MATEMATIK 1

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2020

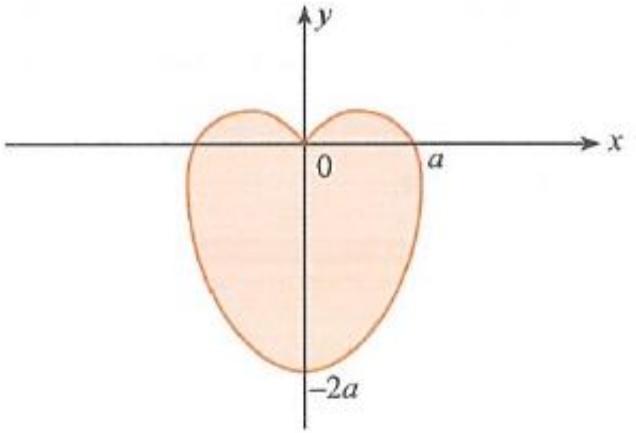
d) $r = a(1 - \sin\varphi)$ **(kardiyoid)** **e)** $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ **(lemniscat)**

d) $r = a(1 - \sin\varphi)$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\varphi = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2(1-\sin\varphi)^2\,d\varphi$$

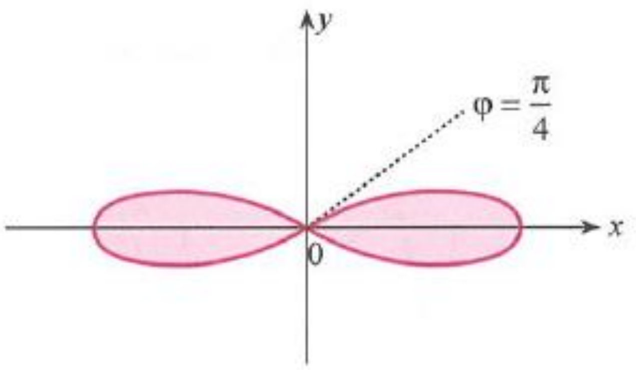
$$= a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1 - 2\sin\varphi + \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi$$

$$= a^2\left(\varphi + 2\cos\varphi + \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi a^2}{2}$$

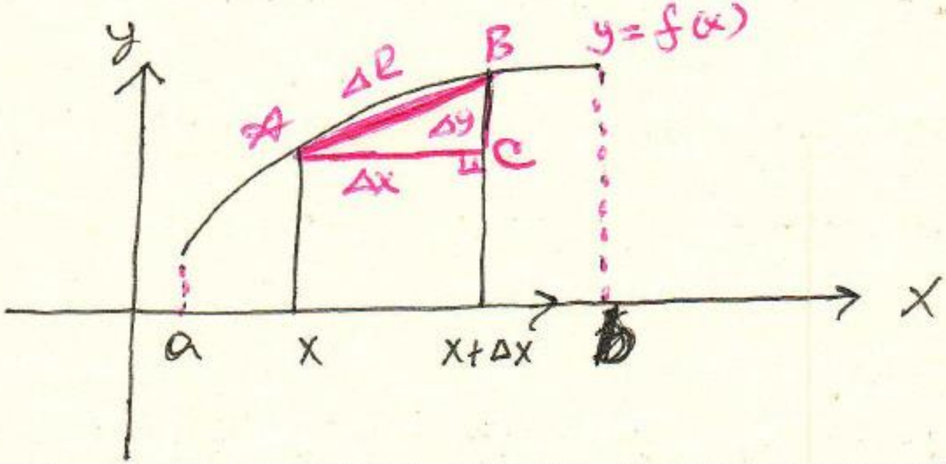


e) $r^2 = a^2\cos 2\varphi$

$$A = 4\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4} a^2\cos 2\varphi\,d\varphi = 2a^2\,\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$



$y = f(x)$ eşitliği ile verilen türevli f fonksiyonun gözönüne alalım. Bu eğrinin $x_1 = a$ ve $x_2 = b$ absisli noktaları arasında bulunan parçası-nın uzunluğunu bulmak istiyoruz.



Δx çok küçük alındığında $\overset{\frown}{AB}$ yayının $\Delta \ell$ uzunluğu ile AB doğru parçasının uzunluğu yaklaşık olarak eşittir. Buna göre

$$\Delta \ell \cong \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x$$

yazılabilir. Her iki taraf Δx ile bölünür ve $\Delta x \to 0$ için limit alınırsa

$\ell' = \sqrt{1 + (y')^2}$ bulunur. Diferensiyel ve integral hesabın temel teoremi gereğince,

$$\boxed{\ell = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\, dx}$$ olur.

