BOOLE CEBRİ VE KARNAUGH HARİTASI

KONU: BOOLEAN CEBRİ

Sayısal bilgisayarlar ve sayısal elektronik devreler ikili sayı sistemini kullanarak işlem yaparlar. İkili sistemde kullanılan sayılar ise 1 ve 0'dan ibarettir. Boole cebri {0,1} kümesini kullanarak işlemler ve kurallar tanımlar.

Boolean cebiri, George Boole (1815-1864) tarafından mantık problemlerini çözmek amacıyla geliştirilmiştir. 1983 yılında Claude Shannon anahtarlama devreleriyle pratik uygulamalar yapana kadar bu cebir sadece matematiksel bir anlam taşımıştır. Günümüzde Boolean cebiri telefon şebekelerinde ve dijital sistemlerde geniş kullanım alanına sahiptir.

Temel İşlemler: Boolean cebirinin temel işlemleri

1) Tersini alma (DEĞİL – NOT kapısı),
2) VE çarpımı (VE – AND kapısı)
3) VEYA toplama (VEYA – OR kapısı)

Temel İşlemler: Boolean cebirinin temel işlemleri
1) Tersini alma (DEĞİL – NOT kapısı),
2) VE çarpımı (VE – AND kapısı)
3) VEYA toplama (VEYA – OR kapısı)

Tersleme (NOT)	**VE (AND) çarpımı**	**VEYA (OR) toplamı**
$0 = \bar{1}$ $1 = \bar{0}$	$0.0 = 0$ $0.1 = 0$ $1.0 = 0$ $1.1 = 1$	$0 + 0 = 0$ $0 + 1 = 1$ $1 + 0 = 1$ $1 + 1 = 1$

BOOLE CEBRİ FONKSİYONLARI:

B={0,1} verilsin. Herhangi bir x değişkeni sadece B kümesinden değer alıyorsa, x'e "mantıksal değişken" denir. Bu durumda $B^n = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n \mid x_i \in B, 1 \leq i \leq n\}$ olmak üzere B^n'den B'ye tanımlanan fonksiyona "n. Dereceden mantıksal fonksiyon" denir.

ÖRNEK: x=1 ve y=0 iken F(x,y)=1 ve x=0 ve y=1 iken F(x,y)=1 olmak üzere diğer durumlarda F(x,y)=0 olan 1. Dereceden mantıksal fonksiyonun sonuç tablosu şöyledir:

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Mantıksal fonksiyonlar; mantıksal değişkenler ve mantıksal işlemlerden oluşan ifadeler kullanılarak gösterilebilir. Yani: $0, 1, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$'ler mantıksal değişkenlerdir. E_1 ve E_2 de mantıksal ifadelerse $\overline{E_1}$ ya da $\overline{E_2}$ terslenen, (E_1E_2) lojiksel çarpım ve $(E_1 + E_2)$ lojiksel toplam olan mantıksal ifadelerdir.

Mantıksal ifadelerin eşdeğerliliği:

Her biri n değişkenden oluşan $F(a_1, a_2, ...,a_n)$ ve $G(b_1, b_2,.....b_n)$ mantıksal ifadeleri ancak ve ancak $F(a_1, a_2, ...,a_n) = G(b_1, b_2,.....b_n)$ ise mantıksal eşdeğerdirler.

Yani x*y = x*y +0= x*y*1 ifadelerinin sonuçları aynı olduğundan mantıksal eşdeğer ifadelerdir.

Aynı durumda F mantıksal fonksiyonun eşleniği (tersi) $\overline{F}$ olduğundan $\overline{F}(x_1, x_2,.....x_n) = \overline{F(x_1, x_2,.......x_n)}$ olur.

