BAĞINTI

Tanımı, Özellikleri, Denklik ve Sıra Bağıntısı

İki kümenin kartezyen çarpımının, tüm sıralı ikililerin kümesi olduğunu gördük. Bu kümenin herhangi bir alt kümesi bağıntıdır. Yani kartezyen çarpım kümesinden keyfi ikililer seçip bir küme oluşturursak bu küme bir bağıntı olur.
A ve B gibi iki kümenin kartezyen çarpımı $s(A) \cdot s(B)$ tane ikili içeriyordu. Bağıntı da bu kümenin herhangi bir alt kümesi olduğundan toplam bağıntı sayısı $2^{s(A) \cdot s(B)}$ olur.
Tanıma uyduğuna göre boş küme de bir bağıntıdır. Boş küme her kümenin ve dolayısıyla kartezyen çarpımın da bir altkümesidir. Aynı şekilde kartezyen çarpımın kendisi de bir bağıntıdır. Her küme kendisinin alt kümesidir.

Örneğin $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{a, b\}$ olsun.

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

Buradan alacağımız ikililerle oluşturacağımız her altküme, A dan B ye bir bağıntıdır. Bağıntılar genellikle β harfi ile gösterilir.

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \{\} \\ \beta_2 &= \{(1,a),(2,b)\} \\ \beta_3 &= \{(1,a),(3,a),(3,b)\} \end{aligned}$$

A ve B sonlu sayıda elemanı olan 2 küme olsun. A’dan B’ye β bağıntısı için, bağıntıyı göstermenin 3 farklı yolu vardır:

1) Bağıntı β’nin elemanları AxB Kartezyen çarpımının koordinat çizelgesinde işaretlenir.

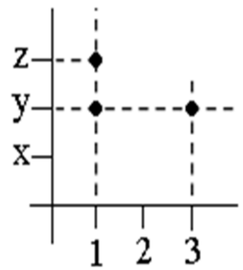
2) A ve B’nin elemanları Venn şeması ile gösterilir. Bağıntı β için, a∈A’dan b∈B’ye oklar çizilir.

3) Matris formatında gösterilir. Bağıntıda aβb için β’nın ikili matrisi, A kümesinin eleman sayısı kadar satıra, B kümesinin eleman sayısı kadar sütuna sahiptir. Elemanlardan a ve b arasında ilişki var ise 1, yoksa 0 konularak bağıntı matrisi oluşturulur.

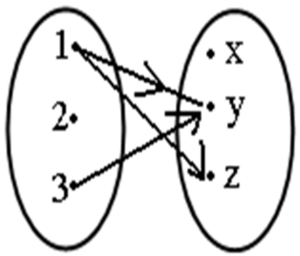
ÖRNEK:

A={1, 2, 3} , B={x, y, z} kümeleri olsun. Bağıntı β={(1,y), (1,z), (3,y)} ise β bağıntısı 3 şekilde de gösterin.

1) Koordinat sisteminde



2) Venn şemasında



3) Matris formatında

	x	y	z
1	0	1	1
2	0	0	0
3	0	1	0

Tanım ve Değer Kümesi (Domain and Range)

***X*'den *Y*'ye verilen bir *R* bağıntısında,**

- *R*'nin tanım kümesi (domain)

  $\text{Dom}(R) = \{ x \in X \mid (x, y) \in R \text{ for some } y \in Y\}$

- *R*'nin değer kümesi (range)

  $\text{Rng}(R) = \{ y \in Y \mid (x, y) \in R \text{ for some } x \in X\}$

- Örnek:
  - $X = \{1, 2, 3\}$ ve $Y = \{a, b\}$
  - $R = \{(1,a), (1,b), (2,b)\}$
  - $\text{Dom}(R) = \{1, 2\}$, $\text{Rng}(R) = \{a, b\}$

‘Digraph’, graf yapısının temelidir!...

Bağıntının Digraph Gösterimi

Tanım: A bir sonlu küme ve $R \subseteq A \times A$ bir bağıntı olsun.

Bu durumda R şekilsel olarak gösterilebilir.

