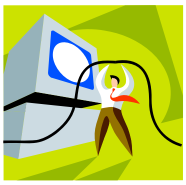
Boole Cebiri

Ders 8

8-1



Boole Cebiri

- Boole Cebri fikri ilk olarak George Boole tarafından 19. yüzyılın ortalarında ortay atıldı.
- 1854 yılında yayınlanan *The Laws of Thought* adlı Boole'un kitabı mantıksal düşünme süreçlerinin formalize edilmesini üzerine yazılmıştır.
- Boole temel olarak önermeler cebiri ile ilgilendi fakat son zamanlarda bu konu genişletildi ve soyut cebirin önemli bir konusu oldu.
- Boole cebirinin en önemli uygulaması elektronik devre tasarım ve analizidir. Bundan dolayı bilgisayarlar, telefon sistemleri ve elektronik kontrol sistemleri gibi sayısal cihazların tasarımında çok etkin bir şekilde kullanıldı ve halen kullanılmaktadır.

8-2

Boole Cebirinin Özellikleri

- Sayısal bilgisayarlar ve sayısal elektronik devreler ikili sayı sistemini kullanarak işlem yaparlar.
- İkili sistemde kullanılan sayılar ise 1 ve 0'dan ibarettir.
- Boole cebri {0,1} kümesini kullanarak işlemler ve kurallar tanımlar.
- Boole cebrinde, en çok kullanılan üç işlem eşlenik, mantıksal toplama ve mantıksal çarpmadır.
- Eşlenik işleminde 1 → 0; 0 → 1 olur.
- Bir boole cebri sınırlı, dağılma özellikli, her öğenin bir tümleyeni olan bir kafes yapıdır.
- $\vee$ için + lojik (mantıksal toplama, OR) kullanılır. Aşağıdaki değerleri alır

  1+1 = 1 ; 1+0 = 1; 0+1= 1; 0+0 = 0;

- $\wedge$ için • lojik (mantıksal çarpma, AND) kullanılır. Aşağıdaki değerleri alır

  1•1 = 1 ; 1•0 = 0; 0•1= 0; 0•0 = 0

8-3

Boole Cebri

- B = {0,1} verilsin. Eğer x değişkeni sadece B'den değerler alırsa x'e mantıksal değişken adı verilir.
- $\{x_1, x_2, \ldots, x_n \mid x_i \in B, 1 \leq i \leq n\}$ olmak üzere, B^n'den B'ye tanımlanan bir fonksiyona *n. dereceden mantıksal fonksiyon* denir.
- Mantıksal fonksiyonun alacağı değerler çoğunlukla tablolar şeklinde gösterilir.
- Örneğin, $x=1$ ve $y=0$ iken $F(x,y)$ nin değeri 1'dir.
- Diğer değerler Tabloda gösterilmiştir.

x	y	$F(x,y)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

8-4

Boole Cebri

- Mantıksal fonksiyonlar (Boolean Functions), değişkenler ve mantıksal işlemlerden (Boolean expressions) oluşan ifadeler kullanılarak gösterilebilir.
- Eğer E_1 ve E_2 mantıksal ifadeler ise , $\overline{E_1}$, (E_1E_2) ve (E_1+E_2) de mantıksal ifadelerdir.
- $b_1, b_2, ..., b_n \in B$ olmak üzere n değişkenli F ve G mantıksal ifadeleri ancak ve ancak

$$F(b_1,b_2,.........,b_n) = G(b_1,b_2,.........,b_n)$$

  ise *eşdeğerdir*.
- Aynı fonksiyonu temsil eden iki farklı mantıksal ifade *eşdeğer* olarak adlandırılır.
- Örneğin xy, $xy+0$ ve $xy.1$ eşdeğerdir.
- F mantıksal fonksiyonunun *eşleniği* $\overline{F}$ fonksiyonudur. Burada,

$$\overline{F}(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{F(x_1, x_2, ..., x_n)}$$

  dir.
- F ve G, n. dereceden mantıksal fonksiyonlar olsun. Mantıksal toplam (F+G) ve mantıksal çarpım ($F.G$) aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$(F+G)(x_1, x_2, ..., x_n)= F(x_1, x_2, ..., x_n) + G(x_1, x_2, ..., x_n),$$
$$(F.G)(x_1, x_2, ..., x_n) = F(x_1, x_2, ..., x_n) . G(x_1, x_2, ..., x_n)$$

