MATEMATİK 1

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2020

Uyarı 9.1.2. $\int e^{x^2}dx$, $\int e^{-x^2}dx$, $\int sin(x^2)dx$, $\int \sqrt{sin(x)}dx$,… gibi hesaplanamayan pek çok integral vardır.

Bazı integralleri formüllere dayandırarak hesaplayabiliriz. Bunun için en temel metot değişken değiştirme metodudur.

Değişken Değiştirme Metodu

$\int f(x)dx$ integrali verilsin. Bu integralde $x = u(t)$ değişken değiştirmesi yapılırsa $\frac{dx}{dt} = u'(t)$ ya da $dx = u'(t)dt$ olmak üzere

$$\int f(x)dx = \int f(u(t))u'(t)dt$$

elde edilir. Son eşitlikte $t = u^{-1}(x)$ dönüşümü ile istenilen sonuç elde edilir.

Örnek 9.1.1.1. $\int (2x+1)^3\, dx$ integralini hesaplayınız.

Bu integrali doğrudan veren bir formül yoktur. Ancak değişken değiştirerek hesaplayabiliriz.

$2x+1=u$ veya $x=\frac{u-1}{2}$ olsun. Bu durumda $dx=\frac{du}{2}$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int (2x+1)^3\, dx = \int u^3 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^3 du = \frac{u^4}{8} + c = \frac{(2x+1)^4}{8} + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.1.2. $\int \sqrt{x+5}\,dx$ integralini hesaplayınız.

$x+5=u$ veya $x=u-5$ olsun. Bu durumda $dx=du$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int \sqrt{x+5}\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(x+5)^{\frac{3}{2}} + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.1.3. $\int 2xe^{x^2}dx$ integralini hesaplayınız.

$x^2 = u$ olsun. Bu durumda $du = 2xdx$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int 2xe^{x^2}dx = \int e^{x^2}2xdx = \int e^u du = e^u + c = e^{x^2} + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.1.4. $\int \frac{xdx}{x^2-4}$ integralini hesaplayınız.

$x^2 - 4 = u$ olsun. Bu durumda $\frac{du}{2} = xdx$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int \frac{xdx}{x^2-4} = \int \frac{\frac{du}{2}}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}ln|u| + c = \frac{1}{2}ln|x^2 - 4| + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.1.5. $\int \frac{dx}{(5x+2)^3}$ integralini hesaplayınız.

$5x+2=u$ olsun. Bu durumda $\frac{du}{5}=dx$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int \frac{dx}{(5x+2)^3} = \int \frac{\frac{du}{5}}{u^3} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{u^3} = \frac{1}{5}\int u^{-3}du = \frac{-1}{10}u^{-2}$$

$$= -\frac{1}{10}(5x+2)^{-2} + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.1.6. $\int sin^2\,(x)cos(x)dx$ integralini hesaplayınız.

$sin(x)=u$ olsun. Bu durumda $du=\cos(x)\,dx$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int sin^2\,(x)\,cos(x)\,dx = \int (sin(x))^2\,cos(x)\,dx$$

$$= \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{(\sin(x))^3}{3} + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.1.7. $\int tan(x)\,dx$ integralini hesaplayınız.

Bu integral $\int \frac{sin(x)}{cos(x)}dx$ şeklinde yazılabilir. $cos(x) = u$ olsun. Bu durumda $-du = sin(x)dx$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int tan(x)\,dx = \int \frac{sin(x)}{cos(x)}dx = \int \frac{-du}{u} = -\int \frac{du}{u}$$

elde edilir.

Örnek 9.1.1.8. $\int \frac{dx}{x^2+6x+9}$ integralini hesaplayınız.

Bu integral $\int \frac{dx}{(x+3)^2}$ şeklinde yazılabilir. $x + 3 = u$ olsun. Bu durumda $dx = du$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+9} = \int \frac{dx}{(x+3)^2} = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}du = \frac{u^{-1}}{-1} + c$$

$$= -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{x+3} + c$$ elde edilir.

Örnek 9.1.1.9. $\int \frac{xdx}{1+x^4}$ integralini hesaplayınız.

