# İŞLEM

## Tanımı, Özellikleri

KONU: İŞLEM

“A ve B kümeleri 2 küme olsun. A x B Kartezyen çarpım kümesinin bir alt kümesi C yani ise C kümesi A’dan “B’ye bir bağıntıdır ve β ile gösterilir.” Demiştik ve bağıntıları görmüştük.

A={1, 3, 8} ve B={2, 5, 7} olsun.

AxB={(1,2), (1,5), (1,7), (3,2), (3,5), (3,7), (8,2), (8,5), (8,7)} iken;

$\beta \subseteq AxB$ olacak şekilde bir β bağıntısı:

Bağıntı β={(1, 2), (1, 5), (1, 7) (3, 5) (3,7)} olsun.

Burada (1, 2) ikilisinde;
1 : birinci eleman ve 2 : ikinci eleman olarak isimlendirilir.

Daha sonra:

“A ve B kümeleri boş olmayan 2 farklı küme olsun. A’nın her bir elemanını B’nin yalnızca bir elemanına bağlayan kurala “fonksiyon” denir. Bu kural, f ile gösterilir ve f:A→B şeklinde ifade edilir.” Diyerek bağıntılardan 3 kuralı sağlayanlara fonksiyon demiştik. Bu 3 kural:

1) A’nın her bir elemanını B’nin bir elemanına bağlar.
2) A’nın hiçbir elemanını B’nin birden çok elemanına bağlamaz.
3) Fonksiyon için tanım kümesi belli olacak.

A={1, 3, 8} ve B={2, 4, 5, 7, 9} olsun. Burada f:A→B ve f(x)=y=x+1 iken;

Fonksiyon f = {(1, 2), (3, 4), (8, 9) } olur.

Şimdi ise; fonksiyonlardan özel bir tanıma giderek, "işlem" konusunu göreceğiz.

Birli işlem: A≠Ø ve Fonksiyon f:A→A'ya, A kümesi üzerinde "birli işlem" denir. Burada
A={1,2,3} iken f:A→A için eğer f(1)=2, f(2)=3 ve f(3)=1 olsun. Bu durumda f birli işlemdir.

İkili işlem: A≠Ø ve Ø≠B ⊆ AxA olsun. Fonksiyon f:B→A'ya, "ikili işlem" denir. Yani bir kümenin elemanlarının herhangi bir sıralı ikilisini birleştirerek, sonucun yine bu kümenin elemanı olmasını sağlayan kurala "ikili işlem" denir.

A={1,2,3} ve AxA={(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)} iken B={(1,1),(1,2),(2,1)} olsun. Bu durumda tanımlanacak f:B→A fonksiyonu için f(x)={x+y: (x,y) ∈ B ve f(x) ∈ A} olsun. B kümesindeki her (x,y) için x+y=f(x) ∈ A olmalı. B kümesindeki elemanlara bakılacak olursa;
(1,1) için: 1+1=2 ∈ A
(1,2) için: 1+2=3∈ A
(2,1) için: 2+1=3∈ A olduğundan f fonksiyonu bir ikili işlemdir.

ÖRNEK:

1) Pozitif tam sayılar ($Z^+$) kümesinde toplama işlemi bir ikili işlem midir?
2) Pozitif tam sayılar ($Z^+$) kümesinde çıkarma işlemi bir ikili işlem midir?
3) Tam sayılar (Z) kümesinde toplama ve çıkarma işlemi bir ikili işlem midir?

1) Evet Pozitif tam sayılar ($Z^+$) kümesinde toplama işlemi bir ikili işlemdir. Çünkü toplama işlemi sonucu yine bir pozitif tamsayıdır.
2) Hayır Pozitif tam sayılar ($Z^+$) kümesinde çıkarma işlemi bir ikili işlem değildir. Çünkü 2 pozitif tamsayının çıkarılması sonucu negatif olabilir.
3) Evet Tam sayılar (Z) kümesinde toplama ve çıkarma işlemi bir ikili işlemdir.

## İşlemin özellikleri:

A≠∅ ve "●" işlemi verilsin. Burada •, □, ▪, ◊, ○ gibi simgeler de olabilir.

1) Kapalılık:

Her x,y ∈ A için x●y ∈ A oluyorsa, A kümesi ● işlemine kapalıdır. ● işlemin kapalılık özelliği yoksa, zaten ikili işlem değildir.

**Örnek.**

**Doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlanan**

$$x \Delta y = x \,.\, y$$

**işlemine göre, doğal sayılar kümesi "Δ" işlemine göre kapalı mıdır?**

**Çözüm**

Her x, y ∈ N için x Δ y = x . y ∈ N olduğundan dolayı doğal sayılar kümesi "Δ" işlemine göre kapalıdır.

## İşlemin özellikleri:

2) Birleşme özelliği:

A≠∅ ve "●" işlemi verilsin. Her x, y, z ∈ A için;

$$x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z \text{ oluyorsa,}$$

A kümesinin ● işlemine göre birleşme özelliği vardır.