- Derecesi iki olan mantıksal fonksiyon, B = {0,1} den eleman çiftlerinin oluşturduğu 4 elemanlı kümeden B'ye bir fonksiyondur.
- Buradan 2. dereceden 16 adet mantıksal fonksiyon tanımlanabilir. Tabloda $F_1, F_2, ..., F_{16}$ nın değerleri görülmektedir.
- Tanım: Derecesi n olan mantıksal fonksiyon sayısı 2^{2^n} adettir. 1 için 4 ; 2 için 16 ; 3 için 256, ...)

x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Boole Cebrinin Özellikleri

Özellik	Açıklama
$\overline{\overline{x}} = x$	Çift Eşlenik
$x + x = x$ $x.x = x$	Idempotence
$x + 0 = x$ $x.1 = x$	Etkisiz eleman
$x + 1 = 1$ $x.0 = 0$	Baskınlık
$x + y = y + x$ $x.y = y.x$	Değişme

Özellik	Açıklama
$x + (y + z) = (x + y) + z$ $x.(y.z) = (x.y).z$	Birleşme
$x + yz = (x + y)(x + z)$ $x(y + z) = xy + xz$	Dağılma
$\overline{x.y} = \overline{x} + \overline{y}$ $\overline{x + y} = \overline{x}\,\overline{y}$	De Morgan
$x + \overline{x} = 1$ $x.\overline{x} = 0$	Baskınlık

Dualite Prensibi

- Kuralların ispatı doğruluk tabloları yapılarak gerçeklenebilir. Ayrıca bu kurallar VEYA (OR +) ve VE (AND .) işlemleriyle de yazılabilir.
- Düalite kuralı : Bir boole ifadesinin düali mantıksal çarpım ile toplamların, ve 1 ile 0 'ların yer değiştirmesiyle elde edilir.
- Örnek:

  $x(y+0)$ 'ın düali $x+(y.1)$ ve

  $\overline{x}.1 + (\overline{y}.z)$ in düali $(\overline{x}+1)(\overline{y}+z)$ dir.

- Yararlı bir notasyon:

$$x^e = \begin{cases} \overline{x}, & \text{eğer } e = 0 \\ x, & \text{eğer } e = 1 \end{cases}$$

Mantıksal Fonksiyonların Gösterilmesi

- Değişkenlerinin almış oldukları değerlere karşılık olarak elde edilecek olan mantıksal fonksiyonun gösterilmesi önemlidir.
- Bir mantıksal fonksiyon üç mantıksal operatör olan + . ve ¯ ile gösterilebilir.
- Bu bölümde önce mantıksal fonksiyonların gösterilmesi daha sonra da mantıksal fonksiyonların en küçük değişken kümesi ile gösterilmesi (indirgenmesi) açıklanacaktır.
- Bu gösterimler mantıksal devre tasarımında oldukça önemli uygulamalara sahiptir.

x	y	z	F	G
1	1	1	0	0
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

- Örnek olarak Tabloda gösterilen $F(x,y,z)$ ve $G(x,y,z)$ fonksiyonlarının bulunması istenmektedir.
- F fonksiyonunun değeri $x=z=1$ ve $y = 0$ iken 1 değerini almaktadır. Diğer giriş değerlerinde 0 olmaktadır. Böyle bir ifade x, y ve z mantıksal çarpımı olan

$$F(x, y, z) = x\bar{y}z$$

ile temsil edilebilir.
- G nin bulunması ise, $x = y = \bar{z} = 1$ veya $\bar{x} = y = \bar{z} = 1$ durumunda 1 değerini alır diğerlerinde 0 olur. Bu durumda çarpımlar toplamı olarak

$$G(x, y, z) = xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$$

elde edilir.

- Tanım (**Minterm veya complete product**) : Mantıksal $x_1, x_2, ..., x_n$ değişkenlerinin bir mintermi

$$y_1 y_2 \cdots y_n$$

çarpımıdır. Burada $y_i = x_i$ veya $y_i = \bar{x}_i$ dir.
- x_1, x_2, x_3 gibi üç değişken için sekiz değişik minterm vardır:

$$x_1x_2x_3 \quad x_1x_2\bar{x}_3 \quad x_1\bar{x}_2x_3 \quad x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$$
$$\bar{x}_1x_2x_3 \quad \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \quad \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \quad \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3.$$

- $y_1y_2...y_n$ mintermi ancak ve ancak her bir y_i' nin değeri 1 ise 1 sonucunu verir.
- UYARI: Bir mantıksal fonksiyon ise mintermlerin çarpımı şeklinde ifade edilebilir.
- x^e notasyonu kullanılarak n değişkenli bir $x_1, x_2, ..., x_n$ minterm

$$m_{e_1e_2...e_n} = x_1^{e_1} x_2^{e_2} ... x_n^{e_n}$$

- Örneğin

$$m_{10110} = x_1^1 x_2^0 x_3^1 x_4^1 x_5^0$$
$$= x_1\bar{x}_2x_3x_4\bar{x}_5$$

Örnek

x	y	z	x+y	$\bar{z}$	(x+y) $\bar{z}$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0

