MATEMATİK 2

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2021

KATLI İNTEGRALLER

DİK KOORDİNAT SİSTEMİNDE İKİ KATLI İNTEGRALLER

Katlı integrallere geçmeden önce bir örneği göz önüne alalım. Bize bir silindirik bir cisim verilmiş olsun. Problem bu silindirik cisimin gerçek hacminin hesaplanması olsun. Liseden biliyoruz ki silindir: "Tabanı daire olan prizmadır".

Silindirin yan yüzü dikdörtgen biçimindedir.

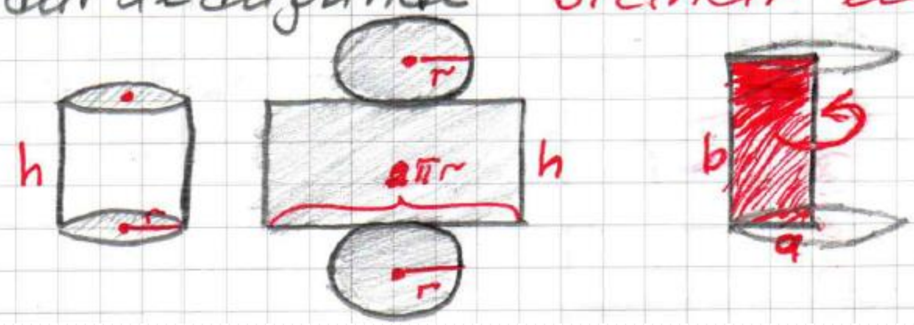
Bu silindir için:

$$\text{Taban Alanı} = \pi r^2$$

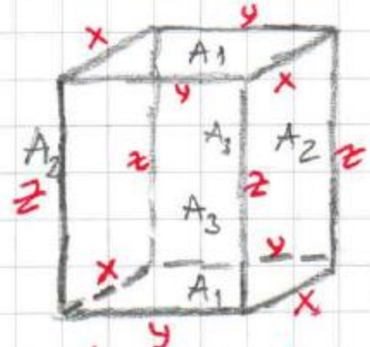
$$\text{Hacim} = \pi r^2 . h \quad \text{dir.}$$

Taban çevresi $2\pi r$ olduğundan yanal alan $2\pi r . h$ olur. Tüm alan $= 2\pi r . h + 2\pi r^2$ geçerlidir.

Bir dikdörtgen levha bir kenarı etrafında döndürüldüğünde silindir elde edilir.

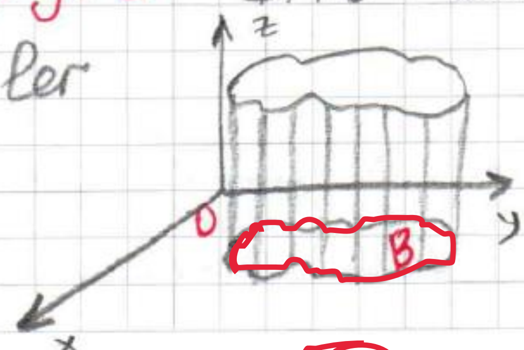


Benzer şekilde dikdörtgen prizmanın yanal alanları ve prizmanın tüm alanı, hacmi aşağıdakiler gibi hesaplanır.

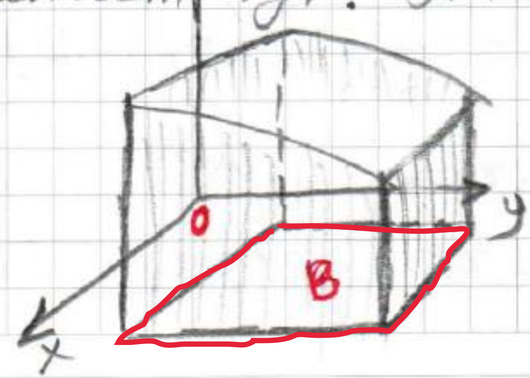


$A_1 = x\cdot y$, $A_2 = x\cdot z$, $A_3 = y\cdot z$.

ve Tüm alan $= A = 2A_1 + 2A_2 + 2A_3$ ve hacim $V = x\cdot y\cdot z$ dir. Bunlar tamam iyi. Ancak! şekiller



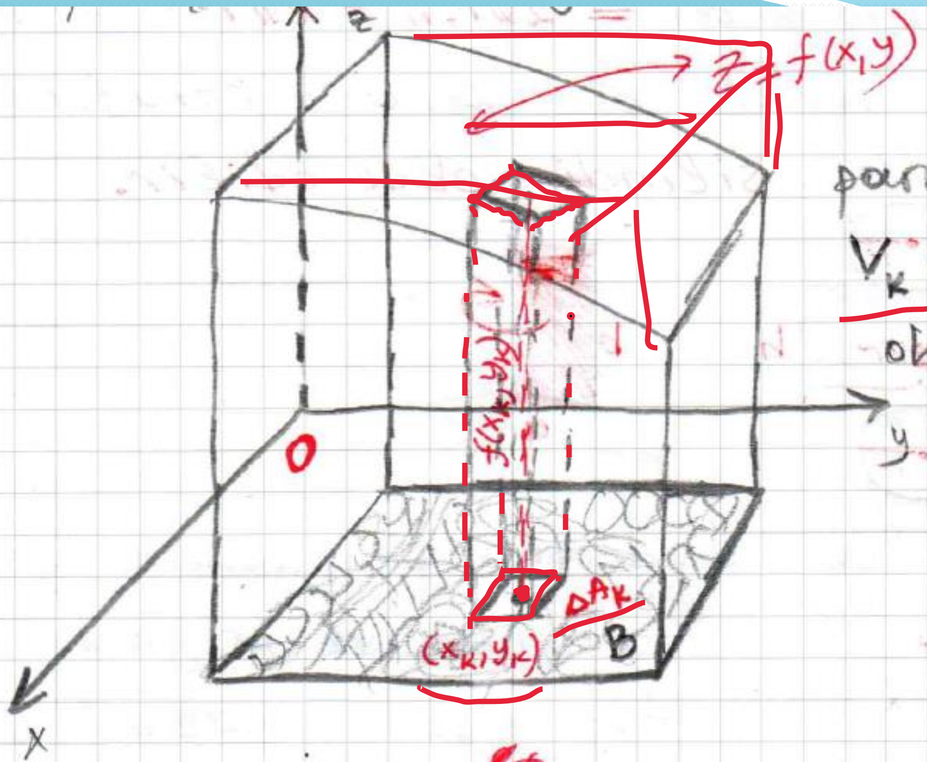
veya



1

2

şekillerle verilmiş olduğunu düşünürsek.
Hacimi hesaplamak, daha önceden bildiğimiz metotlarla mümkün değildir. Bu durumda tabanı parçalara ayırmamız gerekiyor.
Belirli integrallerin uygulamasında, bir fonksiyon ile sınırlanan alanı hesaplamak için [a,b] aralığını sonsuz parçacıklara bölüyorduk. Burada da ona benzer işlem gerçekleştiriliyor. Yani, tabanını şekilde olduğu gibi parçalara ayıralım.



Bu silindirik parçacığın hacmi

$$V_k = f(x_k, y_k) \cdot \Delta A_k$$

olur.

Bu durumda şekildeki cismin hacmi

$$V_n = f(x_1, y_1)\,\Delta A_1 + f(x_2, y_2)\,\Delta A_2 + \dots + f(x_n, y_n)\,\Delta A_n$$

(1) $$= \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \cdot \Delta A_k \quad \text{olur.}$$

Burada ΔA_k alan sıfıra doğru yaklaşırsa o kadar gerçek hacime yaklaşmış oluruz.

