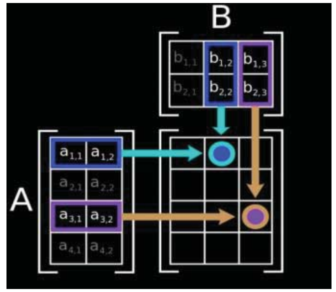


Matris: *m* satır ve *n* sütundan oluşan, sayıların bir dikdörtgensel dizisine bir matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A matrisinin i. satırı $[a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}]$ dir .$(1 \leqslant i \leqslant m)$.

A nın j. sütunu $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ dir. $(1 \leqslant j \leqslant n)$

MATRİSLER

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{array}{l}\rightarrow 1.\text{ satır}\\ \rightarrow 2.\text{ satır}\\ \rightarrow 3.\text{ satır}\\ \\ \rightarrow m.\text{ satır}\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ 1.\text{ sütun} & 2.\text{ sütun} & 3.\text{ sütun} & n.\text{ sütun}\end{array}$$

Şekildeki gibi bir cismin elemanlarından oluşan sıralı tabloya m x n tipinde bir matris denir.

i= 1,2,3, .. , m ve j = 1,2,3, ... , n olmak üzere,

$A = [a_{ij}]$ şeklinde ifade edilir. Burada i, satır indisini; j;ise sütun indisini belirtmektedir.

a_{ij} elemanı; A matrisinin i. satırı ile j. sütununun kesiştiği yerdeki elemanıdır.

Matris

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

elemanları $a_{ij} \ \ (i = 1, 2, \ldots, m \ ; \ \ j = 1, 2, \ldots n)$

cinsinden kısaca $\mathbf{A} = [a_{ij}]$

Matristeki her bir sayıya **eleman (girdi)** denir. Yukarıdaki matriste $m \times n$ tane eleman vardır.

Matriste m ve n sayıları ->
matrisin boyutları (dimensions)

Matriste (mxn) ->
Matrisin büyüklüğü (magnitude)

Matrisler

- **Örnek:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}, B = [1 \;\; 3 \;\; -7], C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ ve } D = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

ise $a_{32} = -3, c_{21} = -1, b_{12} = 3, d_{22} = -2 \ldots$ gibi.

Satır Matris

Tanım: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisinin her satırına, **satır matrisi** denir.

$B_1 = [a_{11} \;\; a_{12} \;\; \ldots \;\; a_{1n}]$ (1.satır matrisi)
$B_2 = [a_{21} \;\; a_{22} \;\; \ldots \;\; a_{2n}]$ (2.satır matrisi)
. . . .
. . . .
. . . .
$B_m = [a_{m1} \;\; a_{m2} \;\; \ldots \;\; a_{mn}]$ (m.satır matrisi)

Sütun Matris

Tanım: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisinin her sütununa, **sütun matrisi** denir.

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots. \\ a_{m1} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{12} \\ \ldots. \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots\ldots, A_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots. \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

- A_1 :1.satır matrisi
- A_2 : 2.satır matrisi
- ...
- ...
- A_n : n.satır matrisi

Matrisler

- **Satır matris:** Bir satırdan oluşan matrise satır matrisi denir.

- Örneğin ***A* = [1, 7, -2, 3]** satır matristir. Bir satır ve dört sütundan oluşmuştur. **1×4** matristir.

- **Sütun matris:** Bir sütundan oluşan bir matrise sütun matris denir.

  Örneğin $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ matrisi sütun matristir. Üç satır ve bir sütundan oluşmuştur. **3×1** matristir.

İki Matrisin Eşitliği

Tanım Eğer $m \times n$ tipindeki $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrislerinin karşılıklı elemanları eşitse bu iki matrise eşit matrisler denir ve $A = B$ yazılır . Yani her $i = 1, 2, \ldots, m$ ve $j = 1, 2, \ldots, n$ için $a_{ij} = b_{ij}$ dir.

İKİ MATRİSİN EŞİTLİĞİ

Tanım: Tipleri aynı ve karşılıklı elemanları eşit olan matrisler, **eşit matrisler** denir.

$$\forall\ (i, j) \in M \times N \text{ için, } a_{ij} = b_{ij} \Leftrightarrow [a_{ij}]_{m \times n} = [b_{ij}]_{m \times n}$$

İki Matrisin Eşitliği

- **Örnek:**

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 4\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\3 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

Burada ***A*** **2×2** ve ***B*** **2×3** matrisler olduğundan, boyutları birbirine eşit olmadığından $A \neq B$'dir.

- **Örnek:**

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2\\5 & 4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 2\\5 & -1\end{bmatrix}$$

A ve *B*'nin boyutları aynı olmasına karşın, elemanları farklı değerler olduğundan $A \neq B$'dir.