- $F(x,y,z)=(x+y)\bar{z}$ fonksiyonunu çarpımlar toplamı şeklinde ifade ediniz.
- Çözüm: İlk adım F fonksiyonunun değerinin bulunmasıdır. Bunun için Tablo oluşturulur.
- $F(x,y,z)$ fonksiyonunun mantıksal eşdeğeri, fonksiyonun değerinin 1 olduğu durumlardaki değişkenlerin çarpımları 1 olacak şekilde çarpımlar toplamı şeklinde aşağıdaki ifade edilir.

$$F(x,y,z)=x\cdot y\cdot \bar{z}+x\cdot \bar{y}\cdot \bar{z}+\bar{x}\cdot y\cdot \bar{z}$$

- Tanım (maxterm veya complete sum): Mantıksal $x_1, x_2, ..., x_n$ değişkenlerinin bir maxtermi $y_1+y_2+...+y_n$ toplamıdır.
- Burada $y_i = x_i$ veya $y_i=\bar{x}_i$ dir. Bir maxterm değişkenlerin almış oldukları değer sonucunda 0 değerini alır.
- Diğer bir deyişle $y_1+y_2+\cdots+y_n$ maxtermi ancak ve ancak her bir y_i' nin değeri 0 ise 0 sonucunu verir.
- Bir mantıksal fonksiyon ise maxtermlerin toplamı şeklinde ifade edilebilir.
- x^e notasyonu kullanılarak n değişkenli bir $x_1, x_2, ..., x_n$ maxterm

$$M_{e_1e_2\ldots e_n}=x_1^{e_1}+x_2^{e_2}+\cdots+x_n^{e_n}$$

- Örneğin

$$M_{11010}=x_1^1+x_2^1+x_3^0+x_4^1+x_5^0$$
$$=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$$

- Şimdi iki mantıksal fonksiyonun eşit olup olmadığına mantıksal ifadelere dönüştüren aksiyomları kullanmadan karar vermemize yarayan önemli bir teoremi verebileceğiz.

- Teorem, n değişkenli mantıksal ifadenin bu n değişkenin veya bir kısmının toplamı olarak tek bir şekilde ifade edilebilir. Mantıksal ifade olarak tanımlanmış olan fonksiyonun disjunctive (ayıran) normal formdır denir. Mintermlerin toplamından oluştuğundan minterm form olarak veya çarpımların kanonik toplam formu olarakta adlandırılır.

- Bu teoremi dikkate almadan evvel, mantıksal ifadenin disjunctive normal formu çıkaracağımız bir örnek inceleyelim.

- Bu metot disjunctive normal form elde edilebilecek kabul edilebilir bir metot olmasına rağmen en kolay yöntem değildir ve sonuçta uyarlayacağımız tek bir metot değildir.

- Örnek: x_1, x_2, x_3 değişkenlerinden oluşan aşağıdaki mantıksal ifadeyi disjunctive normal formda yazınız.

$$x_1 x_2(x_1+x_3)$$

$x_1 x_2(x_1+x_3)$	$= x_1 x_2 x_1 + x_1 x_2 x_3$	Dağılma özelliği
	$= x_1 x_1 x_2 + x_1 x_2 x_3$	Değişme özelliği
	$= x_1 x_2 + x_1 x_2 x_3$	Idempotence özelliği
	$= x_1 x_2 1 + x_1 x_2 x_3$	Etkisiz eleman özelliği
	$= x_1 x_2 (x_3+\overline{x}_3) + x_1 x_2 x_3$	Değişme özelliği
	$= x_1 x_1 x_3 + x_1 x_2 \overline{x}_3 + x_1 x_2 x_3$	Dağılma özelliği
	$= x_1 x_1 x_3 + x_1 x_2 \overline{x}_3$	Değişme ve Idempoence özelliği

Teorem

- Sıfır olmayan $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ boole fonksiyonu

$$f(e_1, e_2, ..., e_n)\ x_1^{e_1} x_2^{e_2} ... x_n^{e_n}$$

Formundaki tüm mümkün mantıksal ifadelerin toplamı olarak yazılabilir. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \bigoplus_{(e)} f(e_1, e_2, \ldots, e_n) x_1^{e_1} x_2^{e_2}, \ldots x_n^{e_n} \\ &= \bigoplus_{(e)} f(e_1, e_2, \ldots, e_n) m_{e_1 e_2 \ldots e_n} \end{aligned}$$

Burada (e), $(e_1, e_2, ..., e_n)$ sıralı n'linin tüm mümkün durumlarını gösterir ve $e_i=0$ veya değerlerinden birini alır $(i=1,2,...,n)$.

