

## DAİRESEL HAREKET



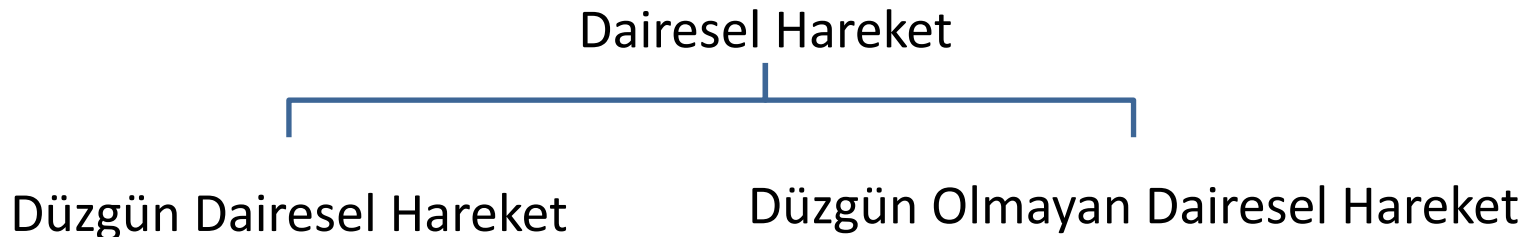
1. Düzgün Dairesel Hareket
2. Düzgün Olmayan Dairesel Hareket
3. Newton'un 2. Yasasının Düzgün Dairesel Harekete Uygulanması
4. Newton'un 2. Yasasının Düzgün Olmayan Dairesel Harekete Uygulanması

# FİZİK – 1 MEKANİK (Dairesel Hareket)

Bu bölümde, sabit bir eksen etrafında dönü hareketi yapan bir cismin hareketi incelenecektir. Özellikle düzgün dairesel hareket yapan bir cismin ivmesi türetilecek daha sonrada en genel dairesel hareket yapan (düzgün olmayan dairesel hareket) cismin ivme ifadesi elde edilecektir. Newton'un 2. yasasının düzgün ve düzgün olmayan dairesel harekete uygulanarak merkezci kuvvet ifadesi elde edilecek ve gerçek olmayan kuvvetlerin kaynağına değinilecektir.

## 1. Düzgün Dairesel Hareket

Dairesel hareket, sabit bir merkez etrafında olan ve yarıçapın değişmediği harekete denir. Dairesel harekette hız vektörünün büyüklüğü değişmese de hareketin doğası gereği yönü hareket boyunca sürekli değiştiğinden dolayı dairesel hareket yapan cismin bir ivmesinin olduğu söylenir. Dairesel harekette hızın yönü yanı sıra büyüklüğünün de zamanla değişip değişmediğine bakarak hareketi iki kısma ayırarak inceleyebiliriz.

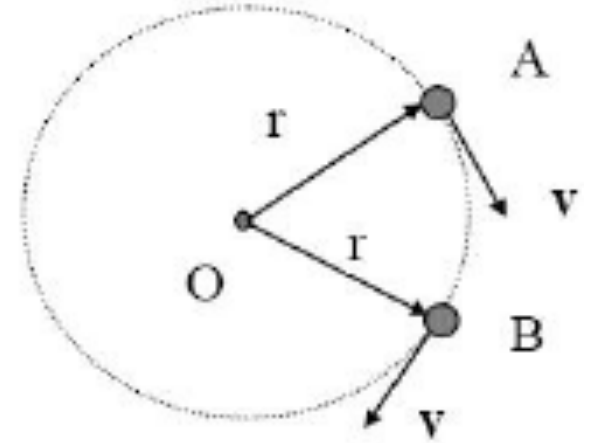


# FİZİK – 1 MEKANİK (Dairesel Hareket)

**Düzgün Dairesel Hareket:** Dairesel bir yörüngede cismin hızının büyüklüğü (sürat) zamanla değişmiyor ise bu harekete düzgün dairesel hareket denir.

**Düzgün Olmayan Dairesel Hareket:** Dairesel bir yörüngede cismin hızı zamanla değişiyor ise bu harekete düzgün olmayan dairesel hareket denir.

