MATEMATİK - 2

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2021

3.5. Alterne (Alternatif) Seriler

Tanım 3.5.1. *Terimlerinin işareti ardışık olarak değişen serilere alterne (alternatif) seriler denir*

Örneğin, (a_n) pozitif terimli bir dizi olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

serisi bir alterne seridir.

(a_n)

3.5.1. Leibnitz Kriteri

Teorem 3.5.1.1. *Eğer* $u_n = (-1)^{n-1}a_n$ *olmak üzere* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ *serisi için*

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

ise seri yakınsaktır.

Örnek 3.5.1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$u_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$

$a_n = \frac{1}{n}$

Çözüm. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ olduğundan verilen seri yakınsaktır.

$a_n > a_{n+1}$ monoton azalan

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Örnek 3.5.1.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3+1}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^3+1}$, $a_n = \frac{1}{n^3+1}$; $(a_n) = \left\{ \frac{1}{n^3+1} \right\}$

Çözüm. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n^3+1} > \frac{1}{(n+1)^3+1}$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+1} = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$

olduğundan verilen seri yakınsaktır.

n^3

Örnek 3.5.1.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{7^n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{7^n}$, $a_n = \frac{1}{7^n}$;

Çözüm. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{7^n} > \frac{1}{7^{n+1}}$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{7^n} = 0$ olduğundan verilen seri yakınsaktır.

monoton azalan

Örnek 3.5.1.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$, $a_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$?

Çözüm. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{\ln(n+2)}$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$ olduğundan verilen seri yakınsaktır.

Teorem 3.5.1.2. Yakınsak herhangi bir alternatif (ardışık işaret değiştiren) seride S toplamı yerine S_n kısmı toplamı almakla yapılan hata, $(n+1)$. terimden, yani atılan terimlerin ilkinden küçüktür.

$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + ($

FONKSİYONEL DİZİLER

Tanım 4.1.1. $A \subset \mathbb{R}$ ve $F(A)$ da A kümesi üzerinde tanımlı, reel değerli fonksiyonların kümesi olmak üzere $s : \mathbb{N} \to F(A)$ şeklinde tanımlanan s fonksiyonuna fonksiyonel dizi (fonksiyon dizisi) veya değişken terimli dizi adı verilir ve (f_n) şeklinde gösterilir.

$(f_n(x))$

Aşağıdaki fonksiyonel dizi örneklerini inceleyiniz:

$\left(f_n(x)\right)$

Örnek 4.1.1. (1) $\left(f_n(x)\right)=(x^n)=(x,x^2,\ldots,x^n,\ldots)$

$f_n(x)$

(2) $\left(f_n(x)\right)=\left(\dfrac{nx}{1+x^2}\right)=\left(\dfrac{x}{1+x^2},\dfrac{2x}{1+x^2},\ldots,\dfrac{nx}{1+x^2},\ldots\right)$

(3) $\left(f_n(x)\right)=\left(\left(x-\dfrac{1}{n}\right)^2\right)=\left((x-1)^2,\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2,\ldots,\left(x-\dfrac{1}{n}\right)^2,\ldots\right)$

(4) $\left(f_n(x)\right)=\left(\dfrac{x}{n}\right)=\left(\dfrac{x}{1},\dfrac{x}{2},\ldots,\dfrac{x}{n},\ldots\right)$ $\checkmark$

(5) $\left(f_n(x)\right)=\left(\dfrac{\cos(nx)}{n^2}\right)=\left(\dfrac{\cos(x)}{1},\dfrac{\cos(2x)}{2^2},\ldots,\dfrac{\cos(nx)}{n^2},\ldots\right)$ $\checkmark$

Tanım 4.1.2. (f_n) *fonksiyonel dizisinin* A *kümesi üzerinde* f *fonksiyonuna noktasal yakınsak olması için gerek ve yeter şart her* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *ve her bir* $x \in A$ *için* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *öyle ki her* $n > n_0$ *için* $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ *olmasıdır.*

