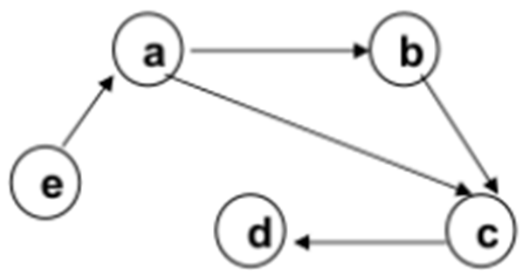
AYRIK MATEMATİK DERSİ

GRAF TEORİSİ
(ÇİZGELER-3)

GRAFLAR - Tanımlar

- **Yol (path)** : Bir çizgi kümesinde yol, düğümlerin sırasıdır. Kenar uzunluğu, yolun uzunluğunu verir.
  - $V_1, V_2, V_3 \ldots\ldots V_N$ ise yol N – 1 dir.
  - Eğer yol kenar içermiyorsa o yolun uzunluğu sıfır'dır.
  - İzmir'den Ankara'ya doğrudan veya İstanbul'dan geçerek gidilebilir
  - (İzmir- İstanbul- Ankara).
- **Basit Yol (Simple Path)** : Bir yolda ilk ve son düğümler dışında tekrarlanan düğüm yoksa basit yol diye adlandırılır.
  - eabcd basit yol'dur

fakat eabcabcd veya abcabca basit yol değildir.



Düğümler arası yol (path)

- Bir yol (path) düğümlerin bir sırasıdır. Yani $(v_0, v_1, v_2, \ldots v_k)$ öyle ki:
  - $0 \leq i < k$ *için* , $\{v_i, v_{i+1}\}$ bir kavistir
  - $0 \leq i < k\text{-}1$ *için*, $v_i \neq v_{i+2}$

    Yani, kenarlar $\{v_i, v_{i+1}\} \neq \{v_{i+1}, v_{i+2}\}$

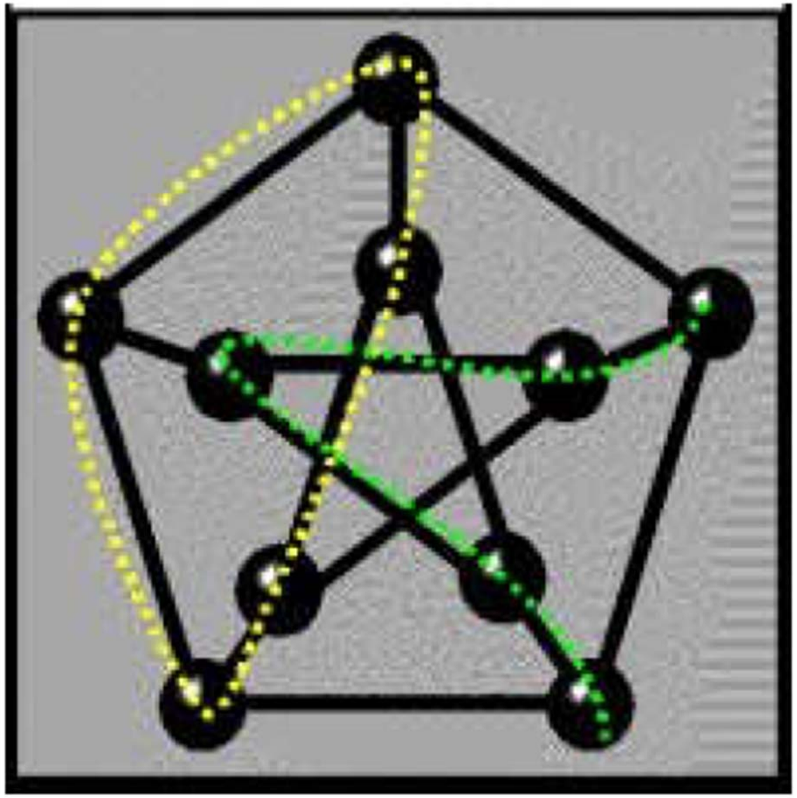
  Not: Bir yolun aynı düğüm veya aynı kavis üzerinden herhangi bir sayıda geçmesine izin verilmiştir.

- Bir yolun uzunluğu (length) yol üzerindeki kavis sayısının toplamıdır.

Yol (path)

Bir düğümden diğerine gidilirken izlenecek düğümlerin tamamı bir 'yol' oluşturur. Eğer basit bir graf söz konusu ise, yolun uzunluğu, üzerinden geçilen kavis sayısına eşittir. Fakat ağırlıklı graflarda yol uzunluğu, her bir kavisin aldığı değerlerin toplamına eşittir.