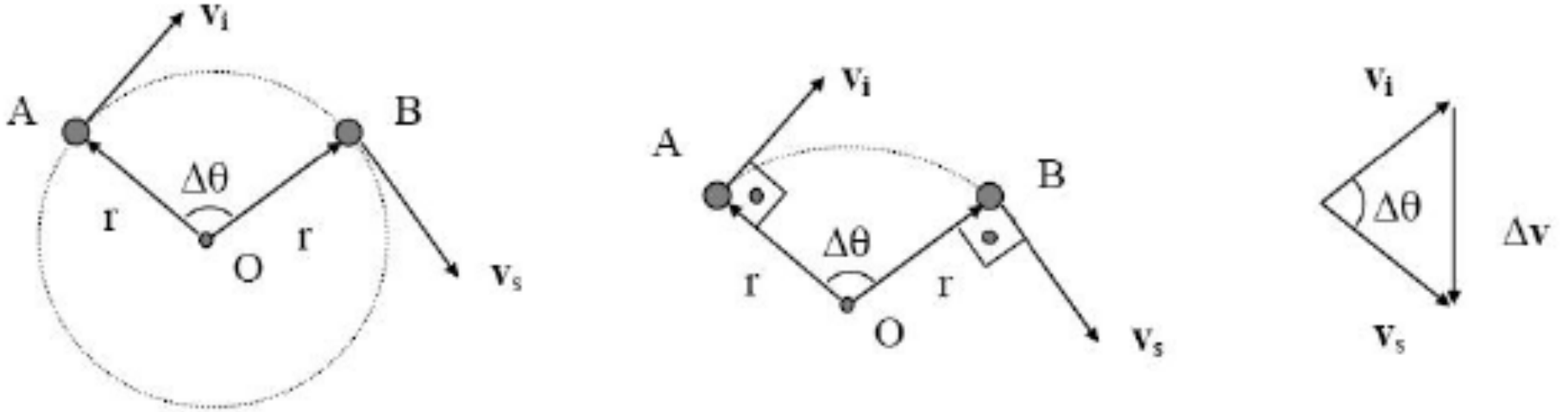
Sabit bir O merkezi etrafında hızını büyüklüğü (sabit sürat) değişmeyen bir cismin hareketini düşünelim. Cisim A ve B noktalarında iken hızın büyüklüğü (sürati) değişmemiştir ancak A ve B noktalarında hız vektörünün yönü değişmiştir. Hız, vektörel bir nicelik olduğundan, yöndeki değişme hız vektöründeki bir değişmeyi göstermektedir.



Düzgün dairesel harekette hızın büyüklüğü (sürat) değişmese bile hızın doğrultusu değiştiğinden dolayı hızda bir değişimin olduğu, yani cismin bir ivmesinin olduğu söylenir.  $|v| = \text{sabit}$  ama hız vektörünün yönü sürekli değiştiğinden  $v$  vektörü zaman içerisinde değişir. Bu sebepten Newton'un 1. kanunundan dolayı  $a \neq 0$  dır.

# FİZİK – 1 MEKANİK (Dairesel Hareket)

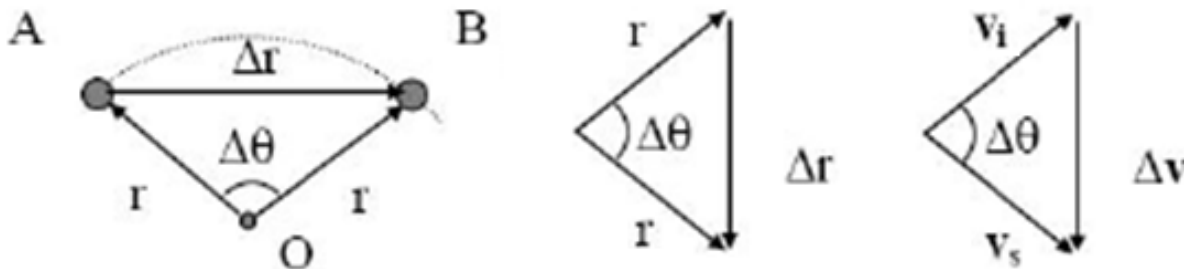
Şimdi düzgün dairesel hareket yapan bir cismin ivmesini bulmaya çalışalım. Hız vektörünün zamanla değişimi aşağıda şekilde gösterilmiştir.



Cisim;  $t_i$  zamanında A noktasında ve hızı  $\mathbf{v}_i$ ,  $t_s$  zamanında B noktasında ve hızı  $\mathbf{v}_s$  olsun. Hızın büyüklüğü değişmediğinden  $|v_i| = |v_s| = |v|$  yazabiliriz.

Ortalama ivme tanımımız;  $\vec{a} = \frac{\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_i}{t_s - t_i} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$  ..... (1) olur.

Benzer şekilde konum vektöründen;



$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r} \Rightarrow$$

$$\Delta v = \frac{v}{r} \Delta r \quad \text{.....(2)}$$

# FİZİK – 1 MEKANİK (Dairesel Hareket)

(2) eşitliğini (1) eşitliğinde yerine koyarsak  $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \left(\frac{v}{r} \Delta r\right) \frac{1}{\Delta t}$   
 $\frac{\Delta r}{\Delta t} = v$  olduğundan,  $a = \frac{v}{r} v \Rightarrow a = \frac{v^2}{r}$  değerini buluruz.