Eğer eğri

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$$

parametrik denklemleri ile verilmiş ise bu durumda eğrinin uzunluğu, t_1 ve t_2 herhangi iki noktanın parametreleri olmak üzere

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\, \Delta t$$

olduğundan,

C - eğrisinin yay diferansiyeli

$$dl = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt$$

olup,

$$\boxed{l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt \quad \text{dir.}}$$

Ayrıca, $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{d\varphi} \cdot \dfrac{d\varphi}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{d\varphi}}{\dfrac{dx}{d\varphi}}$

olduğundan,

$$dl = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx =$$

$$= \sqrt{1 + \left(\dfrac{\dfrac{dy}{d\varphi}}{\dfrac{dx}{d\varphi}} \right)^2}\, \dfrac{dx}{1} =$$

$$= \sqrt{\left(\dfrac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\varphi}\right)^2} \cdot \dfrac{\dfrac{\cancel{dx}}{1}}{\dfrac{\cancel{dx}}{d\varphi}} = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi .$$

dir. Diğer taraftan, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ olduğundan,

$$\frac{dx}{d\varphi} = r'\cos\varphi - r.\sin\varphi, \quad \frac{dy}{d\varphi} = r'\sin\varphi + r.\cos\varphi;$$

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 = (r')^2\cos^2\varphi - \cancel{2.rr'\cos\varphi\sin\varphi} + r^2\sin^2\varphi;$$

$$+\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = (r')^2\sin^2\varphi + \cancel{2rr'\cos\varphi\sin\varphi} + r^2\cos^2\varphi;$$

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = (r')^2 + r^2$$ olur. O zaman

$dl = \sqrt{(r')^2 + r^2}\,d\varphi$ olur. Eğri üzerinde $P(r_1, \alpha)$, $Q(r_2, \beta)$ noktalarını birleştiren yayın uzunluğu

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi \quad \text{olur.}$$

1. Aşağıda denklemleri ve uç noktalarının apsisleri verilen eğri parçalarının uzunluklarını bulunuz.

a. $y = \left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$, $\quad x = 0 \quad x = 2$

b. $y = \dfrac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$, $\quad x = 0, \quad x = 3$

c. $y = \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{1}{x}$, $\quad x = 1, \quad x = 2$

ç. $y = x^{3/2}$, $\quad x = 0, \quad x = 4$

d. $9x^2 = 4y^3$, $\quad x = 0, \quad x = 2\sqrt{3}$

e. $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{4x}$, $\quad x = 1, \quad x = 3$

f. $y = \dfrac{1}{3}x^{3/2} - x^{1/2}$, $\quad x = 1, \quad x = 9$

g. $y = (4 - x^{2/3})^{3/2}$, $x = 0$, $x = 2$

h. $y = x^2 - \frac{1}{8}\ln x$, $x = 1$, $x = e$

ı. $y = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2}$, $x = 0$, $x = 2$

i. $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$, $x = 1$, $x = 3$

j. $5y^3 = x^2$ $x = 0$, $x = \sqrt{5}$

k. $y = \frac{2}{5}x^{5/4} - \frac{2}{3}x^{3/4}$, $x = 1$, $x = 16$

l. $y = \ln(x^2 - 1)$ $x = 2$, $x = 5$

m. $y = \ln(\sin x)$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{2\pi}{3}$

n. $y = \ln x$, $x = \sqrt{3}$, $x = \sqrt{8}$

Çözüm

a. $y=\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$, $\qquad x=0 \qquad x=2$

a. $y=\left(\frac{x}{2}\right)^{3/2} \Rightarrow y'=\frac{3}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2}$

$$1+(y')^2=1+\frac{9}{16}\frac{x}{2}=1+\frac{9x}{32}$$

$$l=\int_0^2\sqrt{1+\frac{9x}{32}}\,dx=\int_1^{25/16}t^{1/2}\cdot\frac{32}{9}\,dt$$

$$=\frac{32}{9}\cdot\frac{2}{3}t^{3/2}\Big|_1^{25/16}=\frac{64}{27}\left(\frac{125}{64}-1\right)$$

$$=\frac{64}{27}\cdot\frac{61}{64}=\frac{61}{27}$$

b. $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}, \qquad x = 0, \qquad x = 3$

b. $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2} \Rightarrow y' = x\,(x^2 + 2)^{1/2}$

$$1 + (y')^2 = 1 + \left[x(x^2 + 2)^{1/2} \right]^2 = 1 + x^2\,(x^2 + 2)$$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$$

$$l = \int_0^3 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_0^3 (x^2 + 1)\, dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 + x \right) \Big|_0^3 = 12 \textit{ birim}$$

c. $y=\frac{x^3}{12}+\frac{1}{x},\qquad x=1,\qquad x=2$

c. $y=\frac{x^3}{12}+\frac{1}{x}\Rightarrow y'=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{x^2}$

$$1+(y')^2=1+\left(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{x^2}\right)^2=1+\frac{x^4}{16}-\frac{1}{2}+\frac{1}{x^4}$$

$$=\frac{x^4}{16}+\frac{1}{2}+\frac{1}{x^4}=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x^2}\right)^2$$

$$l=\int_1^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_1^2\left(\frac{x^4}{4}+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^5}{20}-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^2=\frac{32}{20}-\frac{1}{2}-\frac{1}{20}+1=\frac{41}{20}$$

ç. $y = x^{3/2}$, $x = 0$, $x = 4$

ç. $y = x^{3/2}$, $y' = \frac{3}{2}x^{1/2} \Rightarrow 1+(y')^2 = 1+\frac{9}{4}x$

$$l = \int_0^4 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^4 (1+\frac{9}{4}x)^{1/2}\,dx$$

$$= \frac{4}{9}(1+\frac{9}{4}x)^{3/2} \cdot \frac{2}{3}\Big|_0^4 = \frac{8}{27}(10^{3/2}-1)$$

d. $9x^2 = 4y^3$, $x = 0$, $x = 2\sqrt{3}$

d. $x = 0$ için $y = 0$, $x = 2\sqrt{3}$ için $y = 3$ olur.