- Bunlardan 2^n tane vardır.

8-15

- Örnek : $f(x_1,x_2)=x_1+x_2$ Boole fonksiyonunu disjunctive normal formda yazınız.
- Teoreme göre $f(x_1,x_2)=x_1+x_2$ Boole fonksiyonunu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$f(x_1, x_2) = f(0,0)\overline{x_1}\,\overline{x_2} + f(0,1)\overline{x_1}x_2 + f(1,0)x_1\overline{x_2} + f(1,1)x_1x_2$$

- Doğruluk tablosuna benzer şekilde $f(e_1,e_2)$ 'yi hesaplamak için tablo yapabiliriz.

e_1	e_2	$f(e_1, e_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= 0\overline{x_1}\,\overline{x_2} + 1\overline{x_1}x_2 + 1x_1\overline{x_2} + 1x_1x_2 \\ &= \overline{x_1}x_2 + x_1\overline{x_2} + x_1x_2 \end{aligned}$$

8-16

- Örnek : $f(x_1,x_2,x_3)=x_2x_3+x_3x_1$ Boole fonksiyonunu disjunctive normal formda yazınız.
- Doğruluk tablosuna benzer şekilde $f(e_1,e_2,e_3)$ 'yi hesaplamak için tablo yapabiliriz.

e_1	e_2	e_3	e_2e_3	e_3e_1	$e_2e_3 \oplus e_3e_1$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

$f(e_1,e_2,e_3)=1$ olan e_1, e_2, e_3 leri bulalım

(a) $e_1=0, e_2=1, e_3=1$
(b) $e_1=1, e_2=0, e_3=1$
(c) $e_1=1, e_2=1, e_3=1.$

(a) $\bar{x}_1x_2x_3$
(b) $x_1\bar{x}_2x_3$
(c) $x_1x_2x_3.$

$$f(x_1,x_2)=\overline{x}_1x_2x_3+x_1\overline{x}_2x_3+x_1x_2x_3$$

- Teorem: Verilen bir Boole fonksiyonun disjunctive normal formu tektir.
- Örnek : $f(x_1,x_2)=x_1+x_1$ ve $g(x_1,x_2)=\overline{x}_1x_2+x_1$ fonksiyonları aynıdır.

$$f(x_1,x_2)=\overline{x}_1x_2+x_1\overline{x}_2+x_1x_2$$

e_1	e_2	$\bar{e}_1$	$\bar{e}_1e_2$	$\bar{e}_1e_2 \oplus e_1$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	0	1

$$g(x_1,x_2)=\overline{x}_1x_2+x_1$$

Fonksiyonunu disjucntive formda yazalım:

$$g(x_1,x_2)=\overline{x}_1x_2+x_1\overline{x}_2+x_1x_2$$
$$=f(x_1,x_2)$$

Sonuç olarak bu iki fonksiyon eşittir.

Teorem

- Sıfır olmayan $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ boole fonksiyonu

$$f(\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n) + x_1^{e_1} + x_2^{e_2} + \cdots + x_n^{e_n}$$

veya denk olarak

$$f(e_1, e_2, ..., e_n) + x_1^{\bar{e}_1} + x_2^{\bar{e}_2} + \cdots + x_n^{\bar{e}_n}$$

Formundaki tüm mümkün mantıksal ifadelerin toplamı olarak yazılabilir. Bundan dolayı

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \underset{(e)}{*} f(e_1, e_2, ..., e_n) + x_1^{\bar{e}_1} + x_2^{\bar{e}_2} + \cdots + x_n^{\bar{e}_n}$$

$$= \underset{(e)}{*} f(e_1, e_2, ..., e_n) + M_{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n}$$

Burada (e), $(e_1, e_2, ..., e_n)$ sıralı n'linin tüm mümkün durumlarını gösterir ve $e_i = 0$ veya değerlerinden birini alır $(i=1,2,...,n)$.

- Bu formda yazılan fonksiyona conjuctive (birleştiren) normal formda yazılmıştır denir. Bu form maxterm form veya toplamları kanonik çarpım formu olarak ta adlandırılır.

- Teorem: Verilen bir Boole fonksiyonun conjunctive normal formu tektir.