Yani,

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \cdot \Delta A_k \quad \text{olur.}$$

İki katlı İntegraller.

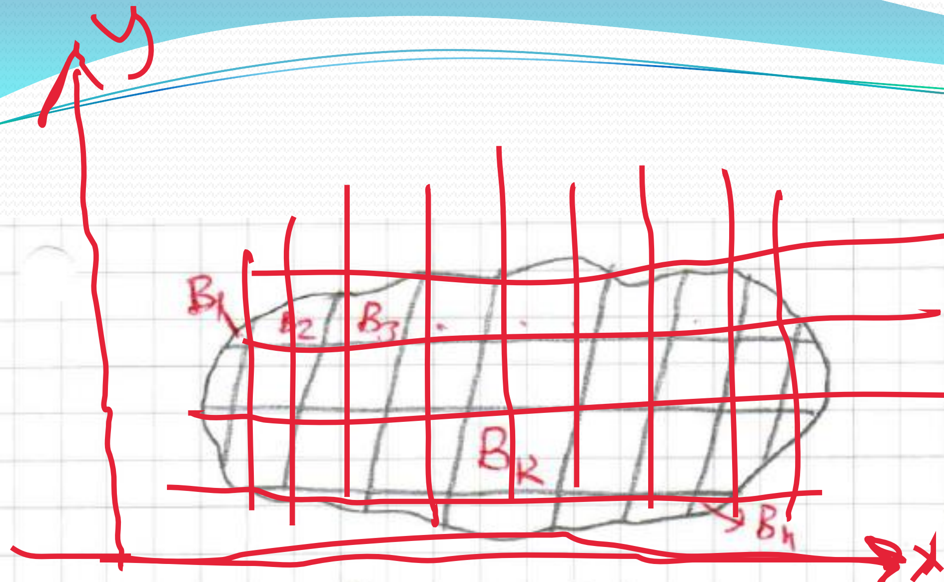
Tanım! XOY düzleminde verilen bir B bölgesini $B_1, B_2, \ldots, B_n$ gibi alt bölgelere ayıralım.

$$P = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$$

kümesine B bölgesinin bir parçalanması denir.

$$\|P\| = \text{maks}\{d(B_1), d(B_2), \ldots, d(B_n)\} \quad (2)$$

sayısına P parçalanmasının normu veya maksimal çapı adı verilir. Burada $d(B_k)$, B_k bölgesinin çapını göstermektedir.



Bu şekilden görül-
düğü gibi, eğer
P parçalanmasının
normu sıfıra gidiyorsa o parçalanmadaki
her bir alt bölgenin çapı sıfıra gider.
Yani, her bir alt bölgenin alanı sıfıra
yaklaşır. Bu durumda alt bölgelerin
sayısı sınırsız artar. (Eğer hatırlarsa-
nız bir katlı integrallerde Δx nekadar
küçük olursa, okadar eğri ile sınırlan-

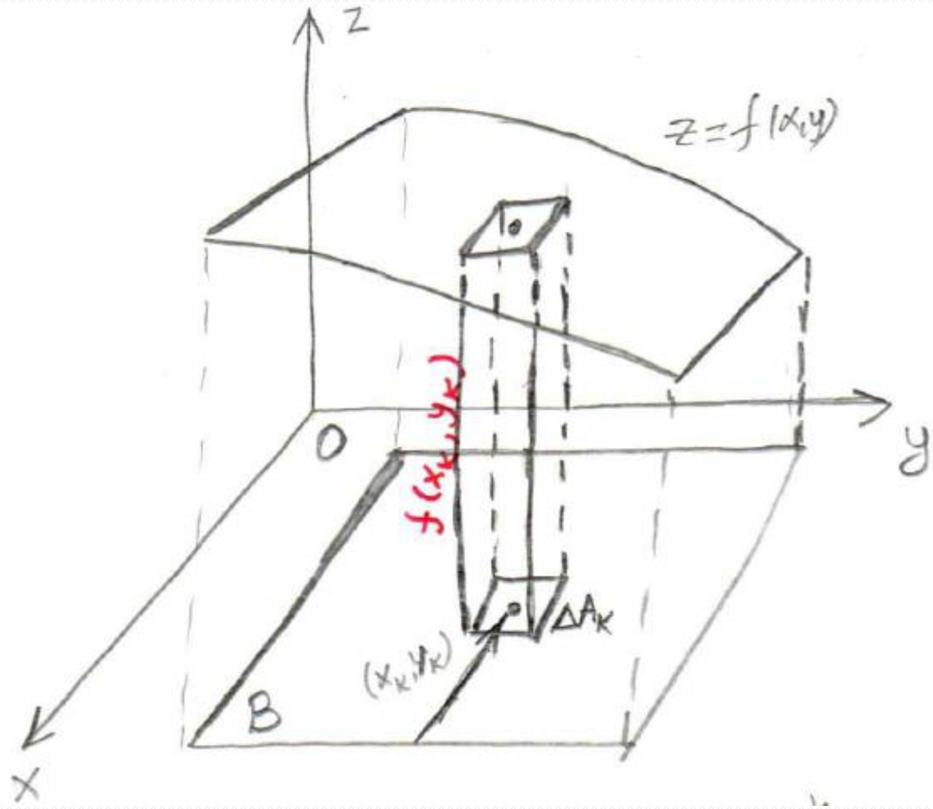
mış alanı gerçek alanına yaklaşık hesap-lardık)

Burada B_i ler nekadar küçük olursa, yani B_i lerin çapları nekadar sıfıra yaklaşırsa o kadar gerçek alana (hacme) yaklaşık alan (hacim) elde edilir.

Tanım: $f(x,y)$ fonksiyonu B - bölgesinde tanımlı ve sınırlı olsun. B bölgesinin bir $P=\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ parçalanması verildiğinde, ΔA_k, B_k bölgesinin alanını ve (x_k, y_k) da B_k bölgesinin herhangi bir noktasını göstermek üzere

$$R(f,P)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\cdot \Delta A_k \quad (3).$$

ifadesine $f(x,y)$ fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen Riemann toplamı veya integral toplamı denir.



(6) (13)

Bu şekilden görüldüğü gibi

ΔA_K - ▱ parçanın alanı, $f(x_K,y_K)$ yukarıdan kesilmiş yüzeye kadar olan yüksekliktir.

Tanım: Eğer $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \cdot \Delta A_k$ limiti mevcut ise, bu limite f fonksiyonunun B üzerindeki **iki katlı integrali denir**, sembolik olarakta

$$\iint_B f(x,y)\, dA \qquad (2)$$

ile gösterilir. $f(x,y)$ ifadesine **integrant**, B bölgesine de **integrasyon bölgesi denir.**

Eğer B bölgesinin parçalanması, OX ve OY eksenlerine paralel doğrular yardımıyla yapılırsa $\Delta A_k = \Delta x_k \cdot \Delta y_k$ olacağından (2) integrali

$$\iint_B f(x,y)\, dx\, dy \qquad (3)$$

biçiminde yazılır.

Burada;

$$\iint_B f(x,y)dA = \lim_{\Delta A \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k \quad = L. \tag{2.2}$$

biçiminde tanımlanmıştır. (2.1) in sağ tarafına bazen Riemann toplamı da denir.