Mantıksal ifadelerin toplanması ve çarpılması:

F ve G, n. Dereceden mantıksal fonksiyon ise; bu fonksiyonların toplam ve çarpımları şöyledir:

$(F+G)(x_1, x_2,......x_n) = F[F(x_1, x_2,.....x_n) + G(x_1, x_2,.....x_n)]$

$(F*G)(x_1, x_2,......x_n) = F[F(x_1, x_2,.....x_n) * G(x_1, x_2,.....x_n)]$

Mantıksal fonksiyon sayısının hesaplanması:

$(F*G)(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) =$

$$F\left[F\left(x_1, x_2, \ldots.. x_n\right) * G\left(x_1, x_2, \ldots.. x_n\right)\right]$$

mantıksal çarpım fonksiyonunda n=2 iken sonuç fonksiyonu, B={0,1} kümesindeki 2'li eleman çiftlerinin oluşturduğu 4 elemanlı bir kümeden B'ye tanımlanan bir fonksiyondur.

Bu durumda 4 değişkenli bir sistemde 16 adet fonksiyon tanımlanabilir. Bunlar yandaki gibidir:

Fonksiyonlar	X_1	X_2	X_3	X_4
F_1	0	0	0	0
F_2	0	0	0	1
F_3	0	0	1	0
F_4	0	0	1	1
F_5	0	1	0	0
F_6	0	1	0	1
F_7	0	1	1	0
F_8	0	1	1	1
F_9	1	0	0	0
F_{10}	1	0	0	1
F_{11}	1	0	1	0
F_{12}	1	0	1	1
F_{13}	1	1	0	0
F_{14}	1	1	0	1
F_{15}	1	1	1	0
F_{16}	1	1	1	1

Tablodan da görüldüğü gibi; n değişkenli bir sistemde yazılabilecek fonksiyon sayısı 2^n olmaktadır. (1:2; 2:4; 3:8…)

Boole Cebri Kuralları

- Değişme Kuralı:

  $X+Y= Y+X$ $\quad$ $X.Y=Y.X$

- Birleşme Kuralı:

  $X+Y+Z=(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$ $\quad$ $X.Y.Z=(X.Y).Z=X.(Y.Z)$

- Dağılma Kuralı:

  $X.(Y+Z)=X.Y+X.Z$ $\quad$ $(X+Y).(X+Z) = X+Y.Z$

- Özdeşlik Kuralı:

  $X+X=X$

  $X.X=X$

Boole Cebri Kuralları

- VE Kuralı:

  $X.1=X \quad X.0=0$

- VEYA Kuralı

  $X+0=X \quad X+1=1$

- Tamamlayıcı Kuralı

  $x+\overline{x}=1$

  $x.\overline{x}=0$

- De Morgan Kuralı

$\overline{x.y}=\overline{x}+\overline{y} \qquad \overline{x+y}=\overline{x}.\overline{y}$

- Tersin Tersi Kuralı

  $\overline{\overline{X}} = X$

  $\overline{\overline{X+Y}} = X+Y$

  $\overline{\overline{X.Y}}=X.Y$

Düalite kuralı:

Bir boole cebri ifadesinin düali mantıksal çarpım ve toplamların ve ayrıca 1 ve 0'ların karşılıklı olarak terslenmesidir.

ÖRNEK:

The dual of $(a+b)(c'+1)$ is $ab+c'\cdot 0$

$$x \cdot (y + 0) \rightarrow x + (y \cdot 1)$$

$$\bar{x} \cdot 1 + (\bar{y} \cdot z) \rightarrow (\bar{x} + 0) \cdot (\bar{y} + z)$$

Mantıksal fonksiyonların gösterilmesi:

Değişkenlerinin almış oldukları değerlere karşılık olarak sonuçta elde edilecek olan mantıksal fonksiyonun gösterilmesi önemlidir. Bir mantıksal fonksiyon üç mantıksal operatör olan (+), (.) ve (--) ile gösterilebilir. Mantıksal fonksiyonların gösterilmesi en küçük değişken kümesi ile gösterilmesi(indirgenmesi) konusunda önemlidir. Bu gösterilimler mantıksal devre tasarımında önemlidir.

x	y	z	F	G
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	0	0

F fonksiyonu sadece x=1, y=0 ve z=1 olduğunda 1 değerini almaktadır. Bu durumda

$F = x \cdot \overline{y} \cdot z$ olur.

