MATEMATIK 1

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2020

TÜREV VE UYGULAMALARI

7.1. Türev

$a,b\in\mathbb{R}$ olmak üzere $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bir $x_0\in(a,b)$ için

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

limiti varsa, bu limit değerine f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi denir ve bu durumda f fonksiyonuna x_0 noktasında diferensiyellenebilir denir. f 'nin x_0 daki türevi $f'(x_0)$ veya $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ ile gösterilir.

$y = f(x)$ fonksiyonunun için y' veya $\dfrac{dy}{dx}$ gösterimleri de kullanılabilir.

Türevin tanımı farklı şekillerde yapılabilir. Örneğin, $h \neq 0$ olmak üzere

$$x = x_0 + h \text{ için } x \to x_0 \text{ ise } h \to 0$$

dır. Bu durumda

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

elde edilir.

Örnek 7.1.1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tanımlı $f(x)=5x^2$ fonksiyonunun türevini hesaplayınız.

Çözüm. $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{5(x+h)^2-5x^2}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{5x^2+10xh+5h^2-5x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{10xh+5h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(10x+5h)}{h}=\lim_{h\to 0}(10x+5h)=10x$$

Yani, $f'(x)=10x$ dir.

Not. Eğer $y = f(x)$ fonksiyonunun (a,b) aralığının her x_0 noktasında türevi varsa, kısaca bu aralıkta türevlidir denir. $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ifadesinin $x \to x_0$ için limiti yoksa f fonksiyonunun x_0 noktasında türevi yoktur denir.

Uyarı 7.1.1. f fonksiyonunun herhangi bir x_0 noktasında türevli olması için bu noktada tanımlı ve sürekli olması gerekmektedir.

7.2. Soldan ve Sağdan Türev

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonunda $x_0\in(a,b)$ için

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

limiti varsa, bu limit değerine f fonksiyonunun x_0 noktasındaki soldan türevi denir ve $f'_-(x_0)$ veya $f'(x_0^-)$ ile gösterilir. Benzer şekilde,

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

limiti varsa, bu limit değerine de f fonksiyonunun x_0 noktasındaki sağdan türevi denir ve $f'_+(x_0)$ veya $f'(x_0^+)$ ile gösterilir.

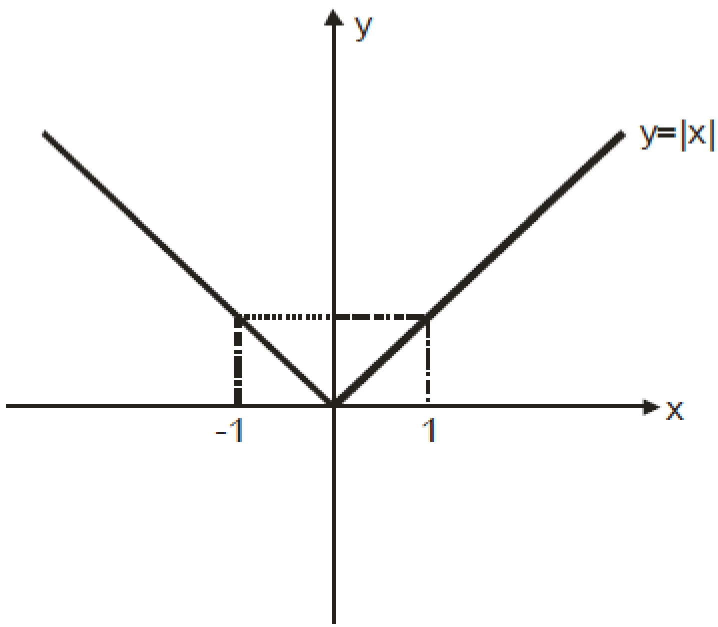
f fonksiyonunun x_0 noktasında türevli olması için gerek ve yeter şart $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$ olmasıdır.

Teorem 7.2.1. Eğer f fonksiyonu herhangi bir x_0 noktasında türevli ise bu noktada süreklidir.

