# İKİ BOYUTTA HAREKET

1 Yerdeğiştirme, Hız ve İvme Vektörleri
2 Sabit İvmeli İki Boyutlu Hareket
3 Eğik Atış Hareketi
4 Düzgün Dairesel Hareket
5 Teğetsel ve Radyal İvme
6 Bağıl Hız ve Bağıl İvme

***Bir havai fişeğin hareketi, bir volkandan fışkıran lavların hareketi paraboliktir.***

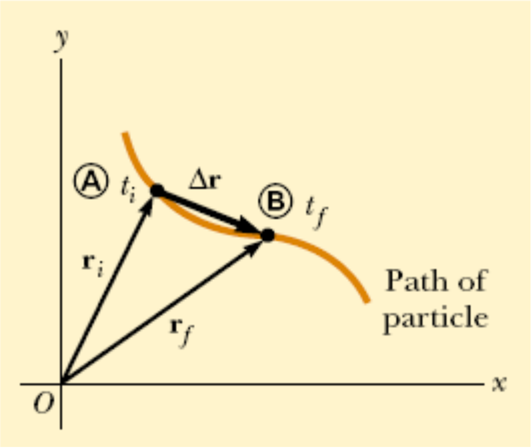
# FİZİK – 1 MEKANİK (İki Boyutta Hareket)

## 1. Yerdeğiştirme, Hız ve İvme Vektörleri

**İki Boyutta Hareket – Yerdeğiştirme Vektörü**
Birçok cisim iki boyutta hareket eder.

- Uyduların,
- Elektrik alanı içindeki elektrik yükünün,
- Su yüzeyindeki bir geminin ,

hareketi iki boyuttaki harekete en güzel örneklerdir.




Kullanılan alt indisler;
*i : Initial (Başlangıç)* *f: Final (Bitiş)*
kelimelerinin baş harfleridir.

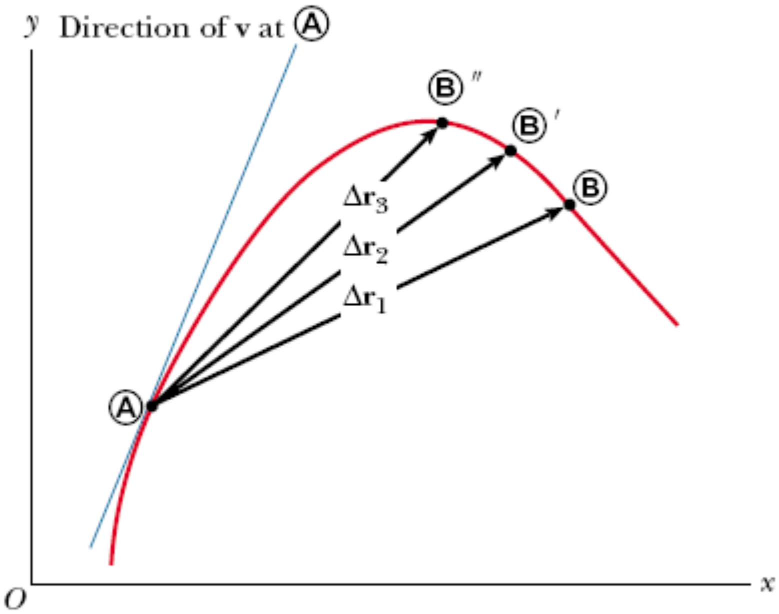
$$\Delta r \equiv r_f - r_i$$

**Ortalama Hız**
Birim zaman içindeki yer değiştirme miktarıdır.

$$\bar{v} \equiv \Delta r / \Delta t$$

**Ani Hız**
Çok küçük zaman dilimi içindeki yer değiştirme miktarıdır.

$$v \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$$



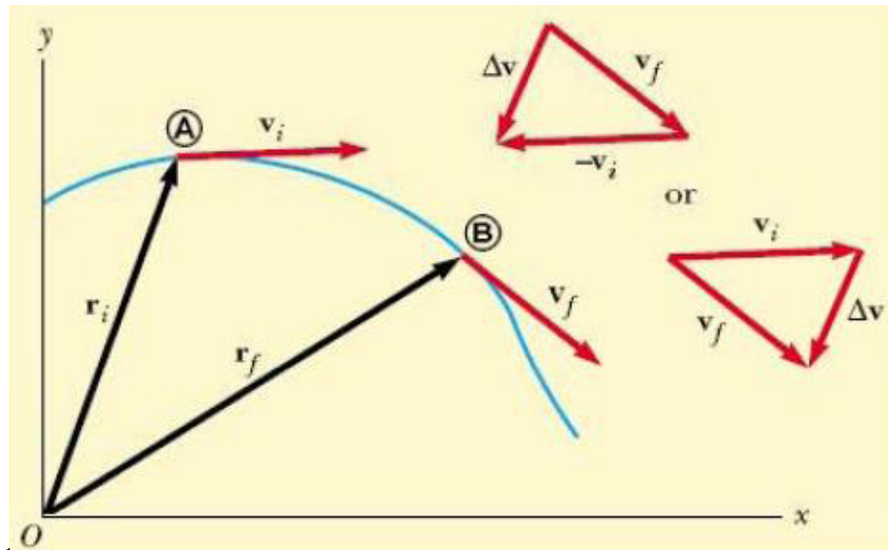
# FİZİK – 1 MEKANİK (İki Boyutta Hareket)

**Ortalama İvme**
Birim zaman içinde hızdaki değişim miktarıdır.

$$\bar{a} \equiv \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

**Hız Değişimi**
Cisim A noktasından B noktasına giderken hızını değiştirir. Şekle dikkat edilirse vektörlerin toplamı yapılmaktadır. Hızın değişimi daha küçük zaman aralıklarında çok önemli ise ani ivme önemli olmaktadır.

$$a \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$




## 2. Sabit İvmeli İki Boyutlu Hareket

**Sabit İvme**
İki boyutta sabit ivme ile hareket eden bir cismin konumu zamanla değişiyor ise hızı

$$r = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$$

Sabit ivme ile hareket eden cismin son hızı

$$v_f = (v_{xi} + a_x t)\hat{i} + (v_{yi} + a_y t)\hat{j}$$

$$v_f = (v_{xi}\hat{i} + v_y\hat{j}) + (a_x\hat{i} + a_y\hat{j})t = v_i + at$$

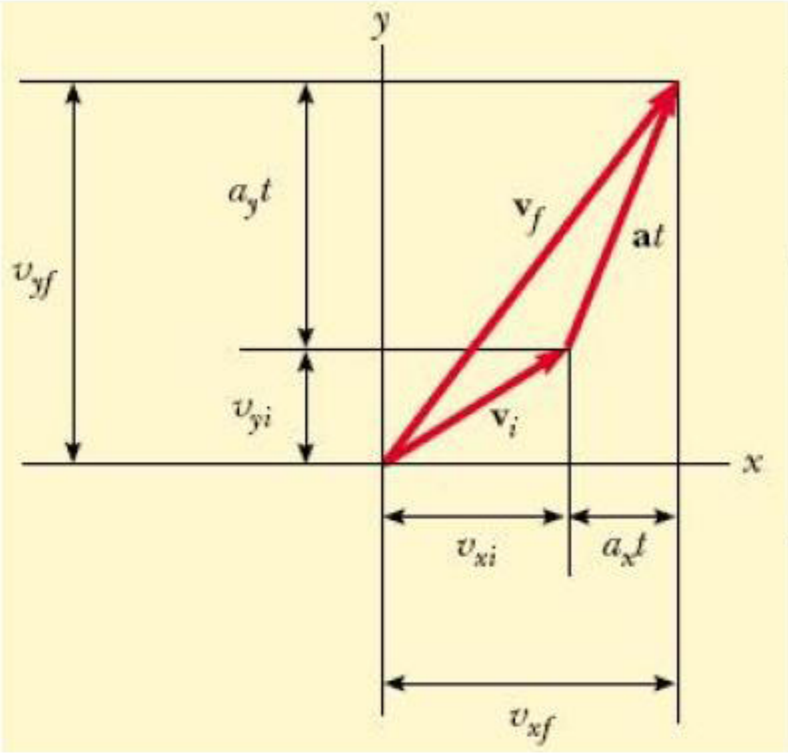
# FİZİK – 1 MEKANİK (İki Boyutta Hareket)

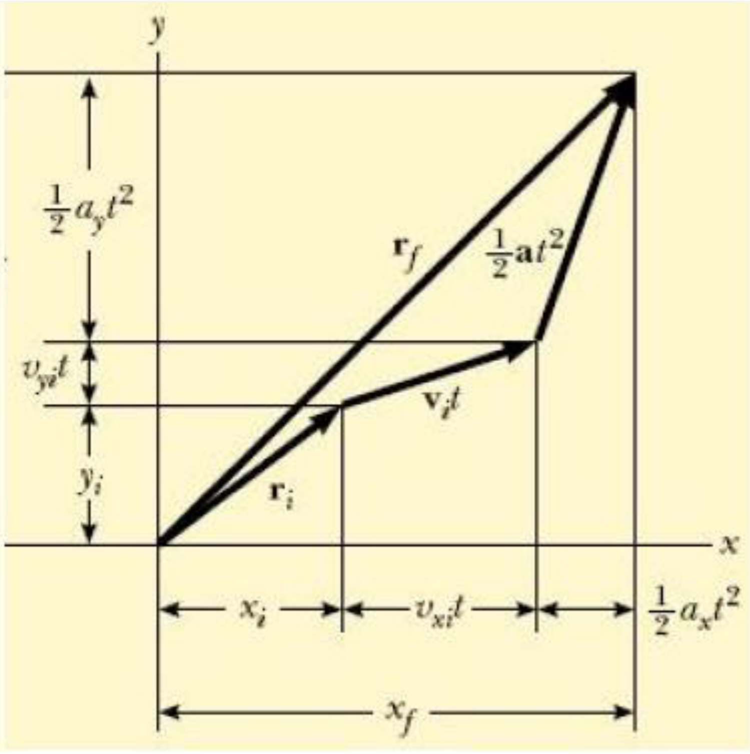
Sabit ivme ile hareket eden bir cismin iki boyutta son konum değerleri

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \qquad y_f = y_i + v_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$r_f = (x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2)\hat{i} + (y_i + v_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2)\hat{j}$$

$$r_f = (x_i\hat{i} + y_i\hat{j}) + (v_{xi}\hat{i} + v_{yi}\hat{j})t + \frac{1}{2}(a_x\hat{i} + a_y\hat{j})t^2 = r_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2$$



# FİZİK – 1 MEKANİK (İki Boyutta Hareket)

Sabit ivme ile hareket eden bir cismin son hızı ve son konumu;

$$v_f = v_i + at \qquad \begin{Bmatrix} v_{xf} = v_{xi} + a_x t \\ v_{yf} = v_{yi} + a_y t \end{Bmatrix}$$

$$r_f = r_i + v_i t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad \begin{Bmatrix} x_f = x_i + v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y_f = y_i + v_{yi} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \end{Bmatrix}$$

## ÖRNEK 4.1 Düzlemde Hareket

Bir parçacık 20 m/s 'lik $x$ bileşenli ve –15 m/s 'lik $y$ bileşenli ilk hızla $t = 0$ 'da orijinden harekete geçmektedir. Parçacık sadece, $a_x = 4\ \text{m/s}^2$ ile verilen ivmenin $x$ bileşeniyle $xy$ düzleminde hareket etmektedir. (a) Zamanın fonksiyonu olarak herhangi bir andaki hızın bileşenlerini ve toplam hız vektörünü bulunuz.

