MATEMATİK 2

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

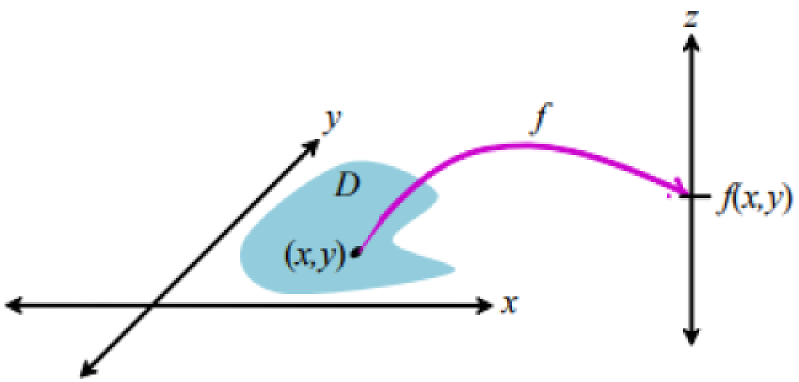
2021

Çok Değişkenli Fonksiyonlar:

Tanım 1. İki boyutlu uzayda herhangi bir noktalar cümlesi D olsun. D cümlesinin her (x, y) noktasına belirli bir kural ile tek türlü olarak bir z büyüklüğü karşılık getirilirse bu z' ye (x, y) değişkenlerinin, ***iki değişkenli bir fonksiyonu*** denir ve

$$z = f(x, y)$$

biçiminde gösterilir.



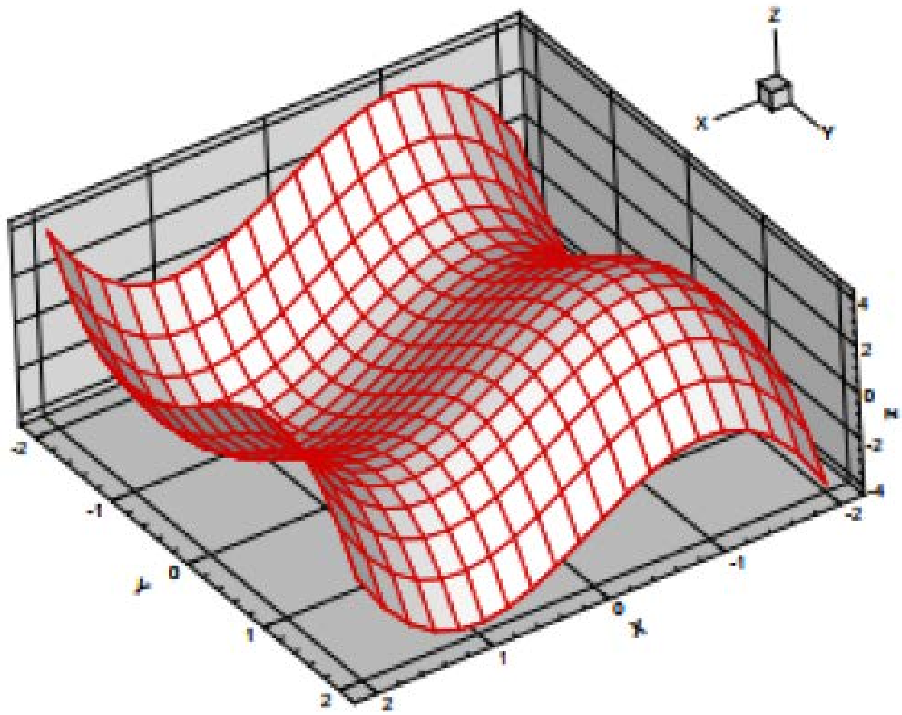
Burada; x ve y ***bağımsız değişkenler***, z ise ***bağımlı değişken*** olarak adlandırılır. D' ye iki değişkenli fonksiyonun ***Tanım Kümesi (bölgesi)***, (x, y) ikililerine karşılık gelen z' lerin oluşturduğu kümeye de fonksiyonun ***Değer kümesi (bölgesi)*** denir.

Benzer düşünüşle;

$(x_1, x_2, ..., x_n)$ sıralı n li gerçel sayılarına bir $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ gerçel sayısı karşılık getiren kurala ***n değişkenli fonksiyon*** denir.

Tanım 2. Bir $f(x,y)$ fonksiyonunun ***kesit (seviye) eğrileri***; denklemi $f(x,y)=k$ olan düzlemdeki eğrilerdir. (Buradaki k değeri f nin görüntü kümesinden bir sabittir.) Eğer f üç değişkenli bir fonksiyon ise; $f(x,y,z)=k$ eşitliğini sağlayan yüzeyler ***kesit (seviye) yüzeyleri*** olarak adlandırılır.

Tanım 3. İki değişkenli bir f fonksiyonunun ***grafiği***; D tanım kümesindeki her eleman için $z=f(x,y)$ koşulunu gerçekleyen R^3' deki $(x,y,f(x,y))$ noktalarının kümesidir. f ' nin grafiğine $z=f(x,y)$ ***yüzeyi*** ismi de verilir. Örneğin $z(x,y)=x^3+3y-y^3-3x$ nin grafiği aşağıdaki gbidir.



Şekil 1. $z(x,y) = x^3 + 3y - y^3 - 3x$ *nin grafiği*

Verilen bir $z = f(x,y)$ yüzeyini $x = k$ (veya $y = k$, $z = k$) düzlemleri ile dilimleyip $z = f(k,y)$ (veya $z = f(x,k)$ $k = f(x,y)$) eğrilerine bakılabilir. Elde edilen bu eğrilere yüzeyin ***izleri*** denir.

Tanım: $z=f(x,y)$ fonksiyonu veril~~diğinde~~miş olsun. xOy düzleminde, fonksiyonun sabit değerler aldığı noktaların oluşturduğu eğrilere f fonksiyonunun **seviye eğrileri** denir.

Örnek: ($f(x,y)=9-x^2-y^2$)

$z=f(x,y)=1+x^2+y^2$ fonksiyonunun bazı seviye eğrilerini bulunuz ve grafiğini yaklaşık olarak çiziniz.

Çözüm: $x^2+y^2=1$ çemberi üzerinde $f(x,y)=2$ sabit değerini alır. Ozaman $x^2+y^2=1$ çemberi bir seviye eğrisidir.

