MATEMATİK - 2

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2021

FONKSİYONLARIN SERİYE AÇILIMI.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n =$$

4.4. Fonksiyonların Seri Açılımı

4.4.1. Taylor ve MacLaurin Serileri

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ serisinin $(a-R, a+R)$ aralığında yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu durumda bu serinin toplamı her bir $x \in (a-R, a+R)$ sayısına bir $f(x)$ reel sayısı karşılık getirir. Yani bu seri

$$f:(a-R, a+R) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

$f(x)$, $x=a$. $f'''(x)=1.2.3.a_3$

şeklinde bir fonksiyon tanımlar.

$f'''(a)=1$

Şimdi a_i katsayıları ile $f(x)$ fonksiyonu arasındaki ilişkiyi araştıralım.

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots$$

1

olduğundan $\boxed{f(a)=a_0}$ dır. Eğer seri terim terim türevlenebiliyorsa

$a_0=f(a)$

2

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+\cdots+na_n(x-a)^{n-1}+\cdots$$

$f'(a)=a_1 \Rightarrow a_1=f'(a)=\frac{f'(a)}{1!}$

$f''(x)=1.2.a_2+2.3a_3(x-a)+\ldots+(n-1)n.(x-a$

elde edilir. Buradan $f'(a) = a_1$ dir. Benzer şekilde devam edilirse

$$= a_0, \quad a_1 = \frac{f'(a)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(a)}{2!}, a_3 = \frac{f'''(a)}{3!}, \ldots, a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \ldots$$

(3)

elde edilir. Yani $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ şeklindedir. (Burada $f^{(0)}(a) = f(a)$ dır.)

Tanım 4.4.1.1. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ *serisine f fonksiyonunun $x = a$ noktası civarındaki Taylor Seri Açılımı denir. Taylor serisi, $f(x)$ fonksiyonunu x in yakınsaklık aralığındaki değerleri için temsil* *eder. Özel olarak* $a=0$ *ise seri* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ *şeklini alır ki bu seriye f fonksiyonunun MacLaurin Seri Açılımı denir.*

Uyarı 4.4.1.1. *Taylor serisinde* $x=a+h$ *dönüşümü yapılırsa:*

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\cdots$$

elde edilir. Taylor serisi, genellikle x in a civarındaki değerlerine karşılık gelen $f(x)$ *değerlerinin yaklaşık hesabında kullanılır.*

Örnek 4.4.1.1. $f(x)=e^x$ fonksiyonunun MacLaurin seri açılımını elde ediniz ve elde edilen bu açılımda $x=1$ için e sayısını hesaplayınız.

Çözüm.

$$f(x)=e^x \qquad f(0)=e^0=1$$
$$f'(x)=e^x \qquad f'(0)=e^0=1$$
$$\dots \qquad \dots$$
$$f^{(n)}(x)=e^x \qquad f^{(n)}(0)=e^0=1$$
$$\dots \qquad \dots$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}$$

olup

$$=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!};$$

elde edilir. Bu seri x in her değeri için e^x fonksiyonunu temsil eder.

$x = 1$ için

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

dir.

e^x fonksiyonunun seri açılımında x yerine $-x$ ve x^2 yazılarak

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n;$$

ve

$$e^{x^2} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!},$$

seri açılımları elde edilir.

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots$$

$$\int e^{-x^2}\,dx, \quad \int e^{x^2}\,dx \quad \checkmark$$

$f(-x) = -f(x)$ $\sin(-x) = -\sin(x)$

Örnek 4.4.1.2. $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun MacLaurin seri açılımını elde ediniz.

Çözüm.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -\sin x & f''(0) &= 0 \\
f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1
\end{aligned}
$$

$f^{(IV)}(x) = \sin x$

$\vdots$

olup

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} \mp \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n}$$

elde edilir. Bu seri x in her değeri için $\sin x$ fonksiyonunu temsil eder.

Örnek 4.4.1.3. $f(x)=\cos x$ fonksiyonunun MacLaurin seri açılımını elde ediniz.

Çözüm.

$$
\begin{array}{ll}
f(x)=\cos x & f(0)=1 \\
f'(x)=-\sin x & f'(0)=0 \\
f''(x)=-\cos x & f''(0)=-1 \\
f'''(x)=\sin x & f'''(0)=0 \\
f^{(4)}(x)=\cos x & f^{(4)}(0)=1 \\
\cdots & \cdots
\end{array}
$$

olup

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\mp\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

elde edilir. Bu seri x in her değeri için $\cos x$ fonksiyonunu temsil eder.

Örnek 4.4.1.4. $f(x) = \text{Arcsin}\, x$ fonksiyonunun MacLaurin seri açılımını elde ediniz.

Çözüm.

(arcsin

$$f(x) = \text{Arcsin}\, x \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = (1 - x^2)^{-1/2} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = x(1 - x^2)^{-3/2} \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = (1 - x^2)^{-3/2} + 3x^2(1 - x^2)^{-5/2} \qquad f'''(0) = 1$$

$$\cdots$$

olup

$$\text{Arcsin}\, x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+}{(2n)}$$

elde edilir.

Örnek 4.4.1.5. $f(x)=\sqrt{1-x}$ fonksiyonunun MacLaurin seri açılımını elde edip, bu açılımdan faydalanarak $\sqrt{0,8}$ sayısının değerini yaklaşık olarak hesaplayınız.