G fonksiyonu ise 2 ayrı durumda 1 değerini almıştır. Bu durumda:

$G = \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} + x \cdot y \cdot \overline{z}$ olur.

Minterm:

Mantıksal x_1, x_2, ….x_n değişkenlerinin minterm ifadesi bu değişkenlerin mantıksal çarpımlarıdır. Bir minterm değişkenlerin almış olduğu değerler sonucunda 1 değerini alır.

Lojik İfadelerin Sadeleştirilmesi-Minumum Terimler (Minterm)

- Bitlik mintermlerin gösterilmesi

Değişkenler (x, y)		Minterm	Minterm Simgesi
0	0	$\overline{x} . \overline{y}$	m_0
0	1	$\overline{x} . y$	m_1
1	0	$x . \overline{y}$	m_2
1	1	$x . y$	m_3

Tabloda görüldüğü üzere minterm çarpım ile gösterilip değişkenlerin '0' durumunda tümleyeni ($\overline{x}$, $\overline{y}$), '1' durumunda kendisi (x , y) ile gösterilir. Örneğin; $x\,\overline{y}$, x'in '1', y'nin '0' olduğu durumu gösterir.

Maxterm:

Mantıksal x_1, x_2, ...x_n değişkenlerinin maxterm ifadesi bu değişkenlerin mantıksal toplamlarıdır. Bir maxterm değişkenlerin almış olduğu değerler sonucunda 0 değerini alır.

Lojik İfadelerin Sadeleştirilmesi-Maksimum Terimler (Maksterm)

- Bitlik maksterm tablosu göz önüne alındığında verilen terimlere ilişkin ifade makstermler şeklinde,

Değişkenler (x, y)		Maksterm	Maksterm Simgesi
0	0	$\overline{x}+\overline{y}$	M_0
0	1	$x+\overline{y}$	M_1
1	0	$\overline{x}+y$	M_2
1	1	$\overline{x}+\overline{y}$	M_3

Boole ifadelerin minimize edilmesi (sadeleştirilmesi):

Mantıksal fonksiyonlar ile tasarlanan mantık devrelerinde kullanılan elemanların sayısının en küçüklenmesi ve aynı zamanda eşdeğer mantıksal fonksiyonu sağlaması, tasarımda önemli bir mühendislik problemidir. Bu nedenle mantıksal fonksiyonların eşdeğeri olan ve en az mantıksal devre elemanı ile gerçekleştirilebilen fonksiyonun bulunması gereklidir.

İfadelerin indirgenmesi için en çok kullanılan iki adet yöntem Karnaugh haritaları ve Quine-McCluskey Yöntemidir.

Karnaugh haritası yöntemi:

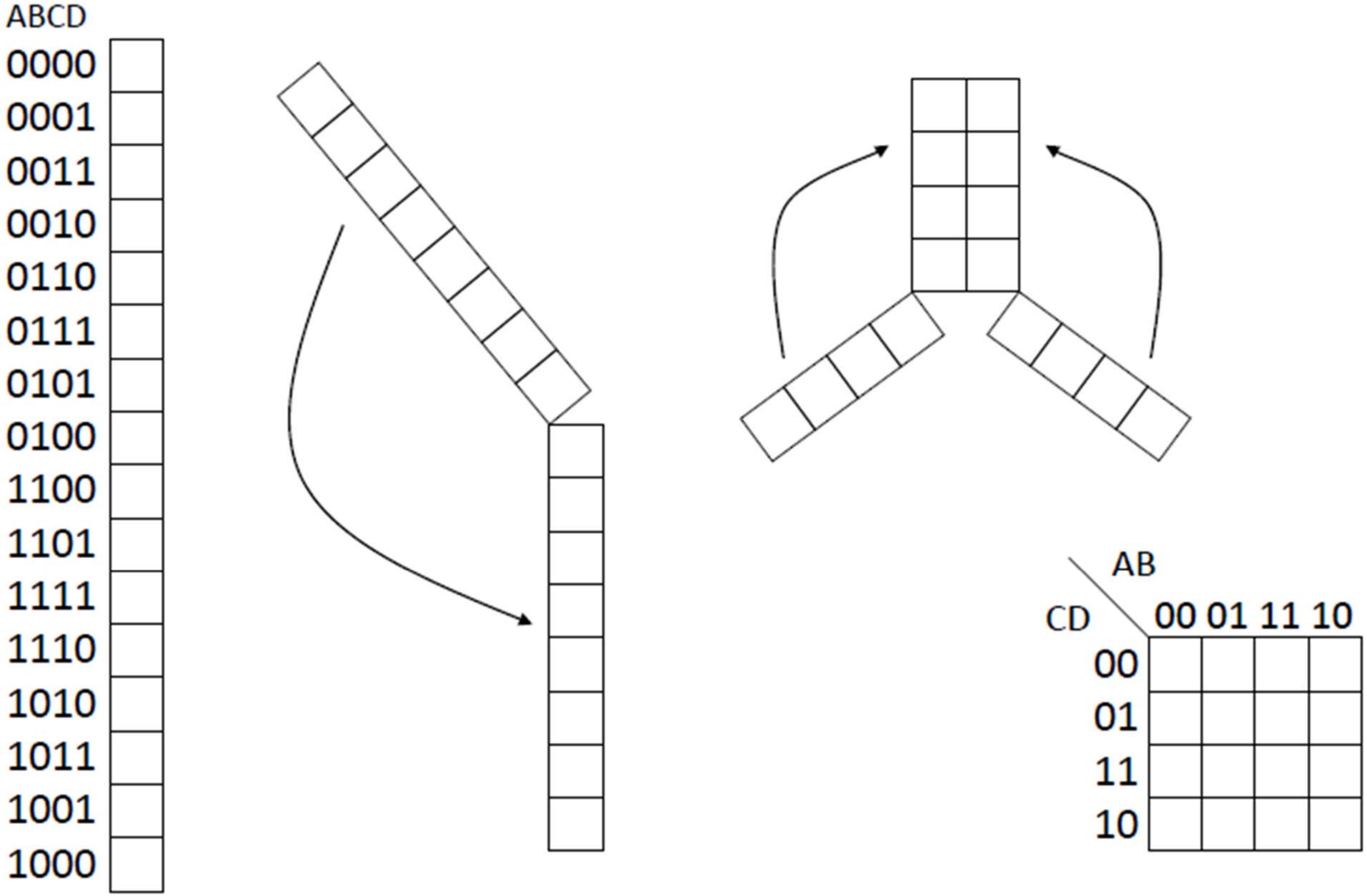
Bu yöntemde mintermlere eşdeğer olan en kısa ifade hesaplanır.
Yöntem iki, üç, dört, vs. değişkenli ifadeler için farklı harita oluşturulmasını gerektirir.
Bir Karnaugh haritasındaki hücre sayısı 2^n ifadesiyle bulunur (n=değişken sayısı). Bu durumda iki değişkenli bir sistemde hücre sayısı $2^2=4$, üç değişkenli bir sistemde hücre sayısı $2^3=8$ olur.
Bu yöntemde giriş değerlerinin alabileceği bütün alternatifler bir tablo üzerinde gösterilerek bu alternatiflerden hangilerinde çıkış olması isteniyorsa bu değerlere 1 yazılır. Sonuçta yazılı olan 1 rakamları arasında komşuluk incelemesi yapılarak sadeleştirilirler.
Harita üstünde sayılar yerleştirilirken 1'er arttırılan ikili (binary) sayı dizi değil Gray kod dizi kullanılır. Gray kodu dizisinde ikili sistemin aksine, bir sayıdan diğerine geçerken yalnızca bir adet ikili bit değişir. Bunun anlamı komşu hücreler sadece bir bit veya bir Boole değişkeni değiştirir. Bir mantık fonksiyonunun çıkışlarının ortak noktalarını görebileceğimiz şekilde organize etmek için gereken şey budur. Ayrıca, sütun ve satır başlıkları Gray kodu şeklinde olmalıdır aksi halde harita bir Karnaugh haritası olmaz.