**Çözüm** Problemi dikkatle okuduktan sonra $v_{xi} = 20$ m/s, $v_{yi} = -15$ m/s, $a_x = 4.0\ \text{m/s}^2$ ve $a_y = 0$ alınacağı görülür. Bunlar kullanılarak kabaca bir hareket diyagramı taslağı çizilebilir. Hızın $x$ bileşeni 20 m/s ile başlar ve her saniye 4 m/s artar. $y$ bileşeni –15 m/s lik ilk değerini hep korur. Bu bilgilerle Şekil 4.5 de görüldüğü gibi belli sayıda hız vektörü çizilebilir. Ardışık görüntüler arasındaki aralıkların hızın artması nedeniyle zamanla arttığına dikkat ediniz.

Kinematik eşitlikler,

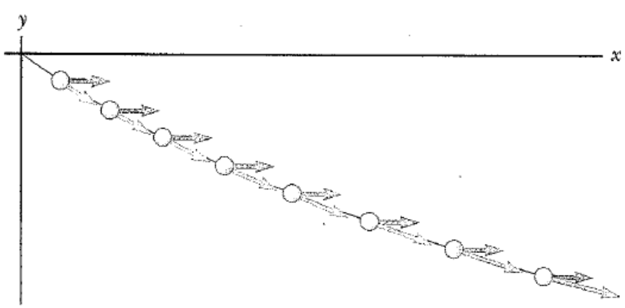
$$v_{xs} = v_{xi} + a_x t = (20 + 4t)\ \text{m/s}$$

$$v_{ys} = v_{yi} + a_y t = -15\ \text{m/s} + 0 = -15\ \text{m/s}$$

verir. O nedenle

$$\mathbf{v}_s = v_{xs}\mathbf{i} + v_{ys}\mathbf{j} = [(20 + 4t)\mathbf{i} - 15\mathbf{j}]\ \text{m/s}$$

elde ederiz.




**Şekil 4.5** Parçacığın hareket diyagramı

Bu sonucu doğrudan doğruya 4.8 Eşitliğini kullanarak ve $\mathbf{a} = 4\mathbf{i}\ \text{m/s}^2$ ve $\mathbf{v}_i = (20\mathbf{i} - 15\mathbf{j})$ m/s olarak elde edebilirdik. Bu sonuca göre, hızın $y$ bileşeni sabit kalırken $x$ bileşeni artar, bu bizim önceden bildirdiğimiz sonuçla uyumludur. Uzun zaman sonra, $x$ bileşeni öyle büyük olacaktır ki $y$ bileşeni ihmal edilebilecektir. Eğer Şekil 4.5 'deki cismin yolunu uzatabilseydik, eninde sonunda o hemen $x$ eksenine paralel olacaktı. Son cevaplar ve başlangıçta söylenen şartlar arasında karşılaştırmalar yapmak daima yararlıdır.

(b) $t = 5$ s 'de parçacığın hızının büyüklük, yön ve doğrultusunu hesaplayınız.

**Çözüm** $t = 5$ s ile, (a) dan çıkan sonuç

$$\mathbf{v}_s = \{[20 + 4(5)]\mathbf{i} - 15\mathbf{j}\}\ \text{m/s} = (40\mathbf{i} - 15\mathbf{j})\ \text{m/s}$$

verir. Yani, $t = 5$ s 'de, $v_{xs} = 40$ m/s ve $v_{ys} = -15$ m/s 'dir. Bu iki bileşenin bilinmesiyle, hız vektörünün hem doğrultusunu hem de büyüklüğünü bulabiliriz. $t = 5$s 'de $\mathbf{v}$ 'nin $x$ ekseniyle yaptığı $\theta$ açısı, $\tan\theta = v_{ys}/v_{xs}$ veya,

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{ys}}{v_{xs}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-15\ \text{m/s}}{40\text{m/s}}\right) = -21^{\circ}$$

bulunur. Burada eksi işareti $x$ ekseninin altında 21° 'lik bir açıyı gösterir. $v$ 'nin büyüklüğü olarak

$$v_s = |\mathbf{v}_s| = \sqrt{v_{xs}^2 + v_{ys}^2} = \sqrt{(40)^2 + (-15)^2}\ \text{m/s} = 43\ \text{m/s}$$

bulunur. Bulduğumuz sonuca baktığımızda, eğer $\mathbf{v}_i$ 'nin $x$ ve $y$ bileşenlerinden $v_i$ 'yi hesaplarsak $v_s > v_i$ olduğunu bulacağımızı farkederiz. Bu mantıklı mıdır?

(c) Herhangi bir $t$ anındaki $x$ ve $y$ koordinatlarını ve bu andaki yer değiştirme vektörünü bulunuz.

**Çözüm** $t = 0$ da, $x_i = y_i = 0$ olduğundan 2.11 Eşitliği

$$x_s = v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 = \quad (20t + 2t^2)\ \text{m}$$

$$y_s = v_{yi}t = \quad (-15t)\ \text{m}$$

verir. O nedenle, herhangi bir $t$ anındaki yerdeğiştirme vektörü

$$\mathbf{r}_s = x_s\mathbf{i} + y_s\mathbf{j} = \quad [(20t + 2t^2)\mathbf{i} - 15t\mathbf{j}]\ \text{m}$$

olur, veya $\mathbf{r}$ 'yi 4.9 Eşitliğinde $\boldsymbol{v}_i = (20\mathbf{i} - 15\mathbf{j})$ m/s ve $\mathbf{a} = 4\mathbf{i}$ m/s$^2$ ile doğrudan elde edebilirdik. Deneyiniz. Böylece, örneğin, $t = 5$ s de, $x = 150$ m ve $y = -75$ m veya $\mathbf{r}_s = (150\mathbf{i} - 75\mathbf{j})$ m 'dir. Parçacığın $t = 5$ s 'de orijinden bu noktaya uzaklığı veya yerdeğiştirmenin büyüklüğü $\mathbf{r}_s$ 'nin bu esnadaki büyüklüğü olup,

$$r_s = |\mathbf{r}_s| = \sqrt{(150)^2 + (-75)^2}\ \text{m} = 170\ \text{m}$$

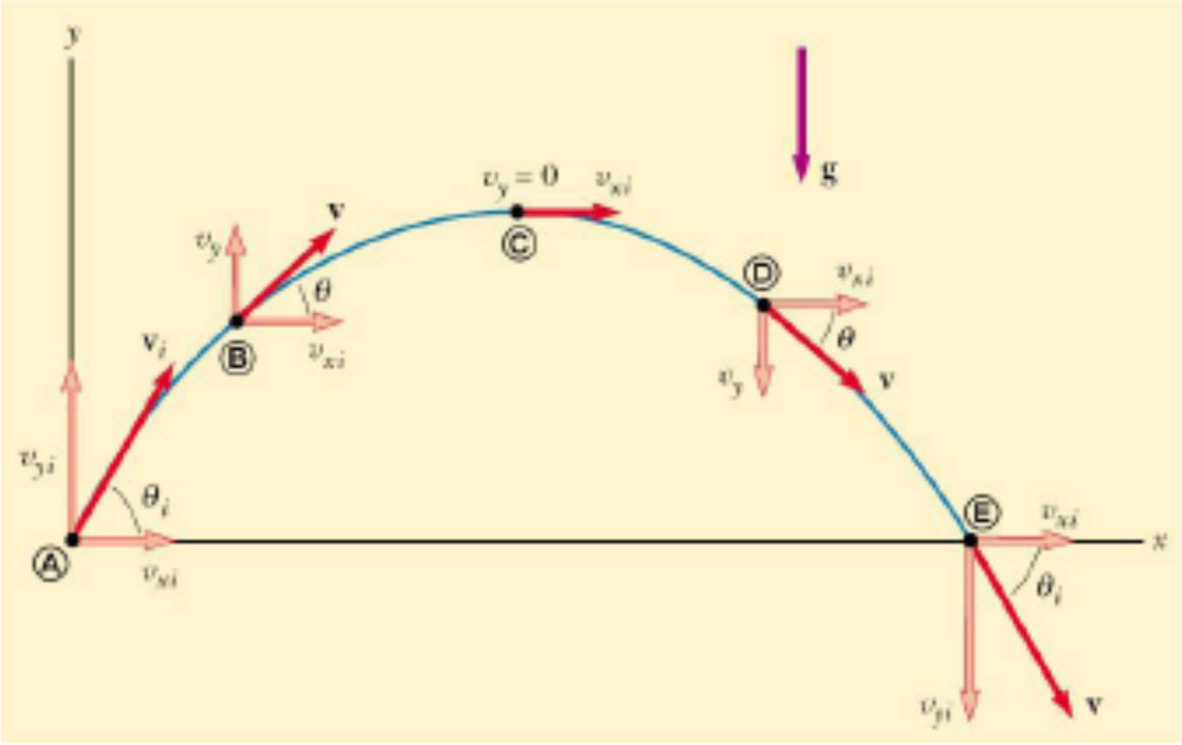
olacaktır. Bunun, parçacığın bu sırada aldığı yol *olmadığına* dikkat ediniz! Eldeki verilerden bu uzaklığı bulabilir misiniz?