$x = \frac{2}{3}y^{3/2}$ olacağından

$$1+(x')^2 = 1+\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot y^{1/2}\right)^2 = 1+y \quad \text{olur.}$$

Buna göre, $l = \int_0^3 \sqrt{1+(x')^2}\,dy = \int_0^3 (1+y)^{1/2}\,dy$

$$= (1+y)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\Big|_0^3 = \frac{14}{3}$$

2. Aşağıda denklemleri ve uç noktalarının ordinatları verilen eğri parçalarının uzunluklarını hesaplayınız.

a. $x=\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{2y}$, . $y=1$, $y=2$

b. $x=\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{8y^2}$, $y=1$, $y=2$

c. $x=\ln(\sec y)$, $y=0$, $y=\frac{\pi}{3}$

d. $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$, $y=1$, $y=e$

a. $x=\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{2y}$, . $y=1$, $y=2$

Çözüm

a. $x=\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{2y} \Rightarrow x'=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2y^2}$

$$1+(x')^2=1+\frac{1}{4}(y^2-\frac{1}{y^2})^2=\frac{1}{4}(y^2+\frac{1}{y^2})^2$$

$$l=\frac{1}{2}\int_1^2\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)dy=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{y}\right)\Big|_1^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{17}{12}$$

b. $x=\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{8y^2}, \qquad y=1, \qquad y=2$

Çözüm

b. $x=\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{8y^2} \Rightarrow x'=y^3-\frac{1}{4y^3}$

$$1+(x')^2=1+(y^3-\frac{1}{4y^3})^2=1+y^6-\frac{1}{2}+\frac{1}{16y^6}$$

$$=y^6+\frac{1}{2}+\frac{1}{16y^6}=(y^3+\frac{1}{4y^3})^2$$

$$l=\int_1^2\sqrt{1+(x')^2}\,dy=\int_1^2(y^3+\frac{1}{4y^3})\,dy$$

$$=\left(\frac{1}{4}y^4-\frac{1}{8y^2}\right)\Bigg|_1^2=4-\frac{1}{32}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=3\frac{27}{32}$$

c. $x = \ln(\sec y), \qquad y = 0, \qquad y = \dfrac{\pi}{3}$

Çözüm

c. $x = \ln(\sec y) \Rightarrow x' = \dfrac{(\sec y)'}{\sec y}$

$$= \frac{\sin y \cdot \sec^2 y}{\sec y} = \sin y \sec y = \tan y$$

$$I = \int_0^{\pi/3} \sqrt{1+\tan^2 y}\,dy = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos y}\,dy$$

$$= \ln\left|\frac{1+\sin y}{\cos y}\right|\Bigg|_0^{\pi/3} = \ln(2+\sqrt{3})$$

d. $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y, \qquad y=1, \qquad y=e$

Çözüm

d. $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y \Rightarrow x'=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2y}$

$$l=\int_1^e\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}y-\frac{1}{2y}\right)^2}\,dy=\int_1^e\sqrt{\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right)^2}\,dy$$

$$=\int_1^e\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right)dy=\left(\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{2}\ln y\right)\Big|_1^e$$

$$=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$$

5. Parametre aralıkları karşılarında yazılı eğri parçasının uzunluklarını hesaplayınız.

a. $x = 2t^2,\qquad y = t^3,\qquad -1 \le t \le 1$

Çözüm

a. $\dot{x} = 4t,\ \dot{y} = 3t^2$

$$l = \int_{-1}^{1} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\, dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{16t^2 + 9t^4}\, dt$$

$$= 2\int_{0}^{1} \sqrt{t^2(16+9t^2)}\, dt = 2\int_{0}^{1} \sqrt{16+9t^2}\ \ t\, dt$$

$$= 2\cdot\frac{1}{18}(16+9t^2)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\Big|_0^1 = \frac{122}{27}$$

c. $x = 2(1 - \cos t)$, $y = 2\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$

d. $x = a - a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \le t \le \alpha$

c. $\dot{x} = 2\sin t$, $\dot{y} = 2\cos t$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}\; dt = \int_0^{2\pi} 2\, dt = 2t \Big|_0^{2\pi} = 4\pi$$

d. $\dot{x} = -a \sin t$, $\dot{y} = a \cos t$

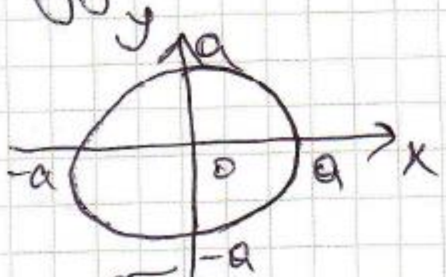
$$l = \int_0^{\alpha} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t}\, dt = \int_0^{\alpha} a \cdot dt = at \Big|_0^{\alpha} = a\alpha$$

Örnek: Yarıçapı $r=a$ olan çember uzunluğunu hesaplayınız.

Çözüm: Çember denklemi kutupsal koordinatlarda verildiğine göre

$$\ell=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(r')^2+r^2}\,d\theta$$ formülü

uygulanacak.

