MATEMATİK 2

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2021

Tanım.

XOY düzleminin herhangi bir B bölgesinde bulunan bir (x,y) noktasının

$$\begin{cases} x = F(u,v) \\ y = G(u,v) \end{cases} \qquad (17)$$

dönüşümü ile uOv düzleminin bir B' bölgesindeki (u,v) noktasına dönüştürülmesine koordinat dönüşümü denir.

(17) dönüşümünün bire-bir olması için F ve G'nin sürekli, diferensiyellenebilir ve

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

jakobiyeninin

özdeş olarak sıfırdan farklı olması yeterlidir.

Eğer B ve B' bölgeleri kapalı bölgeler ise

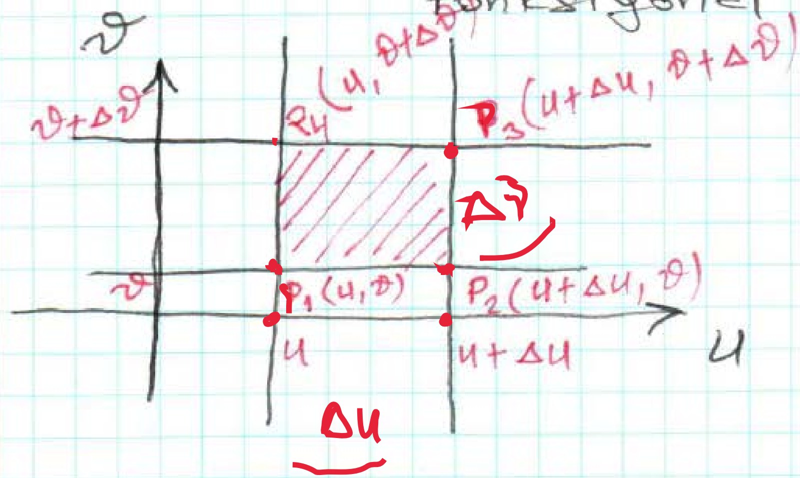
$$\lim \frac{\text{Alan } B}{\text{Alan } B'} = |J| \quad \text{dir.}$$

Yani, xOy koordinat sistemindeki B bölgesinin alanı, yeni uOv koordinat sistemindeki B' bölgesinin alanına dönüştürüldüğünde aralarında

$$\text{Alan } B \approx |J| \cdot \text{Alan } B'$$

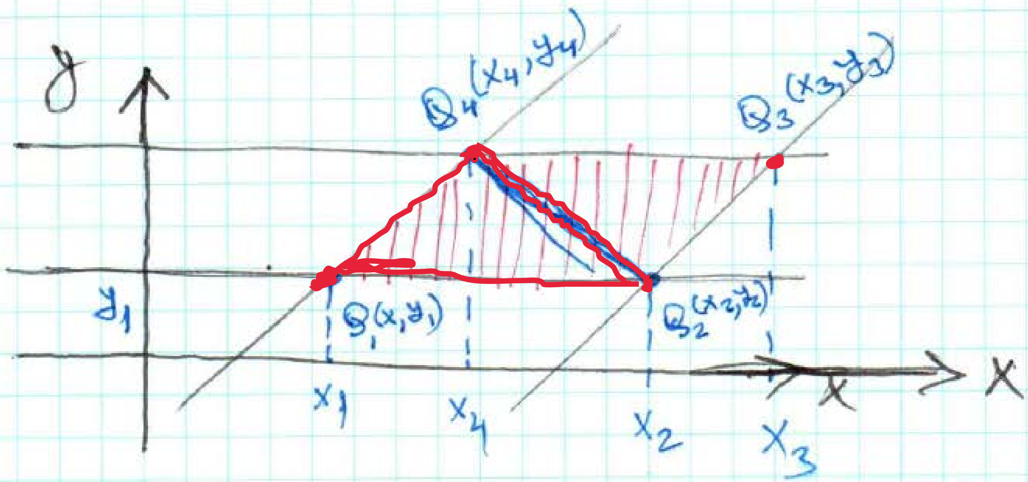
bağıntısı geçerlidir.

