MATEMATIK 1

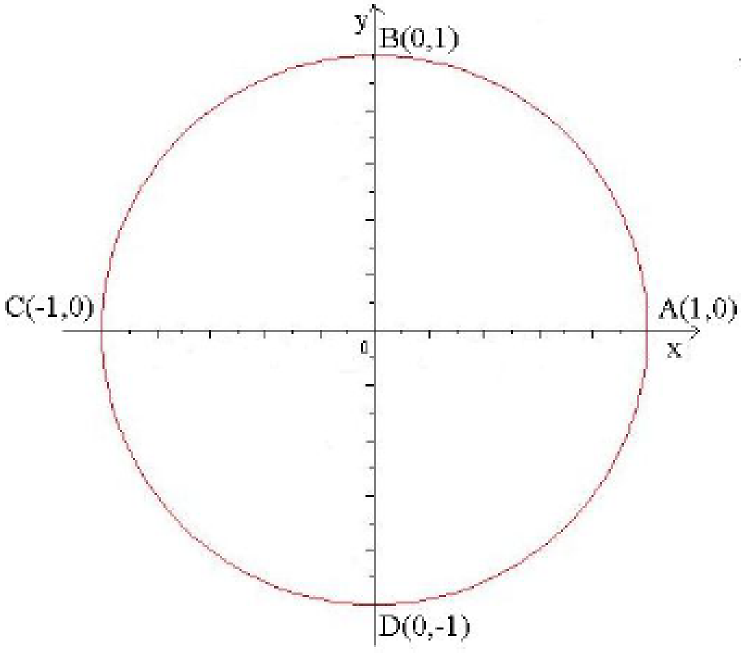
Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

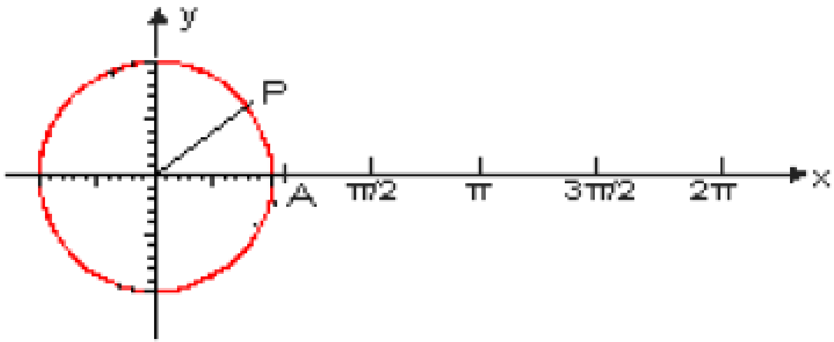
2020

4.3.3. Trigonometrik Fonksiyonlar ve Tersleri

Tanım 4.3.3.1. Yarıçapı 1 birim olan ve üzerinde bir yön seçilen çembere birim çember ya da trigonometrik çember denir.



Şekil 4.3.3.1.



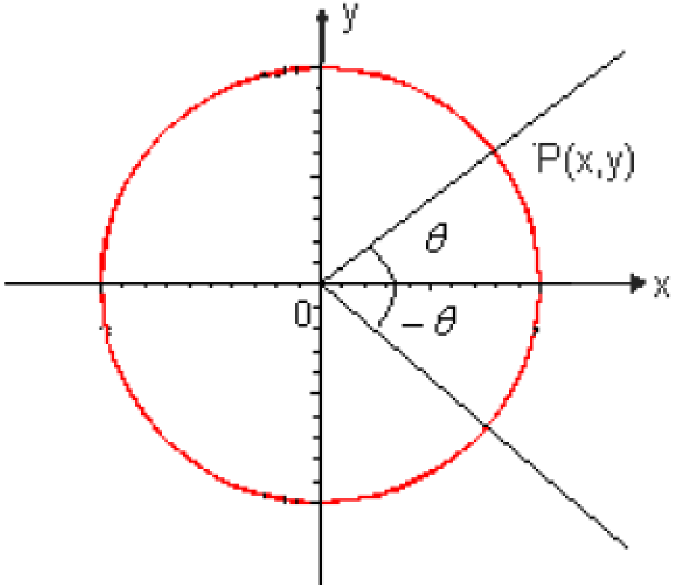
Şekil 4.3.3.2.

$[0,2\pi]$ aralığındaki sayılarla birim çember üzerindeki noktaları Şekil 4.3.3.2. deki gibi birebir eşlediğimiz zaman A noktası ile 0, B noktası ile $\frac{\pi}{2}$, C noktası ile π, D noktası ile $\frac{3\pi}{2}$ ve 2π ile tekrar A noktası ile eşlenmiş olur. Benzer eşleşmeyi $[2\pi,4\pi]$, $[4\pi,6\pi]$ ve $[-4\pi,-2\pi]$ aralıkları için de yapabiliriz. Çember üzerindeki herhangi bir T noktası ile sonsuz tane sayı eşlenir. $0 \le \theta \le 2\pi$ olmak üzere P noktası ile eşlenen sayılar $\theta + k2\pi$ şeklindedir.

Tanım 4.3.3.2. Başlangıç noktası OA olan açının bitim kolunun trigonometrik çemberi kestiği P noktası ile eşlenen θ sayısına $A\hat{O}P$ açısının ölçüsü denir. θ° dereceye de açının esas ölçüsü adı verilir.

