MATEMATIK 1

Konya Teknik Üniversitesi

Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi

Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2020

$0.\infty$ Belirsizliği

$x \to a$ veya $x \to \pm\infty$ için $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının birinin limiti 0 ve diğerinin limiti $\pm\infty$ ise $f(x).g(x)$ fonksiyonunun limitinde $0.\infty$ belirsizliği ortaya çıkar. Bu durumda,

$$f(x).g(x) = \frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}} \quad \text{veya} \quad f(x).g(x) = \frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

şeklinde yazılarak hesaplanacak limit $\dfrac{0}{0}$ veya $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliklerinden birine dönüştürülür.

Örnek 8.4.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2.\tan\dfrac{3}{x^2}\right)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = +\infty$ ve $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\dfrac{3}{x^2}\right)=0$ olduğundan $0.\infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2.\tan\frac{3}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\tan\dfrac{3}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}}=3 \text{ dür.}$$

Örnek 8.4.3. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x.\ln x)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $0.\infty$ belirsizliği vardır. O halde,

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x.\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\right)=-1.0=0 \text{ dır.}$$

Örnek 8.4.2. $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{-2x}.x^3)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $0.\infty$ belirsizliği vardır. O halde,

$$\lim_{x\to\infty}(e^{-2x}.x^3)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{2x}}$$

olup, $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. Bu durumda L'Hospital kuralı belirsizlik ortadan kaldırılıncaya kadar tekrarlanır.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{2e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{4e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2e^{2x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{4e^{2x}}=0 \text{ dır.}$$

Örnek 8.4.3. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x.\ln x)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $0.\infty$ belirsizliği vardır. O halde,

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x.\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\right)=-1.0=0 \text{ dır.}$$

Örnek 8.4.4. $\lim_{x\to 0}(x^3.\ln x)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $0.\infty$ belirsizliği vardır. O halde,

$$\lim_{x\to 0}(x^3.\ln x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-3x^{-4}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{-3x^{-3}}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^3}{3}=0$$

dır.

1^∞ , 0^0 ve ∞^0 Belirsizlikleri

x değişkeni sonlu veya sonsuz bir değere yaklaşırken $y=[f(x)]^{g(x)}$ fonksiyonu 1^∞, 0^0 veya ∞^0 belirsiz hallerinden birini alıyorsa fonksiyonun her iki tarafının logaritması alınır yani,

$$\ln y = g(x).\ln f(x)$$

yazılırsa daha önce incelenen $0.\infty$ haline dönüşür. Burada limit alınırsa,

$$\lim_{x\to a}(\ln y) = L$$

elde edilir. Logaritma fonksiyonu sürekli olduğundan istenen limit

$$\ln(\lim_{x\to a} y) = L \quad \text{veya} \quad \lim_{x\to a} y = e^L$$

şeklini alır.

Örnek 8.5.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. 1^∞ belirsizliği vardır. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ise $\ln y = x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ dir.

Her iki tarafın limiti alınırsa,

$$\lim_{x\to\infty}(\ln y)=\lim_{x\to\infty}\left(x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}==\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3}{-x^3-x^2}=1$$

dir. Dolayısıyla, $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln y)=\ln(\lim\limits_{x\to\infty}y)=1$ olup

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^1=e$$

dir.

Örnek 8.5.2. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\tan x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ ve $\lim\limits_{x\to 0}(\tan x) = 0$ olduğundan 0^0 belirsizliği vardır. $y = x^{\tan x}$ fonksiyonundan $\ln y = \tan x . \ln x$ elde edilir. Her iki tarafın limiti alınırsa,

$$\lim_{x\to 0}(\ln y) = \lim_{x\to 0}(\tan x \ln x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{\tan x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{\tan x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$$

$$= -\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right).\lim_{x\to 0}(\sin x)\right] = -(1.0) = 0$$

dır. Dolayısıyla, $\lim\limits_{x\to 0}(\ln y) = \ln(\lim\limits_{x\to 0} y) = 0$ olup

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} x^{\sin x} = e^0 = 1$$

dır.