Gray kodu nasıl üretilir?

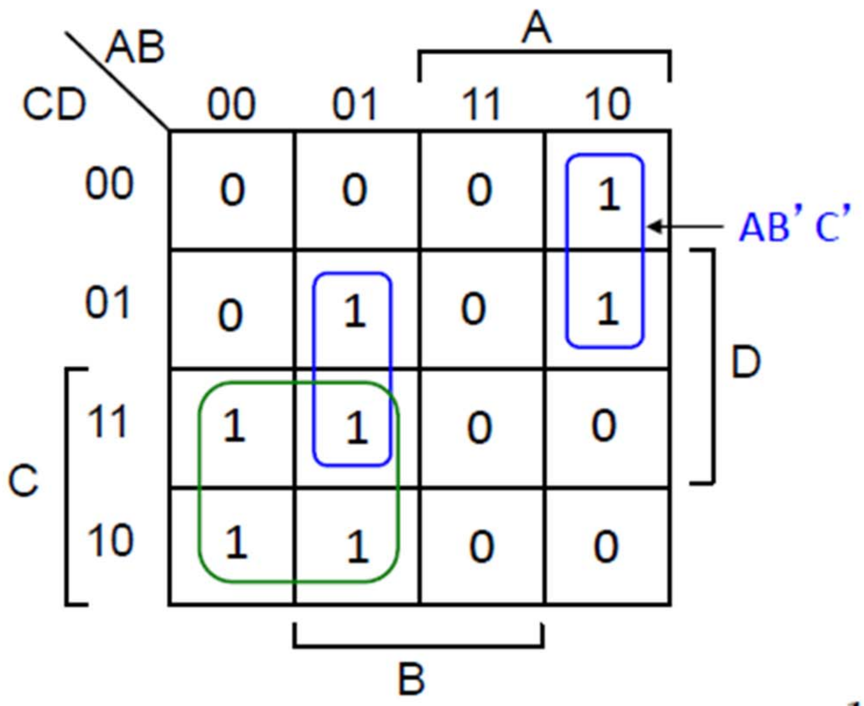
Karnaugh haritasından istenilen çıkış değerleri için 1 yazdıktan sonra sadeleştirme işleminde komşu 1'lerin gruplandırılması gerekmektedir. Ancak bu gruplar i=0, 1, 2,….. ∈ N için 2i adet 1'lerin gruplandırılması ile elde edilirler. Gruplandırma uyulması gereken şartlar:

1) Yan yana veya alt alta bulunan bir, iki veya ikinin kuvveti sayıdaki hücreler gruplandırılabilir. ($2^0=1$, $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$,……).
2) Her bir gruba farklı bir isim verilir.
3) Herhangi bir gruba girmiş olan '1', başka bir gruba girebilir. Bu işlem sonucun daha kısalmasına yardımcı olur.
4) Karnaugh çizelgesini sağa sola veya yukarı aşağı bükecek olursak, çizelge silindirik bir şekle dönüşebilir. Bu durumda çizelgenin alt ve üst hücrelerinde bulunan veya başta ve sondaki hücrelerde olan 1 değerleri bitişik sayılabileceğinden gruplandırma yapılabilir.
5) İki değişkenli Karnaugh'da aynı grup içerisinde dört adet, üç değişkenli Karnaugh'da sekiz adet '1' olması durumunda fonksiyon sonucu '1' olur.
6) Oluşturulan grupların ifade ettikleri kombinasyonlar, grubun bulunduğu kolon(lar) ve satır(lar)da hücreler boyunca değişim göstermeyen değişkenler alınarak oluşturulur. Değişim gösteren değişkenler ise göz ardı edilir.

