# MATEMATIK 1


*Konya Teknik Üniversitesi*
*Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi*
*Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü*

**Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI**


**2020**

# KARMAŞIK SAYILAR

$x^2+1=0$ denklemini göz önüne alalım. Bu ve buna benzer birçok denklemin çözümü, hem reel hem de genişletilmiş reel sayılar kümesinde yoktur. Çünkü karesi “-1” olan bir reel sayı yoktur. Bu durumda sayı sisteminin genişletilmesine ihtiyaç vardır.

**Tanım 5.1.** $a,b\in\mathbb{R}$ ve $i^2=-1$ olmak üzere $z=a+ib$ şeklinde tanımlanan sayılara karmaşık sayılar denir. Karmaşık sayılardan oluşan kümeye karmaşık sayılar kümesi adı verilir ve bu küme $\mathbb{C}$ ile gösterilir. Bu durumda

$$\mathbb{C}=\left\{z:\ z=a+ib,\ \ a,b\in\mathbb{R}\text{ ve } i^2=-1\right\}$$

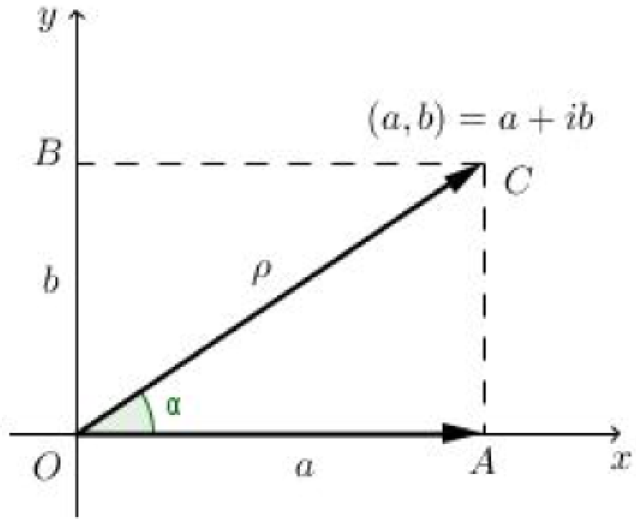
dir.

**Uyarı 5.1.** $z=a+ib$ karmaşık sayısı, $z=(a,b)$ şeklinde de gösterilir.

**Uyarı 5.2.** $(0,1)=i$ olup $i$ ye sanal veya imajiner birim denir. $(a,0)=a$ ifadesi karmaşık sayının reel kısmını, $(0,b)$ de karmaşık sayının sanal kısmını gösterir. Bu durum $\text{Re}(z)=a$ ve $\text{Im}(z)=b$ şeklinde gösterilir.

**Tanım 5.2.** $a-ib$ karmaşık sayısına $z=a+ib$ karmaşık sayının eşleniği denir ve $\overline{z}=a-ib$ sembolü ile gösterilir.

$z=(a,b)$ karmaşık sayısını göz önüne alalım.




**Şekil 5.1.**

Bu durumda $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$ olduğu açıktır. $\overrightarrow{OC}$ vektörünün $z = a + ib$ karmaşık sayısını temsil ettiği açıktır. Yani $z = a + ib$ karmaşık sayısı bir vektörel toplam olarak ifade edilmiştir. Ayrıca $O\overset{\Delta}{A}C$ dik üçgeninden $\overrightarrow{OC}$ vektörünün uzunluğu $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ , $tg\alpha = \dfrac{|AC|}{|OA|} = \dfrac{b}{a}$ dır. $\rho$ uzunluğuna $z = a + ib$ karmaşık sayısının modülü, $\alpha$ açısına da karmaşık sayının argümanı denir.

Bu durumda sayı sistemleri $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ biçiminde sıralanabilir.

$z_1 = a + ib = (a,b)$ ve $z_2 = c + id = (c,d)$ olmak üzere karmaşık sayılarda toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

**(1)** $z_1 = a + ib = (a,b)$ ve $z_2 = c + id = (c,d)$ olmak üzere toplama ve çıkarma işlemleri

$$z_1 \pm z_2 = (a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i(b \pm d)$$

veya

$$z_1 \pm z_2 = (a,b) \pm (c,d) = (a \pm c, b \pm d)$$

şeklindedir.

