MATEMATİK 1

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2020

FONKSİYONLAR.

4.1. Kartezyen Çarpım

Tanım 4.1.1. X ve Y boş olmayan iki küme olsun. $x \in X$ ve $y \in Y$ olmak üzere bütün (x, y) ikililerin kümesine X ile Y kümelerinin kartezyen çarpımı denir ve $X \times Y$ şeklinde gösterilir. Yani

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ ve } y \in Y\}$$

dir.

Örnek 4.1.1. $X = \{a, b\}$ ve $Y = \{1, 3, 5\}$ ise $X \times Y$ kümesi

$$X \times Y = \{(a,1), (a,3), (a,5), (b,1), (b,3), (b,5)\}$$

şeklindedir.

4.2. Bağıntı

Tanım 4.2.1. Boş olmayan X ve Y kümeleri için $X \times Y$ kartezyen çarpımının her alt kümesine X den Y ye bir bağıntı denir ve bağıntılar genellikle β ile gösterilir.

Örnek 4.2.1. $X = \{1,2\}$ ve $Y = \{a,b,c\}$ kümeleri için

(1) $\beta_1 = \{(1,a),(1,c)\} \subset X \times Y$ olduğundan β_1, X den Y ye bir bağıntıdır.

(2) $\beta_2 = \{(1,b),(2,a),(2,b)\} \subset X \times Y$ olduğundan β_2, X den Y ye bir bağıntıdır.

(3) $\beta_3 = \{(1,a),(1,2)\} \not\subset X \times Y$ olduğundan β_3, X den Y ye bir bağıntı değildir.

Tanım 4.3.1. X ve Y herhangi iki küme olsun. X in her bir elemanına Y nin bir ve yalnız bir elemanını karşılık getiren f kuralına X den Y ye bir fonksiyon denir ve genellikle $f : X \to Y$ şeklinde gösterilir. Buradaki X kümesine f fonksiyonunun tanım kümesi, Y kümesine de değer kümesi adı verilir.

Tanım 4.3.2. f ve g iki fonksiyon olsun. Bu fonksiyonlar için

(1) Toplama: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

(2) Çıkarma: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

(3) Çarpma: $(f.g)(x) = f(x).g(x)$

(4) Bölme: $(f / g)(x) = f(x) / g(x)$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.3.3. Bir f fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin bir alt kümesi ise f fonksiyonuna reel değişkenli fonksiyon adı verilir. Eğer fonksiyonun değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin bir alt kümesi ise f fonksiyonuna reel değerli fonksiyon adı verilir.

1. Fonksiyon Çeşitleri

1.1. Birebir Fonksiyon

Tanım 4.3.1.1.1. $f : A \to B$ bir fonksiyon olmak üzere

$$\forall x_1, x_2 \in A \text{ için } x_1 \neq x_2 \text{ iken } f(x_1) \neq f(x_2)$$

ise ya da $f(x_1) = f(x_2)$ olması $x_1 = x_2$ olmasını gerektiriyorsa f fonksiyonuna birebir fonksiyon denir.

Örnek 4.3.1.1.1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ fonksiyonu birebirdir.

Çünkü $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ve $x_1 \neq x_2 \Rightarrow 2x_1 \neq 2x_2 \Rightarrow 2x_1 + 1 \neq 2x_2 + 1$ dir.

1.2. Örten Fonksiyon

Tanım 4.3.1.2.1. $f : A \to B$ bir fonksiyon iken $f(A) = B$ ise f fonksiyonuna örten fonksiyon denir. f fonksiyonu örten ise $\forall y \in B$ için $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir $x \in A$ vardır.

Örnek 4.3.1.2.1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 2$ fonksiyonu örtendir. Çünkü $\forall y \in \mathbb{Z}$ için $x = y - 2$ eşitliğini sağlayan bir $x \in \mathbb{Z}$ vardır.

Örnek 4.3.1.2.2. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 4x + 1$ fonksiyonu örten değildir. Çünkü verilen fonksiyonun örten olması demek "$\forall y \in \mathbb{Z}$ için $x = \dfrac{y-1}{4}$ eşitliğini sağlayan bir $x \in \mathbb{N}$ vardır." önermesinin doğru olması demektir. Ancak bu önerme $y = 2$ için $x = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{1}{4} \notin \mathbb{N}$ olduğundan doğru değildir.

1.3. İçine Fonksiyon

Tanım 4.3.1.3.1. $f : A \to B$ bir fonksiyon iken $f(A) \subset B$ ise f fonksiyonuna içine fonksiyon denir.

Örnek 4.3.1.3.1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ fonksiyonu içine bir fonksiyondur. Çünkü $\forall x \in \mathbb{N}$ için $f\left(\mathbb{N}\right) = \mathbb{R}^{+} \subset \mathbb{R}$ dir.

1.4. Sabit Fonksiyon

Tanım 4.3.1.4.1. $f : A \to B$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x \in A$ için $f(x) = c$ ise f fonksiyonuna sabit fonksiyon denir.

Örnek 4.3.1.4.1. $f(x) = 3$ sabit bir fonksiyondur. Başka bir ifade ile tanım kümesindeki her eleman değer kümesinde tek bir eleman ile eşleşmiştir.

Örnek 4.3.1.4.2. $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{ax+3}{x-2}$ fonksiyonu sabit bir fonksiyon ise $a = ?$

Çözüm. f sabit bir fonksiyon olduğu için $f(0) = f(1)$ dir. Bu durumda

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{a.0+3}{0-2} = -\frac{3}{2} \quad \text{ve} \quad x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{a.1+3}{1-2} = -(a+3)$$

dir. Buradan $a = -\dfrac{3}{2}$ olarak bulunur.

1.5. Fonksiyonların Grafiği

Tanım 4.3.1.5.1.

$$f^{*}=\{(x,f(x))\in A\times B: f:A\to B,\ y=f(x),\ x\in A\}\subseteq A\times B$$

kümesine f fonksiyonunun grafiği denir.

Tanım 4.3.1.5.2. $f:X\to Y$ bir fonksiyon $A\subset X$ ve $B\subset Y$ olsun.

$$f(A)=\{f(x)\in Y: x\in A\}$$

kümesine A nın f altındaki görüntü kümesi denir ve $f(A)$ şeklinde gösterilir.

$$f^{-1}(B)=\{x\in X: f(x)\in B\}$$

kümesine ise B nin f altındaki ters görüntü kümesi denir.

