MATEMATIK 1

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2020

Belirli İntegral ile Alan Hesabı

$y = f(x)$ fonksiyonu, $x = a$, $x = b$ doğruları ve x ekseni ile sınırlanan kapalı bölgenin alanı

$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

integrali ile hesaplanır. Mutlak değerin tanımından alan

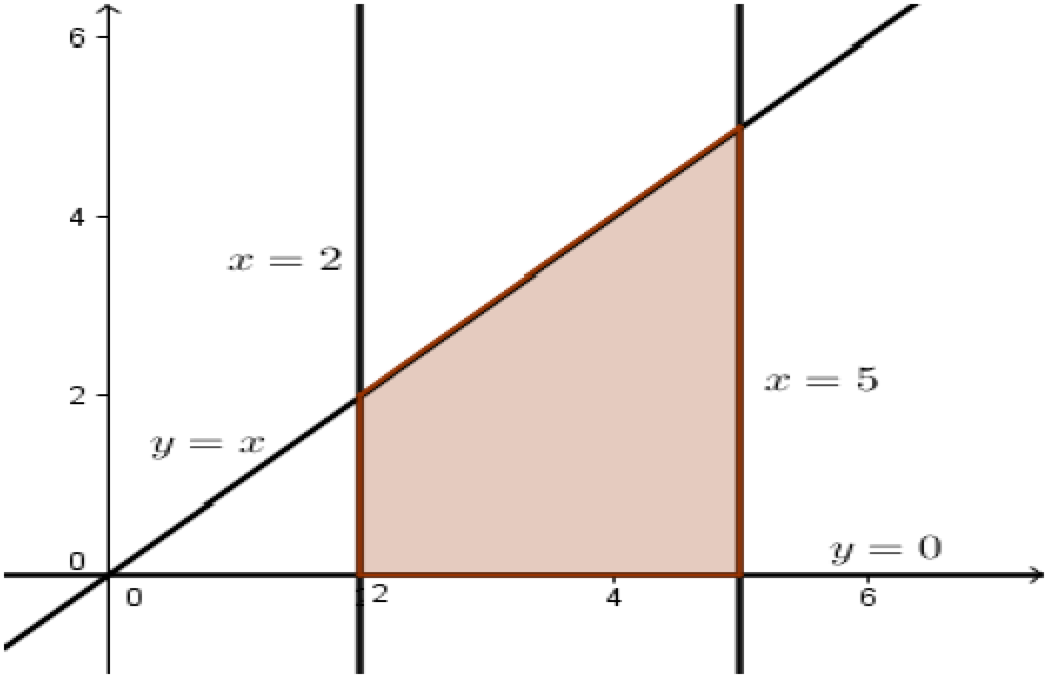
$$f(x) \geq 0 \text{ ise } A = \int_a^b f(x)dx$$

ve

$$f(x) \leq 0 \text{ ise } A = -\int_a^b f(x)dx$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 9.2.1.1. $y = x$ fonksiyonu, $x = 2$, $x = 5$ doğruları ve x ekseni ile sınırlanan kapalı bölgenin alanını bulunuz.

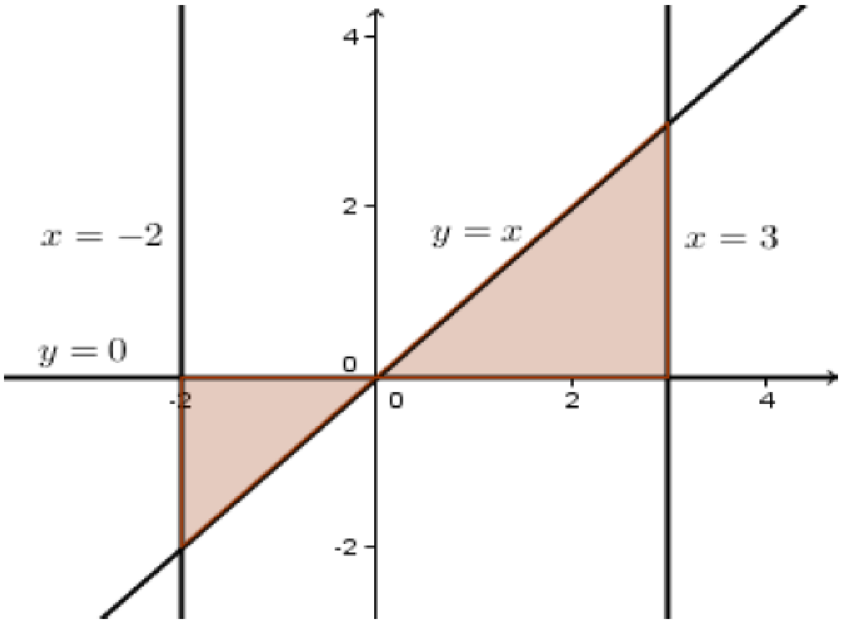


Şekil 9.2.1.1.

$2 \leq x \leq 5$ için $|x| = x$ olduğundan

$$\int_2^5 |x|dx = \int_2^5 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_2^5 = \left(\frac{25}{2} - 2\right) = \frac{21}{2}br^2$$

Örnek 9.2.1.2. $y = x$ fonksiyonu, $x = -2$, $x = 3$ doğruları ve x ekseni ile sınırlanan kapalı bölgenin alanını bulunuz.



