AYRIK MATEMATİK DERSİ

KÜME TEORİSİ
(SETS)

Konya, 2020

Niceleyiciler:

Bir önerme içerisinde değişken bulunuyorsa bu önerme açık önermedir.

“HER” niceleyicisi Evrensel niceleyicidir ve $\forall$ ile gösterilir.

“EN AZ” ya da “BAZI” niceleyicisi varlıksal niceleyicidir ve $\exists$ ile gösterilir.

A = { x: x$\in$N, x<6 } ise A kümesinin yazılışı-> A = {0, 1, 2, 3, 4, 5 } olur.

1) P(x): $(\exists x \in A, x+3=7)$P(x) = ?

P(x) önermesi x=4 için 4+3=7 olur. Önerme “en az” istediğine göre bir x için bile doğru olması yeterli olduğundan P(x)=1

2) Q(x): $(\forall x \in A, x\,\mathrm{cift})$Q(x)=?

“Her” dediğine göre A kümesindeki her elemanın önermeyi sağlaması gerekir. Ancak x=3 için x çift değildir ve önermeyi sağlamaz. Bu nedenle Q(x)=0

$\overline{\forall} = \exists \qquad \overline{\exists} = \forall$

Soru: A={1, 2, 3, 4, 5} ise aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini ve olumsuzlarını bulunuz.

1) P(x): $\left(\exists x \in A, x+3=10\right)$ "Bazı" elemanlar için x+3=10 olmaz. P(x)=0

Olumsuzu: $\overline{\left(\exists x \in A, x+3=10\right)} = \forall x \in A, x+3 \neq 10$

2) Q(x): $\left(\forall x \in A, x+3 \leq 7\right)$

"Her" eleman için doğru değildir. Çünkü x=5 için 5+3=8>7 olur. Q(x)=0

Olumsuzu: $\overline{\left(\forall x \in A, x+3 \leq 7\right)} = \exists x \in A, x+3 > 7$

ÖRNEKLER:

1) E={x:x∈N, 1<x<20}

A={ x:x∈E, 3<x<12}

B={ x:x∈E, x çift ve x<15}

C={ x:x∈E, 4+x=8} Buna göre

A∩B, A∪B, A-B, B-A, A', B',
A∩C, B∩C, A∩B∩C,
A∩(B∪C)=?

2) (A-B)∩(A∩B)=?

A-B= A∩B' yerine yazarsak

(A∩B')∩(A∩B)
A∩(B'∩B) -> B'∩B=∅
A∩∅=∅

3) $\overline{(A \cup B \cup C)} = ?\, \overline{(A \cup C)} \cap \overline{(A \cup B)}$

$= (\overline{A} \cap \overline{C}) \cap (\overline{A} \cap \overline{B})$

$= \overline{A} \cap \overline{C} \cap \overline{A} \cap \overline{B}$

$= \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

$= \overline{(A \cup B \cup C)}$

4) (E∩A)∩(∅∪A')=?
E∩A=A ve ∅∪A'=A' olur
A∩A'=∅

5) (A∪B)∩(A∪B')=?
A∪(B∩B') -> B∩B'=∅ olduğundan
A∪∅=A

ÖRNEKLER:

6) $A\Delta(B\cap A) = ?\ A - B$

$$\#\#\ A\Delta B = (A-B)\cup(B-A)$$

$$[A-(B\cap A)]\cup[(B\cap A)-A]$$

$$\left[A\cap\overline{(B\cap A)}\right]\cup\left[(B\cap A)\cap\overline{A}\right]$$

$$\left[A\cap(\overline{B}\cup\overline{A})\right]\cup\left[(B\cap A)\cap\overline{A}\right]$$

$$B\cap A\cap\overline{A} = \varnothing$$

$$\left[(A\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{A})\right]\cup\varnothing$$

$$A\cap\overline{A} = \varnothing$$

$$(A\cap\overline{B})\cup\varnothing = (A\cap\overline{B}) = A-B$$

7) E Evrensel kümesi 10 elemanlıdır. Eleman sayıları

n(A)=5, n(B)=3 ve n(A∩B)=1 ise

n(A∪B)=? n(A∪A')=? n(A')=?

n(A'∩B')=?

a) n(A∪B)=?

n(A∪B)=n(A) + n(B)-n(A∩B)

=5+3-1=7

b) n(A∪A')=?

n(A∪A')=n(E)=10

c) n(A')=?

n(A) + n(A') =n(E)

5+ n(A') =10 n(A') =5

d) n(A'∩B')=?

n(A'∩B')=n(A∪B)' = n(E)-n(A∪B)

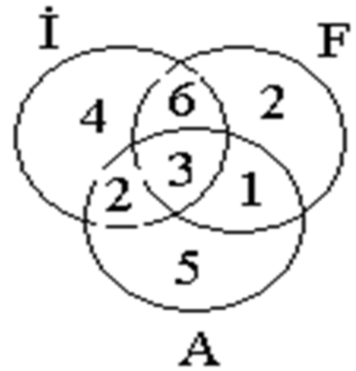
=10-7=3

ÖRNEKLER:

8) 25 kişilik bir sınıfta İngilizce (İ), Fransızca (F) ve Almanca (A) bilen öğrenciler mevcuttur.

