MATEMATİK 3

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2020

İki değişkenli fonksiyonların Taylor ve Mc'Loren serilerine açılımı.

(Taylor ve Mc'Loren formülleri).

$A \subset \mathbb{R}^2$ de sürekli ve istenildiği mertebeden kısmi türevlere sahip $z = f(x,y)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer

$$z = f(x,y) = f(a+ht,\ b+kt) = F(t) \quad (1)$$

dersek, (2) $x = a + ht$ ve $y = b + kt$ olur.

$f(x,y)$ fonksiyonu istenildiği mertebeden kısmi türeve sahip olduğundan, $F(t)$ fonksiyonuda o bölgede sürekli ve her mertebeden türeve sahip olur. Bu durumda $F(t)$ fonksiyonu Mc'Loren serisine açılabilir.

Yani,

$$F(t) = F(0) + \frac{t}{1!}F'(0) + \frac{t^2}{2!}F''(0) + \dots +$$

$$+ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n-1)}(0) + \frac{t^n}{n!}F^{(n)}(0) + \dots \quad (3).$$

yazılır.

Analiz IV bilgilerimizden,

$$F(t) = F(0) + \frac{t}{1!}F'(0) + \frac{t^2}{2!}F''(0) + \dots +$$

$$+ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n-1)}(0) + \underline{\frac{t^n}{n!}F^{(n)}(\theta \cdot t)} \quad (3^*)$$

Mc'Loren formülü yazılır.

(3) eşitliğinde $t=1$ seçersek,

$$F(1)=F(0)+F'(0)+\frac{1}{2!}F''(0)+\dots+\frac{1}{(n-1)!}F^{(n-1)}(0)+\frac{1}{n!}F^{(n)}(\theta) \quad (4)$$

elde edilir.

Diğer taraftan

(5) $F(1)=f(a+h,\ b+k)$, $F(0)=f(a,b)$ dir.

Şimdi, $F'(0)$, $F''(0)$, ..., türevlerini hesaplayalım.

$$F'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}=h\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=$$

$$=\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y),$$

$$F'(0) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(1)} f(a,b) \quad (6) \text{ bulunur.}$$

$$F''(t) = \frac{\partial F'}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F'}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} =$$

$$= h\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right) + k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$

$$= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + h\cdot k\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + k\cdot h\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + k^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =$$

$$= h^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\cdot h\cdot k\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + k^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =$$

$$= \left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x} + k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f(x,y) \text{ olur.}$$

$$F''(0) = \left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x} + k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f(a,b) \quad (7)$$

Benzer şekilde işleme devam edersek,

$$F^{(r)}(0) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(r)} \cdot f(a,b) \quad (8)$$

yazılır.

Bu ifadeler (4)'de yerine yazılırsa,

$F(1)$

$$f(a+h,\, b+k) = f(a,b) + \frac{1}{1!}\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x} + k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(1)} f(a,b) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\cdot\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f(a,b) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!}\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x} + k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n-1)} f(a,b) +$$

$$+\frac{1}{n!}\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)} f(a+\vartheta h,\ b+\vartheta\cdot k) \quad (9)$$

elde edilir.

Bu formüle iki değişkenli $f(x,y)$ fonksiyonu için Taylor formülü denir. Burada

$$(10) \quad R_n=\frac{1}{n!}\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)} f(a+\vartheta h,\ b+\vartheta k)$$

$$(0<\vartheta<1)$$

terimine n. terimden sonraki kalan terim denir.

(g)'da a yerine x, b yerine y yazılırsa

$$f(x+h,\, y+k) = f(x,y) + \frac{1}{1!}\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x} + k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(1)} f(x,y) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x} + k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f(x,y) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!}\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x} + k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n-1)} f(x,y) +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x} + k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)} f(x+\theta h,\, y+\theta k) \qquad (11)$$

elde edilir.

(9) formülünde $a+h=x$, $b+k=y$ yapılırsa, $h=x-a$, $k=y-b$ olup formül,

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{1!}\left[(x-a)\cdot\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(1)} f(a,b) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(2)} f(a,b) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(n-1)} f(a,b) + R_n \qquad (12)$$

~~(11) ve~~ (12) Taylor formülünün denir. şeklini alır. (11) formülü de Taylor formülünün değişik şekilleridir. Yani, (12), $f(x,y)$ fonksiyonunun (a,b) noktası civarında Taylor serisine açılımıdır.