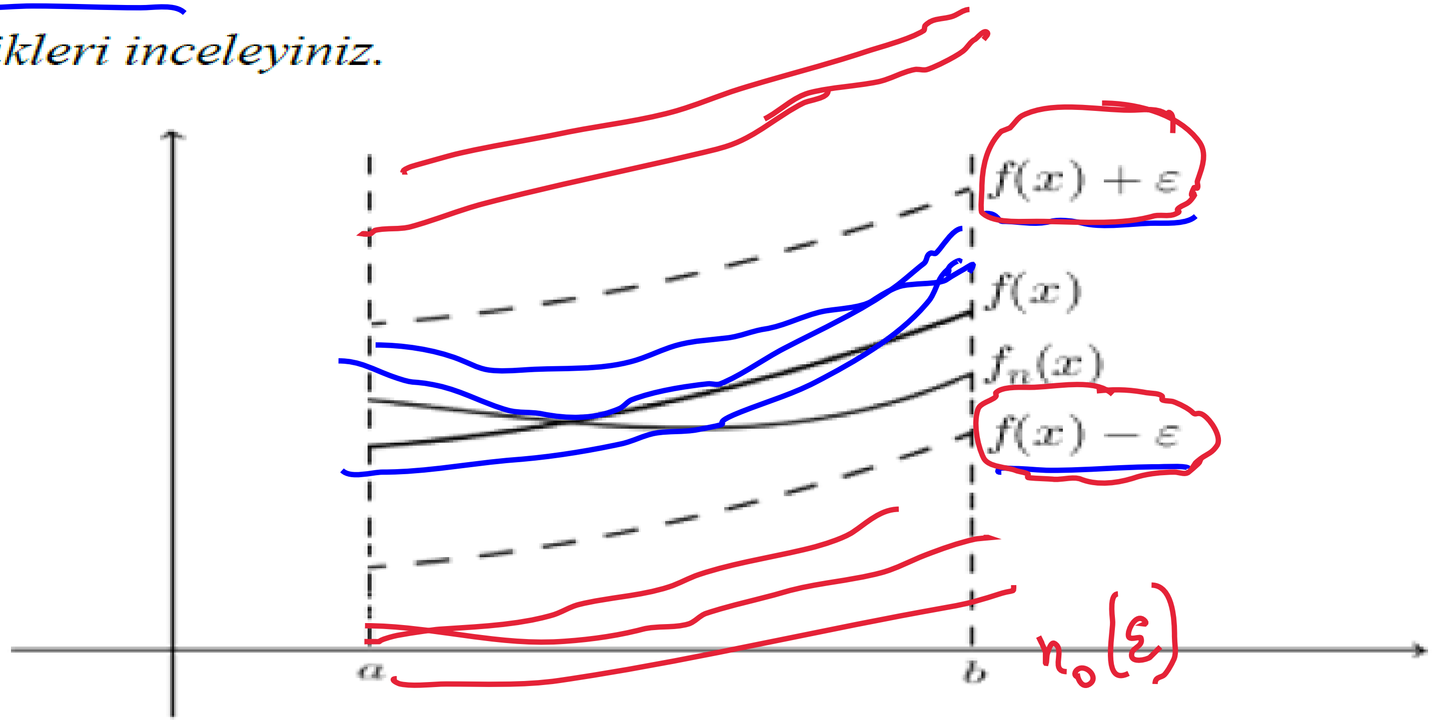
Uyarı 4.1.1. *Dikkat edilecek olursa noktasal yakınsaklık tanımında sözü edilen* n_0 *sayısı, hem* ε *sayısına hem de* x *noktasına bağlıdır.*