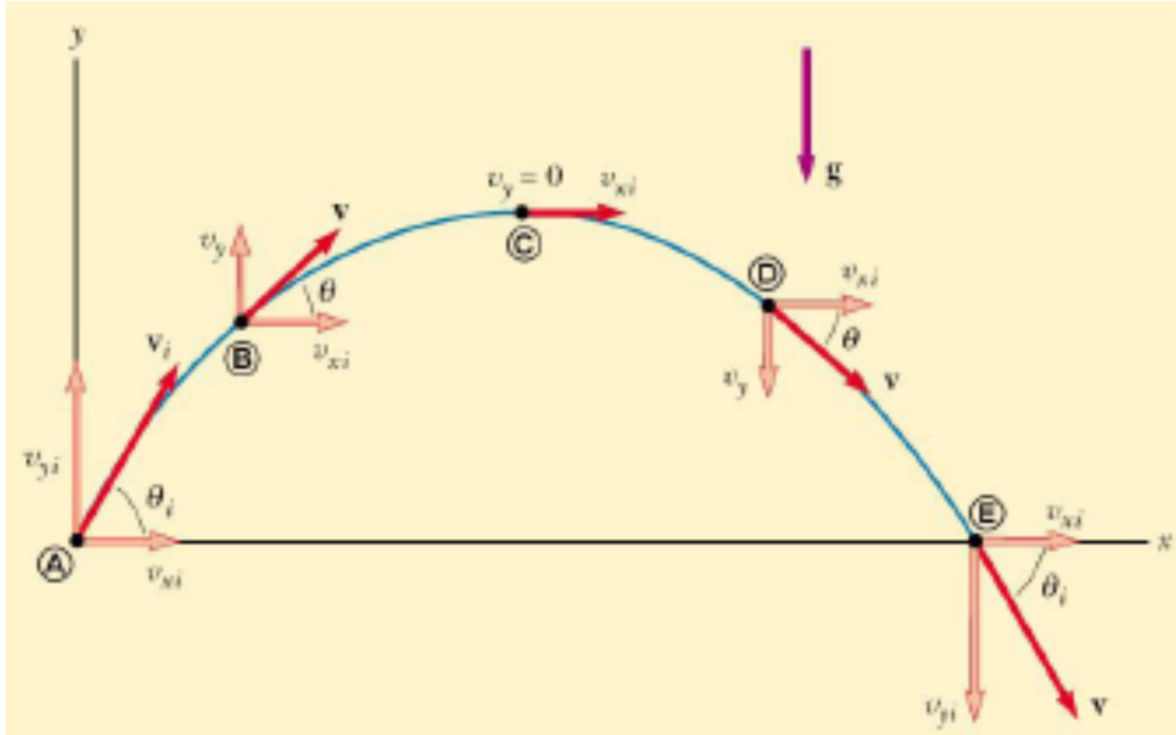
## 3. Eğik Atış Hareketi

Bir topa vurulduğunda havadaki hareketi incelendiğinde aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

- Top hareketi esnasında hızı aşağıya yönelmiş sabit g yerçekimi ivmesine bağlı olarak değişir.
- Topun hareketi esnasında hava direnci ihmal edilir.

Bu sonuçlara göre top hava içinde parabol çizerek hareket eder.






***Şekil 4.6*** Orijini $\mathbf{v}_i$ hızıyla terkeden, eğik atılan bir cismin parabolik yolu. **v** hız vektörü zamanla hem büyüklük hem de doğrultuca değişmektedir. Bu değişme, negatif $y$ doğrultusundaki ivme sonucudur. Yatay doğrultu boyunca hiç bir ivme olmadığından, hızın $x$ bileşeni zamana göre sabit kalır. Yolun tepe noktasında hızın $y$ bileşeni sıfırdır.

# FİZİK – 1 MEKANİK (İki Boyutta Hareket)

$$\cos\theta_i = v_{xi}/v_i \qquad \sin\theta_i = v_{yi}/v_i$$

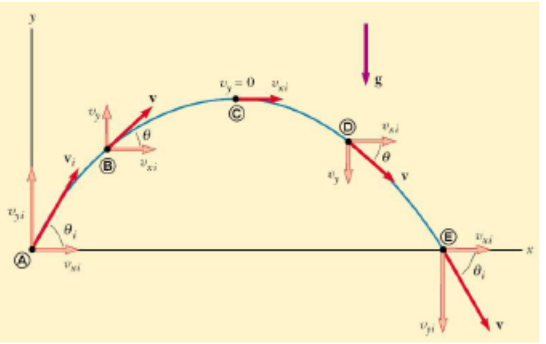
$$v_{xi} = v_i\cos\theta_i \qquad v_{yi} = v_i\sin\theta_i$$

$$x_f = v_{xi}t = (v_i\cos\theta_i)\,t \qquad t = x_f/(v_i\cos\theta_i)$$

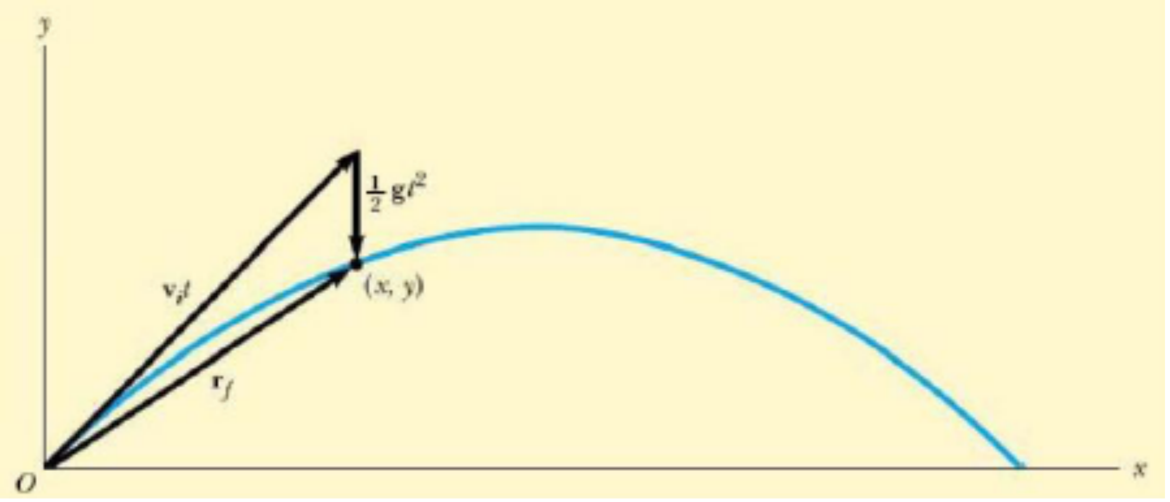
$$y_f = v_{yi}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 = (v_i\sin\theta_i)\,t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$y_i = 0$ and $a_y = -g$

$$y = (\tan\theta_i)\,x - \left(\frac{g}{2v_i^2\cos^2\theta_i}\right)x^2$$



## Eğik Hareket




- ✓ Yatay doğrultuda **Sabit Hızla** hareket edilir
- ✓ Düşey doğrultuda **Sabit İvmeli** bir hareket vardır.

$$y = (\tan \theta_i)x - \left(\frac{g}{2v_i^2 \cos^2\theta_i}\right)x^2$$

Bu ifade $0 < \theta_i < \pi/2$ aralığında geçerlidir. Bu eşitlik eğik olarak atılan cismin yolu boyunca herhangi $(x, y)$ noktası için geçerli olduğundan $x$ ve $y$ indisleri-ni attık. Bu, orijinden geçen bir parabol denklemi olan, $y = ax - bx^2$ biçimli bir bağıntıdır. Böylece, eğik olarak atılan bir cismin izlediği yolun bir parabol olduğunu görmüş olduk. Cismin izlediği yolun, $v_i$ ilk hız ve $\theta_i$ atış açısı bilinir-se tamamen belirlendiğine dikkat ediniz.

## Eğik Atışta Cismin Menzili ve Maksimum Yüksekliği

Cismin Şekil 4.9 'daki gibi, pozitif $v_{yi}$ bileşeniyle, $t_i = 0$ 'da orijinden atıldığını varsayalım. İncelenmesi gereken ilginç iki özel hal vardır: $(R/2\ ,\ h)$ koordinatlarına sahip Ⓐ tepe ve $(R, 0)$ koordinatlara sahip Ⓑ noktaları. $R$ uzaklığına eğik atılan cismin *menzili*, $h$ uzunluğuna da *maksimum yüksekliği* denir. $h$ ve $R$ 'yi $v_i$, $\theta_i$ ve $g$ cinsinden bulmak isteyelim.

Tepe noktasında $v_{yA} = 0$ 'ı kullanarak, cismin ulaştığı maksimum $h$ yüksekliğini bulabiliriz. 4.8a Eşitliği cismin tepe noktasına ulaşması için geçen $t_A$ zamanını hesaplamakda kullanılabilir:

$$v_{ys} = v_{yi} + a_y t$$

$$0 = v_i \sin\theta_i - g t_A$$

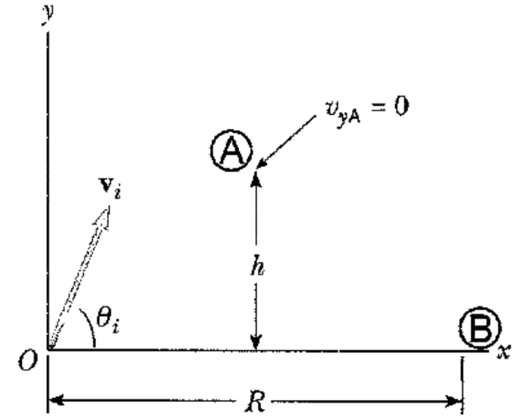
$$t_A = \frac{v_i \sin\theta_i}{g}$$

$t_A$ 'nın bu ifadesi 4.9a Eşitliğinin $y$ kısmında yerine konulursa $h$ , ilk hız vektörünün büyüklüğü ve doğrultusu cinsinden bulunur:

$$h = (v_i \sin\theta_i)\ \frac{v_i \sin\theta_i}{g} - \frac{1}{2}\, g \left(\frac{v_i \sin\theta_i}{g}\right)^2$$

$$h = \frac{v_i^2 \sin^2\theta_i}{2g} \qquad \textbf{(4.13)}$$

Eğik atışta maksimum yükseklik




***Şekil 4.9*** Bir $\mathbf{v}_i$ ilk hızıyla $t_i = 0$ 'da orijinden, eğik atılan bir cisim. Cismin maksimum yüksekliği $h$ ve menzili $R$ dir. Cismin yolunun tepe noktası olan Ⓐ 'da, parçacığın koordinatları $(R/2, h)$ dır.

