# MATEMATIK 1

*Konya Teknik Üniversitesi*
*Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi*
*Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü*

**Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI**

**2020**

# KARMAŞIK SAYILAR

$x^2+1=0$ denklemini göz önüne alalım. Bu ve buna benzer birçok denklemin çözümü, hem reel hem de genişletilmiş reel sayılar kümesinde yoktur. Çünkü karesi "-1" olan bir reel sayı yoktur. Bu durumda sayı sisteminin genişletilmesine ihtiyaç vardır.

**Tanım 5.1.** $a,b \in \mathbb{R}$ ve $i^2 = -1$ olmak üzere $z = a + ib$ şeklinde tanımlanan sayılara karmaşık sayılar denir. Karmaşık sayılardan oluşan kümeye karmaşık sayılar kümesi adı verilir ve bu küme $\mathbb{C}$ ile gösterilir. Bu durumda

$$\mathbb{C} = \left\{ z : \ z = a + ib, \ \ a,b \in \mathbb{R} \text{ ve } i^2 = -1 \right\}$$

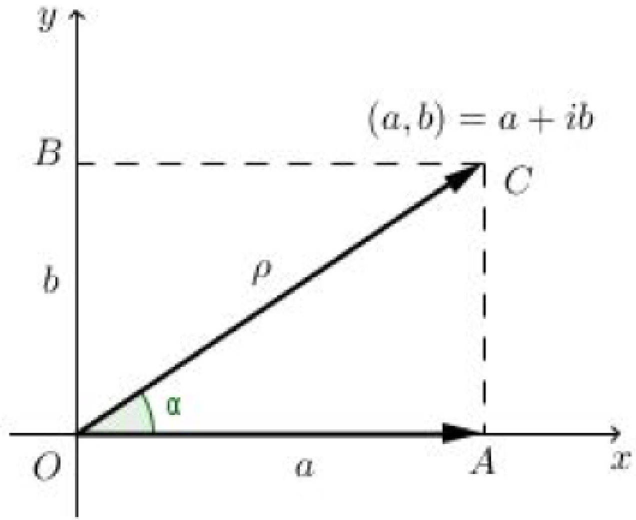
dir.

**Uyarı 5.1.** $z = a + ib$ karmaşık sayısı, $z = (a,b)$ şeklinde de gösterilir.

**Uyarı 5.2.** $(0,1)=i$ olup $i$ ye sanal veya imajiner birim denir. $(a,0)=a$ ifadesi karmaşık sayının reel kısmını, $(0,b)$ de karmaşık sayının sanal kısmını gösterir. Bu durum $\operatorname{Re}(z)=a$ ve $\operatorname{Im}(z)=b$ şeklinde gösterilir.

**Tanım 5.2.** $a-ib$ karmaşık sayısına $z=a+ib$ karmaşık sayının eşleniği denir ve $\bar{z}=a-ib$ sembolü ile gösterilir.

$z=(a,b)$ karmaşık sayısını göz önüne alalım.




**Şekil 5.1.**

Bu durumda $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$ olduğu açıktır. $\overrightarrow{OC}$ vektörünün $z = a + ib$ karmaşık sayısını temsil ettiği açıktır. Yani $z = a + ib$ karmaşık sayısı bir vektörel toplam olarak ifade edilmiştir. Ayrıca $O\overset{\Delta}{A}C$ dik üçgeninden $\overrightarrow{OC}$ vektörünün uzunluğu $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ , $tg\alpha = \dfrac{|AC|}{|OA|} = \dfrac{b}{a}$ dır. $\rho$ uzunluğuna $z = a + ib$ karmaşık sayısının modülü, $\alpha$ açısına da karmaşık sayının argümanı denir.

Bu durumda sayı sistemleri $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ biçiminde sıralanabilir.