$x^2+y^2=4$ için $f(x,y)=5$ old.

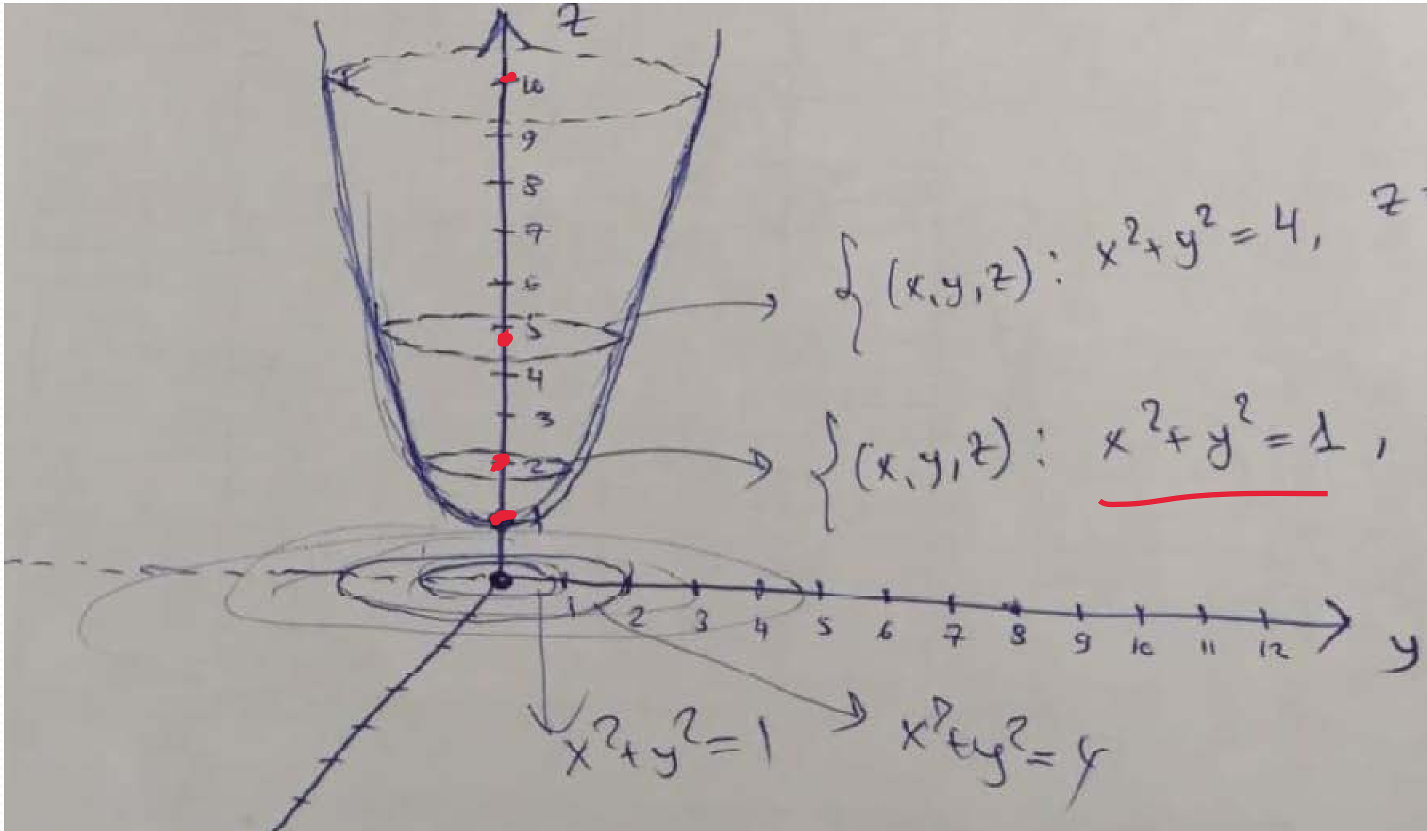
$x^2+y^2=4$ bir seviye eğrisidir.

$x^2+y^2=9$ için $f(x,y)=10$ old.

$x^2+y^2=9$ bir seviye eğrisidir.

$x^2+y^2=0$ yani $x=y=0$ olduğunda $f(x,y)=1$ olup, $(0,0)$ noktasıda bir seviye noktasıdır.

Şimdi bu söylediklerimizin grafiğini çizmeye çalışalım.



$\{(x,y,z) : x^2+y^2=4, \quad z=5\}$ eğrisi

$\{(x,y,z) : x^2+y^2=1, \quad z=2\}$ eğrisi

Buradan görüldüğü gibi $\{(x,y,z) : x^2+y^2=c^2, \quad z=1+c^2\}$ eğrilerinin tümünün birleşimi fonksiyonun grafiğini oluşturur.

Örnek 9. $z(x,y)=9x^2+16y^2$ fonksiyonunun k=0,9,16,144 değerleri için kesit eğrilerini belirleyip, bunların kontur haritasını ve fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Çözüm: Kesit eğrileri;

$$9x^2+16y^2=k,\ (k>0)$$

eşitliğini gerçekleyen eğrilerdir. Buna göre;

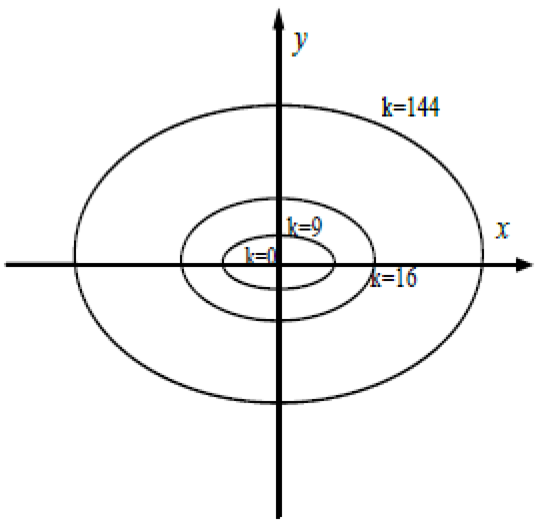
$$k=0 \text{ için;}\quad 9x^2+16y^2=0 \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$$