Gray Kodlarından Haritaya



Grupların okunması 1/2



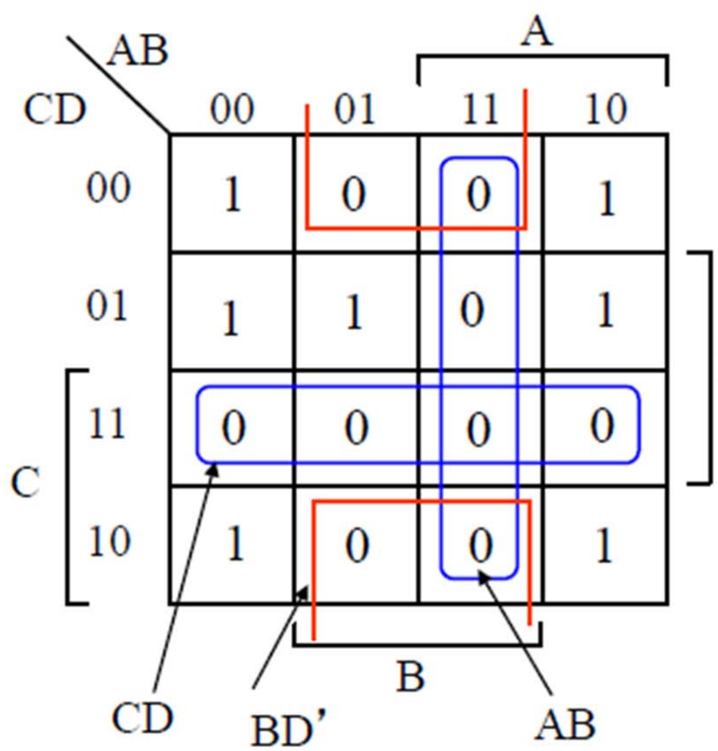
- 1leri /0ları gruplama çarpımlar toplamı/toplamlar çarpımı deyimlerini yalınlaştırır.
- Grupların içindeki değişken değerlerinin nasıl değiştiğine dikkat edin. *(Aşağıdaki tabloya göre deyimler belirlenir.)*

	1leri gruplama	0ları gruplama
Değişken değişiyor	*Dahil etme*	*Dahil etme*
Değişken sabit 0	tümleri	kendisi
Değişken sabit 1	kendisi	tümleri

Grupların okunması 2/2

- Gruptaki değişkenin değeri grup içerisinde değişiyor ise, bu değişkeni deyimden çıkar.
- Sabit 1 değeri, o değişkenin kendisinin alınacağını (AND terimi için) gösterir.
- Sabit 0 değeri, o değişkenin kendisinin alınacağanı (OR terimi için) gösterir.

Toplamların Çarpımı olarak Yalınlaştırma 1/2



- F(A,B,C,D) = Σ(0,1,2,5,8,9,10) toplamların çarpımı olarak yalınlaştırın.
- 0 ile işaretlenmiş hücreler F içinde yer almayan çarpım terimlerini gösterir (F' aittir). 0 içeren hücreleri birleştirmek Fin tümlerini verir.

$F' = AB + BD' + CD$

F' a DeMorgan kuralını uygularsak

$F = (A' + B')(B' + D)(C' + D')$

ÖRNEK:

$F = \bar{x}yz + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ fonksiyonunu Karnaugh haritası ile en sade hale getiriniz.

		xy değerleri			
		00	01	11	10
Z değerleri	0	1			1
	1	1	1		1

		xy değerleri			
		00	01	11	10
Z değerleri	0	1			1
	1	1	1		1

İlk grup sarı renkte gösterilen 1'ler için olur. Buradan sadece $\bar{y}$ gelir.

		xy değerleri			
		00	01	11	10
Z değerleri	0	1			1
	1	1	1		1

İkinci grup ise kırmızı gösterilen 1'ler için olur. Buradan da $\bar{x}z$ gelir.

Böylece F için en sade biçim F= $\bar{y} + \bar{x}z$ olur.