Örnek 4.3.1.5.1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$, $A=\{-2,0,3\}$, $B=\{-1,0,3\}$

ise

$$f(A)=\{-8,0,27\} \text{ ve } f^{-1}(B)=\{-1,0,\sqrt[3]{3}\}$$

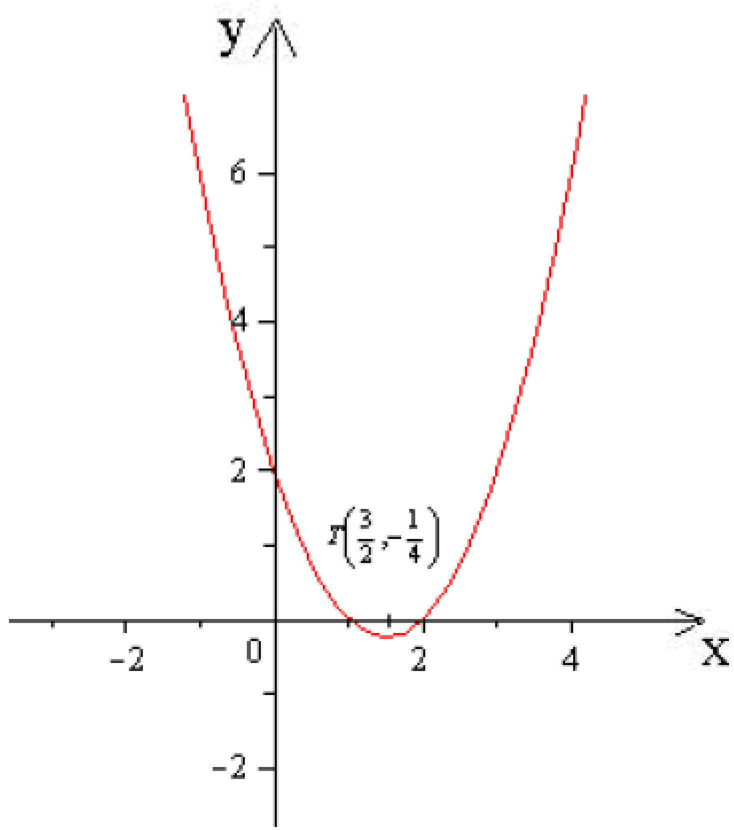
şeklindedir.

Örnek 4.3.1.5.2. $y=x^2-3x+2$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Çözüm. (1) $x=0$ için $y=2$, $y=0$ için $x=1$ veya $x=2$ dir.

(2) Tepe noktasının koordinatları $T\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ olup

$T\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{4}\right)$ dür. Bu durumda grafik



Şekil 4.3.1.5.1.

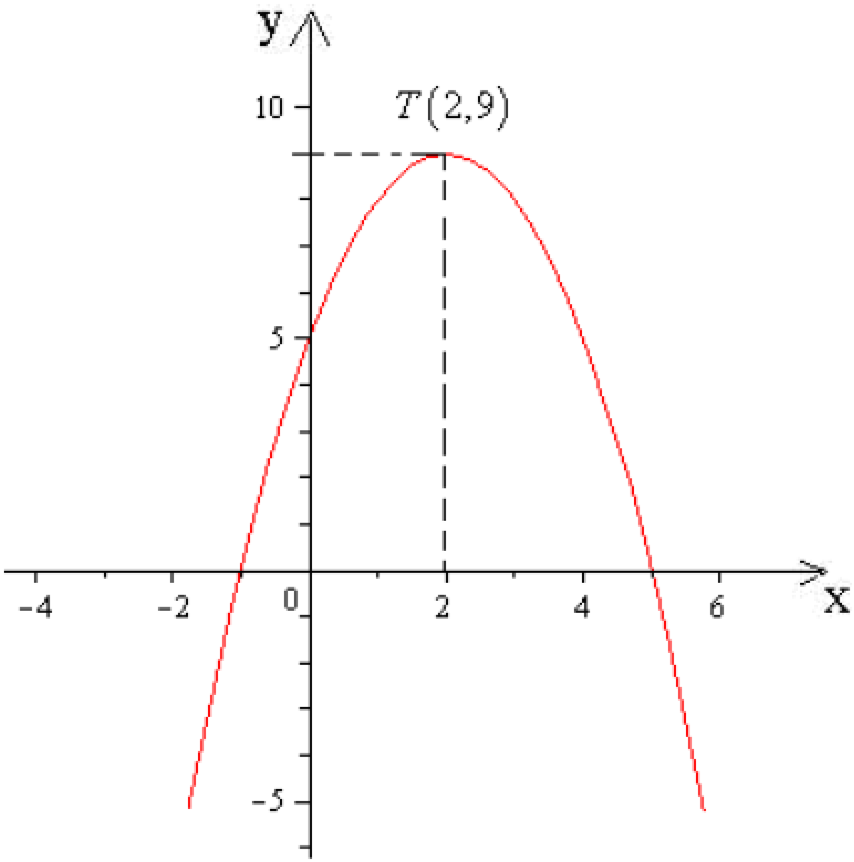
şeklindedir.

Örnek 4.3.1.5.3. $y=-x^2+4x+5$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm. (1) $x=0$ için $y=5$, $y=0$ için $x=-1$ veya $x=5$ dir.

(2) Tepe noktasının koordinatları $T\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ olup

$T(2,9)$ dur. Bu durumda grafik



Şekil 4.3.1.5.2.

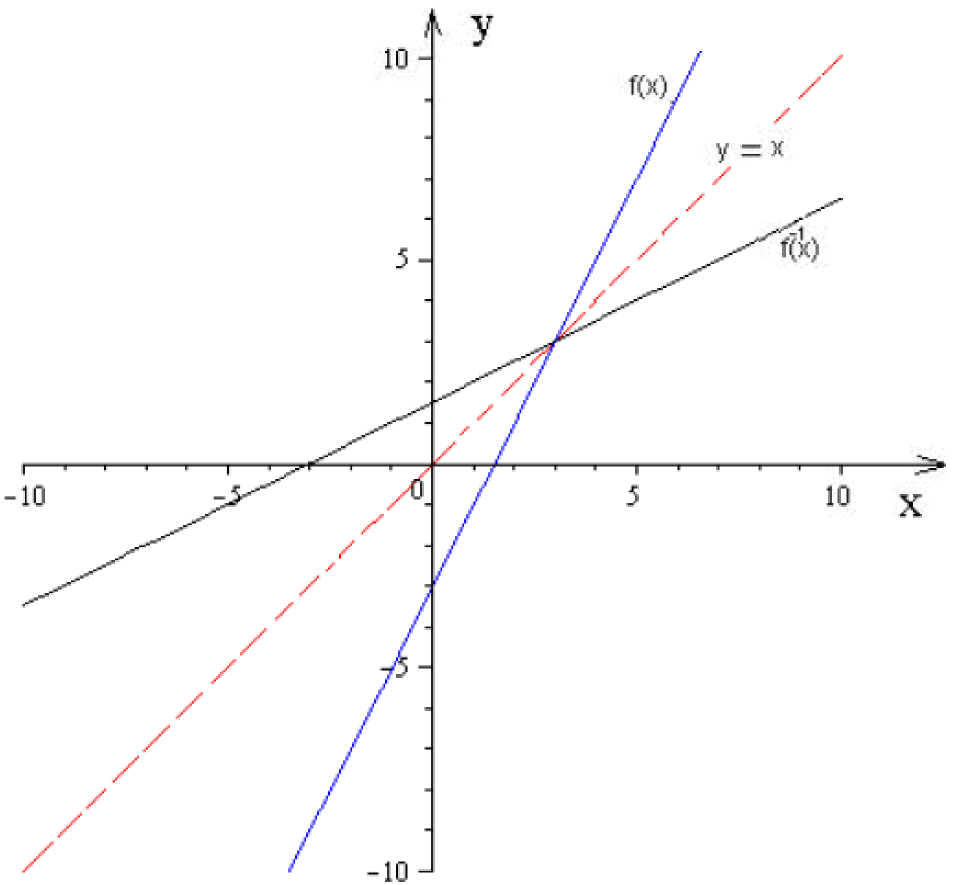
şeklindedir.