Uyarı 7.2.1. Teorem 7.2.1 in karşıtı her zaman doğru değildir.

Örnek 7.2.1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tanımlı $f(x)=|x|$ fonksiyonunu ele alalım.

Çözüm.



Şekil 7.2.1.

Bu fonksiyon sürekli bir fonksiyon olmasına rağmen $x=0$ noktasında türevi yoktur. Bunu göstermek için sağdan ve soldan türevleri inceleyelim.

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = +1$$

ve

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

olup, $f'(0^+) \neq f'(0^-)$ olur ki bu da f fonksiyonunun $x=0$ noktasında türevi olmadığı anlamına gelir.

7.3. Türevin Cebirsel Özellikleri

7.3.1. $f(x)=c$ (c sabit) ise $f'(x)=0$ dır.

Örnek 7.3.1.1.

- $f(x)=2$ ise $f'(x)=0$ dır.
- $y=4$ ise $y'=0$ dır.
- $\dfrac{d}{dx}(0,5)=0$ dır.

7.3.2. $f(x)=cx^n$ (c sabit ve $n\in\mathbb{R}$) ise $f'(x)=cnx^{n-1}$ dir.

Örnek 7.3.2.1.

- $f(x) = 3x^4$ ise $f'(x) = 12x^3$ dür.
- $y = 2x^{10}$ ise $y' = 20x^9$ dur.
- $\dfrac{d}{dx}(100x^5) = 500x^4$ dür.

7.3.3. f ve g diferensiyellenebilen iki fonksiyon olmak üzere,

7.3.3.1. $(f+g)' = f' + g'$

Örnek 7.3.3.1.

- $y = 15x^{20} - 20x^{15}$ ise $y' = 300x^{19} - 300x^{14} = 300x^{14}(x^5 - 1)$ dir.

- $z = 2t^3 + 4t + 2$ ise $\dfrac{dz}{dt} = 6t^2 + 4$ dür.
- $y = 5x^7 + 2x^6 - 12x^4 + 2x - 17$ ise $y' = 35x^6 + 12x^5 - 48x^3 + 2$ dir.

7.3.3.2. $(f.g)' = f'.g + g'.f$

Örnek 7.3.3.2. $y = (x^2 + 4x)(x^3 + 2x^2 + 4)$ ise $y' = ?$

Çözüm. $y' = (2x + 4)(x^3 + 2x^2 + 4) + (3x^2 + 4x)(x^2 + 4x)$

$= 2x^4 + 4x^3 + 8x + 4x^3 + 8x^2 + 16 + 3x^4 + 12x^3 + 4x^3 + 16x^2$

$= 5x^4 + 24x^3 + 24x^2 + 8x + 16$ dır.

7.3.3.3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'.g - g'.f}{g^2}$ $(g(x) \neq 0)$

Örnek 7.3.3.3. $f(x)=\dfrac{3x^2+2x}{x+5}$ ise $f'(2)=?$

Çözüm.

$$f'(x)=\frac{(6x+2)(x+5)-(3x^2+2x)}{(x+5)^2}=\frac{6x^2+30x+2x+10-3x^2-2x}{(x+5)^2}$$

$$=\frac{3x^2+30x+10}{(x+5)^2}$$

$$f'(2)=\frac{3.2^2+30.2+10}{(2+5)^2}=\frac{82}{49} \text{ dur.}$$

7.3.3.4. $(f^n)' = n.f^{n-1}.f'$ ve $(\sqrt[n]{f})' = \dfrac{f'}{n.\sqrt[n]{f^{n-1}}}$ $(n \in \mathbb{R})$

Örnek 7.3.3.4. $f(x) = \sqrt[5]{3x+2}$ ise $f'(x) = ?$

Çözüm. $f'(x) = \dfrac{(3x+2)'}{5.\sqrt[5]{(3x+2)^4}} = \dfrac{3}{5.\sqrt[5]{(3x+2)^4}}$ dir.