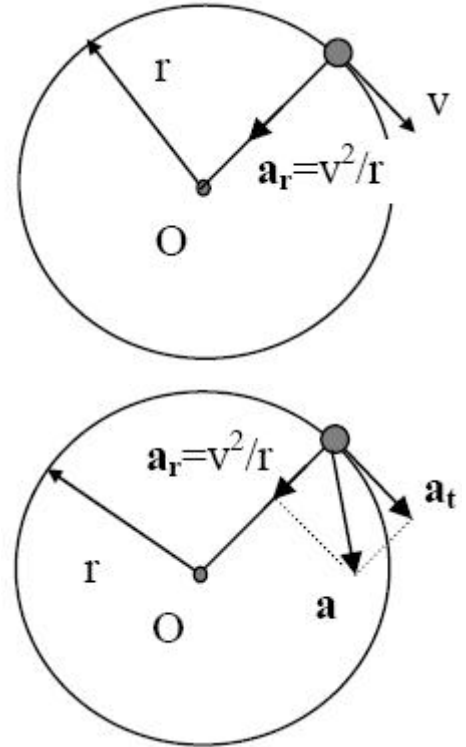
Bu, düzgün dairesel harekette ivmenin büyüklüğünü veren ifadedir. Burada  $v$  değeri teğetsel hız,  $r$  değeri ise yarıçap değerleridir. Bu ivmenin yönü, dairenin merkezine doğru yöneldiğinden dolayı ivmeye **Merkezcil İvme** denir. Merkezcil ivmeyi gösterdiğini belirtmek için ivme ifadesi  $\mathbf{a}_r$  ile gösterilir.  $a_r = v^2 / r$

## 2. Düzgün Olmayan Dairesel Hareket

Bir parçacığın hızının hem büyüklüğünün hem de doğrultusunun değiştiğini kabul edelim. Bu durumda merkezcil ivme  $\mathbf{a}_r$  'ye ek olarak cismin teğetsel hızının değişiminden dolayı da teğetsel bir ivme de oluşacaktır.

**Teğetsel İvme:** Parçacığın hızının büyüklüğündeki değişimden

kaynaklanır. Yönü ani hız yönündedir ve büyüklüğü:  $a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t}$  dir.



# FİZİK – 1 MEKANİK (Dairesel Hareket)

**Çapsal (Radyal) İvme:** Dairesel hareket yapan bir cismin hız vektörünün sadece doğrultusundaki değişimden kaynaklanır ve büyüklüğü;

$$a_r = \frac{v^2}{r} \quad \text{dir.}$$

Bileşke ivme en genel olarak bu iki ivme vektörünün vektörel toplamı olarak ifade edilir.  $a = a_r + a_t$

Bu ivme vektörünün büyüklüğü ise  $a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$  ile verilir.

## Örnek 1:

*Sallanan Top:* 0,5 m uzunluğunda bir sicimin ucuna bağlanan bir top, şekildeki gibi, yerçekiminin etkisi altında düşey bir daire çerçevesinde salınmaktadır. Sicim, düşeyle  $\theta=20^\circ$ 'lik açı yaptığı zaman top 1,5 m/s'lik hıza sahiptir.

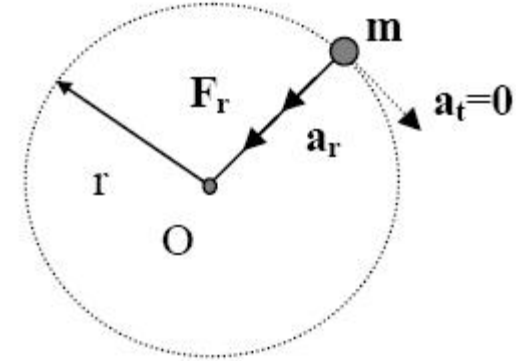
- İvmenin bu andaki çapsal ( $a_r$ ) bileşenini bulunuz
- $\theta=20^\circ$  olduğu zaman teğetsel ivmenin ( $a_t$ ) büyüklüğü nedir?
- $\theta=20^\circ$ 'de toplam ivmenin ( $a$ ) büyüklüğünü ve doğrultusunu bulunuz.

# FİZİK – 1 MEKANİK (Dairesel Hareket)

## 3. Newton'un 2. Yasasının Düzgün Dairesel Harekete Uygulanması

Kütlesi  $m$  olan bir cismin düzgün dairesel hareket yaptığını düşünelim. Harekete Newton'un 2. yasasını uygularsak;

$$\sum F_r = ma_r = m \frac{v^2}{r} \quad \text{olarak buluruz.}$$

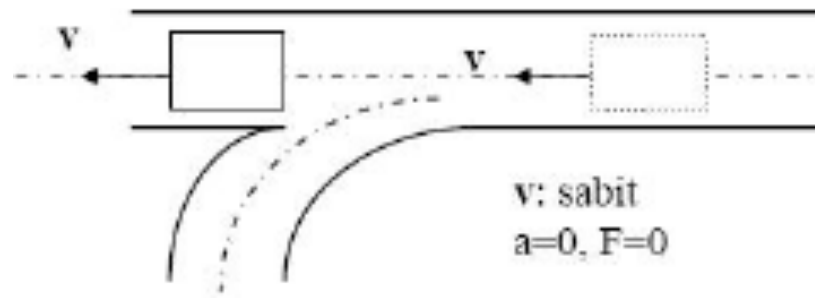


Bu kuvvete **Merkezcil Kuvvet** denir ve yönü merkezcil ivme ile aynı yönlü yani merkeze yöneliktir. Bu sonuç ile dairesel hareket yapan bir cismin merkeze yönelmiş olan bir kuvvetin etkisinde kaldığını söyleyebiliriz.