4.3.3.1. Kosinüs ve Sinüs Fonksiyonları

Tanım 4.3.3.1.1. Başlangıç kolu OA, ölçüsü θ olan açının bitim kolunun trigonometrik çemberi kestiği P noktasının ordinatına θ açısının sinüsü, apsisine de kosinüsü denir. Sıra ile $\sin\theta$ ve $\cos\theta$ şeklinde gösterilir.



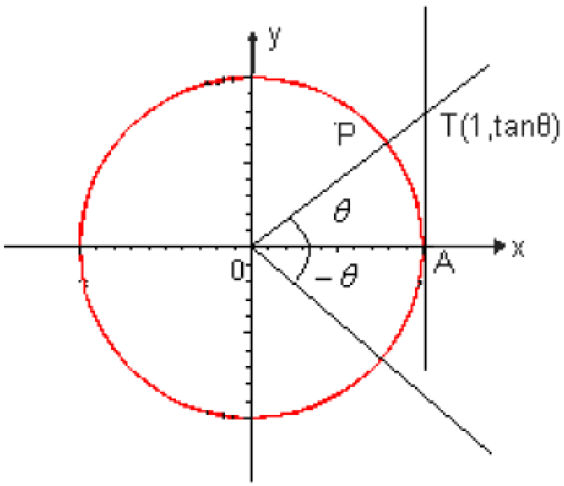
Şekil 4.3.3.1.1.

$\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ birebir olmayan ve örten bir fonksiyondur. $\sin(\theta + k2\pi) = \sin(\theta)$ olduğundan Sinüs fonksiyonu 2π periyotludur. Ayrıca $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ olduğundan Sinüs fonksiyonu bir tek fonksiyondur.

$\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ birebir olmayan ve örten bir fonksiyondur. $\cos(\theta + k2\pi) = \cos(\theta)$ olduğundan Kosinüs fonksiyonu 2π periyotludur. Ayrıca $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ olduğundan Kosinüs fonksiyonu bir çift fonksiyondur.

4.3.3.2. Tanjant Fonksiyonu

Tanım 4.3.3.2.1. Başlangıç kolu OA, ölçüsü θ olan açının bitim kolunun çembere A noktasından çizilen teğeti kestiği noktanın ordinatına θ açısının tanjantı denir. $\tan\theta$ veya $\mathrm{tg}\theta$ şeklinde gösterilir.

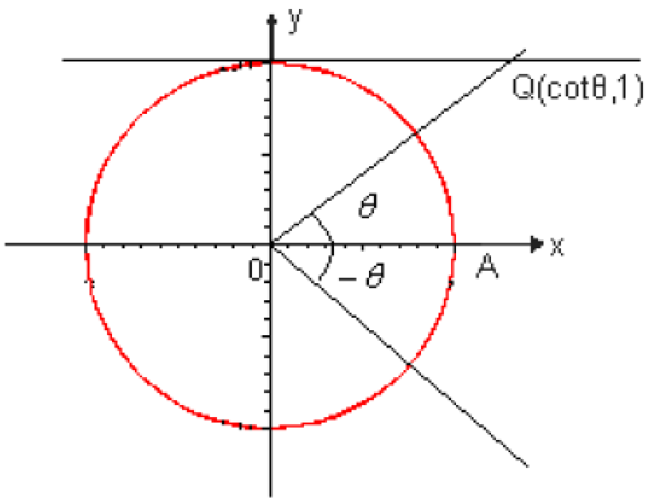


Şekil 4.3.3.2.1.

$\tan:\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}\rightarrow\mathbb{R}$ birebir olmayan ve örten bir fonksiyondur. Tanjant fonksiyonu π periyotlu ve tek bir fonksiyondur.

4.3.3.3. Kotanjant Fonksiyonu

Tanım 4.3.3.3.1. Başlangıç kolu OA, ölçüsü θ olan açının bitim kolunun çembere B noktasından çizilen teğeti kestiği noktanın apsisine θ açısının kotanjantı denir. $\cot\theta$ veya $\mathrm{ctg}\,\theta$ şeklinde gösterilir.

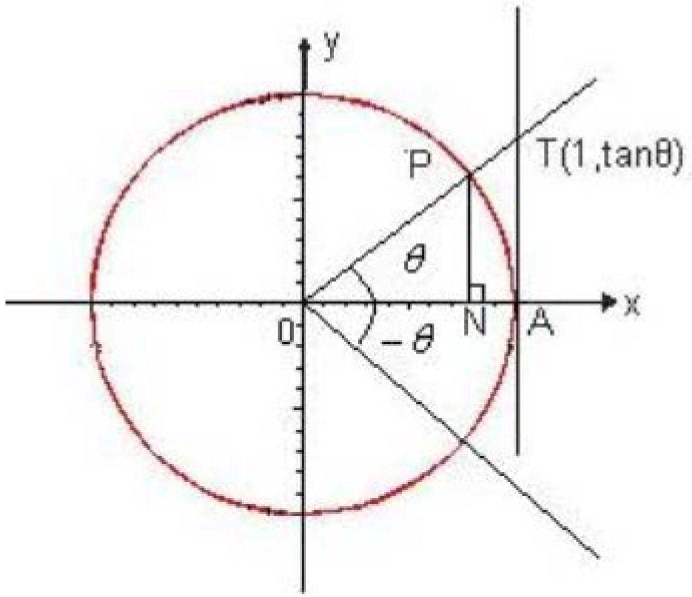


Şekil 4.3.3.3.1.