**Örnek.**

**Reel sayılar kümesi üzerinde tanımlanan işleminin birleşme özelliği var mıdır?**

$$x \star y = x - y$$

**Çözüm**

Her x, y, z ∈ R için $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$ olmalıdır.

$$(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$
$$(x - y) \star z = x \star (y - z)$$
$$(x - y) - z = x - (y - z)$$
$$x - y - z = x - y + z \text{ olur.}$$

$(x \star y) \star z \neq x \star (y \star z)$ olduğundan reel sayılar kümesi üzerinde "☆" işleminin birleşme özelliği yoktur.

İşlemin özellikleri:

3) Değişme özelliği:
$A \neq \emptyset$ ve "●" işlemi verilsin. Her $x, y \in A$ için $x \bullet y = y \bullet x$ oluyorsa, A kümesinin ● işlemine göre değişme özelliği vardır.

**Örnek.**

**Reel sayılar kümesi üzerinde tanımlanan işleminin değişme özelliği var mıdır?**

$$x \star y = 4x + 4y$$

**Çözüm**

$x \star y = y \star x$ eşitliği var ise "a" işleminin değişme özelliği vardır.

$$x \star y = y \star x$$
$$4x + 4y = 4y + 4x$$

olduğundan reel sayılar kümesi üzerinde "☆" işleminin değişme özelliği vardır.

İşlemin özellikleri:

4) Birim (etkisiz) eleman:

$A \neq \emptyset$ ve "●" işlemi verilsin.

Her $x \in A$ için $x \bullet e_1 = x$ olacak şekilde bir $e_1$ varsa, $e_1$'e ● işleminin sağdan birim elemanı,

Her $x \in A$ için $e_2 \bullet x = x$ olacak şekilde bir $e_2$ varsa, $e_2$'ye ● işleminin soldan birim elemanı denir.

Bir işlemde hem sağdan, hem soldan birim elemanı varsa ve eşitse yani $e_1 = e_2 = e$ ise e'ye ● işlemine göre birim eleman denir.

Not: Eğer işlemin değişme özelliği varsa, sağdan ya da soldan birim (etkisiz) eleman bulunması yeterlidir. Her 2 taraftan da bulunmasına gerek yoktur!

İşlemin özellikleri:

4) Birim (etkisiz) eleman:

Örnek..

Tamsayılar kümesi üzerinde $\Delta$ işlemi

$$x \Delta y = x + y - 6$$

biçiminde tanımlanıyor.

**Buna göre $\Delta$ işleminin birim (etkisiz) elemanı kaçtır?**

İşlemin değişme özelliği olduğundan sadece tek bir taraftan birim eleman bakılması yeterlidir.

Çözüm

Her $x \in Z$ için $x \Delta e = x$ olmalıdır.

$$x \Delta e = x$$

$$x + e - 6 = x$$

$e = 6$ bulunur.

İşlemin özellikleri:

5) Ters eleman:

$A \neq \emptyset$ ve "●" işlemi verilsin.

Her $x \in A$ için $x \bullet y_1 = e$ olacak şekilde bir $y_1$ varsa, $y_1$'e ● işleminin sağdan ters elemanı,

Her $x \in A$ için $y_2 \bullet x = e$ olacak şekilde bir $y_2$ varsa, $y_2$'ye ● işleminin soldan ters elemanı denir.

Bir işlemde hem sağdan, hem soldan ters eleman varsa ve eşitse yani $y_1 = y_2 = y$ ise $y$'ye ● işlemine göre ters eleman denir. ● işlemine göre $y$ elemanına $x$'in tersi denir ve $y=x^{-1}$ ile gösterilir.

Not: Eğer işlemin değişme özelliği varsa, sağdan ya da soldan ters eleman bulunması yeterlidir. Her 2 taraftan da bulunmasına gerek yoktur!

İşlemin özellikleri:

5) Ters eleman:

Örnek.

R de tanımlı $\Delta$ işlemi

$$x \Delta y = x + y - 10$$

biçiminde tanımlanıyor. **Buna göre, 6 nın tersi kaçtır?**

İşlemin değişme özelliği olduğundan, sadece tek bir taraftan birim ve ters eleman bulunması yeterlidir.

Çözüm

$\Delta$ işlemine göre birim eleman,

$$x \Delta e = x$$
$$x + e - 10 = x$$
$$e = 10 \text{ olur.}$$

$\Delta$ işlemine göre 6 nın tersi k olsun.

$$6 \Delta 6^{-1} = e$$
$$6 \Delta k = 10$$
$$6 + k - 10 = 10$$
$$k = 14 \text{ tür.}$$

$\Delta$ işlemine göre 6 nın tersi 14 olur.

## İşlemin özellikleri:

6) Dağılma özelliği:

A≠∅ ve A kümesi üzerinde ● ve ○ işlemleri verilsin.

Her x,y,z ∈ A için x●(y○z) = (x●y)○(x●z) oluyorsa, ● işleminin ○ işlemi üzerine soldan dağılması,

Her x,y,z ∈ A için (x○y)●z = (x●z)○(y●z) oluyorsa, ● işleminin ○ işlemi üzerine sağdan dağılması olur.

