MATEMATİK - 2

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2021

DİZİLER

$\{1,2,3,4\}$ $\{2,1,4,3\}$

$\{4,2,3,1\}$

1. Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1. *A boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere her $f:\mathbb{N}\rightarrow A$ fonksiyonuna dizi denir. $n\in\mathbb{N}$ için $f(n)=a_n$ ifadesine dizinin n. terimi veya genel terimi denir. Diziler değer kümelerine göre adlandırılır. Eğer değer kümesi reel sayılardan oluşuyorsa diziye reel sayılar dizisi, kompleks sayılardan oluşuyorsa kompleks sayılar dizisi, fonksiyonlardan oluşuyorsa fonksiyonel dizi adı verilir. Benzer şekilde örnekler çoğaltılabilir. Dizi küme olarak*

$$f=\{(n,a_n):n\in\mathbb{N}\}$$

şeklinde ifade edilir. Bir fonksiyon olan dizinin değer kümesi

$$(a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots)$$

$(1,2,3,4)$

$(2,1,4,3)$

şeklindedir. Bu kümede elemanların sırası önemli olduğundan küme parantezi yerine "( )" parantezi kullanılmaktadır. Başka bir ifade ile dizi

$$(a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$a_1 \to$ 1. *terimi,*

$a_2 \to$ 2. *terimi,*

...

$a_n \to$ *n. terimi göstermektedir.*

veya

a_n - dizinin genel terimidir

$a_n = 3^n$

Örneğin,

$(3^n) = (3, 3^2, 3^3, \ldots, 3^n, \ldots)$ bir reel sayı dizisi,

$(a_n) = (3^n)$

$(2+ni) = (2+i, 2+2i, 2+3i, \ldots, 2+ni, \ldots)$ bir kompleks sayı dizisi,

$$\left(\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}, \ldots\right)$$ bir matris dizisi,

$$\left(\frac{nx}{1+x^n}\right) = \left(\frac{x}{1+x}, \frac{2x}{1+x^2}, \frac{3x}{1+x^3}, \ldots, \frac{nx}{1+x^n}, \ldots\right)$$ bir fonksiyonel dizidir.

Aşağıdaki dizi örneklerini inceleyiniz:

$(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$

(b_n) (c_n) (d_n)

(1) $\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$

(2) $(-2n) = (-2, -4, -6, -8, -10, \ldots, -2n, \ldots)$

(3) $((-1)^n) = (-1, +1, -1, +1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots)$

(4) $(n!) = (1!, 2!, 3!, 4!, 5!, \ldots, n!, \ldots)$

(5) $((-1)^n n^2) = (-1, +4, -9, +16, -25, \ldots, (-1)^n n^2, \ldots)$

(6) $(a_n : \text{Asal sayı}) = (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots)$

(7) $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \left(\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ldots\right)$

(8) $\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \ldots, \frac{1}{2n+1}, \ldots\right)$

(9) $(-3^n) = (-3, -3^2, -3^3, -3^4, -3^5, \ldots, -3^n, \ldots)$

(10) $\left(\frac{1}{n^2}\right) = \left(1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{5^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots\right)$

$(a_n)=\left(\frac{1}{n}\right)=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots,\frac{1}{n},\dots\right)$

Dizi doğal sayılar kümesinde tanımlı bir fonksiyon olduğundan fonksiyonlara ait pek çok özelliğe sahiptir. Bu bölümde reel sayı dizileri ele alınacak ve özellikleri incelenecektir.

Örnek 2.1.1. $\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\right)$ dizisinin genel terimi $a_n=\frac{1}{n}$ olabileceği gibi $b_n=(n-1)(n-2)(n-3)+\frac{1}{n}$ de olabilir.