Buna göre yandaki şekildeki yeşille gösterilen kavisler bir yol (path) belirtmektedir. n uzunluğundaki bir yol'un (path) $n+1$ adet düğümü ve n adet de ardışık kavisi vardır.



Yol (path) tipleri

- Bir yol basittir (simple) ancak ve ancak bir düğüm bir yolda birden fazla kullanılmamışsa.

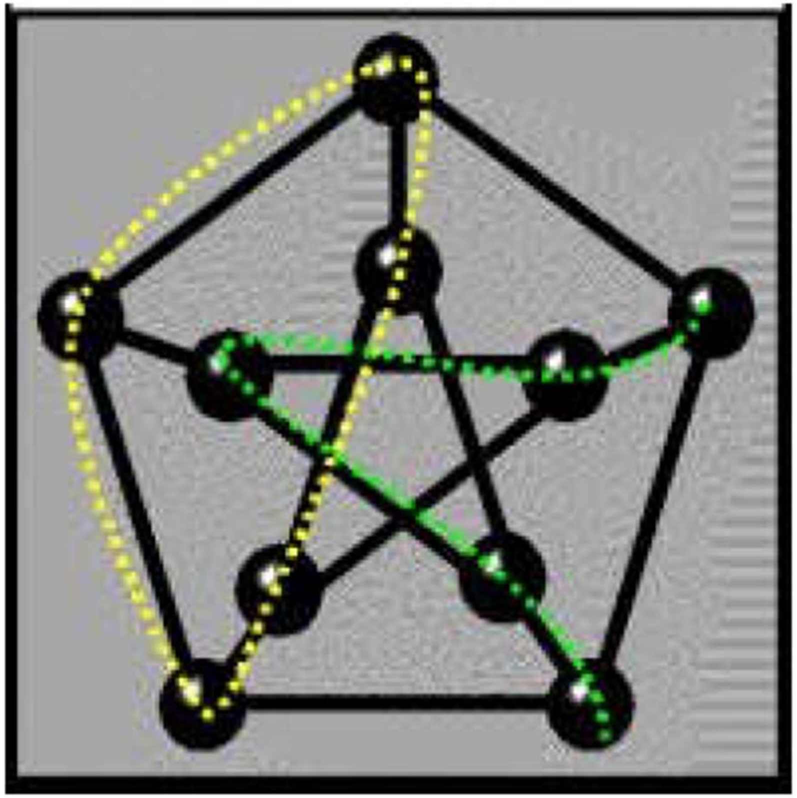
- Bir yol döngüdür (cycle) (devre-circuit) ancak ve ancak $v_0 = v_k$
  - Başlangıç ve bitiş aynı düğüm olmalıdır!

- Bir yol birden fazla döngü (devre) içerebilir eğer bazı düğümler iki veya daha fazla görünürse.

Döngü (cycle) (Devre-circuit)

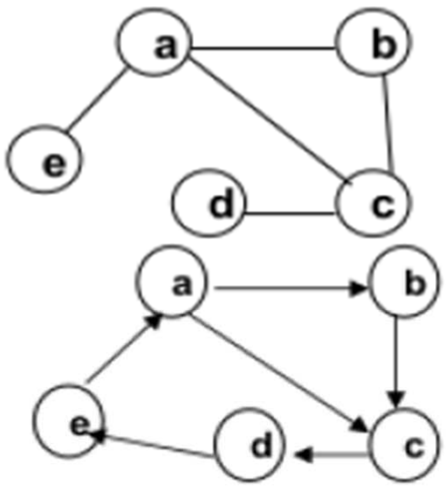
Döngü, başladığı düğüme geri dönen ve aynı düğümden iki kez geçmeyen bir yoldur. Bir graftaki kavis sayısı düğüm sayısına eşit ya da fazlaysa, o graf en az bir döngü içeriyor demektir.

Yandaki şekilde sarıyla gösterilen kavislerin birleşimi bir döngü oluşturmaktadır. Uzunluğu n olan bir döngüde n adet düğüm vardır.