1.6. Ters Fonksiyon

Tanım 4.3.1.6.1. $f: A \to B$, $y = f(x)$ birebir - örten bir fonksiyon iken $f^{-1}(y) = x$ şeklinde tanımlanan $f^{-1}: B \to A$ fonksiyonuna f'in ters fonksiyonu denir.

Örnek 4.3.1.6.1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$ fonksiyonunun tersini bulunuz. $f(x)$ ve $f^{-1}(x)$ fonksiyonlarının grafiğini çiziniz.

Çözüm. $y = 2x - 3 \Rightarrow x = \dfrac{y+3}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}$ olup grafikler

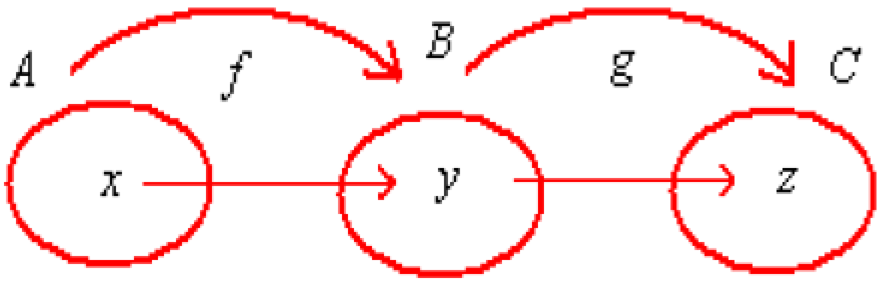


Şekil 4.3.1.6.1.

şeklindedir. Yukarıdaki şekilde de görüldüğü gibi $f(x)$ ve $f^{-1}(x)$ fonksiyonlarının eğrileri $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.

1.7. Bileşke Fonksiyon

Tanım 4.3.1.7.1. $f : A \to B$ ve $g : B \to C$ fonksiyonlar iken A dan C ye tanımlanan $\forall x \in A$ için $g \circ f(x) = g(f(x))$ fonksiyonuna bileşke fonksiyon denir.



Şekil 4.3.1.7.1.

Bileşke fonksiyon aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(1) $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

(2) $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$

(3) $f \circ I = I \circ f = f$

Örnek 4.3.1.7.1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+1$ ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ olmak üzere

$$(g \circ f)(x) = (2x+1)^2$$

dir.

Örnek 4.3.1.7.2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+1$ ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ olmak üzere

$$(f \circ g)(x) = 2x^2 + 1$$

dir.

Uyarı 4.3.1.7.1. Bu örneklerden görüldüğü gibi genelde

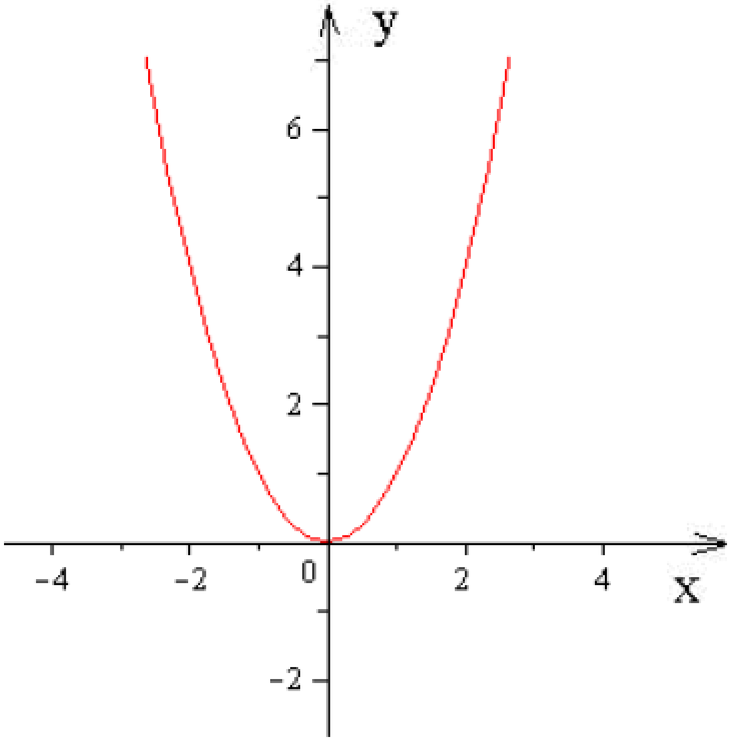
$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$

dir.

1.8. Artan - Azalan Fonksiyonlar

Tanım 4.3.1.8.1. $f : A \to B$ bir fonksiyon olsun. $\forall x_1, x_2 \in A$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ ise f fonksiyonuna artan fonksiyon, $f(x_1) > f(x_2)$ ise f fonksiyonuna azalan fonksiyon denir.

Örnek 4.3.1.8.1. $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\quad f(x)=x^2$ fonksiyonunun grafiği



Şekil 4.3.1.8.1.

şeklindedir ve bu fonksiyon $(-\infty,0]$ aralığında azalan, $[0,\infty)$ aralığında ise artandır.

1.9. Tek-Çift Fonksiyonlar

Tanım 4.3.1.9.1. A bir simetrik küme olmak üzere $f: A \to B$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x \in A$ için $f(-x) = f(x)$ ise f fonksiyonuna çift fonksiyon, $f(-x) = -f(x)$ ise f fonksiyonuna tek fonksiyon denir.