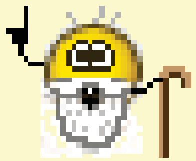
MATRİS İŞLEMLERİ

Matrislerin Toplamı (Farkı)

A ile B mxn boyutlu iki matris ise, $a_{ij} \pm b_{ij} = c_{ij}$ olacak şekilde elde edilen $C=[c_{ij}]$ matrisine, A ile B matrislerinin toplamı (veya farkı) denir.

İki matrisin toplanabilmesi (veya çıkarılabilmesi) için boyutlarının aynı olması gerekir.

Farklı boyutlu iki matris toplanamaz (veya çıkarılamaz)



Matrislerin Toplamı (Farkı)

Tanım: Eğer $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]$ ve $\mathbf{B}=\left[b_{ij}\right]$ boyutları $m{\times}n$ olan matrisler ise bu iki matrisin toplamı:

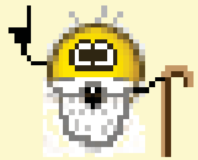
$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}$$

$$\left[a_{ij}+b_{ij}\right]=\left[c_{ij}\right]$$

Matrislerin Toplamı (Farkı)

Toplama işleminin koşulu

İki matrisin toplanabilmesi (veya çıkarılabilmesi) için boyutlarının aynı olması gerekir.
Farklı boyutlu iki matris toplanamaz (veya çıkarılamaz)



$$\underset{4\times 3}{\overset{\mathbf{A}}{\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}}} + \underset{4\times 3}{\overset{\mathbf{B}}{\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}}} = \underset{4\times 3}{\overset{\mathbf{C}}{\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}}}$$

Matrislerin Toplamı (Farkı)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$$

ÖRNEK

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ ise } \mathbf{A+B=C}$$

matrisini bulunuz.

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Bir Matrisin Toplama İşlemine Göre Tersi

Tanım: $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{mxn}$ matrisi verilmiş olsun. $-A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{mxn}$ matrisine, $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{mxn}$ matrisinin toplama işlemine göre tersi denir.

Örneğin: $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ matrisinin toplama işlemine göre tersi,

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ matrisidir.

Bir Matrisin Bir Skalerle Çarpımı

Tanım: Eğer $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]$ boyutu $m \times n$ olan bir matris ve $k \in \mathbb{R}$ olan bir skaler ise matris ile skalerin çarpımı boyutu $m \times n$ olan bir matristir:

$$k\mathbf{A} = \mathbf{C}$$

$$\left[k a_{ij} \right] = \left[c_{ij} \right]$$

ÖRNEK

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 5 & -1\\ 3 & 4 & 0\\ 2 & 7 & 2\end{bmatrix}$$ ise 2**A** ve -3**A** skaler çarpımlarını bulunuz.

$$2\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2(2) & 2(5) & 2(-1)\\ 2(3) & 2(4) & 2(0)\\ 2(2) & 2(7) & 2(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 10 & -2\\ 6 & 8 & 0\\ 4 & 14 & 4\end{bmatrix}$$

$$-3\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-3(2) & -3(5) & -3(-1)\\ -3(3) & -3(4) & -3(0)\\ -3(2) & -3(7) & -3(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & -15 & 3\\ -9 & -12 & 0\\ -6 & -21 & -6\end{bmatrix}$$

Matrislerin Çarpımı

Tanım: Eğer $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]$ boyutu $m \times n$ ve $\mathbf{B} = \left[b_{ij} \right]$ boyutu $n \times p$ olan matrisler ise bu iki matrisin çarpımı boyutu $m \times p$ olan bir matristir:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj} = \left[c_{ij} \right]$$

Matrislerin Çarpımı

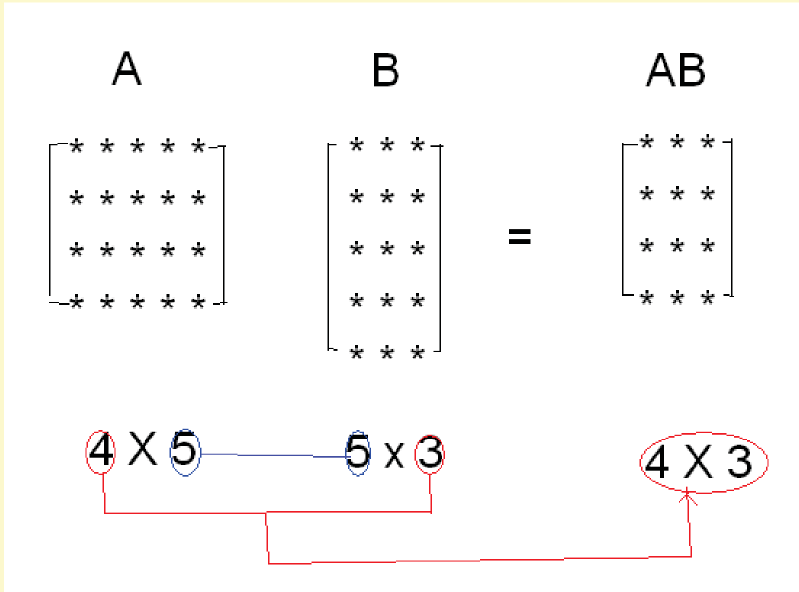
$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & \{c_{12}\} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & {}_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$$