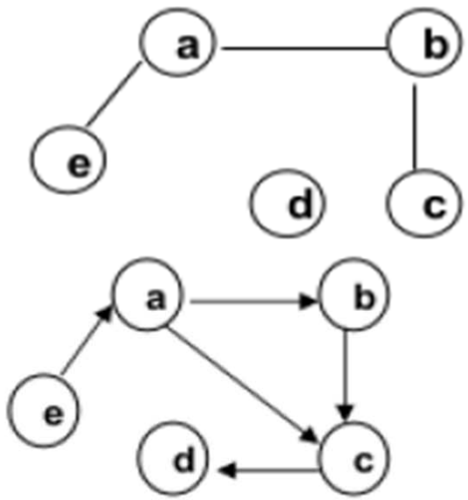


GRAFLAR - Tanımlar

- **Uzunluk :** Bir yol üzerindeki kenarların uzunlukları toplamı o yolun uzunluğudur.
- **Bağlı veya Bağlı olmayan Çizge(Connected Graph):**
  - Eğer bir graftaki tüm düğümler arasında en azından bir yol varsa bağlı graftır. Eğer bir grafta herhangi iki düğüm arasında yol bulunmuyorsa bağlı olmayan graftır.



Bağlı Graf



Bağlı olmayan Graf

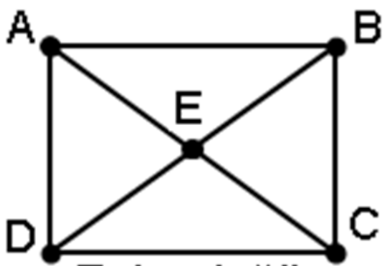
Euler Grafı

Bir graftaki tüm kavislerden sadece bir kez geçmek şartıyla (aynı düğümden birden fazla geçilebilir), tüm kavisler dolaşılarak başlangıç düğümüne geri dönülebiliyorsa bu yola 'Euler devresi' denir.

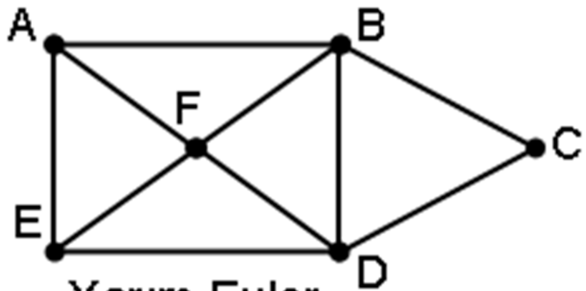
Euler devresi içeren grafa da 'Tam Euler Graf' denir. Bir graftaki düğümlerin her birinin derecesi çift ise bu graf Euler devresi içeriyor demektir. Euler devresinde hiçbir kavisten birden fazla geçilemez; fakat düğümlerden birden fazla geçilebilir.

Eğer yolun kapalı olması şartı kaldırılırsa, yani $V_n \neq V_0$ olursa, bu durumda graf "Yarım Euler graf"tır. Bu durumda tüm kavislerden sadece bir kez geçmek şartıyla tüm kavisler dolaşıldığında 'Euler yolu' elde edilir.

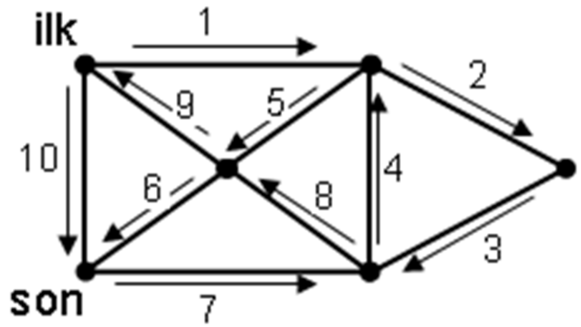
Euler Grafı

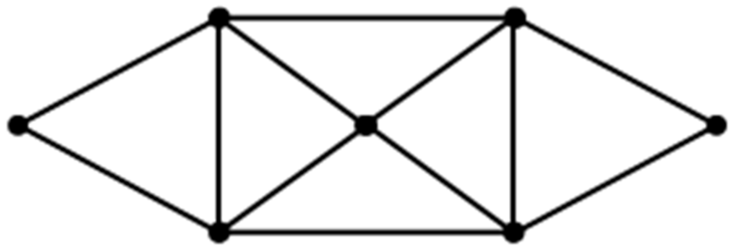


Euler değil

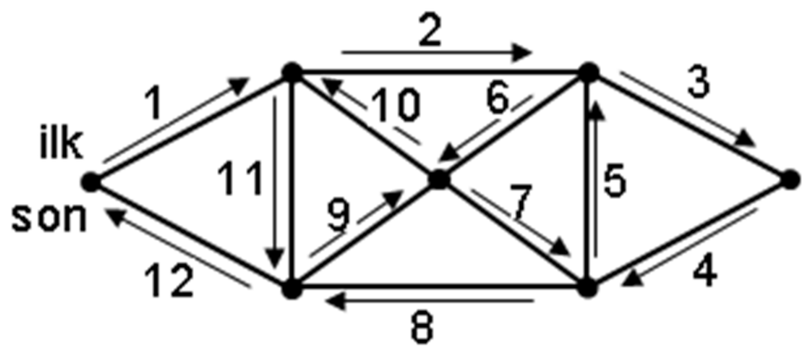


Yarım Euler





Euler graf



Euler Formülü

G bağlı düzlemsel bir graf olsun. Düzlemde çizilen G ‘nın diyagramı ‘yüz’ (face) adını verdiğimiz bölgelere ayırır.