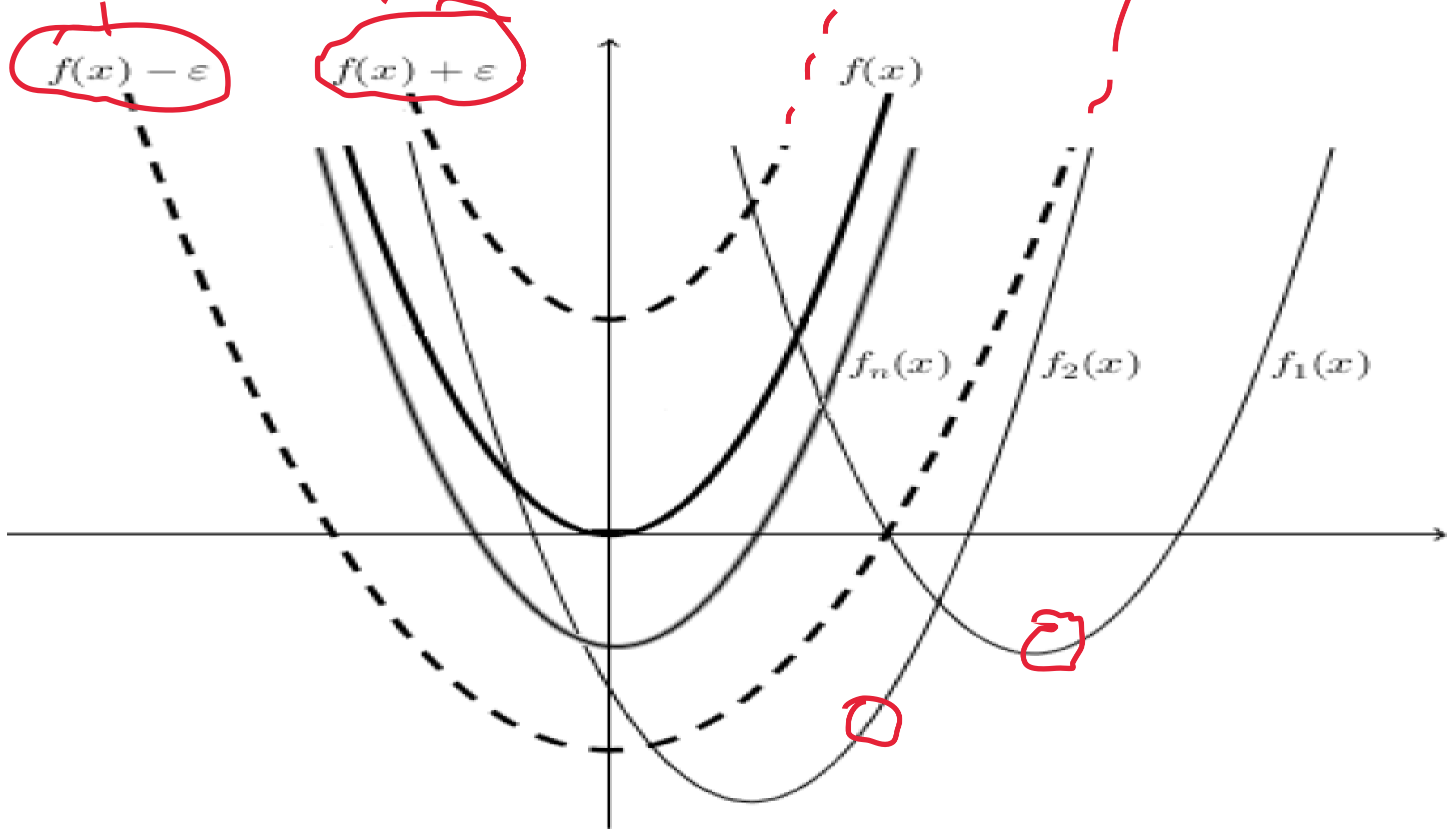
Tanım 4.1.3. (f_n) *fonksiyonel dizisinin* A *kümesi üzerinde* f *fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart her* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *için* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *öyle ki her* $n > n_0$ *ve her* $x \in A$ *için* $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ *olmasıdır.*