Bu integral $\int \frac{xdx}{1+(x^2)^2}$ şeklinde yazılabilir. $x^2 = u$ olsun. Bu durumda $\frac{du}{2} = xdx$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int \frac{xdx}{1+x^4} = \int \frac{xdx}{1+(x^2)^2} = \int \frac{\frac{du}{2}}{1+u^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{1}{2}arctan(u) + c == \frac{1}{2}arctan(x^2) + c$$ elde edilir.

Örnek 9.1.1.10. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$ integralini hesaplayınız.

Bu integral $\int \frac{dx}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ şeklinde yazılabilir. $\frac{x}{a} = u$ olsun. Bu durumda $dx = adu$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{adu}{1+u^2} = \frac{1}{a}arctan(u) + c = \frac{1}{a}arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.1.11. $\int e^{cos^2(x)} sin(x)cos(x)dx$ integralini hesaplayınız.

$cos^2(x) = u$ olsun. Bu durumda $\frac{-du}{2} = sin(x)\,cos(x)$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int e^{cos^2(x)} sin(x)cos(x)dx = \int e^u.\frac{-du}{2} = -\frac{1}{2}\int e^u du$$

$$= -\frac{1}{2}e^u + c = -\frac{1}{2}e^{cos^2(x)} + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.1.12. $\int \frac{dx}{xln(x)}$ integralini hesaplayınız.

Bu integral $\int \frac{dx}{xln(x)} = \int \frac{1}{ln(x)}\frac{dx}{x}$ olarak yazılabilir. $\ln(x) = u$ olsun. Bu durumda $du = \frac{dx}{x}$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int \frac{dx}{xln(x)} = \int \frac{1}{ln(x)}\frac{dx}{x} = \int \frac{1}{u}du = ln\,|u| + c = ln\,|\,ln\,x| + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.1.13. $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$ integralini hesaplayınız.

$1 + e^x = u$ olsun. Bu durumda $du = e^x dx$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int \frac{du}{u} = ln|u| + c = ln|1 + e^x| + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.1.14. $\int \frac{arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ integralini hesaplayınız.

$arcsin(x) = u$ olsun. Bu durumda $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int \frac{arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int udu = \frac{u^2}{2} + c = \frac{arcsin^2(x)}{2} + c$$

elde edilir.

Köklü Fonksiyonların İntegrali

1. $\sqrt{a^2 - x^2}$ ifadesini içeren integraller:

Bu tür integraller $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $x = asinu$ ve $dx = a.cosu.du$ değişken değiştirmesi ile hesaplanabilir.

Örnek 9.1.2.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ integralini hesaplayınız.

$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ integrali $\int \frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}}$ şeklinde yazılabilir. $x = 2.sinu$ ve $dx = 2.cosu.du$ değerleri integralde yerine yazılırsa,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{(2cosu)du}{\sqrt{4-4sin^2u}} = 2\int \frac{cosu.du}{\sqrt{4(1-sin^2u)}} = 2\int \frac{cosu.du}{2\sqrt{cos^2u)}}$$

$$=\int \frac{cosu.du}{cosu} = \int du = u + c$$

olur. Tekrar x değişkenine dönmek için $u = arcsin\frac{x}{2}$ değeri son eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = u + c = arcsin\frac{x}{2} + c$$

elde edilir.

2. $\sqrt{x^2 - a^2}$ ifadesini içeren integraller:

Bu tür integraller $0 < u < \frac{\pi}{2}$ veya $\frac{\pi}{2} < u < \pi$ olmak üzere $x = \frac{a}{cosu}$ ve $dx = \frac{asinu}{cos^2u} du$ değişken değiştirmesi ile hesaplanabilir.

Örnek 9.1.2.2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-16}}$ integralini hesaplayınız.

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-16}}$ integrali $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4^2}}$ şeklinde yazılabilir. $x = \frac{4}{cosu}$ ve $dx = \frac{4sinu}{cos^2u}du$ değerleri integralde yerine yazılırsa,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-16}} = \int \frac{\frac{4sinu}{cos^2u}}{\sqrt{(\frac{4}{cosu})^2-16}}dx = \int \frac{\frac{4sinu}{cos^2u}}{\sqrt{\frac{16}{cos^2u}-16}}dx$$

$$= \int \frac{\frac{4sinu}{cos^2u}}{\sqrt{\frac{16-16cos^2u}{cos^2u}}} = \int \frac{\frac{sinu}{cos^2u}}{\sqrt{\frac{1-cos^2u}{cos^2u}}}dx = \int \frac{\frac{sinu}{cos^2u}}{\sqrt{\frac{sin^2u}{cos^2u}}}dx$$