7.4. Bileşke Fonksiyonun Türevi

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon olmak üzere, g fonksiyonu x noktasında, f fonksiyonu da $g(x)$ noktasında diferensiyellenebilir ise,

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

dir.

Örnek 7.4.1. $f(x) = x^5$ ve $g(x) = x^2 + 2x - 5$ ise $(f \circ g)'(x) = ?$

Çözüm. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x) = 5(x^2 + 2x - 5)^4(2x + 2)$ dir.

7.5. Bir Fonksiyonun Ters Fonksiyonunun Türevi

$f : A \to B$, $x \to f(x)$ fonksiyonu bire-bir ve örten ise $f^{-1} : B \to A$ fonksiyonu da bire-bir ve örtendir. $f^{-1} : B \to A$, $y \to x = f^{-1}(y)$ fonksiyonunun türevi

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]}$$

dir.

Örnek 7.5.1. $f : [1,+\infty) \to [2,+\infty)$ tanımlanan $f(x) = x^2 - 2x + 3$ fonksiyonu için $(f^{-1})'(x) = ?$

Çözüm. $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{2x-2}$ dir.

Buradan, $y = f(x) = (x-1)^2 + 2$ ise $(x-1) = \sqrt{y-2}$ ve $x = \sqrt{y-2} + 1$ olduğundan

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y-2}}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

elde edilir.

7.6. Kapalı Fonksiyonların Türevi

x ve y değişkenler olmak üzere $F(x,y)=0$ eşitliğinden $y=f(x)$ ifadesi elde edilemiyorsa, f fonksiyonu $F(x,y)=0$ denklemi ile kapalı olarak tanımlanmıştır denir.

Örnek 7.6.1. $x^2+3y^2-4=0$ denklemi ile verilen kapalı fonksiyonun türevini hesaplayınız.

Çözüm. $x^2+3y^2-4=0$ fonksiyonunun türevi, $2x+6.y.y'=0$ olup, buradan y' çekilirse $y'=\dfrac{-2x}{6y}$ elde edilir.

Kapalı fonksiyonların türevi pratik bir yolla aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

x değişken ve y ise x'e bağımlı değişken olmak üzere, x değişken y sabit kabul edilerek bulunan F'_x ve y değişken x sabit kabul edilerek bulunan F'_y türevleri için

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

dir.

Örnek 7.6.2. $F(x,y) = x^4 + y^4 - x^3 - y^3 + 2xy + 4 = 0$ denklemi ile verilen kapalı fonksiyonun türevini hesaplayınız.

Çözüm. $F'_x = 4x^3 - 3x^2 + 2y$ ve $F'_y = 4y^3 - 3y^2 + 2x$ olduğundan,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{4x^3 - 3x^2 + 2y}{4y^3 - 3y^2 + 2x}$$

dir.

7.7. Parametrik Fonksiyonların Türevi

x ve y, t değişkenine bağımlı ifadeler olmak üzere, $x = f(t)$ ve $y = g(t)$ ise

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} . \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

dir.

Örnek 7.7.1. $x = f(t) = t^2 - 2t$ ve $y = g(t) = t^3 + 5t + 2$ ise $\frac{dy}{dx}$ in $t = 5$ için değerini hesaplayınız.

Çözüm. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}.\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{3t^2+5}{2t-2}$ dir.

Buradan $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=5}=\dfrac{3.5^2+5}{2.5-2}=10$ dur.

7.8. Yüksek Mertebeden Türevler

$f : A \to \mathbb{R}$ olmak üzere $y = f(x)$ A'da istenildiği kadar türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda;

1. Türev : $y' = f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$

2. Türev : $y'' = f''(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d^2 y}{dx^2}$

3. Türev : $y''' = f'''(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right) = \dfrac{d^3 y}{dx^3}$

.

.

.