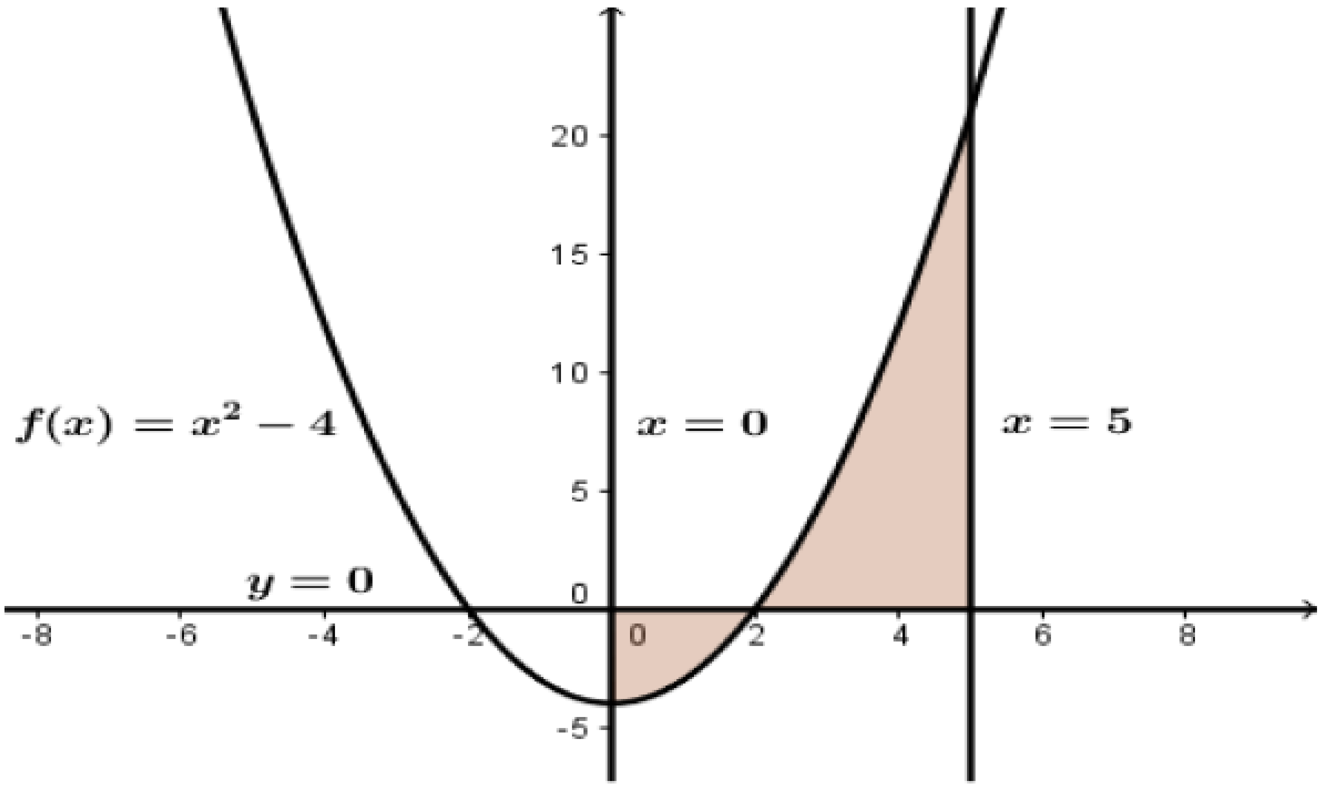
Şekil 9.2.1.2.

$-2 \leq x < 0$ için $|x| = -x$ ve $0 \leq x \leq 3$ için $|x| = x$ olduğundan

$$\int_{-2}^{3} |x| dx = \int_{-2}^{0} (-x) dx + \int_{0}^{3} x dx$$

$$= -\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{3} = -(0-2) + \left(\frac{9}{2} - 0\right) = \frac{13}{2} br^2$$ dir.

Örnek 9.2.1.3. $y = x^2 - 4$ fonksiyonu ve $x = 0$, $x = 5$ doğruları ve x ekseni ile sınırlanan kapalı bölgenin alanını bulunuz.



Şekil 9.2.1.3.

$0 \leq x \leq 2$ için $(x^2 - 4) \leq 0$ ve $2 \leq x \leq 5$ için $(x^2 - 4) \geq 0$ olduğundan

$$\int_0^5 |x^2 - 4\,|dx = \int_0^2 -(x^2 - 4\,)dx + \int_2^5 (x^2 - 4\,)dx$$

$$= -\int_0^2 (x^2 - 4\,)dx + \int_2^5 (x^2 - 4\,)dx$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)\Big|_2^5$$

$$= -\left(\left(\frac{8}{3} - 8\right) - (0)\right) + \left(\left(\frac{125}{3} - 20\right) - \left(\frac{8}{3} - 8\right)\right)$$

$$= \frac{16}{3} + \frac{65}{3} + \frac{16}{3} = \frac{97}{3}\,br^2$$

dir.

1. **Aşağıda denklemleri verilen eğriler ile Ox–ekseni tarafında sınırlanan düzlemsel bölgelerin alanını bulunuz.**

a) $y = 2 + x - x^2$ **b)** $y = 4x - x^2$ **c)** $y = x(x-1)(x-2)$

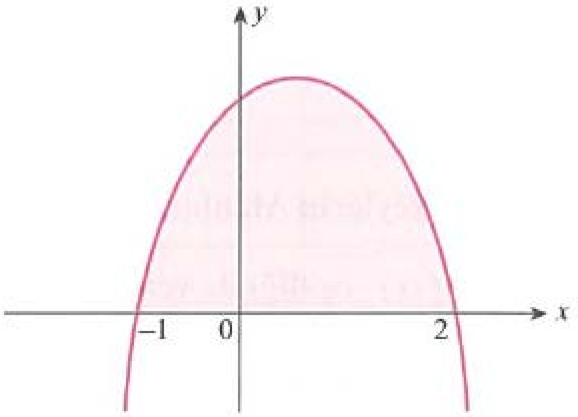
Çözüm

a) $y = 2 + x - x^2$

$y = 0 \Leftrightarrow x = -1$ veya $x = 2$

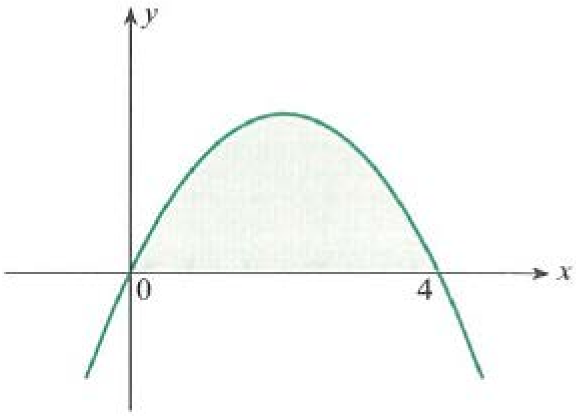
$$A = \int_{-1}^{2} |f(x)|dx = \int_{-1}^{2} |2 + x - x^2|dx = \int_{-1}^{2} (2 + x - x^2)dx$$