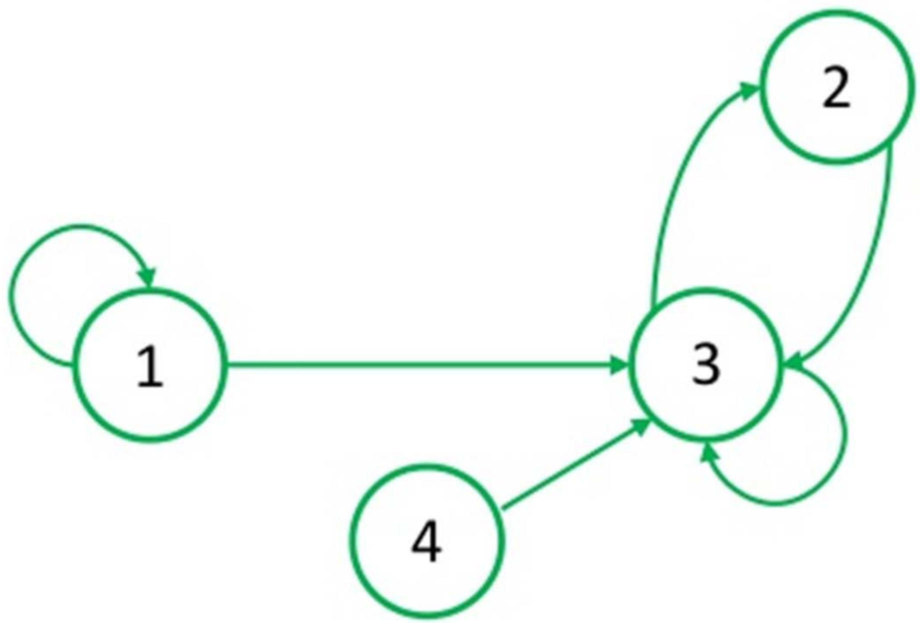
- A kümesindeki her eleman için düğüm (vertex/node) adı verilen daireler çiz ve bu dairelere elemanları yerleştir
- R bağıntısına göre eşleşen sıralı ikililerden (x,y) için x'ten y'ye doğru yönlü ok çiz

Sonuçta elde edilen gösterim şekline R bağıntısı için yönlü graf ya da digraph denir