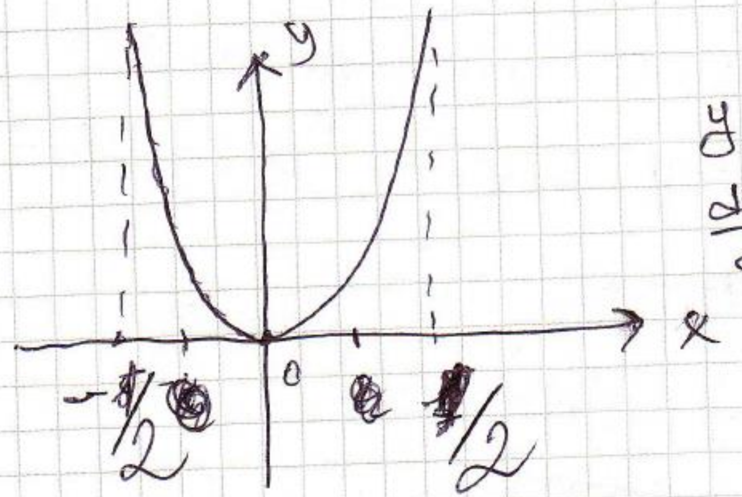


$0\leq\theta\leq 2\pi$.

$r=a \Rightarrow r'=0$.

$$\ell=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{0^2+a^2}\,d\theta=a\int_{0}^{2\pi}d\theta=$$

$$=a\cdot\theta\Big|_{0}^{2\pi}=2\pi a \text{ br. bulunur.}$$



$$y = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

$$\frac{1}{2}\, l = \int_0^{1/2} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx =$$

$$= \int_0^{1/2} \sqrt{1+4x^2}\, dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} 2x = u & dx = \frac{1}{2}du \\ x=0 \text{ için } u=0. & \\ x=1/2 \text{ için } u=1 & \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1+u^2}\, du$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{1} \sqrt{1+u^2}\, du = \begin{Bmatrix} u = tg(t) \\ du = 1 + tg^2(t)\, dt = \\ = \frac{1}{\cos^2(t)}\, dt \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=0 \ \text{için} \ \cancel{dt}\ \operatorname{arctg}(0) = 0 \\ u=1 \ \text{için} \ t = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2(t)} \cdot \frac{1}{\cos(t)}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^3(t)}\, dt =$$

$$= \left\{ \int \frac{1}{\cos^3(t)}\, dt = \frac{1}{2} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} + \frac{1}{2} \ln\left| \frac{1}{\cos(x)} + tg(x) \right| + C \right\} =$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} + \ln\left| \frac{1}{\cos(x)} + tg(x) \right| \right]_0^{\pi/4}$$

Dönel cisimlerin hacimleri:

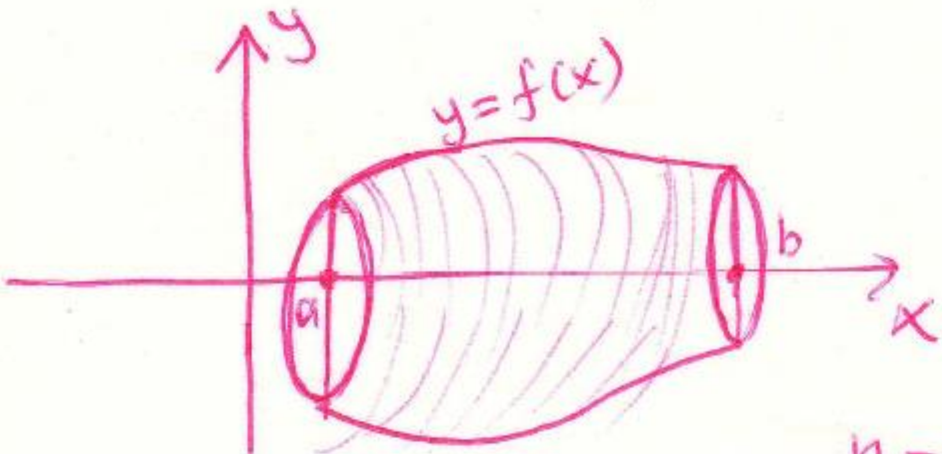
Bir dairesel silindirin hacmi, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımına eşittir.

Yani

(i) $\boxed{V = \pi r^2 . h}$ dir.

Kapalı düzgün bir bölgenin kendi düzleminde bulunan bir eksen etrafında dönmesiyle oluşan cisimler dönel cisim olarak adlandırılır.

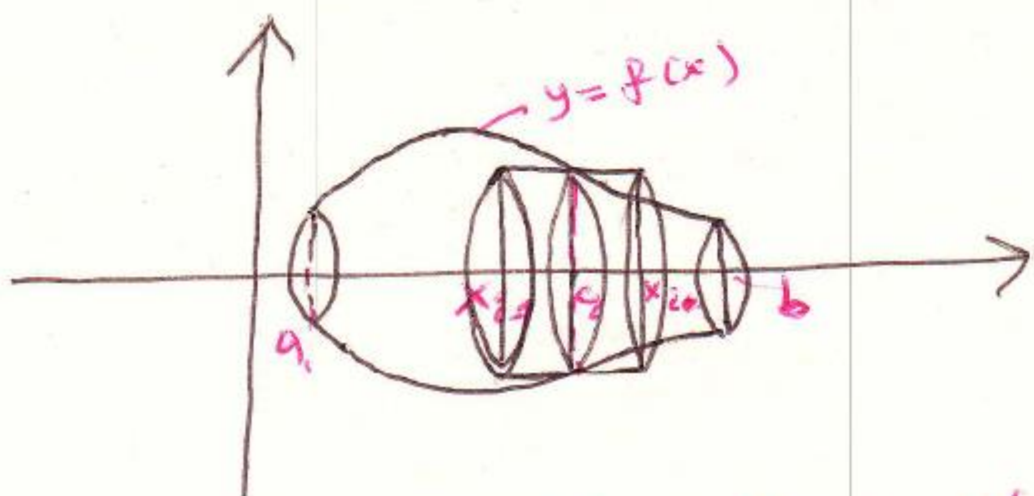
Şimdi ise $y=f(x)$ eğrisi, $x=a$, $x=b$ doğruları ve x-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini hesaplamaya çalışalım.