- Örnek : $f(x_1,x_2)=x_1(x_1+x_2)$ Boole fonksiyonunu conjunctive normal formda yazınız.

- Teoreme göre $f(x_1,x_2)= x_1(x_1+x_2)$ Boole fonksiyonunu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$f(x_1,x_2) = (f(0,0)+x_1+x_2)(f(0,1)+x_1+\bar{x}_2)(f(1,0)+\bar{x}_1+x_2+)(f(1,1)+\bar{x}_1+\bar{x}_2)$$

- Doğruluk tablosuna benzer şekilde $f(e_1,e_2)$ 'yi hesaplamak için tablo yapabiliriz.

e_1	e_2	$e_1 \oplus e_2$	$e_1(e_1 \oplus e_2)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

$$f(x_1,x_2) = (0+x_1+x_2)(0+x_1+\bar{x}_2)(1+\bar{x}_1+x_2)(1+\bar{x}_1+\bar{x}_2)$$

$$=(x_1+x_2)(x_1+\bar{x}_2)\cdot 1 \cdot 1$$

$$=(x_1+x_2)(x_1+\bar{x}_2)$$

- Örnek : $f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x}_1 + x_2)(\overline{x}_1 + \overline{x}_3)$ Boole fonksiyonunu conjunctive normal formda yazınız.
- Doğruluk tablosuna benzer şekilde $f(e_1, e_2, e_3)$ 'yi hesaplamak için tablo yapabiliriz.

$f(e_1, e_2, e_3) = 0$ olan e_1, e_2, e_3 leri bulalım

e_1	e_2	e_3	$\bar{e}_1$	$\bar{e}_3$	$\bar{e}_1 \oplus e_2$	$\bar{e}_1 \oplus \bar{e}_3$	$(\bar{e}_1 \oplus e_2)(\bar{e}_1 \oplus \bar{e}_3)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0

(a) $e_1 = 1, e_2 = 0, e_3 = 0$

(b) $e_1 = 1, e_2 = 0, e_3 = 1$

(c) $e_1 = 1, e_2 = 1, e_3 = 1$

$M_{e_1 e_2 \ldots e_n}$

(a) $\overline{x}_1 + x_2 + x_3$

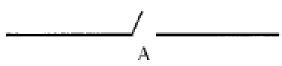
(b) $\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3$

(c) $\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\overline{x}_1 + x_2 + x_3)(\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3)(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)$$

Anahtar Devreleri

- Bilgisayar, telefon sistemleri, trafik ve tren sistemleri gibi birçok elektronik cihaz anahtarlar (switches) olarak bilinen devre elemanlarını içerisinde barındır.
- Anahtar kapalı iken elektrik akımı olurken anahtar açıkken elektrik akımı olmaz.
- Anahtar iki durumlu makine örneğidir; iki durumlardan birisi açık diğeri ise kapalıdır.
- Bir veya daha fazla anahtarın kullanıldığı devreler anahtar devreleri olarak adlandırılır.



- Şimdi A anahtarını içeren bir devreyi göz önüne alalım. Anahtarın durumunu x değişkeni ile gösterelim; $x=0$ ise A açıktır, $x=1$ ise anahtar kapalıdır.

Seri Bağlama

- Bir devrede A_1 ve A_2 anahtarlarının aşağıdaki gibi seri olarak bağlandığını kabul edelim.

- Akımın karşıya geçebilmesi için iki anahtarında kapalı olması gerekir aksi durumlarda akım karşıya geçmez.
- Bu durumda $f:\{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$, $f(x_1,x_2)$ fonksiyonu yardımıyla ifade edilebilir. Bu fonksiyonun x_1 ve x_2 için alabileceği değerler tablo da gösterilmektedir.

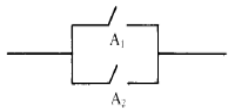
x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

f fonksiyonu $f(x_1,x_2)=x_1x_2$ fonksiyonuyla ifade edilebilir.

8-23

Paralel Bağlama

- Bir devrede A_1 ve A_2 anahtarlarının aşağıdaki gibi paralel olarak bağlandığını kabul edelim.



- Akımın karşıya geçebilmesi için iki anahtardan en az bir tanesinin kapalı olması gerekir aksi durumlarda akım karşıya geçmez.
- Bu durumda f: $\{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$, $f(x_1,x_2)$ fonksiyonu yardımıyla ifade edilebilir. Bu fonksiyonun x_1 ve x_2 için alabileceği değerler tablo da gösterilmektedir.

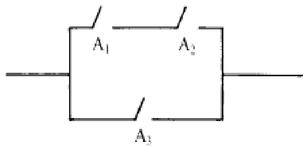
x_1	x_2	$g(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

f fonksiyonu $f(x_1,x_2)=x_1+x_2$ fonksiyonuyla ifade edilebilir.