$$= \int \frac{\frac{sinu}{cos^2u}}{\frac{sinu}{cosu}}dx = \int \frac{dx}{cosu} = ln\left|\frac{1}{cosu} + tanu\right| + c$$

olur. Tekrar x değişkenine dönmek için $u = arccos\frac{4}{x}$ değeri son eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-16}} = ln\left|\frac{1}{cos\left(arccos\frac{4}{x}\right)} + tan\left(arccos\frac{4}{x}\right)\right| + c = ln\left|\frac{4}{x} + tan\left(arccos\frac{4}{x}\right)\right| + c$$ elde edilir.

3. $\sqrt{a^2+x^2}$ **ifadesini içeren integraller:**

Bu tür integraller $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $x = atanu$ ve $dx = a(1 + tan^2u)du$ değişken değiştirmesi ile hesaplanabilir.

Örnek 9.1.2.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$ integralini hesaplayınız.

$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$ integrali $\int \frac{dx}{\sqrt{2^2+x^2}}$ şeklinde yazılabilir. $x = 2tanu$ ve $dx = \frac{2}{cos^2u}du$ değerleri integralde yerine yazılırsa,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{\frac{2}{cos^2u}du}{\sqrt{4+4tan^2u}} = \int \frac{\frac{2}{cos^2u}du}{2\sqrt{1+tan^2u}} = \int \frac{\frac{1}{cos^2u}du}{\sqrt{\frac{1}{cos^2u}}}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 u} du}{\frac{1}{\cos u}} = \int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \frac{1}{\cos u} + \tan u \right| + c$$

olur. Tekrar x değişkenine dönmek için $u = \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$ değeri son eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \ln \left| \frac{1}{\cos\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)} + \tan\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \right| + c$$

$$= \ln \left| \frac{1}{\cos\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)} + \frac{x}{2} \right| + c$$

elde edilir.

4. $\sqrt[k_i]{ax+b}$ **şeklindeki ifadeleri içeren integraller:**

Bu tür integralleri hesaplamak için k_i kök kuvvetlerinin en küçük ortak katı t olmak üzere $ax+b=u^t$ dönüşümü yapılmalıdır.

Örnek 9.1.2.4. $\int(\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1})dx$ integralini hesaplayınız.

$OKEK(2,3)=6$ olduğundan $x+1=u^6$ dönüşümü yapılır. Buradan $dx=6u^5du$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int(\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1})dx=\int\left(\sqrt{u^6}+\sqrt[3]{u^6}\right)6u^5du$$

$$= 6\int (u^3 + u^2)u^5 du$$

$$= 6\int (u^8 + u^7) du$$

$$= 6\left(\frac{u^9}{9} + \frac{u^8}{8}\right) + c$$

olur. $x + 1 = u^6$ ise $u = (x+1)^{\frac{1}{6}}$ olacağından tekrar x değişkenine dönüldüğünde

$$\int (\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1})dx = 6\left(\frac{\left((x+1)^{\frac{1}{6}}\right)^9}{9} + \frac{\left((x+1)^{\frac{1}{6}}\right)^8}{8}\right) + c$$

$$= 6\left(\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{9} + \frac{(x+1)^{\frac{4}{3}}}{8}\right) + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.2.5. $\int \sqrt[3]{\frac{x-2}{3}}.\sqrt[4]{\frac{x-2}{3}}\,dx$ integralini hesaplayınız.

$OKEK(4,3) = 12$ olduğundan $\frac{x-2}{3} = u^{12}$ dönüşümü yapılır. Buradan $dx = 36u^{11}du$ olup bu değerler integralde yerine yazılırsa,

$$\int \sqrt[3]{\frac{x-2}{3}}.\sqrt[4]{\frac{x-2}{3}}\,dx = \int \sqrt[3]{u^{12}}.\sqrt[4]{u^{12}}36u^{11}du$$

$$= 36\int u^4.u^3.u^{11}du = 36\frac{u^{19}}{19} + c$$

olur. $\frac{x-2}{3} = u^{12}$ ise $u = \left(\frac{x-2}{3}\right)^{\frac{1}{12}}$ olacağından tekrar x değişkenine dönüldüğünde

$$\int \sqrt[3]{\frac{x-2}{3}}.\sqrt[4]{\frac{x-2}{3}}\,dx = \frac{36}{19}\left(\frac{x-2}{3}\right)^{\frac{19}{12}} + c$$

elde edilir.