Bölgeyi $P=\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ parçalanmasıyla n-tane dikdörtgensel

[illegible] x-ekseni etrafında

döndürüldüğünde birer dik silindir oluşturacaklardır, bu silindirlerin hacimleri toplamı, aradığımız hacimdir.



$[x_{i-1}, x_i]$ aralığındaki silindirin hacmini hesaplamakla başlayalım.

Taban yarıçapı $f(c_i)$ ve yüksekliği $x_i - x_{i-1} =$ olan bir silindirin hacmi

$$\boxed{V_i = \pi \cdot f^2(c_i) \cdot \Delta x_i} \quad (2)$$ olur.

$[a, b]$ aralığındaki bütün hacimlerin toplamı

$$\boxed{V \cong \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot f^2(c_i) \cdot \Delta x_i} \quad (3).$$

olarak elde edilir.

Buradan (3) bağıntının her iki tarafın $n \to \infty$ ($\|P\| \to 0$) limiti alınırsa,

$$\ldots = \int_a^b \pi f^2(x) \cdot \ldots$$

sonucu yazılır.

Tanım: $y=f(x)$, $[a,b]$ aralığında sürekli ve tanımlı olsun.

$x=a$, $x=b$ doğruları ve x-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin x ekseni etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmi

$$V=\pi\cdot\int_a^b f^2(x)\,dx \qquad (5)$$ dır.

Aynı düşünceyle $x=f(y)$, $y=c$, $y=d$ doğruları y-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi ise

d

$$V = \pi \cdot \int_c^d f^2(y)\,dy \qquad (6) \text{ dır.}$$

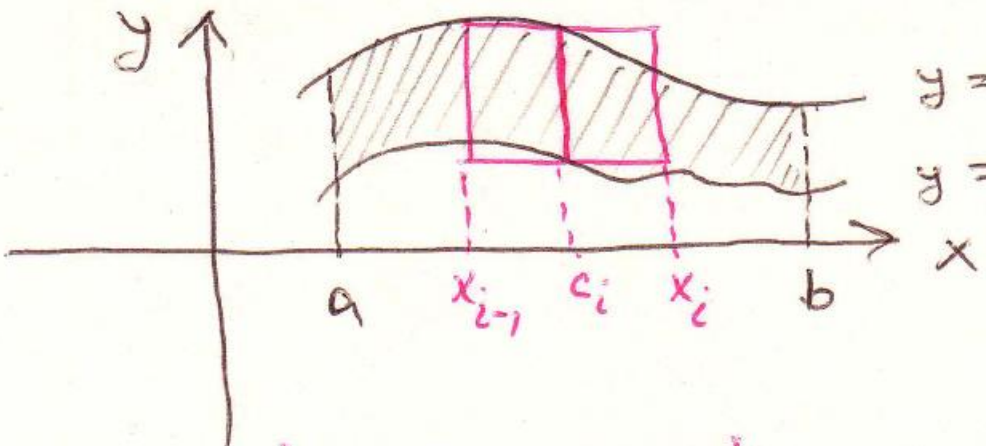
Eğer düzgün bölge $y=f(x)$, $y=g(x)$ eğriler
$x=a$, $x=b$ doğruları tarafından sınır-
lanmış ise bölge x-ekseni etrafında
döndürüldüğünde meydana gelen cismin
hacmi $\left(f(x) \geq g(x)\right)$ $f(x)$ eğrisinin altı
da kalan bölgenin döndürülmesiyle oluşa
cismin hacminden, $y=g(x)$ eğrisinin
... bölgenin döndürülmesiyle

oluşan cismin hacminin farkına eşittir.

$\forall x \in [a,b]$ için

$f(x) \geq g(x)$ olduğunu varsayalım

Şekilden



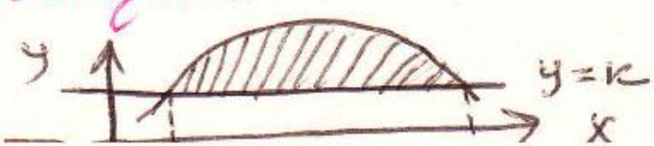
$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx - \pi \int_a^b g^2(x)\,dx =$$

$$= \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x) \right] dx \quad \text{olur.}$$

Genel olarak,

$$V = \pi \int_a^b \left| f^2(x) - g^2(x) \right| dx \qquad (7) \quad \text{olur.}$$

Eğer düzgün bölge $y = f(x)$. eğrisi, $x = a$, $x = b$, $y = K$ doğruları tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre, bu bölgenin K-doğrusu etrafında dönmesinden oluşan cismin hacmi