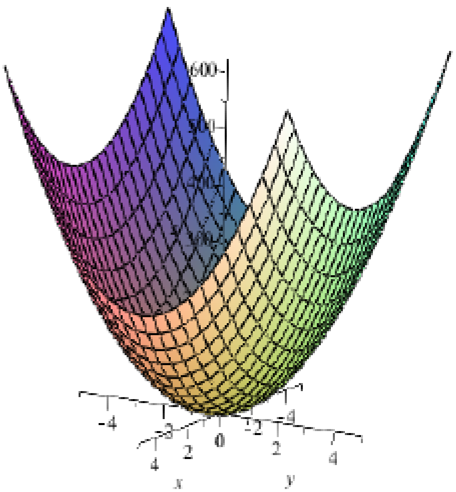
$$k=9 \text{ için;}\quad 9x^2+16y^2=9$$

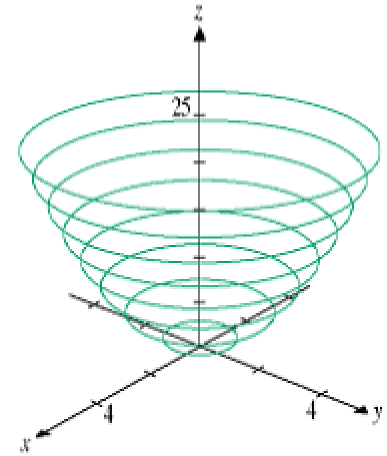
$$k=16 \text{ için;}\quad 9x^2+16y^2=16$$

$$k=144 \text{ için;}\quad 9x^2+16y^2=144$$

eşitlikleri elde edilir. Elde edilen eşitliklerden görüldüğü gibi kesit eğrileri; $(k>0)$ için yarı eksenleri $\frac{\sqrt{k}}{3},\frac{\sqrt{k}}{4}$ olan elipslerdir. Aşağıdaki Şekil 4a ’ da k=0,9,16,144 değerleri için kesit eğrilerinin kontur haritası, Şekil 4b ’ de grafiği, Şekil 4c’de ise grafiğin üzerinde bulunan yükseltilmiş kesit eğrileri gösterilmektedir.


y
k=144
x
k=9
k=0
k=16


600
-4
0
2
4
x
y


z
25
4
4
x
y

Örnek 1 Aşağıdaki fonksiyonların tanım bölgelerini ve görüntü kümelerini bulunuz.

a) $f(x,y)=x-y^2$ **b)** $f(x,y)=(x-y^2)^2$ **c)** $f(x,y)=\sqrt{x-y^2}$

d) $f(x,y)=e^{x-y^2}$ **e)** $f(x,y)=\ln(x-2y^2)$

Çözüm: Herbir f fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesi sırası ile aşağıdaki gibidir.

a)
$$D=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in R\times R\}=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in R^2\}$$
$$R=\{f\,|\ f\in R\}$$

b)
$$D=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in \mathbb{R}^2\}$$
$$R=\{f\,|\,f\geq 0\}$$

c)
$$D=\{(x,y)\,|\ x\geq y^2\}$$
$$R=\{f\,|\ f\geq 0\}$$

$x-y^2\geq 0 \quad x\geq y^2$

d)
$$D=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in R^2\}$$
$$R=\{f\,|\ f>0\}$$

e)
$$D=\{(x,y)\,|\,x>2y^2\}$$
$$R=\{f\,|\,f\in R\}$$

Örnek 2. $z=\sqrt{x\ln(x^2+y^2)}$ fonksiyonunun tanımlı olduğu bölgeyi bulup, kartezyen düzlemde gösteriniz.

Çözüm: Bilindiği gibi verilen $z=f(x,y)$ fonksiyonunun tanımlı olabilmesi için

$$x\ln(x^2+y^2)\geq 0 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x\geq 0 \\ \ln(x^2+y^2)\geq 0 \end{matrix}\right\} \text{ veya } \left.\begin{matrix} x\leq 0 \\ \ln(x^2+y^2)\leq 0 \\ (x,y)\neq(0,0) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\left.\begin{matrix} x\geq 0 \\ x^2+y^2\geq 1 \end{matrix}\right\}}_{A_1} \text{ veya } \underbrace{\left.\begin{matrix} x\leq 0 \\ x^2+y^2\leq 1 \\ (x,y)\neq(0,0) \end{matrix}\right\}}_{A_2}$$

olmalıdır.(Bkz. Şekil 1)

$$D(f)=\left\{(x,y)\middle| x\geq 0,\ x^2+y^2\geq 1\right\}\cup\left\{(x,y)\middle| x\leq 0,\ x^2+y^2\leq 1, (x,y)\neq(0,0)\right\} \checkmark$$

Örnek 3. $z = f\left(x, y\right) = \sqrt{x(1 - x^2 - y^2)}$ fonksiyonunun tanımlı olduğu bölgeyi bulunuz.

Çözüm: Yukarıdaki fonksiyonun tanımlı olabilmesi için;

$$x(1 - x^2 - y^2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x \geq 0 \\ 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \end{matrix}\right\} \text{veya} \left.\begin{matrix} x \leq 0 \\ 1 - x^2 - y^2 \leq 0 \end{matrix}\right\}$$

olmalıdır. (Bkz. Şekil 2)

$$D(f) = \left\{(x, y) \middle| x \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\right\} \cup \left\{(x, y) \middle| x \leq 0,\ x^2 + y^2 \geq 1\right\}$$

Örnek 4. $z = \arccos\dfrac{x}{3} + \sqrt{\dfrac{y}{x}}$ fonksiyonunun tanımlı olduğu bölgeyi bulunuz.