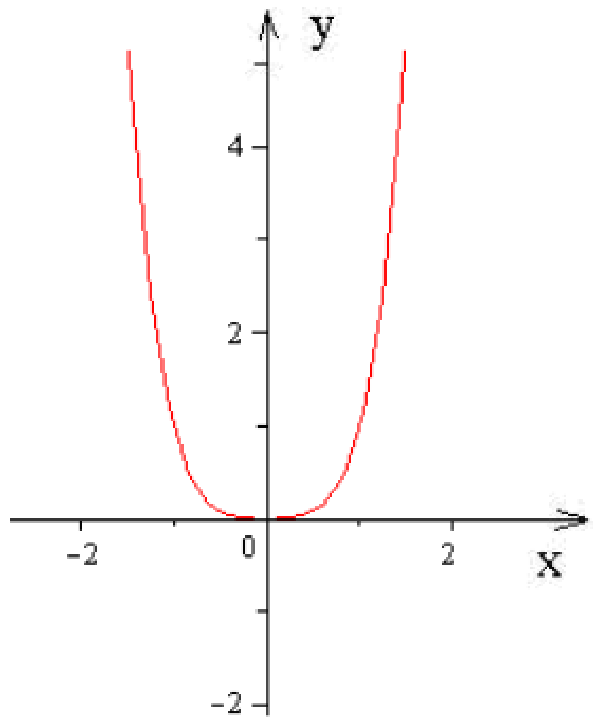
Örnek 4.3.1.9.1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2+4$ fonksiyonu için $f(-x) = f(x)$ olduğundan f fonksiyonu çift fonksiyondur.

Örnek 4.3.1.9.2. $f: R \to R$, $f(x) = x^3+x$ fonksiyonu için

$$f(-x) = (-x)^3+(-x) = -(x^3+x) = -f(x)$$

olduğundan f fonksiyonu tek fonksiyondur.

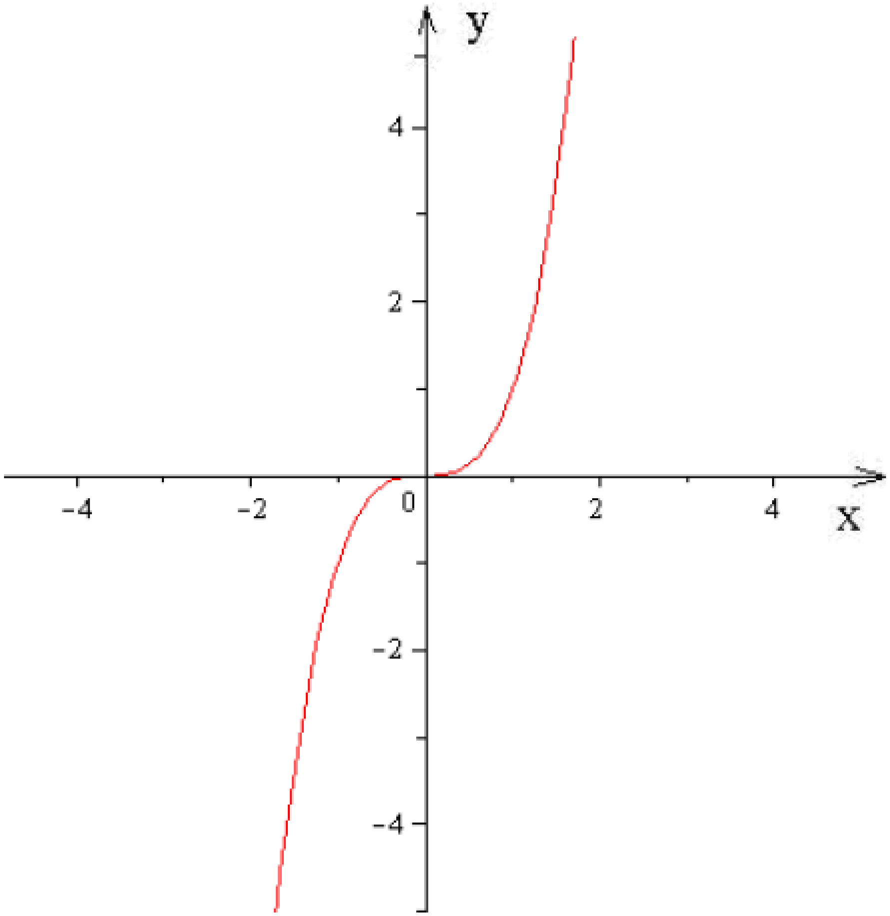
Örnek 4.3.1.9.3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^4$ fonksiyonunun grafiği



Şekil 4.3.1.9.1.

şeklindedir.

Örnek 4.3.1.9.4. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3$ fonksiyonunun grafiği



Şekil 4.3.1.9.2.

şeklindedir.

Uyarı 4.3.1.9.1. Tek fonksiyonların grafiği orijine, çift fonksiyonların grafiği ise y-eksenine göre simetriktir.

1.10. Periyodik Fonksiyon

Tanım 4.3.1.10.1. $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için $f(x+T) = f(x)$ eşitliğini sağlayan pozitif bir T sayısı varsa f fonksiyonuna periyodik fonksiyon, T sayısına da f fonksiyonunun periyodu denir. T sayısının en küçük pozitif değerine fonksiyonun esas periyodu adı verilir.

Periyodik fonksiyonların bazı özelliklerini şöyle sıralayabiliriz:

(1) $\int_{\alpha-T/2}^{\alpha+T/2} f(x)dx = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx$ dir. Bu özellik için $\alpha = T/2$ alınırsa $\int_{0}^{T} f(x)dx = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx$ elde edilir.

(2) $\int_{T}^{T+x} f(x)dx = \int_{0}^{x} f(x)dx$ dir.

(3) $\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$ dir.

(4) $g(x) = \int_{0}^{x} f(u)du$ ise $g(x+T) = g(x)$ olması için gerek ve yeter şart $\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx = 0$ olmasıdır.

Örnek 4.3.1.10.1. $f(x)=\sin x$ fonksiyonu 2π esas periyotlu bir fonksiyondur.

Çözüm.

$$f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)=\sin x\cos 2\pi+\cos x\sin 2\pi=\sin x=f(x)$$

dir.

Örnek 4.3.1.10.2. $f(x)=tgx$ fonksiyonu π esas periyotlu bir fonksiyondur.

Çözüm.

$$f(x+\pi)=tg(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{\sin x\cos\pi+\cos x\sin\pi}{\cos x\cos\pi+\sin x\sin\pi}$$

$$=\frac{-\sin x}{-\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}=tgx=f(x)$$

dir.