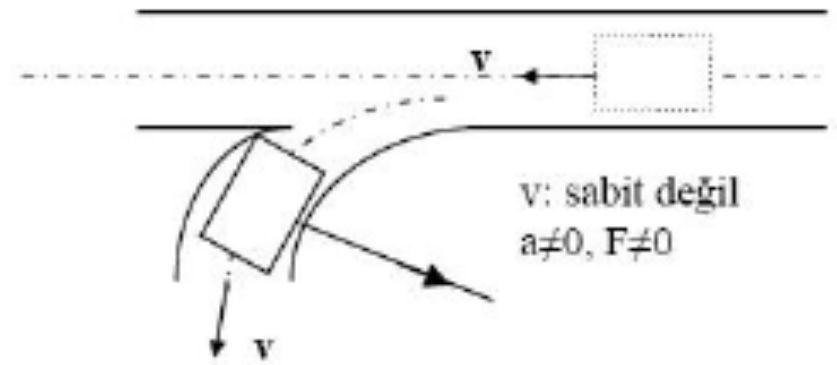
Günlük hayatımızda, bulduğumuz bu merkezcil kuvvetin aksine, yönü merkezden uzaklaşan yönde bir kuvvetin etkisini gözleriz. Bu kuvvete *Merkezkaç Kuvvet* deriz. Bu bulgularımız ve günlük hayattaki tecrübelerimizin farklı oluşunun mantıksal bir açıklaması vardır ve bunu aşağıdaki şekilde açıklamaya çalışacağız.

*Merkezkaç Kuvvet*, gerçek bir kuvvet olmayıp sadece fiziksel bir olayı hareketli (eylemli) bir gözlem çerçevesinde izlediğimiz için ortaya çıkan sözde bir kuvvettir. Bunu anlamak için aşağıdaki taşıtın hareketini iki farklı gözlem çerçevesinden inceleyelim:

# FİZİK – 1 MEKANİK (Dairesel Hareket)



a) Durum-1



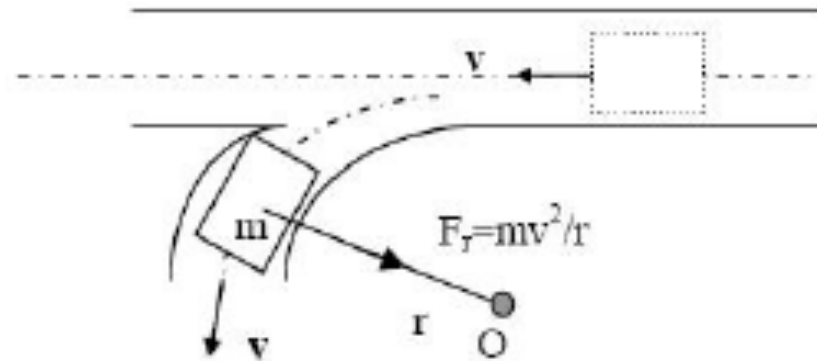
b) Durum-2

Yukardaki birinci durumda (a) cisim sabit bir doğrultuda ve hızda hareket ettiği için ivmesi sıfırdır ve Newton'un ikinci yasası gereği üzerine etki eden kuvvet de sıfır olur. Bu durumu ister hareketli gözlem çerçevesinden (arabanın içinden) isterse durağan bir gözlem çerçevesinden izleyelim aynı fiziksel olayı gözlemliyoruz.

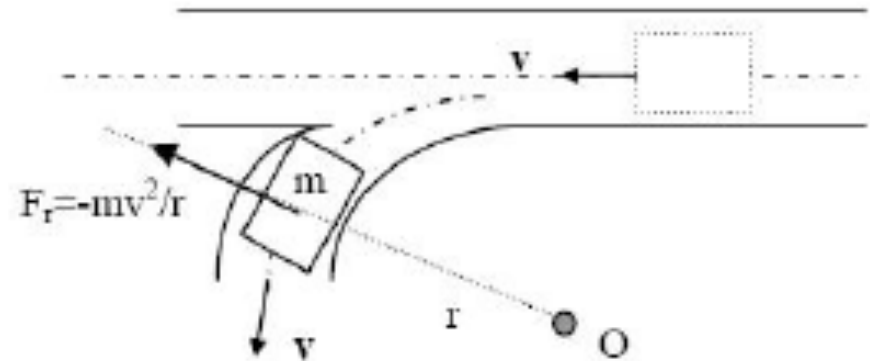
Arabanın hızının büyüklüğünü koruyarak (sabit sürat) yoldan ayrılmasını gösteren ikinci durum (b) birinci durumdan çok farklıdır. Burda arabanın hızının büyüklüğü değişmemesine rağmen viraja girdiğinden hızın yönü değiştiği için ivmesi sıfırdan farklıdır ve dolayısı ile de üzerine merkezci bir kuvvet etki etmektedir. Araba ivmeli bir hareket yaptığı için artık bu araba eylemsiz bir gözlem çerçevesi olmaktan çıkar ve bu gözlem çerçevesinden gözleyeceğimiz olaylar eylemsiz (durağan) bir çerçeveden gözleyeceğimiz olaylardan farklı olur. Yukardaki ikinci durumu hem arabanın içindeki bir gözlem çerçevesinden hemde dışardaki bir gözlem çerçevesinden izleyerek merkezkaç kuvvetin neden gerçek bir kuvvet olmadığını fakat bunun yanında günlük deneyimlerimizde neden varlığını hep hissettiğimiz bir kuvvet olduğunu anlayabiliriz.