$z_1 = a + ib = (a,b)$ ve $z_2 = c + id = (c,d)$ olmak üzere karmaşık sayılarda toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

**(1)** $z_1 = a + ib = (a,b)$ ve $z_2 = c + id = (c,d)$ olmak üzere toplama ve çıkarma işlemleri

$$z_1 \pm z_2 = (a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i(b \pm d)$$

veya

$$z_1 \pm z_2 = (a,b) \pm (c,d) = (a \pm c, b \pm d)$$

şeklindedir.

**(2)** $z_1 = a + ib = (a,b)$ ve $z_2 = c + id = (c,d)$ olmak üzere çarpma işlemi

$$z_1 z_2 = (a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$$

veya

$$z_1 z_2 = (a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$$

şeklindedir.

**(3)** $z_1 = a + ib = (a,b)$ ve $z_2 = c + id = (c,d)$ olmak üzere bölme işlemi

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

veya

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a,b)}{(c,d)} = \frac{(a,b)(c,-d)}{(c,d)(c,-d)} = \frac{((ac+bd),(bc-ad))}{c^2+d^2}$$

şeklindedir.

**Teorem 5.1.** İki karmaşık sayının çarpımından elde edilen sayının modülü, bu sayıların modüllerinin çarpımına ve argümanı bu sayıların argümanlarının toplamına eşittir.

$$\rho_1\rho_2 = \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} = \sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}$$

$$arcgt(\alpha) \pm \operatorname{ar} ctg(\beta) = arctg\left(\frac{\alpha \pm \beta}{1 \mp \alpha\beta}\right)$$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\alpha_1 + \alpha_2 = arcgt\left(\frac{b}{a}\right) + \operatorname{ar} ctg\left(\frac{d}{c}\right) = arctg\left(\frac{bc+ad}{ac-bd}\right)$$ dir.

**Teorem 5.2.** İki karmaşık sayının bölümünden elde edilen sayının modülü, bu sayıların modüllerinin bölümüne ve argümanı bu sayıların argümanlarının farkına eşittir.

**Örnek 5.1.** $z_1 = 2 - i$ ve $z_2 = -2 + i$ sayılarının çarpımını ve bölümünü yazınız. Ayrıca bu sayıların çarpımının ve bölümünün modülünü ve argümanını bulunuz.

**Çözüm.** $z_1 z_2 = (2-i)(-2+i) = -3+4i$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2-i)}{(-2+i)} = \frac{(2-i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \frac{-5}{5} = -1$$

$$\rho_3 = \rho_1 \rho_2 = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\alpha_1 = arctg\left(\frac{-1}{2}\right),\ \alpha_2 = arctg\left(\frac{1}{-2}\right)$$ olup,

$$\alpha_1+\alpha_2 = arctg\left(\frac{1}{-2}\right)+arctg\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$= arctg\left(\frac{\frac{1}{-2}+\frac{-1}{2}}{1-\left(\frac{1}{-2}\frac{-1}{2}\right)}\right) = -arctg\left(\frac{4}{3}\right) \text{ olur.}$$

Ayrıca $\rho_4 = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \sqrt{1^2+0^2} = 1$ ve

$$\alpha_1-\alpha_2 = arctg\left(\frac{1}{-2}\right)-arctg\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$= arctg\left(\frac{\frac{1}{-2}-\frac{-1}{2}}{1+\left(\frac{1}{-2}\frac{-1}{2}\right)}\right) = arctg\left(0\right) = 0 \text{ olur.}$$

**Tanım 5.3.** $z_1 = a + ib$ ve $z_2 = c + id$ karmaşık sayıları için $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ değerine $z_1$ ve $z_2$ sayıları arasındaki uzaklık denir.

**Örnek 5.2.** $z_1 = 2 - 3i$ ve $z_2 = -2 + 3i$ sayıları arasındaki uzaklık

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(2-(-2))^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$

dir.