Bağlı düzlemsel bir grafın düğümlerinin, ayrıtlarının ve yüzlerinin sayısı arasında bir ilişki kurmak için basit bir formül vardır.

Bağlı ve düzlemsel bir graf için; |F|, |E|, |V| sırasıyla yüzlerin, ayrıtların ve düğümlerin sayısı olmak üzere $|F| = |E| - |V| + 2$ ilişkisini sağlarlar. Bu ilişki tüm bağlı düzlemsel graflar için sağlanır ve Euler’ in formülü olarak bilinir.

n düğümlü($n \geq 3$) basit düzlemsel bağlı bir grafta, en fazla $(3n-6)$ ayrıt vardır.

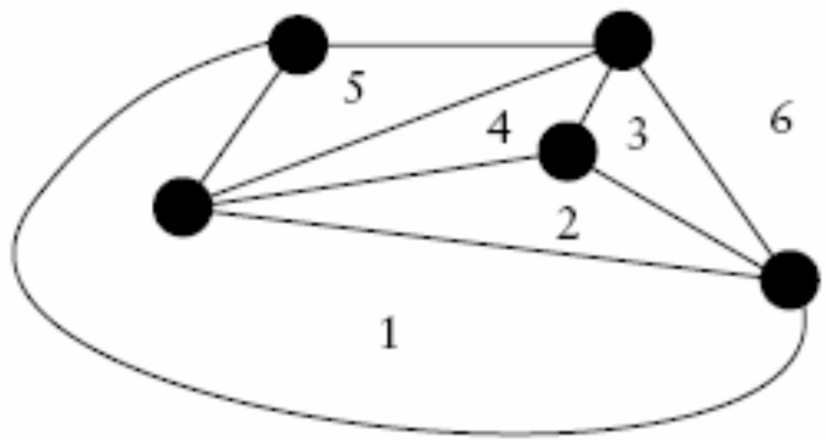
Euler Formülü

Aşağıdaki şekildeki graf, düzlemi 6 parçaya ayırır (grafın dışında kalan parça da sayılmaktadır). Bu durumda

- v düğüm sayısı

- e kavis sayısı

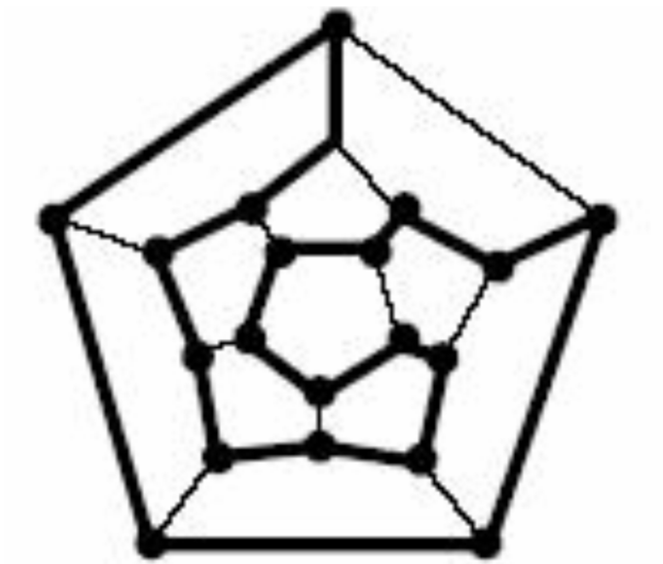
- f bölge sayısı iken;



Euler formulü için:
$v - e + f = 2$

Hamilton Graf

Bir G grafında bir kavisten birden fazla geçmeden tüm düğümlerden yalnızca 1 kez geçen kapalı bir yol varsa (yani devre ise) bu yola "Hamilton devresi" ve bu grafa da "Hamilton graf" denir. Hamilton devresi için tüm kavislerden geçme mecburiyeti yoktur. Eğer çizilen yol kapalı değilse (yani başlangıç düğümüne gerei dönülmiyorsa) bu yola 'Hamilton yolu' denir.