● işleminin ○ işlemi üzerinde hem sağdan, hem soldan dağılma varsa, ● işleminin ○ işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

## İşlemin özellikleri:

7) Yutan eleman:

$A \neq \emptyset$ ve "●" işlemi verilsin.

Her $x \in A$ için $x \bullet y_1 = y_1$ olacak şekilde bir $y_1$ varsa, $y_1$'e ● işleminin sağdan yutan elemanı,

Her $x \in A$ için $y_2 \bullet x = y_2$ olacak şekilde bir $y_2$ varsa, $y_2$'ye ● işleminin soldan yutan elemanı denir.

Bir işlemde hem sağdan, hem soldan yutan elemanı varsa ve eşitse yani $y_1 = y_2 = y$ ise $y$'ye ● işlemine göre yutan eleman denir.

Yutan eleman varsa bir tanedir ve yutan elemanın tersi yoktur!

## İşlemin özellikleri:

## 7) Yutan eleman:

Örnek.

R de tanımlı $\Delta$ işlemi

$$x \Delta y = x + y + 4xy$$

biçiminde tanımlanıyor.

İşlemin değişme özelliği olduğundan, sadece tek br taraftan yutan eleman bakılması yeterlidir.

Çözüm

$$x \Delta y = y$$
$$x + y + 4xy = y$$
$$x + 4xy = 0$$
$$x(1 + 4y) = 0$$

$x = 0$ veya $1 + 4y = 0$ dır.

$1 + 4y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}$ tür.

$\Delta$ işleminin yutan elemanı $-\frac{1}{4}$ tür.

İkili işlemler matematiksel ifadelerle gösterilebildiği gibi matris formatında tablo şeklinde de gösterilebilir. Matris özelliklerine bakarak da işlem hakkında bilgi edinilebilir.

7) A={a, b, c, e} kümesi üzerinde tanımlanan ● işleminin tablosu verilmiştir.

| ● | e | a | b | c |
|---|---|---|---|---|
| e | e | a | b | c |
| a | a | b | c | e |
| b | b | c | e | a |
| c | c | e | a | b |

a) Kapalı mıdır?
b) Birim eleman?
c) Ters eleman?
d) Değişme özelliği var mı?
e) Yutan eleman?

a) Bir işlem çizelgesinde sonuçları gösteren kısımda boş yer yoksa ve elemanlardan her biri işlemin tanımlandığı kümenin elemanı ise; bu küme ilgili işleme göre kapalıdır denir.

Bu tanıma göre A kümesi ● işlemine göre kapalıdır.

| • | e | a | b | c |
|---|---|---|---|---|
| e | e | a | b | c |
| a | a | b | c | e |
| b | b | c | e | a |
| c | c | e | a | b |

b) Tabloda birim elemanı bulmak için tanım satırı ve tanım sütunu matriste aynen seçilir, kesişimleri birim elemandır. (e=birim)

| • | e | a | b | c | |
|---|---|---|---|---|---|
| e | e | a | b | c | |
| a | a | b | c | e | |
| b | b | c | e | a | |
| c | c | e | a | b | |

| ● | e | a | b | c |
|---|---|---|---|---|
| e | e | a | b | c |
| a | a | b | c | e |
| b | b | c | e | a |
| c | c | e | a | b |

c) Ters elemanı bulmak için e=birim elemanı bulduktan sonra; her elemanın birim eleman sonucu veren ikilisi tespit edilir.

| ● | e | a | b | c |
|---|---|---|---|---|
| e | e | a | b | c |
| a | a | b | c | e |
| b | b | c | e | a |
| c | c | e | a | b |

| ● | e | a | b | c |
|---|---|---|---|---|
| e | e | a | b | c |
| a | a | b | c | e |
| b | b | c | e | a |
| c | c | e | a | b |

| ● | e | a | b | c |
|---|---|---|---|---|
| e | e | a | b | c |
| a | a | b | c | e |
| b | b | c | e | a |
| c | c | e | a | b |

| • | e | a | b | c |
|---|---|---|---|---|
| e | e | a | b | c |
| a | a | b | c | e |
| b | b | c | e | a |
| c | c | e | a | b |

d) Sonuç tablosu verileri; işlemden geçen köşegene göre simetrik ise işlemin değişme özelliği vardır.

| • | e | a | b | c |
|---|---|---|---|---|
| e | e | a | b | c |
| a | a | b | c | e |
| b | b | c | e | a |
| c | c | e | a | b |

| * | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 3 | 2 |

e) Sonuç tablosu verilerinde; yutan eleman hangi elemanlar işleme girerse girsin, sonuç hep kendisine eşit olan elemandır. Bunun için, sonuçlar kısmında aynı elemandan oluşan satır ve sütun belirlenir. Bulunan değer, yutan elemandır.

Yukarıdaki tablo A={1, 2, 3} kümesinde tanımlanan * işlemine göre:

1) Birim (etkisiz) eleman = 2'dir.

2) Yutan eleman = 1'dir.

# Görüşmek üzere