$\cot : R - \{k\pi\} \to \mathbb{R}$ birebir olmayan ve örten bir fonksiyondur.

Kotanjant fonksiyonu π periyotlu ve tek bir fonksiyondur

4.3.3.4. Trigonometrik Fonksiyonlar Arasındaki Bağıntılar



Şekil 4.3.3.4.1.

(1) ONP üçgeninde $|ON|^2+|NP|^2=|OP|^2$ dir. Yani

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

dir.

(2) $ONP \sim OAT$ olduğundan $\dfrac{|AT|}{|NP|}=\dfrac{|OA|}{|ON|}$ dir. Yani

$$\frac{\tan\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

dır. Benzer şekilde $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ elde edilir. Bu durumda

$$\tan\theta.\cot\theta=1$$

dir.

Örnek 4.3.3.4.1. $\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ ise $\tan\theta = ?$

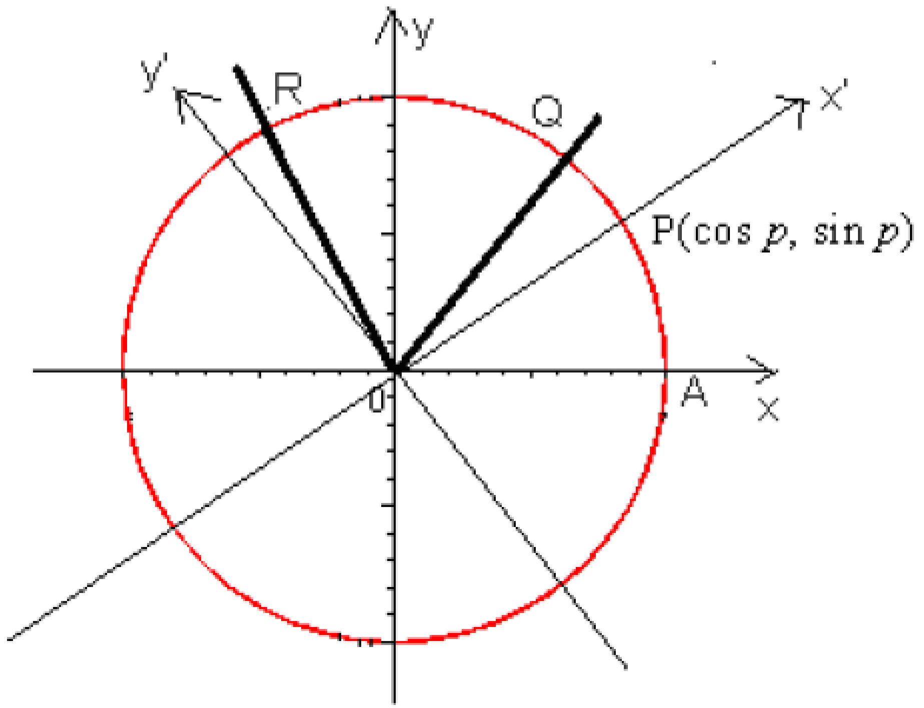
Çözüm. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ olduğundan $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$ dir. Buradan

$\cos^2\theta = \dfrac{8}{9}$ elde edilir. Bu durumda $\cos\theta = \mp\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ dir. Dolayısıyla

$$\tan\theta = \mp\frac{\sqrt{2}}{4}$$

dür.

4.3.3.5. Toplam ve Fark Formülleri



Şekil 4.3.3.5.1.

p: $A\widehat{O}P$ yayının ölçüsü

q: $A\widehat{O}Q$ yayının ölçüsü

$p+q$: $A\widehat{O}R$ yayının ölçüsü

Koordinat ekseni pozitif yönde p kadar döndürüldüğünde x, x' ve y de y' şekline dönüşür. Bu durumda

$$\begin{aligned}|AR|^2 &= \left(\cos(p+q)-1\right)^2+\left(\sin(p+q)-0\right)^2\\ &= \cos^2(p+q)-2\cos(p+q)+1+\sin^2(p+q)\\ &= 2-2\cos(p+q)\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen $x'oy'$ sisteminde $A(\cos p,-\sin p)$ ve $R(\cos q,\sin q)$ olur. Dolayısıyla

$$|AR|^2=(\cos p-\cos q)^2+(\sin p-\sin q)^2$$
$$=2-2\cos p\cos q-2\sin p\sin q$$

elde edilir. Bu iki eşitlikten

$$\cos(p+q)=\cos p.\cos q-\sin p.\sin q$$ formülü elde edilir.

Benzer şekilde

$$\cos(p-q)=\cos p.\cos q+\sin p.\sin q$$

$$\sin(p+q)=\sin p.\cos q+\cos p.\sin q$$

$$\sin(p-q)=\sin p.\cos q-\cos p.\sin q$$

$$\tan(p\mp q)=\frac{\tan p\mp\tan q}{1\pm\tan p.\tan q}$$

$$\cot(p\mp q)=\frac{\cot p.\cot q\pm 1}{\cot p\mp\cot q}$$ formülleri de elde edilir.