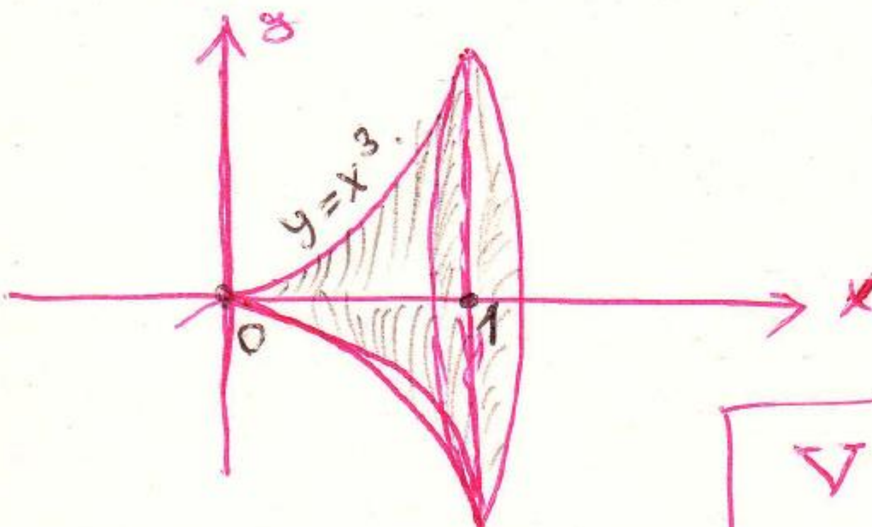
$$V = \pi \int_a^b \left(f(x) - K \right)^2 dx \qquad (8).$$

Eğer $x=f(y)$ eğrisi $y=c$, $y=d$ ve $x=p$ doğruları tarafından sınırlanan bölge $\boxed{x=p}$ doğrusu etrafında döndürülürse oluşan cismin hacmi

$$V=\pi\int_c^d \left(f(y)-p\right)^2 dy \qquad (9)$$

formülü ile hesaplanır.

Örnek: $y = f(x) = x^3$ eğrisi, x ekseni, $x=0$, $x=1$ doğrularla sınırlanan bölge verilmiş olsun. Bu bölgenin x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.



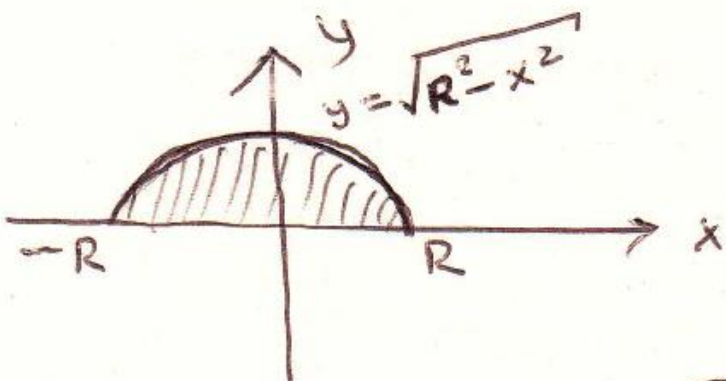
$$V = \pi \cdot \int_0^1 (x^3)^2 \, dx =$$

$$= \pi \cdot \int_0^1 x^6 \, dx = \pi \cdot \frac{x^7}{7} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{7} \text{ b}$$

$$\boxed{V = \frac{\pi}{7} \text{ br}^3}$$

Örnek 2. R yarıçaplı bir kürenin hacmini veren formülü bulunuz.

Çözüm: Küreyi $x^2+y^2=R^2$ çemberinin pozitif ordinatlı kısmının ox ekseni etrafında dönmesinden meydana gelen cisim olarak kabul edersek hacim



$$V=\pi\cdot\int_{-R}^{R}(f(x))^2\,dx=$$

$$=\pi\cdot\int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2dx=$$

$$= \pi \cdot \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,dx = \pi \cdot \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} =$$

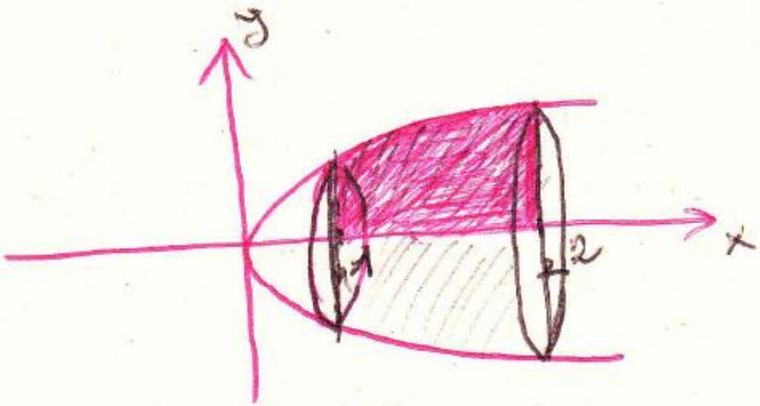
$$= \pi \cdot \left[\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \left(R^2 (-R) - \frac{(-R)^3}{3}\right)\right] =$$

$$= \pi \left[\frac{2R^3}{3} - \left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right)\right] = \pi \cdot \frac{4R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ , br}^3$$

olur. Yani yarıçapı R olan kürenin hacmi $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3}$ dir.