$R$ menzili, cismin tepe noktasına ulaşmak için geçen zamanın iki katında yani, $t_B = 2t_A$ zamanı içinde alınan yatay uzaklıkdır. 4.9a Eşitliğinin $x$ kısmını kullanarak, $v_{xi} = v_{xB} = v_i \cos\theta_i$ olduğuna dikkat ederek ve $t = 2t_A$ da $R \equiv x_B$ alarak,

$$R = v_{xi} t_B = (v_i \cos\theta_i) 2t_A$$

$$= (v_i \cos\theta_i) \frac{2v_i \sin\theta_i}{g} = \frac{2v_i^2 \sin\theta_i \cos\theta_i}{g}$$

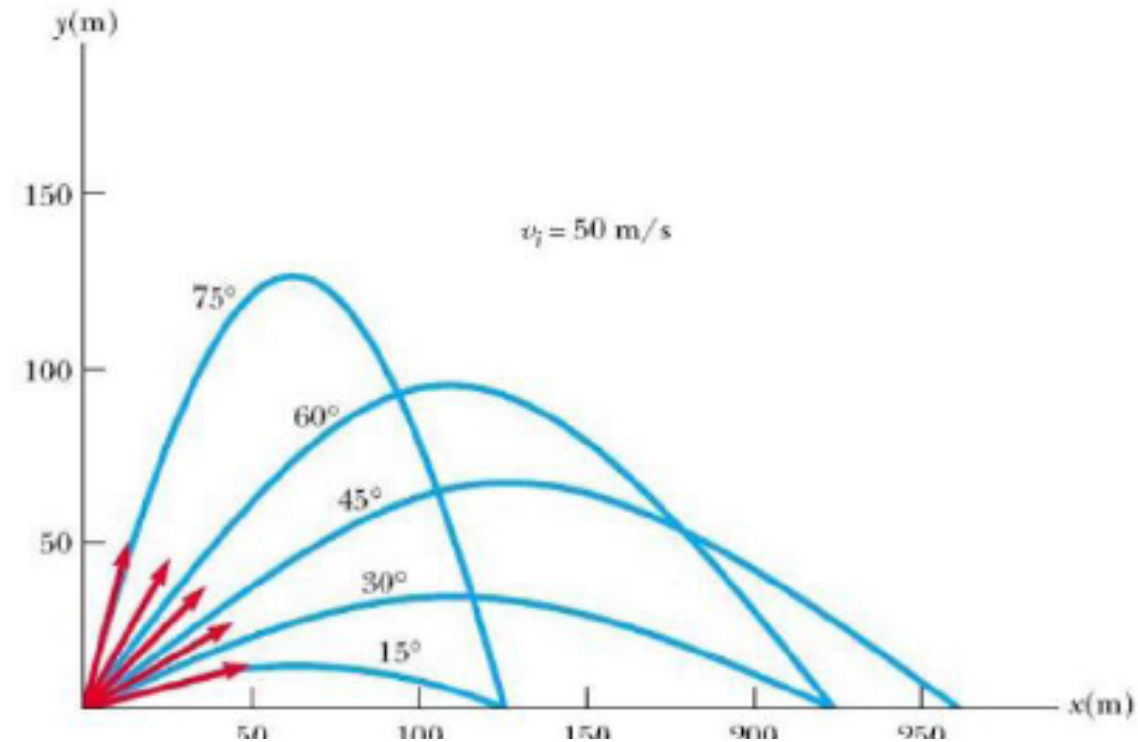
buluruz. $\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta$ özdeşliğini kullanarak (Ek B.4'e bakınız), $R$ daha sade biçimde

$$R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g} \qquad \textbf{(4.14)}$$

Eğik atışta menzil

olarak yazılabilir. Sadece $v_i$ ve $\theta_i$ biliniyorsa (yalnız $v_i$ 'nin tanımlanmış olması gerektiği anlamına gelen ve Şekil 4.9 'da görüldüğü gibi, cisim fırlatıldığı yüksekliğe geri düşerse $h$ ve $r$ 'yi hesaplamak için 4.13 ve 4.14 Eşitliklerinin kullanılabileceği unutulmamalıdır.

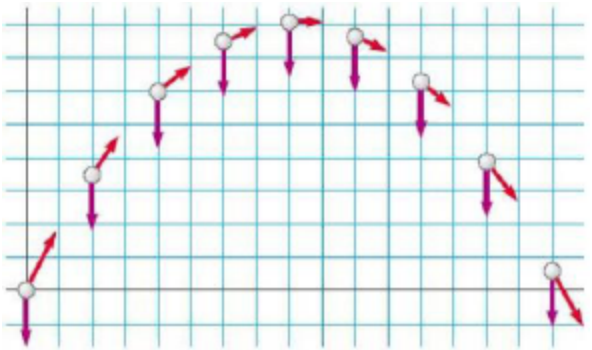
4.14 Eşitliğinden, $R$ 'nin maksimum değerinin $R_{maks} = v_i^2/g$ olduğuna dikkat etmelisiniz. Bu sonuç, $2\theta_i = 90°$ olduğunda, $\sin 2\theta_i$ 'ın maksimum değerinin 1 olması gerçeğinden çıkar. Böylece $\theta_i = 45°$ olduğu zaman $R$ 'nin maksimum olduğunu görürüz.




Şekil 4.10 belli bir ilk hızla, farklı açılarda atılan bir cismin aldığı değişik yolları göstermektedir. Gödüğünüz gibi $\theta_i = 45°$ için menzil maksimum değere sahiptir. Ayrıca $\theta_i = 45°$ 'den farklı herhangi bir $\theta_i$ açısı için $(R, 0)$ karteziyen koordinatlarına sahip bir noktaya örneğin 75° ve 15° gibi, $\theta_i$'nin iki bütünler değerinden herhangi biriyle ulaşılabilir. Kuşkusuz $\theta_i$'nin bu iki değeri için maksimum yükseklik ve uçuş zamanı, bütünler değer için olan maksimum uçuş yüksekliği ve zamandan farklıdır.

**Örnek 2:** Eğik Hareket

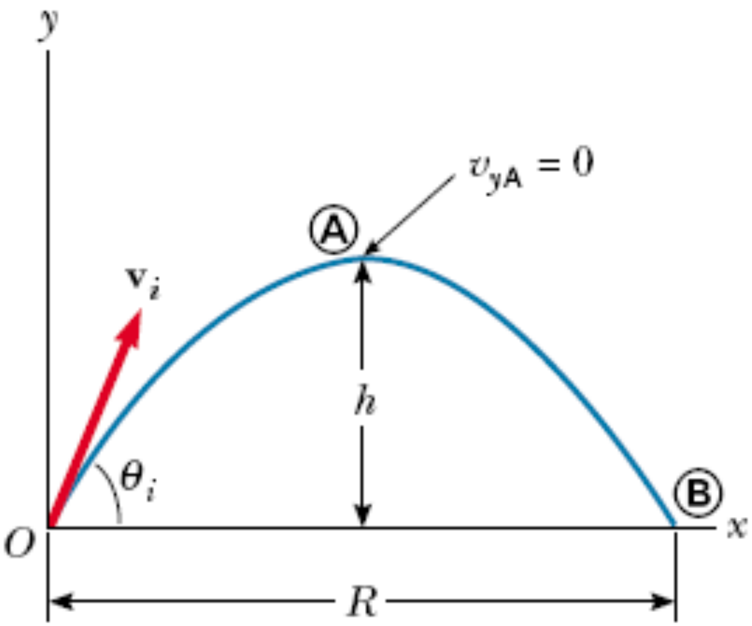
Bir cismin düşey ve yatay hız değerleri 40 m/sn ve 20 m/sn dir. Cismin tekrar yere düşene kadar geçen zamanı ve menzilini hesaplayınız.



$$v_{yf} = v_{yi} + a_y t$$

$$0 = v_i \sin\theta_i - g t_A \qquad \mathbf{r} = \mathbf{v}_i t + \tfrac{1}{2}\mathbf{g} t^2$$

$$= \frac{v_i \sin\theta_i}{g}$$




$$h = (v_i \sin\theta_i)\frac{v_i \sin\theta_i}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_i \sin\theta_i}{g}\right)^2$$

$$h = \frac{v_i^2 \sin^2\theta_i}{2g} \qquad v_{xi} = v_{xB} = v_i \cos\theta_i$$

$$t = 2t_A \text{ de } \quad x_B = R$$

$$R = v_{xi} t_B = (v_i \cos\theta_i) 2t_A$$

$$= (v_i \cos\theta_i)\frac{2v_i \sin\theta_i}{g} = \frac{2v_i^2 \sin\theta_i \cos\theta_i}{g}$$

Menzil $R = \dfrac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g}$ $\quad$ $R$ is a maximum when $\theta_i = 45°$.

# FİZİK – 1 MEKANİK (İki Boyutta Hareket)

**Örnek 3:** Uzun Atlama

Bir Tek Adım Uzun Atlama sporcusu sıçrama noktasından yatayla 20 derecelik açı ve 11 m/sn ilk hızla atlama hareketine başlıyor. Yatay yönde ne kadar uzaklığı atlayabileceğini bulunuz. (Menzili ne kadardır)

$$x_s = x_B = (v_i \cos\theta_i)\, t_B = (11 \text{ m/s})(\cos 20°)\, t_B$$

Sıçramanın toplam süresi bilinirse $x_B$ 'nin değeri bulunabilir. $a_y = -g$ olduğunu hatırlayarak ve 4.8a Eşitliğinin $y$ kısmını kullanarak $t_B$'yi bulabiliriz. Sıçramanın tepe noktasında, hızın $v_{yA}$ düşey bileşeninin sıfır olduğunu da gözönüne alıyoruz:

$$v_{ys} = v_{yA} = v_i \sin\theta_i - g t_A$$

$$0 = (11\text{m/s}) \sin 20° - (9{,}80 \text{ m/s})^2 t_A$$

$$t_A = 0{,}384 \text{ s}$$

Bu, sıçramanın *tepe* noktasına ulaşmak için geçen zamandır. Düşey hareketin simetrisi nedeniyle uzun atlayıcı, zemine geri dönmeden önce aynı süre geçer. O nedenle, havadaki *toplam süre* $t_B = 2t_A = 0{,}768$ s 'dir. Bu, $x_s$ 'nin yukarıdaki ifadesinde yerine konulursa

$$x_s = x_B = (11\text{m/s})\ (\cos 20°)\ (0{,}768\text{s}) = \quad 7{,}94 \text{ m}$$

olur. Dünya çapında bir atlet için bu akla yatkın bir sonuçtur.

(b) Ulaşılan maksimum yükseklik nedir?

**Çözüm** Ulaşılan maksimum yüksekliği 4.11 Eşitliğini kullanarak buluruz:

$$y_{\max} = y_{\mathsf{A}} = (v_i \sin\theta_i)\, t_{\mathsf{A}} - \tfrac{1}{2}\ g{t_{\mathsf{A}}}^2$$

$$= (11\text{m/s})\,(\sin\ 20°)\,(0{,}384\ \text{s})^2$$

$$-\ \tfrac{1}{2}\ (9{,}80\ \text{m/s}^2)\ (0{,}384\ \text{s})^2$$

$$=\quad 0{,}722\ \text{m}$$

Sporcunun hareketinin eğik atılan bir cismin hareketi olduğu varsayımı, durumun basite indirgenişdir. Yine de, elde edilen değerler akla yatkındır.

***Alıştırma*** Bu hesapları kontrol etmek için, maksimum yüksekliği ve menzili bulmak üzere 4.13 ve 4.14 Eşitliklerini kullanınız.

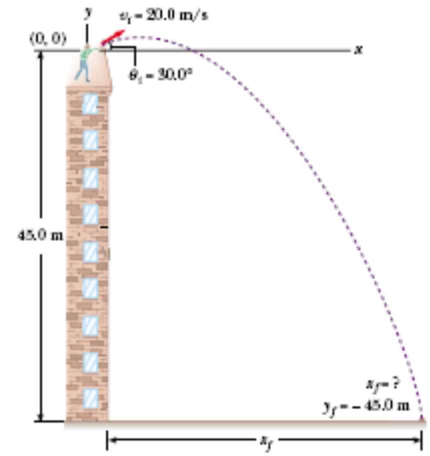
# FİZİK – 1  MEKANİK (İki Boyutta Hareket)

**Örnek :** Güçlü Bir Kol

Bir taş, bir binanın tepesinden yatayla $30^0$ lik bir açıyla ve 20 m/sn'lik bir ilk hızla yukarıya doğru fırlatılmaktadır. Binanın yüksekliği 45 m ise;

a) Taş ne kadar süre havada kalır,

b) Zemine çarpmadan hemen önceki hızının büyüklüğü ve taşın menzili ne kadardır.