$(b_n)=\left((n-1)(n-2)(n-3)+\frac{1}{n}\right)=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{25}{4},\dots,(\ )(\ )(\ )+\frac{1}{n},\dots\right)$

Uyarı 2.1.1. *Diziler genel terimleri ile verilmelidir. Genel terimi belirli olmayan bir dizinin sonlu sayıda teriminin bilinmesi bilinmeyen terimler hakkında belirleyici olmaz.*

Örnek 2.1.2. $a_{n+1} = a_n - \dfrac{1}{n(n+1)}$, $a_1 = 1$ kuralı ile verilen (a_n) dizisinin genel teriminin $a_n = \dfrac{1}{n}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $a_1 = 1$.

$$a_2 = a_1 - \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2},$$

$$a_3 = a_2 - \frac{1}{2.3} = \frac{1}{3},$$

$$a_4 = a_3 - \frac{1}{3.4} = \frac{1}{4}, \ldots$$

$a_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{3-1}{2\cdot 3} = \frac{2}{2\cdot 3} = \frac{1}{3}$,

şeklindedir. Her $n \geq 2$ için $a_n = \dfrac{1}{n}$ olduğunu tümevarım ile gösterelim:

$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right) = \left(\frac{1}{n}\right)$

$n=2$ için $a_2=\dfrac{1}{2}$ olup verilen eşitlik $n=2$ için doğrudur.

Şimdi $n=k$ için verilen eşitliğin doğru olduğunu kabul edip $n=k+1$ için doğru olup olmadığını inceleyelim.

$n=k$ için $a_k=\dfrac{1}{k}$ olduğunu kabul edelim.

$n=k+1$ için $a_{k+1}=a_k-\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k+1}$ dir.

Bu durumda Tümevarım Kuralı gereği verilen eşitlik $n\geq 2$ için doğrudur.

Örnek 2.1.3. Terimleri $a_1 = 0.1$, $a_2 = 0.11$, $a_3 = 0.111$, … şeklinde olan dizinin genel terimini bulunuz.

10-1

Çözüm.

$$a_1 = 0.1 = \frac{1}{10} = \frac{1}{9}\cdot\frac{9}{10} = \frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10}\right),$$

$$a_2 = 0.11 = \frac{11}{100} = \frac{1}{9}\cdot\frac{99}{100} = \frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^2}\right),$$

$$a_3 = 0.111 = \frac{111}{1000} = \frac{1}{9}\cdot\frac{999}{1000} = \frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^3}\right),$$

…

$$a_n = \frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right) \text{ dir.}$$

Elde edilen eşitliğin doğruluğunun Tümevarım Kuralı ile ispatı okuyucuya bırakıldı.

$a_1 = \frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{9}\cdot\frac{9}{10} = 0,1$

$a_k = \frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^k}\right)$

$a_{k+1} = \frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^{k+1}}\right) = \frac{1}{9}\cdot\frac{10^{k+1}-1}{10^{k+1}} = \frac{1}{9}\cdot\frac{99999}{10^{k+1}} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1000\ldots0-1}{10^{k+1}} = \frac{111\ldots1}{10^{k+1}} = 0.111\ldots$

Örnek 2.1.5. $(a_n) = \left(\frac{3n+1}{n}\right)$ dizisinin ilk beş terimini yazınız. $\frac{37}{12}$ ve $\frac{15}{7}$ sayıları bu dizinin terimi midir? İnceleyiniz.

Çözüm.

$$a_1 = \frac{4}{1} = 4, \quad a_2 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4},$$

$$a_5 = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}, \ldots, a_n = 3\frac{1}{n} \text{ dir.}$$

Bu durumda $\frac{37}{12} = 3\frac{1}{12}$ olduğundan $\frac{37}{12}$ sayısı verilen dizinin 12. terimidir. $\frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$ olduğundan $\frac{15}{7}$ ise bu dizinin terimi değildir.

Örnek 2.1.6. $(a_n)=\left(\dfrac{5n-8}{n}\right)$ dizisinin hangi terimleri tam sayıdır? İnceleyiniz.

Çözüm. $a_n=\dfrac{5n-8}{n}=5-\dfrac{8}{n}$ olduğundan 8 i tam olarak bölen doğal sayılar için terimler tam sayı olacaktır. Bu durumda 1., 2., 4. ve 8. terim tam sayıdır. Bu durumda $a_1=-3$, $a_2=1$, $a_4=3$ ve $a_8=4$ tür.