$$= 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$



b) $y = 4x - x^2$

$$A = \int_0^4 |f(x)|\,dx = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx = 2x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = \frac{32}{3}$$



c) $y = x(x-1)(x-2)$

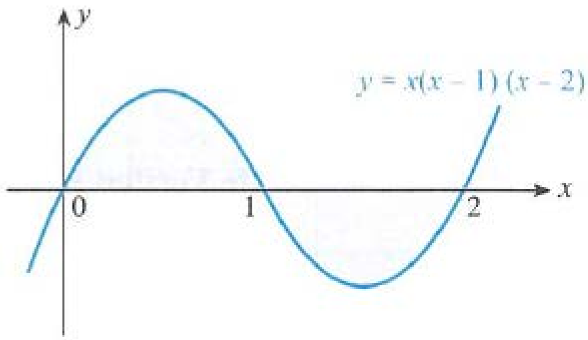
$y = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0,\; x_2 = 1,\; x_3 = 2$

$$A = \int_0^2 |x(x-1)(x-2)|\,dx$$

$$= \int_0^1 x(x-1)(x-2)\,dx + \int_1^2 -x(x-1)(x-2)\,dx$$

$$= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx$$

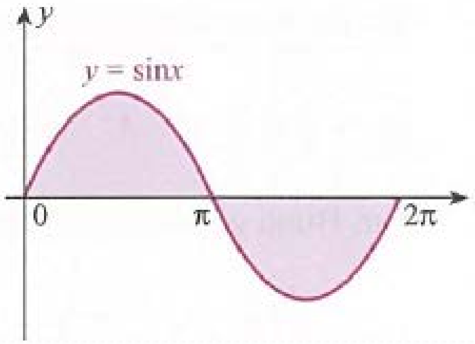
$$= \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right)\Big|_0^1 - \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}$$



2. **$y = \sin x$ eğrisi $x = 0$ ve $x = 2\pi$ doğruları ile x–ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.**

Çözüm

$$A = \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x\,dx = -\cos x\,\Big|_0^{\pi} + \cos x\,\Big|_{\pi}^{2\pi} = 4$$



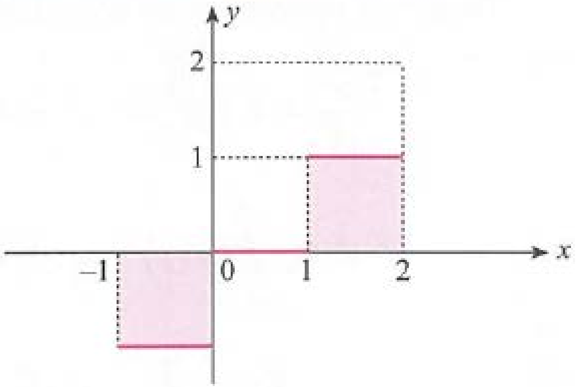
NOT: *Her iki alan eşit olduğundan biri bulunup 2 katı alınabilir.*

3. $y = [\![x]\!]$, $x = -1$, $x = 2$ ve x–ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanının hesaplayınız.

Çözüm

$$A = \int_{-1}^{2} |f(x)|\,dx = \int_{-1}^{2} |[\![x]\!]|\,dx = -\int_{-1}^{0} [\![x]\!]\,dx + \int_{0}^{1} [\![x]\!]\,dx + \int_{1}^{2} [\![x]\!]\,dx$$

$$= -\int_{-1}^{0} (-1)\,dx + \int_{0}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{2} dx = 1 + 1 = 2$$



4. **Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin alanlarını hesaplayınız.**

a) $y = \frac{x^2}{4}$, $y = \frac{x}{2} + 2$

b) $y^2 = 2x$, $x - y = 4$

c) $x = y^3 - 4y$, $x = 4 - y^2$

d) $y = x^3 - 12x$, $y = x^2$

e) $y = x^3$, $y = x^2$

f) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $y = x$

g) $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$, $x = 0$

h) $y = x^2$, $y = x - 1$, $y = \frac{1}{9}$, $y = 0$

ı) $y = \cos x$, $y = x + 1$, $y = 0$

i) $y^2 = 2x$, $x^2 = 2y$

j) $y = x^4 - 2x^2$, $y = 2x^2$

k) $y = |x|$, $y = x^2 - 2$

a) $y=\frac{x^2}{4}$, $y=\frac{x}{2}+2$

Çözüm

a) $y=\frac{x^2}{4}$, $y=\frac{x}{2}+2$

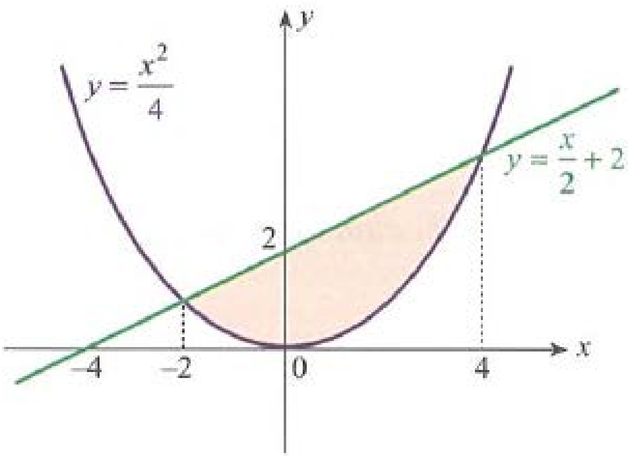
Eğri ile doğrunun kesim noktalarının apsisleri