**(2)** $z_1 = a + ib = (a,b)$ ve $z_2 = c + id = (c,d)$ olmak üzere çarpma işlemi

$$z_1 z_2 = (a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$$

veya

$$z_1 z_2 = (a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$$

şeklindedir.

**(3)** $z_1 = a + ib = (a,b)$ ve $z_2 = c + id = (c,d)$ olmak üzere bölme işlemi

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

veya

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a,b)}{(c,d)} = \frac{(a,b)(c,-d)}{(c,d)(c,-d)} = \frac{((ac+bd),(bc-ad))}{c^2+d^2}$$

şeklindedir.

**Teorem 5.1.** İki karmaşık sayının çarpımından elde edilen sayının modülü, bu sayıların modüllerinin çarpımına ve argümanı bu sayıların argümanlarının toplamına eşittir.

$$\rho_1\rho_2 = \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} = \sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}$$

$$arcgt(\alpha) \pm \mathrm{ar}\,ctg(\beta) = arctg\left(\frac{\alpha \pm \beta}{1 \mp \alpha\beta}\right)$$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\alpha_1+\alpha_2 = arcgt\left(\frac{b}{a}\right) + \mathrm{ar}\,ctg\left(\frac{d}{c}\right) = arctg\left(\frac{bc+ad}{ac-bd}\right)$$ dir.

**Teorem 5.2.** İki karmaşık sayının bölümünden elde edilen sayının modülü, bu sayıların modüllerinin bölümüne ve argümanı bu sayıların argümanlarının farkına eşittir.

**Örnek 5.1.** $z_1 = 2 - i$ ve $z_2 = -2 + i$ sayılarının çarpımını ve bölümünü yazınız. Ayrıca bu sayıların çarpımının ve bölümünün modülünü ve argümanını bulunuz.

**Çözüm.** $z_1 z_2 = (2-i)(-2+i) = -3+4i$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2-i)}{(-2+i)} = \frac{(2-i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \frac{-5}{5} = -1$$

$$\rho_3 = \rho_1 \rho_2 = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\alpha_1 = arctg\left(\frac{-1}{2}\right),\ \alpha_2 = arctg\left(\frac{1}{-2}\right) \text{ olup,}$$

$$\alpha_1+\alpha_2=arctg\left(\frac{1}{-2}\right)+arctg\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$=arctg\left(\frac{\frac{1}{-2}+\frac{-1}{2}}{1-\left(\frac{1}{-2}\frac{-1}{2}\right)}\right)=-arctg\left(\frac{4}{3}\right)\text{ olur.}$$

Ayrıca $\rho_4=\dfrac{\rho_1}{\rho_2}=\sqrt{1^2+0^2}=1$ ve

$$\alpha_1-\alpha_2=arctg\left(\frac{1}{-2}\right)-arctg\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$=arctg\left(\frac{\frac{1}{-2}-\frac{-1}{2}}{1+\left(\frac{1}{-2}\frac{-1}{2}\right)}\right)=arctg\left(0\right)=0\text{ olur.}$$

**Tanım 5.3.** $z_1 = a + ib$ ve $z_2 = c + id$ karmaşık sayıları için $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ değerine $z_1$ ve $z_2$ sayıları arasındaki uzaklık denir.

**Örnek 5.2.** $z_1 = 2 - 3i$ ve $z_2 = -2 + 3i$ sayıları arasındaki uzaklık

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(2-(-2))^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$

dir.

**Uyarı 5.3.** $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ ve $r \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

**(1)** $|z_1 - z_0| = r$ ifadesi $z_1$ karmaşık sayısının merkezi $z_0$ ve yarıçapı $r$ olan çemberin üzerinde olduğunu gösterir.

**(2)** $|z_1 - z_0| < r$ ifadesi $z_1$ karmaşık sayısının merkezi $z_0$ ve yarıçapı $r$ olan çemberin içinde olduğunu gösterir.

**(3)** $|z_1 - z_0| > r$ ifadesi $z_1$ karmaşık sayısının merkezi $z_0$ ve yarıçapı $r$ olan çemberin dışında olduğunu gösterir.

## 5.1. Karmaşık Sayıların Kutupsal ve Trigonometrik Gösterimi

Öncelikle fonksiyonların seriye açılımından söz edelim. $y = f(x)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Fonksiyon $x = 0$ noktasında, sürekli ve istenildiği mertebeden türeve sahip bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (5.1.1)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ler bulunması gereken katsayılardır.