Örnek 2.1.7. Genel terimi $a_n = 2+4+...+2n$ olan (a_n) dizisi veriliyor. Bu dizi için $a_n > 500$ şartını sağlayan en küçük n doğal sayısını bulunuz.

Çözüm.

$$a_n = 2+4+...+2n = 2(1+2+...+n) = n(n+1)$$

olduğundan $a_n > 500$ olması için $n(n+1) > 500$ olmalıdır. Bu durumda $n = 22$ dir.

Tanım 2.1.3. *Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $a_n = b_n$ *ise* (a_n) *dizisi* (b_n) *dizisine eşittir veya* (a_n) *ve* (b_n) *dizileri eşit dizilerdir denir.* $(a_n) = (b_n)$ *şeklinde gösterilir.*

Örnek 2.1.8. $(a_n) = (1 + 2 + \ldots + n)$ ve $(b_n) = \left(\dfrac{n(n+1)}{2} \right)$ dizilerini ele alalım. $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = b_n$ olup (a_n) ve (b_n) dizileri eşit dizilerdir.

Örnek 2.1.9. $(a_n) = \left(\sin\left(n\pi + \dfrac{\pi}{2} \right) \right)$ dizisine eşit bir dizi bulunuz.

Çözüm. $\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}-1, & n \text{ tek}\\ 1, & n \text{ çift}\end{cases}$ olduğundan $(b_n)=((-1)^n)$ dizisi (a_n) dizisine eşittir.

Benzer şekilde $(c_n)=(\cos(n\pi))$ dizisi de (a_n) ve (b_n) dizilerine eşittir.

Tanım 2.1.4. *$c\in\mathbb{R}$ olmak üzere her $n\in\mathbb{N}$ için $a_n=c$ ise (a_n) dizisine sabit dizi denir ve*

$$(a_n)=(c,c,\ldots,c,\ldots)=(c)$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.5. $a, r \in \mathbb{R}$ *olmak üzere* $a_n = a + (n-1)r$ *genel terimi ile tanımlanan* (a_n) *dizisine aritmetik dizi denir ve*

$$(a_n) = (a, a+r, a+2r, \ldots, a+(n-1)r, \ldots)$$

şeklinde gösterilir. Yani bir dizinin ardışık terimleri arasındaki fark hep aynı sabit sayıya eşit ise diziye aritmetik dizi denir. Bu durumda aritmetik bir dizide her $n \in \mathbb{N}$ *için* $a_{n+1} - a_n = r$ *dir. Aritmetik bir dizinin ilk n terim toplamı*

$$\begin{aligned} S_n &= a + a + r + a + 2r + \ldots + a + (n-1)r \\ &= na + \frac{n(n-1)}{2} r \\ &= \frac{n}{2}(2a + (n-1)r) \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

Uyarı 2.1.2. *Aritmetik bir dizide birinci terim dışındaki her terim kendisinden önce gelen terim ile kendisinden sonra gelen terimin aritmetik ortalamasına eşittir.*

Örnek 2.1.10. $(a_n)=\left(\frac{n-3}{5}\right)$ dizisi aritmetik bir dizidir. Çünkü her $n\in\mathbb{N}$ için

$$a_{n+1}-a_n=\frac{n-2}{5}-\frac{n-3}{5}=\frac{1}{5}$$

dir. Bu durumda

$$(a_n)=\left(-\frac{2}{5},-\frac{1}{5},0,\frac{1}{5},\dots,\frac{n-3}{5},\dots\right)$$

dizisinde $a=-\frac{2}{5}$ ve $r=\frac{1}{5}$ tir.

Ayrıca $\frac{n-3}{5}=-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}(n-1)$ yazılabileceği açıktır ve bu dizinin ilk n terim toplamı

$$S_n=\frac{n}{2}(2a+(n-1)r)=\frac{n}{2}\left(2\left(-\frac{2}{5}\right)+(n-1)\frac{1}{5}\right)=\frac{n(n-5)}{10}$$

dur.