Tanım 4.3.1.10.2. $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için $f(x+T) = -f(x)$ eşitliğini sağlayan pozitif bir T sayısı varsa f fonksiyonuna anti periyodik fonksiyon, T sayısına da f fonksiyonunun anti periyodu denir. T sayısının en küçük pozitif değerine fonksiyonun esas anti periyodu adı verilir.

Örnek 4.3.1.10.3. $f(x) = \sin x$ fonksiyonu π anti periyotlu bir fonksiyondur.

Çözüm.

$f(x+\pi) = \sin(x+\pi) = \sin x \cos \pi + \cos x \sin \pi = -\sin x = -f(x)$ dir.

Örnek 4.3.1.10.4. $f(x)=\cos x$ fonksiyonu π anti periyotlu bir fonksiyondur.

Çözüm.

$$f(x+\pi)=\cos(x+\pi)=\cos x\cos\pi-\sin x\sin\pi=-\cos x=-f(x) \text{ dir.}$$

Uyarı 4.3.1.10.1. T anti periyodik bir fonksiyon, $2T$ periyotlu bir fonksiyondur.

Örnek 4.3.1.10.1. ve Örnek 4.3.1.10.3. den görüldüğü gibi sin$x$ fonksiyonu 2π periyotlu ve π anti periyotlu bir fonksiyondur.

2. Özel Tanımlı Fonksiyonlar

2.1. İşaret Fonksiyonu

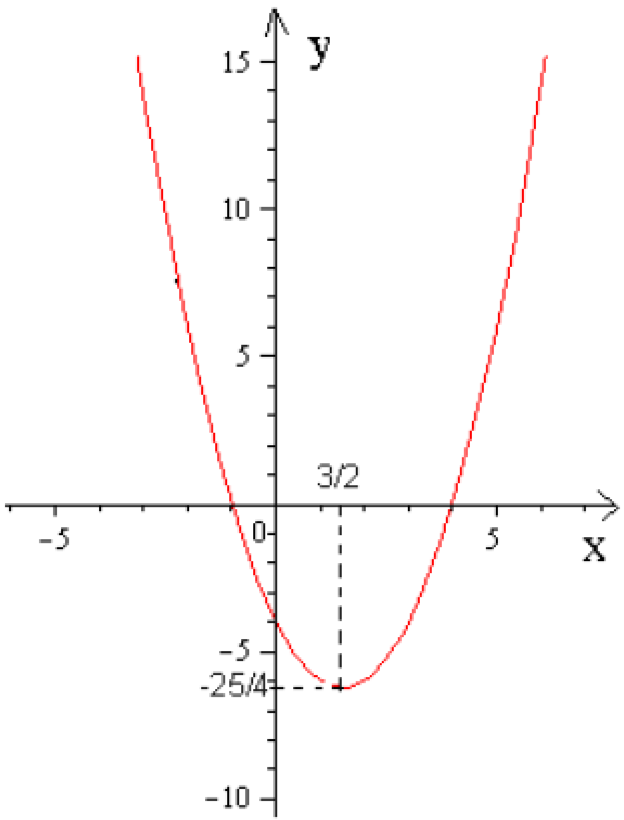
Tanım 4.3.2.1.1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere

$$g(x)=\begin{cases} 1, & f(x)>0 \\ 0, & f(x)=0 \\ -1, & f(x)<0 \end{cases}$$

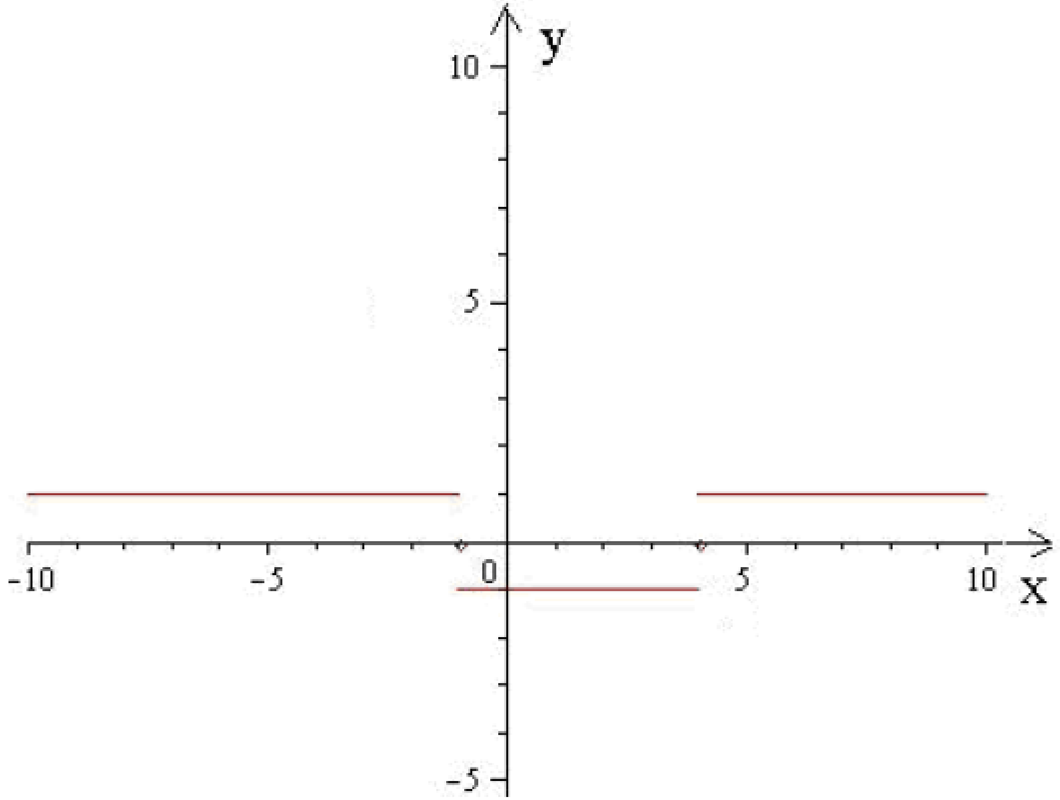
şeklinde tanımlanan $g(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ fonksiyonunun işaret fonksiyonu denir ve $g(x)=\operatorname{sgn} f(x)$ şeklinde gösterilir.

Örnek 4.3.2.1.1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x-4$ fonksiyonu için $\operatorname{sgn} f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm. Öncelikle $f(x)=x^2-3x-4$ fonksiyonunun grafiğini çizelim: $x=0$ için $y=-4$, $y=0$ için $x=-1$ veya $x=4$ dür. Tepe noktasının koordinatları $T\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ olup $T\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{25}{4}\right)$ dür. Bu durumda grafik



Şekil 4.3.2.1.1.