6. Yarım Açı Formülleri

(1) $\sin 2x = \sin(x+x) = 2\sin x\cos x$

(2) $\sin x = \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

(3) $\cos 2x = \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1-\sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

(4) $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$

(5) $\tan 2x = \tan(x+x) = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

(6) $\cot 2x = \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2\sin x\cos x}$

Örnek 4.3.3.6.1. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x.\cos x - \sin 2x.\sin x$

$$= (2\cos^2 x - 1).\cos x - 2\sin x.\cos x.\sin x$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x.\cos x$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1-\cos^2 x)\cos x$$

$$= 4\cos^3 x - 3\cos x \text{ dir.}$$

7. İki Sinüs ve Kosinüs Toplamının ve Farkının Çarpım Şeklinde İfadesi

$x = p + q$ ve $y = p - q$ olsun. Bu durumda

$$p = \frac{x+y}{2} \text{ ve } q = \frac{x-y}{2}$$

dir. Dolayısıyla toplam ve fark formülleri

$$\sin x = \sin(p+q) = \sin p.\cos q + \cos p.\sin q$$

$$\sin y = \sin(p-q) = \sin p.\cos q - \cos p.\sin q$$ şeklindedir. Bu durumda

$$\sin x + \sin y = 2\sin p.\cos q = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$ ve

$$\sin x - \sin y = 2\cos p.\sin q = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$ formülleri elde edilir. Benzer şekilde

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$ ve $$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$ dir.

8. Ters Dönüşümler

Yarım açı formüllerinden

$$\cos x.\cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$

$$\sin x.\sin y = -\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)-\cos(x-y)\right]$$

$$\sin x.\cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right]$$

$$\cos x.\sin y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y)-\sin(x-y)\right]$$

ters dönüşüm formülleri elde edilir. Ayrıca

$$\tan x + \tan y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin(x+y)}{\cos x.\cos y}$$

ve

$$\tan x - \tan y = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin(x-y)}{\cos x.\cos y}$$

dir.

Örnek 4.3.3.8.1. $\sin 2a = \dfrac{2}{\tan a + \cot a}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a = \frac{2\sin a\cos a}{\sin^2 a + \cos^2 a} = \frac{2}{\dfrac{\sin^2 a}{\sin a\cos a} + \dfrac{\cos^2 a}{\sin a\cos a}}$$

$$= \frac{2}{\dfrac{\sin a}{\cos a} + \dfrac{\cos a}{\sin a}} = \frac{2}{\tan a + \cot a} \text{ dır.}$$

Örnek 4.3.3.8.2. $\sin(105^\circ) = ?$

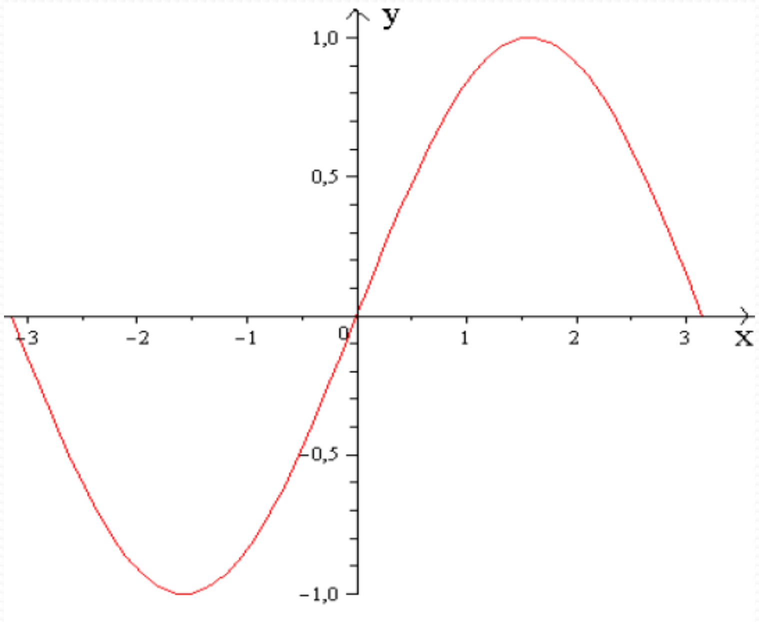
Çözüm.

$$\sin(105^\circ) = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin(60^\circ)\cos(45^\circ) + \sin(45^\circ)\cos(60^\circ)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ dür.}$$

9. Trigonometrik Fonksiyonların Eğrileri ve Tersleri

$\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ fonksiyonu periyodik bir fonksiyon olduğu için genel anlamda bire-bir ve örten değildir. Dolayısıyla tersi yoktur. Ancak $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ aralığında bire-bir ve örten olup bu aralıkta tersi vardır. $y=\sin x$ fonksiyonunun tersi $y=\arcsin x$ fonksiyonudur. $y=\sin x$ fonksiyonun grafiği



Şekil 4.3.3..9.1.