Örnek 3.

$x = y^2$ eğrisi $x=1$, $x=2$ doğrular ve X ekseni tarafından sınırlanan bölgenin X ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.



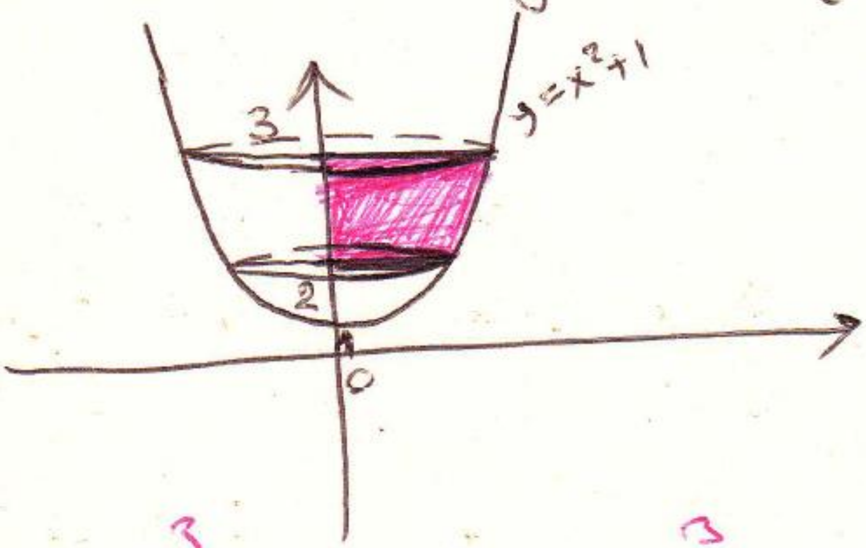
$x=y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x}$ olur.

$y=\sqrt{x}$ - x-ekseninin üst kısmında kalan parçasıdır.

$$V = \pi \cdot \int_1^2 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_1^2 x\,dx = \pi\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 = \pi\left(2-\frac{1}{2}\right) =$$

$= \frac{3\pi}{2}$ br^3;

Örnek 4. $y = x^2 + 1$ eğrisinin sağ yarısı, $y=2$, $y=3$ doğruları ve y ekseni tarafından sınırlanan bölgenin y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulun



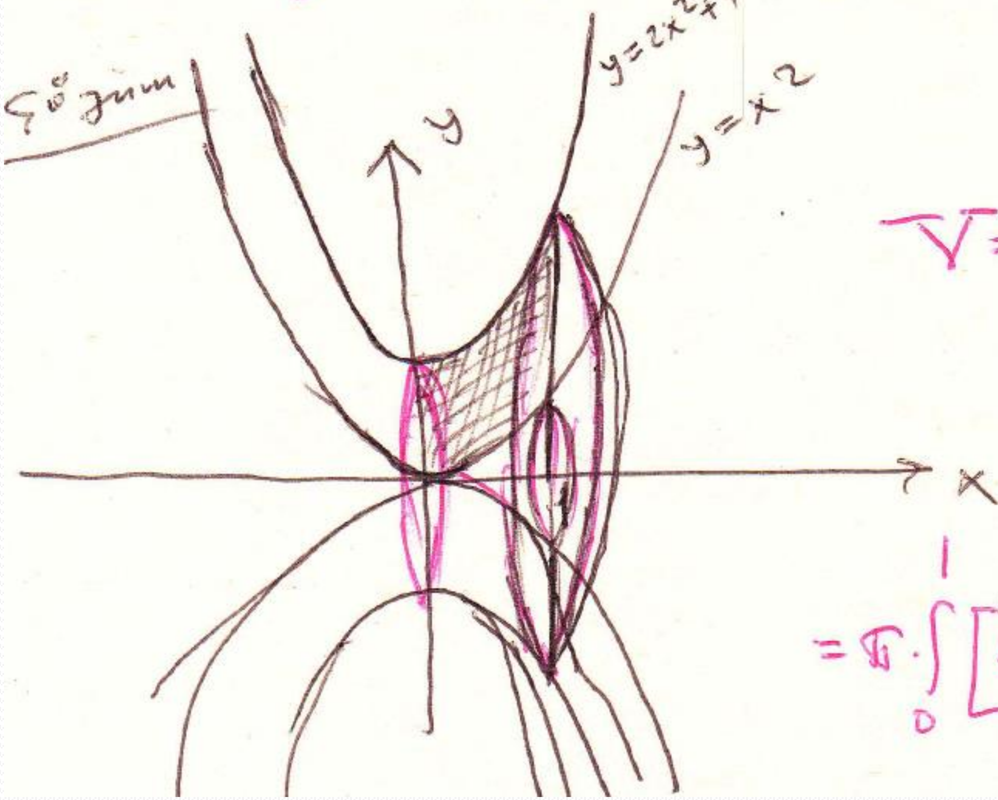
$y = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y - 1$.

$x = \sqrt{y-1}$ grafiğin Oy ekseninin sağ tarafında kalan kısmının denklemidir.

$$V = \pi \int^{3} \left(\sqrt{y-1}\right)^2 dy = \pi \int^{3} (y-1)\, dy = \pi \left(\frac{y^2}{2} - y \right) \Bigg|^{3} = \pi \left(\frac{3}{2} - 0 \right) = \frac{3\pi}{2}$$

Örnek 5. $y = 2x^2+1$ ve $y = x^2$ eğrileri $x = 0$, $x = 1$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin Ox ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen cismin hacmini bulun.