Çözüm: Bilindiği gibi verilen $z = f(x,y)$ fonksiyonunun tanımlı olabilmesi için

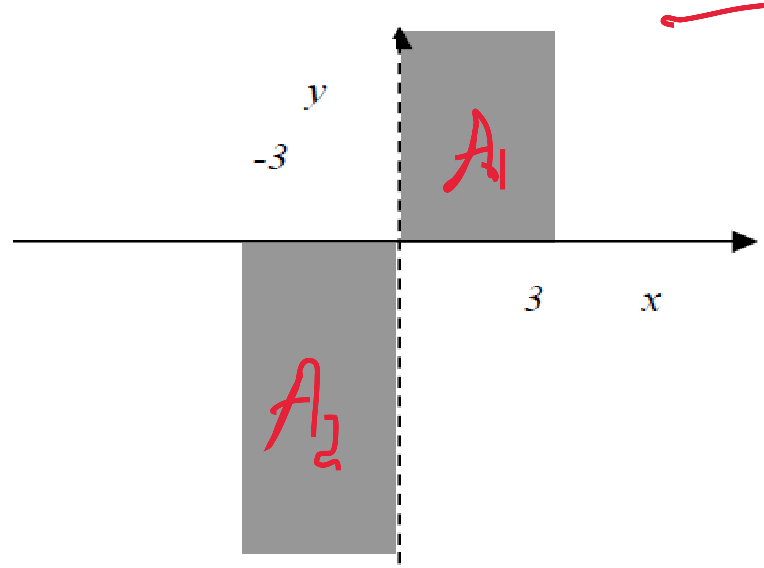
$$\left.\begin{array}{l} -1 \le \dfrac{x}{3} \le 1 \\ \dfrac{y}{x} \ge 0 \;, x \ne 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\left.\begin{array}{l} -3 \le x \le 3 \\ x > 0 \;, y \ge 0 \end{array}\right\}}_{A_1} \text{veya} \underbrace{\left.\begin{array}{l} -3 \le x \le 3 \\ x < 0 \,, y \le 0 \end{array}\right\}}_{A_2}$$

olmalıdır (Bkz. Şekil 3). $D(f) = \{(x,y) | -3 \le x < 0, y \le 0\} \cup \{(x,y) | 0 < x \le 3, y \ge 0\}$

$(x,y): 0 < x \le 3, y \ge 0 \}$

$\le x \le 3 \;, \; x > 0, y \ge 0.$

$0 < x \le 3$



Şekil 3

Örnek 5. $z = \arccos\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulunuz.

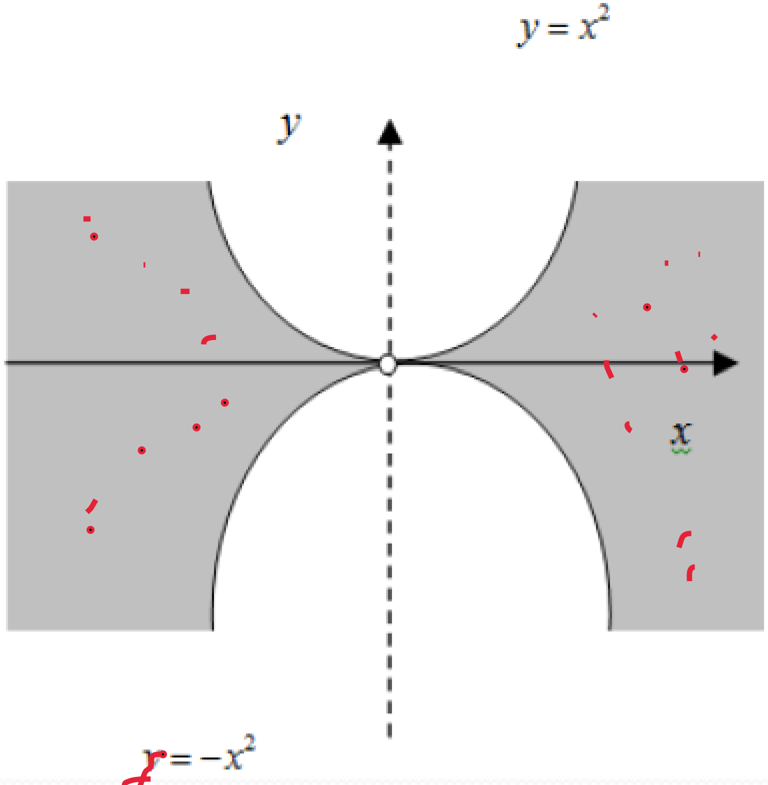
Çözüm: Fonksiyonun tanımlı olabilmesi için;

$$\left.\begin{array}{c} -1 \leq \dfrac{y}{x^2} \leq 1 \\ (x \neq 0) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} -x^2 \leq y \leq x^2 \\ (x \neq 0) \end{array}\right\}$$

olmalıdır.

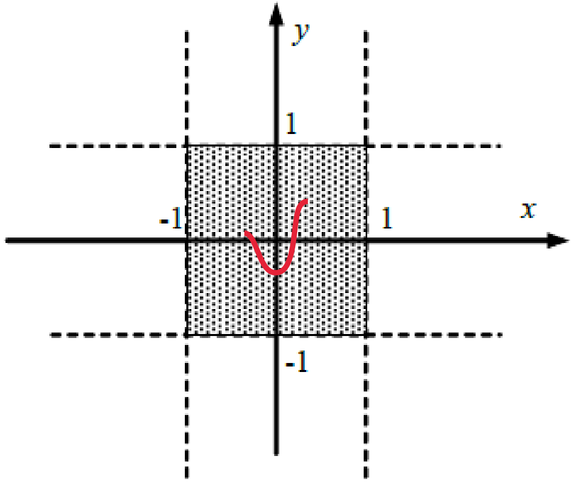
$$D(f) = \left\{(x,y) \middle| -x^2 \leq y \leq x^2, x \neq 0\right\}$$

Tanım bögesi yan taraftaki şekildeki taralı bölgedir.



Örnek 6. $z = f(x, y) = \arccos x + \arccos y$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulunuz.

Çözüm: Yukarıdaki fonksiyonun tanımlı olabilmesi için; $\begin{array}{l} -1 \le x \le +1 \\ -1 \le y \le +1 \end{array}$ olmalıdır.



Yani fonksiyon $x = \mp 1, y = \mp 1$ doğrularının arasında kalan Şekildeki karenin üzerinde ve içinde tanımlıdır.

Örnek 7. $z = \dfrac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$

fonksiyonunun tanım bölgesini bulunuz.