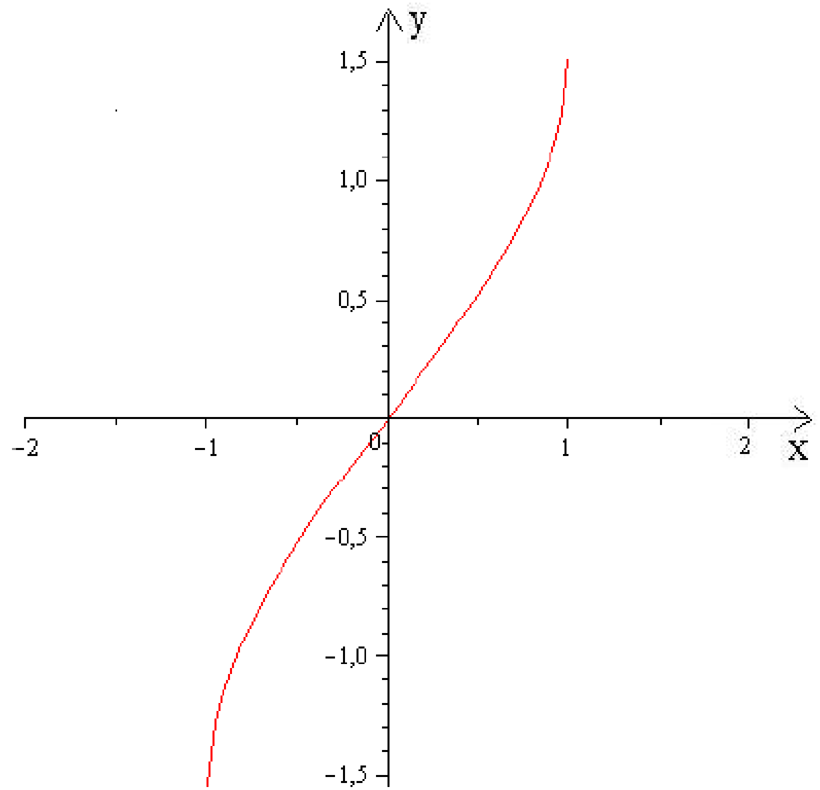
şeklindedir.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

ve

x	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$

olduğundan $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ fonksiyonun grafiği



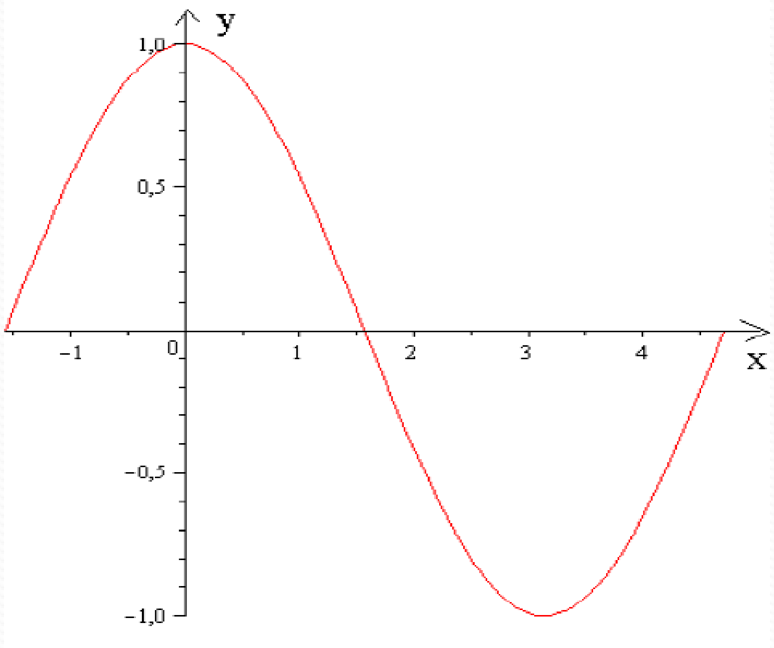
Şekil 4.3.3.9.2.

şekilindedir.

$y = \arcsin x$ fonksiyonunun eğrisi ile $y = \sin x$ fonksiyonun eğrisi $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.

$\cos:\mathbb{R}\to[-1,1]$ fonksiyonu periyodik bir fonksiyon olduğu için genel anlamda bire-bir ve örten değildir. Dolayısıyla tersi yoktur. Ancak $[0,\pi]$ aralığında bire-bir ve örten olup bu aralıkta tersi vardır. $y=\cos x$ fonksiyonunun tersi $y=\arccos x$ fonksiyonudur.

$y=\cos x$ fonksiyonun grafiği



Şekil 4.3.3.9.3.