Şekil 4.3.2.1.2.

şeklindedir. Dolayısıyla, istenen grafik

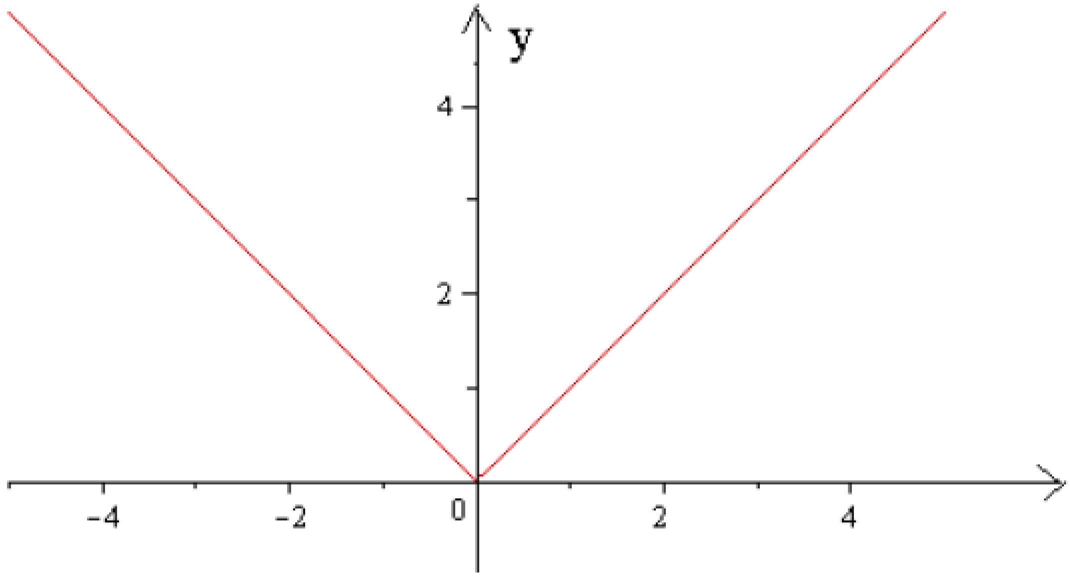
şeklindedir.

.2.2. Mutlak Değer Fonksiyonu

Tanım 4.3.2.2.1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $|f(x)|=\begin{cases} f(x), & f(x)\geq 0 \\ -f(x), & f(x)<0 \end{cases}$ şeklinde tanımlanan $|f(x)|$ fonksiyonuna $f(x)$ fonksiyonunun mutlak değer fonksiyonu denir.

Örnek 4.3.2.2.1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ fonksiyonu için $|f(x)|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm. Mutlak değer fonksiyonun tanımından $|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$ olduğundan fonksiyonun grafiği



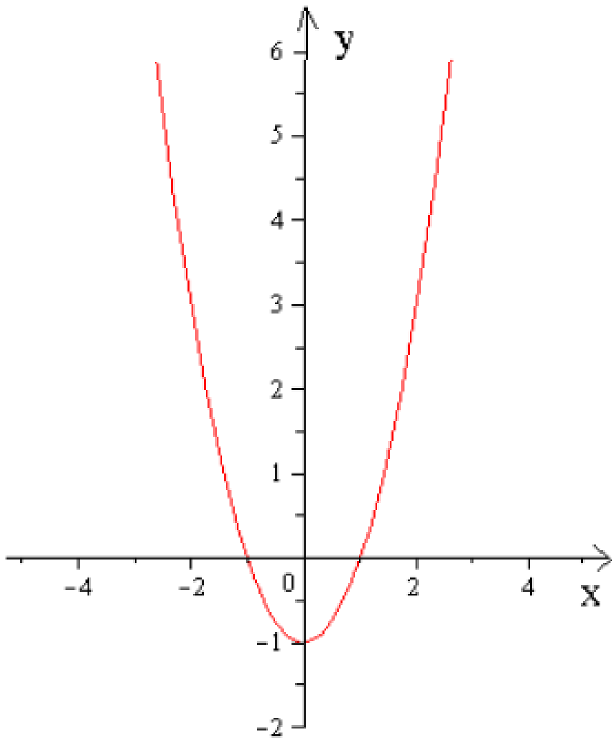
Şekil 4.3.2.2.1.

şeklindedir.

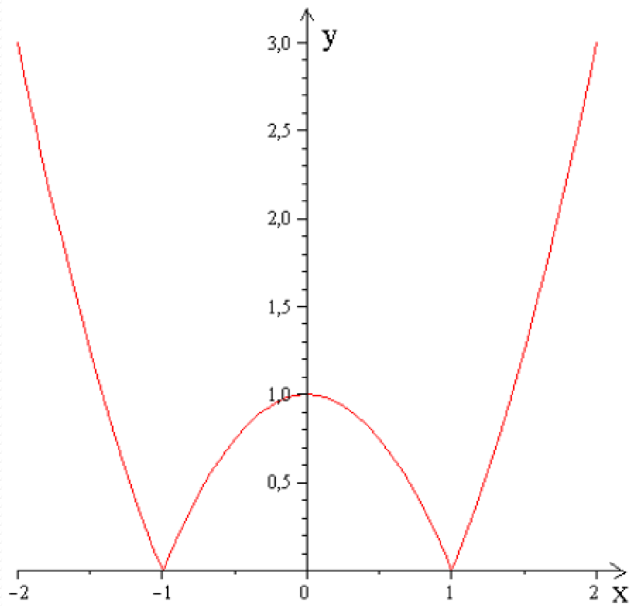
Örnek 4.3.2.2.2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$ fonksiyonu için $|f(x)|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm. Öncelikle $f(x)=x^2-1$ fonksiyonunun grafiğini çizelim:

$x=0$ için $y=-1$, $y=0$ için $x=-1$ veya $x=1$ dir. Tepe noktasının koordinatları $T\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ olup $T(0,-1)$ dir. Bu durumda grafik



Şekil 4.3.2.2.2.



Şekil 4.3.2.2.3.

şeklindedir. $f(x)=x^2-1$ fonksiyonunun grafiğinde x-eksenin altında kalan kısmın x-eksenine göre simetriği alınarak $|f(x)|$ fonksiyonunun grafiği elde edilir. Bu durumda istenen grafik şeklindedir.

Uyarı 4.3.2.2.1. $|f(x)|=f(x).\mathrm{sgn}(f(x))$ şeklinde de tanımlanabilir.

2.3. Tam Değer Fonksiyonu

Tanım 4.3.2.3.1. Bir a reel sayısından büyük olmayan tam sayıların en büyüğüne a sayısının tam kısmı veya tam değeri denir ve $[\![a]\!]$ şeklinde gösterilir.