Fonksiyonel Determinant.



$$\begin{cases} x = f(u,\vartheta) \\ y = g(u,\vartheta) \end{cases}$$

$$\text{Alan}(P_1P_2P_3P_4) = \Delta u \cdot \Delta\vartheta$$



XOY

1. $\text{Alan}(\overset{\triangle}{Q_1 Q_2 Q_4}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_4 - y_1 \end{vmatrix} \cdot 2$

$$\text{Alan}(Q_1Q_2Q_3Q_4) = 2\cdot\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_4-x_1 \\ y_2-y_1 & y_4-y_1 \end{vmatrix}$$ olur.

$x_1 = f(u,\vartheta)$

$y_1 = g(u,\vartheta)$

$x_2 = f(u+\Delta u,\ \vartheta)$

$y_2 = g(u+\Delta u,\ \vartheta)$

$x_3 = f(u+\Delta u,\ \vartheta+\Delta\vartheta)$

$y_3 = g(u+\Delta u,\ \vartheta+\Delta\vartheta)$

$x_4 = f(u,\ \vartheta+\Delta\vartheta)$

$y_4 = g(u,\ \vartheta+\Delta\vartheta)$

SİSTEM

x_1, x_2, x_4, y_1, y_2 ve y_4 değerleri tekrar göz önüne alalım.

$$\boxed{\frac{f(u+\Delta u, v) - f(u,v)}{\Delta u} = f_u(u,v)}$$

$x_1 = f(u,v)$

$y_1 = g(u,v)$

$$x_2 = f(u+\Delta u, v) = f(u+\Delta u, v) - f(u,v) + f(u,v) =$$

$$= \Delta u f_u(u,v) + f(u,v)$$

$$y_2 = g(u+\Delta u, v) = g(u+\Delta u, v) - g(u,v) + g(u,v) =$$

$$= \Delta u \cdot g_u(u,v) + g(u,v)$$

$$x_4 = f(u, v+\Delta v) = f(u,v) + f_v \Delta v$$

$$y_4 = g(u, v+\Delta v) = g(u,v) + g_v \Delta v$$. yazılır.

Bu değerler alan formülünde yerine konursa,

$$\text{Alan}(Q_1 Q_2 Q_3 Q_4) = 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_4 - y_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \Delta u \, f_u(u,v) + f(u,v) - f(u,v) & f(u,v) + f_v \Delta v - f(u,v) \\ \Delta u \, g_u(u,v) + g(u,v) - g(u,v) & g(u,v) + g_v \Delta v - g(u,v) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} f_u(u,v)\,\Delta u & f_v(u,v)\,\Delta v \\ g_u(u,v)\,\Delta u & g_v(u,v)\,\Delta v \end{vmatrix} = \underbrace{\Delta u \cdot \Delta v}_{\text{Alan}(P_1 P_2 P_3 P_4)} \underbrace{\begin{vmatrix} f_u(u,v) & f_v(u,v) \\ g_u(u,v) & g_v(u,v) \end{vmatrix}}_{|J|}$$

farklılık oluştu.