Digraph örneği

Let $A = \{1, 2, 3, 4\}$ and $R \subseteq (AxA)$

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 2), (4, 3)\}$$



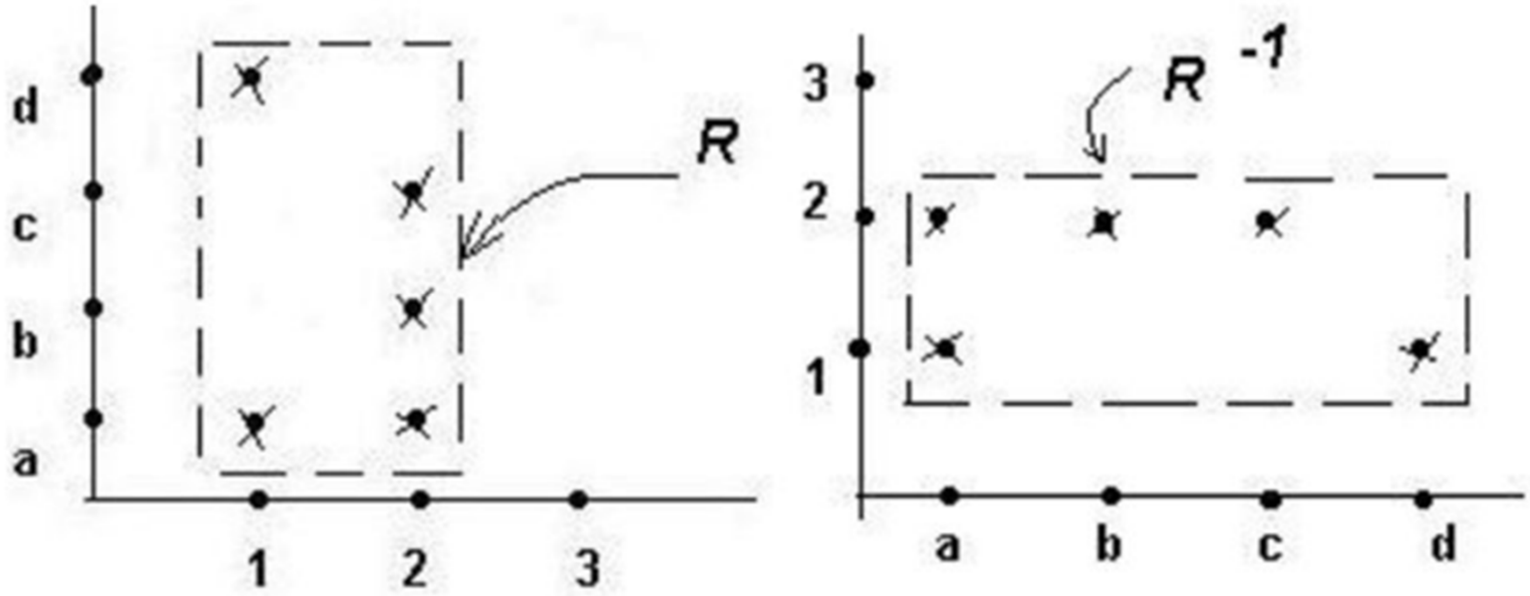
Bağıntının tersi

X'den *Y*'ye bir *R* bağıntısı verilmiş olsun, bu bağıntının *tersi (inversi)* *Y*'den *X*'e olup R^{-1} ile gösterilir

$R^{-1} = \{ (y,x) \mid (x,y) \in R \}$

- Örnek: Eğer $R = \{(1,a), (1,d), (2,a), (2,b), (2,c)\}$ ise

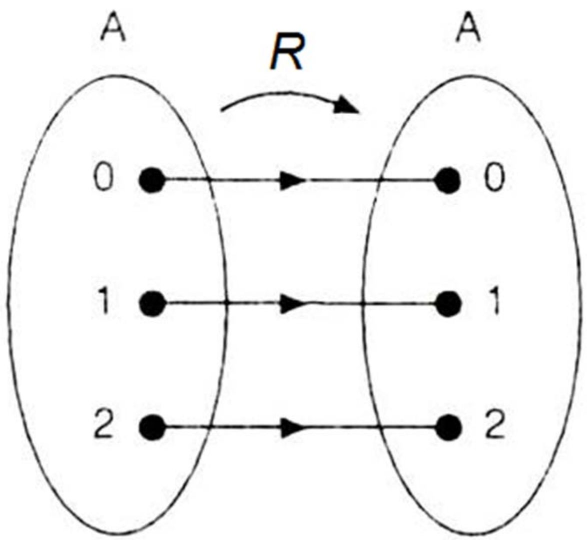
$R^{-1} = \{(a,1), (d,1), (a,2), (b,2), (c,2)\}$



Birim bağıntı

<u>Birim Bağıntı:</u> AxA kümesinde tanımlı bir β bağıntısı olsun $(\beta \subseteq (AxA))$. Bağıntı β, sadece ve sadece AxA'nın köşegen elemanlarından oluşuyorsa, β bağıntısı birim bağıntıdır. I_A ile gösterilir. I_A = { (x,x): x∈ A} olur.

ÖRNEK:
A={0, 1, 2} olsun. Birim bağıntı I_A = R = {(0, 0), (1, 1), (2, 2)} olur. $(I_A \subseteq (AxA))$



Bağıntı Özellikleri: Yansıma, Simetri, Ters Simetri ve Geçişkenlik

* Yansıma $\beta \subseteq (AxA)$

A da tanımlı bir β bağıntısı eğer A nın her elemanını kendisi ile eşliyorsa yansıma bağıntısıdır. Yani her $a \in A$ için $(a, a) \in \beta$ ise bağıntının yansıma özelliği vardır.

Örneğin $A = \{a, b, c\}$ ise A da tanımlı, yani $A \times A$ nın altkümesi olan bir bağıntının yansıyan olması için, mutlaka $(a, a), (b, b)$ ve (c, c) sıralı ikililerini içermesi gerekir.