15 kişi=İngilizce
12 kişi=Fransızca
11 kişi=Almanca
3 kişi=her 3 dili

5 kişi=İngilizce + Almanca
9 kişi=İngilizce + Fransızca
4 kişi=Fransızca + Almanca



a) Sadece Almanca bilen?
b) Sadece İngilizce bilen?
c) Sadece Fransızca bilen?
d) Fransızca + Almanca bilen ama İngilizce bilmeyen?
e) İngilizce + Fransızca bilen ama Almanca bilmeyen?
f) Sadece bir tek dilen toplam kişi?
g) En azından bir dil bilenlerin toplamı?
h)Hiçbir dili bilmeyen?

a) 5 b) 4 c)2 d)1 e)6 f)11 g) (İ∪A∪F)=23 h)2

ÖRNEKLER:

1) A={1,2} B={a, b, c} C={c, d}
a) AxB=? b) BxA=? c) CxC=?
d) (AxB) ∩ (AxC)=? e) Ax(B ∩ C)=?

a) AxB=? {(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)}
b) BxA=? {(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)}
c) CxC=? {(c,c), (c,d), (d,c), (d,d)}
d) (AxB) ∩ (AxC)=?
AxC={(1,c),(1,d),(2,c),(2,d)}
(AxB) ∩ (AxC)=? {(1,c), (2,c)}
e) Ax(B ∩ C)=?
B ∩ C={c}
Ax(B ∩ C)=? {(1,c), (2,c)}

A herhangi bir küme olsun. A x A = A^2 ile gösterilir ve "A iki" olarak okunur. A x A x A x..........x A = n adet A çarpımı A^n ile gösterilir. ("A n diye okunur")

A x A = A^2 'nin $(x,x) \in A$ şeklindeki elemanlarına "A^2'nin köşegeni" denir.

2) $\overline{(AxB)} = ?\ \overline{A}x\overline{B}$

$\{(x,y) : (x,y) \notin AxB\}$

$x \notin A$ veya $y \notin B$

$x \in \overline{A}$ veya $y \in \overline{B}$

Eşitlik yok

3) $(AxB) - (CxC) = ? [(A - C)xB] \cup [Ax(B - C)]$

Verilen ifadeler için Eşitlik var mıdır? İspatlayınız.

Kuvvet Küme Ailesi (Power Set):

A herhangi bir küme olsun. A'nın tüm alt kümelerinin oluşturduğu aileye A'nın kuvvet kümesi denir ve P(A) ile gösterilir.

ÖRNEK:

A={1, 2, 3} ise P(A)={ Ø, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2 ,3 }}

P(A), A kümesinin tüm alt kümelerinin kümesidir. P(A) kuvvet kümesinin elemanları birer kümedir. P(A) gibi elemanları da küme olan bir küme düşünelim. Bu kümeye genel olarak $\mathscr{A}$ dersek, $\mathscr{A}$ genel kümesi A_1, A_2, A_3.......,A_n elemanlarından oluşur. Bu durumda $\mathscr{A}$ genel kümesi:

$$\mathscr{A}=\{A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots, A_n\} \text{ olur.}$$

A'nın indisleri (1,2,3,.....,n) olarak sıralandığı için ortak özellik yöntemiyle yazarsak,

$$\mathscr{A}=\{A_i \mid i=1,2,\ldots.n\} \text{ olur.}$$

İndisleri belirten sayılar I={1,2,....n} şeklinde yazılabileceği için $\mathscr{A}$ genel kümesi:

$$\mathscr{A}=\{A_i ,i \in I\} \text{ biçiminde genel formda yazılır.}$$

Küme Aileleri:

I doğal sayıların herhangi bir alt kümesi olmak üzere yani $I \subset N$ iken; A_i $(i \in I)$ olsun. Burada I kümesine indis kümesi, A_i kümelerine de indislenmiş küme denir. I indis kümesi olmak üzere $\{A_i : i \in I\}$ kümesine bir küme ailesi denir ve $\mathscr{A}=\{A_i : i \in I\}$ olarak gösterilir.

ÖRNEK:

$I=\{1, 2, 3, 4\}$ olsun. $i \in I$ iken A_i'ler = A_1, A_2, A_3, A_4 olur. A_i'ler aşağıdaki verilmiş olsun

$A_1=\{a, b\}$ $\quad$ $A_2=\{a, c, d\}$ $\quad$ $A_3=\{e, f, g\}$ $\quad$ $A_4=\{a, ,b, e, f\}$ olsun.