$y = f(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli ve istenildiği mertebeden türeve sahip olduğundan

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n + \ldots$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

$$f''(x) = 1.2a_2 + 2.3a_3 x + \ldots + (n-2)(n-1) a_{n-1} x^{n-3} + (n-1) n a_n x^{n-2} + \ldots$$

$$f^{(n-1)}(x) = 1.2\ldots(n-3)(n-2)(n-1)a_{n-1} + 2\ldots(n-3)(n-2)(n-1)(n)a_n x + \ldots$$
$$f^{(n)}(x) = 1.2\ldots(n-3)(n-2)(n-1)(n)a_n + \ldots$$

$\ldots$

elde edilir.

Bu durumda

$$f(0) = a_0$$

$$f'(0) = a_1$$

$$f''(0) = 1.2a_2$$

$\ldots$

$$f^{(n-1)}(0) = 1.2\ldots(n-3)(n-2)(n-1)a_{n-1}$$

$$f^{(n)}(0) = 1.2\ldots(n-3)(n-2)(n-1)(n)a_n$$

$\ldots$

elde edilir. Buradan da

$$a_0 = f(0)$$

$$a_1 = \frac{f'(0)}{1!}$$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$$

$$\ldots$$

$$a_{n-1} = \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$$\ldots$$

elde edilir. Bu değerler (5.1.1) de yerine yazılırsa

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f'^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \quad (5.1.2)$$

bulunur. (5.1.2) formülüne $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında Mc'Loren seri açılımı denir.

**Örnek 5.1.1.** $f(x) = e^x$ fonksiyonunu Mc'Loren serisine açınız.

**Çözüm.** $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, …, $f^{(n)}(x) = e^x$ ve

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^n(0) = 1$$

olup

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

şeklindedir.

**Örnek 5.1.2.** $f(x)=e^{-x}$ fonksiyonunu Mc'Loren serisine açınız.

**Çözüm.** $f(x)=e^{-x}$, $f'(x)=-e^{-x}$, $f''(x)=e^{-x}$, …, $f^{(n)}(x)=(-1)^n e^{-x}$

ve

$$f(0)=1,\ f'(0)=-1,\ f''(0)=1,\dots,f^{n}(0)=(-1)^n$$

olup

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\dots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$$

şeklindedir.

**Örnek 5.1.3.** $f(x)=e^{ix}$ fonksiyonunu Mc'Loren serisine açınız.

**Çözüm.** Yukarıdaki iki örnekten

$$e^{ix}=1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+i\frac{x^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}-i\frac{x^7}{7!}+\dots$$

şeklindedir. Buradan

$$e^{ix}=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}-\dots\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

elde edilir.

**Örnek 5.1.4.** $f(x)=\sin x$ fonksiyonunu Mc'Loren serisine açınız.

**Çözüm.** $f(x)=\sin x$, $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$,

$f^{(iv)}(x)=\sin x$, ...

ve

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,\ f^{(iv)}(0)=0, \ldots$$

olup

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

şeklindedir.

**Örnek 5.1.5.** $f(x)=\cos x$ fonksiyonunu Mc'Loren serisine açınız.

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

**Uyarı 5.1.1.** Yukarıdaki üç örnekten $e^{ix} == \cos x + i\sin x$ elde edilir.

**Tanım 5.1.1.** $z = a + ib$ karmaşık sayısı verilmiş olsun. $\rho$ bu sayının modülü, $\alpha$ da argümanı olmak üzere

$$z = \rho e^{i\alpha} \tag{5.1.3}$$

ifadesine $z = a + ib$ karmaşık sayının kutupsal gösterimi denir. Ayrıca $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ olduğu göz önüne alınırsa

$$z = \rho e^{i\alpha} = \rho\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)$$

dir. Elde edilen

$$z = \rho\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right) \tag{5.1.4}$$

gösterimine $z = a + ib$ karmaşık sayısının trigonometrik gösterimi adı verilir.

**Örnek 5.1.6.** $z=-2+2i$ sayısının kutupsal ve trigonometrik gösterimini bulunuz.

**Çözüm.** $z=-2+2i$ sayısının modülü

$$\rho=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

ve argümanı

$$\alpha=arctg\left(\frac{2}{-2}\right)=arctg\left(-1\right)=\frac{3\pi}{4}$$

olup kutupsal ve trigonometrik gösterimi sırası ile

$$z=-2+2i=2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

ve

$$z=-2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

şeklindedir.