Örnek 8.5.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3+1\right)^{\frac{1}{x}}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. ∞^0 belirsizliği vardır. $y=\left(x^3+1\right)^{\frac{1}{x}}$ ise $\ln y=\frac{1}{x}\ln(x^3+1)$

dir. Her iki tarafın limiti alınırsa,

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\ln(x^3+1)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^3+1)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^3+1}}{1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^3+1}=0$$

dır. Dolayısıyla, $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln y)=\ln(\lim\limits_{x\to\infty}y)=0$ olup

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to 0}(x^3+1)^{\frac{1}{x}}=e^0=1$$

dir.

İNTEGRAL

1. Belirsiz İntegral

Belirsiz integral, türevi verilen fonksiyonun bulunması işlemi olarak tanımlanır.

Örnek 9.1.1. $y' = e^x$ ise y nedir?

$y = e^x$, $y = e^x + 2$, $y = e^x + 3$, … dır. Buradan da açıkça görüldüğü gibi türevi e^x fonksiyonu olan sonsuz tane fonksiyon vardır. Bütün bu fonksiyonları, $y = e^x + c$, $c \in \mathbb{R}$ biçiminde temsil edebiliriz.

Örnek 9.1.2. $y' = x^2$ ise y nedir?

Benzer şekilde, $y = \frac{x^3}{3} + \sqrt{2}$, $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}$, $y = \frac{x^3}{3} - 7$, … gibi fonksiyonlar yazılabilir. Bu fonksiyonları $y = \frac{x^3}{3} + c,\ c \in \mathbb{R}$ biçiminde temsil edebiliriz.

Uyarı 9.1.1. Buradaki c sabitinin yerine reel sayı olduğunu belirtmek şartıyla başka sembollerde kullanılabilir. Ancak genelde İngilizce "constant" yani sabit kelimesinin ilk harfi olduğundan c harfi kullanılır.

Türevi verilen fonksiyonu bulmak, her zaman yukardaki gibi kolay olmaz. Bunun için integral kavramına ihtiyaç vardır.

Tanım 9.1.1. f fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıktaki x değerleri için $F'(x) = f(x)$ eşitliğini sağlayan bir $F(x)$ fonksiyonu varsa, bu F fonksiyonuna f fonksiyonunun anti türevi denir.

Tanım 9.1.2. f fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde türevli olsun. f fonksiyonun bütün anti türevlerinin sınıfına f fonksiyonunun belirsiz integrali denir ve belirsiz integral

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

şeklinde gösterilir. Yukardaki $F(x)$ fonksiyonunu hesaplamak için bazı formüller vardır. Bu formüller genelde integralin özellikleri olarak verilir.

Belirsiz İntegralin Özellikleri:

1. $\int 1.dx = x + c$
2. $\int t.dx = tx + c, t \in \mathbb{R}$
3. $\int 0.dx = c$
4. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$
5. $\int e^x dx = e^x + c$
6. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx, a \in \mathbb{R}$
7. $\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{dx}{x} = ln\,|x| + c$
8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + c,\ a \neq 1,\ a > 0$
9. $\int cos(x)dx = sin(x) + c$
10. $\int cos(bx)dx = \frac{sin(bx)}{b} + c, b \in \mathbb{R} - \{0\}$

11. $\int sin(x)\,dx = -cos(x) + c$

12. $\int sin(bx)dx = \frac{-cos(bx)}{b} + c\,, b \in \mathbb{R} - \{0\}$

13. $\int \frac{1}{cos^2(x)}dx = \int sec(x)dx = tan(x) + c$

14. $\int \frac{1}{sin^2(x)}dx = \int csc(x)dx = -\,cot(x) + c$

15. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsin(x) + c = -\,arccos(x) + c$

16. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c = -\,arccos\left(\frac{x}{a}\right) + c$

17. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctan(x) + c$

18. $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c\,, a \in \mathbb{R} - \{0\}$

19. $\int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + c$

20. $\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + c, a \in \mathbb{R} - \{0\}$

21. $\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2} ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$

22. $\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c, a \in \mathbb{R} - \{0\}$

23. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c$

24. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + c$

25. $\int \frac{1}{cos(x)}\,dx = \ln\left|\frac{1}{cos(x)} + \tan(x)\right| + c$

26. $\int \frac{1}{sin(x)}\,dx = ln\left|\frac{1}{sin(x)} - cot(x)\right| + c$

27. $\int tan(x)\,dx = -ln\,|cos(x)| + c$

28. $\int cot(x)\,dx = ln\,|sin(x)| + c$

29. $\int ln(x)\,dx = xln|x| - x + c$

30. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Şimdi yukardaki özellikler için örnekler verelim:

Örnek 9.1.3.