**Çözüm** Şekil 4.12 de çeşitli parametreleri gösterdik. Problemleri kendi kendinize çözerken, daima bunun gibi bir çizim yapmalı ve çizimde değerleri yerli yerine koymalısınız.

Taşın ilk hızının $x$ ve $y$ bileşenleri,

$$v_{xi} = v_i \cos \theta_i = (20\text{m/s})(\cos 30°) = 17{,}3\text{m/s}$$

$$v_{yi} = v_i \sin\theta_i = (20\text{m/s})(\sin 30°) = 10 \text{ m/s}$$

dir. $t$ yi bulmak için, $y_s = -45$ m, $a_y = -g$ ve $v_{yi} = 10$ m/s alarak $y_s = v_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2$ (4.9a Eşitliğini) kullanabiliriz (Binanın çatısını orijin olarak seçtiğimizden $y_s$ nin sayısal değerinde eksi işareti vardır):

$$-45\text{m} = (10 \text{ m/s})\,t - \tfrac{1}{2}(9{,}80\text{m/s}^2)\,t^2$$

$t$ için ikinci dereceden denklemin çözülürse, pozitif kök için, $t = 4{,}22$ s olur. Negatif kökün herhangi bir anlamı var mıdır? (Verilen bilgilerden $t$ yi bulmanın başka bir yolu olduğunu düşünebilir misiniz?)

(b) Zemine çarpmadan hemen önce taşın hızının büyüklüğü nedir?

**Çözüm** Taşın zemine çarpmadan hemen önce, hızının $y$ bileşenini elde etmek için, $v_{ys} = v_{yi} + a_y t$ eşitliğinde $t = 4{,}22$ s koyarak bulabiliriz:

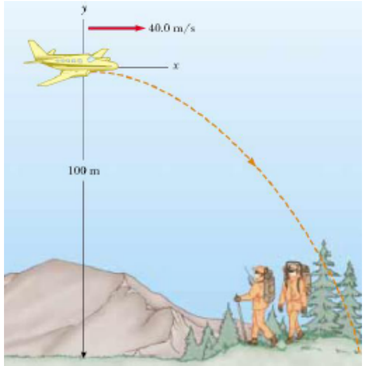
$$v_{ys} = 10{,}0\text{m/s} - (9{,}80\text{m/s}^2)(4{,}22\text{s}) = -31{,}4 \text{ m/s}$$

Eksi işareti taşın aşağıya doğru hareket ettiğini gösterir. $v_{xs} = v_{xi} = 17{,}3$ m/s olduğundan, gerek duyulan hız

$$v_s = \sqrt{v_{xs}^2 + v_{ys}^2} = \sqrt{(17{,}3)^2 + (-31{,}4)^2}\text{m/s} = 35{,}9 \text{ m/s}$$

**Alıştırma** Taş zemine nerede çarpar?

**Cevap** Binanın zemininden itibaren 73 m.




**Örnek 6:** Zor Durumdaki Kaşifler

Bir Alaska cankurtaran uçağı zor durumdaki bir grup kaşife acil kumanya paketi atıyor. Uçak yerden 100 m yükseklikte 40 m/sn hızla yatay olarak yol alıyorsa, paket, bırakıldığı noktaya göre yere nerede çarpar.

$$x_s = (40\ \mathrm{m/s})\ t$$

elde ederiz.

Paketin havada bulunduğu $t$ süresi bilinirse, paket tarafından yatay doğrultuda alınan yolun $x_s$ uzunluğu bulunabilir. $t$'yi bulmak için, paketin düşey hareketini tanımlayan denklemlerden yararlanırız. Paket yere çarptığı anda $y$ koordinatının $y_s = -100$ m olduğunu biliyoruz. Paketin düşey doğrultudaki ilk hızının $v_{yi}$ bileşeninin de bırakılma anında hızın yalnız yatay bileşeni olması nedeniyle sıfır olduğunu biliyoruz.

4.9a Eşitliğinden,

$$y_s = -\ \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$-100\ \mathrm{m} = -\tfrac{1}{2}(9{,}80\ \mathrm{m/s^2})\, t^2$$

$$t = 4{,}52\mathrm{s}$$

Uçuş zamanının bu değeri $x$ koordinatını veren eşitlikte yerine konularak,

$$x_s = (40\mathrm{m/s})(4{,}52\mathrm{s}) = 181\ \mathrm{m}$$

bulunur. Paket atıldığı noktanın 181 m yere çarpar.

***Alıştırma*** Tam yere çarpmadan önce paketin hızının yatay ve düşey bileşenleri nedir?

***Cevap*** $v_{xs} = 40$ m/s; $v_{ys} = -44{,}3$ m/s.

## ÖRNEK 4.7 Kayakla Atlayışın Son Noktası

Bir kayak sporcusu, kayak pistini Şekil 4.14 'deki gibi 25 m/s 'lik hızla yatay doğrultuda giderek terkeder. Aşağıya inişinde 35° 'lik bir eğimle düşer. (a) Sporcu tepeden aşağıya nereye düşer?

**Çözüm** Kayakçının havada 10 s 'den daha kısa süre kalacağını beklemek akla yatkındır ve böylece, yatay olarak 250 m 'den daha uzağa gitmeyecektir. Yokuş boyunca alınan $d$ yolunun aynı mertebede olacağını bekleyecektik. Atlayışın başlangıcını orijin ($x_i = 0$, $y_i = 0$) olarak seçmek uygundur. Bu halde, $v_{xi} = 25$ m/s ve $v_{yi} = 0$ olduğundan, 4.9 Eşitliğinin $x$ ve $y$ bileşen biçimleri

(1) $\quad x_s = v_{xi}t = (25\text{m/s})t$

(2) $\quad y_s = \frac{1}{2}a_y t^2 = -\frac{1}{2}(9{,}80)\text{m/s}^2)t^2$

dir. Şekil 4.14 'deki dik üçgenden, iniş noktasında kayakçının $x$ ve $y$ koordinatlarının $x_s = d\cos 35°$ ve $y_s = -d\sin 35°$ ile verildiğini anlarız. Bu bağıntıların (1) ve (2) de yerine konulursa,

(3) $\quad d\cos 35° = (25\text{m/s})t$

(4) $\quad -d\sin 35° = \frac{1}{2}(9{,}8\text{ m/s}^2)t^2$

bulunur. Bu denklemlerden $t$ nin yok edilirse, $d = 109$ m bulunur. O halde, kayakçının yere indiği noktanın $x$ ve $y$ koordinatları

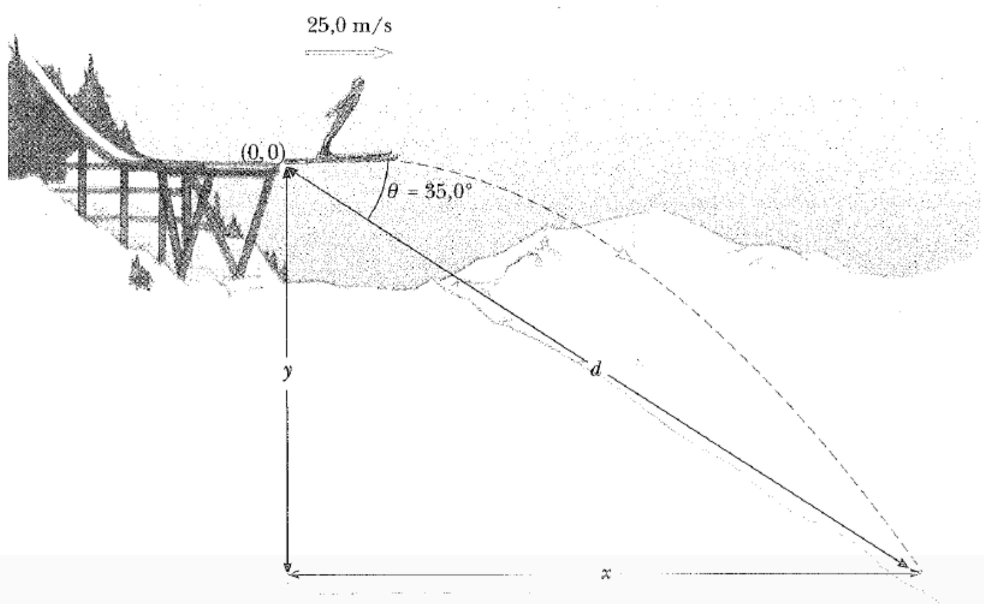
$$x_s = d\cos 35° = (109\text{ m})\cos 35° = 89{,}3\text{ m}$$

$$y_s = -d\sin 35° = -(109\text{ m})\sin 35° = -62{,}5\text{ m}$$

olursak bulunur.

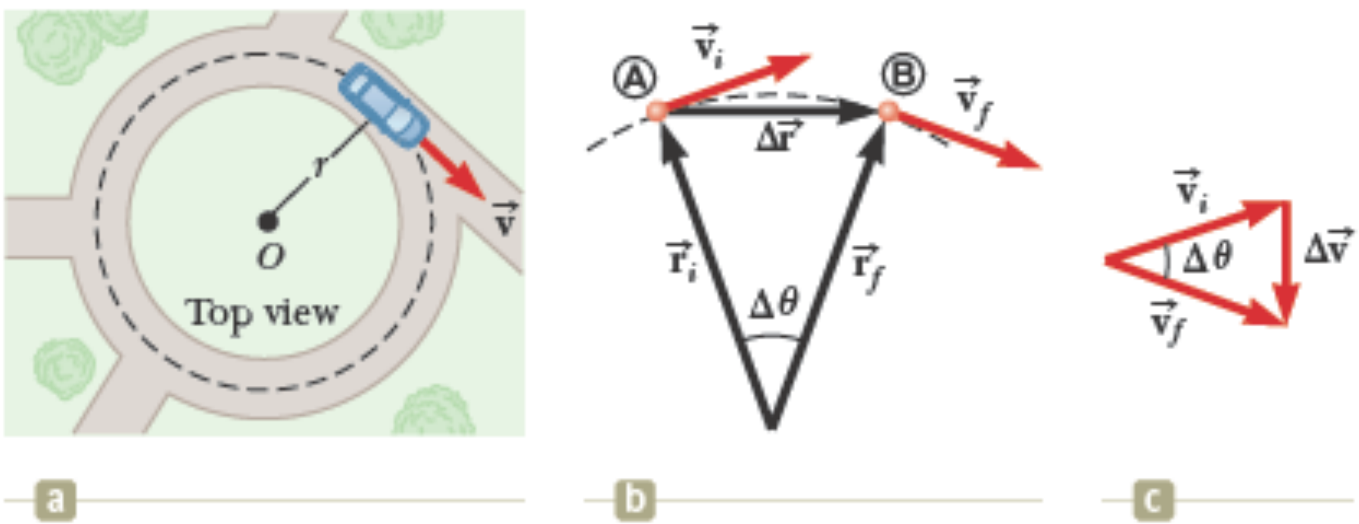
**Alıştırma** Sporcunun havada ne kadar süre kalacağını ve yere inmeden hemen önce hızının düşey bileşenini hesaplayınız.