# FİZİK – 1 MEKANİK (Dairesel Hareket)



Arabanın dışında, durağan (eylemsiz) bir gözlem çerçevesinden bakıldığında



Arabanın içinden (eylemli) gözlem çerçevesinden bakıldığında

Viraja giren arabaya eylemsiz bir gözlem çerçevesinden (arabanın dışında, durağan bir çerçeveden) bakıldığında yapacağımız gözlem şu olacaktır: başlangıçta araba sabit bir  $v$  hızı ile gidiyordu ve ivmesi sıfırdı. Ama tam viraja geldiği anda araba bir kuvvetin etkisi altında kalarak dairesel bir hareket yapmaya zorlandı ve bu kuvvet “O” merkezine yönelen merkezci kuvvetten başka bir şey olamaz.

Aynı gözlemi arabanın içinden yaptığımızda ise yapacağımız gözlem şu olacaktır: başlangıçta cisim sabit bir  $v$  hızı ile gidiyordu ve ivmesi sıfırdı. Ama tam viraja geldiği anda dışarıya doğru savrulduğumuzu yani “O” merkezinin tersi yönünde merkezkaç bir kuvvetin etkisinde kaldığımız gerçeği.

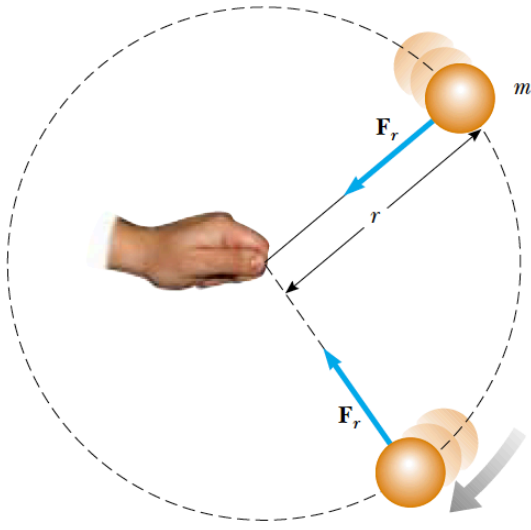
# FİZİK – 1 MEKANİK (Dairesel Hareket)

Yukardaki gözlemlerimizden şu sonuçları çıkarabiliriz: ivmeli hareket yapan araba, eylemli bir gözlem çerçevesi olduğundan bu gözlem çerçevesinden yapacağımız gözlemler bizi yanıltır ve gerçek olmayan kuvvetleri, örneğin merkezkaç kuvvetini, hissetmemize neden olur. Bunun yanında eylemsiz bir gözlem çerçevesinden yapacağımız gözlemler gerçek kuvvetleri (örneğin merkezci kuvvet) gözlemlememizi olanaklı kılar.

Özetle, gerçek olan Merkezci Kuvvettir, Merkezkaç Kuvvet ise ivmeli (eylemli) gözlem çerçevesinde yapılan gözlemin bir sonucu olarak ortaya çıkan yalancı bir kuvvettir yani gerçek bir kuvvet değildir.

## Örnek 2:

0,5 kg kütleli bir top, 1,5 m uzunluğunda kablonun ucuna bağlanmıştır. Top, şekilde görüldüğü gibi yatay düzlemde dairesel yörüngede hızla döndürülüyor. Kablo 50 N'luk maksimum gerilmeye dayanabiliyorsa, kopmadan önce topun sahip olabileceği maksimum sürat nedir?



Eş. 6.6, yani  $\sum F_r = ma_r$  den

$$T = m \frac{v^2}{r}$$

eşitliğinden  $v$  çözülerek,

$$v = \sqrt{\frac{Tr}{m}}$$

elde edilir. Bu ifade beklendiği gibi,  $T$  arttıkça  $v$  nin arttığını,  $m$  arttıkça da azaldığını gösterir. Belirli bir hızda gerilme, kütle arttıkça artacağı, azaldıkça da azalacağı görülmektedir. Topun sahip olabileceği maksimum hız,  $T$  gerilmesinin maksimum değerine karşı gelen hızdır. Böylece verilen değerler yerine konularak maksimum hız bulunur:

$$\begin{aligned} v_{\text{mak}} &= \sqrt{\frac{T_{\text{mak}} r}{m}} = \sqrt{\frac{(50 \text{ N}) (1,5 \text{ m})}{0,5 \text{ kg}}} = 12,2 \text{ m/s} \\ &= 12,2 \text{ m/s} \end{aligned}$$

**Aıştırma**

Topun sürati 5 m/s olduğu zaman ipteki gerilme nedir?