Örnek: B bölgesi

$x+y=\pi$, $x+y=3\pi$, $x-y=\pi$, $x-y=-\pi$

doğruları ile sınırlanan bölge olmak üzere

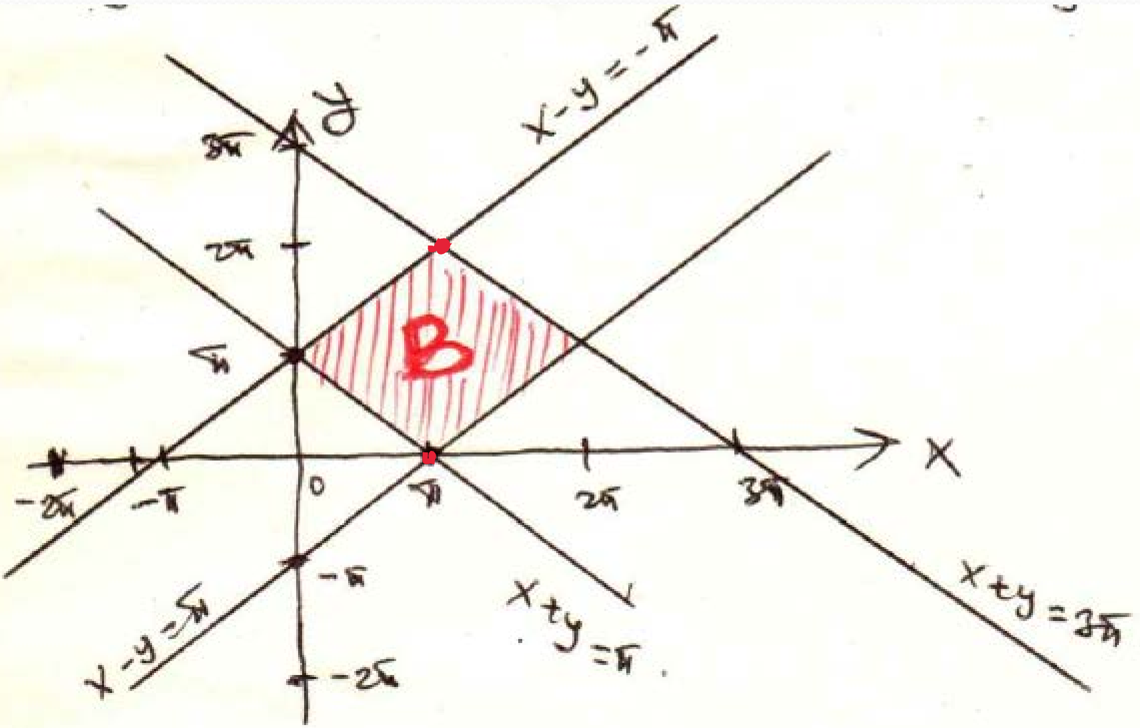
bölgenin $\begin{cases} x-y=u \\ x+y=v \end{cases}$ $x=\frac{u+v}{2}$, $y=\frac{v-u}{2}$ koordinat dönüşümü

ile uov koordinat sistemindeki oluşturduğu

B' bölgesini bulunuz. Ayrıca, dönüşümün jakobiyeni

ile ters dönüşümün jakobiyenini karşılaştırınız.

Çözüm: önce, B bölgesinin şeklini çizelim.

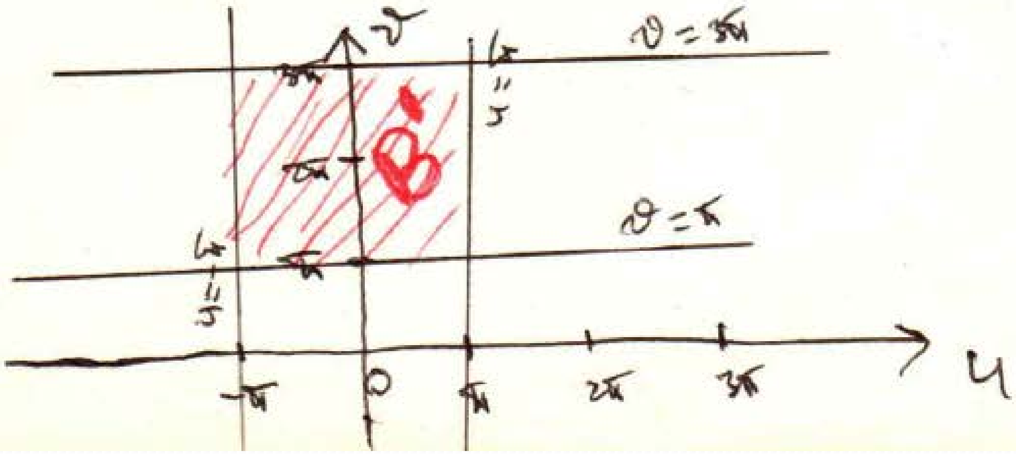


$\begin{cases} x-y=u \\ x+y=v \end{cases}$ dönüşümü gerçekleştirilirse,

$x=\dfrac{u+v}{2}$ $\quad$ $y=\dfrac{v-u}{2}$

$u = \pi$ ve $u = -\pi$, $\quad v = \pi$ ve $v = 3\pi$

bulunur. B' bölgesinin şeklini çizelim



$$\begin{cases} x-y=u \\ x+y=v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u+v}{2} \\ y=\dfrac{v-u}{2} \end{cases}$$

