MATEMATIK 1

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2020

Teorem 2.5.1. (İnfimum Özelliği) $A \subset \mathbb{R}$ ve $\inf(A) = a$ olsun.

$\forall x \in A$ için

(1) $x \geq a$

(2) $\varepsilon > 0$ için $a + \varepsilon > x$ olacak şekilde $\exists x \in A$ vardır.

Teorem 2.5.2. (Supremum özelliği) $A \subset \mathbb{R}$ ve $\sup(A) = b$ olsun.

$\forall x \in A$ için

(1) $x \leq b$

(2) $\varepsilon > 0$ için $b - \varepsilon < x$ olacak şekilde $\exists x \in A$ vardır.

Reel sayılar kümesi toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerine göre kapalıdır. Yani, iki reel sayının toplamı, farkı ve çarpımı yine bir reel sayıdır. Fakat bölme işlemine göre kapalı değildir. Gerçekten $2,0 \in \mathbb{R}$ olmasına rağmen $\frac{2}{0} \notin \mathbb{R}$ dir. Bu ise bize reel sayılar kümesinin işlemlerin gerçekleştirilmesinde yetersiz olduğunu gösterir. Bu durumda reel sayılar kümesinin genişletilmesine ihtiyaç vardır.

2.6. Genişletilmiş Reel (Gerçek) Sayılar

Genişletilmiş Reel Sayılar sistemi $\mathbb{R}$ kümesine "$-\infty$" ve "$+\infty$" ile gösterilen sırasıyla "eksi sonsuz" ve "artı sonsuz" olarak okunan iki yeni sembolü eklemek suretiyle elde edilir ve $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty,\ +\infty\}$ şeklinde gösterilir. "$-\infty$" ve "$+\infty$" sembolleri ile hesap kuralları ve bu sembollerin başlıca özellikleri aşağıdaki beş aksiyom ile verilir.

Aksiyom 2.6.1. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $-\infty < x < +\infty$ dur.

Aksiyom 2.6.2. $\forall x \in \mathbb{R}$ için

(1) $-x+(+\infty)=x+(+\infty)=+\infty$,

(2) $x-(+\infty)=-x-(+\infty)=-\infty$,

(3) $x-(-\infty)=x+\infty=+\infty$,

(4) $x+(-\infty)=x-\infty=-\infty$

dur.

Aksiyom 2.6.3. $\forall x \in \mathbb{R}^{+}$ için

(1) $x.(+\infty)=+\infty$

(2) $x.(-\infty)=-\infty$

(3) $\frac{x}{0} = +\infty$

$\forall x \in \mathbb{R}^-$ için

(4) $x.(+\infty) = -\infty$

(5) $x.(-\infty) = +\infty$

(6) $\frac{x}{0} = -\infty$ dur.

Aksiyom 2.6.4. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$ dır.

Aksiyom 2.6.5. $+\infty + (+\infty) = +\infty$ ve $-\infty + (-\infty) = -\infty$ dur.

Bu aksiyomların dışında kalan diğer tüm durumların matematiksel olarak bir manası yoktur. Örneğin $\infty+(-\infty)$, $-\infty+(+\infty)$, $\infty-\infty$, $0.(+\infty)$, $0.(-\infty)$, $\frac{+\infty}{0}$, $\frac{-\infty}{0}$, $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$, 1^{∞} vs.

Uyarı 2.6.1. A kümesi $\overline{\mathbb{R}}$ nin bir alt kümesi olsun. Eğer $\inf(A)\notin\mathbb{R}$ ise $\inf(A)=-\infty$ ve $\sup(A)\notin\mathbb{R}$ ise $\sup(A)=+\infty$ olur.

Teorem 2.6.1. Genişletilmiş reel sayı sisteminde her kümenin hem supremumu hem de infimumu vardır.

Tanım 2.14.2. Sayı doğrusu üzerindeki bir a sayısının başlangıç noktasına olan uzaklığına a sayısının mutlak değeri denir ve sembolik olarak $|a|$ ile gösterilir. Burada söz konusu uzaklık olduğu için mutlak değer her zaman pozitiftir. Yani

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.14.1. Her $a, b \in \mathbb{R}$ için

(1) $-|a| \leq a \leq |a|$

(2) $|a+b| \leq |a| + |b|$

(3) $|a-b| \leq |a+b|$

(4) $||a| - |b|| \leq |a-b|$ *dir.*

Sonuç 2.14.1. $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ için

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$$

dir.