Tanım 2.1.6. $a, r \in \mathbb{R}$ *olmak üzere* $a_n = a.r^{n-1}$ *genel terimi ile tanımlanan* (a_n) *dizisine geometrik dizi denir ve*

$$(a_n) = (a, a.r, a.r^2, \ldots, a.r^{n-1}, \ldots)$$

şeklinde gösterilir. Yani bir dizinin ardışık terimleri arasındaki oran hep aynı sabit sayıya eşit ise diziye geometrik dizi denir. Bu durumda geometrik bir dizide her $n \in \mathbb{N}$ *için* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$ *dir. Geometrik bir dizinin ilk n terim toplamı*

$$S_n = a + a.r + a.r^2 + \ldots + a.r^{n-1}$$

$$= a(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}) = a\frac{1 - r^n}{1 - r}$$

şeklinde hesaplanır.

Uyarı 2.1.3. *Geometrik bir dizide birinci terim dışındaki her terim kendisinden önce gelen terim ile kendisinden sonra gelen terimin geometrik ortalamasına eşittir.*

Örnek 2.1.11. $1+r+r^2+\ldots+r^{n-1}=\dfrac{1-r^n}{1-r}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Eşitliğin doğru olduğunu tümevarım ile gösterelim:

$n=1$ için $1=\dfrac{1-r}{1-r}=1$ olup verilen eşitlik $n=1$ için doğrudur.

$n=2$ için $1+r=\dfrac{1-r^2}{1-r}=1+r$ olup verilen eşitlik $n=2$ için de doğrudur.

Şimdi $n=k$ için verilen eşitliğin doğru olduğunu kabul edip $n=k+1$ için doğru olup olmadığını inceleyelim.

Kabulümüze göre

$n=k$ için $1+r+r^2+\ldots+r^{k-1}=\dfrac{1-r^k}{1-r}$

dir. Kabulümüz ışığında

$$n = k + 1 \text{ için } 1 + r + r^2 + \ldots + r^k = \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r}$$

olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır.

$$\begin{aligned} 1 + r + r^2 + \ldots + r^k &= (1 + r + r^2 + \ldots + r^{k-1}) + r^k \\ &= \frac{1 - r^k}{1 - r} + r^k \\ &= \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r} \end{aligned}$$

dir. Bu durumda Tümevarım Kuralı gereği verilen eşitlik bütün doğal sayılar için doğrudur.

Örnek 2.1.12. $(a_n)=(3.2^n)$ dizisi geometrik bir dizidir. Çünkü her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3.2^{n+1}}{3.2^n}=2$$

dir. Bu durumda

$$(a_n)=(6, 6.2, 6.2^2, \dots, 6.2^{n-1}, \dots)$$

dizisinde $a=6$ ve $r=2$ dir. Bu dizinin ilk n terim toplamı

$$S_n=a\frac{1-r^n}{1-r}=6\frac{1-2^n}{1-2}=6(2^n-1)$$

dir.

Tanım 2.1.7. *Bir aritmetik dizinin terimlerinin çarpma işlemine göre terslerinin oluşturduğu diziye harmonik dizi denir. Yani harmonik bir dizi*

$$(a_n)=\left(\frac{1}{a},\frac{1}{a+r},\frac{1}{a+2r},\ldots,\frac{1}{a+(n-1)r},\ldots\right)$$

şeklindedir.

Uyarı 2.1.4. *Harmonik bir dizide birinci terim dışındaki her terim kendisinden önce gelen terim ile kendisinden sonra gelen terimin harmonik ortalamasına eşittir.*

Örnek 2.1.13. $(a_n)=\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi harmonik bir dizidir. Çünkü $n>1$ için $a_n=\dfrac{2}{\dfrac{1}{a_{n-1}}+\dfrac{1}{a_{n+1}}}$ dir.