1. $\int 3\,dx = 3x + \mathrm{c}$

2. $\int \sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}x + \mathrm{c}$

3. $\int \mathrm{e}^{\pi}\,dx = \mathrm{e}^{\pi}x + c$

4. $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + \mathrm{c}$

5. $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$

6. $\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$

7. $\int x^{-5}\,dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + c = \frac{x^{-4}}{-4} + c$

8. $\int x^{\frac{-3}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{-3}{2}+1}}{\frac{-3}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{-1}{2}}}{\frac{-1}{2}} + c$

9. $\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c$

10. $\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + c$

11. $\int e^{\sqrt{2}x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}x} + c$

12. $\int e^{\frac{x}{2}}\,dx = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + c$

13. $\int e^{-x}\,dx = \frac{1}{-1}e^{-x} = -e^{-x} + c$

14. $\int e^{-3x}\,dx = \frac{1}{-3}e^{-3x} + c = -\frac{1}{3}e^{-3x} + c$

15. $\int e^{-\sqrt{5}x}\,dx = \frac{1}{-\sqrt{5}}e^{-\sqrt{5}x} + c = -\frac{1}{\sqrt{5}}e^{-\sqrt{5}x} + c$

16. $\int e^{-\frac{3}{2}x}\,dx = \frac{1}{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}x} + c = -\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}x} + c$

17. $\int 3e^{4x}\,dx = 3.\frac{1}{4}e^{4x} + c = \frac{3}{4}e^{4x} + c$

18. $\int \frac{dx}{3x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x} + c = \frac{1}{3}ln\,|x| + c$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{2}x}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{x} + c = \frac{1}{\sqrt{2}}ln\,|x| + c$

20. $\int \frac{dx}{e^3x}dx = \frac{1}{e^3}\int \frac{dx}{x} + c = \frac{1}{e^3}ln\,|x| + c$

21. $\int \frac{dx}{x^{-3}}dx = \int x^3\,dx + c = \frac{x^4}{4} + c$

22. $\int x^{-1}\,dx = \int \frac{dx}{x} = ln\,|x| + c$

23. $\int 3^x\,dx = \frac{1}{ln3}3^x + c$

24. $\int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{1}{ln\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^x + c$

25. $\int e^x\,dx = \frac{1}{lne}e^x + c = \frac{1}{1}e^x + c$

26. $\int (\sqrt{3})^x\,dx = \frac{1}{ln(\sqrt{3})}(\sqrt{3})^x + c$

27. $\int \pi^x\,dx = \frac{1}{ln(\pi)}\pi^x + c$

28. $\int (ln3)^x\,dx = \frac{1}{ln(ln(3))}(ln3)^x + c$

29. $\int sin(3x)\,dx = \frac{-1}{3}cos(3x) + c$

30. $\int cos(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi}sin(\pi x) + c$

31. $\int cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{\frac{1}{2}}sin\left(\frac{x}{2}\right) + c$

32. $\int sin(ex)\,dx = \frac{-1}{e}cos(ex) + c$

33. $\int sin(\sqrt{2}x)\,dx = \frac{-1}{\sqrt{2}}cos(\sqrt{2}x) + c$

34. $\int \frac{1}{9+x^2}dx = \int \frac{1}{3^2+x^2}dx = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c$

35. $\int \frac{1}{\frac{1}{4}+x^2}dx = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+x^2}dx = 2\,arctan(2x) + c$

$$36.\ \int \frac{1}{2+x^2}dx = \int \frac{1}{(\sqrt{2})^2+x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

$$37. \int \frac{1}{\sqrt{3}+x^2}dx = \int \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}+x^2}dx = \int \frac{1}{\left(3^{\frac{1}{4}}\right)^2+x^2}dx = = 3^{\frac{-1}{4}}arctan\frac{x}{3^{\frac{1}{4}}} + c$$

$$38.\ \int \frac{1}{3^2-x^2}dx = \frac{1}{2.3}ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right| + c$$

$$39.\ \int \frac{1}{25-x^2}dx = \int \frac{1}{5^2-x^2}dx = \frac{1}{2.5}\ln\left|\frac{x+5}{x-5}\right| + c$$

$$40.\ \int \frac{1}{\sqrt{2}-x^2}dx = \int \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}-x^2}dx = \int \frac{1}{\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^2-x^2}dx = \frac{1}{2.2^{\frac{1}{4}}}\ln\left|\frac{x+2^{\frac{1}{4}}}{x-2^{\frac{1}{4}}}\right| + c$$

$$41.\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2-3^2}}dx = ln\left|x + \sqrt{x^2 - 3^2}\right| + c$$

$$42.\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2-64}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-8^2}}dx = ln\left|x + \sqrt{x^2 - 8^2}\right| + c$$

43. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-(\sqrt{2})^2}} dx = ln\left|x + \sqrt{x^2 - (\sqrt{2})^2}\right| + c$

44. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3^2}} dx = ln|x + \sqrt{x^2 + 3^2}| + c$

45. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+25}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+5^2}} dx = ln|x + \sqrt{x^2 + 5^2}| + c$

46. $\int (x + 3)dx = \int xdx + \int 3dx = \frac{x^2}{2} + c_1 + 3x + c_2 = \frac{x^2}{2} + 3x + c_1 + c_2 = \frac{x^2}{2} + 3x + c$

47. $\int \left(x^2 + \frac{1}{x} + cos(x)\right) dx = \int x^2 dx + \int \frac{1}{x} dx + \int cos(x)\, dx = \frac{x^3}{3} + ln|x| + sin(x) + c$

48. $\int \left(\frac{1}{cos^2(x)} + e^{3x} + cot(x)\right) dx = tanx + \frac{1}{3} e^x + ln\,|sin(x)| + c$

49. $\int \left(\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1+x^2} - 3^x\right) dx = \frac{1}{2} ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - arctan(x) - \frac{1}{ln3} 3^x + c$

50. $\int x(x + 2)dx = \int x^2 dx + \int 2xdx = \frac{x^3}{3} + 2.\frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{3} + x^2 + c$

Uyarı 9.1.2. $\int e^{x^2}dx$, $\int e^{-x^2}dx$, $\int sin(x^2)dx$, $\int \sqrt{sin(x)}dx$,… gibi hesaplanamayan pek çok integral vardır.

Bazı integralleri formüllere dayandırarak hesaplayabiliriz. Bunun için en temel metot değişken değiştirme metodudur.

Değişken Değiştirme Metodu

$\int f(x)dx$ integrali verilsin. Bu integralde $x = u(t)$ değişken değiştirmesi yapılırsa $\frac{dx}{dt} = u'(t)$ ya da $dx = u'(t)dt$ olmak üzere

$$\int f(x)dx = \int f(u(t))u'(t)dt$$

elde edilir. Son eşitlikte $t = u^{-1}(x)$ dönüşümü ile istenilen sonuç elde edilir.

Örnek 9.1.1.1. $\int (2x+1)^3\, dx$ integralini hesaplayınız.

Bu integrali doğrudan veren bir formül yoktur. Ancak değişken değiştirerek hesaplayabiliriz.

$2x+1=u$ veya $x=\frac{u-1}{2}$ olsun. Bu durumda $dx=\frac{du}{2}$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int (2x+1)^3\, dx = \int u^3 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^3 du = \frac{u^4}{8} + c = \frac{(2x+1)^4}{8} + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.1.2. $\int \sqrt{x+5}\,dx$ integralini hesaplayınız.

$x+5=u$ veya $x=u-5$ olsun. Bu durumda $dx=du$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int \sqrt{x+5}\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(x+5)^{\frac{3}{2}} + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.1.3. $\int 2xe^{x^2}dx$ integralini hesaplayınız.

$x^2 = u$ olsun. Bu durumda $du = 2xdx$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int 2xe^{x^2}dx = \int e^{x^2}2xdx = \int e^{u}du = e^{u} + c = e^{x^2} + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.1.4. $\int \frac{xdx}{x^2-4}$ integralini hesaplayınız.

$x^2 - 4 = u$ olsun. Bu durumda $\frac{du}{2} = xdx$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int \frac{xdx}{x^2-4} = \int \frac{\frac{du}{2}}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}ln|u| + c = \frac{1}{2}ln|x^2-4| + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.1.5. $\int \frac{dx}{(5x+2)^3}$ integralini hesaplayınız.