Uyarı 4.1.3. *Dikkat edilecek olursa düzgün yakınsaklık tanımında sözü edilen* n_0 *sayısı,* ε *sayısına bağlı ancak* x *noktasından bağımsızdır.*

A

Uyarı 4.1.2. *Eğer* (f_n) *fonksiyonel dizisi* $[a,b]$ *aralığı üzerinde* $f(x)$ *fonksiyonuna düzgün yakınsak ise bunun geometrik olarak anlamı* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *sayısı verildiğinde bir* n_0 *sayısı bulunabilir ki* n_0 *dan küçük olmayan her* n *için* $f_n(x)$ *fonksiyonlarının grafiği* $f(x)-\varepsilon$ *ile* $f(x)+\varepsilon$ *fonksiyonlarının grafiklerinin arasındadır. Aşağıdaki grafikleri inceleyiniz.*





Şekil 4.1.2.

Uyarı 4.1.3. *Dikkat edilecek olursa düzgün yakınsaklık tanımında sözü edilen n_0 sayısı, ε sayısına bağlı ancak x noktasından bağımsızdır.*

Teorem 4.1.1. *f_n ve f fonksiyonları, $I=[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar olmak üzere (f_n) dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart*

$$c_n = \max_{x\in[a,b]} \left| f_n(x) - f(x) \right|$$

şeklinde tanımlanan (c_n) dizisinin bir sıfır dizisi olmasıdır.

Uyarı 4.1.4. *$f_n - f$ fonksiyonlarının sürekli olmadığı veya A kümesinin kapalı ve sınırlı bir küme olmadığı durumlarda maksimum mevcut olmayıp supremum mevcut olabilir. Böyle durumlarda $c_n = \sup_{x\in A} \left| f_n(x) - f(x) \right|$ eşitliği kullanılarak yukarıdaki teorem uygulanabilir.*

$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^2 \to \frac{1}{4}$ ✓

Örnek 4.1.5. $f_n(x) = \left(x - \frac{1}{n}\right)^2$ ile tanımlanan (f_n) fonksiyonel dizisinin $[-1,1]$ aralığı üzerinde $f(x) = x^2$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Her $x \in [-1,1]$ için $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = x^2$ ve ✓

$$c_n = \max_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \left| \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 - x^2 \right| = \left| \cancel{x^2} - \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} - \cancel{x^2} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{n^2} - \frac{2x}{n} \right| \leq \left| \frac{1}{n^2} \right| + \frac{2}{n}|x| \leq \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} \leq \frac{1}{n} + \frac{2}{n} = \frac{3}{n}$$

olup

$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$

$|a+b|$

$|a-b|$

(c_n)

$$0 \leq c_n = \max_{x\in[-1,1]} \left| f_n(x) - f(x) \right| \leq \frac{3}{n}$$

dir. $\left(\frac{3}{n}\right) \to 0$ olduğundan (c_n) bir sıfır dizisidir. Dolayısıyla (f_n) fonksiyonel dizisi $[-1,1]$ aralığı üzerinde $f(x) = x^2$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x$

Örnek 4.1.7. $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x+1}$ ile tanımlanan (f_n) fonksiyonel dizisinin $[0,1]$ aralığı üzerinde $f(x) = x$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

$\left| \dfrac{nx}{n+x+1} - x \right|$

Çözüm. Her $x \in [0,1]$ için $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = x$ ve

$$0 \le c_n = \max_{x\in[0,1]} \left| f_n(x) - f(x) \right| \le \frac{2}{n+1}$$

dir. $\left(\dfrac{2}{n+1}\right) \to 0$ olduğundan (c_n) bir sıfır dizisidir. Dolayısıyla (f_n) fonksiyonel dizisi $[0,1]$ aralığı üzerinde $f(x) = x$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