ARDAŞIK İNTEGRAL ALMA

İki katlı integral; iki tane bir katlı integralin hesaplanması şeklinde ifade edilebilir. $f(x,y)$ fonksiyonu $[a,b]\times[c,d]$' de sürekli bir fonksiyon olsun. İki değişkenli fonksiyonlarda kısmi türev alma işleminde olduğu gibi $\int_c^d f(x,y)dy$ ifadesi; x sabit tutulurken, $f(x,y)$ fonksiyonunun $y=c$ den $y=d$ ' ye kadar belirli integrali anlamında kullanılır. Bu integralin değeri $g(x)=\int_c^d f(x,y)dy$ biçiminde x' e bağlı bir fonksiyon olacağından

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx \tag{2.4}$$

ifadesi bulunur. (2.4) eşitliğinin sağ tarafındaki integral ***ardaşık integral*** olarak adlandırılır. Yani;

$$= \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy$$

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx$$

ifadesi; $f(x,y)$ fonksiyonunun önce $y=c$ den $y=d$ ' ye y değişkenine göre, sonra $x=a$ dan $x=b$ 'ye x değişkenine göre integralinin alınması anlamına gelir. Uygulamalarda genellikle köşeli parantez yazılmaz. Hesaplama sırası içeriden dışarıya doğrudur.

İKİ KATLI İNTEGRALLERİN ÖZELLİKLERİ

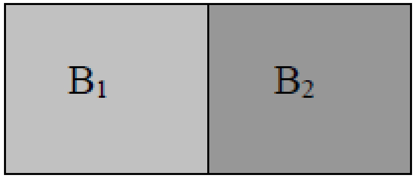
$f(x,y)$ ve $g(x,y)$, $B \subset R^2$ bölgesi üzerinde inregrallenebilir iki fonksiyon ve c_1, c_2 keyfi sabitler olmak üzere bir katlı belirli integrallerdekine benzer özellikler iki katlı integrallerde de mevcuttur.

1) $\iint\limits_B [c_1 f(x,y) \pm c_2 g(x,y)]\, dA = c_1 \iint\limits_B f(x,y)dA \pm c_2 \iint\limits_B g(x,y)dA$

2) B deki her (x,y) için $f(x,y) \geq 0$ ise, $\iint\limits_B f(x,y)dA \geq 0$ dır.

3) B deki her (x,y) için $f(x,y) \geq g(x,y)$ ise $\iint\limits_B f(x,y)dA \geq \iint\limits_B g(x,y)dA$ dır.

4) Eğer $B = B_1 \cup B_2$ ve $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ ise



$$\iint\limits_B f(x,y)dA = \iint\limits_{B_1} f(x,y)dA + \iint\limits_{B_2} f(x,y)dA$$

5) Eğer *f(x,y)* fonksiyonu *B* bölgesinde integrallenebilirse $|f(x,y)|$ fonksiyonu da integrallenebilirdir.O halde

$$\left|\iint_B f(x,y)\,dA\right| \le \iint_B |f(x,y)|\,dA$$

6) Eğer *B* de integrallenebilir *f(x,y)* fonksiyonunun en büyük değeri *M*, en küçük değeri *m* ise ve *A* da *B* bölgesinin alanı ise

$$mA \le \iint_B f(x,y)\,dxdy \le MA$$

$\Rightarrow m \le \frac{1}{A} \cdot \iint_B f(x,$

dır.

7) Eğer *f(x,y)* fonksiyonu; *x*' in bir fonksiyonu ile *y*' nin bir fonksiyonunun çarpımı şeklinde ise

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx = \int_a^b \phi(x)\,dx \int_c^d \psi(y)\,dy$$

dir.

8) $f(x,y)$ fonksiyonunun bir B dikdörtgenindeki ***ortalama değeri***;

$$f_{ort} = \frac{1}{A(B)} \iint_B f(x,y)\,dA$$

$m \le f(\alpha,\beta)$

Eşitliği ile verilir. Buradaki $A(B)$ ifadesi dikdörtgenin alanı olarak tanımlanmıştır.

Limit ve toplam sembolünün özellikleri kullanılarak yukarıdaki özelliklerin varlıkları kolayca gösterilebilir.

Teorem (FUBİNİ TEOREMİ)

$B = \{ (x,y) \subset R^2 : \ a \le x \le b, c \le y \le d \ \}$ ve $f : B \to R$ sürekli fonksiyon olsun.Bu taktirde

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy$$

dir.

Fubini teoreminin ifade ettiği özellik uygulamalarda çok önemlidir. Çünkü dikdörtgensel bölgelerde her iki diferensiyel sırasına göre yapılan hesaplamalarda çözümlerin her zaman aynı kolaylıkta olmadığı görülmektedir. Bu nedenle iki katlı integralleri hesaplarken, daha kolay integrali veren integral alma sırası tercih edilmelidir.

$B = \{(x,y): 0 \le x \le 1$

Aşağıdaki iki katlı integralleri hesaplayınız.

Örnek 1. $\int_0^2 \int_0^1 (x^2 + 2y)dxdy = ?$

Çözüm: $\int_0^2 \int_0^1 (x^2 + 2y)dxdy = \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} + 2xy \right]_0^1 dy = \int_0^2 \left(\frac{1}{3} + 2y \right) dy = \frac{y}{3} + y^2 \Big|_0^2 = \frac{14}{3}$ br^3

$$\int_0^1 \int_0^1 x^2 \cdot \frac{1}{1+y^2}\, dy\, dx = \left(\int_0^1 x \right.$$

Örnek 2. $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dydx = ?$

Çözüm: $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dydx = \int_0^1 x^2 \arctan y\big|_0^1 dx = \frac{\pi}{4}\int_0^1 x^2 dx = \frac{\pi}{12}$ br^3

$= \frac{1}{3}$

Örnek 3. $\int_{-3}^{3} \int_{y^2-4}^{5} (x+2y)dxdy = ?$

Çözüm: $I = \int_{-3}^{3} \int_{y^2-4}^{5} (x+2y)dxdy = \int_{-3}^{3} \left[\frac{x^2}{2} + 2xy \Big|_{y^2-4}^{5} \right] dy = \int_{-3}^{3} \left(\frac{9}{2} + 18y + 4y^2 - 2y^3 - \frac{y^4}{2}\right)dy$

$$I = \frac{9}{2}y + 9y^2 + \frac{4}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^4 - \frac{y^5}{10}\Big|_{-3}^{3} = \frac{252}{5}$$

Örnek 4. $\int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} dydx = ?$

Çözüm: $\int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} dydx = \int_1^2 \left(\frac{-x^2}{y} \Big|_{\frac{1}{x}}^{x} \right) dx = \int_1^2 \left(-x + x^3\right) dx = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{9}{4}$

$\cos^2\theta =$

Örnek 5. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{a\sin\theta}^{a} r\,dr\,d\theta = ?$

Çözüm: $$\int_0^{2\pi}\int_{a\sin\theta}^{a} r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right|_{a\sin\theta}^{a} d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1-\sin^2\theta)\,d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{a^2}{4}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{a^2}{4}\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right|_0^{2\pi} = \frac{a^2\pi}{2}$$

Örnek 6. $\displaystyle\int_3^4\int_1^2 \frac{dy\,dx}{(x+y)^2} = ?$

Çözüm: $$\int_3^4\int_1^2 \frac{dy\,dx}{(x+y)^2} = \int_3^4 -\frac{1}{x+y}\Bigg|_1^2 dx = \int_3^4\left(-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= -\ln(x+2) + \ln(x+1)\Big|_3^4 = \ln\left(\frac{25}{24}\right)$$

Örnek 7. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{3\cos\theta} r^2\sin^2\theta\,dr\,d\theta = ?$

Çözüm: $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{3\cos\theta} r^2\sin^2\theta\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{3\cos\theta}\right]\sin^2\theta\,d\theta = 9\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^3\theta\,d\theta$

$$= 9\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta = 9\left(\frac{\sin^3\theta}{3}-\left.\frac{\sin^5\theta}{5}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right. = \frac{12}{5}$$