Yandaki şekilde koyu renkli işaretlenmiş kapalı yol (devre) Hamilton devresidir.

İzomorfik Gruplar:

3 elemanlı bir kümenin D_3 dihedral grubu ve S_3 permutasyon grubu için Cayley tablosu şöyledir:

D_3						
●	r_0	r_1	r_2	m_1	m_2	m_3
r_0	r_0	r_1	r_2	m_1	m_2	m_3
r_1	r_1	r_2	r_0	m_2	m_3	m_1
r_2	r_2	r_0	r_1	m_3	m_1	m_2
m_1	m_1	m_3	m_2	r_0	r_2	r_1
m_2	m_2	m_1	m_3	r_1	r_0	r_2
m_3	m_3	m_2	m_1	r_2	r_1	r_0

S_3						
Δ	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_2	P_2	P_3	P_1	P_5	P_6	P_4
P_3	P_3	P_1	P_2	P_6	P_4	P_5
P_4	P_4	P_6	P_5	P_1	P_3	P_2
P_5	P_5	P_4	P_6	P_2	P_1	P_3
P_6	P_6	P_5	P_4	P_3	P_2	P_1

→ f: $r_0 \rightarrow P_1$
→ f: $r_1 \rightarrow P_2$
→ f: $r_2 \rightarrow P_3$
→ f: $m_1 \rightarrow P_4$
→ f: $m_2 \rightarrow P_5$
→ f: $m_3 \rightarrow P_6$

2 tabloyu karşılaştıracak olursak, isimler dışında tabloların aynı olduğu görülür. Grupların elemanları farklı, ikili işlemleri (yani yapılan işlem) faklıdır; ancak tabloların yapıları aynıdır. Yapıları aynı olan 2 sonlu grup bu şekilde ilişkilendirilebiliyorsa bu gruplara "izomorfik grup" denir.

İzomorfizm:

G ve H 2 yönsüz graf olsun. G'den H'ye bir izomorfizm (Q, Φ) bir bijeksiyon çiftten (birebir-örten) oluşur.

Q: V(G) → V(H) ve
Φ: E(G) → E(H) olur.

Öyle ki, G'nin tüm e kavisleri için eğer
$\delta_G(e) = \{V,W\}$ ise
$\delta_H(\Phi(e)) = \{Q(v), Q(W)\}$ olur. Yani herhangi 2 graf için eğer:

1) 2 graf için düğüm (tepe) sayıları eşitse
2) Karşılıklı uygun 2 düğüm arasındaki kavisler eşitse ve aynı zamanda eşit sayıda ise, bu 2 graf "izomorf"tur.

$G_1(V_1, e_1)$ ve $G_2(V_2, e_2)$ yönsüz grafların izomorf olması için:
Her a, b ∈ V_1 için $f:V_1 \rightarrow V_2$ bir birebir-örten fonksiyon tanımlanabiliyorsa yani G_1'de a ve b komşu iken ancak ve ancak f(a) ve f(b)'de G_2'de komşu olmalıdır.

İzomorfizm

Tanım

$G = (V, E)$ ile $G^\star = (V^\star, E^\star)$ çizgeleri izomorfik:

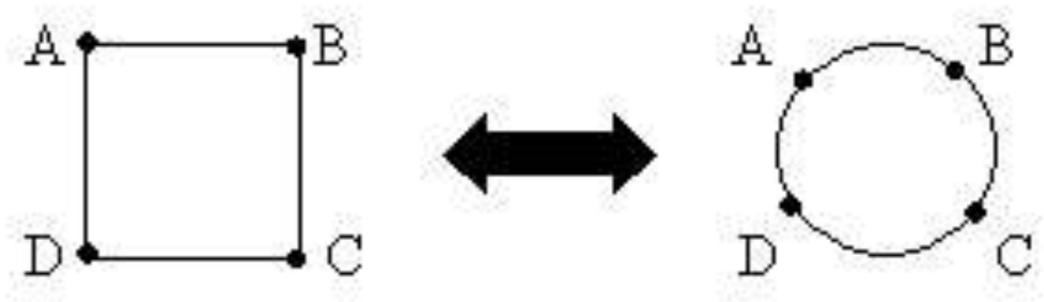
- $\exists f : V \to V^\star \; (u, v) \in E \Rightarrow (f(u), f(v)) \in E^\star$
- f birebir ve örten