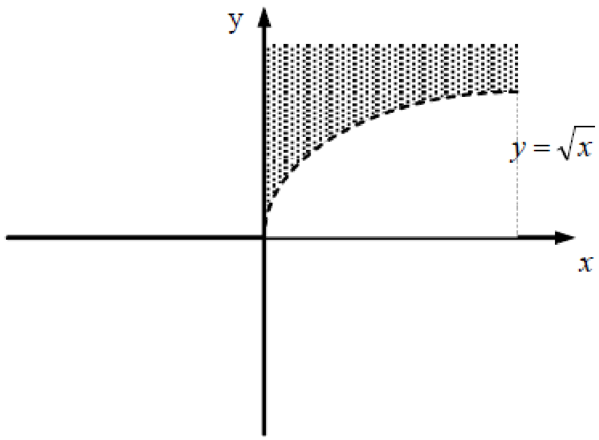
Çözüm: Yukarıdaki fonksiyonun tanımlı olabilmesi için;

$$\sqrt{y\text{-}\sqrt{x}} \neq 0 \;\text{ ve }\; y - \sqrt{x} > 0$$

olmalıdır. Buradan;

$$x \geq 0 \quad \text{ve} \quad y > \sqrt{x}$$

eşitliksizleri bulunur. Tanım bölgesi şekildeki



x' in $x \geq 0$ olduğu ve $y = \sqrt{x}$ eğrisi hariç bu eğrinin üst tarafında kalan taralı bölgedir.

Örnek 8. $f(x,y,z)=\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulunuz.

Çözüm: Fonksiyonun tanımlı olması için;

$$a^2-x^2-y^2-z^2\geq 0 \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2+z^2\leq a^2$$

olmalıdır. Buradan $f(x,y,z)$ fonksiyonun tanımlı olduğu bölge; yarıçapı a olan merkezcil bir kürenin üzeri ve içidir.

PROBLEMLER

1) Aşağıdaki fonksiyonların tanım bölgelerini bulunuz.

a) $z = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{y}$

b) $z = \sqrt{x \cos y}$

c) $z = arctg \dfrac{x-y}{1+x^2y^2}$

d) $z = \arccos \dfrac{x}{y}$

e) $z = \ln(x^2 + y)$

f) $u(x,y,z) = \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z$

h) $z = \dfrac{4}{x+y}$

g) $z = \sqrt{a^2 - (x-1)^2 - y^2} \qquad (a > 1)$

i) $\dfrac{z}{c} = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$

j) $z = x + \sqrt{x^2 - y^2}$

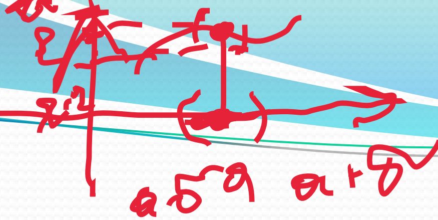
k) $\dfrac{z}{c} = 1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$

l) $\sqrt{z} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

m) $z = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$

n) $z = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$

o) $z = \ln(|x| + |y| - 2)$



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

1.2. LİMİT VE SÜREKLİLİK

$a_0 \in A$

Tanım 1. $f(x,y)$; $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ biçiminde tanımlanan iki değişkenli fonksiyon, (x_0, y_0) ise D' ye ait olması gerekmeyen bir nokta olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ pozitif sayısı için

$$(x,y) \in D \quad \text{ve} \quad 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

$|x - a|$

iken $|f(x,y) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı mevcut ise f nin (x_0, y_0) daki ***limiti*** L dir der ve

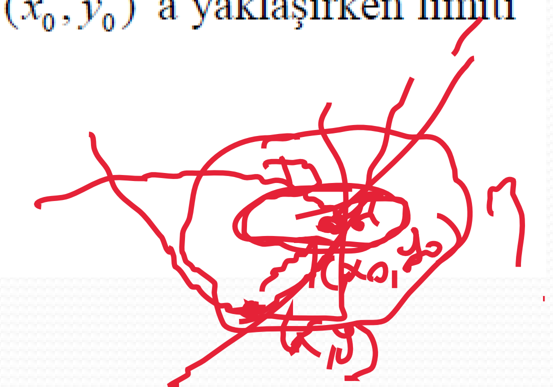
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad \text{veya} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f(x,y) - L| = 0$$

biçiminde yazarız

Tanım 2. (x,y) noktasını (x_0, y_0) noktasına yeterince yakın ancak (x_0, y_0) dan farklı alarak, $f(x,y)$ değeri L ye yeterince yakın yapılabilirse; $f(x,y)$ nin (x,y), (x_0, y_0) a yaklaşırken limiti L dir deriz ve

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

biçiminde yazarız.



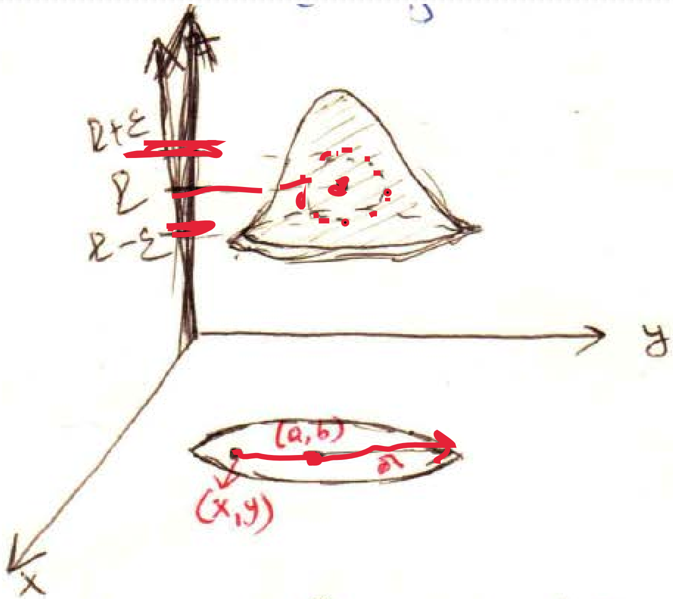
Tanım: $A \subset \mathbb{R}^2$, (a,b) noktasıda, A kümesinin bir yığılma noktası ve f de A üzerinde tanımlı, reel değerli bir fonksiyon olsun.

(x,y) noktaları (a,b) ye yaklaşırken

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell$$ ifadesine $f(x,y)$ fonksiyonunun limiti ℓ dir denir.

Tanım: $A \subset \mathbb{R}^2$, (a,b), A-kümesinin bir yığılma noktası ve $f(x,y)$ fonksiyonuda A üzerinde tanımlı, reel değerli bir fonksiyon olsun.

$f(x,y)$ fonksiyonunun (a,b) noktasındaki limiti ℓ dir $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyleki A-kümesinin (a,b) noktasının δ-komşuluğunda bulunan tüm (x,y) noktaları için $f(x,y)$ fonksiyonunun değerleri ℓ-nin ε-komşuluğunda bulunur.