**Teorem 5.1.1. (Moivre Formülü)** $z=(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ ve $q\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$z^q=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^q=(\cos q\alpha+i\sin q\alpha)$$

dir.

**İspat.** (5.1.3) ve (5.1.4) de $\rho=1$ alınarak her iki tarafın $q$. kuvveti alınırsa $z^q=e^{iq\alpha}=(\cos q\alpha+i\sin q\alpha)$ elde edilir ki istenendir.

Bu teoremden yararlanarak $z$ karmaşık sayısının $q$. kuvvetten kökünü hesaplayalım.

$$z^q = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) \tag{5.1.5}$$

olsun. Bu eşitliğin her iki tarafının $q$. kuvvetten kökünün

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{5.1.6}$$

olduğunu kabul edelim. (5.1.6) eşitliğinin her iki tarafının $q$. kuvvetini alalım.

$$z^q = r^q(\cos\varphi + i\sin\varphi)^q = r^q(\cos q\varphi + i\sin q\varphi) \tag{5.1.7}$$

olur. Şimdi de (5.1.5) ve (5.1.7) eşitliklerinden

$$\rho\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right) = r^q\left(\cos q\varphi + i\sin q\varphi\right)$$

elde edilir. Buradan da $k = 0,1,2,\ldots,q-1$ için

$$r = \sqrt[q]{\rho} \text{ ve } \begin{cases} \cos\alpha = \cos q\varphi \\ \sin\alpha = \sin q\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q\varphi = \alpha + 2k\pi \\ q\varphi = -\alpha + \left(2k+1\right)\pi \end{cases}$$

olur. Ayrıca

$$\sin\left(\alpha + 2k\pi\right) = \sin\alpha\cos 2k\pi + \sin 2k\pi\cos\alpha = \sin\alpha$$

ve

$$\sin\left(-\alpha + \left(2k+1\right)\pi\right) = \sin\left(\left(\pi - \alpha\right) + 2k\pi\right) = \sin\left(\pi - \alpha\right) = \sin\alpha$$

olduğundan $q\varphi=-\alpha+(2k+1)\pi=\alpha+2k\pi$ dir. Yani $\varphi=\dfrac{\alpha+2k\pi}{q}$

bulunur. $r$ ve $\varphi$ nin bu değerleri (5.1.6) da yerine yazılırsa

$$z=\sqrt[q]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{q}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{q}\right)\right),\ k=0,1,2,\ldots,q-1$$

elde edilir.

**Örnek 5.1.6.** $z^2 = 1+i$ denkleminin tüm çözümlerini bulunuz.

**Çözüm.** $\rho = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ ve $\alpha = arctg\left(\frac{1}{1}\right) = arctg(1) = \frac{\pi}{4}$ dür. O zaman $z^2 = 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ olur. Buradan

$$z = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)\right),\ k = 0,1$$

elde edilir.

$$k = 0 \text{ için } z = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

$$k = 1 \text{ için } z = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right)$$

elde edilir.

**Örnek 5.1.7.** $z^5 = i$ denkleminin tüm çözümlerini bulunuz.

**Çözüm.** $\rho = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ ve $\alpha = arctg\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{\pi}{2}$ dir. O zaman,

$z^5 = i = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ olur. Buradan

$$z = \left(\cos\left(\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}\right)\right),\ k = 0,1,2,3,4$$

elde edilir.

$k = 0$ için

$$z = \left(\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\right),$$

$k=1$ için

$$z=\cos\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

$k=2$ için

$$z=\cos\left(\frac{\pi}{10}+\frac{4\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{4\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)+i\sin\left(\frac{9\pi}{10}\right),$$

$k=3$ için

$$z=\cos\left(\frac{\pi}{10}+\frac{6\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{6\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{13\pi}{10}\right)+i\sin\left(\frac{13\pi}{10}\right),$$

$k=4$ için

$$z=\cos\left(\frac{\pi}{10}+\frac{8\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{8\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{17\pi}{10}\right)+i\sin\left(\frac{17\pi}{10}\right)$$

elde edilir.