Matrislerin Çarpımı

Çarpım işleminin koşulu



ÖRNEK

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -9 & 2 \\ 5 & 7 & -6 \end{bmatrix}$$

matrisleri için **C** çarpım matrisini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -9 & 2 \\ 5 & 7 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} [(2\times 3)+(-1\times 5)] & [(2\times -9)+(-1\times 7)] & [(2\times 2)+(-1\times -6)] \\ [(3\times 3)+(4\times 5)] & [(3\times -9)+(4\times 7)] & [(3\times 2)+(4\times -6)] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -25 & 10 \\ 29 & 1 & -18 \end{bmatrix}$$

Matrislerin Toplama ve Skaler Çarpım Özellikleri

A,**B**,**C** aynı boyutlu matrisler; k_1, k_2 skalerler olmak üzere;

1) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$

2) $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$

3) $k_1(\mathbf{A}+\mathbf{B})=k_1\mathbf{A}+k_1\mathbf{B}$

4) $(k_1+k_2)\mathbf{A}=k_1\mathbf{A}+k_2\mathbf{A}$

5) $(k1k2)\mathbf{A}=k1(k2\mathrm{A})$

Matrislerin Çarpım Özellikleri

A,**B**,**C** aynı boyutlu matrisler; k_1, k_2 skalerler olmak üzere;

1) **A**(**B**+**C**)=**AB**+**AC**

2) (**A**+**B**)**C**=**AC**+**BC**

3) **A**(**BC**)=(**AB**)**C**

4) **AB**≠**BA** (Boyutlar uygun değilse)

5) **AB**=**AC** ise **B**=**C** olması gerekmez.

6) **AB**=**0** ise **A**=**0** ya da **B**=**0** olması gerekmez.

7) **A**(**B**+**C**)=**AB**+**AC**

8) (**A**+**B**)**C**=**AC**+**BC**

MATRİSLERDE ÇARPMA İŞLEMİNİN ÖZELLİKLERİ

1.Çarpma işleminin değişme özelliği yoktur. A . B $\neq$ B . A

2. A $\neq$ O ve B $\neq$ O olduğu halde, A . B = O olabilir.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{olup;}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 2-2 & 2-2 \\ -2+2 & -2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dır.}$$

3. A . O = 0 . A = 0 dır. Buna göre,sıfır matrisi çarpma işleminde yutan elemandır.

4. Birim matris çarpma işleminin etkisiz elemanıdır.
I birim matris olmak üzere, A . I = I . A = A dır.

5. Matrislerde çarpma işleminin birleşme özelliği vardır.

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{jk}]_{n \times p}$, $C = [c_{jk}]_{p \times r}$ olmak üzere ;

A.(B .C) = (A .B) . C dir.

6. Matrislerde çarpma işleminin dağılma özelliği vardır.

a. Matrislerde çarpma işleminin toplama işlemi üzerine soldan dağılma özelliği;

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{jk}]_{n \times p}$, $C = [c_{jk}]_{n \times p}$ olmak üzere ;

$A.(B + C) = A.B + A.C$ dir.

b. Matrislerde çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan dağılma özelliği;

A ve B matrisleri m x n türünde, C matrisi n x p türünde iseler,

$(A + B) C . = A.C + B.C$ olur.

7. **$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{jk}]_{n \times p}$ ve $k = R$ sayı ise, $k.(A.B)=A.(k.B)=(k.A).B$ dir.**

8. **A sıfır değilken ve A.B=A.C iken, B=C olmayabilir.**

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ veriliyor.A.B=B.C

olduğunu gösterelim.

Matrisin Transpozu

- Her hangi bir **A** matrisinin transpozu (evriği) $\mathbf{A}^T$ ile gösterilir.
- A matrisinin satırları (sütunları) sırası ile $\mathbf{A}^T$ matrisinin sütunlarını (satırlarını) oluşturur.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 7 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Bir Matrisin Transpozu

Verilen bir $m \times n$ tipinden matrisin transpozu, verilen matrisin sütunlarının satır biçiminde yazılmasıyla elde edilir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

matrisinin transpozu $n \times m$ tipinden A^T matrisidir ve

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

dir.