***n*. Türev :** $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ dir.

Örnek 7.8.1. $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$ ise $\dfrac{d^n y}{dx^n} = ?$

Çözüm.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} = (-1).\frac{1!}{x^2}, \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2}{x^3} = (-1)^2.\frac{2!}{x^3},$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{6}{x^4} = (-1)^3.\frac{3!}{x^4}, \ \ldots, \ \frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n.\frac{n!}{x^{n+1}} \text{ dir.}$$

7.9. Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

7.9.1. $(\sin x)' = \cos x$, $(\sin f(x))' = f'(x).\cos f(x)$

$(\sin^n f(x))' = n.(\sin f(x))^{n-1}.\cos f(x).f'(x)$

7.9.2. $(\cos x)' = -\sin x$, $(\cos f(x))' = -f'(x).\sin f(x)$

$(\cos^n f(x))' = -n.(\cos f(x))^{n-1}.\sin f(x).f'(x)$

7.9.3. $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

$$(\tan f(x))' = f'(x).(1 + \tan^2 f(x)) = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} = f'(x).\sec^2 f(x)$$

$(\tan^n f(x))' = n.(\tan f(x))^{n-1}.(1 + \tan^2 f(x)).f'(x)$

7.9.4. $(\cot x)' = -(1+\cot^2 x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$

$$(\cot f(x))' = -f'(x).(1+\cot^2 f(x)) = -\frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)} = -f'(x).\operatorname{cosec}^2 f(x)$$

$$(\cot^n f(x))' = -n.(\cot f(x))^{n-1}.(1+\cot^2 f(x)).f'(x)$$

Örnek 7.9.1. $f(x) = \sin 5x + \cos 4x$ ise $f'(x) = ?$

Çözüm. $f'(x) = 5.\cos 5x + (-\sin 4x).4$

$= 5.\cos 5x - 4.\sin 4x$ dir.

Örnek 7.9.2. $f(x) = \sin^4(5x+2)$ ise $f'(x) = ?$

Çözüm. $f'(x) = 4.\sin^3(5x+2).\cos(5x+2).(5x+2)'$

$$= 4.\sin^3(5x+2).\cos(5x+2).5$$

$$= 20.\sin^3(5x+2).\cos(5x+2) \text{ dir.}$$

Örnek 7.9.3. $f(x) = \tan(2x^3 + 8x^2 + 4x)$ ise $f'(x) = ?$

Çözüm. $f'(x) = (6x^2 + 16x + 4)[1 + \tan^2(2x^3 + 8x^2 + 4x)]$ dir.

Örnek 7.9.4. $f(x) = \tan 2x + \cot(4x^2)$ ise $f'(x) = ?$

Çözüm. $f'(x) = 2.(1 + \tan^2(2x)) - (8x).[1 + \cot^2(4x^2)]$

$$= 2 + 2\tan^2(2x) - 8x + 8x.\cot^2(4x^2)$$

$$= 2\tan^2(2x) + 8x.\cot^2(4x^2) - 8x + 2 \text{ dir.}$$

7.10. Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

7.10.1. $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,+1]$, $f(x)=\sin x$ fonksiyonunun ters fonksiyonu $f^{-1}(x)=\arcsin x$ dir. Bu fonksiyonun türevi

$$(f^{-1}(x))'=(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{ve} \quad (\arcsin u(x))'=\frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$$

dir.

7.10.2. $f:[0,\pi]\to[-1,+1]$, $f(x)=\cos x$ fonksiyonunun ters fonksiyonu $f^{-1}(x)=\arccos x$ dir. Bu fonksiyonun türevi

$$(f^{-1}(x))'=(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{ve} \quad (\arccos u(x))'=\frac{-u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$$

dir.

7.10.3. $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to(-\infty,+\infty)$, $f(x)=\tan x$ fonksiyonunun ters fonksiyonu $f^{-1}(x)=\arctan x$ dir. Bu fonksiyonun türevi

$$(f^{-1}(x))'=(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2} \quad \text{ve} \quad (\arctan u(x))'=\frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$$

dir.