Kısmi İntegrasyon Metodu

İntegral hesaplamada kullanılan yaygın metotlardan biri de kısmi integrasyon metodudur. u ve v x'e bağlı türevli fonksiyonlar olsun. Çarpım fonksiyonunun türevinden

$$\frac{d}{dx}(u.v) = v\frac{du}{dx} + u\frac{du}{dx}$$

dir. Buradan $d(uv) = vdu + udv$ yazılabilir. Son eşitlikte her iki tarafın integrali alınırsa

$$\int d(uv) = \int vdu + \int udv$$

ve $uv = \int vdu + \int udv$ olur. Bu durumda

$\int udv = uv - \int vdu$ ya da $\int vdu = uv - \int udv$

elde edilir. Bu metotta integral u ve dv ya da v ve du biçiminde yazılmalıdır.

Örnek 9.1.3.1. $\int xe^{3x}dx$ integralini hesaplayınız.

$x = u$ ve $e^{3x}dx = dv$ olsun. Bu durumda $v = \frac{1}{3}e^{3x}$ ve $dx = du$ olur. Bu değerler formülde yerine yazılırsa,

$$\int xe^{3x}dx = x\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx$$

$$= \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + c = \frac{3x-1}{9}e^{3x} + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.3.2. $\int xcos(5x)dx$ integralini hesaplayınız.

$x = u$ ve $cos(5x)dx = dv$ olsun. Bu durumda $v = \frac{1}{5}\sin(5x)$ ve $dx = du$ olur. Bu değerler formülde yerine yazılırsa,

$$\int xcos(5x)dx = x.\frac{1}{5}sin(5x) - \int \frac{1}{5}sin(5x)\,dx$$

$$= \frac{x.sin(5x)}{5} + \frac{1}{25}cos(5x) + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.3.3. $\int lnxdx$ integralini hesaplayınız.

$lnx = u$ ve $dx = dv$ olsun. Bu durumda $du = \frac{dx}{x}$ ve $x = v$ olur. Bu değerler formülde yerine yazılırsa,

$$\int lnxdx = xlnx - \int x\frac{dx}{x} = xlnx - \int dx = xlnx - x + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.3.4. $\int x^2 e^{4x} dx$ integralini hesaplayınız.

$u = x^2$ ve $e^{4x} dx = dv$ olsun. Bu durumda $2x dx = du$ ve $v = \frac{1}{4} e^{4x}$ olur. Bu değerler formülde yerine yazılırsa,

$$\int x^2 e^{4x} dx = x^2 \frac{1}{4} e^{4x} - \int \frac{1}{4} e^{4x} 2x dx = \frac{x^2}{4} e^{4x} - \frac{1}{2} \int x e^{4x} dx$$

elde edilir. $\int x e^{4x} dx$ integralini doğrudan veren bir formül yoktur. Bu integrale tekrar kısmi integrasyon metodu uygulanabilir.

$u = x$ ve $e^{4x} dx = dv$ olsun. Bu durumda $dx = du$ ve $v = \frac{1}{4} e^{4x}$ olur. Bu değerler formülde yerine yazılırsa,

$$\int x e^{4x} dx = x \frac{1}{4} e^{4x} - \int \frac{1}{4} e^{4x} dx = \frac{x}{4} e^{4x} - \frac{1}{16} e^{4x} + c$$

olur. Bulunan değer $\int x^2 e^{4x} dx$ integralinde yerine yazılırsa,

$$\int x^2 e^{4x} dx = \frac{x^2}{4} e^{4x} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{4} e^{4x} - \frac{1}{16} e^{4x} \right) + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.3.5. $\int e^x \cos(x)\,dx$ integralini hesaplayınız.

$u = e^x$ ve $dv = \cos(x)\,dx$ olsun. Bu durumda $du = e^x dx$ ve $v = \sin(x)$ olur. Bu değerler formülde yerine yazılırsa,

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x sinx - \int sinx\, e^x dx$$

elde edilir. $\int sinx\, e^x dx$ integraline tekrar kısmi integrasyon metodu uygulanabilir.