**Karmaşık sayılar aşağıdaki özelliklere sahiptir:**

$z_1 = a + ib$ , $z_2 = c + id$ , $\overline{z}_1 = a - ib$ , $\overline{z}_2 = c - id$ olmak üzere:

**(1)** $\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)$

**(2)** $\mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)$

**(3)** $\mathrm{Re}(z_1 z_2) = \mathrm{Re}(z_1)\mathrm{Re}(z_2) - \mathrm{Im}(z_1)\mathrm{Im}(z_2)$

**(4)** $\mathrm{Im}(z_1 z_2) = \mathrm{Re}(z_1)\mathrm{Im}(z_2) + \mathrm{Im}(z_1)\mathrm{Re}(z_2)$

**(5)** $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

**(6)** $\overline{(z_1 z_2)} = \overline{z_1 z_2}$

**(7)** $z_1 = \overline{\overline{z}}_1$

**(8)** $\overline{z_1} z_2 = \overline{z_1 \overline{z_2}}$

**(9)** $|z_1| = |\overline{z}_1| = \sqrt{a^2 + b^2}$

**(10)** $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = \frac{1}{2}\left[\left(z_1\overline{z_2}\right) + \left(\overline{z_1\overline{z_2}}\right)\right]$

**(11)** $\mathrm{Re}(z_1) \leq |z_1|$

**(12)** $z_1\overline{z_1} = a^2 + b^2 = |z_1|^2 = |\overline{z_1}|^2$

**(13)** $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

**(14)** $|z_1 - z_2| \geq \left||z_1| - |z_2|\right|$

**(15)** $z_2 \neq 0$ ise $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

**(16)** $\mathrm{Re}(z_1) = \frac{z_1 + \overline{z_1}}{2}$

**(17)** $\mathrm{Im}(z_1) = \frac{z_1 - \overline{z_1}}{2i}$

**(18)** $z_i, w_i \in \mathbb{C}$, $\left(i = \overline{1,n}\right)$ olmak üzere

$$|z_1w_1 + z_2w_2 + \ldots + z_nw_n| \leq \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2}\sqrt{|w_1|^2 + |w_2|^2 + \ldots + |w_n|^2}$$

dir. (Cauchy Eşitsizliği)

## 5.2. Problemler

**5.2.1.** $z_1 = 2+i$ ve $z_2 = 1+2i$ karmaşık sayılarının çarpımını ve bölümünü yazınız.

**5.2.2.** $z = 3-2i$ karmaşık sayısının modül ve argümanını bulunuz.

**5.2.3.** $z_1 = 1+i$ ve $z_2 = 1-2i$ karmaşık sayılarının çarpımının modülünü ve argümanını bulunuz.

**5.2.4.** $z_1 = 3+2i$ ve $z_2 = 2-3i$ karmaşık sayılarının bölümünün modülünü ve argümanını bulunuz.

**5.2.5.** $z_1 = 5+7i$ ve $z_2 = 2-3i$ karmaşık sayıları arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

**5.2.6.** $z_1 = 1+i$ ve $z = 3+9i$ karmaşık sayılarının kutupsal ve trigonometrik gösterimini yazınız.

**5.2.7.** Aşağıdaki denklemlerin köklerini bulunuz.

**(1)** $z^3 = 2-3i$ **(2)** $z^4 = 1-i$ **(3)** $z^5 = -i$ **(4)** $z^7 - 1 = 0$

**5.2.8.** $z = 2-3i$ olduğuna göre $z^4$ i bulunuz.

**5.2.9.** $z_1 = 2-5i$, $z_2 = 1+4i$ ve $z_3 = -6i$ olduğuna göre $z_1 z_2 z_3$ işleminin sonucunu bulunuz.

**5.2.10.** Aşağıdaki işlemlerin sonucunu bulunuz.

**(1)** $\dfrac{5i^{47} - i^{23}}{3i-2}$ **(2)** $\dfrac{i^6 - i^5 + i^3 - i^2 + 1}{2 - i^{15} + i^{10} - i^7}$ **(3)** $\dfrac{1}{i} + \dfrac{i^5 - i^2 - i + 1}{2 - i^{10} - i^7}$

# Kaynaklar:

1. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus I**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.
2. Prof. Dr. C. Çinar, Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, Prof. Dr. A. S. Kurbanlı, Prof. Dr. D. Şimşek, **Genel Matematik**, Dizgi Ofset, 2013.
3. Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, **Analiz III Diziler ve Seriler,** Dizgi Ofset, 2017.
4. H. İ. Karakaş, **Matematiğin Temelleri, Sayı Sistemleri ve Cebirsel Yapılar,** ODTÜ yayınları, 2011.