Örnek 8. $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\cos\theta} r\sin\theta\,dr\,d\theta = ?$

Çözüm: $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\cos\theta} r\sin\theta\,dr\,d\theta = \int_{0}^{\pi}\left[\left.\frac{r^2}{2}\right|_0^{\cos\theta}\right]\sin\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta = \left.\frac{-\cos^3\theta}{6}\right|_0^{\pi} = \frac{1}{3}$

Örnek 9. $\displaystyle\int_{1}^{\ln 8}\int_{0}^{\ln y} e^{x+y}\,dx\,dy = ?$

Çözüm: $\displaystyle\int_{1}^{\ln 8}\int_{0}^{\ln y} e^{x+y}\,dx\,dy = \int_{1}^{\ln 8} e^y \left. e^x\right|_0^{\ln y} dy = \int_{1}^{\ln 8} e^y\,(y-1)\,dy = \left.\left(ye^y-2e^y\right)\right|_1^{\ln 8} = 8\ln 8 - 16 + e$

Örnek 10. $\int_0^1 \int_1^2 (x^2+y^2)\,dxdy = ?$

Çözüm: $\int_0^1 \int_1^2 (x^2+y^2)\,dxdy = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3}+xy^2\right)\Big|_1^2 dy = \int_0^1 \left(y^2+\frac{7}{3}\right)dy = \frac{y^3}{3}+\frac{7y}{3}\Big|_0^1 = \frac{8}{3}$

Örnek 11. $\int_{\frac{b}{2}}^{b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\,d\theta\,dr = ?$

Çözüm: $\int_{\frac{b}{2}}^{b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\,d\theta\,dr = \int_{\frac{b}{2}}^{b} r\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dr = \frac{\pi}{2}\int_{\frac{b}{2}}^{b} r\,dr = \frac{\pi}{4}r^2\Big|_{\frac{b}{2}}^{b} = \frac{3\pi b^2}{16}$

Örnek 12. $\int_0^a \int_{y-a}^{2y} xydxdy = ?$

Çözüm: $\int_0^a \int_{y-a}^{2y} xydxdy = \int_0^a \frac{x^2 y}{2}\Big|_{y-a}^{2y} dy = \frac{1}{2}\int_0^a (3y^3 - a^2 y + 2ay^2)\,dy = \frac{1}{2}\left(\frac{3y^4}{4} - \frac{a^2 y^2}{2} + \frac{2ay^3}{3}\right|_0^a = \frac{11a^4}{24}$

Örnek 13. $\int_0^2 \int_0^{x^2} ydydx \; = ?$

Çözüm: $\int_0^2 \int_0^{x^2} ydydx = \int_0^2 \frac{y^2}{2}\Big|_0^{x^2} dx = \int_0^2 \frac{x^4}{2} dx = \frac{x^5}{10}\Big|_0^2 = \frac{16}{5}$

Örnek14. $\int_0^a \int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} ydydx \; = ?$

Çözüm: $\int_0^a \int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} ydydx = \int_0^a \frac{y^2}{2}\Big|_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \int_0^a \left(-x^2 + ax\right) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2}\Big|_0^a = \frac{a^3}{6}$

Örnek15. $\int_0^1 \int_0^2 (x+2)dydx \ =?$

Çözüm: $\int_0^1 \int_0^2 (x+2)dydx = \int_0^1 (x+2)\, y\Big|_0^2 = \int_0^1 2(x+2)dx = 2\left(\frac{x^2}{2}+2x\right|_0^1 = 5$

Örnek16. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dydx = ?$

Çözüm: $I = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dydx$ integralinde $y=\sqrt{a^2-x^2}\sin t$ değişken dönüşümü yapılırsa;

$$I=\int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2-x^2)\cos^2 t\,dtdx = \int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^2-x^2)}{2}(1+\cos 2t)\,dtdx$$

$$=I=\int_0^a \frac{(a^2-x^2)}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{4}\int_0^a (a^2-x^2)dx = \frac{\pi}{4}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right|_0^a = \frac{\pi a^3}{6}$$

1) $\displaystyle\int_0^9 \int_{\frac{x}{3}}^{\sqrt{x}} xy\,dy\,dx$ C: $\dfrac{243}{8}$

2) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{-x^2+1} (xy - x)\,dy\,dx$ C: $-\dfrac{1}{6}$

3) $\displaystyle\int_0^2 \int_{\sqrt{4-y^2}}^{2} x\,dx\,dy$ C: $\dfrac{4}{3}$

4) $\displaystyle\int_0^2 \int_{\frac{3x^2}{2}}^{6} (x + 2xy^2)\,dy\,dx$ C: 222

5) $\displaystyle\int_0^4 \int_{\frac{3x}{2}}^{3\sqrt{x}} xy\,dy\,dx$ C: 24

6) $\displaystyle\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} y\,dx\,dy$ C: $\dfrac{4}{3}$

7) $\displaystyle\int_0^9 \int_{\frac{x}{3}}^{\sqrt{x}} x\,dy\,dx$ C: $\dfrac{81}{5}$

8) $\displaystyle\int_0^5 \int_2^{\sqrt{9-y}} (x + 3y)\,dx\,dy$ C: $\dfrac{401}{20}$

9) $\displaystyle\int_0^2 \int_{\sqrt{1-\frac{1}{2}y}}^{1} xy\,dx\,dy$ C: $\dfrac{2}{3}$

10) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-x^2-y^2}\,dy\,dx$ C: $\dfrac{\pi(e-1)}{4e}$

11) $\displaystyle\int_0^1 \int_1^2 (x^2 + y^2)\,dx\,dy$ C: $\dfrac{8}{3}$

12) $\displaystyle\int_{\frac{b}{2}}^{b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\,d\theta\,dr$ C: $\dfrac{3b^2\pi}{16}$

13) $\displaystyle\int_1^e \int_0^{\pi} \frac{1}{x}\sin^2(y)\,dy\,dx = ?$ C: $\dfrac{\pi}{2}$

14) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \left(x^3 + y\right)dy\,dx = ?$ C: $\dfrac{3}{4}$

15) $\int_0^2\int_{-1}^1 e^{-x-y}\,dxdy=?$ **C:** $\left(e-\frac{1}{e}\right)\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$

16) $\int_{-1}^1\int_0^2 (x+y)^3\,dxdy=?$ **C:** 12

17) $\int_0^1\int_0^2 xe^y\,dydx=?$ **C:** $\frac{1}{2}(e^2-1)$

18) $\int_0^1\int_x^{2x} xe^y\,dydx=?$ **C:** $\frac{1}{4}(e^2-3)$

19) $\int_0^R\int_0^\pi x\sin(y)\,dydx=?$ **C:** R^2

20) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_x^{2x} \sin(x+y)\,dydx=?$ **C:** $\frac{1}{3}$

İKİ KATLI İNTEGRALLERDE İNTEGRASYON SINIRLARI

B bölgesi üzerinde tanımlanmış sürekli f fonksiyonunun;

$$\iint_B f(x,y)dA \tag{2.5}$$

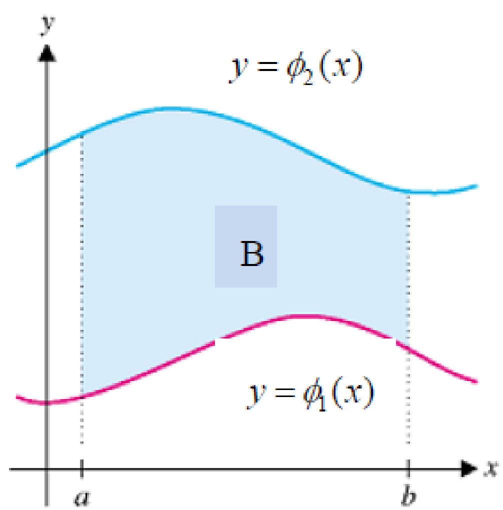
iki katlı integralini ele alalım.Bu bölümde iki farklı bölge için (2.5) integralinin ardışık integrallere dönüştürülmesi gösterilecektir.