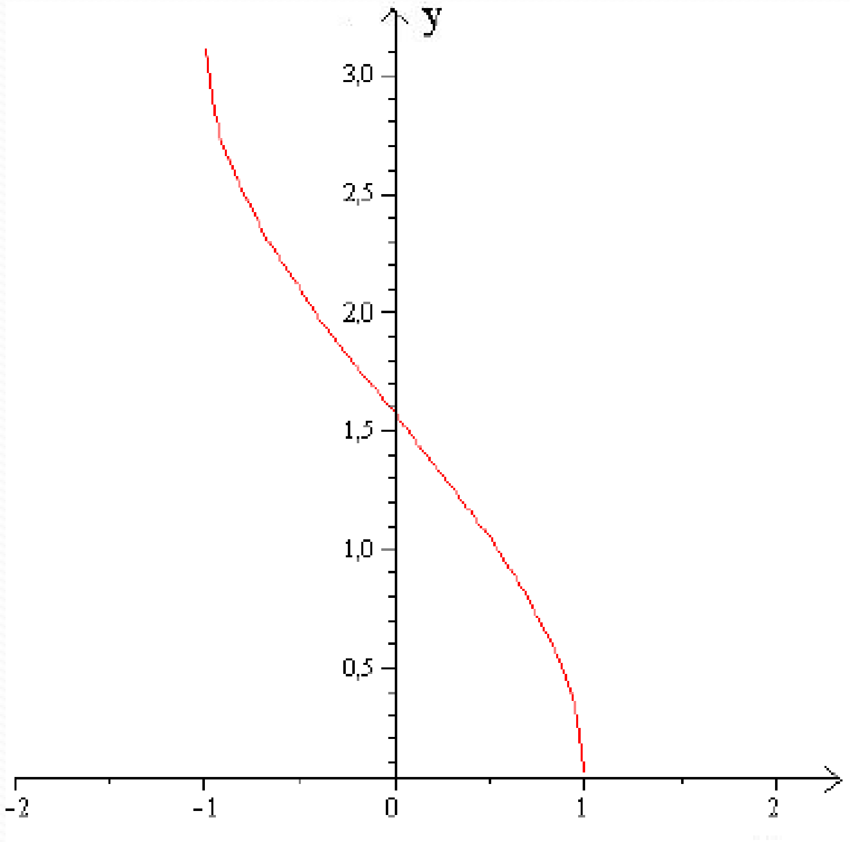
şeklindedir.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1

ve

x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\arccos x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π

olduğundan $\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$ fonksiyonun grafiği



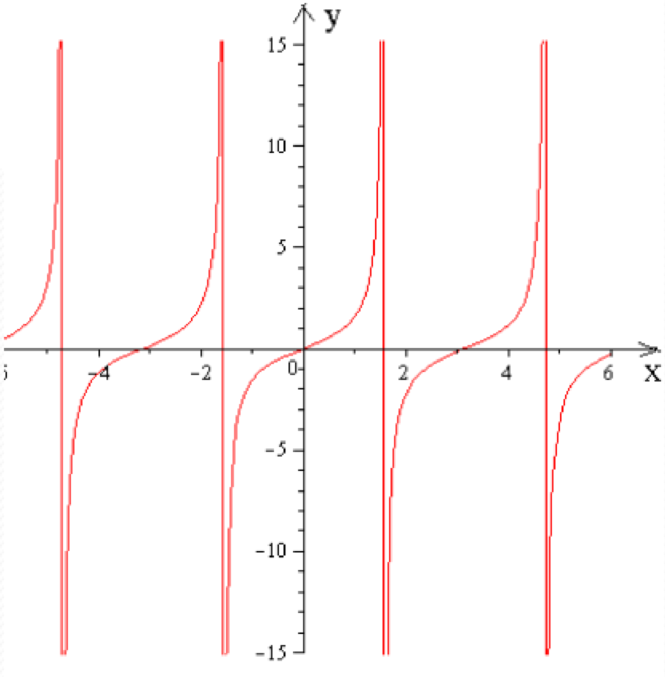
Şekil 4.3.3.9.4.

şeklindedir.

$y = \arccos x$ fonksiyonunun eğrisi ile $y = \cos x$ fonksiyonun eğrisi $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.

$\tan : \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu periyodik bir fonksiyon olduğu için genel anlamda bire-bir ve örten değildir. Dolayısıyla tersi yoktur. Ancak $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ aralığında bire-bir ve örten olup bu aralıkta tersi vardır. $y = \tan x$ fonksiyonunun tersi $y = \arctan x$ fonksiyonudur.

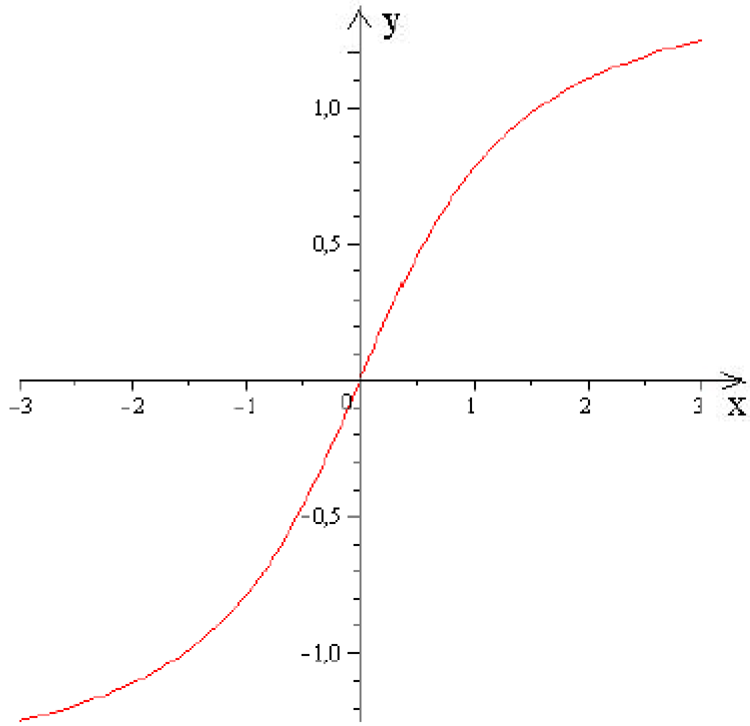
$y = \tan x$ fonksiyonun grafiği



Şekil 4.3.3.9.5.