$$\frac{x^2}{4}=\frac{x}{2}+2 \Rightarrow x^2-2x-8=0 \Rightarrow x_1=-2,\quad x_2=4$$

olur. Buna göre istenen alan

$$A=\int_{-2}^{4}\left(\frac{x}{2}+2-\frac{x^2}{4}\right)dx=\left(\frac{x^2}{4}+2x-\frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_{-2}^{4}=9$$

birimkare olur.



b) $y^2 = 2x, \; x - y = 4$

b) $y^2 = 2x, \; x - y = 4$

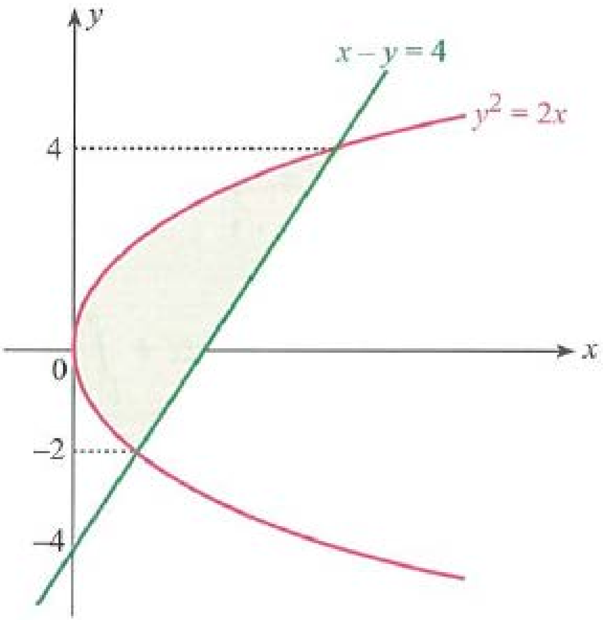
Doğruyla eğrinin kesim noktalarının ordinatları

$$\frac{y^2}{2} = 4 + y \;\Rightarrow\; y^2 - 2y - 8 = 0 \;\Rightarrow\; y = 4 \;\text{ ve }\; y = -2$$

$$A = \int_{-2}^{4} |u(y) - v(y)|\,dy = \int_{-2}^{4} \left(y + 4 - \frac{y^2}{2}\right) dy$$

$$= \left(\frac{y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{6}\right)\Bigg|_{-2}^{4} = 18$$

birimkare bulunur.



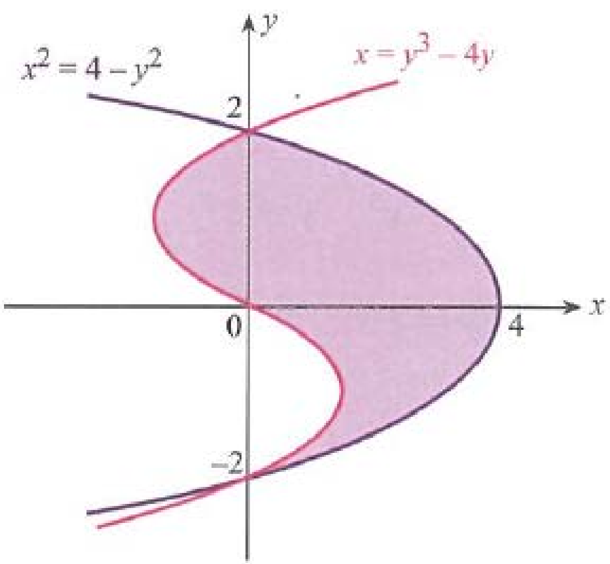
c) $x = y^3 - 4y\,,\quad x = 4 - y^2$

c) $x = y^3 - 4y, \quad x = 4 - y^2$

$$A = \int_{-2}^{2} [4 - y^2 - (y^3 - 4y)]\,dy = \int_{-2}^{2} (4 + 4y - y^2 - y^3)\,dy$$

$$= \left(4y + 2y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4\right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$$

birimkare olur.



d) $y = x^3 - 12x$, $y = x^2$

d) $y = x^3 - 12x, \quad y = x^2$

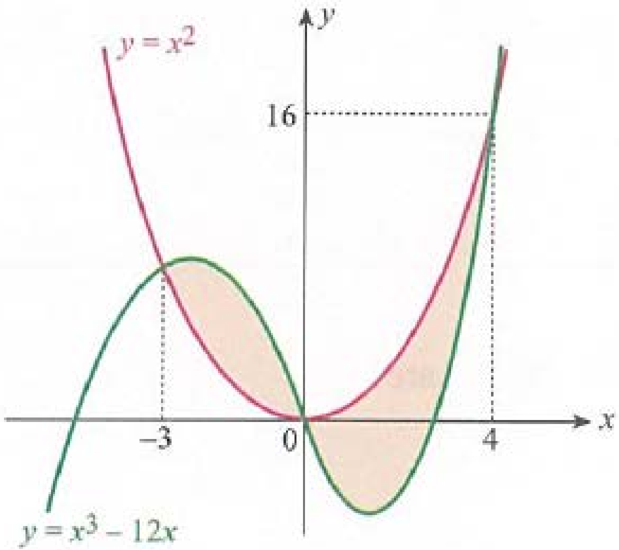
Eğrilerin kesim noktalarının apsisleri

$x^3 - 12x = x^2 \Rightarrow x^3 - x^2 - 12x = 0 \Rightarrow$

$x(x+3)(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 4$ olur.