$$J_1=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2};$$

$$J_2=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1+1=2;$$

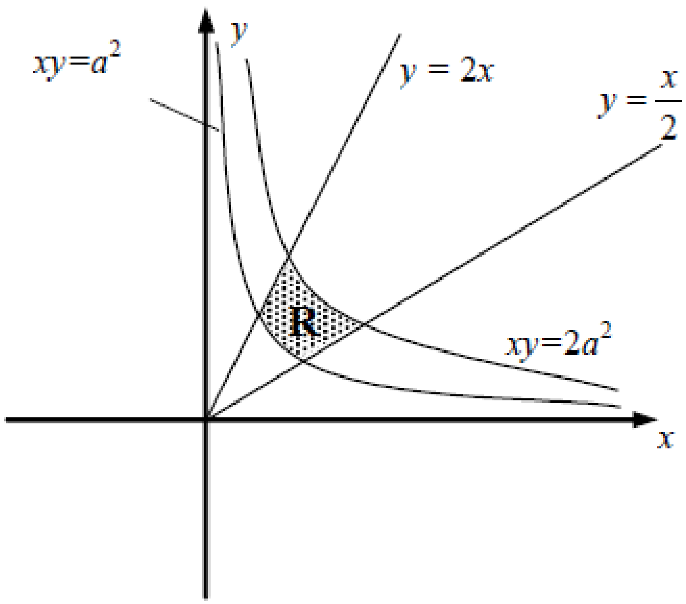
$J_1 \cdot J_2=\frac{1}{2}\cdot 2=1$ olur. Yani

$\text{Alan } B \approx \frac{1}{2}\text{Alan } B'$; $\lim \frac{\text{Alan } B}{\text{Alan } B'}=\frac{1}{2}$ dir.

Örnek 2. $x\,y = a^2$, $x\,y = 2a^2$, $y = \dfrac{x}{2}$, $y = 2x$ eğrileri ile sınırlanan R (Bkz. Şekil .3) bölgesini,

$$\begin{aligned} u &= x\,y \\ v &= \frac{y}{x} \end{aligned} \qquad (1)$$

dönüşümü altında dönüştürdüğü R' bölgesini bulunuz.



Şekil .3

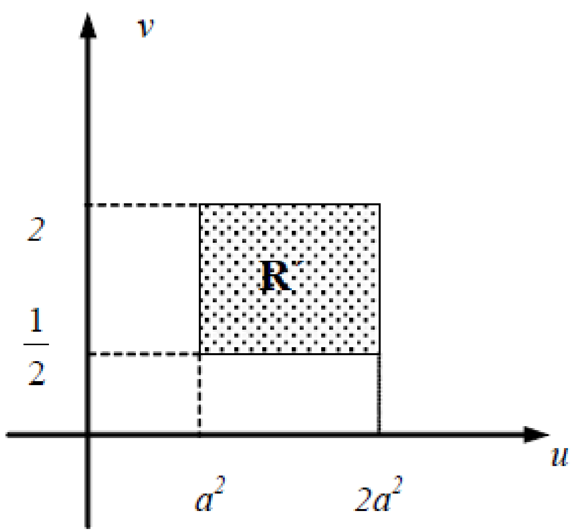
Çözüm: Bölgeye (1) dönüşümü uygulandığında; $xy = a^2$, $xy = 2a^2$ eğrileri verilen $u = xy$ dönüşümü altında,

$$u = a^2 \ , \ u = 2a^2 \tag{2}$$

doğrularına dönüşür. Benzer düşünüşle, $y = \dfrac{x}{2}$, $y = 2x$ doğruları da verilen $v = \dfrac{y}{x}$ dönüşümü altında