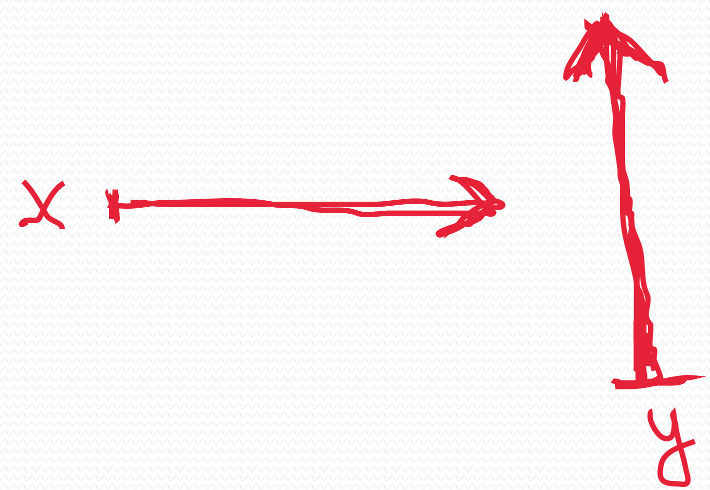
I. Tip Bölge: B düzlemsel bölgesi: $x=a$, $x=b$ dikey doğruları ve $y=\phi_1(x)$, $y=\phi_2(x)$ ($\forall x\in[a,b]$ için $\phi_1(x)\le\phi_2(x)$) sürekli, diferensiyellenebilir eğrileriyle sınırlandırılmış olsun. Bu taktirde (2.5) iki katlı integrali için aşağıdaki ardışık integralleme formülü geçerlidir.

$$\iint_B f(x,y)dA=\int_a^b\left\{\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy\right\}dx \tag{2.6}$$

düşey

I. tip bölge (~~yatay~~ **basit bölge**) adı verilir. Bu kural; $a\le x\le b$ deki her x için ($\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$) noktalarını birleştiren doğruların B içinde kalması gerektiği biçiminde de verilebilir.

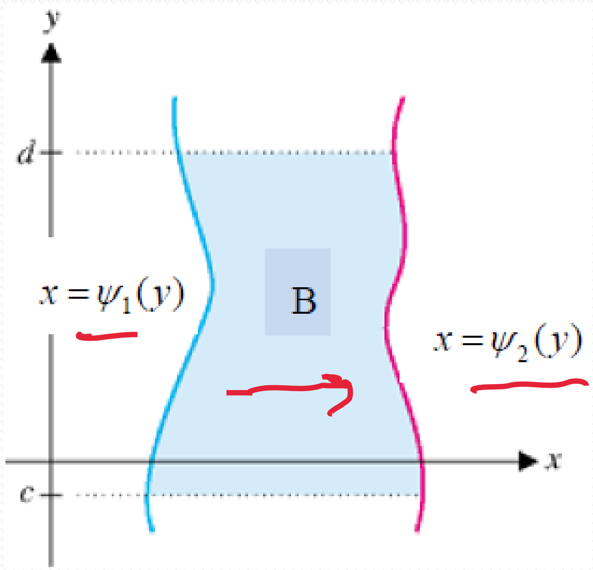




II. Tip Bölge: B bölgesi; $y=c$, $y=d$ yatay doğruları ve $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$ ($\forall y\in[c,d]$ için $\psi_1(y)\leq\psi_2(y)$) sürekli,diferensiyellenebilir eğrileriyle sınırlandırılmış olan bölge olsun. Bu taktirde (2.5) iki katlı integrali için aşağıdaki ardışık integralleme formülü geçerlidir.

$$\iint_B f(x,y)dA=\int_c^d\{\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\}dy \tag{2.7}$$

Yatay basit bölgeler için verilen tanıma benzer düşünceyle yukarıdaki Şekil 2.1.2. deki gibi tanımlanan ve (2.7) integrali ile verilen bu tür bölgelere II. tip bölge (~~**düşey**~~ dikey **basit bölge**) adı verilir.

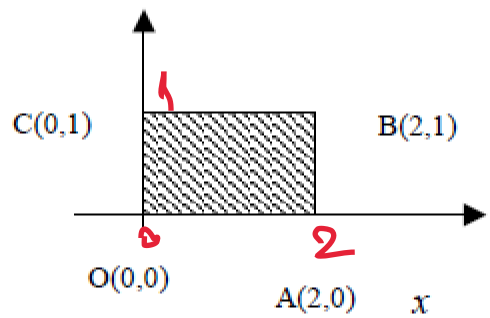


$\iint\limits_B f(x,y)dxdy$ ***integralinin integrasyon sınırlarını verilen B bölgesine göre belirleyiniz.***

Yani; verilen bölgeleri hem $dxdy$ ***hem de*** $dydx$ ***diferensiyel sırasına göre ifade ediniz.***

Örnek 1. B bölgesi; köşeleri $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(2,1)$, $C(0,1)$ olan dikdörtgen.

Çözüm: Verilen noktalar vasıtası ile tarif edilen bölge aşağıdaki taralı bölge olup; bu bölge



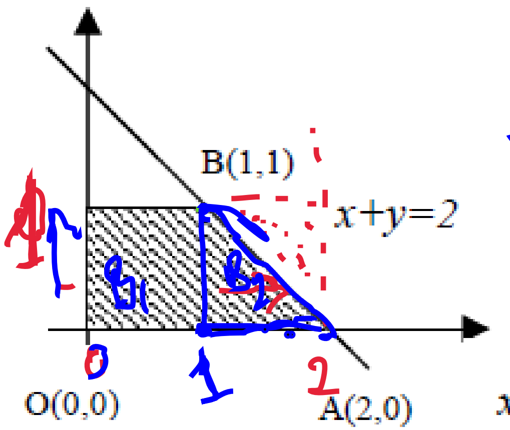
$$\iint\limits_B f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^2 f(x,y)dxdy$$

$$\iint\limits_B f(x,y)dydx = \int_0^2\int_0^1 f(x,y)dydx$$

biçiminde iki katlı integraller ile verilir.

Örnek 2. B bölgesi; köşeleri $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(1,1)$, $C\,(0,1)$ olan bir yamuktur.

Çözüm: Tarif edilen yamuk aşağıdaki şekilde verilmiştir. Buna göre,



$y = 2-x$

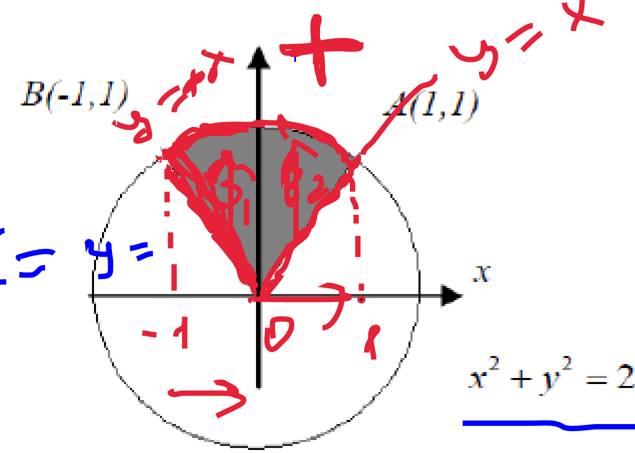
$x = 2-y$

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^{2-y} f(x,y)dxdy$$

$$\iint_B f(x,y)dydx = \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dydx}_{B_1} + \underbrace{\int_1^2 \int_0^{2-x} f(x,y)dydx}_{B_2} \quad \text{olur.}$$

Örnek 3. B bölgesi; merkezi $O(0,0)$ olan çemberinin üzerindeki $A(1,1)$, $B(-1,1)$ noktaları arasındaki yay parçası ve OA, OB yarıçaplarıyla sınırlanan bir daire kesmesidir.