(a, b) noktasının δ-komşuluğunda bulunan noktalar için

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$$

bağıntısı sağlanacağından yukarıda vermiş olduğumuz tanımları aşağıdaki şekilde-de ifade edilebilir.

Tanım: $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyleki $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$ şartını sağlayan her bir $(x,y) \in A$ için $|f(x,y)-\ell| < \varepsilon$ olmasıdır.

Eğer f fonksiyonunun (a,b) noktasındaki limiti ℓ ise (a,b) noktasına yeteri derecede yakın (x,y) noktaları için $f(x,y)$ sayıları da ℓ sayısına yeteri derecede yakın olur. Bunun karşıtı da doğrudur. Yani, (a,b) noktalarına yeteri derecede yakın seçilen (x,y) noktaları için $f(x,y)$ değerleri ℓ'ye yeter derece yakın ise f'nin (a,b) noktasındaki limiti ℓ dir.

$$|x-a| = \sqrt{(x-a)^2} \leq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta \quad \text{ve}$$

$$|y-b| = \sqrt{(y-b)^2} \leq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$$

$|x-a$

$|y-$

gerçeğinden $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$ bağıntısını sağlayan her (x,y) noktası için

$$|x-a| < \delta \quad \text{ve} \quad |y-b| < \delta \quad \text{elde edilir.}$$

Bu şu anlama gelir. Yani, (x,y) noktası (a,b)'ye yeter derece yakın olduğunda x'in a'ya, y'nin b'ye yeter derece yakın olmasıdır. Karşıt olarak $|x-a|<\delta$ ve $|y-b|<\delta$ olduğunda

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \sqrt{\delta^2+\delta^2} = \sqrt{2}\cdot\delta \text{ olur.}$$

Bu ise x'in a'ya, y'nin b'ye yakın olması durumunda (x,y) nin (a,b)'ye yakın olacağı anlamına gelir.

Bu yorumlar çok değişkenli fonksiyonlarda limit tanımının farklı şekilde verilebileceğini gösterir. Bu $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right) = \lim\limits_{y\to b}\left(\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right)$ dir.

(10)

Tanım: $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyleki

$|x-a| < \delta$ ve $|y-b| < \delta$ bağıntısını sağlayan, tanım kümesindeki tüm (x,y) noktaları için

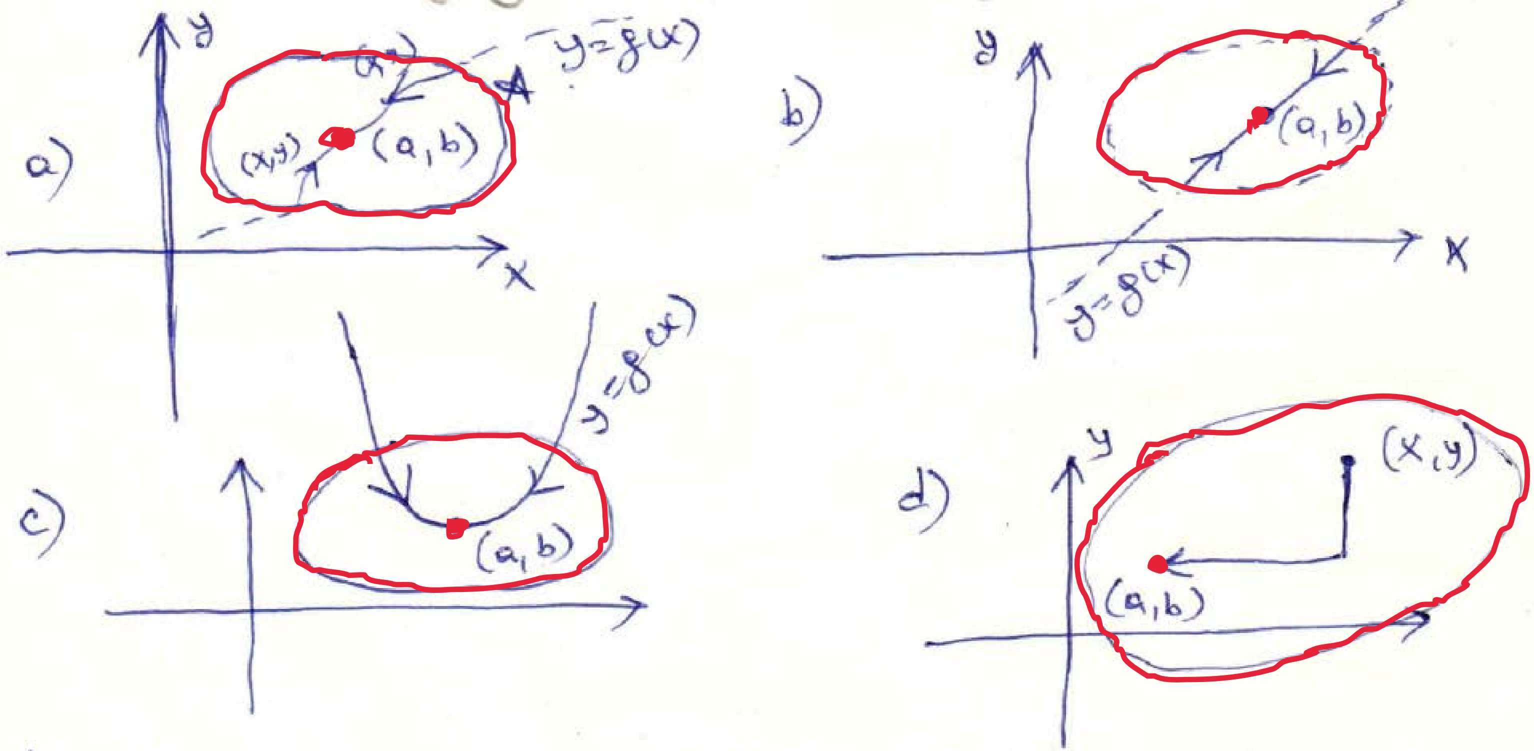
$$|f(x,y) - \ell| < \varepsilon \text{ dır.}$$

Çok değişkenli fonksiyonlarda (a,b)'ye yaklaşmak, bir değişkenli fonksiyonlardan farklıdır. Bir değişkenli fonksiyonlarda a-noktasına sağdan ve soldan yaklaşılır.