Transpoz İşleminin Özellikleri

1. $\left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}$
2. $\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
3. $\left(k\mathbf{A}\right)^T = k\mathbf{A}^T$ $\quad$ k bir skaler
4. $\left(\mathbf{AB}\right)^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

2.4) Matrislerin vektörel çarpımı (Dot product):

A ve B aynı büyüklükte iki matris ise karşılıklı elemanları birbiri ile çarpılarak vektörel çarpım elde edilir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}_{nxm} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{ik} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sj} & \cdots & b_{sk} \end{bmatrix}_{sxk}$$

$$n = s \ ve \ m = k \ olmak \ \text{ü}zere;$$

$$A \cdot\!* B \ (A \ vekt\text{ö}rel \ \text{ç}arp\imath m \ B) = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{1j}b_{1j} & \cdots & a_{1m}b_{1k} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}b_{i1} & \cdots & a_{ij}b_{ij} & \cdots & a_{im}b_{ik} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{s1} & \cdots & a_{nj}b_{sj} & \cdots & a_{nm}b_{sk} \end{bmatrix}_{nxk}$$

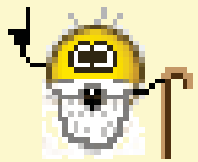
Özel Matrisler

Kare Matris :

Satır sayısı, sütun sayısına eşit olan (*m*=*n*) matrislere kare matris denir.

NOT: Kare bir matrisin determinantı hesaplanabilir. Kare olmayan bir matrisin determinantı söz konusu değildir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$



3 satır ve 3 sütundan oluşmaktadır

KARE MATRİSİN KUVVETİ

Tanım: n. Sıradan bir A kare matrisi verilmiş olsun. $k \in N^{+}$ olmak üzere

$$A^0 = I^n ,\ A^1 = A,\ A^2 = A.A\ ,\ A^3 = A.A^2\ ,\ ...,\ A^k = A.A^{k-1}$$ **dir.**

Özel Matrisler

Sıfır Matris :

Tüm elemanları sıfır olan matrise denir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

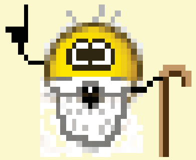
Özel Matrisler

Köşegen Matris :

Köşegen üzerindeki elemanlarının a_{ii} dışında, diğer tüm elemanları (a_{ij})sıfır olan matrise denir.

a_{ii} elemanlarının bazıları sıfır olabilir.

NOT: Sadece kare matrisler köşegen matris olabilir.



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Asal Köşegen , Yedek Köşegen

Tanım : $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisine $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ elemanlarının oluşturduğu köşegene, **asal köşegen**; $a_{n1}, a_{(n-1)2}, \ldots, a_{1n}$ terimlerinin oluşturduğu köşegene, **yedek köşegen** denir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Yedek köşegen

Asal köşegen

a_{11}, a_{22}, a_{33} : asal köşegen

a_{31}, a_{22}, a_{13} :yedek köşegen

Özel Matrisler

Skaler matrisler:

Asal köşegen elemanları (a_{ii})birbirine eşit olan köşegen matrise **skalar matris** denir.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Özel Matrisler

Birim Matris :

Köşegen üzerindeki elemanları 1, diğerleri sıfır olan skaler matrise birim matris denir.

$\mathbf{I}_n$ ile gösterilir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi bir birim matris olup I_3 ile gösterilir.

Önemli: $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$

Birim Matris

Tanım: Asal köşegen üzerindeki elemanları bir, diğer elemanları sıfır olan kare matrise, **birim matris** denir. n x n tipindeki bir birim matris $\mathbf{I_n}$ ile gösterilir.

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi , 4.sıradan bir birim matrisidir. I_4 ile gösterilir.

(asal köşegen)

Özel Matrisler

Simetrik Matris

A bir kare matris olsun.
Eğer $a_{ij}=a_{ji}$ eşitliği tüm $i \neq j$ elemanları için sağlanıyor ise diğer bir ifade ile **A**=**A**^{T} ise **A** matrisi simetrik matristir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & -1 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Satır ve sütüunlar yer değiştirirse yani transpozu alınırsa; yeni oluşacak matris A matrisi ile aynı olur!

Örneklerden de görüldüğü gibi asal köşegene göre simetrik elemanlar birbirine eşittir!..

MATRİS TÜRLERİ

7) Simetrik Matris: A_{mxm} kare matrisinde;

$$\forall\, a_{ij} = a_{ji} \; veya \; A = A^T \; ise; \; (A^T = Matris\ transpozesi)$$

A matrisi simetrik bir matristir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{43} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Özel Matrisler

Yarı Simetrik Matris

A bir kare matris olsun.
Eğer $-a_{ij}=a_{ji}$ eşitliği tüm $i \neq j$ elemanları için sağlanıyor ise diğer bir ifade ile $-\mathbf{A}=\mathbf{A}^T$ ise **A** matrisi yarı simetrik matristir.
$i=j$ için $-a_{ii}=a_{ii}$ olduğundan asal köşegen elemanları sıfırdır.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & -6 \\ -5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^T=\begin{bmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -3 & 0 & 6 \\ 5 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

Özel Matrisler

Tanım: A matrisi boyutu n olan bir kare matris ise;

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right)$$

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right)$$

Şeklinde tanımlanan **P** ve **Q** matrisleri sırası ile simetrik ve yarı simetrik matrislerdir.