A={1, 2, 3, 4} olsun. $\beta \subseteq (AxA)$ ise;

a) β_1={(1,1), (2,2), (2,4), (3,1), (3,4), (4,4), (4,2)} yansıyan değildir. $\left((3,3) \notin \beta_1\right)$
b) β_2={(1,1), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (4,4), (4,2)} yansıyandır. (Tüm köşegen elemanlar var)

Bağıntı Özellikleri: Yansıma, Simetri, Ters Simetri ve Geçişkenlik

* Simetri $\beta \subseteq (AxA)$

A da tanımlı bir bağıntıda, bağıntıdaki her (a,b) için (b,a) da bağıntının elemanı ise bu bağıntı simetriktir. Yani bağıntının içindeki her ikilinin tersi de bağıntıda bulunmalı. Bir tanesinin bile tersi yoksa simetri özelliği yoktur.

$$\beta = \{(1,a),(2,b),(3,b),(a,1),(b,2)\}$$

Yukarıdaki bağıntıda $(3,b)$ nin tersi olmadığı için simetri özelliği yoktur.

$$\beta = \{(1,1)\}$$

Yukarıdaki bağıntı simetriktir. Çünkü $(1,1)$ in tersi kendisidir. Simetri tanımında her (a,b) ikilisi derken $a \neq b$ şartı olmadığına dikkat edelim.

Bağıntı Özellikleri: Yansıma, Simetri, Ters Simetri ve Geçişkenlik

* Ters Simetri $\beta \subseteq (AxA)$

A da tanımlı bir bağıntıda (a,b) ve (b,a) bağıntı da ise $a=b$ olmalıdır. Yani $a \neq b$ iken (a,b) varsa tersi (b,a) bağıntıda olmamalıdır. Farklı elemanları birbirine bağlayan sıralı ikililerden hiçbirinin tersi olmayacak. Birinin bile tersi varsa, bağıntı ters simetrik değildir.

$$\beta = \{(a,b),(a,c),(b,a)\}$$

Yukarıdaki bağıntı ters simetrik değildir, çünkü (a,b) nin tersi var, aynı şekilde simetrik de değildir, çünkü (a,c) nin tersi yok. Bir bağıntı ne simetrik ne ters simetrik olmayabilir. Simetrik olmayan ters simetriktir gibi bir sonuç çıkarmak yanlış olur.

Tanımın (a,a) gibi ikililerin bağıntıda olmasına izin verdiğine dikkat edelim. Örneğin $\beta = \{(a,a),(b,b)\}$ bağıntısı hem simetrik hem de ters simetriktir.

Bağıntı Özellikleri: Yansıma, Simetri, Ters Simetri ve Geçişkenlik

* Geçişme $\beta \subseteq (AxA)$

Geçişme özelliği için, A kümesinde tanımlı bir bağıntı (a,b) ve (b,c) ikililerini içeriyorsa, (a,c) ikilisi de o bağıntının elemanı olmalıdır.

$$\beta_1 = \{(a,b),(b,c),(a,c)\}$$
$$\beta_2 = \{(a,b),(a,c)\}$$

İlk bağıntı tam da tanımın istediğini yapıyor. Yani (a,b) ve (b,c) ikilileri gördüğümüz an geçişme olabilmesi için (a,c) yi arıyoruz. Ancak ikinci bağıntı da geçişkendir. Çünkü geçişme özelliğinin tanımına uyuyor. Tanım (a,b) ve (b,c) türü ikililer bağıntıda olacak demiyor. Bunlar varsa (a,c) de olacak diyor. Dolayısıyla böyle bir durum yoksa, yani bir ikilinin ikinci elemanı ile başlayan başka bir sıralı ikili yoksa bağıntı zaten geçişkendir.

Örnek: A={1,2,3} kümesi üzerinde tanımlı bazı bağıntılar verilmiştir.

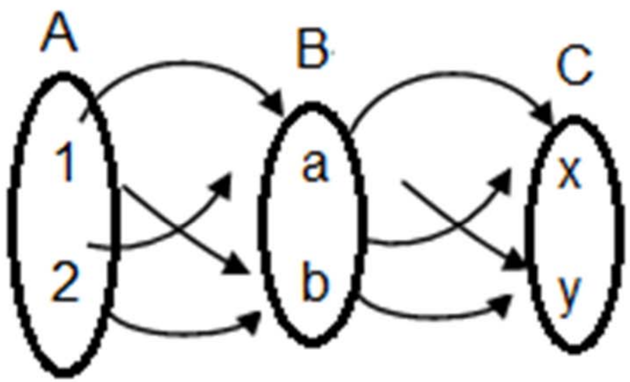
Bağıntılar	Yansıma	Simetri	Ters Simetri	Geçişme
β_1={(1,1),(2,2),(3,3)}	var	var	var	var
β_2={(2,2),(1,1),(1,3),(3,1)}	yok	var	yok	yok
β_3={(1,1),(2,2),(3,3),(1,2)}	var	yok	var	var
β_4={(1,1),(2,2),(3,2),(1,3)}	yok	yok	var	yok
β_5={(1,1),(2,1),(1,2),(3,1)}	yok	yok	yok	yok
β_6={(2,1),(1,2),(1,1),(2,2)}	yok	var	yok	var
β_7={(1,1)}	yok	var	var	var
β_8={(2,3)}	yok	yok	var	var