$u = e^x$ ve $dv = \sin(x)dx$ olsun. Bu durumda $du = e^x dx$ ve $v = -cos(x)$ olur. Bu değerler formülde yerine yazılırsa,

$$\int sinx\, e^x dx = -e^x cosx - \int -cosx e^x dx$$

$$= -e^x cosx + \int e^x\, cosxdx$$

olur. Bulunan değer yerine yazılırsa,

$$\int e^x\, cos(x)\, dx = e^x sinx - (-e^x cosx + \int e^x\, cosxdx)$$

$$= e^x sinx + e^x cosx - \int e^x\, cosxdx$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte ilk ve son integral aynı olduğundan,

$$2\int e^x\, cos(x)\, dx = e^x(sinx + cosx) + c$$

ve

$$\int e^x\, cos(x)\, dx = \frac{e^x(sinx+cosx)}{2} + c$$

elde edilir.

Basit Kesirlere Ayırma Metodu

$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ şeklindeki integrallerin hesabında $\frac{p(x)}{q(x)}$ ifadesi basit kesirlere ayrılarak integral daha basit hale getirilir.

Örnek 9.1.4.1. $\int \frac{dx}{x^2-x}$ integralini hesaplayınız.

$\frac{1}{x^2-x}$ fonksiyonunu basit kesirlere ayıralım:

$$\frac{1}{x^2-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan $A = -1$ ve $B = 1$ elde edilir. Yani $\frac{1}{x^2-x}$ fonksiyonunun yerine $-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$ ifadesi kullanılabilir. Bu durumda

$$\int \frac{dx}{x^2-x} = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) dx = \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{1}{x-1} dx$$

$$= \ -ln|x| + ln|x-1| + c = ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.4.2. $\int \frac{dx}{x^2-4}$ integralini hesaplayınız.

$\frac{1}{x^2-4}$ fonksiyonunu basit kesirlere ayıralım:

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan $A = -\frac{1}{2}$ ve $B = \frac{1}{2}$ elde edilir. Yani $\frac{1}{x^2-4}$ fonksiyonunun yerine $-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$ ifadesi kullanılabilir. Bu durumda

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+2} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2} \right) dx = \int \frac{-\frac{1}{2}}{x+2} dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x-2} dx$$

$$= -\frac{1}{2} ln|x+2| + \frac{1}{2} ln|x-2| = \frac{1}{2} ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.4.3. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x^2+3)}$ integralini hesaplayınız.

$\frac{x}{(x+1)(x^2+3)}$ fonksiyonunu basit kesirlere ayıralım:

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{(x^2+3)} = \frac{A(x^2+3)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+3)}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{4}$ ve $C = \frac{3}{4}$ elde edilir. Yani $\frac{x}{(x+1)(x^2+3)}$ fonksiyonunun yerine $\frac{-\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}}{(x^2+3)}$ ifadesi kullanılabilir. Bu durumda

$$\int \frac{xdx}{(x+1)(x^2+16)} = \int \frac{-\frac{1}{4}}{x+1}dx + \int \frac{\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}}{x^2+3}dx$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{4}\int \frac{x+3}{x^2+3}dx$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{4}\int (\frac{x}{x^2+3} + \frac{3}{x^2+3})dx$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{4}\int \frac{x}{x^2+3}dx + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x^2+3}dx$$

$$= -\frac{1}{4}ln|x+1| + \frac{1}{8}ln|x^2+3| + \frac{\sqrt{3}}{4}arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right) + c$$ elde edilir.

Örnek 9.1.4.4. $\int \frac{x^2 dx}{(x+2)^3}$ integralini hesaplayınız.

$\int \frac{x^2 dx}{(x+2)^3}$ fonksiyonunu basit kesirlere ayıralım:

$$\frac{x^2 dx}{(x+2)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3}$$

$$= \frac{A(x+2)^2 + B(x+2) + C}{(x+2)^3}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan $A = 1$, $B = -4$ ve $C = 4$ elde edilir.

Bu durumda

$$\int \frac{x^2 dx}{(x+2)^3} = \int (\frac{1}{x+2} + \frac{-4}{(x+2)^2} + \frac{4}{(x+2)^3}) dx$$

$$= \int \frac{1}{x+2} dx + \int \frac{-4}{(x+2)^2} dx + \int \frac{4}{(x+2)^3} dx$$

$$= ln|x+2| + (-4)\frac{(x+2)^{-1}}{-1} + 4\frac{(x+2)^{-2}}{-2}$$

$$= ln|x+2| + \frac{4}{(x+2)} - \frac{2}{(x+2)^2} + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.4.5. $\int \frac{x^2 dx}{x^2-4x+3}$ integralini hesaplayınız.