$\mathscr{A}= \{\{a, b\}, \{a, c, d\}, \{e, f, g\}, \{a, b, e, f\}\}$ olur.

Eğer $\mathscr{A}=\{A_i : i \in \emptyset\}$ ise $\mathscr{A}$=Boş ailedir.

$\mathscr{A}=\{A_i : i \in I\}$ ve $\mathscr{B}=\{A_j : j \in J\}$ verilsin. Eğer $I \subset J$ ise $\mathscr{A}$ ailesi $\mathscr{B}$ ailesinin alt ailesidir.

ÖRNEK:

$J=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad$ $\mathscr{B}=\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ $\quad$ -> $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$

$I=\{2, 3, 4\}$ $\quad$ $\mathscr{A}=\{A_2, A_3, A_4\}$

Küme Ailelerinin Birleşimi:

$\mathscr{A}=\{A_i : i\in I\}$ olsun. $\{x : \exists k\in I, x\in A_k\}$ şeklinde tanımlanan kümeye $\mathscr{A}$ ailesinin birleşimi denir.

$\bigcup\mathscr{A}$ ya da $\bigcup_{i\in I} A_i$ ya da $\bigcup_{A_i\in A} A_i$ ile gösterilir.

$\mathscr{A}=\{\{a,b\},\{a,c,d\},\{e,f,g\},\{a,b,e,f\}\}$

$$\bigcup_{i\in I} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

$$=\{a,b,c,d,e,f,g\}$$

Küme Ailelerinin Kesişimi:

$\mathscr{A}=\{A_i : i\in I\}$ olsun. $\{x : \forall k\in I, x\in A_k\}$ şeklinde tanımlanan kümeye $\mathscr{A}$ ailesinin kesişimi denir

$\bigcap\mathscr{A}$ ya da $\bigcap_{i\in I} A_i$ ya da $\bigcap_{A_i\in A} A_i$ ile gösterilir.

$\mathscr{A}=\{\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,c\},\{a,e\},\{a,b,e,g\}\}$

$$\bigcap_{i\in I} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$$

$$=\{a\}$$

Kurallar:

$\mathscr{A}=\{A_i : i\in I\}$ ve $\mathscr{B}=\{B_j : j\in J\}$ verilsin.

1) $$\overline{\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)}=\bigcup_{i\in I}\overline{A_i}$$

2) $$\overline{\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)}=\bigcap_{i\in I}\overline{A_i}$$

3) $$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\cap\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)=\bigcup_{i\in I}\left[\bigcup_{j\in J}\left(A_i\cap B_j\right)\right]=\bigcup_{j\in J}\left[\bigcup_{i\in I}\left(A_i\cap B_j\right)\right]$$

4) $$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\cup\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right)=\bigcap_{i\in I}\left[\bigcap_{j\in J}\left(A_i\cup B_j\right)\right]=\bigcap_{j\in J}\left[\bigcap_{i\in I}\left(A_i\cup B_j\right)\right]$$

Ayrım Kümesi (parçalanışı-bölmelenmesi):

B herhangi bir küme olsun. B'nin alt kümelerinden oluşan bir $\mathscr{A}$ ailesi olsun. Eğer;

1) $\varnothing \notin \mathscr{A}$ 2) $\forall\, i \neq j$ icin $B_i \cap B_j = \varnothing$ 3) $\bigcup \mathscr{A} = B$ ise

$\mathscr{A}$ ailesi B kümesinin ayrışımı veya parçalanışıdır.

ÖRNEK:

$B=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$B_1=\{a\}$ $B_2=\{b, d\}$ $B_3=\{c, f\}$ $B_4=\{e, g, h\}$ ise $\mathscr{A}=\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$

Küme Örtüsü:

$\mathscr{A}$ herhangi bir aile olsun. B de bir küme olsun. Eğer ($B \subset \cup\mathscr{A}$) ise $\mathscr{A}$ ailesi B kümesinin bir örtüsü denir.

$\mathscr{A}=\{\{a,b\},\{a,c,d\},\{e,f,g\}\}$ ve B={a, d, e} olsun.
$\cup\mathscr{A}$={a, b, c, d, e, f, g} ve ($B \subset \cup\mathscr{A}$) olduğundan $\mathscr{A}$ ailesi B'nin bir örtüsüdür.