Örnek 4.3.2.3.1. $[\![1,5]\!]=1$, $[\![-1,5]\!]=-2$, $[\![1]\!]=1$, $[\![0,1]\!]=0$, $[\![-0,1]\!]=-1$.

Tanım 4.3.2.3.2. $f:A\to B$ bir fonksiyon olsun. y, x den büyük olmayan en büyük tamsayı olmak üzere $f(x)=y$ şeklinde tanımlanan fonksiyona tam değer fonksiyonu denir ve $f(x)=[\![x]\!]$ şeklinde gösterilir.

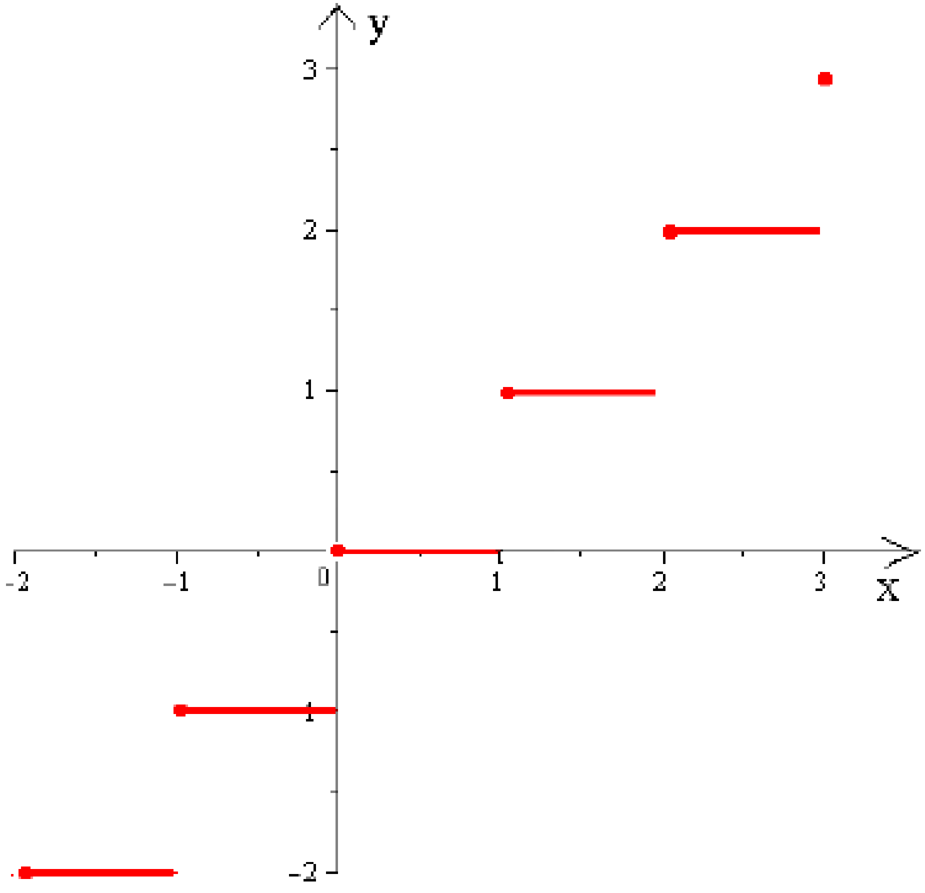
Örnek 4.3.2.3.2. $f:[-2,3]\rightarrow\mathbb{R}$ tanımlı $f(x)=[\![x]\!]$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm. $-2\leq x<-1\Rightarrow[\![x]\!]=-2$, $\quad -1\leq x<0\Rightarrow[\![x]\!]=-1$,

$0\leq x<1\Rightarrow[\![x]\!]=0$, $\quad 1\leq x<2\Rightarrow[\![x]\!]=1$,

$2\leq x<3\Rightarrow[\![x]\!]=2$, $\quad x=3\Rightarrow[\![x]\!]=3$

dir. Bu durumda grafik



Şekil 4.3.2.3.1.

şeklindedir.

Örnek 4.3.2.3.3. $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$ tanımlı $f(x)=[\![x^2]\!]$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm. $f(-x)=[\![(-x)^2]\!]=[\![x^2]\!]=f(x)$ olduğundan fonksiyon çifttir. Çift fonksiyonların grafikleri y eksenine göre simetrik olduğundan fonksiyonun grafiğinin $[0,2]$ aralığındaki parçası çizilip y eksenine göre simetriği alınır.

$[\![x^2]\!]=k$, $k\in\mathbb{N}$ için

$$k\le x^2<k+1 \Rightarrow \sqrt{k}\le x<\sqrt{k+1}$$

dir. Dolayısıyla

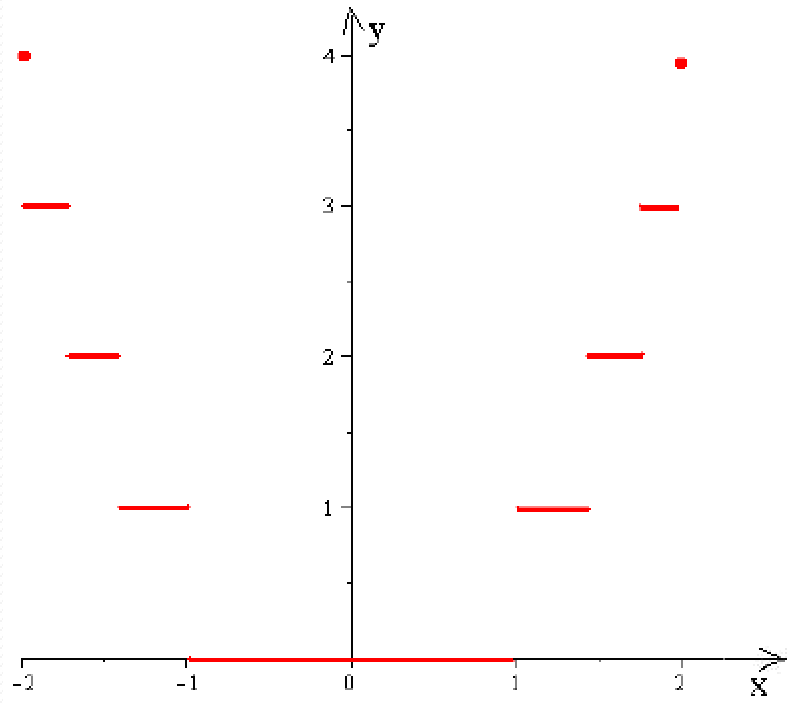
$k=0$ ise $0 \leq x < 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 < 1 \Rightarrow [\![x^2]\!] = 0$

$k=1$ ise $1 \leq x < \sqrt{2} \Rightarrow 1 \leq x^2 < 2 \Rightarrow [\![x^2]\!] = 1$

$k=2$ ise $\sqrt{2} \leq x < \sqrt{3} \Rightarrow 2 \leq x^2 < 3 \Rightarrow [\![x^2]\!] = 2$

$k=3$ ise $\sqrt{3} \leq x < \sqrt{4} = 2 \Rightarrow 3 \leq x^2 < 4 \Rightarrow [\![x^2]\!] = 3$

$x=2$ için $[\![x^2]\!] = [\![2^2]\!] = [\![4]\!] = 4$



Şekil 4.3.2.3.2.

dir. Bu durumda grafik şeklindedir.