şeklindedir.

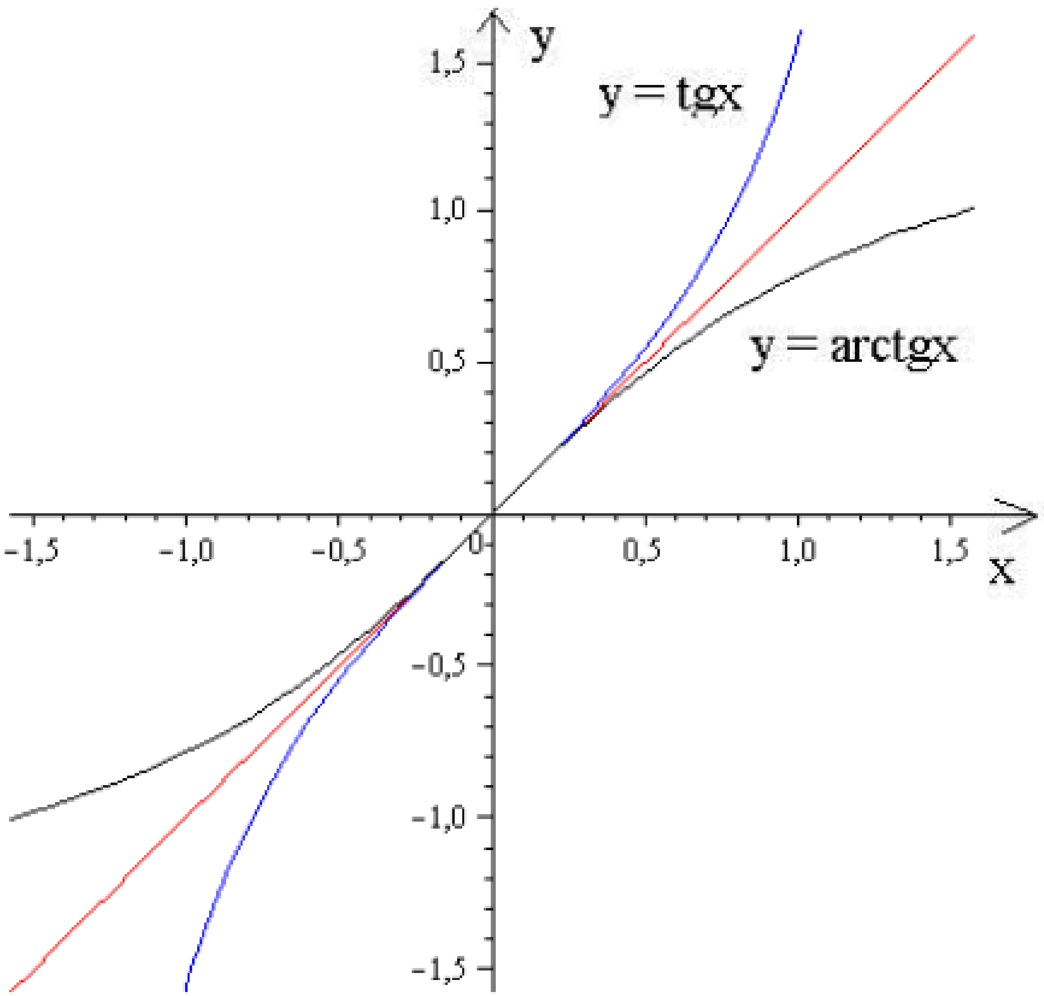
Bu durumda $\arctan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun grafiği



Şekil 4.3.3.9.6.

şeklindedir.

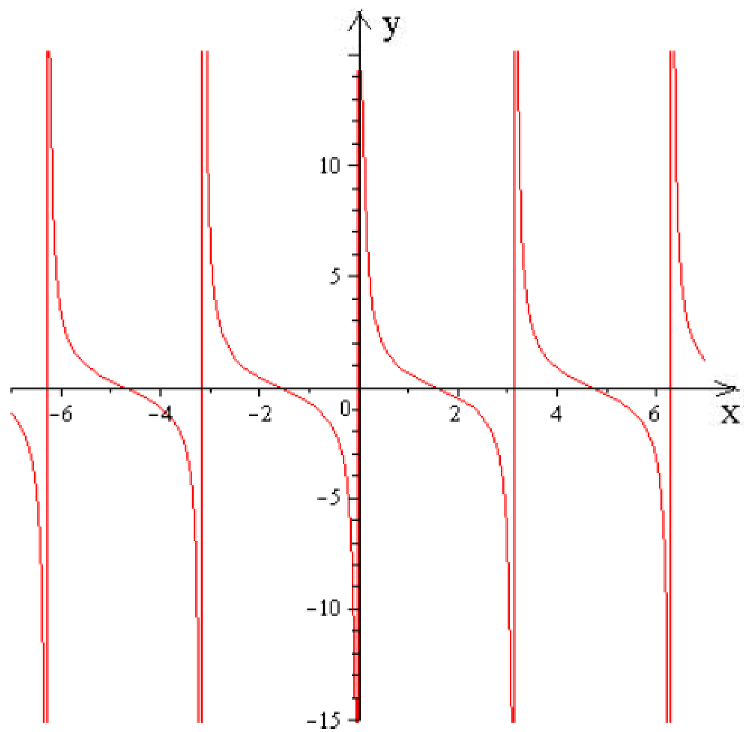
$y = \tan x$ ve $y = \arctan x$ fonksiyonlarının grafikleri $y = x$ birim fonksiyonunun grafiğine göre simetriktir.