Karnaugh haritası pratik bir yöntem olmasına karşılık dörtten fazla değişkenli ifadelerde haritanın boyutu çok büyüyeceğinden tablo oluşturmak zorlaşır. Bu nedenle Quine-McCluskey yöntemi böyle ifadelerin indirgenmesinde kullanılabilir. Yöntemde mintermler en fazla 1 içeren bir dizilerine göre sıralanarak bu terimlerden indirgenme yapılır. Bu yöntemin uygulanmasında uyulması gereken şartlar:

1) Tabloda “1” değeri olan her minterm diğer mintermler ile karşılaştırılır.
2) Eğer 2 minterm arasında sadece 1 giriş değişkeni farklıysa o iki minterm gruplanır.
3) Farklı olan değişken silinerek yeni terim elde edilir.
4) Bu işlem adımları hiçbir gruplama yapılamayana kadar devam eder.
5) Hiçbir gruba girmeyen terimler sonuç fonksiyonuna yazılır.

ÖRNEK:

$F = xyz + x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ fonksiyonunu Quine-McCluskey yöntemi ile sadeleştiriniz.

Fonksiyon		
Değişken	Binary terim	Bit dizisi
1	xyz	111
2	$x\bar{y}z$	101
3	$\bar{x}yz$	011
4	$\bar{x}\bar{y}z$	001
5	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	000

1. adım		
Değişken	Binary terim	Bit dizisi
(1,2)	xz	1-1
(1,3)	yz	-11
(2,4)	$\bar{y}z$	-01
(3,4)	$\bar{x}z$	0-1
(4,5)	$\bar{x}\bar{y}$	00-

2. adım		
Değişken	Binary terim	Bit dizisi
(1,2,3,4)	z	--1

İlk adımda sarı işaretli 4 terim sadeleşiyor. Sadeleşmeyen terim $\bar{x}\bar{y}$ ve

2. Adımda sadeleşmeyen terim z olduğundan $F = \bar{x}\bar{y} + z$ olur.

ÖRNEK:

$F=\sum(0,1,2,8,10,11,14,15)$ fonksiyonunu Quine-McCluskey yöntemi ile sadeleştiriniz.

Fonksiyon			**1. adım**			**2. adım**		
Değişken	Binary terim	Bit dizisi	Değişken	Binary terim	Bit dizisi	Değişken	Binary terim	Bit dizisi
1	$\overline{w}\overline{x}\overline{y}\overline{z}$	0000	(0,1)	$\overline{w}\overline{x}\overline{y}$	000-	(0,2,8,10)	$\overline{x}\overline{z}$	-0-0
2	$\overline{w}\overline{x}\overline{y}z$	0001	(0,2)	$\overline{w}\overline{x}\overline{z}$	00-0	(10,11,14,15)	wy	1-1-
3	$\overline{w}\overline{x}y\overline{z}$	0010	(0,8)	$\overline{x}\overline{y}\overline{z}$	-000			
4	$w\overline{x}\overline{y}\overline{z}$	1000	(2,10)	$\overline{x}y\overline{z}$	-010			
5	$w\overline{x}y\overline{z}$	1010	(8,10)	$w\overline{x}\overline{z}$	10-0			
6	$w\overline{x}yz$	1011	(10,11)	$w\overline{x}y$	101-			
7	$wxy\overline{z}$	1110	(10,14)	$wy\overline{z}$	1-10			
8	$wxyz$	1111	(11,15)	wyz	1-11			
			(14,15)	wxy	111-			

İlk adımda sarı işaretli 4 terim ve yeşil işaretli diğer 4 terim sadeleşiyor.

Sadeleşmeyen terim $\overline{w}\overline{x}\overline{y}$ ve 2. Adımda sadeleşmeyen terimler $\overline{x}\overline{z}$ ve wy olduğundan $F=\overline{w}\overline{x}\overline{y}+\overline{x}\overline{z}+wy$ olur.

Görüşmek üzere