2.4. Uzaklık Fonksiyonu

Tanım 4.3.2.4.1. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $d(x,y) = |x-y|$ değerine x ile y arasındaki uzaklık denir.

Tanım 4.3.2.4.2. $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ olmak üzere $d(x,y) = |x-y|$ şeklinde tanımlanan fonksiyona $\mathbb{R}$ de tanımlı uzaklık fonksiyonu veya $\mathbb{R}$ de metriktir denir.

Uzaklık fonksiyonu için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

(1) $|x-y| \geq 0$ olduğundan $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ için

$$d(x,y) \geq 0$$

dır.

(2) $|x-y|=0 \Leftrightarrow x=y$ olduğundan

$$d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$$

dir.

(3) $|x-y|=|y-x|$ olduğundan $\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ için

$$d(x,y)=d(y,x)$$

dir.

(4) $\forall (x,y),(y,z),(x,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ için $|x-z|\le|x-y|+|y-z|$

olduğundan

$$d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$$

dir.

(1), (2), (3), (4) özelliklerini sağlayan $d(x,y)$ fonksiyonu ile $\mathbb{R}$ kümesi birlikte matematiksel bir yapı belirtir. Bu yapıya $(\mathbb{R},d)$ metrik uzayı veya bir boyutlu Euclid uzayı denir ve $\mathbb{R}^1$ şeklinde gösterilir.

Örnek 4.3.2.4.1. $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+}\cup\{0\}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}$ de

$$d(x,y)=|x-y|$$

ile tanımlı uzaklık fonksiyonu olmak üzere $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+}\cup\{0\}$, $f(x,y)=\min\{d(x,y),\ 1\}$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun $\mathbb{R}$ de bir uzaklık fonksiyonu (metrik) olduğunu gösteriniz.

Çözüm. f fonksiyonunun reel sayılar kümesinde metrik olduğunu göstermek için (1), (2), (3), (4) özelliklerini gerçeklediğini göstermek yeterlidir:

(1) $1>0$ ve $d(x,y)\geq 0$ olduğundan $f(x,y)=\min\{d(x,y),\ 1\}\geq 0$ olur.

(2) $f(x,y)=0 \Leftrightarrow \min\{d(x,y),\ 1\}=0 \Rightarrow 1\neq 0$ olup $d(x,y)=0$ olur. $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ olmasıdır. Yani $f(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ bulunur.

(3) $d(x,y)=d(y,x)$ olduğundan $f(x,y)=f(y,x)$ dir. Dolayısıyla $f(x,y)=\min\{d(x,y),\ 1\}=\min\{d(y,x),\ 1\}=f(y,x)$ elde edilir.

(4) $f(x,z)\leq f(x,y)+f(y,z)$ olduğunu gösterebilmek için:

(4) $f(x,z) \le f(x,y) + f(y,z)$ olduğunu gösterebilmek için:

1. $f(x,z) = \min\{d(x,z),1\} = 1$ veya $f(x,z) = d(x,z)$,

2. $f(x,y) = \min\{d(x,y),1\} = 1$ veya $f(x,y) = d(x,y)$,

3. $f(y,z) = \min\{d(y,z),1\} = 1$ veya $f(y,z) = d(y,z)$,

durumları yorumlanmalıdır.

	$f(x,z)$	$f(x,y)$	$f(y,z)$	$f(x,z) \le f(x,y) + f(y,z)$
1	1	1	1	$1 \le 1+1$
2	1	$d(x,y)$	1	$1 \le d(x,y)+1$
3	1	1	$d(y,z)$	$1 \le 1+d(y,z)$
4	1	$d(x,y)$	$d(y,z)$	$1 \le d(x,y)+d(y,z)$
5	$d(x,z)$	$d(x,y)$	$d(y,z)$	$d(x,z) \le d(x,y)+d(y,z)$
6	$d(x,z)$	1	1	$d(x,z) \le 1+1$

Tablonun 1., 2. ve 3. satırlarından görüldüğü gibi

$$1 \le 1+1,\ 1 \le d(x,y)+1,\ 1 \le 1+d(y,z) \text{ ve } d(x,y) \ge 0,\ d(y,z) \ge 0$$

olup eşitsizlikler doğrudur. Ayrıca tablonun 4. satırında

$$f(x,z) = \min\{d(x,z),1\} = 1$$

seçilmiş olup $1 < d(x,z)$ olduğu açıktır. Ayrıca $d(x,z)$ bir uzaklık fonksiyonu olduğundan

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$$

dir. Bu son iki eşitsizlikten

$$1 < d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$$

bulunur ki doğrudur. 5. satır $d(x,z)$ bir uzaklık fonksiyonu olduğundan açıktır. Yani

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$$

geçerlidir. Tablonun 6. satırında,

$$f(x,z)=\min\{d(x,z),1\}=d(x,z)$$

seçilmiş olup $d(x,z)<1$ olduğu açıktır. Bu durumda $d(x,z)<1<1+1$ olup $d(x,z)\leq 1+1$ eşitsizliği doğrudur. Tablonun 7. satırında

$$f(x,z)=\min\{d(x,z),1\}=d(x,z)$$

seçilmiş olup $d(x,z)<1$ olduğu açıktır. Bu durumda $d(x,z)<1$ olup

$$d(x,z)\leq d(x,y)+1$$

eşitsizliği doğrudur. Son satırın doğru olduğu 7. satıra benzer şekilde gösterilir.

Kaynaklar:

1. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus I**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.
2. Prof. Dr. C. Çinar, Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, Prof. Dr. A. S. Kurbanlı, Prof. Dr. D. Şimşek, **Genel Matematik**, Dizgi Ofset, 2013.
3. Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, **Analiz III Diziler ve Seriler,** Dizgi Ofset, 2017.
4. H. İ. Karakaş, **Matematiğin Temelleri, Sayı Sistemleri ve Cebirsel Yapılar,** ODTÜ yayınları, 2011.