$$A = \int_{-3}^{0} (x^3 - 12x - x^2)\,dx + \int_{0}^{4} [x^2 - (x^3 - 12x)]\,dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - 6x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{0} + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + 6x^2\right)\Bigg|_{0}^{4} = \frac{99}{4} + \frac{160}{3} = \frac{937}{12}$$

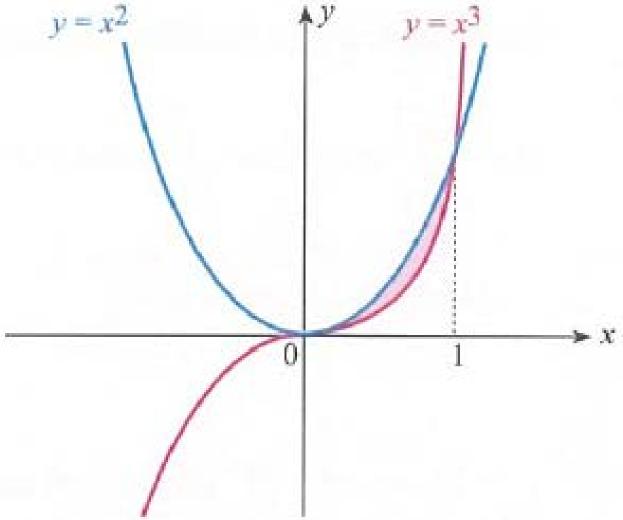


e) $y = x^3$, $y = x^2$

f) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $y = x$

e) $y = x^3, \quad y = x^2$

$$A = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx = \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{12}$$



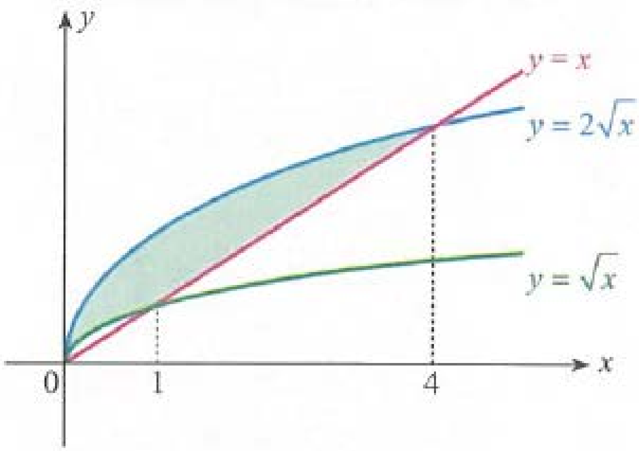
f) $y = \sqrt{x}, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad y = x$

$x = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; x^2 = x \;\Rightarrow\; x = 0$ ve $x = 1$

$x = 2\sqrt{x} \;\Rightarrow\; x^2 = 4x \;\Rightarrow\; x = 0$ ve $x = 4$

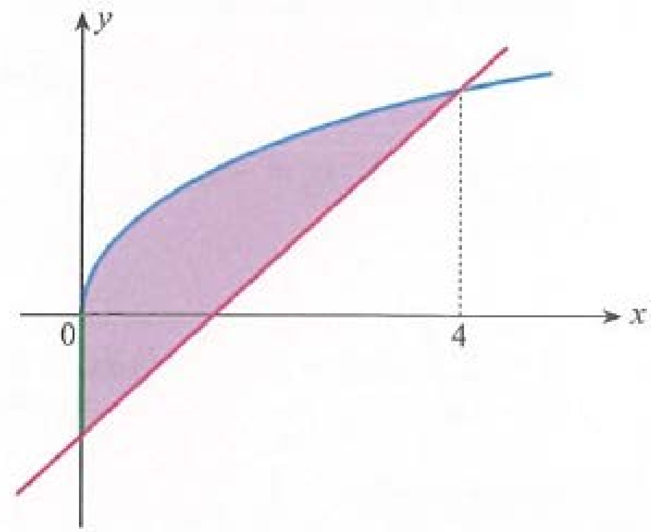
$$A = \int_0^1 (2\sqrt{x} - \sqrt{x})\,dx + \int_1^4 (2\sqrt{x} - x)\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1 + \left(\frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^4 = \frac{5}{2}$$



g) $y=\sqrt{x}\,,\ y=x-2\,,\ x=0$ **h)** $y=x^2\,,\ y=x-1\,,\ y=\frac{1}{9}\,,\ y=0$

g) $y=\sqrt{x},\quad y=x-2,\quad x=0$



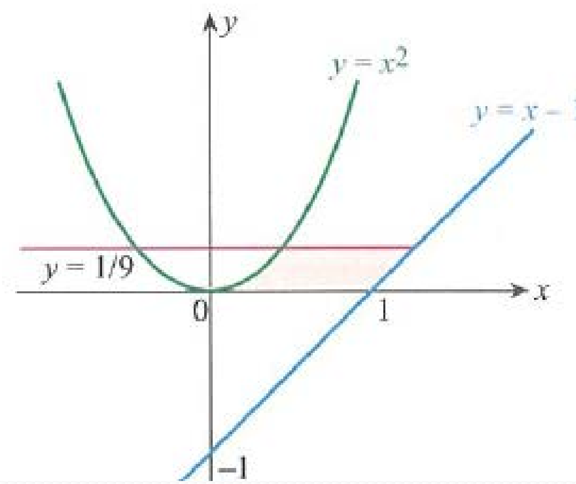
$y=\sqrt{x}$ eğrisiyle $y=x-2$ doğrusunun kesim noktasının apsisi

$\sqrt{x}=x-2 \ \Rightarrow \ x=4$ olur. Buna göre, mor bölgenin alanı

$$A=\int_0^4(\sqrt{x}-x+2)\,dx=\left(\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_0^4=\frac{16}{3}$$

birimkaredir.

h) $y=x^2,\ \ y=x-1,\ \ y=\frac{1}{9}$ ve $y=0$



Turuncu bölgenin alanı

$$A=\int_0^{1/9}\left(y+1-\sqrt{y}\right)dy=\frac{1}{2}y^2+y-\frac{2}{3}y^{3/2}\Big|_0^{1/9}=\frac{5}{54}$$

birimkaredir.