2. Dizilerin Yakınsaklığı

Tanım 2.2.1. $a \in \mathbb{R}$ *olmak üzere her* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *sayısı için* (a_n) *dizisinin sonlu sayıdaki terimleri dışındaki bütün terimleri (hemen her terimi) a reel sayısının* ε *-komşuluğu içinde kalıyorsa* (a_n) *dizisinin limiti a dır denir ve*

$$(a_n) \to a \text{ veya } \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

şeklinde gösterilir.

Limiti a reel sayısına eşit olan (a_n) *dizisine a reel sayısına yakınsıyor denir. a reel sayısına yakınsayan* (a_n) *dizisine yakınsak dizi adı verilir. Yakınsak olmayan dizilere ise ıraksak dizi denir.*

Diziler için limit tanımı farklı bir şekilde de ifade edilebilir:

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere her $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sayısına karşılık $n(\varepsilon) < n$ şartını sağlayan n doğal sayıları için

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

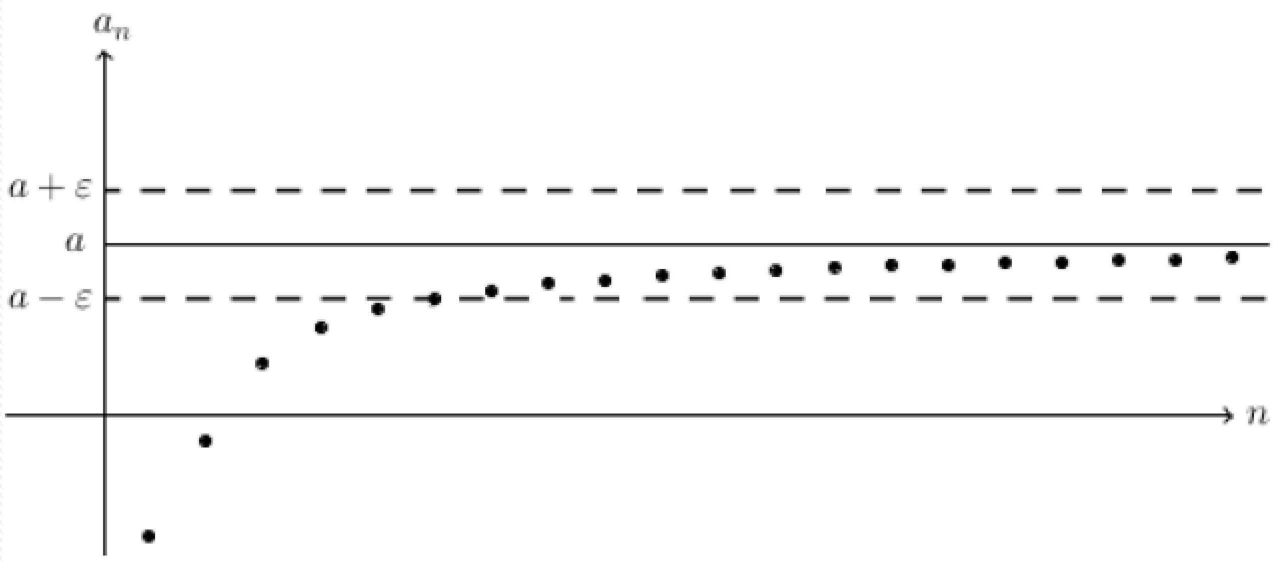
olacak şekilde ε a bağlı bir $n(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa (a_n) dizisinin limiti a dır denir. Her $n(\varepsilon) < n$ için