$$v = \frac{1}{2} \ , \ v = 2 \tag{3}$$

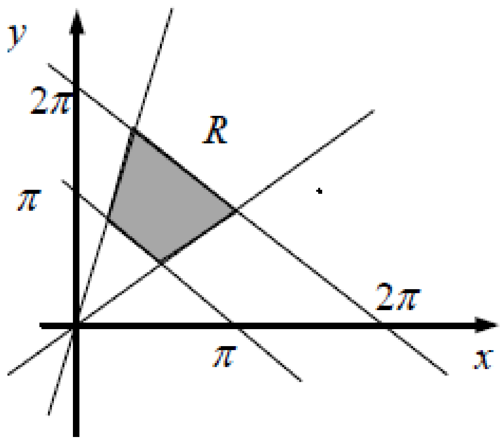
doğrularına dönüşür. Böylece xy düzlemindeki R bölgesi (1) dönüşümü altında uv sistemindeki (2) ve (3) doğruları ile sınırlanan R' bölgesine dönüşür (Bkz. Şekil 4).



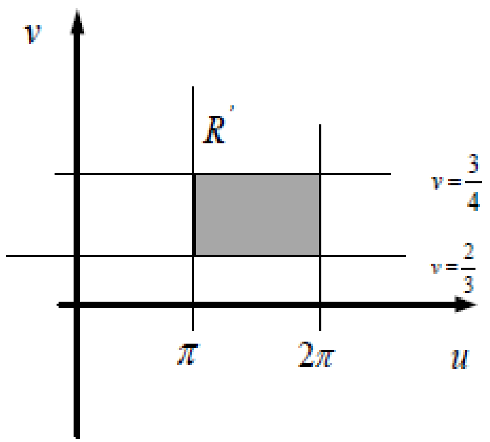
Şekil .4

Örnek 3. $x = u - uv, y = uv$ biçiminde tanımlanan dönüşüm altında $y = 2x$, $y = 3x$ ve $x + y = 2\pi$, $x + y = \pi$ doğruları ile sınırlanan R bölgesinin uov'de dönüştürdüğü R' bölgesini ve dönüşümün jakobiyenini bulunuz.

Çözüm: Verilenlerden R bölgesi aşağıdaki (Şekil 5) ile gösterilen



Şekil 5



Şekil 6

bölgedir.Verilen dönüşüm formülünden $u = x + y,\ v = \dfrac{y}{x+y}$ eşitlikleri kolayca elde edilebileceğinden $y = 2x$, $y = 3x$, $x + y = 2\pi$, $x + y = \pi$ doğruları bu dönüşüm formüllerine göre sırasıyla $v = \dfrac{2}{3}$, $v = \dfrac{3}{4}$, $u = 2\pi$, $u = \pi$ doğrularına dönüşür.

Böylece R bölgesi verilen dönüşüm altında R' (Bkz. Şekil 6) bölgesine dönüşür. Dönüşümün jakobiyeni ise $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u$ dur.

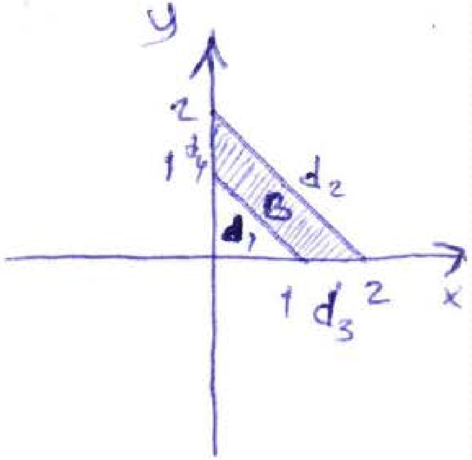
Örnek ⊛: B bölgesi birinci bölgede $x+y=1$, $x+y=2$ doğrularıyla, koordinat eksenleri arasında kalan yamuk olduğuna göre

$$\begin{cases} u = x+y+1 \\ v = x-y \end{cases}$$

dönüşümleri yardımıyla D bölgesinin sınırlarını belirleyiniz ve şeklini çiziniz. Ayrıca dönüşümün Jakobiyenini bulunuz.

Örnek (*)

Yandaki şekilden,



$d_1 : x+y=1$, $d_2 : x+y=2$;

$d_3 : y=0$, $1 \leq x \leq 2$.