(9)'da $a=0$, $b=0$, $h=x$, $k=y$ yazılırsa,

$$f(x,y)=f(0,0)+\frac{1}{1!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(1)}f(0,0)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)}f(0,0)+\frac{1}{3!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(3)}f(0,0)+$$

$$+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n-1)}f(0,0)+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)}f(\theta x,\theta y) \qquad (13) \qquad (0<\theta<1)$$

formülü elde edilir. (13)'formülüne $f(x,y)$ fonksiyonunun Mc'Loren serisine açılımı denir.

Örnek! $(1,-1)$ noktası civarında $f(x,y)=e^{x+y}$ fonksiyonunu Taylor serisine, ~~fonksi~~ bir değişkenli fonksiyonların seriye açılımı ve kuvvet serilerinin özelliklerinden yararlanarak, açınız.

Çözüm! $f(x,y)=e^{x+y}=e^{x}\cdot e^{y}=f_1(x)\cdot f_2(y)$ olduğundan. $f_1(x)=e^{x}$ ve $f_2(y)=e^{y}$ fonksiyonları tüm $\mathbb{R}$'de tanımlı, sürekli ve istenildiği mertebeden türeve sahip olduğundan Mc'Loren ve Taylor serisine açılabilir.

Bu durumda $x=1$ ve $y=-1$ olduğundan,

$e^x = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}$ ve $e^y = e^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y+1)^n}{n!}$ olur.

Ayrıca, genel terimi a_n ve b_n olan serilerin çarpımı,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \dots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n \right)$$

olduğundan

$$e^x \cdot e^y = \left[e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} \right] \cdot \left[e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y+1)^n}{n!} \right] =$$

$$= e \cdot e^{-1} \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y+1)^n}{n!} \right] =$$

$$= 1 \left[\left\{ \frac{(x-1)^0}{0!} \cdot \frac{(y+1)^0}{0!} \right\} + \left\{ \frac{(x-1)^1}{1!} \cdot \frac{(y+1)^0}{0!} + \frac{(x-1)^0}{0!} \cdot \frac{(y+1)^1}{1!} \right\} + \right.$$

$$+\left\{\frac{(x-1)^2}{2!}\cdot\frac{(y+1)^0}{0!}+\frac{(x-1)^1}{1!}\cdot\frac{(y+1)^1}{1!}+\frac{(x-1)^0}{0!}\cdot\frac{(y+1)^2}{2!}\right\}+$$

$$+\left\{\frac{(x-1)^3}{3!}\cdot\frac{(y+1)^0}{0!}+\frac{(x-1)^2}{2!}\cdot\frac{(y+1)^1}{1!}+\frac{(x-1)^1}{1!}\cdot\frac{(y+1)^2}{2!}+\frac{(x-1)^0}{0!}\cdot\frac{(y+1)^3}{3!}\right\}+$$

$$+\dots+\left\{\frac{(x-1)^n}{n!}\cdot\frac{(y+1)^0}{0!}+\frac{(x-1)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{(y+1)^1}{1!}+\dots+\frac{(x-1)^1}{1!}\cdot\frac{(y+1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(x-1)^0}{0!}\cdot\frac{(y+1)^n}{n!}\right\}+$$

$$+\dots=1+\left\{\frac{(x-1)}{1!}+\frac{(y+1)}{1!}\right\}+\left\{\frac{(x-1)^2}{2!}+2\cdot\frac{(x-1)(y+1)}{2!}+\right.$$

$$\left.+\frac{(y+1)^2}{2!}\right\}+\left\{\frac{(x-1)^3}{3!}+3\cdot\frac{(x-1)^2\cdot(y+1)^1}{3!}+3\cdot\frac{(x-1)(y+1)^2}{3!}+\frac{(y+1)^3}{3!}\right\}+$$

$$+\left\{\frac{(x-1)^n}{n!}+n\cdot\frac{(x-1)^{n-1}\cdot(y+1)^1}{n!}+\dots+n\cdot\frac{(x-1)^1\cdot(y+1)^{n-1}}{n!}+\frac{(y+1)^n}{n!}\right\}+\dots=$$