**Cevap**

8,33 N

# FİZİK – 1 MEKANİK (Dairesel Hareket)

## Örnek 4:

**Dönen Top:**  $m$  kütleli küçük bir küre şekilde görüldüğü gibi  $R$  uzunluğunda bir ipin ucuna bağlanarak düşey düzlemde bir  $O$  noktası etrafında dairesel yörüngede döndürülüyor. Cismin hızının  $v$  olduğu ve ipin düşeyle  $\theta$  açısı yaptığı bir anda ipteki gerilmeyi hesaplayınız.

yarıçap doğrultusundaki bileşeni  $mg \cos \theta$  dir. Newton'un 2. hareket yasası uygulandığında

$$\sum F_t = mg \sin \theta = ma_t$$

$$a_t = g \sin \theta$$

bulunur. İvmenin bu bileşeni  $v$  hızının zamanla değiştiğini ifade eder. Çünkü  $a_t = dv/dt$  dir.

Newton'un ikinci yasasını yarıçap doğrultusunda uygulayınız.  $T$  ve  $a_r$  nin yarıçap doğrultusunda olduğuna dikkat ederek

$$\sum F_r = T - mg \cos \theta = \frac{mv^2}{R}$$

$$T = m \left( \frac{v^2}{R} + g \cos \theta \right)$$

bulunur.

**Özel Durumlar** Yörüngenin en üst noktasında  $\theta = 180^\circ$  dir.  $\cos 180^\circ = -1$  olduğundan üst nokta için  $T_{\text{üst}}$  elde edilir:

$$T_{\text{üst}} = m \left( \frac{v_{\text{üst}}^2}{R} - g \right)$$

Bu değer,  $T$  gerilmesinin minimum değeridir. Tam bu noktada  $a_t$  teğetsel ivme mevcut olmaz,  $a_t = 0$  olur. Sadece  $a_r$  yarıçap doğrultusundaki ivme mevcut olur. Bu ivmenin yönü aşağı doğrudur.

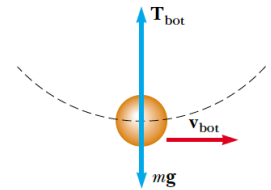
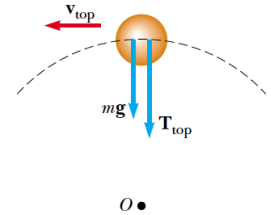
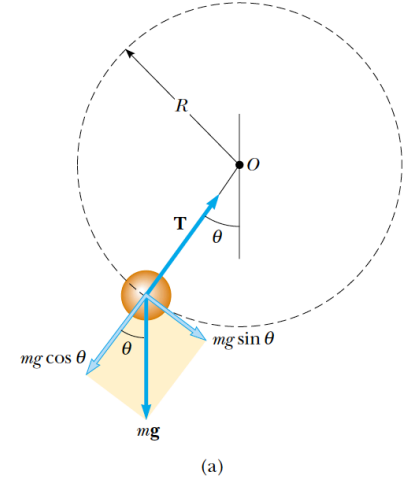
Yörüngenin en alt noktasında  $\theta = 0^\circ$  dir, ve  $\cos 0 = 1$  dir. Buradan  $T_{\text{alt}}$  bulunur:

$$T_{\text{alt}} = m \left( \frac{v_{\text{alt}}^2}{R} + g \right)$$

olur. Bu değer de  $T$  gerilmesinin maksimum değeridir. Tekrar bu noktada  $a_t = 0$  dir. Sadece yarıçap doğrultusunda yukarı yönlü ivme mevcuttur.

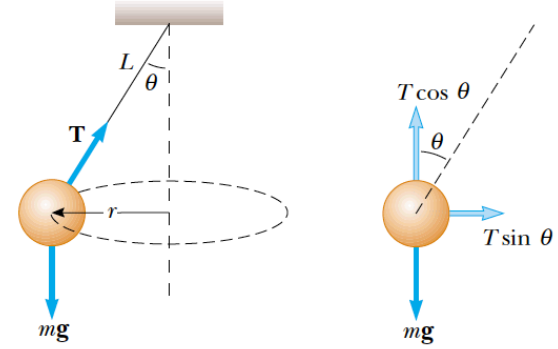
**Alıştırma** Ortalama hızı artırırsanız, ip hangi noktada kopmaya daha yatkındır?

**Cevap** Yörüngenin en alt noktasında kopmaya daha yatkındır. Çünkü bu noktada  $T$  gerilmesi maksimum değere sahip olur.



### ÖRNEK 6.3 Konik Sarkaç

Küçük bir cisim  $L$  uzunluklu ip ile tavana asılmıştır. Bu cisim Şekil 6.4 te görüldüğü gibi  $r$  yarıçaplı yatay dairesel bir yörünge üzerinde sabit  $v$  hızıyla dönmektedir. (Askı ipinin bir koni yüzeyi taramış olmasından dolayı bu sistem *konik sarkaç* olarak bilinir.) Cismin  $v$  hızını bulunuz.