$d_4 : x=0$; $1 \leq y \leq 2$ olur.

d_1; doğrusunu göz önüne alalım.

$d_1 : x+y=1 \Rightarrow x=0$ için $y=1$.

$\Rightarrow y=0$ için $x=1$.

O zaman, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ olacaktır.

Çünkü doğru birinci bölgede veriliyor.

$u = x+y+1$ dersek $\boxed{u=2}$ olur.

$v = x-y$

$u-2y = x-y+1$ olur. Buradan,

$v = u-2y-1$ olur. $v = 2-2y-1 = 1-2y$;

$y=0$ için, $\boxed{v=1}$ olur.

$y=1$ için, $\boxed{v=-1}$ olur. $\boxed{-1 \leq v \leq 1}$

Demek, $u=2$ iken $-1 \leq v \leq 1$ dir.

d_2: $x+y=2$. $\Rightarrow$ $x=0$ ise $y=2$.
$y=0$ ise $x=2$.

Yani, d_2 doğrusu için I. bölgede
$0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$ olur.

$1+x+y=u$ dersek $\boxed{u=3}$ olur.

$u=x+y+1$.
$v=x-y$ olduğu için $u=x+y+1$ den,

$u-2y=x-y+1$ $\Rightarrow$ $v=u-2y-1$, olur.

$u=3$ idi, $v=3-2y-1=2-2y$ dir.

$\boxed{v = 2-2y}$ $0 \leq y \leq 2$ arasında olduğu

göz önüne alınırsa,

$v = 2$, $v = -2$ olur.

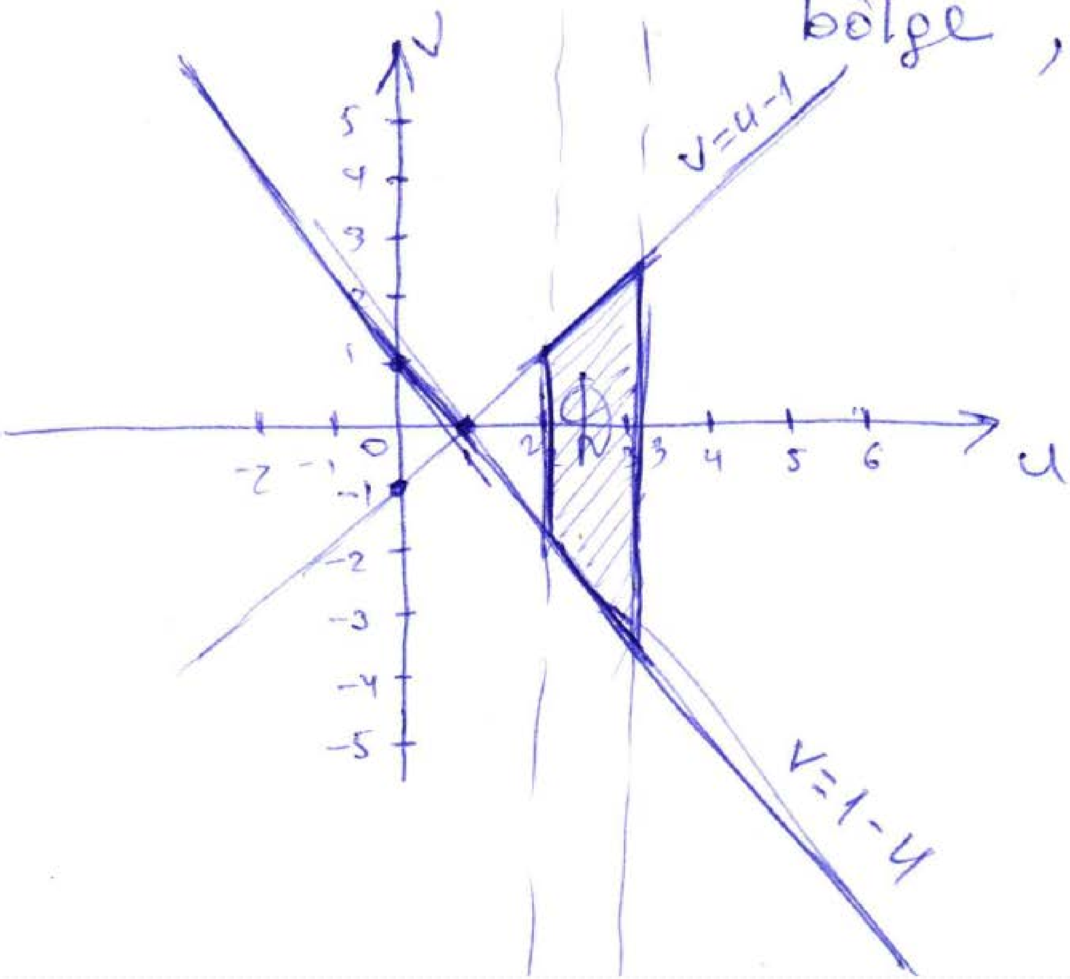
Yani, $\boxed{-2 \leq v \leq 2}$ elde edilir.