$5x+2=u$ olsun. Bu durumda $\frac{du}{5}=dx$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int \frac{dx}{(5x+2)^3} = \int \frac{\frac{du}{5}}{u^3} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{u^3} = \frac{1}{5}\int u^{-3}du = \frac{-1}{10}u^{-2}$$

$$= -\frac{1}{10}(5x+2)^{-2} + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.1.6. $\int sin^2(x)cos(x)dx$ integralini hesaplayınız.

$sin(x)=u$ olsun. Bu durumda $du=\cos(x)\,dx$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int sin^2(x)\,cos(x)\,dx = \int (sin(x))^2\,cos(x)\,dx$$

$$= \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{(\sin(x))^3}{3} + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.1.7. $\int tan(x)\,dx$ integralini hesaplayınız.

Bu integral $\int \frac{sin(x)}{cos(x)}dx$ şeklinde yazılabilir. $cos(x) = u$ olsun. Bu durumda $-du = sin(x)dx$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int tan(x)\,dx = \int \frac{sin(x)}{cos(x)}dx = \int \frac{-du}{u} = -\int \frac{du}{u}$$

elde edilir.

Örnek 9.1.1.8. $\int \frac{dx}{x^2+6x+9}$ integralini hesaplayınız.

Bu integral $\int \frac{dx}{(x+3)^2}$ şeklinde yazılabilir. $x+3 = u$ olsun. Bu durumda $dx = du$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+9} = \int \frac{dx}{(x+3)^2} = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}du = \frac{u^{-1}}{-1} + c$$

$$= -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{x+3} + c$$ elde edilir.

Örnek 9.1.1.9. $\int \frac{xdx}{1+x^4}$ integralini hesaplayınız.

Bu integral $\int \frac{xdx}{1+(x^2)^2}$ şeklinde yazılabilir. $x^2 = u$ olsun. Bu durumda $\frac{du}{2} = xdx$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int \frac{xdx}{1+x^4} = \int \frac{xdx}{1+(x^2)^2} = \int \frac{\frac{du}{2}}{1+u^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{1}{2}arctan(u) + c == \frac{1}{2}arctan(x^2) + c$$ elde edilir.

Örnek 9.1.1.10. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$ integralini hesaplayınız.

Bu integral $\int \frac{dx}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ şeklinde yazılabilir. $\frac{x}{a} = u$ olsun. Bu durumda $dx = adu$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{adu}{1+u^2} = \frac{1}{a}arctan(u) + c = \frac{1}{a}arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.1.11. $\int e^{cos^2(x)} sin(x)cos(x)dx$ integralini hesaplayınız.

$cos^2(x) = u$ olsun. Bu durumda $\frac{-du}{2} = sin(x)\,cos(x)$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int e^{cos^2(x)} sin(x)cos(x)dx = \int e^u . \frac{-du}{2} = -\frac{1}{2}\int e^u du$$

$$= -\frac{1}{2}e^u + c = -\frac{1}{2}e^{cos^2(x)} + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.1.12. $\int \frac{dx}{xln(x)}$ integralini hesaplayınız.

Bu integral $\int \frac{dx}{xln(x)} = \int \frac{1}{ln(x)}\frac{dx}{x}$ olarak yazılabilir. $\ln(x) = u$ olsun. Bu durumda $du = \frac{dx}{x}$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int \frac{dx}{xln(x)} = \int \frac{1}{ln(x)}\frac{dx}{x} = \int \frac{1}{u} du = ln\,|u| + c = ln\,|\,ln\,x| + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.1.13. $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$ integralini hesaplayınız.

$1 + e^x = u$ olsun. Bu durumda $du = e^x dx$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{du}{u} = ln|u| + c = ln|1 + e^x| + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.1.14. $\int \frac{arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ integralini hesaplayınız.

$arcsin(x) = u$ olsun. Bu durumda $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int \frac{arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{arcsin^2(x)}{2} + c$$

elde edilir.

Kaynaklar:

1. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus I**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.
2. Prof. Dr. C. Çinar, Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, Prof. Dr. A. S. Kurbanlı, Prof. Dr. D. Şimşek, **Genel Matematik**, Dizgi Ofset, 2013.
3. Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, **Analiz III Diziler ve Seriler,** Dizgi Ofset, 2017.
4. H. İ. Karakaş, **Matematiğin Temelleri, Sayı Sistemleri ve Cebirsel Yapılar,** ODTÜ yayınları, 2011.