Özel Matrisler

Periyodik Matris :

A bir kare matris olsun. $k \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $\mathbf{A}^{k+1}=\mathbf{A}$ ise **A** matrisine periyodik matris denir.

Birim matris bir periyodik matristir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Özel Matrisler

İdempotent Matris:

A bir kare matris olsun. Eğer $k=1$ için $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$ ise **A** matrisi idempotent matristir.

Birim matris bir idempotent matristir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Özel Matrisler

Nilpotent Matris:

A bir kare matris olmak üzere $\mathbf{A}^2=0$ ise **A** matrisine Nilpotent Matris denir.
Eğer $\mathbf{A}^2=\mathbf{I}$ ise **A** matrisine ünipotent Matris denir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Özel Matrisler

Üst üçgen matris:

Bir kare matrisin asal köşegeninin altında kalan tüm elemanları sıfır ise bu matrise **üst üçgen matris** denir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Özel Matrisler

Alt üçgen matris:

Bir kare matrisin asal köşegeninin üstünde kalan tüm elemanları sıfır ise bu matrise **alt üçgen matris** denir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Özel Matrisler

Echelon (Kanonik) Matris:

A boyutu $m{\times}n$ olan bir matris olsun. **A** matrisinin ilk satırı hari diğer satırlarındaki sıfırların sayısı (soldan itibaren) satır satır artıyor ise **A** matrisi *Echelon* (*kanonik*) matristir.

Bir eşelon matriste satırlardaki sıfır olmayan ilk elemana *pivot* (*ayrık*) eleman denir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Özel Matrisler

Satır Eşdeğer Matrisler

Tanım: Boyutu $m \times n$ olan bir $\mathbf{A}$ matrisine sonlu sayıda elemant

satır işlemlerinin uygulanması sonucunda elde edilen matris $\tilde{\mathbf{A}}$

olsun. $\tilde{\mathbf{A}}$ matrisine $\mathbf{A}$ matrisinin satır eşdeğer matrisi denir:

$$\mathbf{A} \sim \tilde{\mathbf{A}}$$

Özel Matrisler

Ortogonal Matris:

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$ vektörlerinin tanımladığı bir kare matris olsun. Eğer

$\mathbf{v}_i.\mathbf{v}_j=0$ tüm $i\neq j$ için ve

$\mathbf{v}_i.\mathbf{v}_j=1$ tüm $i=j$ için ise

diğer bir deyişle

$\mathbf{AA}^{\mathrm{T}}=\mathbf{I}$

ise **A** matrisi ortogonal matristir.

Özel Matrisler

Ortogonal Matris: Örnek

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ ise } \mathbf{A}^T=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}\underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^T} \underset{=}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}}$$

A matrisi ortogonal matristir

Simetrik-Antisimetrik-Ortogonal

Tanım: A , n x n tipinde bir kare matris olsun;

1. $A^T = A$ ise, A matrisine, **simetrik matris** denir.
2. $A^T = -A$ ise A matrisine, **antisimetrik matris** denir.
3. $A^T = A^{-1}$ ise A matrisine, **ortogonal matris** denir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -6 \\ -4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ matrislerinin hangisinin simetrik hangisinin antisimetrik olduğunu görelim.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ ve } E =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ matrisleri verilsin. (Eğer mümkünse) aşağıdaki işlemleri yapınız:

$a)$ $C+E$ $\qquad$ $b)$ AB

$c)$ $2C-3E$ $\qquad$ $d)$ $CB+D$

$e)$ $AB+D^2$ $\qquad$ $f)$ $(3)(2A)$

$g)$ $A(BD)$ $\qquad$ $h)$ $(AB)D$

$i)$ $A(C+E)$ $\qquad$ $j)$ $AC+AE$

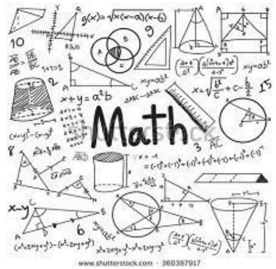
$k)$ $2A+3A$ $\qquad$ $l)$ A^T

$m)$ $\left(A^T\right)^T$ $\qquad$ $n)$ $(AB)^T$

$o)$ $B^T A^T$ $\qquad$ $p)$ $(C+E)^T$

$r)$ $C^T + E^T$

Bölüm 2: Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü



Lineer Denklem Sistemlerinin Matris Notasyonu Gösterimi

m denklem ve n bilinmeyenden oluşan

$$\begin{array}{lllll}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2\ldots+ & a_{1n}x_n & = b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2\ldots+ & a_{2n}x_n & = b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2\ldots+ & a_{mn}x_n & = b_m
\end{array}$$

lineer denklem sistemini göz önüne alalım. Daha önce de belirtildiği gibi x_1, x_2, ..., x_n bilinmeyenleri, a'lar ve b'ler ise sabitleri ifade etmektedir.