Küme Ailelerinin Kartezyen Çarpımı:

1) $$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) x \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in(IxJ)} \left(A_i x B_j\right)$$

2) $$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) x \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in(IxJ)} \left(A_i x B_j\right)$$

ÖRNEKLER:

1) I indis kümesi ve A_n $(n \in I)$ olmak üzere;

$A_n = \{nk : k \in N\}$ ve $I = \{x : x \in N$ ve $x =$ asal sayı$\}$ ise $\bigcup_{i \in I} A_i = ?$

$I = \{2, 3, 5, 7, 11 \ldots\ldots\}$ indis kümesi $\bigcup_{i \in I} A_i = A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup \ldots\ldots\ldots$ olur. Buna göre;

$A_2 = \{2k : k \in N\} = \{0,2,4,6,8,\ldots.\}$
$A_3 = \{3k : k \in N\} = \{0,3,6,9,12,\ldots.\}$
$A_5 = \{5k : k \in N\} = \{0,5,10,15,20,\ldots.\}$ devam eder……

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{0,2,3,4,5,6,7,8,9\ldots\}$$

2) $A = \{1, 2, 3\}$ bütün ayrışımlarını bulunuz.

1) $\emptyset \notin \mathscr{A}$ 2) $\forall\ i \neq j$ icin $B_i \cap B_j = \emptyset$ 3) $\bigcup \mathscr{A} = B$ ise

$A_1 = \{1\}$ $A_2 = \{2\}$ $A_3 = \{3\}$ $A_4 = \{1, 2\}$ $A_5 = \{1, 3\}$ $A_6 = \{2, 3\}$ $A_7 = \{1,2,3\}$

$\mathscr{A}_1 = \{A_7\}$ $\mathscr{A}_2 = \{A_1, A_6\}$ $\mathscr{A}_3 = \{A_2, A_5\}$ $\mathscr{A}_4 = \{A_3, A_4\}$ $\mathscr{A}_5 = \{A_1, A_2, A_3\}$

ÖRNEKLER:

3) a ve b gerçek sayılar olmak üzere [a, b] kümesi a ≤ x ≤ b eşitsizliğini doğrulayan gerçek sayılar kümesidir.

$\mathscr{A}=\{A_i : i \in Z \wedge A_i = [i, i+1]\}$ ise aşağıdakiler cevaplayın.

a)$A_1 \cup A_2$=? b) $A_{-2} \cup A_{-1} \cup A_0$=? c) $A_3 \cap A_4$=?

Z=tam sayılar={…-3, -2, -1, 0, 1, 2, …}

a) A_1=[1, 2] A_2=[2, 3] → $A_1 \cup A_2$=[1, 3]
b) A_{-2}=[-2, -1] A_{-1}=[-1, 0] A_0=[0, 1] → $A_{-2} \cup A_{-1} \cup A_{0}$= [-2, 1]
c) A_3=[3, 4] A_4=[4, 5] → $A_3 \cap A_4$={4}

4)IR Reel sayılar olmak üzere A_1={x: x∈IR ve x≤2} ve A_2={x: x∈IR ve x≥3} U$\mathscr{A}$ IR'nin bir ayrışımı olur mu?

a) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ b)$A_1 \cup A_2$=IR c) $\emptyset \notin \mathscr{A}$ olmalı

$A_1=(-\infty, 2]$ $A_2=[3, +\infty)$ ise → $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ve $A_1 \cup A_2$=IR-(2, 3)
$A_1 \cup A_2$=IR olmadığından, ayrışımı olmaz!

ÖRNEKLER:

5) $A_1=\{x: x\in IR$ ve $x<1\}$ ve $A_2=\{x: x\in IR$ ve $x>1\}$ ve $A_3=\{1\}$ ise $\cup\mathscr{A}$ IR'nin bir ayrışımı olur mu?

$A_1=(-\infty, 1)$ $A_2=(1, +\infty)$ $A_3=\{1\}$

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$ $A_1 \cap A_3 = \emptyset$ $A_2 \cap A_3 = \emptyset$ ve $A_1 \cup A_2 \cup A_3=IR$

Evet, ayrışımı olur.

6) $A_n=\{(n, n+1), n\in Z\}$ için $\cup\mathscr{A}$, IR'nin bir ayrışımı olur mu?

$A_1=(1, 2)$ $A_2=(2, 3)$ $A_3=(3, 4)$…… $A_n=(n, n+1)$

Tüm $i\neq j$ için $A_i \cap A_j= \emptyset$ ve $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots\ldots \cup A_n=IR$ olmalı

$A_i \cap A_j= \emptyset$ ama $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots\ldots \cup A_n=IR$ olmaz. Hayır ayrışımı olmaz!

({1}, {2}, {3}, {4}…..{n}) noktaları dahil olmaz.

7) $A_n=\{[0, 1/n]: n\in N$ ve $n>0\}$ ise $\bigcup\mathscr{A}=?$ $\bigcap\mathscr{A}=?$

$A_1=[0, 1]$ $A_2=[0, 1/2]$ $A_3=[0, 1/3]$

$\bigcup\mathscr{A}=[0, 1]$ $\bigcap\mathscr{A}=\{0\}$