7.10.4. $f:(0,\pi)\to(-\infty,+\infty)$, $f(x)=\cot x$ fonksiyonunun ters fonksiyonu $f^{-1}(x)=arc\cot x$ dir. Bu fonksiyonun türevi

$$(f^{-1}(x))'=(arc\cot x)'=\frac{-1}{1+x^2} \quad \text{ve} \quad (arc\cot u(x))'=\frac{-u'(x)}{1+(u(x))^2}$$

dir.

Örnek 7.10.1. $f(x)=\arcsin(x^2+2x)$ ise $f'(x)=?$

Çözüm. $f'(x)=\dfrac{(x^2+2x)'}{\sqrt{1-(x^2+2x)^2}}=\dfrac{2x+2}{\sqrt{-x^4-4x^3-4x^2+1}}$ dir.

Örnek 7.10.2. $f(z) = \arccos(z^3)$ ise $f'(z) = ?$

Çözüm. $f'(z) = -\dfrac{(z^3)'}{\sqrt{1-(z^3)^2}} = -\dfrac{3z^2}{\sqrt{1-z^6}}$ dır.

Örnek 7.10.3. $f(x) = \arcsin(\cos x)$ ise $f'(x) = ?$

Çözüm. $f'(x) = \dfrac{(\cos x)'}{\sqrt{1-(\cos x)^2}} = \dfrac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\dfrac{\sin x}{\sin x} = -1$ dir.

Örnek 7.10.4. $f(x) = \arctan(x^3+1) + arc\cot(x^3+1)$ ise $f'(x) = ?$

Çözüm. $f'(x) = \dfrac{(x^3+1)'}{1+(x^3+1)^2} + \dfrac{-(x^3+1)'}{1+(x^3+1)^2} = 0$ dır.

7.11. Logaritma Fonksiyonunun Türevi

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}.\log_a e \quad \text{ve} \quad (\log_a u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}.\log_a e$$

Örnek 7.11.1. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ ve $(\ln u(x))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ dir.

Örnek 7.11.2. $f(x) = \log_3(x^3 + 2x^2 + 3x)$ ise $f'(x) = ?$

Çözüm. $f'(x) = \dfrac{(x^3 + 2x^2 + 3x)'}{x^3 + 2x^2 + 3x}\log_3 e = \dfrac{3x^2 + 4x + 3}{x^3 + 2x^2 + 3x}\log_3 e$ dir.

7.12. Üstel Fonksiyonun Türevi

$a \in \mathbb{R}^+$ ve $a \neq 1$ olmak üzere bire-bir ve örten olan $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun ters fonksiyonu olan a^x fonksiyonuna üstel fonksiyon denir. Üstel fonksiyonun türevi ise,

$$(a^x)' = a^x.\ln a \text{ ve } (a^{u(x)})' = u'(x).a^{u(x)}.\ln a$$

dır.

Örnek 7.12.1. $(e^x)' = e^x$ ve $(e^{u(x)})' = u'(x).e^{u(x)}$ dir.

Örnek 7.12.2. $f(x) = 5^{x^4+2x} + e^{\cos x}$ ise $f'(x) = ?$

Çözüm. $f'(x) = (x^4 + 2x)'.5^{x^4+2x}.\ln 5 + (\cos x)'.e^{\cos x}$

$$= (4x^3 + 2).5^{x^4+2x}.\ln 5 - \sin x.e^{\cos x} \text{ dir.}$$

7.13. Hiperbolik ve Ters Hiperbolik Fonksiyonların Türevi

7.13.1. $(\sinh x)' = \cosh x$, $(\sinh f(x))' = f'(x).\cosh f(x)$

$(\sinh^n f(x))' = n.(\sinh f(x))^{n-1}.\cosh f(x).f'(x)$

7.13.2. $(\cosh x)' = \sinh x$, $(\cosh f(x))' = f'(x).\sinh f(x)$

$(\cosh^n f(x))' = n.(\cosh f(x))^{n-1}.\sinh f(x).f'(x)$

7.13.3. $(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = \mathrm{sec\,h}^2 x$

$$(\tanh f(x))' = f'(x).(1 - \tan^2 f(x)) = \frac{f'(x)}{\cosh^2 f(x)} = f'(x).\mathrm{sec\,h}^2 f(x)$$