Şekil 4.3.3.9.7.

$\cot:\mathbb{R}-\{k\pi\}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu periyodik bir fonksiyon olduğu için genel anlamda bire-bir ve örten değildir. Dolayısıyla tersi yoktur. Ancak $(0,\pi)$ aralığında bire-bir ve örten olup bu aralıkta tersi vardır. $y=\cot x$ fonksiyonunun tersi $y=\operatorname{arc}\cot x$ fonksiyonudur.

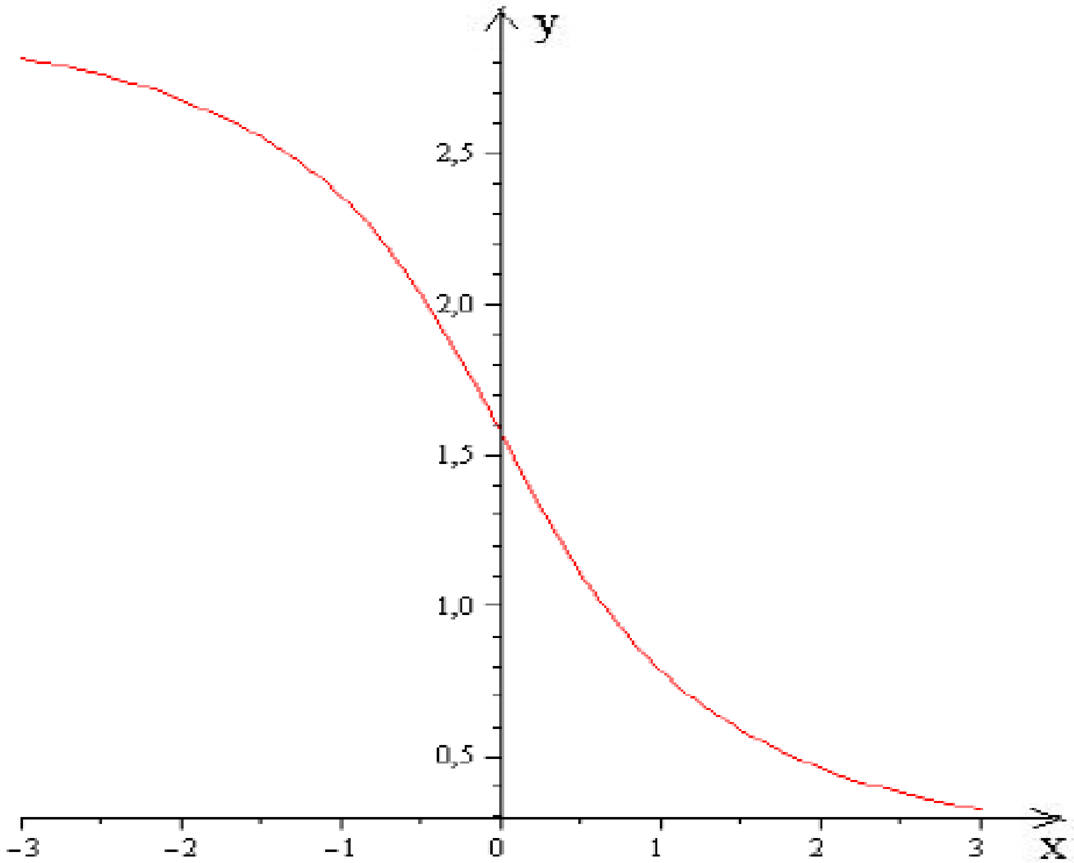
$y=\cot x$ fonksiyonun grafiği



Şekil 4.3.3.9.7.

şeklindedir.

Bu durumda $\operatorname{arc}\cot : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun grafiği



Şekil 4.3.3.9.8.

şeklindedir.

Örnek 4.3.3.9.1. $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $\arcsin x = a$ ise $\sin a = x$ dir. $\cos a = \sqrt{1-\sin^2 a}$ olduğundan

$$\cos a = \sqrt{1-x^2} \text{ ve } \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

dir.

Örnek 4.3.3.9.2. $\sin(\arccos x) = ?$

Çözüm. $\arccos x = y$ ise $\cos y = x$ dir. $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ olduğundan

$$\sin^2 y = 1 - x^2 \text{ ve } \sin y = \sqrt{1-x^2}$$

dir. Bu durumda $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ dir.

Kaynaklar:

1. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus I**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.
2. Prof. Dr. C. Çinar, Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, Prof. Dr. A. S. Kurbanlı, Prof. Dr. D. Şimşek, **Genel Matematik**, Dizgi Ofset, 2013.
3. Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, **Analiz III Diziler ve Seriler,** Dizgi Ofset, 2017.
4. H. İ. Karakaş, **Matematiğin Temelleri, Sayı Sistemleri ve Cebirsel Yapılar,** ODTÜ yayınları, 2011.