Çözüm.

$$f(x)=(1-x)^{1/2} \qquad f(0)=1$$

$$f'(x)=-\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2} \qquad f'(0)=-\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4}(1-x)^{-3/2} \qquad f''(0)=-\frac{1}{4}$$

$$\cdots$$

olup

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\cdots$$

elde edilir. Bu açılımda $x = 0{,}2$ olarak alınırsa

$$\sqrt{0{,}8} = 1 - \frac{0{,}2}{2} - \frac{(0{,}2)^2}{8} - \frac{(0{,}2)^3}{16} - \cdots$$

yazılabilir. Bu durumda $\sqrt{0{,}8} \cong 1 - \frac{0{,}2}{2} - \frac{(0{,}2)^2}{8} - \frac{(0{,}2)^3}{16} = 0{,}8945$ dir.

Örnek 4.4.1.6. $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ değerini kullanarak $\sin 61^\circ$ nin değerini yaklaşık olarak hesaplayınız.

Çözüm.

$$f(x)=\sin x \qquad \sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'(x)=\cos x \qquad \cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=-\sin x \qquad -\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'''(x)=-\cos x \qquad -\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\cdots$$

olmak üzere

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\cdots$$

açılımında $x = 60^\circ = \dfrac{\pi}{3}$ ve $h = 1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$ olarak alınırsa

$$\sin 61^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{\pi}{180}\right)^3\left(-\frac{1}{2}\right) + \cdots$$

olup $\boxed{\sin 61^\circ \cong 0{,}8746}$ elde edilir.

Örnek 4.4.1.7. $f(x)=e^x$ fonksiyonunun $x=1$ noktasındaki seri açılımını elde ediniz.

Çözüm.

$$f(x)=e^x \qquad f(1)=e$$

$$f'(x)=e^x \qquad f'(1)=e$$

$$f''(x)=e^x \qquad f''(1)=e$$

$$\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=e^x \qquad f^{(n)}(1)=e$$

$$\cdots$$

olup

$$f(x)=f(a)+f'(a)\frac{(x-a)}{1!}+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}+\cdots$$

açılımında $f(x)=e^x$ ve $a=1$ olarak alınırsa

$$f(x) = f(1) + f'(1)\frac{(x-1)}{1!} + f''(1)\frac{(x-1)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(1)\frac{(x-1)^n}{n!} + \cdots$$

elde edilir. Buradan

$$e^x = e\left(1 + \frac{(x-1)}{1!} + \frac{(x-1)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x-1)^n}{n!} + \cdots\right) = e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\ldots}{n\ldots}$$

olduğu açıktır. Elde edilen serinin yakınsaklık aralığının belirlenmesi okuyucuya bırakıldı.

Örnek 4.4.1.8. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun $x=1$ noktasındaki seri açılımını elde ediniz.

Çözüm.

$$f(x)=\frac{1}{x} \qquad f(1)=1$$

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2} \qquad f'(1)=-1$$

$$f''(x)=\frac{(-1)(-2)}{x^3} \qquad f''(1)=2!$$

$$\dots$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)(-2)\dots(-n)}{x^{n+1}} \qquad f^{(n)}(1)=(-1)^n n!$$

olup

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \cdots$$

açılımında $f(x) = \frac{1}{x}$ ve $a = 1$ olarak alınırsa

$$\frac{1}{x} = f(1) + f'(1)\frac{(x-1)}{1!} + f''(1)\frac{(x-1)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(1)\frac{(x-1)^n}{n!} + \cdots$$

elde edilir. Buradan

$$\boxed{\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \cdots + (-1)^n (x-1)^n \mp \cdots} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n ($$

olduğu açıktır. Elde edilen serinin yakınsaklık aralığının belirlenmesi okuyucuya bırakıldı.

Örnek 4.4.1.9. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki seri açılımını elde ediniz.

Çözüm.

$$f(x)=\frac{1}{1-x} \qquad f(0)=1$$

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2} \qquad f'(0)=1$$

$$f''(x)=\frac{1.2}{(1-x)^3} \qquad f''(0)=1.2=2!$$

$$\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{1.2\ldots n}{(1-x)^{n+1}} \qquad f^{(n)}(0)=n!$$

olup

$$f(x)=f(0)+f'(0)\frac{x}{1!}+f''(0)\frac{x^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

açılımında $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ alınırsa

$$\frac{1}{1-x}=f(0)+f'(0)\frac{x}{1!}+f''(0)\frac{x^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \quad = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

olduğu açıktır. Elde edilen serinin yakınsaklık aralığının belirlenmesi okuyucuya bırakıldı.

Bu örnekte; x yerine (-x) yazılırsa,

$$\underline{\frac{1}{1+x}} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n$$

elde edilir.

$\underline{x \text{ yerine}}$ x^2 yazılırsa,

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots \quad = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

x yerine $\left(-x^2\right)$ yazılırsa,

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots \quad = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2}$$

elde edilir.

Elde edilen serilerin yakınsaklık aralıklarının belirlenmesi okuyucuya bırakıldı.

$f'(x) = (\text{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Ayrıca bu örneklerden yararlanarak $f(x) = \arctan(x)$, $f(x) = \ln(1-x)$, $f(x) = \ln(1+x)$ ve $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ gibi fonksiyonların Maclaurin seriye açılımını elde etmek mümkündür.

$\frac{1}{1-x}$ $\frac{1}{1+x}$

KAYNAKLAR:

1. Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA, Analiz III Diziler ve Seriler, Dizgi Ofset, 2017.

2. G. B. Thomas ve Ark., Thomas Calculus I, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.