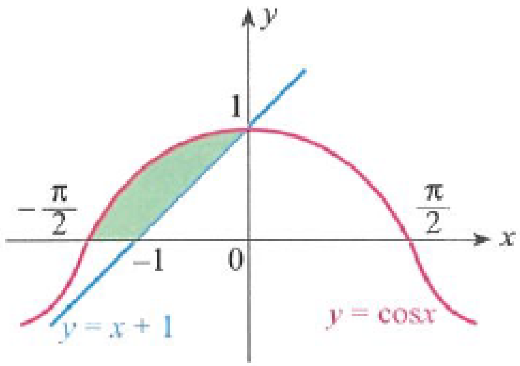
ı) $y = \cos x$, $y = x + 1$, $y = 0$ i) $y^2 = 2x$, $x^2 = 2y$

l) $y = \cos x,\ y = x + 1,\ y = 0$

Sözkonusu bölge yandaki şekilde yeşil renkte gösterilmiştir.

$$A = \int_{-\pi/2}^{-1} \cos x\,dx + \int_{-1}^{0} (\cos x - x - 1)\,dx = \sin x\,\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{-1} + \left(\sin x - \frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_{-1}^{0}$$

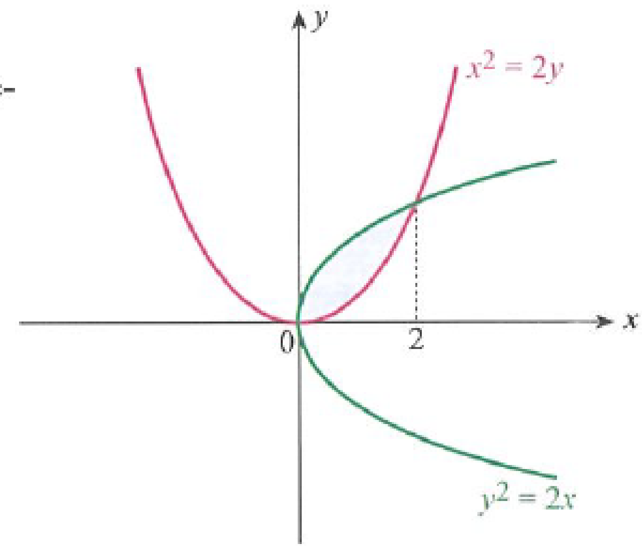
$$= -\sin 1 + 1 + \sin 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



i) $y^2 = 2x$ ve $x^2 = 2y$ parabolleri tarafından sınırlanan bölge yandaki şekilde mavi renkte gösterilmiştir.

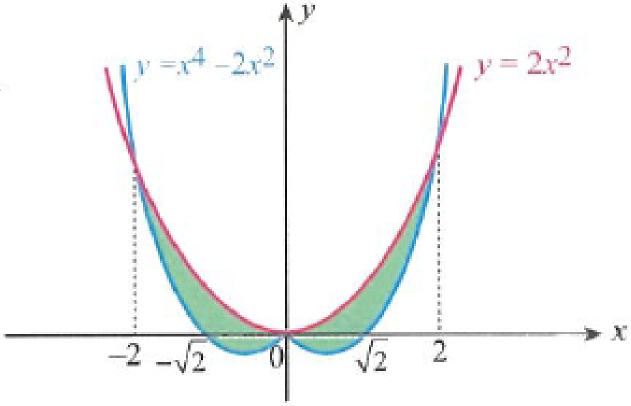
$$A = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{1}{2}x^2\right)dx = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - \frac{1}{6}x^3\right)\Big|_0^2$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot 2\sqrt{2} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$



j) $y = x^4 - 2x^2$, $y = 2x^2$

j) $y = x^4 - 2x^2$ ile $y = 2x^2$ eğrileri tarafından sınırlanan bölge yandaki şekilde yeşil renkte gösterilmiştir.



$$x^4 - 2x^2 = 2x^2 \Rightarrow x^2(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow$$

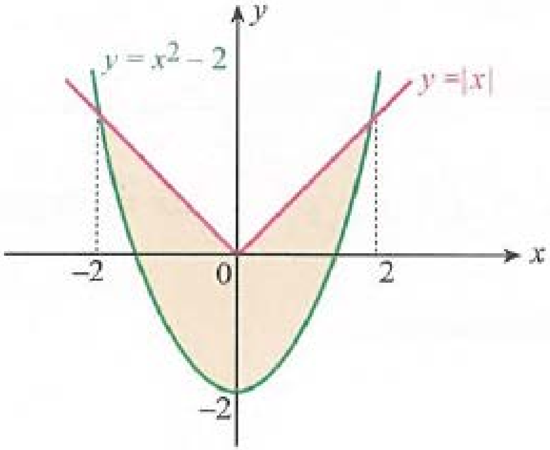
$$x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = -2,\ x_4 = 2$$

$$A = 2\int_0^2 (2x^2 - x^4 + 2x^2)\,dx = 2\int_0^2 (4x^2 - x^4)\,dx = 2\left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2 = \frac{128}{15}$$

birimkaredir.

k) $y = |x|,\ y = x^2 - 2$

k) $y = |x|$ ve $y = x^2 - 2$ eğrileri tarafından sınırlanan bölge turuncu renkte gösterilmiştir.



$$x = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$-x = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