A_1, A_2, …, A_n gibi n tane anahtardan oluşan devrenin durumları x_1, x_2, …, x_n gibi n tane tarafından ifade edilir. f: $\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ fonksiyonun anahtarlama fonksiyonu adı verilir.

8-24

Örnek



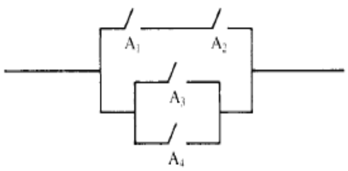
- Yukarıdaki devreyi ifade eden f anahtarlama fonksiyonunu hesaplayınız.

- x_1, x_2, x_3 ile A_1, A_2, A_3 anahtarlarının durumlarını gösterelim.
- $f_1(x_1, x_2)$ fonksiyonu ile A_1, A_2 anahtarlarının durumunu gösteren fonksiyon olsun. Bağlantı seri olduğundan $f_1(x_1,x_2) = x_1x_2$ dir.
- $f_2(x_3)$ ile de A_3 anahtarının durumunu ifade edelim. $f_2(x_3)=x_3$ olduğu açıktır.
- A_1 ve A_2 anahtarları paralel olarak A_3 anahtarına bağlanmıştır. Böylece anahtar sisteminin davranışı

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1, x_2) + f_2(x_3)$$
$$= x_1x_2 + x_3$$

8-25

Örnek



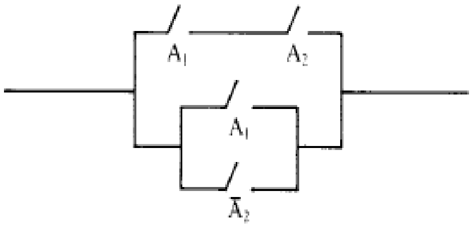
- Yukarıdaki devreyi ifade eden f anahtarlama fonksiyonunu hesaplayınız.

- x_1, x_2, x_3 , x_4 ile A_1, A_2, A_3 , A_4 anahtarlarının durumlarını gösterelim.
- $f_1(x_1, x_2)$ fonksiyonu ile A_1, A_2 anahtarlarının durumunu gösteren fonksiyon olsun. Bağlantı seri olduğundan $f_1(x_1,x_2) = x_1x_2$ dir.
- $f_2(x_3 , x_4)$ ile de A_3 , A_4 anahtarının durumunu ifade edelim. Bağlantı paralel olduğundan $f_2(x_3 , x_4) = x_3 + x_4$ olduğu açıktır.
- A_1 ve A_2 anahtarları paralel olarak A_3 anahtarına bağlanmıştır.
- Böylece anahtar sisteminin davranışı

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_1(x_1, x_2) + f_2(x_3, x_4)$$
$$= x_1x_2 + x_3 + x_4$$

8-26

Örnek

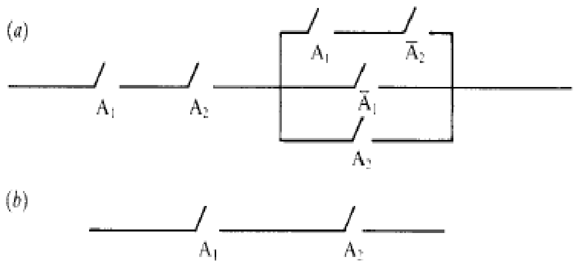


- Yukarıdaki devreyi ifade eden f anahtarlama fonksiyonunu hesaplayınız.

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_3 + \overline{x}_2$$

8-27

Örnek



- Yukarıdaki devreleri ifade eden f_1 ve f_2 anahtarlama fonksiyonunu hesaplarsak:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2 (x_1 \overline{x}_2 + \overline{x}_1 + x_2)$$
$$f_2(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

- f_1 ve f_2 fonksiyonlarının ilk bakışta eşit olduklarını görmek mümkün değildir.
- Bu ise fonksiyonları disjunctive (conjuctive) normal forma dönüştürerek kontrol edebiliriz.
- Diğer yöntem ise bütün mümkün durumları tablo yaparak fonksiyonların eşit olduğunu gözlemleyebiliriz.

8-28

Örnek

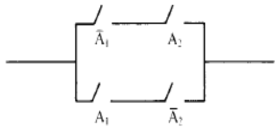
- Merdivenlere yerleştirilmiş bir lambanın hem üst kattan hem de alt kattan kontrol edilmesi istenmektedir.
- Buradaki anahtarların durumu değiştirildiğinde lambanın da durumunun değişmesi istenmektedir.
- Bu şekilde işlevselliğe sahip devreyi tasarlayınız.