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Lineer denklem sistemi matrisler ile

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

katsayılar matrisi,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

bilinmeyenler
Sütun matrisi,

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

sabitler Sütun matrisi,

olmak üzere

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$A \qquad X = B$$

şeklinde ifade edilebilir.

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Örnek:

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 2x + y + z &= 3 \\ 3x - y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi verilmektedir.

a) Sisteme ilişkin katsayılar matrisini elde ediniz.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Örnek:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 25 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 22 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 18 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini matrisler yardımıyla ifade ediniz.

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Verilen lineer denklem sistemi matris gösterimi yardımıyla

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 22 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$A \quad X = B$$

şeklinde ifade edilir.

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Örnek:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 &= -2 \\ 2x_1 - 3x_2 \qquad\qquad\quad &= 6 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini matris notasyonu şeklinde ifade ediniz.

Bir Kare Matrisin Çarpma İşlemine Göre Tersi:
A_{nxn} bir kare matris ve I_{nxn} kare matrisle aynı büyüklükte bir birim matris olmak üzere;

$$A \cdot (A^{-1}) = (A^{-1}) \cdot A = I_n$$

olacak biçimde bir A^{-1} matrisi varsa, bu matrise A'nın çarpımsal tersi veya tersi denir.

* Bir matrisin çarpımsal tersi bulunmayabilir; ancak tersi varsa tektir!.
* Determinantı sıfır olan matrislerin tersi YOKTUR!....
* A matrisinin tersi olabilmesi için kare matris olmalıdır.

Ters Matris

Tanım: **A** boyutu $n\times n$ olan bir kare matris olsun. Eğer

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$$

eşitliğini sağlayan bir **B** matrisi varsa **A** matrisi tersi alınabilir b

matristir ve **B** matrisine **A** matrisinin ters matrisi denir ve

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$$

ile gösterilir.

SONUÇ: $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$

Ters Matrisin Özellikleri

1. Tersi alınabilir bir **A** matrisinin bir ve yalnız bir ters matris vardır

2. $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$

3. $\left(\mathbf{AB}\right)^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

4. $\left(k\mathbf{A}\right)^{-1} = \dfrac{1}{k}\mathbf{A}^{-1}$ k bir skaler

5. $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\mathbf{A}|} Ek\mathbf{A}$

Ters Matrisin Özellikleri

6. $\left(\mathbf{A}^{T}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{T}$

7. $\left(\mathbf{A}^{k}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{k}$

$$= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\ldots\mathbf{A}^{-1}$$

Teorem

Bir **A** kare matrisinin tersinin var olabilmesi için

gerek ve yeter koşul $|\mathbf{A}| \neq 0$ olmasıdır.

Matris determinantının sıfırdan farklı olması demektir. Determinant tanımı ileride verilecektir.

Kanıt: $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$

$$|\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{I}|$$

$$|\mathbf{A}||\mathbf{A}^{-1}| = 1$$

$$|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \Rightarrow |\mathbf{A}| \neq 0$$

Elementer Satır İşlemleri

Elementer Satır İşlemleri Tanımı

Bir A matrisindeki elementer satır işlemleri aşağıdaki işlemlerden biri olarak tanımlanmaktadır.

A) A matrisinin herhangi bir satırının (örneğin i'nci satırı) sıfırdan farklı bir sabit (k) ile çarpımı. R_i , i'inci satırı belirtiyorsa bu satırın k sabiti ile çarpımı sonucu i'inci satır $R_i \rightarrow$ k R_i şeklinde olacaktır.

B) A matrisinin herhangi iki satırının, örneğin i'inci ve j'inci satırlarının yerlerinin değiştirilmesi. Bu durum $R_i \leftrightarrow R_j$ şeklinde gösterilebilir.

C) A matrisinin herhangi bir satırının sıfırdan farklı bir k sabiti ile çarpılıp (örneğin j'inci satırının R_j) i'inci satırına (R_i) eklenmesi. Bu durum $R_i \rightarrow R_i$ + k R_j şeklinde gösterilir.

Notasyon

Symbol	Tanım
kR_i (kr_i)	Bir satırı sıfırdan farklı bir sabit ile çarpma
$R_i \leftrightarrow R_j$ $(r_i \leftrightarrow r_j)$	İki satırın yerlerini değiştirme
$R_i + kR_j \rightarrow R_i$ $(r_i + kr_j \rightarrow r_i)$	Bir satırın sabit bir katını diğer bir satıra ekleme

Ters Matrisin Bulunması: Gauss-Jordan Yöntemi

Boyutu $n \times n$ olan bir **A** matrisinin ters matrisi aşağıda verilen adımlar izlenerek elde edilebilir:

1. **A** matrisinin sağına n boyutlu birim matrisi ekleyiniz,

$$\left[\mathbf{A} \vdots \mathbf{I}\right]$$

yeni matrisin boyutu $n \times 2n$ olur.