ğinden  $\sum F = ma_y = 0$  ve gerilmenin düşey bileşeni ağırlık tarafından dengelenmelidir. Bundan dolayı

$$(1) \quad T \cos \theta = mg$$

olur. Örnekteki merkezci kuvvet  $T \sin \theta$  tarafından sağlandığı için, Newton'un ikinci yasasından

$$(2) \quad \sum F_r = T \sin \theta = ma_r = \frac{mv^2}{r}$$

yazılır. (2) eşitliği, (1) eşitliğine bölünüp  $T$  yok edilerek

$$\tan \theta = \frac{v^2}{rg}$$

$$v = \sqrt{rg \tan \theta}$$

bulunur. Fakat şekle göre  $r = L \sin \theta$  olduğuna dikkat edilirse

$$v = \sqrt{Lg \sin \theta \tan \theta}$$

olduğu bulunur.  $v$ 'nin, cismin kütesinden bağımsız olduğuna dikkat edilmelidir.

## ÖRNEK 6.5 Eğimli Viraj

Bir mühendis, arabaların, sürtünmeye güvenmeksizin savrulmadan dönebilecekleri eğimli bir otoyol virajı yapmak istiyor. Başka bir deyişle, yol buzlu olsa bile araba belirlenen hızla kaymadan virajı dönebilmektedir. Bir arabanın böyle bir virajı 30 mil/saat (13.4 m/s) lik hızla dönebileceğini varsayınız. Virajın yarıçapı da 50 m olsun. Yolun eğimi kaç derece olmalıdır?

için gerekli olan eğim açısını hesaplayacağız. Diğer bir deyişle araba (13,4 m/s) lik belirli bir hızla yüzey buzlu olsa da virajı dönebilecektir. Yarıçap doğrultusu için Newton'un ikinci yasası yazılırsa merkezci kuvvet elde edilir:

$$(1) \quad \sum F_r = n \sin \theta = \frac{mv^2}{r}$$

Araba düşey doğrultuda dengededir. O halde  $\sum F_y = 0$  olacağından

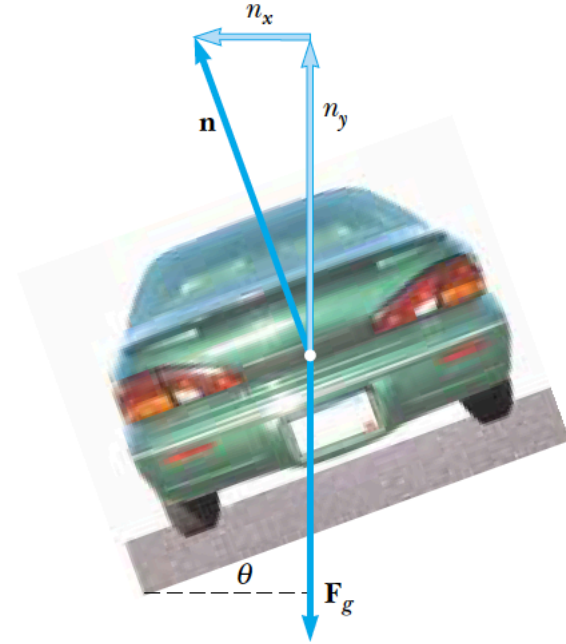
$$(2) \quad n \cos \theta = mg$$

yazılabilir. (1) i (2) ye bölersek

$$\tan \theta = \frac{v^2}{rg}$$

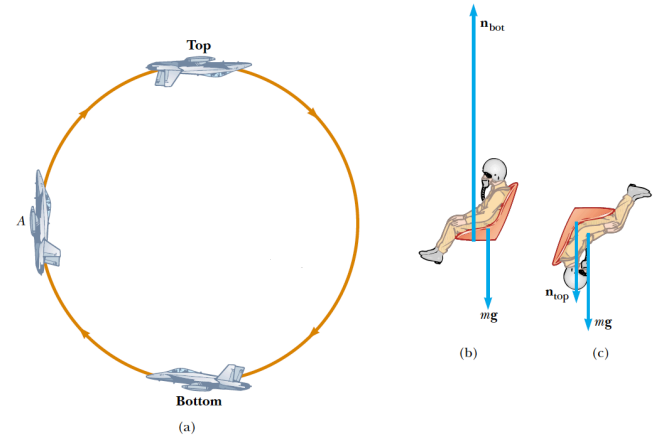
veya

$$\theta = \tan^{-1} \left[ \frac{(13,4 \text{ m/s})^2}{(50 \text{ m}) (9,80 \text{ m/s}^2)} \right] = 20.1^\circ$$



## ÖRNEK 6.7 Çember Etrafında Dönen Uçak

$m$  kütleli bir pilot, Şekil 6.8a da görüldüğü gibi uçakla bir çember etrafında dönmektedir. Bu uçuş düzeninde uçak, 2,70 km yarıçaplı düşey düzlemdeki dairesel yörüngede 225 m/s lik sabit bir hızla hareket ediyor. Koltuğun pilota uyguladığı kuvveti (a) dairesel yörüngenin en alt kısmında (b) en üstünde hesaplayınız. Sonucu pilotun  $mg$  ağırlığı cinsinden bulunuz.



