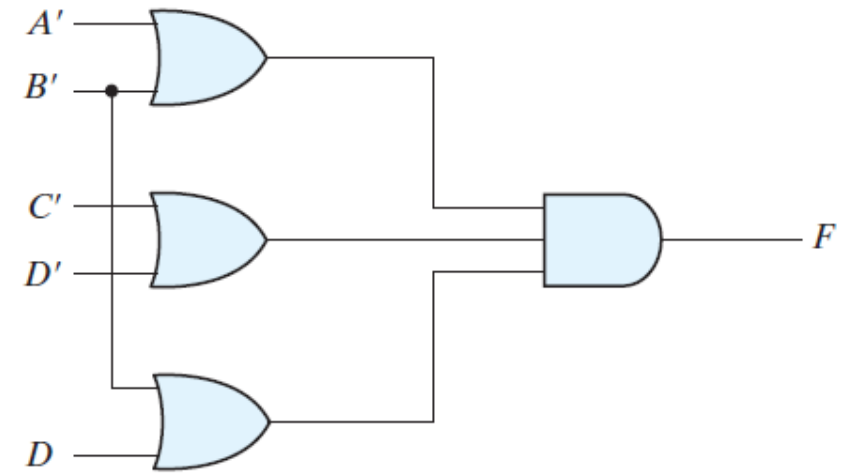
şeklinde elde edilir

c, d a, b		00	01	11	10
00				0	
01	0			0	0
11	0	0	0	0	0
10				0	

Toplamların çarpımı ve Çarpımların toplamları biçimindeki ifadelerin sadeleştirilmesi



(a) $F = B'D' + B'C' + A'C'D$



(b) $F = (A' + B')(C' + D')(B' + D)$

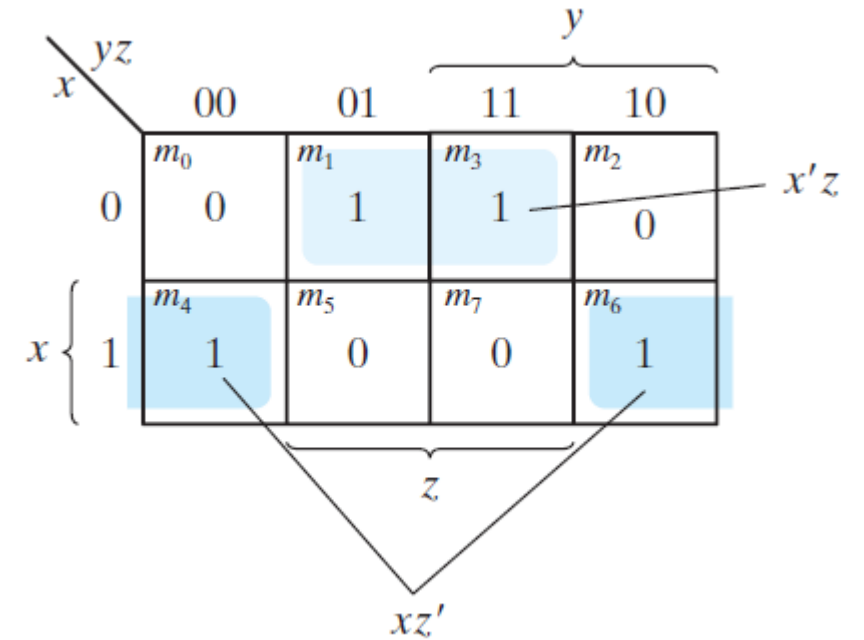
Toplamların çarpımı ve
Çarpımların toplamları biçimindeki ifadelerin sadeleştirilmesi

$$F(x, y, z) = \Sigma(1, 3, 4, 6)$$

$$F(x, y, z) = \Pi(0, 2, 5, 7)$$

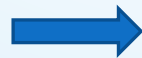
Table 3.1
Truth Table of Function F

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0



$$F = x'z + xz'$$

$$F' = xz + x'z'$$



$$F = (x' + z')(x + z)$$