d_3: $y = 0$, $1 \leq x \leq 2$;

$\begin{cases} u = x+y+1 \\ v = x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u = x+1 \\ v = x \end{matrix} \Rightarrow \boxed{v = u-1}$ olur.

d_4: $x = 0$ $1 \leq y \leq 2$, $\begin{cases} u = x+y+1 \\ v = x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u = y+1 \\ v = -y \end{matrix} \Rightarrow \boxed{v = 1-u}$ olur

Bu durumda uv koordinat sisteminde bölge,



şekilini alır.

O zaman, $\begin{cases} 2 \leq u \leq 3 \\ 1-u \leq v \leq u-1 \end{cases}$ olur.

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{2};$$

$$\iint_B \frac{(x-y)^2}{1+x+y}\,dx\,dy = \int_2^3 \left\{ \int_{1-u}^{u-1} \frac{v^2}{u} \cdot \left|\frac{1}{2}\right| \cdot dv \right\} du =$$

$$= \int_2^3 \frac{1}{2u} \cdot \frac{v^3}{3} \Big|_{1-u}^{u-1} du = \int_2^3 \frac{1}{6u} \cdot \left((u-1)^3 - (1-u)^3\right) du =$$

$$= \int_2^3 \frac{1}{6u}\left((u-1)^3+(u-1)^3\right)du = \int_2^3 \frac{1}{\cancel{6}_{3}u}\cdot \cancel{2}(u-1)^3\,du =$$

$$= \frac{1}{3}\int_2^3 \frac{u^3-3u^2+3u-1}{u}\,du = \frac{1}{3}\int_2^3 \left(u^2-3u+3-\frac{1}{u}\right)du =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{u^3}{3}-\frac{3}{2}u^2+3u-\ln|u|\right]\Bigg|_2^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{27}{3}-\frac{27}{2}+9-\ln 3-\frac{8}{3}+\cancel{\frac{12}{2}}-\cancel{6}+\ln 2\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{54-81+54-16}{6} + \ln\frac{2}{3}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{11}{6} + \ln\frac{2}{3}\right] = \frac{11}{18} + \frac{1}{3}\ln\frac{2}{3};$$

Örnek: 1

B-bölgesi birinci bölgede $x^2-y^2=1$, $x^2-y^2=9$, $x \cdot y=2$, $x \cdot y=4$ hiperbolleri tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre uygun dönüşümle UOV kartezyen koordinat sistemine dönüştürünüz.

Örnek 2 B bölgesi $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ $(0, \pi)$ olan bölge olmak üzere uygun dönüşümle UOV kartezyen koordinat sistemine dönüştürünüz.

Örnek 3 B —〃— $(1,0)$, $(2,2)$, $(1,3)$, $(0,1)$ —〃—.

Kaynaklar:

1. A. H. Berksoy, O. Özkan, Mühendisler İçin Çözümlü Kalkülüs, S.Ü. Basımevi, 2010
2. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus II**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2010.
3. J. Stewart, Kalkülüs Kavram ve Kapsam (Diferansiyel ve İntegral Hesap), TÜBA, 2010.