2. **A** matrisini **I** matrisine indirmek için gerekli elemanter satır (sütun) işlemlerini hem **A** hem de **I** matrisine uygulayarak,

$$\left[\mathbf{I} \vdots \mathbf{A}^{-1}\right]$$

Matrisini elde ediniz. Bu sonuç elde edilemiyor ise **A** tersi alınamayan tekil bir matristir.

Bir Matrisin Tersi

Bir kare matrisin örneğin $n \times n$ boyutlu A matrisinin

tersi A^{-1} matrisini elde etmek için $[A \vdots I]$ matrisi elementer

satır dönüşümleri yardımıyla $[I \vdots B]$ matrisi haline

dönüştürülür. Burada $B = A^{-1}$ 'dir.

Bir Matrisin Tersi

Örnek:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ matrisinin tersini $[A \vdots I] \to [I \vdots A^{-1}]$ yöntemini kullanarak elde ediniz.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Bir Matrisin Tersi

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -\frac{R_3}{4}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Bir Matrisin Tersi

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Görüldüğü gibi $[A \vdots I]$ matrisi elementer satır dönüşümleri yardımıyla $[I \vdots A^{-1}]$ matrisine dönüştürülmüştür.

Bir Matrisin Tersi

Bu işlemler sonucunda A matrisinin tersi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

DETERMİNANT

Determinant, elemanları gerçek sayılar olan kare matrisleri gerçek sayılara dönüştüren özel bir fonksiyondur.
Bir A matrisinin determinantı det(A) ya da IAI şeklinde gösterilir.

i) $A = [a_{11}]_{1 \times 1}$ ise, $|A| = |a_{11}| = a_{11}$

ii) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ise, $|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ dir.

Aşağıdaki matrislerin determinant değerlerini bulunuz.

a) $A = [3]$ b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

DETERMİNANTLAR

Tanım: 1x1 biçimindeki $A = [a_{11}]$ matrisinin determinantı, $|A| = a_{11}$ dir.

Örneğin; A=[7] matrisi için $|A| = 7$ dir.

Tanım: 2x2 biçimindeki $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ matrisinin determinantı

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$ dir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ olduğuna göre , $|A|$ yı hesaplayalım.

Çözüm: $|A| = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} =$ 3.8-(-2).(-6) = 24-12 = 12 bulunur.

Tanım : 3×3 biçimindeki $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ matrisinin determinantıı

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23})$$

$$-(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}) \; dir.$$

3×3 Tipinde Bir Kare Matrisin Determinantı:
(SARRUS KURALI)

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$|A| = \boxed{a_{11}a_{22}a_{33}} + \boxed{a_{12}a_{31}a_{23}} + \boxed{a_{13}a_{21}a_{32}} - \boxed{a_{11}a_{32}a_{23}} - \boxed{a_{12}a_{21}a_{33}} - \boxed{a_{13}a_{31}a_{22}}$$

Örnek:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 6 & 5 & 1 \end{array}\right. = 3.0.6 + 2.4.5 + 1.(-2).1 - 5.0.1 - 1.4.3 - 6.(-2).2$$

$$= 50$$

C - SARRUS KURALI

3 x 3 türünden bir matrisin determinantını bulmak için Sarrus kuralını kullanabilliriz.

Bu yönteme göre, ilk iki satırdaki elemanlar aynı sıra ile matrisin altına (dördüncü ve beşinci satır olarak) ya da ilk iki sütundaki elemanlar aynı sıra ile matrisin sağına (dördüncü ve beşinci sütun olarak) yazılır ve aşağıdaki gibi açılım yapılır.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33})$ tür.

ÖRNEK :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantının değerini bulunuz.

Çözüm :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ - \\ - \\ + \\ + \\ + \end{matrix}$$

$$= 1 \cdot 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + (-3) \cdot 0 \cdot 3 - \big((-3) \cdot 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 3$$
$$+ 2 \cdot 0 \cdot (-2)\big)$$

$$= -2 - 3 = -5$$

DETERMİNANT FONKSİYONU

Tanım: n. Mertebeden kare matrislerin kümesi M_n olsun.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix} \in M_n$$ olmak üzere

$\det(A) = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$ ile tanımlı $D: M_3 \to R$

fonksiyonuna, determinant fonksiyonu; D(A)= $|A|$ ifadesine de A matrisinin determinantı denir.

DETERMİNANTLARIN ÖZELLİKLERİ

1) Bir kare matrisin, determinant değeriyle devriğinin determinant değeri eşittir.

A karesel matris ise, $|A| = |A^T|$ dir.

2) Bir kare matrisin iki satır veya sütun elemanları orantılı ise, bu matrisin determinantının değeri sıfırdır.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad a, b, c \in R - \{0\}$$ determinantı verilmiş olsun.

Bu determinantın birinci satırındaki terimlerle ikinci satırındaki terimler, karşılıklı olarak orantılı olduğu için, $|A| = 0$ dır.