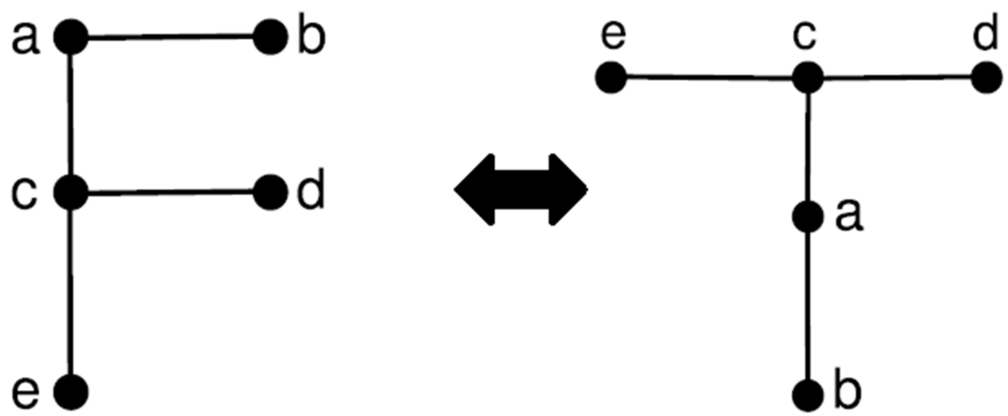
- G ile $G^\star$ aynı şekilde çizilebilir

İzomorfik graflar

Düğümler arası bağlantılara zarar vermeden yani kavislerde değişiklik yapmadan, birbirine dönüştürülebilen iki grafa ‘izomorfik’ denir. Kavis ve düğümlerden oluşan graflar, geometrik değil ilişkisel bilgiler içerirler. Kavislerin boy ve şeklinin, doğrusal ya da eğrisel oluşunun ve düğümlerin konumunun bir önemi yoktur. Her bir kavis iki düğüm arasındaki bir ilişkiyi simgelediğinden, önemli olan şey; herhangi 2 düğüm arasında kavis var olup olmadığıdır.

İzomorfik graflar





Kural:

G ve H, 2 izomorf graf ise:

1) G ve H’nin düğüm sayıları eşittir.

2) G ve H’nin kavis sayıları eşittir.

3) G ve H’nin bileşen sayıları eşittir.

4) Birbirlerine karşılık gelen düğümler aynı dereceye sahiptir.

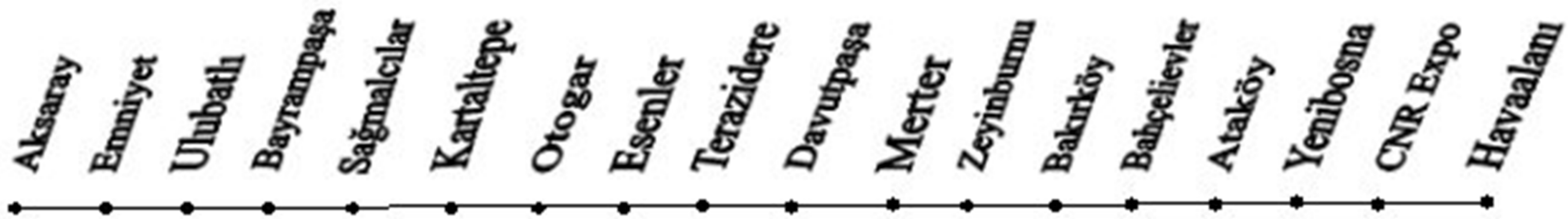
5) G basit grafsa H de basit graftır.