Çözüm: İntegrasyon bölgesi aşağıdaki taralı bölge olup, bu bölge için



$x = -y \quad \Leftarrow y =$

$x^2 = 2 - y^2$

$x = \mp\sqrt{2 -$

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \underbrace{\int_0^1 \int_{-y}^{y} f(x,y)dxdy}_{D_1} + \underbrace{\int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dxdy}_{D_2}$$

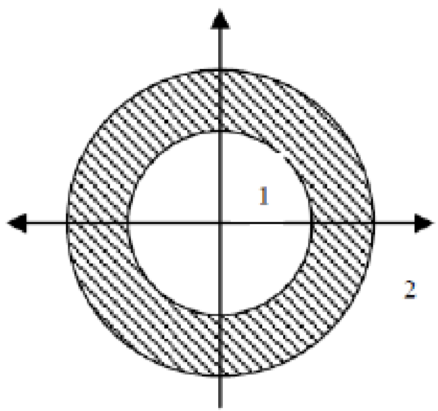
$$\iint_B f(x,y)dydx = \underbrace{\int_{-1}^0 \int_{-x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dydx}_{D_1} + \int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dydx$$

$y =$

biçiminde yazılır.

Örnek 4. B bölgesi; merkezleri $O(0,0)$ noktası yarıçapları $r=1$ ve $r=2$ olan, merkezcil iki çemberin sınırladığı halka alandır.

Çözüm: Aşağıdaki taralı bölge ile verilen integrasyon bölgesi; eksenlere paralel doğrular ile



basit bölgelere ayrıldıklarında

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \int_{-2}^{-1}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dxdy + \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dxdy$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dxdy + \int_{1}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dxdy$$

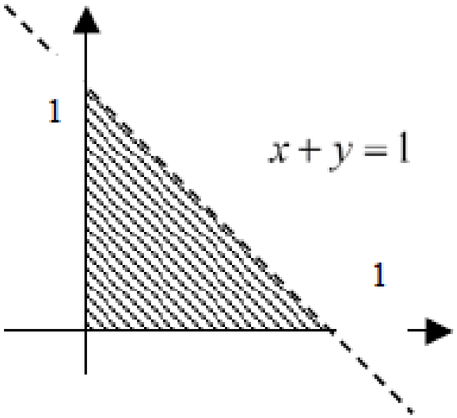
$$\iint_B f(x,y)\,dydx = \int_{-2}^{-1}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dydx + \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dydx$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dydx + \int_{1}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dydx$$

eşitlikleri elde edilir.

Örnek 5. B bölgesi; $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x + y \leq 1$ eşitsizliği ile tanımlanan bölgedir.

Çözüm: Verilen integrasyon bölgesi aşağıdaki taralı bölgedir. Buna göre,



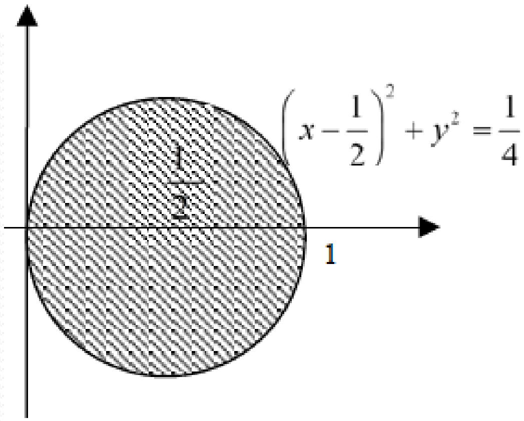
$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{1-y} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\iint_B f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx$$

biçiminde verilen integraller bölgeyi tanımlamaktadır.

Örnek 6. B bölgesi; $x^2+y^2\le x$ ile sınırlanan bölge (merkezi $\left(\frac{1}{2},0\right)$ ve yarıçapı $r=\frac{1}{2}$ olan çemberin içi).

Çözüm: Tanımlanan bölge aşağıdaki şekilde olduğu gibi, merkezi x ekseni üzerinde, çapı 1 birim olan ve orjine teğet olan $x^2+y^2\le x$ çemberin içidir.



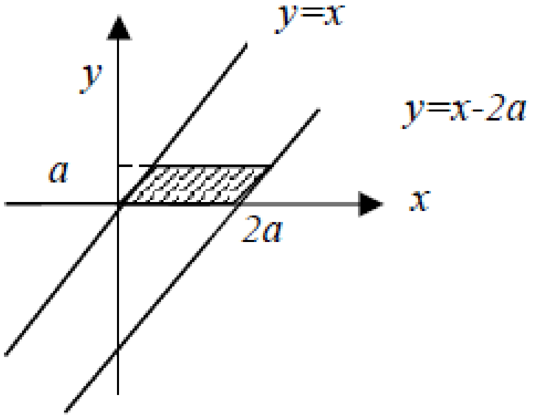
$$\iint_B f(x,y)\,dxdy=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2}} f(x,y)\,dxdy$$

$$\iint_B f(x,y)\,dydx=\int_0^1\int_{-\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}^{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} f(x,y)\,dydx$$

olur.

Örnek 7. B bölgesi; $y \le x \le y+2a;\ 0 \le y \le a$ ile sınırlanan bölge.

Çözüm:



Şekildeki taralı bölge; tanımlanan integrasyon bölgesi olup,

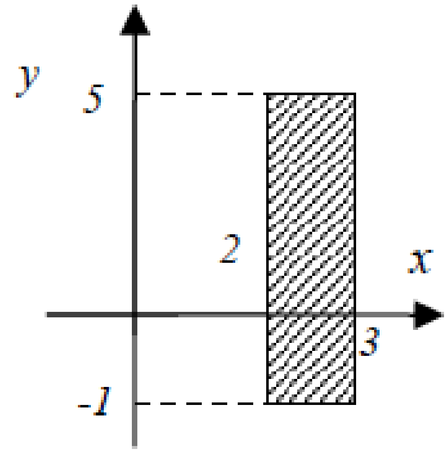
$$\iint_B f(x,y)dxdy = \int_0^a \int_y^{y+2a} f(x,y)dxdy$$

$$\iint_B f(x,y)dydx = \int_0^a \int_0^x f(x,y)dydx + \int_a^{2a} \int_0^a f(x,y)dydx + \int_{2a}^{3a} \int_{x-2a}^{a} f(x,y)dydx$$

olur

Örnek 8. B bölgesi; $x=2, x=3, y=-1, y=5$ ile sınırlanan bölge.