3) Bir kare matrisin herhangi bir satır veya sütununda buluna tüm terimler sıfır ise, determinantın değeri sıfırdır.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ dır.}$$

4) Bir kare matriste bir köşegenin üstündeki yada altındaki tüm elemanlar sıfır ise determinantın değeri köşegen üzerindeki elemanların çarpımı ya da bu çarpımın ters işaretlisine eşittir.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

(Asal köşegen altındaki elemanlar sıfırdır.)

5) Bir determinantın iki satırı veya sütunu aralarında yer değiştirilirse, determinant işaret değiştirir.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6 \text{ ise } \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -6$$

dır. (1. Satır ile 2. Satır yer değiştirmiştir.)

6) Bir determinantın bir satır veya sütunu k sayısı ile çarpılırsa, determinantın değeri de k katına çıkar.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \text{ ise } k.|A| = \begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix}$$

olur.

7) Bir determinantın herhangi bir satırında veya sütununda bulunan tüm terimlerin k katı alınarak, başka bir satırın veya sütunun elemanlarıyla toplanarak elde edilen yeni determinantın değeri değişmez.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c+ka & d+kb \end{vmatrix}$$

dir. (1. Satırın k katı 2. Satıra eklenmiştir.)

8) Bir determinantın herhangi bir satırında veya sütunundaki her eleman iki terimin toplamından oluşuyorsa, bu determinant aynı sıradan iki determinantın toplamı biçiminde yazılabilir.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 + x & b_1 + y & c_1 + z \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Determinantı aynı sıradan iki determinantın toplamı biçiminde yazılırsa ;

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

olur.

9) Bir determinantın herhangi bir satır yada sütunun ait terimler, bir başka satır veya sütunun terimlerine ait eş çarpanlar ile karşılıklı çarpılır ve çarpımlar toplanırsa, toplam sıfır olur.

3. Sıradan bir determinantta $a_{11}.A_{21}+a_{12}.A_{22}+a_{13}.A_{23} = 0$ dır.

10) N. Mertebeden A ve B matrisleri için, $|A.B| = |A|.|B|$ dir.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 4 \quad \text{ve} \quad |B| = \begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix} = 7 \quad \Rightarrow |A.B| = |A|.|B| = 4.7 = 28$$

B - MİNÖR (ALT DETERMİNANT) VE KOFAKTÖR (EŞ ÇARPAN)

Bir matrisin herhangi bir a_{ij} elemanı için, o elemanın bulunduğu satır ve sütun atıldıktan sonra arta kalan elemanların oluşturduğu determinanta o elemanın **minörü** denir ve M_{ij} şeklinde gösterilir.

$(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ sayısına da a_{ij} elemanının **kofaktörü** denir ve A_{ij} şeklinde gösterilir.

Aşağıdaki matrislerin belirtilen elemanlara göre, minör ve kofaktörlerini bulunuz.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ a_{11}

b) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ a_{21}

c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ a_{22}

MİNÖR VE KOFAKTÖR (EŞ ÇARPAN)

Tanım: n. sıradan bir A kare matrisinin i. Satır ve j. Sütun atıldıktan sonra geriye kalan matrisin determinantına, a_{ij} elemanının Minör'ü denir ve M_{ij} ile gösterilir.

$A_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij}$ ifadesine, a_{ij} elemanının kofaktörü yada işaretli minörü denir.

Tanım: 3x3 türünden bütün matrislerin kümesi M_3 olsun.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in M_3$$ olmak üzere,

$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ ile tanımlı $D: M_3 \rightarrow R$ fonksiyonuna, determinant fonksiyonu denir.

ÖRNEK :

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ -2 & 0 & 3\\ -3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

matrisinin 3. sütun elemanlarının kofaktörlerini bulunuz.

<u>**Çözüm :**</u>

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ -2 & 0 & 3\\ -3 & 1 & 2\end{bmatrix} \qquad \left.\begin{matrix}a_{13}=2\\ a_{23}=3\\ a_{33}=2\end{matrix}\right\}$$ elemanlarının kofaktörlerini bulalım.

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot|M_{13}|=1\cdot\begin{vmatrix}-2 & 0\\ -3 & 1\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot|M_{23}|=(-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ -3 & 1\end{vmatrix}=(1-3)=2$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot|M_{33}|=1\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 0\end{vmatrix}=-2$$

Bir determinantın değeri herhangi bir satırının (veya sütununun) elemanları ile kofaktörlerinin çarpımının toplamına eşittir.

Bu yönteme Laplace Yöntemi ya da Laplace Hesaplama Zinciri adı verilir.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantını 3. satıra göre açılımını yaparak bulunuz.

Çözüm :

$$|A| = a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33} \text{ tür.}$$

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -6 - \left(2 - (-2)\right) + 0$$

$$= -10$$

Görüşmek üzere