$\le \left| \dfrac{x^2}{n+\boxed{x}+1} \right| + \left| \dfrac{x}{n+\boxed{x}+1} \right| \le \dfrac{x^2}{n+1} + \dfrac{x}{n+\ldots}$

Örnek 4.1.9. $f_n(x) = \dfrac{x^2}{1+nx^2}$ ile tanımlanan (f_n) fonksiyonel dizisinin $\mathbb{R}$ de $f(x)=0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$0 \le c_n = \max_{x\in\mathbb{R}} \left| f_n(x) - f(x) \right| = \max_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{x^2}{1+nx^2} \right| = \max_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{1/x^2 + n} \right| \le \frac{1}{n}$$

dir. $\left(\dfrac{1}{n}\right) \to 0$ olduğundan (c_n) bir sıfır dizisidir. Dolayısıyla (f_n) fonksiyonel dizisi $\mathbb{R}$ de $f(x)=0$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

Uyarı 4.1.6. (1) *Herhangi bir aralıkta düzgün yakınsak olan bir fonksiyonel dizi bu aralıkta noktasal yakınsaktır. Yani düzgün yakınsaklık noktasal yakınsaklığı gerektirir. Ancak tersi her zaman doğru değildir.*

(2) *Fonksiyonel bir dizideki fonksiyonların tanımlandığı küme sonlu elemanlı olduğunda düzgün yakınsaklık ve noktasal yakınsaklık kavramları denktir.*

(3) *x e bağlı olmayan her yakınsak dizi düzgün yakınsaktır.*

Teorem 4.1.2. f_n fonksiyonları, A kümesi üzerinde sürekli fonksiyonlar olmak üzere (f_n) dizisi A kümesi üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak ise f fonksiyonu A kümesi üzerinde süreklidir.

Uyarı 4.1.7. f_n fonksiyonları, A kümesi üzerinde sürekli fonksiyonlar oldukları halde (f_n) fonksiyonel dizisinin A kümesi üzerinde noktasal yakınsadığı f fonksiyonu sürekli olmayabilir.

Teorem 4.1.3. (f_n) *fonksiyonel dizisi sınırlı* I *aralığı üzerinde* f *fonksiyonuna düzgün yakınsak ve her bir* f_n *fonksiyonu* I *aralığı üzerinde sürekli olmak üzere* $F_n(x)=\int_c^x f_n(t)dt$ *şeklinde tanımlanan* (F_n) *dizisi* $F(x)=\int_c^x f(t)dt$ *şeklinde tanımlanan* F *fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.*

Teorem 4.1.4. (f_n) *fonksiyonel dizisi,* $[a,b]$ *aralığı üzerinde tanımlı, reel değerli ve sınırlı fonksiyonların bir dizisi olsun.* f_n *fonksiyonları* $[a,b]$ *aralığı üzerinde integrallenebilen fonksiyonlar ve* (f_n) *dizisi* f *fonksiyonuna düzgün yakınsak ise* f *fonksiyonu* $[a,b]$ *aralığı üzerinde integrallenebilirdir ve* $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ *dir.*

Uyarı 4.1.8. *Yukarıdaki eşitlik*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b (\lim_{n\to\infty} f_n(x))dx$$

şeklinde de yazılabilir. Yani (f_n) *fonksiyonel dizisi düzgün yakınsak olduğunda limit ve integral alma işlemlerinin sırası değiştirilebilir.*

Teorem 4.1.5. *f_n fonksiyonları sınırlı bir I aralığı üzerinde tanımlı ve bu aralıkta sürekli türeve sahip fonksiyonlar olmak üzere (f_n) dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsak ve (f_n') türev dizisi bir g fonksiyonuna düzgün yakınsak ise I üzerinde $g = f'$ dür. Yani*

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = (\lim_{n\to\infty} f_n(x))'$$

dir.

KAYNAKLAR:

1. Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA, Analiz III Diziler ve Seriler, Dizgi Ofset, 2017.

2. G. B. Thomas ve Ark., Thomas Calculus I, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.