**Cevap** 3,57 s ; –35,0 m/s

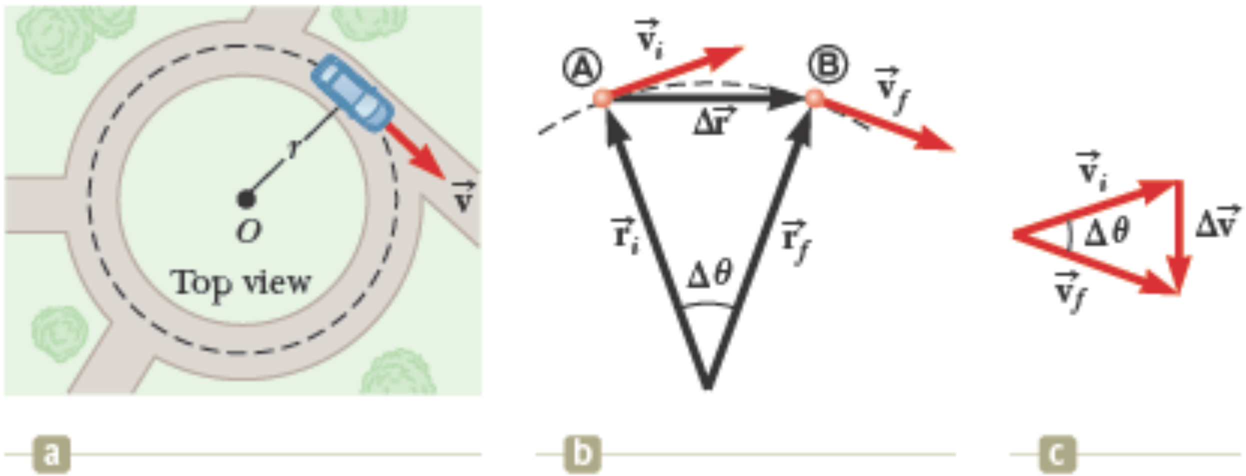


## 4. Düzgün Dairesel Hareket

Aşağıda şekilde görüldüğü gibi sabit v hızı ile dairesel yolda hareket eden bir arabanın hareketine ***Düzgün Dairesel Hareket*** denir. Arabanın doğrultusu değiştiğinden arabanın bir ivmesi vardır. Hız vektörü dairenin yarıçapına dik ve yola teğettir.



# FİZİK – 1 MEKANİK (İki Boyutta Hareket)




Buna mukabil ivme vektörü daima yola dik ve dairenin merkezine yönelmiştir. Bu tür ivmeye ***Merkezcil İvme*** denir ve büyüklüğü $a_r = v^2 / r$ ile verilir. Büyüklükleri aynı sadece doğrultuları farklı $v_s$ ve $v_i$ hızları dikkate alınarak hareketin ortalama ivmesi

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \bar{a} = \frac{v_s - v_i}{t_s - t_i} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

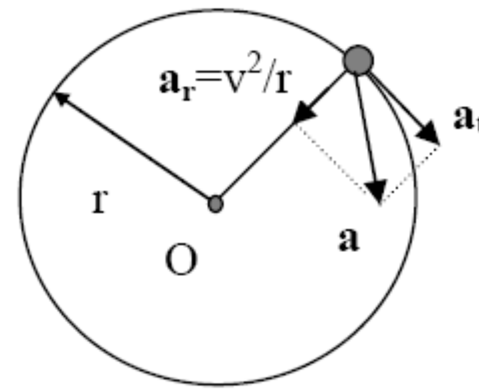
Şeklin b ve c ‘de gösterilen kenarları Δr ve r üçgen ile kenarları Δv ve v üçgenleri benzer üçgenlerdir. Üçgen benzerliklerinden $\frac{|\Delta\vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{r} \Rightarrow |\Delta\vec{v}| = \frac{v|\Delta\vec{r}|}{r}$ yazılabilir, bu değer ortalama ivme formülünde yerine konulursa; $|\vec{a}_{Ort}| = \frac{v|\Delta\vec{r}|}{r\Delta t}$

Buradan Δt→0 limit değerlerine geçilerek ***Merkezcil İvme*** $a_r = v^2 / r$ olarak elde edilir.

## 5. Teğetsel ve Radyal İvme

Bir parçacığın hızının hem büyüklüğünün hem de doğrultusunun değiştiğini kabul edelim. Bu durumda merkezcil ivmeye ($a_r$) ek olarak cismin teğetsel hızının değişiminden dolayı da teğetsel bir ivme de oluşacaktır.

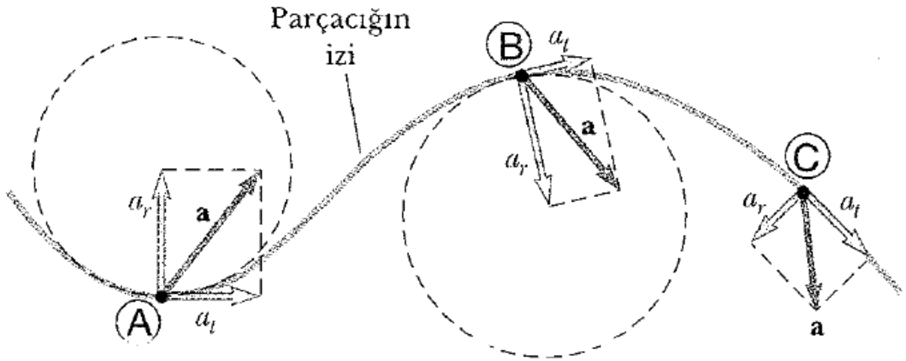
***Teğetsel İvme**:* Parçacığın hızının büyüklüğündeki değişimden kaynaklanır. Yönü ani hız yönündedir ve büyüklüğü: $a_t = \Delta v / \Delta t$




***Çapsal (Radyal) İvme**:* Dairesel hareket yapan bir cismin hız vektörünün sadece doğrultusundaki değişimden kaynaklanır ve büyüklüğü $a_r = v^2 / r$

Bileşke ivme en genel olarak bu iki vektörün vektörel toplamı olarak ifade edilir:

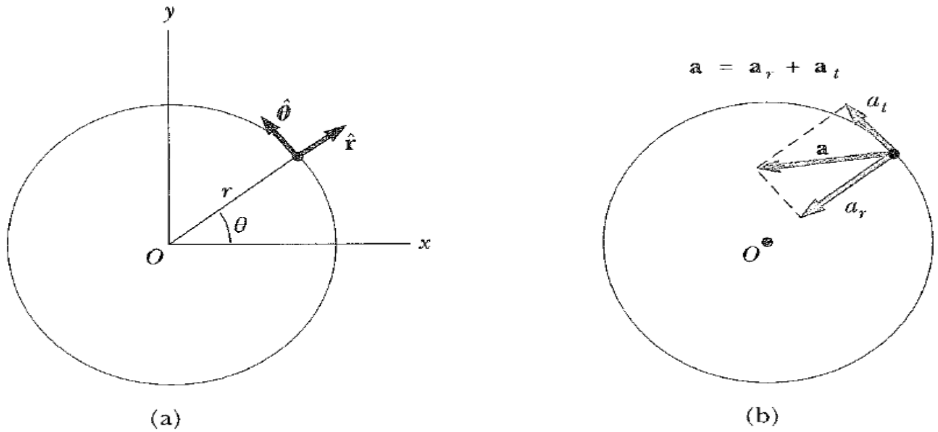
$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$ Bu ivme vektörünün büyüklüğü: $a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$ ile verilir.




**Şekil 4.17** Bir parçacığın $xy$ düzleminde yer alan herhangi bir eğrisel yörüngedeki hareketi. **v** (daima yörüngeye teğet) hız vektörünün doğrultusu ve büyüklüğü değişirse, parçacığın **a** ivmesinin bileşen vektörleri, $\mathbf{a}_t$ teğetsel ivme vektörü ve $\mathbf{a}_r$, radyal ivme vektörüdür.

larından $a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$ olduğu anlaşılır. Düzgün dairesel harekete benzer tarzda, düzgün olmayan dairesel harekettede $\mathbf{a}_r$ daima, Şekil 4.17 'de görüldüğü gibi eğrinin merkezine doğru yöneliktir. Aynı şekilde, belli bir hızda, eğrilik yarıçapı küçük olduğu zaman (Şekil 4.17 'de Ⓐ ve Ⓐ noktalarındaki gibi) $a_r$ büyük; $r$ büyük olduğu zaman (Ⓒ noktasındaki gibi) $a_r$ küçüktür. $\mathbf{a}_t$ 'nin yönü ya (eğer $v$ artıyorsa) **v** ile aynı yönde ya da (eğer $v$ azalıyorsa) **v** ile zıt yöndedir.

$v$ 'nin sabit olduğu düzgün dairesel hareket halinde, Kesim 4.4 de tanımladığımız gibi $a_t = 0$ ve ivme daima radyaldir (*Not*: 4.18 Eşitliği, 4.15 Eşitliğine özdeştir). Diğer bir ifadeyle, düzgün dairesel hareket, eğrisel bir yol boyunca olan hareketin özel bir halidir. Ayrıca **v** 'nin doğrultusu değişmez ise, o zaman radyal ivme yoktur ve hareket tek boyutludur ($a_r = 0$ fakat $a_t$ sıfır olmayabilir).




**Şekil 4.18** (a) $\hat{\mathbf{r}}$ ve $\hat{\theta}$ birim vektörlerinin tanımı. (b) Eğri bir yol (Herhangi bir anda $r$ yarıçaplı bir dairenin parçası olan) boyunca hareket eden bir parçacığın toplam **a** ivmesi radyal ve teğet bileşenlerin toplamıdır. Radyal bileşen eğrinin merkezine yöneliktir. İvmenin teğet bileşeni sıfır olursa, parçacık düzgün dairesel hareket yapar.

Dairesel yörüngede hareket eden parçacığın ivmesini birim vektörler cinsinden yazmak uygundur. Bunu, $\hat{\mathbf{r}}$ ve $\hat{\theta}$ birim vektörlerini tanımlayarak yaparız. Burada, $\hat{\mathbf{r}}$ yarıçap vektörü boyunca uzanan ve dairenin merkezinden dışa doğru radyal olarak yönelen bir birim vektör ve $\hat{\theta}$, daireye teğet bir birim vektördür. $\hat{\theta}$ 'nın doğrultusu artan $\hat{\theta}$ doğrultusundadır, burada $\hat{\theta}$ pozitif $x$ ekseninden itibaren saat yönünün aksi yönünde ölçülmektedir. Hem $\hat{\mathbf{r}}$ hem de $\hat{\theta}$ nın "parçacıkla birlikte hareket ettiğine" ve böylece zamanla değiştiğine dikkat ediniz. Bu gösterim şeklini kullanarak toplam ivmeyi,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_r = \frac{d|\mathbf{v}|}{dt}\,\hat{\theta} - \frac{v^2}{r}\,\hat{\mathbf{r}} \qquad \textbf{(4.19)}$$

olarak ifade edebiliriz. Bu vektörler Şekil 4.18b 'de gösterilmiştir. 4.19 Eşitliğinde $v^2/r$ terimindeki eksi işareti radyal ivmenin daima, $\hat{\mathbf{r}}$ ile *aksi* yönde, radyal olarak içeriye doğru yönelik olduğunu gösterir.