$\beta_2 = \{(2,2),(1,1),(1,3),(3,1)\}$ geçişkenlik aramada tüm sıralı ikililer aranmalıdır.

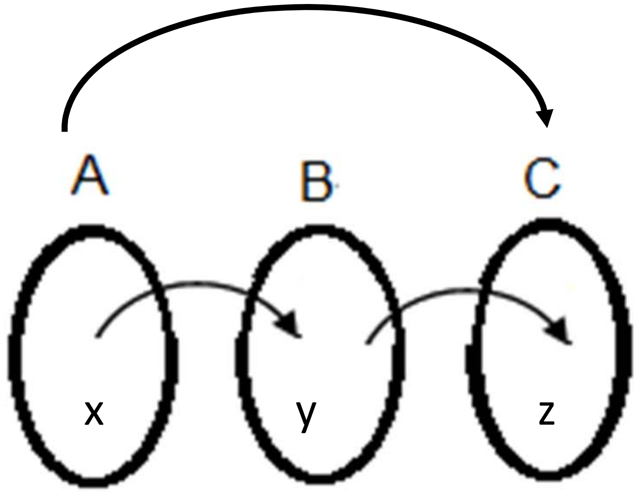
(2,2) (1,1) (1,1) (3,1) (3,1)
(2,2) (1,1) (1,3) (1,1) (1,3)

Bağıntıların Bileşkesi (Combining Relations):

A, B ve C kümeleri 3 farklı küme olsun. A'dan B'ye (A ile B arasında) bir bağıntı β_1 olsun. B'den C'ye (B ile C arasında) bir bağıntı ise β_2 olsun. Bu durumda A'dan C'ye (A ile C arasında) bir bağıntı $\beta_1 \circ \beta_2$ ile gösterilir. $\beta_1 \circ \beta_2$ bağıntısı, β_1 ve β_2'nin bileşkesi olur.



$$\beta_1 \circ \beta_2$$



$$\beta_1 \circ \beta_2 = \{(x,z) : (x,y) \in \beta_1 \wedge (y,z) \in \beta_2\}$$

Bağıntıların Kesişimi ve Birleşimi (Intersection and Union of Relations):

A kümesinden B kümesine (A ile B arasında) bir bağıntı β_1 ve C kümesinden D kümesine (C ile D arasında) bir bağıntı β_2 olsun. Bu 2 bağıntının kesişim ($\beta_1 \cap \beta_2$) ve birleşimi de (β_1 U β_2) birer bağıntıdır.

A kümesinden B kümesine (A ile B arasında) 2 farklı bağıntı β_1 ve β_2 olsun. Bu 2 bağıntının kesişim ve birleşimi de birer bağıntıdır.

$$\beta_1 \subseteq AxB \quad \text{ve} \quad \beta_2 \subseteq AxB \quad \text{ise} \quad \beta_1 \cap \beta_2 \subseteq AxB$$

$$\beta_1 \subseteq AxB \quad \text{ve} \quad \beta_2 \subseteq AxB \quad \text{ise} \quad \beta_1 \cup \beta_2 \subseteq AxB$$

A kümesi üzerinde tanımlı 2 farklı β_1 ve β_2 bağıntıları olsun.

1) Hem β_1 hem de β_2 yansıyan ise→ ($\beta_1 \cap \beta_2$) ve (β_1 U β_2) her ikisi birden yansıyandır.

2) Hem β_1 hem de β_2 simetrik ise → ($\beta_1 \cap \beta_2$) ve (β_1 U β_2) her ikisi birden simetriktir.