Bölge simetrik olduğundan, alanı

$$A = 2\int_0^2 [|x| - (x^2 - 2)]\,dx = 2\int_0^2 (x - x^2 + 2)\,dx$$

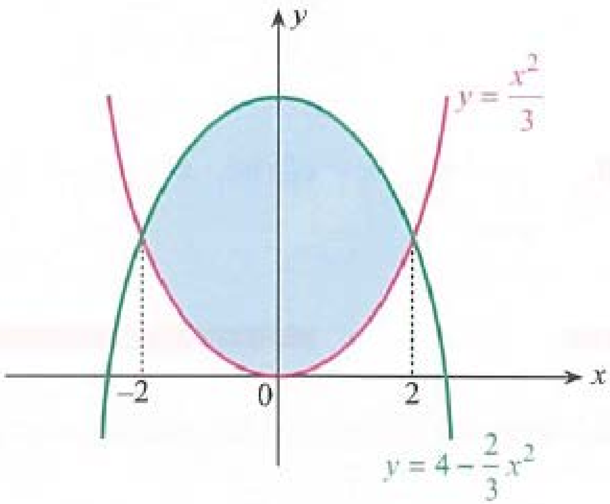
$$= 2\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 2x\right)\Big|_0^2 = \frac{20}{3}$$

birimkaredir.

5. $y = \frac{x^2}{3}$ ve $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$ **parabolleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.**

Çözüm

Sözkonusu bölge yandaki şekilde mavi renkte gösterilmiştir.



$$\frac{x^2}{3} = 4 - \frac{2}{3}x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$A = \int_{-2}^{2}\left(4 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{x^2}{3}\right)dx = 2\int_{0}^{2}(4 - x^2)\,dx = 2\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2$$

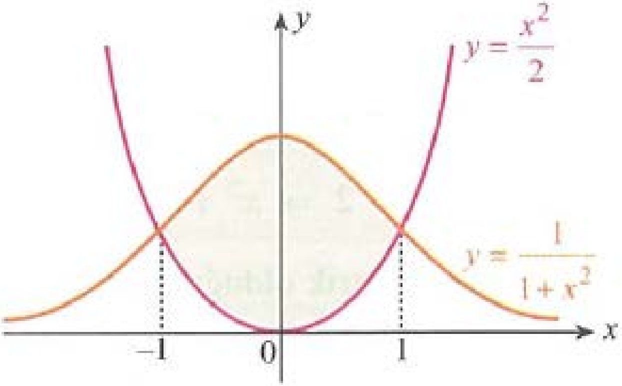
$$= 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}$$

birimkaredir.

6. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ eğrisi ile $y = \dfrac{x^2}{2}$ parabolü tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

Çözüm

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$



Yeşil bölgenin alanı

$$A = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\arctan x - \frac{x^3}{6} \right) \Bigg|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$$

birimkaredir.

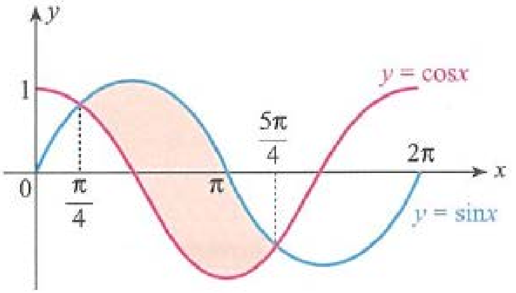
7. $y = \sin x$, $y = \cos x$ **eğrileri ile** $x = \frac{\pi}{4}$ **ve** $x = \frac{5\pi}{4}$ **doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.**

Çözüm

Turuncu bölgenin alanı

$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\,dx = -\cos x - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = 2\sqrt{2}$$

birimkare olur.



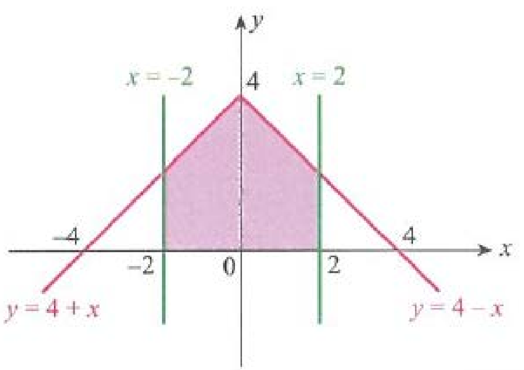
8. $y = 4 - |x|$ **eğrisi,** x**–ekseni ve** $x = -2$, $x = 2$ **doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.**

Çözüm

Sözkonusu bölge yandaki şekilde mor renkte gösterilmiştir.

$$A = 2\int_{0}^{2} (4 - x)\,dx = 2\left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{2} = 12$$

birimkaredir.



14. **Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin alanlarını bulunuz.**