$$\sum F_r = n_{alt} - mg = m \frac{v^2}{r}$$

veya

$$n_{alt} = mg + m \frac{v^2}{r} = mg \left( 1 + \frac{v^2}{rg} \right)$$

bulunur. Yarıçap ve hız için yukarıda verilen  $r = 2,70 \times 10^3$  m ve  $v = 225$  m/s değerleri yerine konularak

$$n_{alt} = mg \left[ 1 + \frac{(225 \text{ m/s})^2}{(2,70 \times 10^3 \text{ m}) (9,80 \text{ m/s}^2)} \right] = 2,91 \text{ } mg$$

$$\sum F_r = n_{üst} + mg = m \frac{v^2}{r}$$

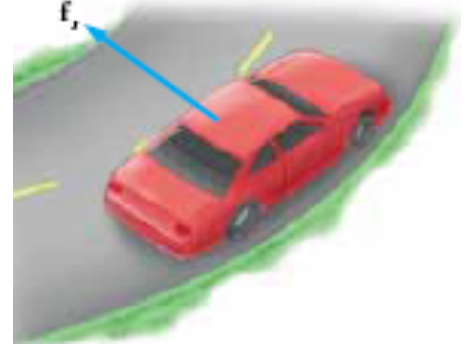
veya

$$n_{üst} = m \frac{v^2}{r} - mg = mg \left( \frac{v^2}{rg} - 1 \right)$$

$$n_{üst} = mg \left[ \frac{(225 \text{ m/s})^2}{(2,70 \times 10^3 \text{ m}) (9,80 \text{ m/s}^2)} - 1 \right] = 0,913 \text{ } mg$$

### Örnek 3:

1500 kg kütleli bir araba düz yolda 35 m yarıçaplı bir virajda hareket etmektedir. Yol ile tekerlek arasındaki statik sürtünme katsayısı kuru zemin için 0,5 ise arabanın emniyetli olarak dönebileceği maksimum hızı bulunuz.



**Çözüm** Deneyimlerimizden virajı dönen arabanın hızının 50 m/s den küçük olmasını bekleriz (yaklaşık olarak 1m/s lik hız 2mil/h lik hıza karşılık gelir). Bu durumda arabanın dairesel yörüngede hareket etmesine imkan sağlayan merkezci kuvvet statik sürtünme kuvvetidir. (Yol ile lastiklerin değme noktası arasında bir kayma olmadığından arabaya etki eden kuvvet virajın merkezine doğru yönelen statik sürtünme kuvvetidir. Bu statik sürtünme kuvveti sıfır olsa idi, örneğin araba buzlu yolda olsa idi doğrultusunu değiştirmeden gidecek ve yoldan çıkacaktı). Buna göre (6.1) Eşitliğinden sürtünme kuvveti bulunur:

$$(1) \quad f_s = m \frac{v^2}{r}$$

Arabanın virajı dönebileceği maksimum hız, arabanın yoldan dışarı doğru kaymasına karşı gelen hızdır. Bu noktada statik sürtünme kuvveti aşağıda verilen maksimum değere sahiptir:  $f_{s, \text{mak}} = \mu_s n$  bu durumda  $n$  normal kuvvet, ağırlığa eşit olduğundan, ( $n = mg$ ); ve bu değer (1) Eşitliğinde yerine konularak maksimum hız bulunur:

$$v_{\text{mak}} = \sqrt{\frac{f_{s, \text{mak}} r}{m}} = \sqrt{\frac{\mu_s m g r}{m}} = \sqrt{\mu_s g r}$$

$$= \sqrt{(0,500) (9,80 \text{ m/s}^2) (35,0 \text{ m})} = 13,1 \text{ m/s}$$



# FİZİK – 1 MEKANİK (Dairesel Hareket)

## 4. Newton'un 2. Yasasının Düzgün Olmayan Dairesel Harekete Uygulanması

Eğer dairesel yörüngede hareket eden cismin hızının büyüklüğü de zaman içerisinde değişiyor ise, merkezci ivmeye ek olarak birde teğetsel ivme var olacaktır. Cismin toplam ivmesi bu iki ivme vektörünün vektörel toplamı olacaktır.

Toplam İvme  $a = a_r + a_t$

Kuvvet  $F = ma = m(a_r + a_t) = ma_r + ma_t$

Burada:  
 $ma_r$  = Merkezci Kuvvet,  
 $ma_t$  = Teğetsel Kuvvet'dir

# FİZİK – 1 MEKANİK (Dairesel Hareket)

## Örnek 7:

Bir araba  $0,300 \text{ m/s}^2$  ivme ile şekildeki gibi hareket etmektedir. Yarıçapı  $500 \text{ m}$  olan bir tepeden geçerken arabanın yatay hızını büyüklüğü  $6 \text{ m/s}$  dir. Arabaya etki eden toplam ivme nedir ?