$$|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

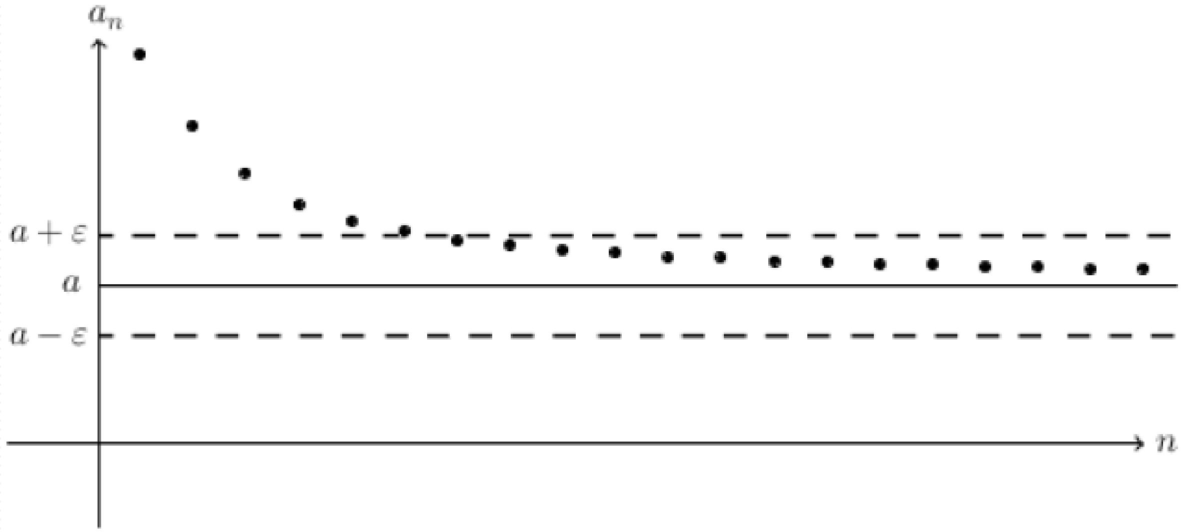
ifadesinin anlamı $a_{n(\varepsilon)+1}, a_{n(\varepsilon)+2}, \ldots$ terimlerinin hepsinin kesin olarak a nın ε-komşuluğunda bulunması ve sonlu sayıda olan $a_1, a_2, \ldots, a_{n(\varepsilon)}$ terimlerinin ise bu komşuluğun dışında kalmasıdır.

Uyarı 2.2.1. *Burada* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *sayısı* a_n *sayısı ile a sayısı arasındaki hata,* $n(\varepsilon)$ *doğal sayısı da* (a_n) *dizisinin a sayısına ne kadar hızlı yakınsadığının ölçüsü olarak düşünülebilir.*

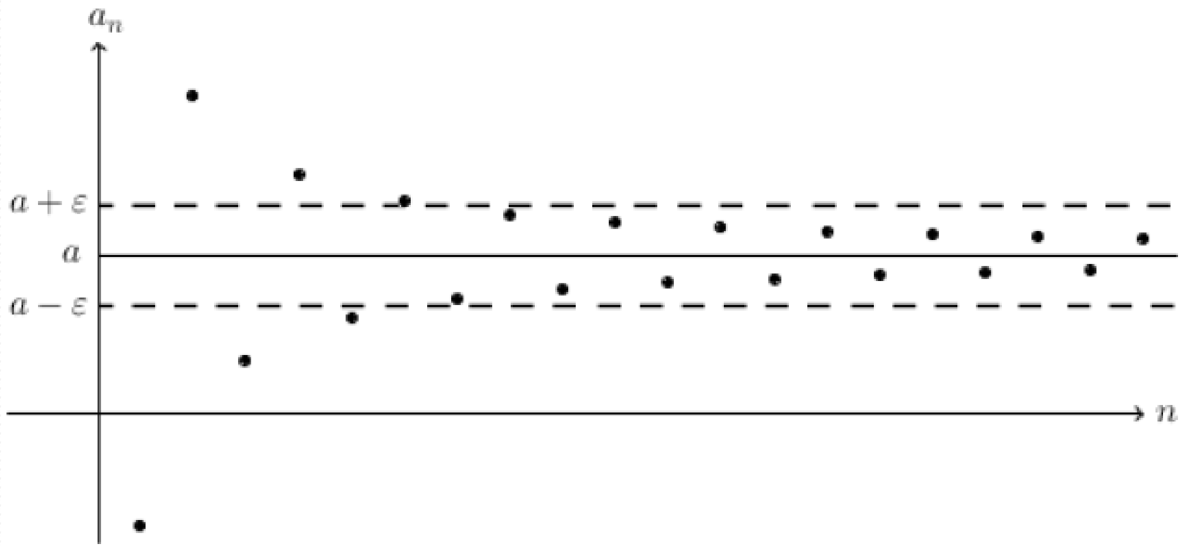
Dizilerin yakınsaklık tanımını göz önünde bulundurarak aşağıdaki grafikleri inceleyiniz.