**Örnek 8:** Sallanan Top

0,5 m uzunluğunda bir sicimin ucuna bağlanan bir top, şekildeki gibi yerçekiminin etkisi altında düşey bir daire çerçevesinde salınmaktadır. Sicimin, düşeyle θ=20° ‘lik açı yaptığı zaman top 1,5 m/sn’lik hıza sahiptir.

a) İvmenin bu andaki çapsal ($a_r$ ) bileşenini ,

b) θ=20° olduğu zaman teğetsel ivmenin ($a_t$ ) büyüklüğünü,

c) θ=20° ‘de toplam ivmenin (a ) büyüklüğünü ve doğrultusunu bulunuz.

fikir sahibi oluruz. Şekil 4.19 duruma daha yakından bakmamıza izin verir. Radyal ivme 4.18 Eşitliği ile verilmektedir. $v = 1{,}5$ m/s ve $r = 0{,}5$ m olduğundan,

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(1{,}50\ \text{m/s})^2}{0{,}5\ \text{m}} = 4{,}5\ \text{m/s}^2$$

olduğunu buluruz.

(b) $\theta = 20°$ olduğu zaman teğetsel ivmenin büyüklüğü nedir?

**Çözüm** Top düşeyle $\theta$ açısı yaptığı zaman, $g \sin \theta$ büyüklüğünde bir teğetsel ivmeye sahiptir (**g** 'nin daire çevresine teğet bileşeni). Bu nedenle, $\theta = 20°$ 'de, $a_t = g \sin 20° = 3{,}4 \text{ m/s}^2$ olduğunu buluruz.

(c) $\theta = 20°$ 'de toplam ivmenin büyüklüğünü ve doğrultusunu bulunuz.

**Çözüm** $\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t$ olduğundan, **a** 'nın $\theta = 20°$ 'deki büyüklüğü

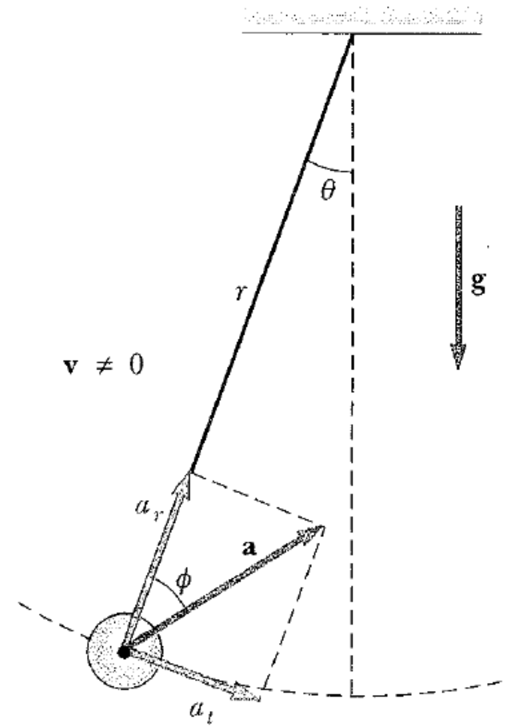
$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{(4{,}5)^2 + (3{,}4)^2} \text{ m/s}^2 = 5{,}6 \text{ m/s}^2$$

ile verilir. Eğer $\phi$, **a** ve sicim arasındaki açı ise, o zaman

$$\phi = \tan^{-1} \frac{a_t}{a_r} = \tan^{-1}\left(\frac{3{,}4 \text{ m/s}^2}{4{,}5 \text{ m/s}^2}\right) = 37°$$

dır.

**a**, $\mathbf{a}_t$ ve $\mathbf{a}_r$ vektörlerinin tümünün, top daire çevresinde salınırken doğrultu *ve* büyüklükçe değiştiğine dikkat ediniz. Top en alt seviyede olduğu zaman ($\theta = 0$), bu açıda **g** 'nin teğet bileşeni olmadığından $a_t = 0$ ve $v$ maksimum olduğundan $a_r$ *maksimum* dur. Top en yüksek noktasına ($\theta = 180°$) ulaşmak için yeterince hızlıysa o zaman, $a_t$ yine sıfır fakat $v$ minimum olduğundan, $a_r$ minimumdur. Son olarak, iki yatay konumda ($\theta = 90°$ ve $270°$), $|\mathbf{a}_t| = g$ 'dir ve $a_r$ minimum ve maksimum değerleri arasında belli bir değere sahiptir.




***Şekil 4.19*** (Örnek 4.7) $r$ uzunluklu bir sicime bağlı bir topun dairesel hareketi. Top düşey bir düzlemde salınmakta ve onun **a** ivmesi bir $\mathbf{a}_r$ radyal bileşen vektörüne ve bir $\mathbf{a}_t$ teğetsel bileşen vektörüne sahiptir.

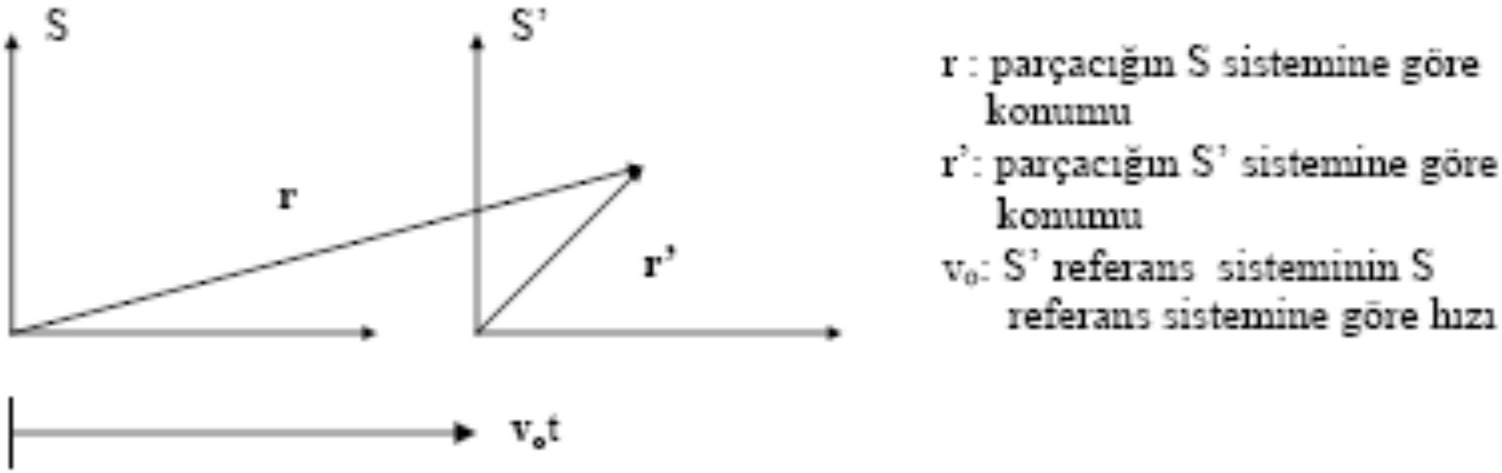
## 6. Bağıl Hız ve Bağıl İvme

Fizikte genellikle cisimlerin hareketini tanımlamak için durağan bir gözlem çerçevesi (referans sistemi) seçip hareketli cisimlerin yer değiştirme, hız, ivme vs. gibi fiziksel niceliklerini durağan gözlem çerçevesine göre belirleriz. Fakat bazı durumlarda seçtiğimiz bu gözlem çerçeveleri de hareketli olabilir. Örneğin hareket eden bir gemide yürüyen bir kişinin hareketini gemiyi referans alarak tanımladığımız durumda olduğu gibi.

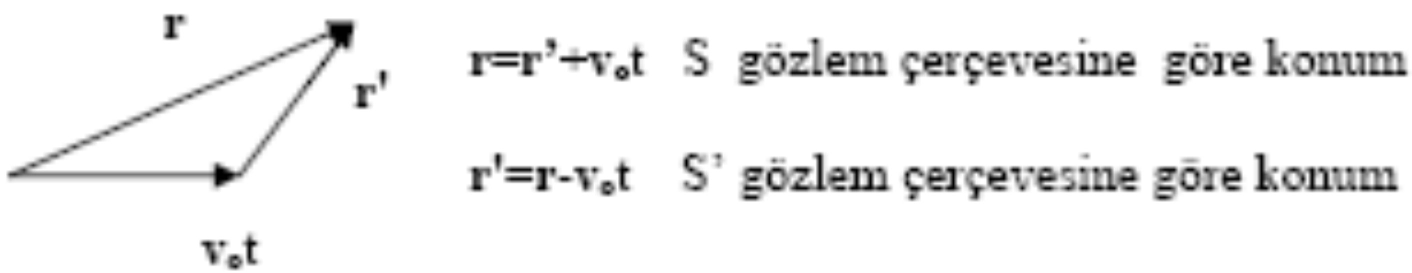
Bu şekildeki tercihlerde, hareketi tanımladığımız gözlem çerçevesi durağan gözlem çerçevesine göre hareketli olduğundan hareketi belirlemek için ölçülen nicelikler iki gözlem çerçevesinde farklı sonuçlar verir. Bu tür durumlarda cismin hareketini hareketli gözlem çerçevesine ve durağan gözlem çerçevesine bağlayan ifadeyi türetmemiz ve hızlar ve ivmeler arasında nasıl bir ilişkinin olduğunu bilmemiz gerekir.

Diyelim ki durağan gözlem çerçevemiz S, hareketli gözlem çerçevemiz de S’ olsun. S’ gözlem çerçevemiz durağan çerçeveye göre $v_o$ hızı ile ivmesiz hareket yapsın:

# FİZİK – 1 MEKANİK (İki Boyutta Hareket)




S' hareketli gözlem çerçevesinde hareketli olan cismin:
Durağan gözlem çerçevesine (S) göre konumu **r=r'+v$_o$t**




Hareketli gözlem çerçevesine (S') göre konumu ise: **r'=r-v$_o$t** şeklinde olacaktır.
Hareketli cismin gözlem çerçevelerinde gözlenen hızları arasındaki ilişki;

$$v' = \frac{dr'}{dt} = \frac{dr}{dt} - v_o$$ veya **v'=v-v$_o$** olduğu bulunur.