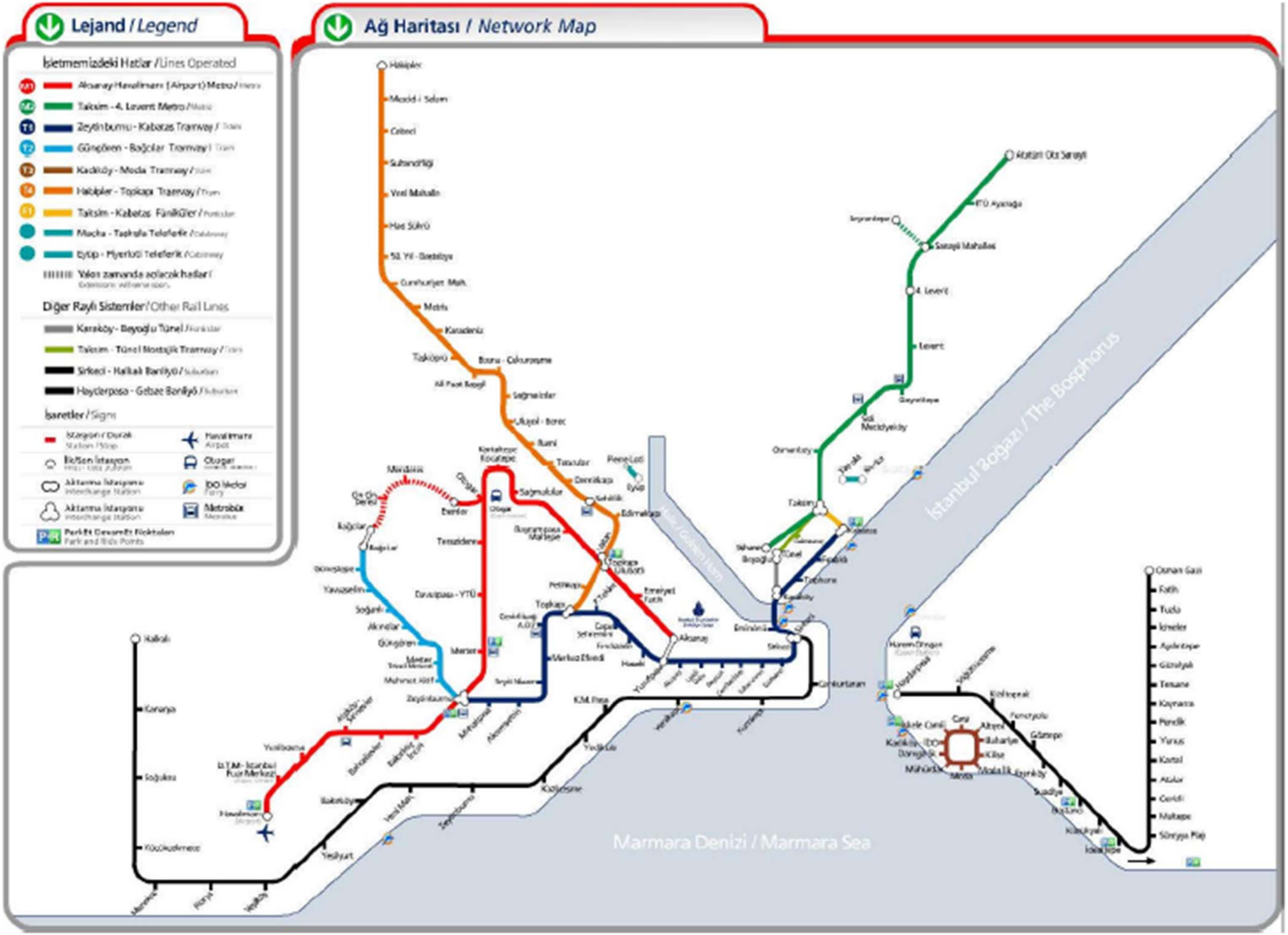
6) G Euler graf ise, H de Euler graftır.

7) G Hamilton graf ise, H de Hamilton graftır.

İzomorfik graflar

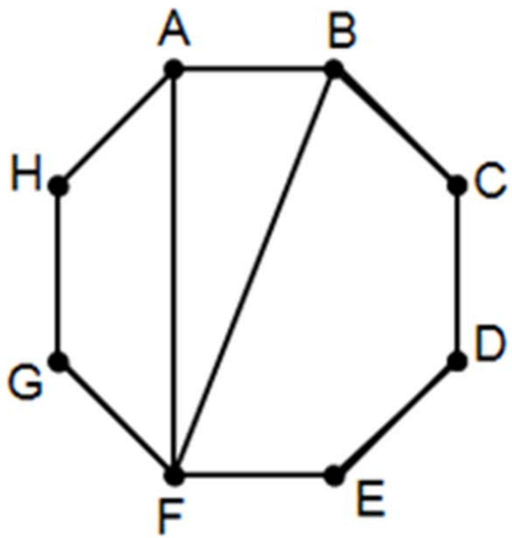
İzomorfizm basit bir örnekle somutlaştırılırsa; metrolarda, yolcuları bilgilendirmek amacı ile çıkış kapılarının üstündeki, durakların dizilişini gösteren şemalar aslında tamamen izomorfik bir yaklaşımla çizilmiştir. Aşağıdaki şekilde de görüldüğü gibi, söz konusu olan sadece durakların sıralanışıdır ve şemanın bu haliyle yolculara verdiği bilgi hangi duraktan sonra hangisinin geldiğidir. Duraklar arasındaki mesafe, birbirlerine göre doğrultuları, yönleri yani metrik bilgilerin tamamı ihmal edilmiş ve metronun yol haritası bir dönüşüm geçirerek aşağıdaki izomorfuna dönüşmüştür.