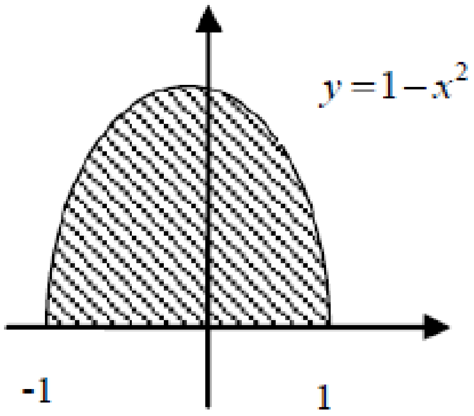
Çözüm: Taralı bölge integrasyon bölgesini göstermekte olup,



$$I=\int_{2}^{3}\int_{-1}^{5} f(x,y)\,dy\,dx$$

$$I=\int_{-1}^{5}\int_{2}^{3} f(x,y)\,dx\,dy$$

Örnek 9. B bölgesi; $y=0, y=1-x^2$ ile sınırlanan bölge



Çözüm: Şekildeki gibi verilen bir bölge için,

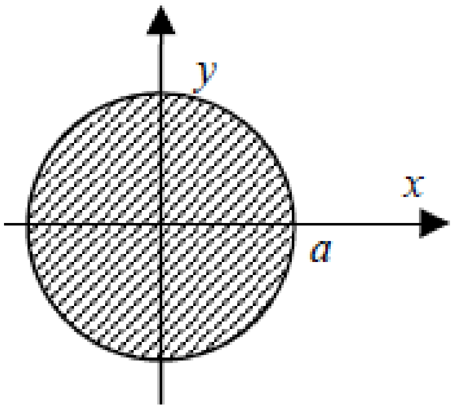
$$I=\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2} f(x,y)\,dydx$$

$$I=\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dxdy$$

integralleri tanımlanan bölgeyi anlatmaktadır.

Örnek 10. B bölgesi; $x^2 + y^2 \leq a^2$ ile sınırlanan bölge.

Çözüm: B bölgesi aşağıdaki taralı bölge olup,



$$I = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dydx$$

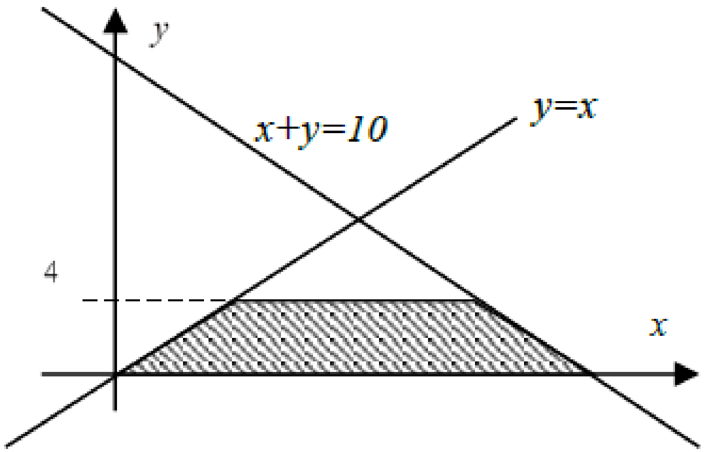
$$I = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dxdy$$

biçiminde verilen integraller bölgeyi anlatmaktadırlar.

Aşağıdaki Örnek 11-Örnek 15 deki iki katlı integrallerin belirttikleri integral bölgelerini sınırlayan eğrilerin denklemlerini yazıp, integrasyon bölgelerini gösteriniz.

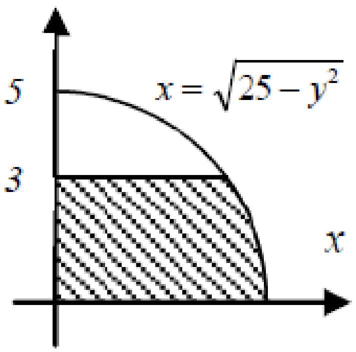
Örnek 11. $\int_0^4 \int_y^{10-y} f(x,y)dxdy$

Çözüm: Verilen integralin integrasyon bölgesi; y=0 , y=4 doğruları arasındaki ve x=y , x=10-y doğruları tarafından sınırlanan aşağıdaki taralı bölgedir.

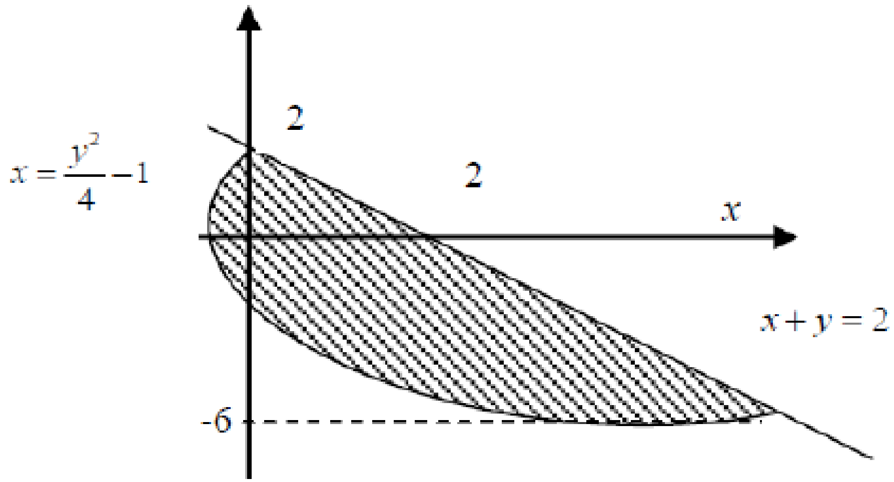


Örnek 12. $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dxdy$

Çözüm: İntegralin tanımlamış olduğu integrasyon bölgesi $y=0$ ve $y=3$ doğruları arasında kalan $x=0$ doğrusu ile $x=\sqrt{25-y^2}$ eğrisinin sınırladığı aşağıdaki taralı bölgedir.



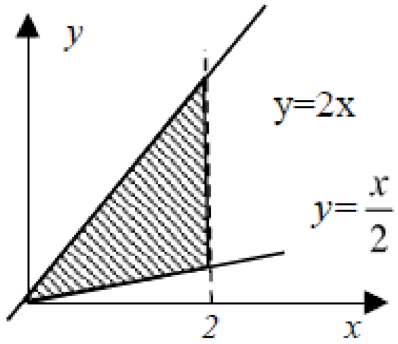
Örnek 13. $\int\limits_{-6}^{2}\int\limits_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)dxdy$



Çözüm: Yukarıda şekilde de görüldüğü gibi; integrasyon bölgesi $y=2$ ve $y=-6$ doğruları arasındaki; $x=\frac{y^2}{4}-1$ parabolü ile $x=2-y$ doğrusu arasındaki bölgedir.

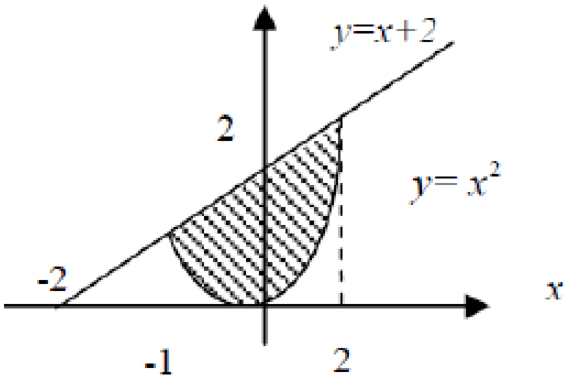
Örnek 14. $I=\int_0^2\int_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x,y)dydx$

Çözüm: $x=0$ ve $x=2$ doğruları arasındaki; $y=\dfrac{x}{2}$ ve $y=2x$ eğrileri arasındaki aşağıdaki taralı bölge integralin tanımlandığı bölgedir.