Ayrıca, mutlak değer $a, b \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(1) $|a| \geq 0$,

(2) $|a| = |-a|$,

(3) $|a.b| = |a|.|b|$,

(4) $b \neq 0$ için $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$,

(5) $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\left|a^n\right| = |a|^n$,

(6) $a \geq 0, x \in \mathbb{R}$ için $|x| \leq a$ ise $-a \leq x \leq a$,

(7) $a \geq 0, x \in \mathbb{R}$ için $|x| \geq a$ ise $x \geq a$ ve $x \leq -a$ dır.

Tanım 2.14.3. $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon \right\}$$

kümesine a nın ε -komşuluğu denir ve $K = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.14.5. $a+b$ şeklinde tanımlanan cebirsel ifadeye iki terimli veya binom denir. $k \in \mathbb{N}$ ve $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)}{k!}$$

şeklinde tanımlanan sayıya binom katsayısı adı verilir.

Uyarı 2.14.2. Eğer $n,k \in \mathbb{N}$ ve $n \geq k$ ise $\binom{n}{k}$ binom katsayısı

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

şeklinde yazılır. Ayrıca $n < k$ ise $\binom{n}{k} = 0$ dır.

Teorem 2.14.2. $n,k \in \mathbb{N}$ ve $n \geq k$ için binom katsayıları aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,

(2) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$,

(3) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ dir.

Örnek 2.14.6. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

olduğunu Tümevarım Metodu ile gösteriniz.

Çözüm. $n=1$ için $(a+b)^1 = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = a+b$ olup verilen eşitlik

doğrudur.

$n=k$ için verilen eşitliğin doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$(a+b)^k=\binom{k}{0}a^k+\binom{k}{1}a^{k-1}b+\binom{k}{2}a^{k-2}b^2+\ldots+\binom{k}{k-1}ab^{k-1}+\binom{k}{k}b^k$$

olsun. $n=k+1$ için eşitliğin doğru olduğunu gösterebilirsek ispatı tamamlamış oluruz. Bu amaçla son eşitliğin her iki tarafını $(a+b)$ ile çarpalım. Ayrıca binom katsayılarının (1), (2), (3) özelliklerinden yararlanılarak,

$$(a+b)^{k+1}=\left[\binom{k}{0}a^k+\binom{k}{1}a^{k-1}b+\ldots+\binom{k}{k-1}ab^{k-1}+\binom{k}{k}b^k\right](a+b)$$

$$=\binom{k}{0}a^{k+1}+\binom{k}{1}a^{k}b+\ldots+\binom{k}{k}ab^{k}+\binom{k}{0}a^{k}b+\binom{k}{1}a^{k-1}b^{2}+\ldots+\binom{k}{k}b^{k+1}$$

$$=\binom{k+1}{0}a^{k+1}+\left\{\binom{k}{1}+\binom{k}{0}\right\}a^{k}b+\ldots+\left\{\binom{k}{k}+\binom{k}{k-1}\right\}ab^{k}+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$=\binom{k+1}{0}a^{k+1}+\binom{k+1}{1}a^{k}b+\ldots+\binom{k+1}{k-1}a^{2}b^{k-1}+\binom{k+1}{k}ab^{k}+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

elde edilir ki istenendir.

Uyarı 2.14.3. Binom formülünde

(1) $a=b=1$ için $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$,

(2) $a=1$ ve $b=-1$ için $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$

dır.

Problemler:

2.16.1. Aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösteriniz.

(1) $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$

(2) $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$

(3) $(1+a)^n\geq 1+na \quad (a>-1)$

(4) $1.2+2.3+\ldots+n.(n+1)=\frac{1}{3}n.(n+1).(n+2)$

(5) $2+2.3+2.3^2+\ldots+2.3^{n-1}=3^n-1$

(6) $1.2+2.3+\ldots+n.(n+1)=\frac{1}{3}n.(n+1).(n+2)$

(7) $(1+p)^n\geq 1+np+\frac{n^2}{4}p^2 \quad (p>0 \text{ ve } n\in\mathbb{N}_2)$

(8) $1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

(9) $n!>3^{n-1} \quad (n\in\mathbb{N}_5)$

(10) $(n+1)^n<n^{n+1} \quad (n\in\mathbb{N}_3)$

Kaynaklar:

1. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus I**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.
2. Prof. Dr. C. Çinar, Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, Prof. Dr. A. S. Kurbanlı, Prof. Dr. D. Şimşek, **Genel Matematik**, Dizgi Ofset, 2013.
3. Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, **Analiz III Diziler ve Seriler,** Dizgi Ofset, 2017.
4. H. İ. Karakaş, **Matematiğin Temelleri, Sayı Sistemleri ve Cebirsel Yapılar,** ODTÜ yayınları, 2011.