$\frac{x^2}{x^2-4x+3}$ fonksiyonunu basit kesirlere ayıralım, fonksiyonun pay ve paydasının derecesi eşit olduğundan $\frac{x^2}{x^2-4x+3} = 1 + \frac{4x-3}{x^2-4x+3}$ olarak yazılabilir. Bu durumda

$$\int \frac{x^2 dx}{x^2-4x+3} = \int \left(1 + \frac{4x-3}{x^2-4x+3}\right) dx = \int dx + \int \frac{4x-3}{x^2-4x+3} dx$$

$$= x + 2\,ln|x^2 - 4x + 3| + \frac{5}{2} ln|x - 3| - \frac{5}{2} ln|x - 1| + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.4.6. $\int \frac{x^4 dx}{x^2-16}$ integralini hesaplayınız.

$\frac{x^4}{x^2-16}$ fonksiyonunu basit kesirlere ayıralım, fonksiyonun payının derecesi paydasının derecesinden büyük olduğundan payı paydaya bölersek,

$$\frac{x^4}{x^2-16} = x^2 + 16 + \frac{256}{x^2-16}$$

olur. Bu durumda

$$\int \frac{x^4}{x^2-16} dx = \int (x^2 + 16 + \frac{256}{x^2-16}) dx = \int (x^2 + 16) dx + \int \frac{256}{x^2-16} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + 16x + 256 \int \frac{dx}{x^2-16}$$

$$= \frac{x^3}{3} + 16x + 256 \int \left(\frac{-1}{8x+32} + \frac{1}{8x-32}\right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + 16x - 32\, ln|x+4| + 32\, ln|x-4| + c$$

$$= \frac{x^3}{3} + 16x + 32\, ln \frac{|x-4|}{|x+4|} + c$$ elde edilir.

Trigonometrik Fonksiyonların İntegrasyonu

Bazı özel durumlar için trigonometrik fonksiyonların integralini hesaplamak kolay olabilir. Bu tür integraller daha çok $k, t \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\int sin^k(x).cos^t(x)dx$ şeklindedir. Bu integraller genel olarak değişken değiştirme ile çözülebilir.

Örnek 9.1.5.1. $\int cos^4(x)sin^3(x)dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int cos^4(x)sin^3(x)dx = \int cos^4(x)\, sin(x)\, sin^2(x)dx$$

$$= \int cos^4(x)(1 - cos^2(x))sin(x)\, dx$$

olur. $u = \cos(x)$ ve $du = -sin(x)dx$ dönüşümü yapılırsa,

$$\int cos^4(x)sin^3(x)dx = \int u^4(1 - u^2)(-du)$$

$$= -\int(u^4 - u^6)du = \frac{-u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + c$$

$$= -\frac{(cos(x))^5}{5} + \frac{(cos(x))^7}{7} + c$$ elde edilir.

Örnek 9.1.5.2. $\int cos^3(x)sin^3(x)dx$ integralini hesaplayınız.

$u = \cos(x)$ ve $du = -sin(x)dx$ dönüşümü yapılırsa,

$$\int cos^3(x)sin^3(x)dx = \int cos^3(x)\, sin(x)\, sin^2(x)dx$$

$$= \int cos^3(x)(1 - cos^2(x))\, sin(x)\, dx$$

$$= \int u^3(1 - u^2)(-du) = -\int (u^3 - u^5)du$$

$$= -\frac{u^4}{4} + \frac{u^6}{6} + c = -\frac{cos^4(x)}{4} + \frac{cos^6(x)}{6} + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.5.3. $\int cos^2(x)sin^2(x)dx$ integralini hesaplayınız.