a) $r = a\sin 3\varphi$ **(üç yapraklı gül)**

b) $r = a\cos 2\varphi$ **(dört yapraklı gül)**

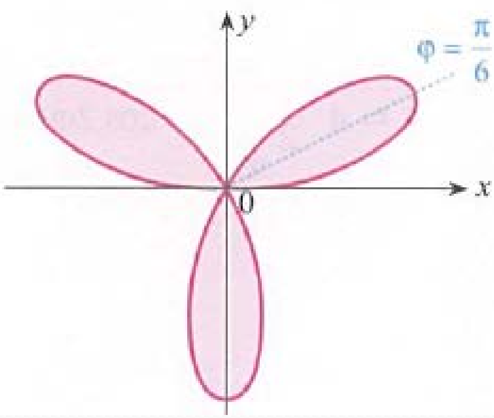
c) $r = 4 + 2\cos\varphi$ **(limacon)**

d) $r = a(1 - \sin\varphi)$ **(kardiyoid)**

e) $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ **(lemniskat)**

Çözüm

a) $r = a\sin 3\varphi$

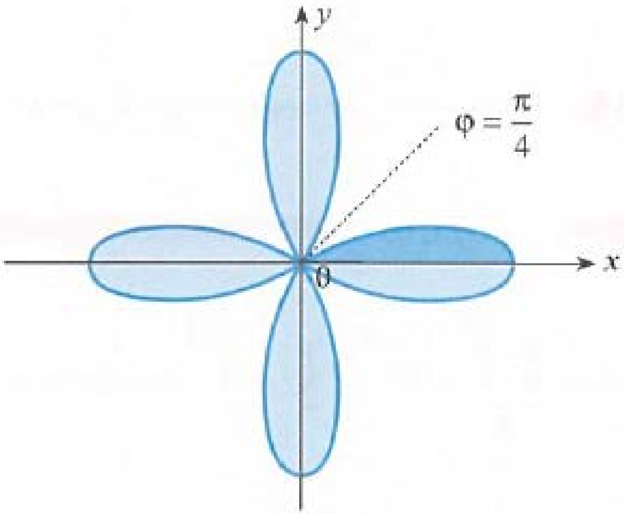


$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\varphi = 6\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/6} a^2\sin^2 3\varphi\,d\varphi = 3a^2\int_{0}^{\pi/6}\sin^2 3\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_{0}^{\pi/6}(1-\cos 6\varphi)\,d\varphi = \frac{3}{2}a^2\left(\varphi - \frac{\sin 6\varphi}{6}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{2}a^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = a^2\,\frac{\pi}{4}$$

b) $r = a\cos 2\varphi$ (dört yapraklı gül) **c)** $r = 4 + 2\cos\varphi$ (limacon)

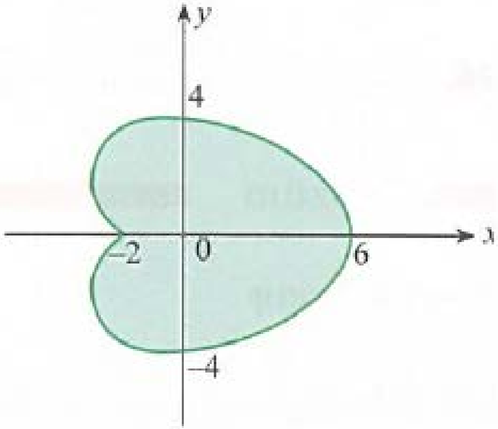
b) $r = a\cos 2\varphi$



$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\varphi = 8\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4} a^2\cos^2 2\varphi\,d\varphi = 2a^2\,2\int_{0}^{\pi/4}\frac{\cos 4\varphi + 1}{2}\,d\varphi$$

$$= 2a^2\left(\frac{\sin 4\varphi}{4} + \varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi a^2}{2}$$

c) $r = 4 + 2\cos\varphi$



$$A = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} r^2\,d\varphi = \int_{0}^{\pi}(4 + 2\cos\varphi)^2\,d\varphi$$

$$= \int_{0}^{\pi}\left(16 + 16\cos\varphi + 4\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi$$

$$= (18\varphi + 16\sin\varphi + \sin 2\varphi)\Big|_0^{\pi} = 18\pi$$

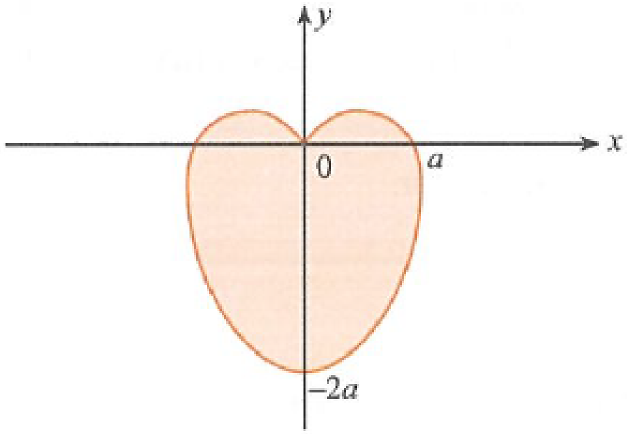
d) $r = a(1 - \sin\varphi)$ **(kardiyoid)** **e)** $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ **(lemniskat)**

d) $r = a(1 - \sin\varphi)$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\varphi = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2(1-\sin\varphi)^2\,d\varphi$$

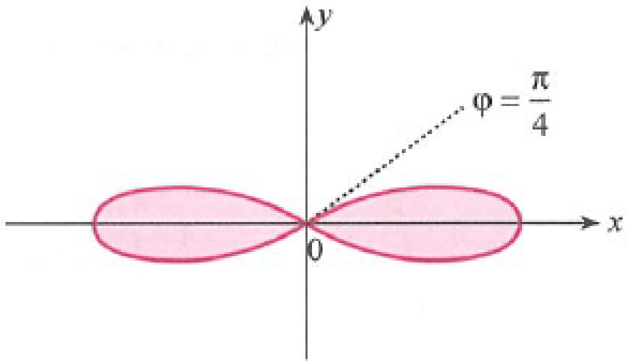
$$= a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1 - 2\sin\varphi + \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi$$

$$= a^2\left(\varphi + 2\cos\varphi + \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi a^2}{2}$$



e) $r^2 = a^2\cos 2\varphi$

$$A = 4\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4} a^2\cos 2\varphi\,d\varphi = 2a^2\,\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$



Kaynaklar:

1. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus I**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.
2. Prof. Dr. C. Çinar, Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, Prof. Dr. A. S. Kurbanlı, Prof. Dr. D. Şimşek, **Genel Matematik**, Dizgi Ofset, 2013.
3. Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, **Analiz III Diziler ve Seriler,** Dizgi Ofset, 2017.
4. M. Balcı, **Çözümlü Matematik Analiz Problemleri 1,** Sürat Üniversite yayınları, 2011.