A_1	A_2	Akım
Açık	Açık	Yok
Açık	Kapalı	Var
Kapalı	Açık	Var
Kapalı	Kapalı	Yok

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

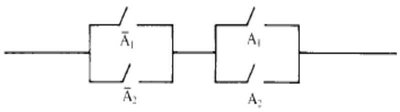
- disjunctive normal forma

$$f(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2$$

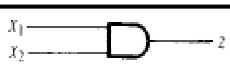


- conjuctive normal forma

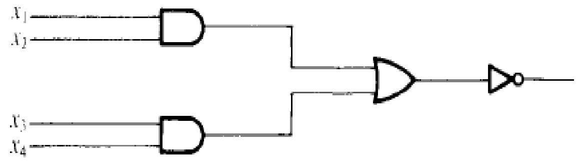
$$f(x_1, x_2) = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2) + (x_1 + x_2)$$



Mantık Devreleri

	AND-gate	OR-gate	NOT-gate
Circuit symbol			
Input/output table	x_1 x_2 z: 0 0 0; 0 1 0; 1 0 0; 1 1 1	x_1 x_2 z: 0 0 0; 0 1 1; 1 0 1; 1 1 1	x z: 0 1; 1 0
Boolean expression	$z = x_1 x_2$	$z = x_1 \oplus x_2$	$z = \bar{x}$

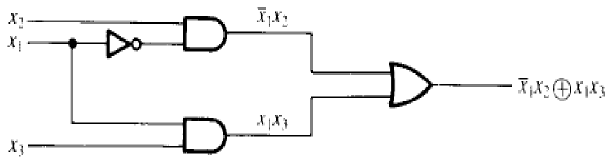
Örnek



- Yukarıdaki gibi kapılardan oluşan sistemi mantıksal değişkenler cinsinden ifade ediniz.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1 x_2 + x_3 x_4}$$

- x_1, x_2, x_3 gibi girdi değişkenlerini alıp $\bar{x}_1 x_2 + x_1 x_3$ çıktısını veren mantık kapılarından oluşan sistemi tasarlayınız.



8-31

Boole İfadelerinin Minimize Edilmesi

- Mantıksal fonksiyonlar ile tasarlanan mantık devrelerinde kullanılan elemanların sayısının en küçüklenmesi ve aynı zamanda eşdeğer mantıksal fonksiyonu sağlaması tasarımda önemli bir mühendislik problemidir.
- Bu nedenle mantıksal fonksiyonların eşdeğeri olan ve en az mantıksal devre elemanı ile gerçeklenebilen fonksiyonun bulunması gereklidir.
- Çarpımlar toplamı olarak ifade edilen aşağıdaki fonksiyonun eşdeğerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= x \cdot y \cdot z + x \cdot \bar{y} \cdot z \\ &= (y + \bar{y})(xz) \\ &= 1 \cdot (xz) = xz \end{aligned}$$

- Buradan ilk mantıksal ifade iki çarpma ve bir toplama elemanı ile gerçeklenebilirken indirgenen ifade tek çarpma elemanı ile gerçeklenebilmektedir.
- İfadelerin indirgenmesi için iki adet yöntem kullanılır. Bunlar Karnaugh Haritaları ve Quine-McCluskey Yöntemidir.
- Bu bölümde önce mantıksal ifadelerin indirgenme yöntemlerinin esasları anlatılacaktır.

8-32

- Verilen bir mantıksal ifadeye denk olan en basit mantıksal ifade aşağıdaki kriterleri sağlar:
  a) Çarpımların toplamı olacak şekilde terimler yardımıyla ifade edilebilmelidirler.
  b) Bu formdan başka daha az sayıda denk bir mantıksal ifade bulunmamalıdır.
  c) Bu formdaki denk mantıksal ifadeler aynı sayıda terime sahip olmalıdır.

- Yukarıdaki kriterleri sağlayan mantıksal ifadeler minimal formdadır veya minimaldir denir.
- Yukarıdan da anlaşılacağı gibi minimal formlar tek değildir.
- Mantıksal ifadenin minimal formunu elde etmek için kullanılacak teknik disjunctive normal form ile başlar.
- Sonra ikinci kriter sağlanacak şekilde terimlerin sayısının azaltılması amaçlanır.

- Daha sonra değişkenlerin sayısının azaltılması sağlanır.