$$]^2$$

$$+\left\{\frac{\quad}{n!} + \ldots \frac{\quad}{n!}\right.$$

$$= 1 + \frac{1}{1!}\left\{(x-1)+(y+1)\right\} + \frac{1}{2!}\left\{(x-1)+(y+1)\right\}^2 +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left\{(x-1)+(y+1)\right\}^3 + \ldots + \frac{1}{n!}\left\{(x-1)+(y+1)\right\}^n + \ldots$$

olur ki istenilendir. Ancak bu metod ile her bir örnek için, bu şekilde kolay sonuca varılamayabilir.

Şimdi aynı örneği iki değişkenli fonksiyonların Taylor serisine açılımından yararlanarak seriye açalım.

Örnek!

(1, -1) noktası civarında $f(x,y)=e^{x+y}$ fonksiyonunu Taylor serisine açınız.

Çözüm! (12)' den $(a=1,\ b=-1$ yazılarak$)$

$$f(x,y)=f(1,-1)+\frac{1}{1!}\left[(x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y+1)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(1)}f(1,-1)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[(x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y+1)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(2)}f(1,-1)+$$

$$+\frac{1}{3!}\left[(x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y+1)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(3)}f(1,-1)+\dots+$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\left[(x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y+1)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(n-1)}f(1,-1)+\dots=$$

$x+y$

$=$

$$= \left\{ \begin{array}{l} f(1,-1) = 1 \text{ ve } \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,-1)} = 1 , \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,-1)} = 1 , \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(1,-1)} = 1 , \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(1,-1)} = 1 , \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(1,-1)} = 1 \text{ v.b. olup} \end{array} \right\} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1!}\left[(x-1)+(y+1)\right]^1 + \frac{1}{2!}\left[(x-1)+(y+1)\right]^2 +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left[(x-1)+(y+1)\right]^3 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}\left[(x-1)+(y+1)\right]^{n-1} + \dots$$

bulunur ki istenendir.

Örnek! $f(x,y) = e^x \sin y$ fonksiyonunu Mc'Loren serisine açınız.

Çözüm! $f(0,0) = e^0 \cdot \sin 0 = 0$ olur.

$$f'(x,y)\Big|_{(0,0)} = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(1)} f(0,0) = x\cdot\left(e^x \sin y\Big|_{(0,0)}\right) +$$

$$+\, y\cdot\left(\left(e^x \cos y\right)\Big|_{(0,0)}\right) = x\cdot 0 + y\cdot 1 = y.$$

$$f''(x,y)\Big|_{(0,0)} = \left(x\cdot\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f(0,0) =$$

$$= x^2 \cdot \left(e^x \sin y \Big|_{(0,0)} \right) + 2x \cdot y \left(e^x \cos y \Big|_{(0,0)} \right) + y^2 \cdot \left(- e^x \sin y \Big|_{(0,0)} \right) =$$

$$= x^2 \cdot 0 + 2 \cdot x \cdot y \cdot 1 + y^2 \cdot 0 = 2x \cdot y ;$$

$$f'''(x,y)\Big|_{(0,0)} = x^3 \cdot \left(e^x \sin y \Big|_{(0,0)} \right) + 3 \cdot x^2 \cdot y \left(e^x \cos y \Big|_{(0,0)} \right) +$$

$$+ 3x \cdot y^2 \left(- e^x \sin y \Big|_{(0,0)} \right) + y^3 \left(- e^x \cos y \Big|_{(0,0)} \right) =$$

$$= x^3 \cdot 0 + 3 \cdot x^2 y \cdot 1 + 3xy^2 \cdot 0 + y^3 \cdot (-1) =$$

$= 3x^2y - y^3$; ve bu şekilde işlem devam eder. O zaman,

$$f(x,y) = e^x \sin y = 0 + \frac{1}{1!} y + \frac{1}{2!} 2xy + \frac{1}{3!}\left(3x^2y - y^3\right) +$$

$+ \ldots = y + xy + \frac{1}{3!}(3x^2 - y^2) \cdot y + \ldots$ olur.