3) Hem β_1 hem de β_2 ters simetrik ise → ($\beta_1 \cap \beta_2$) ters simetriktir ancak (β_1 U β_2) ters simetrik olmayabilir.

4) Hem β_1 hem de β_2 geçişli ise → ($\beta_1 \cap \beta_2$) geçişlidir ancak (β_1 U β_2) geçişli olmayabilir.

Eşdeğerlik Bağıntısı (Denklik) ve Denklik sınıfları:
(Equivalence Relations and Equivalence Classes) :

A={1, 2, 3} kümesinde tanımlı
$\beta \subseteq (AxA) = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$ bağıntısı verilmiştir. Bağıntının özelliklerini inceleyiniz.

a) (1,1), (2,2), (3,3) ∈β → β yansıyan
b) (1,2)-(2,1) ∈β → β simetrik
c) (1,2)-(2,1)→(1,1) ∈β ve (2,1)-(1,2)→(2,2) ∈β →βgeçişli

Tanım:
A kümesinde tanımlı bir β bağıntısı olsun. Eğer β bağıntısı;

(yansıyan + simetrik + geçişli) ise,

β bağıntısına A kümesi üzerinde bir eşdeğerlik bağıntısı (denklik bağıntısı) denir.

Eşdeğerlik Bağıntısı ve Denklik sınıfları:

Bağıntı β, A kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olmak üzere; (x,y) $\in$β ise, y elemanı x elemanına β bağıntısı ile denktir. Bu şekildeki y elemanlarının oluşturduğu kümeye x'in denklik sınıfı denir ve $\overline{x} = [x]$ ile gösterilir.

$$\overline{x} = \{y : y \in A \wedge (x,y) \in \beta\} \quad \text{ve} \quad \overline{x} \subseteq A$$

Bölmeleme:

Bağıntı β'de tüm denklik sınıflarından oluşan kümeye A'nın bölmelemesi veya denklik bölükleri kümesi denir. A / β ile gösterilir.

A={1, 2, 3} kümesinde tanımlı β={(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)} bağıntısı verilmiştir. Bağıntının denklik bağıntısını olduğu görülmüştür. Denklik bağıntısı olduğuna göre denklik sınıflarını ve denklik bölükleri kümesini yazınız.

Denklik sınıfları →

1'in denklik sınıfı $\overline{1}$ ={1,2}

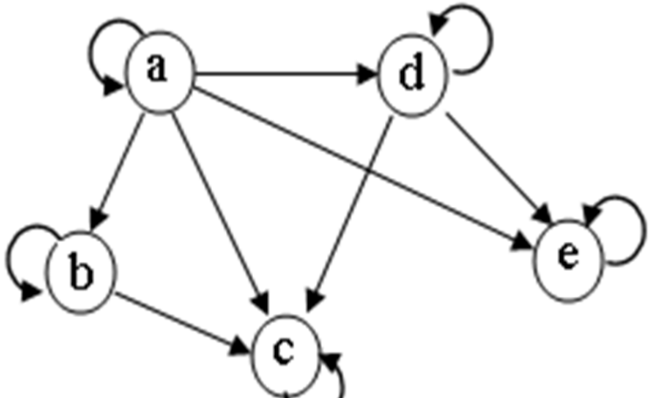
2'nin denklik sınıfı $\overline{2}$ ={1,2}

3'nin denklik sınıfı $\overline{3}$ ={3}

Denklik bölükleri kümesi →

$$A/\beta = \{\{1,2\},\{3\}\}$$

<u>Sıra (Sıralama) bağıntısı:</u>
(Partial Ordering Relations)
A={a, b, c, d, e} ise digraphı verilen β bağıntısının özelliklerini inceleyiniz. $\beta \subseteq (AxA)$



Bağıntı β={(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,c),(d,c),(d,e)}
a) (a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e) ∈β → β yansıyan

b) (a,b) ∈β - (b,a) ∉ β (b,c) ∈β - (c,b) ∉ β (a,c) ∈β - (c,a) ∉ β	(a,d) ∈β - (d,a) ∉ β (a,e) ∈β - (c,a) ∉ β (d,c) ∈β – (c,d) ∉ β (d,e) ∈β – (e,d) ∉ β→β ters simetrik

c) (a,b) ∈β, (b,c) ∈β →(a,c) ∈β
(a,d) ∈β, (d,c) ∈β →(a,c) ∈β
(a,d) ∈β, (d,e) ∈β →(a,e) ∈β →β geçişli

Tanım: A kümesi üzerinde bir β bağıntısı olsun. Eğer β bağıntısı;
(yansıyan + ters simetrik + geçişli) ise,
β bağıntısına A kümesi üzerinde bir kısmi parçalı sıra bağıntı denir. A kümesine de kısmi parçalı sıra küme denir. Parçalı sıra bağlantı ≤ ile gösterilir. a≤b →a elemanı b elemanından önce gelir anlamındadır.