Şekil 2.2.1.



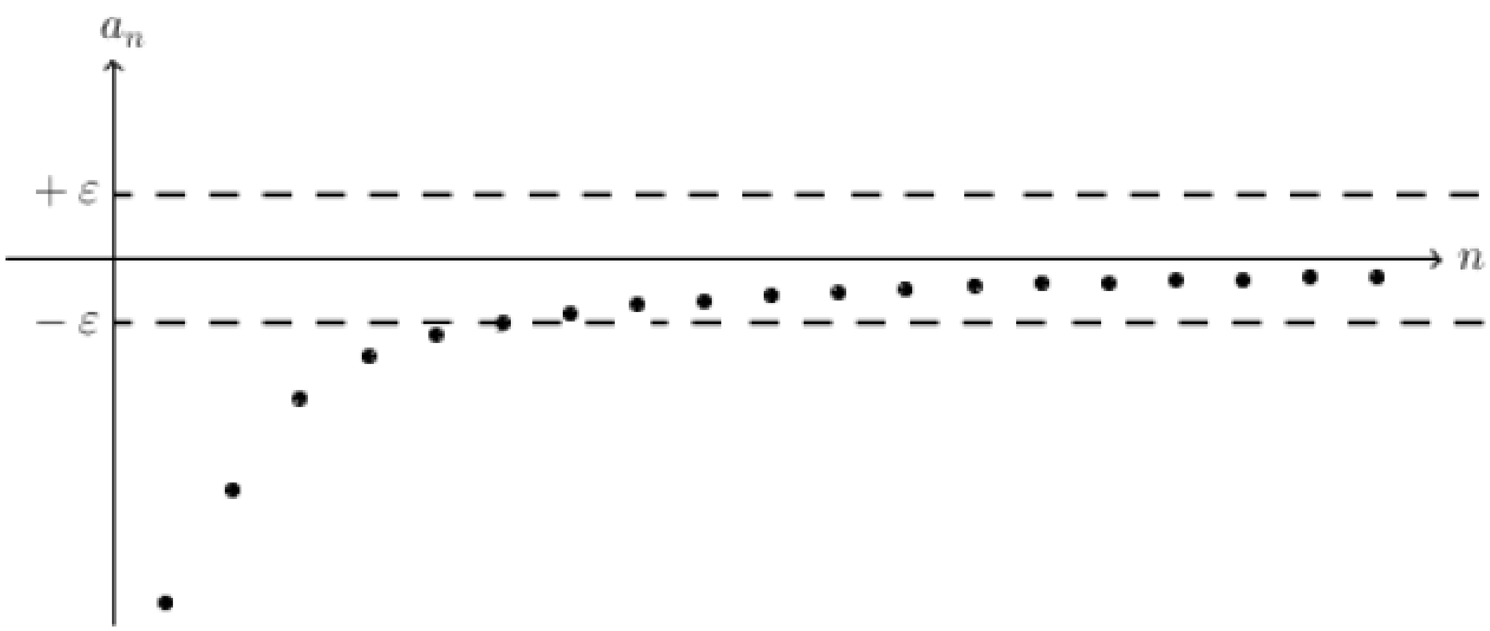
Şekil 2.2.2.



Şekil 2.2.3.

Tanım 2.2.2. *Limiti sıfır olan dizilere sıfır dizisi denir.*

Sıfır dizisinin tanımını göz önünde bulundurarak aşağıdaki grafikleri inceleyiniz.



Şekil 2.2.4.

KAYNAKLAR:

1. **Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA,** Analiz III Diziler ve Seriler, Dizgi Ofset, 2017.

2. **G. B. Thomas ve Ark.,** Thomas Calculus I, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.