**Uyarı 5.3.** $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ ve $r \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

**(1)** $|z_1 - z_0| = r$ ifadesi $z_1$ karmaşık sayısının merkezi $z_0$ ve yarıçapı $r$ olan çemberin üzerinde olduğunu gösterir.

**(2)** $|z_1 - z_0| < r$ ifadesi $z_1$ karmaşık sayısının merkezi $z_0$ ve yarıçapı $r$ olan çemberin içinde olduğunu gösterir.

**(3)** $|z_1 - z_0| > r$ ifadesi $z_1$ karmaşık sayısının merkezi $z_0$ ve yarıçapı $r$ olan çemberin dışında olduğunu gösterir.

## 5.1. Karmaşık Sayıların Kutupsal ve Trigonometrik Gösterimi

Öncelikle fonksiyonların seriye açılımından söz edelim. $y = f(x)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Fonksiyon $x = 0$ noktasında, sürekli ve istenildiği mertebeden türeve sahip bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (5.1.1)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ler bulunması gereken katsayılardır.

$y = f(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli ve istenildiği mertebeden türeve sahip olduğundan

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n + \ldots$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

$$f''(x) = 1.2a_2 + 2.3a_3 x + \ldots + (n-2)(n-1) a_{n-1} x^{n-3} + (n-1) n a_n x^{n-2} + \ldots$$

$$f^{(n-1)}(x) = 1.2\ldots(n-3)(n-2)(n-1)a_{n-1} + 2\ldots(n-3)(n-2)(n-1)(n)a_n x + \ldots$$

$$f^{(n)}(x) = 1.2\ldots(n-3)(n-2)(n-1)(n)a_n + \ldots$$

$$\ldots$$

elde edilir.

Bu durumda

$$f(0) = a_0$$

$$f'(0) = a_1$$

$$f''(0) = 1.2a_2$$

$$\ldots$$

$$f^{(n-1)}(0) = 1.2\ldots(n-3)(n-2)(n-1)a_{n-1}$$

$$f^{(n)}(0) = 1.2\ldots(n-3)(n-2)(n-1)(n)a_n$$

$$\ldots$$

elde edilir. Buradan da

$$a_0 = f(0)$$

$$a_1 = \frac{f'(0)}{1!}$$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$$

$$\ldots$$

$$a_{n-1} = \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$$\ldots$$

elde edilir. Bu değerler (5.1.1) de yerine yazılırsa

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f'^{(n)}(0)}{n!}x^n+... \quad (5.1.2)$$

bulunur. (5.1.2) formülüne $y=f(x)$ fonksiyonunun $x=0$ noktasında Mc'Loren seri açılımı denir.

**Örnek 5.1.1.** $f(x)=e^x$ fonksiyonunu Mc'Loren serisine açınız.

**Çözüm.** $f(x)=e^x$, $f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x$, …, $f^{(n)}(x)=e^x$ ve

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=...=f^n(0)=1$$

olup

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

şeklindedir.

**Örnek 5.1.2.** $f(x)=e^{-x}$ fonksiyonunu Mc'Loren serisine açınız.

**Çözüm.** $f(x)=e^{-x},\ f'(x)=-e^{-x},\ f''(x)=e^{-x},\ldots, f^{(n)}(x)=(-1)^n e^{-x}$

ve

$$f(0)=1, f'(0)=-1, f''(0)=1,\ldots, f^{n}(0)=(-1)^n$$

olup

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$$

şeklindedir.

# Kaynaklar:

1. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus I**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.
2. Prof. Dr. C. Çinar, Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, Prof. Dr. A. S. Kurbanlı, Prof. Dr. D. Şimşek, **Genel Matematik**, Dizgi Ofset, 2013.
3. Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, **Analiz III Diziler ve Seriler,** Dizgi Ofset, 2017.
4. H. İ. Karakaş, **Matematiğin Temelleri, Sayı Sistemleri ve Cebirsel Yapılar,** ODTÜ yayınları, 2011.