# FİZİK – 1 MEKANİK (İki Boyutta Hareket)

Gözlenen ivmeler arasındaki ilişki ise; olarak bulunur.

$$a = \frac{dv'}{dt} = \frac{dv}{dt} - \frac{dv_o}{dt} \qquad \frac{dv_o}{dt} = 0 \Rightarrow a = a'$$

Bu sonuçlar göstermektedir ki birbirlerine göre sabit bir hızla (ivmesiz) hareket eden gözlem çerçevelerinde parçacığın ivmesi her iki gözlem çerçevesinde de aynı; fakat hızı, gözlem çerçevelerinin birbirlerine göre hızları kadar farklı olacaktır.
Yukarıda türettiğimiz bağıl ifadeler sadece birbirlerine göre sabit hızla (ivmesiz) hareket eden gözlem çerçeveleri için geçerli olup, ivmeli gözlem çerçeveleri için geçersizdir.

**Örnek 9:** Nehri Karşıdan Karşıya Geçen Bir Tekne

Kuzeye yönelen bir tekne, geniş bir nehri suya göre 10 km/saat'lik bir hızla karşıdan karşıya geçmektedir. Nehirdeki su doğuya doğru yere göre 5 km/saat'lik düzgün bir hıza sahiptir. Teknenin kıyılardan birinde duran bir gözlemciye göre hızını bulunuz.

**Çözüm** $\mathbf{v}_{tn}$ 'nin *teknenin nehre* göre ve $\mathbf{v}_{nY}$ 'nin *nehirin yere* göre hızı oluğunu biliyoruz. Bulmak istediğimiz *teknenin yere* göre olan $\mathbf{v}_{tY}$ hızıdır. Bu üç nicelik arasındaki bağıntı

$$\mathbf{v}_{tY} = \mathbf{v}_{tn} + \mathbf{v}_{nY}$$

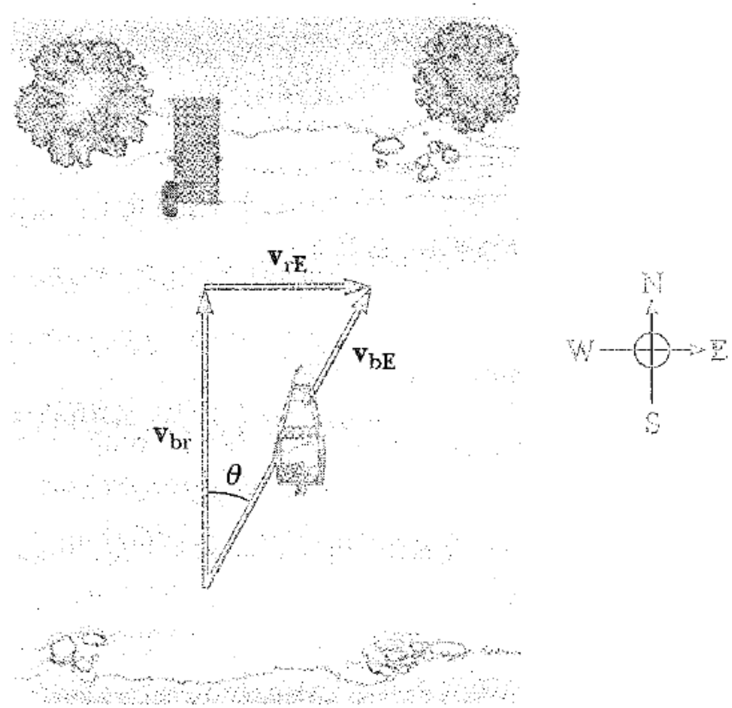
dir. Denklemdeki terimler vektörel nicelikler olarak ele alınmalıdır; vektörler Şekil 4.22 'de gösterilmektedrir. $\mathbf{v}_{tn}$ niceliği kuzeye, $v_{nY}$ doğuya doğrudur ve iki vektörün vektörel toplamı olan $\mathbf{v}_{tY}$, Şekil 4.22 'de tanımlandığı gibi bir $\theta$ açısıyla yönelir. Böylece teknenin yere göre olan hızının $v_{tY}$ büyüklüğünü Pisagor teoremini kullanarak bulabiliriz:

$$v_{tY} = \sqrt{v_{tn}^2 + v_{nY}^2} = \sqrt{(10^2 + (5)^2} \text{ km/saat}$$

$$= 11{,}2 \text{ km/saat}$$

ve $\mathbf{v}_{tY}$ 'nin yönü

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{nY}}{v_{tn}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5}{10}\right) = 26{,}6°$$



Şekil 4.22

**Örnek 10:** Bir önceki örnekte (örnek 9) hareketli gözlem çerçevesi ($v_{rE}$ =5) içinde yol alan tekne ($v_{bE}$ =10) incelenmişti. Tekne başladığı noktanın tam karşısındaki rıhtıma gidebilmesi için kuzeybatı'ya doğru kuzeyle hangi açı ile ve hızla hareketine başlamalıdır?

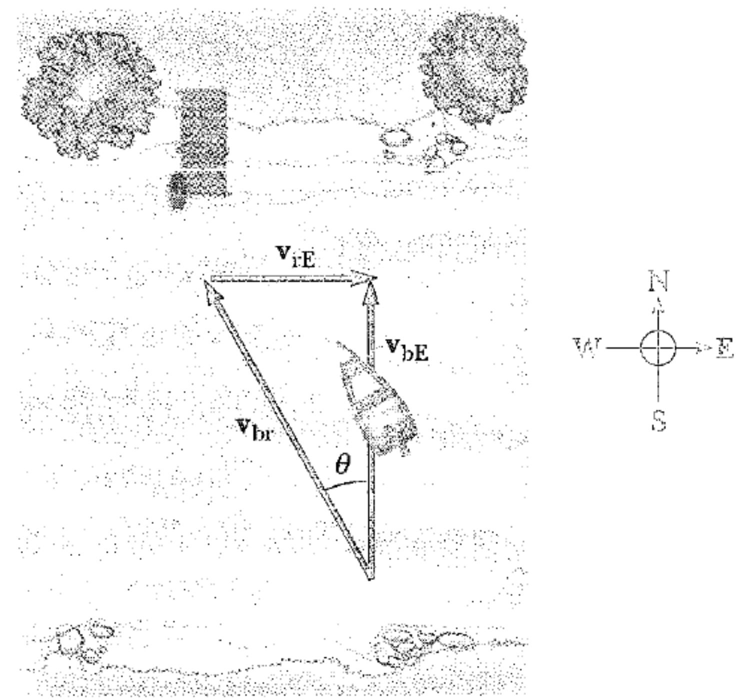
**Çözüm** Önceki örnekte olduğu gibi, $\mathbf{v}_{nY}$'yi ve $\mathbf{v}_{tn}$ vektörünün büyüklüğünü biliyoruz ve nehrin bir kıyısından karşı kıyısına yönelen $\mathbf{v}_{tY}$'yi bulmak istiyoruz. Şekil 4.23 teknenin nehrin karşı kıyısına geçerken doğruca kuzeye yol alması için akıntıya doğru baş vermesi gerektiğini göstermektedir. Şekil 4.22 'deki üçgenle Şekil 4.23'deki üçgen arasında farka -özellikle Şekil 4.23 'deki hipotenüsün $\mathbf{v}_{tY}$ 'den daha uzun olmadığına- dikkat ediniz. O nedenle, $\mathbf{v}_{tY}$'yi bulmak için Pisagor teoremini kullandığımız zaman

$$v_{tY} = \sqrt{v_{tn}^{\ 2} - v_{nY}^{\ 2}} = \sqrt{(10^2 - (5)^2}\ \text{km/saat} = 8{,}66\text{km/saat}$$

elde ederiz. Şimdi $\mathbf{v}_{tY}$'nin büyüklüğünü biliyoruz, teknenin baş verdiği doğrultuyu bulabiliriz:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{nY}}{v_{ty}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5}{8{,}66}\right) = 30°$$

Tekme dümeni 30° kuzey batıya kırmalıdır.




Şekil 4.23

# FİZİK – 1 MEKANİK (İki Boyutta Hareket)

**Örnek 11:** Bir tepede golf topuna vurulmaktadır. Golf topunun x ve y koordinatları zamana bağlı olarak aşağıdaki gibi verilmektedir.

$x=(18\ m/sn).t$ ve $y=(4\ m/sn).t-(4{,}9\ m/sn^2).t^2$

a) i ve j birim vektörlerini kullanarak topun konumunu yazınız.
b) Hız vektörü v'yi zamanın fonksiyonu olarak yazınız.
c) İvme vektörü a'yı zamanın fonksiyonu olarak yazınız.
d) 3 sn sonra golf topunun konumunu, hızını ve ivmesini hesaplayınız.

**Örnek 12:** Bir Corvette araba $\vec{a}_{Corvette}=3\vec{i}-2\vec{j}\ m/sn^2$ ve bir Jaguar araba $\vec{a}_{Jaguar}=1\vec{i}+3\vec{j}\ m/sn^2$ 'lik ivmeler ile düzlemsel xy koordinat sisteminin orijininden durgun halden harekete başladıklarına göre t=5 sn sonrasında;

a) Corvette'in Jaguar'a göre hızını,
b) Corvette ile Jaguar arasındaki uzaklığı,
c) Corvette'in Jaguar'a göre ivmesini hesaplayınız.

**Örnek 13:** Yağmur Damlası

Bir araba doğuya doğru 180 km/saat süratle ilerlemektedir. Yağmur damlalarının yere göre sabit süratle düştüklerini kabul ederek yan cama düşeyle $60^0$ 'lik bir açı yaparak düşen yağmur damlasının hızını;

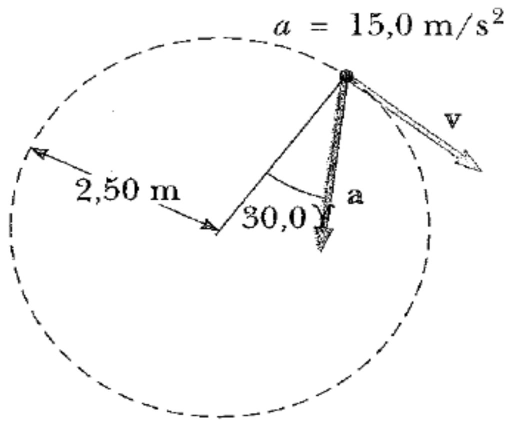
a) Yere göre,
b) Araba'ya göre hesaplayınız.

# FİZİK – 1 MEKANİK (İki Boyutta Hareket)

**Örnek 14:** Nehirde Yüzmek

Sabit 0,5 m/sn süratle akmakta olan bir nehirde bir kişi akıntıya karşı 1 km yüzüp daha sonra akıntı yönünde başlangıç noktasına dönüyor. Yüzücü 1,2 m/sn'lik sabit bir süratle yüzüyorsa başlangıç noktasına dönmesi ne kadar zaman alır. Akıntı olmadığı düşünülürse bu süre ne kadar olurdu?

**33.** Şekil P4.33, belli bir anda 2,5 m yarıçaplı daire çevresinde saat yönünde hareket eden bir parçacığın




toplam ivmesini ve hızını göstermektedir. Bu anda, (a) merkezcil ivmeyi, (b) parçacığın hızını, (c) teğetsel ivmesini bulunuz.