Örnek! $x^2+y^2-z^2-xy=0$ denklem ile kapalı olarak verilen $z=f(x,y)$ fonksiyonunun $(-1,0)$ noktasında aldığı değer $z=f(-1,0)=1$ olduğuna göre söz konusu fonksiyonu $(-1,0)$ noktası civarında ikinci mertebeden türevler dahil Taylor serisine açınız.

Çözüm: (11) formülünde $x = x_0$, $y = y_0$ dersek,

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x} + k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(1)} f(x_0, y_0) + $$
$$+ \frac{1}{2!}\cdot\left(h\,\frac{\partial}{\partial x} + k\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f(x_0, y_0) + \ldots$$ yazılır.

Buradan da

$$f(-1+h, 0+k) = f(-1, 0) + \frac{1}{1!}\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x} + k\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(1)} f(-1, 0) + $$
$$+ \frac{1}{2!}\left(h\cdot\frac{\partial}{\partial x} + k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f(-1, 0) + \ldots$$ yazılır.

Burada $h = x+1$, $k = y$ dersek,

$$f(x,y) = f(-1,0) + \frac{1}{1!}\left((x+1)\frac{\partial}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(1)} f(-1,0) +$$

$$(**)\quad + \frac{1}{2!}\left((x+1)\frac{\partial}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f(-1,0) + \ldots$$ bulunur.

Ozaman,

$f(-1,0) = z = 1$ olup, verilen denklem

x ve y değişkenlerine göre kapalı türetilirse,

$2x - 2z \cdot z_x - y = 0$ (*)

$2y - 2z \cdot z_y - x = 0$ (#) bulunur.

$x = -1$, $y = 0$ ve $z = 1$ dersek,

$-2 - 2 \cdot 1 \cdot z_x - 0 = 0 \Rightarrow \boxed{z_x = -1.}$

$+2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot z_y - (-1) = 0 \Rightarrow z_y = \frac{1}{2}$ bulunur.

Yani bu sonuçlar

$f_x(x,y)\Big|_{(-1,0)} = z_x\Big|_{(-1,0)} = -1$; $f_y(x,y)\Big|_{(-1,0)} = z_y\Big|_{(-1,0)} = \frac{1}{2}$ old. gösterir.

Şimdi de (*) ve (#) eşitliklerinden kapalı olarak bir kez daha türev alalım.

$$2 - 2 \cdot z_x \cdot z_x - 2z \cdot z_{xx} = 0$$

$$2 - 2 \cdot z_y \cdot z_y - 2z \cdot z_{yy} = 0$$

bulunur.

Buradan da,

$$2 - 2 \cdot (-1) \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot z_{xx} = 0 \Rightarrow \boxed{z_{xx} = 0}$$

Yani, $f_{xx}(x,y)\Big|_{(-1,0)} = z_{xx}\Big|_{(-1,0)} = 0$ olur.

Benzer şekilde,

$$2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 1 \cdot z_{yy} = 0 \Rightarrow \boxed{z_{yy} = \frac{3}{4}}$$

bulunur. Ayrıca, (*) dan y değişkenine göre kapalı türev alınırsa,

$$-2 \cdot z_y \cdot z_x - 2z \cdot z_{xy} - 1 = 0 \Rightarrow -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot z_{xy} - 1 = 0$$

$1-1-2.z_{xy}=0 \Rightarrow z_{xy}=0$ bulunur.

Bulmuş olduğumuz bu değerler, (**) da yerine yazılırsa,

$$f(x,y) = 1 + \frac{1}{1!}\Big((x+1).(-1) + y.\frac{1}{2}\Big) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\Big((x+1)^2.0 + 2.(x+1).y.(0) + y^2.\frac{3}{4}\Big) + \ldots =$$

$$= 1 + \Big(-(x+1) + \frac{y}{2}\Big) + \frac{1}{2!}\Big(\frac{3}{4}y^2\Big) + \ldots =$$

$$= 1 - (x+1) + \frac{y}{2} + \frac{3}{8}y^2 + \ldots$$ bulunur.

Kaynaklar:

1. A. H. Berksoy, O. Özkan, Mühendisler İçin Çözümlü Kalkülüs, S.Ü. Basımevi, 2010
2. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus II**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2010.
3. J. Stewart, Kalkülüs Kavram ve Kapsam (Diferansiyel ve İntegral Hesap), TÜBA, 2010.