$$(\tanh^n f(x))' = n.(\tanh f(x))^{n-1}.(1 - \tan^2 f(x)).f'(x)$$

7.13.4. $(\coth x)' = (1-\coth^2 x) = -\dfrac{1}{\sinh^2 x} = -\operatorname{cosech}^2 x$

$$(\coth f(x))' = f'(x).(1-\coth^2 f(x)) = -\frac{f'(x)}{\sinh^2 f(x)} = -f'(x).\operatorname{cosech}^2 f(x)$$

$$(\coth^n f(x))' = n.(\coth f(x))^{n-1}.(1-\coth^2 f(x)).f'(x)$$

7.13.5. $(\operatorname{sech} x)' = -\operatorname{sech} x.\tanh x$

7.13.6. $(\operatorname{cosech} x)' = -\operatorname{cosech} x.\coth x$

7.13.7. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$(\arg\sinh x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad (\arg\sinh f(x))' = \frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}$$

7.13.8. Her $x \geq 1$ için

$$(\arg\cosh x)' = \mp\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad (\arg\cosh f(x))' = \mp\frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)-1}}$$

7.13.9. $-1 < x < 1$ için

$$(\arg\tanh x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad (\arg\tanh f(x))' = \frac{f'(x)}{1-f^2(x)}$$

7.13.10. $|x| > 1$ için

$$(\arg\coth x)' = \frac{-1}{1-x^2}, \quad (\arg\coth f(x))' = \frac{-f'(x)}{1-f^2(x)}$$

7.13.11. $0 < x < 1$ için $(\arg\operatorname{sech} x)' = \dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

7.13.12. $x \neq 1$ için $(\arg\operatorname{cosech} x)' = \dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$

Örnek 7.13.1. $f(x) = \sinh x + \cosh 2x$ ise $f'(x) = ?$

Çözüm. $f'(x) = \cosh x + 2\sinh 2x$ dir.

Örnek 7.13.2. $f(x) = \sinh^4(2x+1)$ ise $f'(x) = ?$

Çözüm. $f'(x) = 8.\sinh^3(2x+1).\cosh(2x+1)$ dir.

Örnek 7.13.3. $f(x) = \tanh 2x + \coth(3x^2)$ ise $f'(x) = ?$

Çözüm. $f'(x) = 2.(1-\tanh^2(2x)) + (6x).[\coth^2(3x^2) - 1]$

$$= 2 - 2\tanh^2(2x) + 6x.\coth^2(3x^2) - 6x$$

$$= -2\tanh^2(2x) + 6x.\coth^2(3x^2) - 6x + 2 \text{ dir.}$$

Örnek 7.13.4. $f(x) = \arg\sinh(\tan x)$ ise $f'(x) = ?$

Çözüm.

$$f(x) = \arg\sinh(\tan x) = \ln\left|\tan x + \sqrt{1+\tan^2 x}\right| = \ln\left|\sec x + \tan x\right|$$

olduğundan

$$f'(x) = \left(\arg\sinh(\tan x)\right)' = \frac{1+\tan^2 x + \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}}{\tan x + \sec x} = \frac{1}{\cos x} \text{ dir.}$$

Örnek 7.13.5. $f(x) = \arg\tanh(e^x)$ ise $f'(x) = ?$

Çözüm. $f'(x) = \dfrac{(e^x)'}{1-(e^x)^2} = \dfrac{e^x}{1-e^{2x}}$ dir.

Kaynaklar:

1. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus I**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.
2. Prof. Dr. C. Çinar, Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, Prof. Dr. A. S. Kurbanlı, Prof. Dr. D. Şimşek, **Genel Matematik**, Dizgi Ofset, 2013.
3. Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, **Analiz III Diziler ve Seriler,** Dizgi Ofset, 2017.
4. H. İ. Karakaş, **Matematiğin Temelleri, Sayı Sistemleri ve Cebirsel Yapılar,** ODTÜ yayınları, 2011.