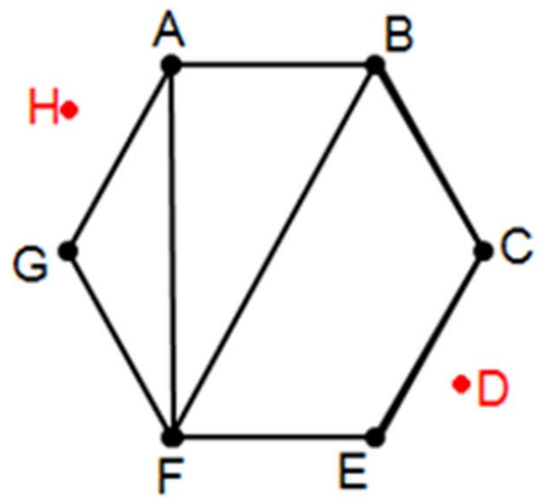



Lejand / Legend
İşletmemizdeki Hatlar / Lines Operated
Aksaray Havalimanı (Airport) Metro / Metro
Taksim - 4. Levent Metro / Metro
Zeytinburnu - Kabataş Tramvay / Tram
Güngören - Bağcılar Tramvay / Tram
Kadıköy - Moda Tramvay / Tram
Habipler - Topkapı Tramvay / Tram
Taksim - Kabataş Füniküler / Funicular
Maçka - Taşkışla Teleferik / Cableway
Eyüp - Piyerloti Teleferik / Cableway
Yakın zamanda açılacak hatlar /
Diğer Raylı Sistemler / Other Rail Lines
Karaköy - Beyoğlu Tünel / Funicular
Taksim - Tünel Nostaljik Tramvay / Tram
Sirkeci - Halkalı Banliyö / Suburban
Haydarpaşa - Gebze Banliyö / Suburban
İşaretler / Signs
İstasyon / Durak
Station / Stop
Havalimanı
Airport
İlk/Son İstasyon
Otogar
Aktarma İstasyonu
Interchange Station
İDO Mehal
Ferry
Aktarma İstasyonu
Interchange Station
Metrobüs
Metrobus
Park Et Devam Et Noktaları
Park and Ride Points
Ağ Haritası / Network Map
Habipler
Mescid-i Selam
Cebeci
Sultançiftliği
Yeni Mahalle
Hacı Şükrü
50. Yıl - Baştabya
Cumhuriyet Mah.
Metris
Karadeniz
Taşköprü
Bosna - Çukurçeşme
Ali Fuat Başgil
Sağmalcılar
Ulubatlı
Topkapı
Aksaray
Emniyet Fatih
Zeytinburnu
Bağcılar
Halkalı
Kanarya
Soğuksu
Küçükçekmece
Bakırköy
Yeşilyurt
Kazlıçeşme
Yedikule
Eminönü
Sirkeci
Karaköy
Tophane
Fındıklı
Kabataş
Taksim
Şişhane
Tünel
Beyoğlu
Osmanbey
Şişli Mecidiyeköy
Gayrettepe
Levent
4. Levent
Sanayi Mahallesi
İTÜ Ayazağa
Atatürk Oto Sanayii
Haydarpaşa
Kadıköy
Moda
Bostancı
Suadiye
Osman Gazi
Fatih
Tuzla
İçmeler
Aydıntepe
Güzelyalı
Tersane
Kaynarca
Pendik
Yunus
Kartal
Atalar
Cevizli
Maltepe
Süreyya Plajı
İdealtepe
Haliç / Golden Horn
İstanbul Boğazı / The Bosphorus
Marmara Denizi / Marmara Sea

Homeomorfik graflar

Kuratowski'nin teoremi: Eğer bir graf, diğer bir grafın kavislerine, derecesi 2 olan düğümler ekleyerek ya da çıkararak elde edilebiliyorsa, bu 2 graf "homeomorfik graflar"dır yani düğüm derecesi 2 hassaslığı ile özdeştir.





2 graf homeomorfiktir. Çünkü ilk graftaki derecesi 2 olan D ve H düğümleri silinerek 2. Graf elde edilmiştir.

NOT: Dereceleri aynı olduğu için, D yerine C ve H yerine G düğümleri de silinebilirdi.

Homeomorfizm

Tanım

$G = (V, E)$ ile $G^\star = (V^\star, E^\star)$ çizgeleri homeomorfik:

- $E^\star$ kümesindeki ayrıtlardan bazılarının ek düğümlerle bölünmüş olmaları dışında G and $G^\star$ çizgeleri izomorfik