Verilen integralde,

$$cos^2(x) = \frac{1+cos(2x)}{2} \text{ ve } sin^2(x) = \frac{1-cos(2x)}{2}$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$\int cos^2(x)sin^2(x)dx = \int \left(\frac{1+cos(2x)}{2}\right)\left(\frac{1-cos(2x)}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1+cos(2x))(1-cos(2x))dx = \frac{1}{4}\int \left(1-cos^2(2x)\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int cos^2(2x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\int \left(\frac{1+cos(4x)}{2}\right)dx$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{1}{8}\int (1+cos(4x))\,dx = \frac{x}{4} - \frac{x}{8} - \frac{sin(4x)}{32} + c$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{sin(4x)}{32} + c$$

elde edilir.

Uyarı 9.1.5.1. Trigonometrik integrallerde sık tercih edilen metotlardan biri de $u = tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$, $cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ ve $dx = \frac{2du}{1+u^2}$ değişken değiştirme metodudur.

Örnek 9.1.5.4. $\int \frac{dx}{cosx}$ integralini hesaplayınız.

$$\int \frac{dx}{cosx} = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int \frac{1+u^2}{1-u^2}\frac{2du}{1+u^2} = \int \frac{2du}{1-u^2} = \int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right) du$$

$$= -ln|1-u| + ln|1+u| + c$$

$$= ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + c = ln\left|\frac{1+tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right| + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.5.5.** $\int \frac{dx}{\sin x}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left\{ u = tg\left(\frac{x}{2}\right),\ \sin x = \frac{2u}{1+u^2},\ dx = \frac{2du}{1+u^2} \right\} =$$

$$= \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}} = \int \frac{du}{u} = \ln(u) + c = \ln\left(tg\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c$$

Şimdi de aynı örneği farklı bir yaklaşımla çözelim.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx$$

$$= \int \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx + \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx$$

$$=\int \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} d\left(\frac{x}{2}\right)+\int \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} d\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$=\left\{\begin{array}{l} \sin\left(\frac{x}{2}\right)=u,\ \ \cos\left(\frac{x}{2}\right)d\left(\frac{x}{2}\right)=du \\ \cos\left(\frac{x}{2}\right)=v,\ \ \text{-}\sin\left(\frac{x}{2}\right)d\left(\frac{x}{2}\right)=dv \end{array}\right\}$$

$$=\int \frac{du}{u}-\int \frac{dv}{v}=\ln(u)-\ln(v)+c$$

$$=\ln\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)-\ln\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)+c=\ln\left(tg\left(\frac{x}{2}\right)\right)+c$$

Örnek 9.1.5.4 deki $\int \frac{dx}{\cos x}$ integralini **Örnek 9.1.5.5.** den yararlanarak çözünüz.**

$\int \frac{dx}{\cos x}$ integralinde $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ olduğu göz önüne alınarak Örnek **9.1.5.5.**** örneğine dönüştürmek mümkündür.

Örnek 9.1.5.5. $\int \frac{dx}{1+sinx+cosx}$ integralini hesaplayınız.

$$\int \frac{dx}{1+sinx+cosx} = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{2(1+u)}{1+u^2}}$$

$$= \int \frac{du}{1+u} = ln|1+u| + c = ln\left|1+tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c$$ elde edilir.

Örnek 9.1.5.6. $\int \frac{dx}{3-5sinx}$ integralini hesaplayınız.

$$\int \frac{dx}{3-5sinx} = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{3-5\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)}$$

$$= \int \frac{2du}{3(1+u^2)-5.2u} = \int \frac{2du}{3u^2-10u+3}$$

$$= \int \frac{2du}{(3u-1)(u-3)} = \int \left(\frac{-\frac{3}{4}}{3u-1} + \frac{\frac{1}{4}}{u-3}\right) du$$

$$= -\frac{3}{4} ln|3u-1| + \frac{1}{4} ln|u-3| + c$$

$$= \frac{1}{4} ln\left|\frac{u-3}{(3u-1)^3}\right| + c = \frac{1}{4} ln\left|\frac{tan\left(\frac{x}{2}\right)-3}{\left(3\,tan\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)^3}\right| + c$$ elde edilir.

Kaynaklar:

1. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus I**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.
2. Prof. Dr. C. Çinar, Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, Prof. Dr. A. S. Kurbanlı, Prof. Dr. D. Şimşek, **Genel Matematik**, Dizgi Ofset, 2013.
3. Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, **Analiz III Diziler ve Seriler,** Dizgi Ofset, 2017.
4. H. İ. Karakaş, **Matematiğin Temelleri, Sayı Sistemleri ve Cebirsel Yapılar,** ODTÜ yayınları, 2011.