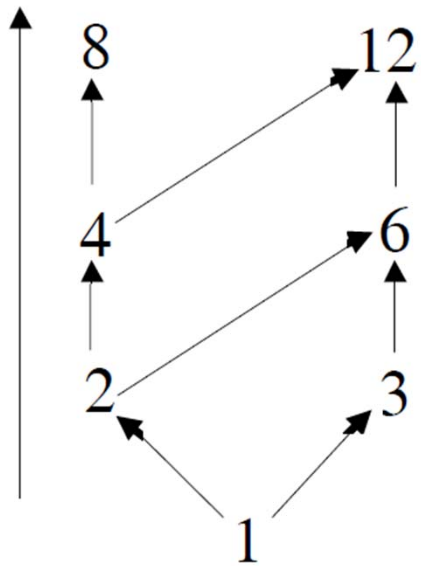
Hasse Diyagramı:

A={1,2,3,4,6,8,12} kümesinde

$\beta \subseteq (AxA) = \{(x,y): x,y \in A \; ve \; x, y'yi \; tam \; böler\}$ kuralına göre β bağıntısı verilmiştir. Bağıntı bir kısmi parçalı sıra bağıntısıdır.

β={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,6),(1,8),(1,12),(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(2,12),(3,3),(3,6),(3,12),(4,4),(4,8),(4,12),(6,6),(6,12),(8,8),(12,12)} olur.

Bağıntı matrisi gibi kısmı parçalı sıra bağıntıdaki sıralı ikilileri bir düzlemde birleştiren yani sıralı çiftlerin bağlantılarını yönlü oklarla gösteren diyagrama Hasse diyagramı denir. Hasse diyagramında (x,x) sıralı ikililerinin bağlantıları gösterilmez. Sıralı ikililerden en önde gelen eleman en alta konulur ve bağlantısı olan elemanlarla birleştirilir. Bağıntının Hasse diyagramı çizilecek olursa;



En büyük ve en küçük eleman (Minimum and Maximum element):

A kümesi üzerinde bir β sıralama bağıntısı olsun. B kümesi ise A kümesinin alt kümesi olsun. $\varnothing \neq B \subset A$ iken;

$\forall x \in B$ için $b_1 \leq x$ olacak şekilde bir $b_1 \in B$ varsa b_1'e B'nin en küçük elemanı veya minimalı denir.

$\forall x \in B$ için $x \leq b_2$ olacak şekilde bir $b_2 \in B$ varsa b_2'ye B'nin en büyük elemanı veya maximalı denir.

ÖRNEK:

A={a, b, c, d, e, f} , B={b, c, d} ve

$\beta \subseteq (AxA)$ ={(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(a,c),(a,d),(a,e),(b,c),(b,d),(b,e),(c,d),(c,e)}

olsun. B kümesinin en küçük ve en büyük elemanı nedir?

Bağıntı β sıralama bağıntısı mı ona bakmak lazım. Bağıntı β (yansıyan + ters simetrik + geçişli) olduğuna göre sıralama bağıntısıdır

$\varnothing \neq B \subset A$ olduğundan B kümesi için en küçük ve en büyük elemanı bulabiliriz.

$b \leq b$	$b \leq d$
$b \leq c$	$c \leq d$
$b \leq d$	$d \leq d$
$B_{EK} = b$	$B_{EB} = d$

EK için;
B={b, c, d}

(b,....)	(c,....)	(d,.....)
(b,b) – var	(c,b) – yok	(d,b) – yok
(b,c) – var	(c,c) – var	(d,c) – yok
(b,d) – var	(c,d) – var	(d,d) – var

EB için;
B={b, c, d}

(...., d)
(b,d) – var
(c,d) – var
(d,d) – var