8-33

Karnaugh Haritası Yöntemi

- Bu yöntemde mintermlere eşdeğer olan en kısa ifade hesaplanır.
- Yöntem iki, üç, dört, vs. mantıksal değişkenli ifadeler için farklı harita oluşturulmasını gerektirir.
- Örnek olarak $F(x,y) = \bar{x}y + x\bar{y}$ nin haritası Tablo 6.6(b) de ,
- $\bar{x}y + x\bar{y} + \bar{x}\,\bar{y}$ ninki ise Tablo 6.6(c) 'de görülmektedir. Tablo (b) nin eşdeğeri yine kendisi (c)'ninki ise $\bar{x} + \bar{y}$ olarak elde edilir

	y	$\bar{y}$
x	xy	$x\,\bar{y}$
$\bar{x}$	$y\,\bar{x}$	$\bar{x}\,\bar{y}$

Tablo 6.6(a)

	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$	1	

(b)

	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$	1	1

(c)

- Minterimlerin yazılım sırasına dikkat edilirse, bitişik her bir satır veya sütunda değişkenin alabileceği değer "1" den "0" a yada "0" dan "1" geçer. Bu ise iki bitişik karenin birbiri ile komşu olmasını sağlar.

8-34

- Tablo 6.7(a)'da üç değişkenli mantıksal ifadenin Karnaugh Haritası görülmektedir.
- Örnek olarak $F(x,y,z)=\bar{x}yz+x\bar{y}z+x\bar{y}\bar{z}+\bar{x}\bar{y}z+\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ 'nin haritası Tablo 6.7(b) de ,
- $xy\bar{z}+\bar{x}yz+x\bar{y}z+x\bar{y}\bar{z}+\bar{x}\bar{y}z+\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ fonksiyonunki ise 6.7(c) 'de görülmektedir.
- (b) nin eşdeğeri $\bar{y}+\bar{x}y$
- (c)'ninki ise $x+\bar{y}+z$ olarak elde edilir.

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}z$	$\bar{y}\bar{z}$
x	xyz	$xy\bar{z}$	$x\bar{y}z$	$x\bar{y}\bar{z}$
$\bar{x}$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

Tablo 6.7(a)

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}z$	$\bar{y}\bar{z}$
x			1	1
$\bar{x}$	1		1	1

(b)

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}z$	$\bar{y}\bar{z}$
x	1	1	1	1
$\bar{x}$	1		1	1

(c)

- 4 ve daha fazla değişkenli mantıksal ifadelerin indirgenmesi benzer şekilde Karnaugh Haritasının genişletilmesiyle yapılabilir. Ana kural, mintermlerde toplama giren eşlenik terimlerin haritada daire içerisine alınması ve grupta değişmeyen terimin sonuçta yer almasıdır.

Quine-McCluskey Yöntemi

- Karnaugh Haritası pratik bir yöntem olmasına karşılık dörtten fazla mantıksal değişkenli ifadelerde haritanın boyutu çok büyüyeceğinden tablo oluşturmak zorlaşır.
- Bu nedenle Quine-McCluskey yöntemi böyle ifadelerin indirgenmesinde kullanılabilir.
- Yöntemde mintermler en fazla 1 içeren dizilerine göre sırlanarak bu terimlerden indirgenme yapılır.

			1. Adım			2. Adım		
	Terim	Bit dizisi		Terim	Dizi		Terim	Dizi
1	$x.y.z$	111	(1,2)	$x.z$	1-1	(1,2,3,4)	z	--1
2	$x.\bar{y}z$	101	(1,3)	yz	-11			
3	$\bar{x}y.z$	011	(2,4)	$\bar{y}z$	-01			
4	$\bar{x}\bar{y}z$	001	(3,4)	$\bar{x}z$	0-1			
5	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	000	(4,5)	$\bar{x}\bar{y}$	00-			

- Örnek olarak :
  $F(x,y,z)=x\cdot y\cdot z+x\cdot\bar{y}\cdot z+\bar{x}\cdot y\cdot z+\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot z+\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}$
  ifadesinin indirgenmesini ele alalım.
- Bunun için önce yandaki Tablo teşkil edilir.
- Tabloda adım 1 ve 2'den indirgenen terimlerin toplamı fonksiyonun indirgenmiş değeridir.
- 1. adımda birbiriyle indirgenen terim numaraları gösterilmiştir.
- 2. adımda ise 1. adımdaki sonuçlardan birbiriyle indirgenen terimler gösterilmiştir.
- İndirgenemeyen terimler 1. adımda 5. terim 2. adımda ise 1. terimdir.
- Yani ifadenin indirgenmiş şekli $F(x,y,z)=z+\bar{x}\cdot\bar{y}$ dir.