Çözüm



$$V = \pi \int_0^1 \left[(2x^2+1)^2 - (x^2)^2 \right] dx$$

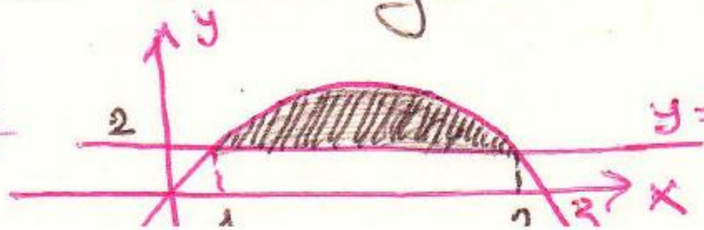
$$= \pi \cdot \int_0^1 \left[4x^4 + 4x^2 + 1 - x^4 \right] dx =$$

$$= \pi \cdot \int_0^1 \left(3x^4+4x^2+1\right)dx = \pi\left[\frac{3}{5}x^5+\frac{4}{3}x^3+x\right]\Bigg|_0^1 =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{3}{5}+\frac{4}{3}+1\right) = \pi \cdot \frac{9+20+15}{15} = \frac{44}{15}\pi \ \text{br}^3 \ \text{olur}$$

Örnek: 6 $y = -x^2+3x$ ve $y=2$ eğri ve doğrus tarafından sınırlanan bölgenin $y=2$ doğru etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:



$$-x^2+3x = 2 \Rightarrow$$
$$x^2-3x+2=0 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$

Obținem,

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x) - k \right)^2 dx \quad \text{din}.$$

$$V = \pi \int_1^2 \left[\left(-x^2 + 3x \right) - 2 \right]^2 dx =$$

$$= \pi \int_1^2 \left[\left(-x^2 + 3x \right)^2 - 4 \left(-x^2 + 3x \right) + 4 \right] dx =$$

$$= \pi \int_1^2 \left[x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x^2 - 12x + 4 \right] dx =$$

$$= \pi \cdot \int_1^2 \left(x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 \right) dx =$$

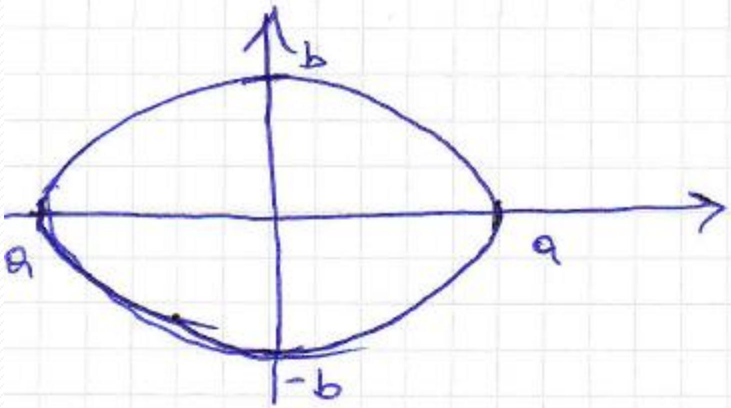
$$= \pi \cdot \left[\frac{x^5}{5} - \frac{6}{4}x^4 + \frac{13}{3}x^3 - 6x^2 + 4x \right] \Big|_1^2 =$$

$$= \pi \left[\frac{32}{5} - \frac{3 \cdot 16}{2} + \frac{13 \cdot 8}{3} - 24 + 8 - \frac{1}{5} + \frac{3}{2} - \frac{13}{3} + 6 - 4 \right]$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{192 + 13 \cdot 80 - 6 + 45 - 130}{30} - 38 \right] =$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{1142 - 38 \cdot 30}{30} \right] = \pi \cdot \frac{1142 - 1140}{30} = \frac{2\pi}{30} = \frac{\pi}{15} \text{ br}$$

Örnek: Elipsoidin hacmini veren formülü bulunuz. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ elips}\right)$.



$$y^2 = b^2\cdot\left[1-\frac{x^2}{a^2}\right].$$

$$y = \pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$y = \pm\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2-x^2};$$

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2};$$

$$V = \pi\cdot\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)dx = \frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx =$$

$$= \frac{\pi b^2}{a^2}\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{\pi b^2}{a^2}\left[2a^2\cdot a - \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right] =$$

$$= \pi b^2 \cdot a\left[2 - \frac{2}{3}\right] = \frac{4}{3}\pi \cdot b^2 \cdot a \quad \text{br}^3 \text{. olcer}$$

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi \cdot b^2 \cdot a \quad \text{br}^3}$$

Kaynaklar:

1. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus I**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.
2. Prof. Dr. C. Çinar, Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, Prof. Dr. A. S. Kurbanlı, Prof. Dr. D. Şimşek, **Genel Matematik**, Dizgi Ofset, 2013.
3. Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, **Analiz III Diziler ve Seriler,** Dizgi Ofset, 2017.
4. M. Balcı, **Çözümlü Matematik Analiz Problemleri 1,** Sürat Üniversite yayınları, 2011.