Ancak çok değişkenli fonksiyonlarda yaklaşım farklıdır.

"(x,y) noktası $y = g(x)$ eğrisi boyunca (a,b) noktasına yaklaşıyor" demek (a,b) noktasından geçen $y = g(x)$ eğrisi üzerinde gittikçe (a,b)'ye yaklaşan (x,y) noktaları göz önüne alınıyor" demektir.

örneğin: "(0,0) noktasına $y=2x$ doğrusu boyunca yaklaşıyor" demek „ $y=2x$ doğrusu üzerinde (0,0) noktasına yakın olan $(x,y)=(x,2x)$ noktaları göz önüne alınıyor" demektir.



İki değişkenli fonksiyonlarda limit araştırılırken bazı hususlara dikkat edilmesi gerekir.

① Fonksiyon (a,b) noktasında tanımlı olmayabilir. Fakat (a,b) noktası tanım kümesinin bir yığılma noktasıdır.

(Bir değişkenli fonksiyonlarda $\lim_{x \to 2} \frac{2x^2-8}{x-2}$).

② ℓ - limiti varsa bu (x,y) noktasının (a,b) noktasına yaklaşma şeklinden bağımsızdır. Yani, (x,y) sayısı (a,b)'ye hangi eğri üzerinden yaklaşırsa yaklaşsın ℓ-sayısı değişmez.

($\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \ell$ olması).

Örnek:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\cdot y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0) \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$ ve $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$ limitini hesaplayınız.

2) $y=2x$ doğrusu boyunca $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ limitini hesaplayınız.

3) $f(x,y)$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında limiti varmıdır.

Çözüm: 1) $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x.y}{x^2+y^2}\right) =$

$= \lim_{x\to 0} 0 = 0;$

(12)

$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x.y}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$. olur.

2) $y=2x$ doğrusu boyunca $(0,0)$ noktasına yaklaşıldığında $x\to 0$ için $y\to 0$ olacağından, $x\to 0$ için $2x\to 0 \Rightarrow x\to 0$ olur.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x.y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,2x)\to(0,0)} \frac{x.2x}{x^2+(2x)^2} =$$

$$= \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{2x^2}{5x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \text{ dir.}$$

3) Yaklaşım yoluna göre limit farklı değerlere sahip olduğundan $(0,0)$ noktasında limiti yoktur.

$x^2-y^2 \quad (x,y)\neq(0,0)$

yoktur.

Örnek: $f(x,y)=\begin{cases} x.y.\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ ise

fonksiyonu verilmiş olsun.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$ ve $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$ limitini hesaplayınız.

2) $y=2x$ doğrusu boyunca $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ limitini hesaplayınız.

3) $f(x,y)$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında limiti varmıdır?

Çözüm:

Çözüm:

① $\lim\limits_{x \to 0} \left(\lim\limits_{y \to 0} x \cdot y \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$

$\lim\limits_{y \to 0} \left(\lim\limits_{x \to 0} x \cdot y \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim\limits_{y \to 0} 0 = 0.$

② $y = 2x$ doğrusu boyunca limiti hesaplayalım. $x \to 0$ iken $y \to 0$ olur. Yani, $x \to 0$ iken $2x \to 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \to 0$ olur.

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} x \cdot y \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,2x) \to (0,0)} x \cdot 2x \cdot \frac{x^2 - (2x)^2}{x^2 + (2x)^2} =$$

$$= \lim_{(x,2x)\to(0,0)} 2x^2 \cdot \frac{-3x^2}{5x^2} = \lim_{(x,2x)\to(0,0)} \frac{-6x^2}{5} = \lim_{x\to 0} \frac{-6x^2}{5} = 0.$$

3 Bu durumda $f(x,y)$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında limiti vardır.

• $f(x,y)$' nin (x_0,y_0) noktasında tanımlı olması şart değildir ancak $f(x,y)$, (x_0,y_0) ın civarındaki bütün (x,y) noktalarında tanımlı olmalıdır.

Lemma: $f(x,y)$ iki değişkenli fonksiyonunun (x_0,y_0) noktasında limiti varsa tektir.

Teorem 1.2.1. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\ell_1$, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=\ell_2$, limitleri mevcut ve $c\in\mathbb{R}$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki kurallar doğrudur.

i. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f(x,y)\mp g(x,y))=\ell_1\mp\ell_2$

ii. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} c.f(x,y)=c.\ell_1$

iii. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f(x,y)\cdot g(x,y))=\ell_1.\ell_2$

iv $\ell_2\neq 0$ olmak üzere $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}=\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$

v. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}[f(x,y)]^{\alpha}=\ell_1^{\alpha}, \alpha$ pozitif tamsayı

vi. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\sqrt[n]{f(x,y)}=\sqrt[n]{\ell_1}$

Kutupsal Koordinatlarda Dönüştürme

Kartezyen koordinatlarda $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ limit değeri hesaplanırken bir ilerleme kaydedilemeyen durumlar mevcut olabilir. Böyle durumlarda, kutupsal koordinatlara geçilerek hesaplama denenebilir. Bunun için $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ dönüşümleri yapıldıktan sonra $(x,y)\to(0,0)$ yerine $r\to 0$ iken limit değeri aranacaktır. Başka bir değişle yukarıdaki limit tanımı dikkate alınırsa; verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her r ve θ için

$$|r| < \delta \Rightarrow |f(r,\theta) - L| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısının mevcut olmasını sağlayacak olan L sayısının mevcut olduğunun gösterilmesi gerekmektedir. L'nin mevcut olması durumunda

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = L$$

olur.

Tanım 4. $z = f(x, y)$ iki değişkenli fonksiyonu için eğer,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(\mathrm{x}_0, y_0)$$

ise fonksiyona (x_0, y_0) noktasında ***süreklidir*** denir. Bir bölgenin her noktasında sürekli olan fonksiyona o bölgede süreklidir denir.

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

Örnek 1. Eğer mevcut ise $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5xy^2}{x^2 + y^2}$ limitini tanımı kullanarak hesaplayınız.