Örnek 15. $I = \int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2} f(x,y)\,dy\,dx$

Çözüm: Sırasıyla $x=-1$, $x=2$ doğruları ve $y=x^2$, $y=x+2$ eğrileri arasındaki aşağıdaki taralı

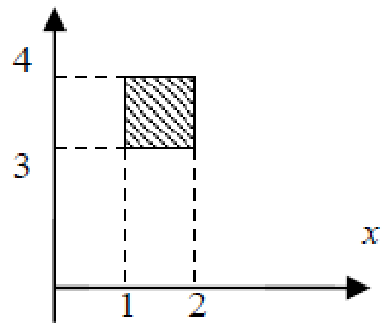


alan integralin tarif etmiş olduğu bölgedir.

Aşağıdaki Örnek 16-Örnek 21. deki iki katlı integrallerin integrasyon bölgelerini çizip, integrallerin değerlerini integrasyon sıralarını değiştirerek tekrar yazınız.

Örnek 16. $\int_1^2\int_3^4 f(x,y)dydx$

Çözüm: Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi *x=1, x=2 ve y=3,y=4* doğruları ile sınırlanan bölge için integrasyon sırası değiştirildiğinde,

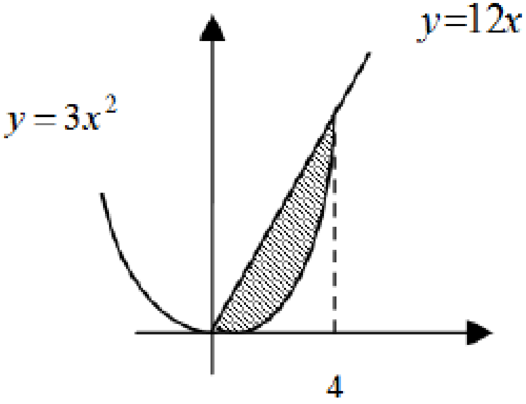


$$I=\int_3^4\int_1^2 f(x,y)dxdy$$

olur.

Örnek 17. $\int_0^4 \int_{3x^2}^{12x} f(x,y)dydx$

Çözüm: integrasyon bölgesi $x=0, x=4$ doğruları ile $y=3x^2$ parabolü ve $y=12x$ doğrusu arasındaki aşağıdaki taralı bölgedir.



integrasyon sırası değiştirildiğinde

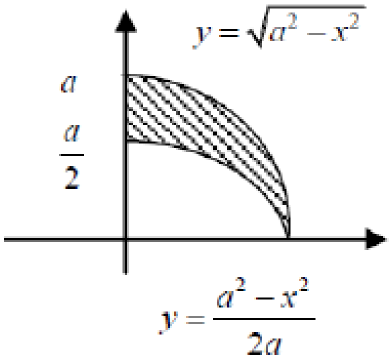
$$I = \int_0^4 \int_{3x^2}^{12x} f(x,y)dydx = \int_0^{48} \int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x,y)dxdy$$

elde edilir.

Örnek 18. $\displaystyle\int_0^a \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$

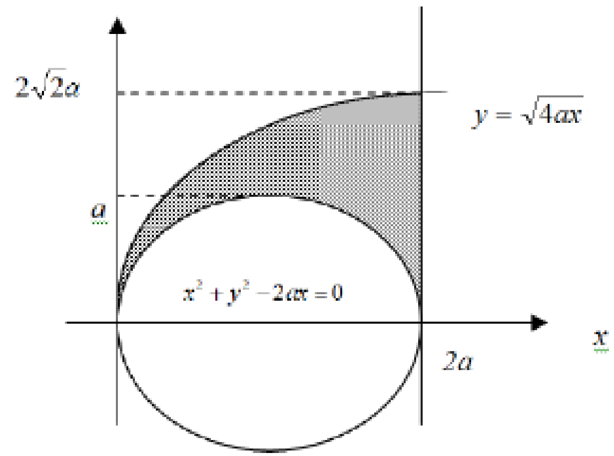
Çözüm: $\displaystyle\int_0^a \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^{\frac{a}{2}} \int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{\frac{a}{2}}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$

verilen integralin integrasyon bölgesi aşağıdaki taralı bölge olduğundan, yukarıdaki eşitlik elde dilir.



Örnek 19. $\int_0^{2a}\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y)\,dy\,dx$

Çözüm: İntegralin tanımlamış olduğu bölge aşağıdaki taralı bölgedir.



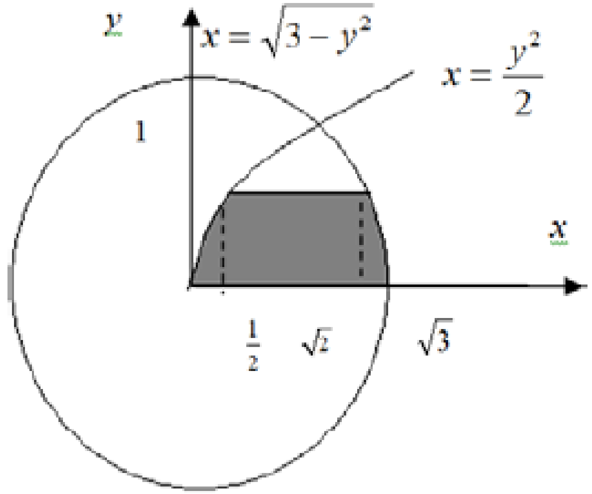
şekildeki integrasyon bölgesine göre integrasyon sırası değiştirildiğinde;

$$\int_0^{2a}\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y)\,dy\,dx=\int_0^{a}\int_{\frac{y^2}{4a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy+\int_0^{a}\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\,dx\,dy+\int_a^{2\sqrt{2}a}\int_{\frac{y^2}{4a}}^{2a} f(x,y)\,dx\,dy$$

olur.

Örnek 20.

$$\int_0^1 \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy = ?$$

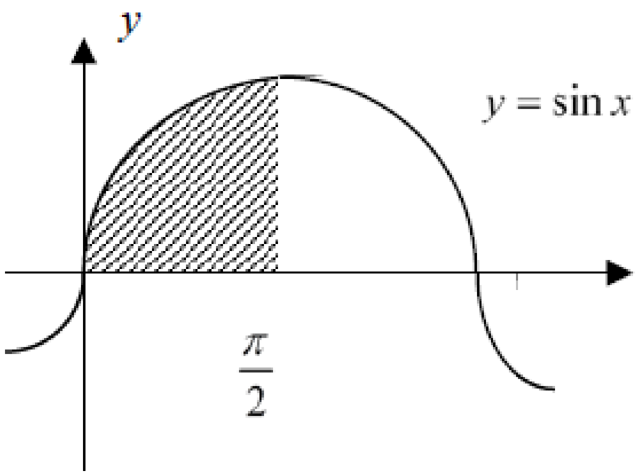


Çözüm: İntegralin tanımlamış olduğu bölge yukarıdaki taralı bölgedir . Buna göre,

$$\int_0^1 \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$$ elde edilir.

Örnek 21. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin x} f(x,y)\,dydx$

Çözüm: İntegralin tanımlamış olduğu bölge aşağıdaki taralı bölgedir . Buna göre,



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin x} f(x,y)\,dydx = \int_0^{1}\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x,y)\,dxdy \quad \text{dir.}$$

Kaynaklar:

1. A. H. Berksoy, O. Özkan, Mühendisler İçin Çözümlü Kalkülüs, S.Ü. Basımevi, 2010
2. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus II**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2010.
3. J. Stewart, Kalkülüs Kavram ve Kapsam (Diferansiyel ve İntegral Hesap), TÜBA, 2010.