Çözüm: Eğer $y \neq 0$ için $x = 0$ doğrusu boyunca $(0,0)$ ' a yaklaşılır ise

$$\lim_{y \to 0} \frac{5xy^2}{x^2 + y^2} = 0$$

olduğu, benzer düşünceyle $x \neq 0$ için $y = 0$ doğrusu boyunca $(0,0)$ ' a yaklaşılır ise

$$\lim_{x\to 0}\frac{5xy^2}{x^2+y^2}=0$$

olduğu görülür. Bu durum limitin 0 olduğunu garanti etmez, ama limit varsa değeri 0' dır. Şimdi 0 olduğunu tanımı kullarak gösterelim.

Tanıma göre her $\varepsilon > 0$ için; $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ olduğunda

$$\left|\frac{5xy^2}{x^2+y^2}-0\right|=\left|\frac{5xy^2}{x^2+y^2}\right|<\varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısının bulunabileceği gösterilmelidir.

$$\left|\frac{5xy^2}{x^2+y^2}-0\right|=\left|\frac{5xy^2}{x^2+y^2}\right|\le 5|x|\text{ , [çünkü; } y^2\le x^2+y^2\Rightarrow\frac{y^2}{x^2+y^2}\le 1\text{ dir.]}$$

$$\left|\frac{5xy^2}{x^2+y^2}\right|\le 5|x|=5\sqrt{x^2}\le 5\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\left|\frac{5xy^2}{x^2+y^2}\right|\le 5\sqrt{x^2+y^2}\Leftrightarrow\left|\frac{5xy^2}{x^2+y^2}\right|\le 5\delta=\varepsilon$$

olur. Yani ilk başta $\delta(\varepsilon)$ sayısı $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{5}$ olarak seçilmelidir. Böylece $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$ olmak üzere $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ iken $\left|\frac{5xy^2}{x^2+y^2}-0\right|\leq\varepsilon$ olur. Bu ise $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{5xy^2}{x^2+y^2}=0$ olması demektir.

Örnek 2. $\lim_{(x,y)\to(1,2)}\left(x^5y+3xy\right)=?$

Çözüm: Polinom türü fonksiyonlarda limit hesaplanırken; doğrudan yaklaşılan noktanın x ve y değerlerini fonksiyonel ifadede yerine koymak yeterlidir.

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}\left(x^5y+3xy\right)=1^52+3(1)(2)=8$$

Örnek 3. $\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=?$

Çözüm: Rasyonel fonksiyonlarda limit hesaplanırken; verilen nokta paydayı 0 yapmadığı müddetçe yine yukarıdaki örnekte olduğu gibi direkt noktaları yazmak yeterlidir.

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\frac{1^21}{1^4+1^2}=\frac{1}{2}$$

Örnek 4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 - y^3}{x - y} = ?$

Çözüm: $(0,0)$' da payda tanımsız olduğundan noktaları yerine yazarak limit arayamayız. Böyle durumlarda; bir değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi çarpanlara ayırma veya eşleniği ile çarpma gibi yöntemler tercih edilir. Gerçekten;

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x - y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+xy+y^2) = 0$$

olur.

Örnek 5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = ?$

Çözüm: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ dönüşümleri yapıldıktan sonra $(x,y)\to(0,0)$ yerine $r \to 0$ yazılır ise

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r\to0^+} \frac{r^3\cos^3\theta + r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \lim_{r\to0^+} \left(r\cos^3\theta + r\sin^3\theta\right) = 0$$

olur.

Örnek 6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{-(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2}=?$

Çözüm: $(x,y)\to(0,0)$ için $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği mevcut olup, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ dönüşümleri yapıldıktan sonra $(x,y)\to(0,0)$ yerine $r\to 0$ yazılır ise

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0^+}\frac{e^{-r^2}-1}{r^2}=\lim_{r\to 0^+}\frac{-2re^{-r^2}}{2r}=\lim_{r\to 0^+}-e^{-r^2}=-1$$

olur. Aynı bir değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi L'Hospital kuralı kullanılmıştır.

Örnek 8. $f(x,y)=\dfrac{5x^2y^2}{x^4+y^4}$ ise $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ var mıdır?

Çözüm: Eğer y=0 ise (x ekseni boyunca) $f(x,0)=\dfrac{0}{x^4}=0$ olur. Buradan;

x ekseni boyunca $(x,y)\to 0$ için $f(x,y)\to 0$ olur.

x=0 ise (y ekseni boyunca) $f(0,y)=\dfrac{0}{y^4}=0$ dır. Buradan;

y ekseni boyunca $(x,y)\to 0$ için $f(x,y)\to 0$ olur.

$y=x$ doğrusu boyunca bakılırsa; $f(x,x)=\dfrac{5x^2x^2}{x^4+x^4}=\dfrac{5}{2}$ olup

$y=x$ doğrusu boyunca $(x,y)\to 0$ için $f(x,y)\to\dfrac{5}{2}$

olur. Farklı yollar boyunca farklı limitler elde edildiğinden, limit yoktur.

Örnek.9. $f(x,y)=x^2+2y$ fonksiyonunun (1, 2) noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm:
$$\lim_{\substack{x\to1\\ y\to2}} x^2+2y = x^2+2y\Big|_{(1,2)}=5$$

olduğu gösterilmelidir. Bir önceki örnekten;

$$\lim_{\substack{x\to1\\ y\to2}}(x^2+2y)=5$$

$\delta(\varepsilon)=\dfrac{\varepsilon}{5}$ seçilerek limitin var olduğu bulundu. Aynı zamanda

$$\lim_{\substack{x\to1\\ y\to2}}(x^2+2y)=(x^2+2y)\Big|_{(1,2)}=5$$

olduğundan fonksiyon (1, 2) noktasında süreklidir.

PROBLEMLER

1) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2-2y^2+7}{x^2+y^2+3}=?$ **C:** $\dfrac{7}{3}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,4)} \sqrt{x^2+y^2-1}=?$ **C:** $2\sqrt{6}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=?$ **C:** 2

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=?$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{\sqrt{2x-x}-2}{2x-y-4}=?$ **C:** $\dfrac{1}{4}$

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=?$ **C:** 1

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,0)} \sqrt{25-x^2-y^2}=4$ olduğunu limit tanımını kullanarak gösteriniz.

Kaynaklar:

1. A. H. Berksoy, O. Özkan, Mühendisler İçin Çözümlü Kalkülüs, S.Ü. Basımevi, 2010
2. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus II**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2010.
3. J. Stewart, Kalkülüs Kavram ve Kapsam (Diferansiyel ve İntegral Hesap), TÜBA, 2010.