MATEMATİK - 2

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2021

3.3.3. D'Alembert Oran Kriteri

Teorem 3.3.3.1. *Pozitif terimli* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *serisi için* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$ *olsun.*

Bu durumda:

(1) $D < 1$ *ise seri yakınsaktır.*

(2) $D > 1$ *ise seri ıraksaktır.*

(3) $D = 1$ *ise D'Alembert Oran Kriterine göre serinin karakteri için kesin bir şey söylenemez.*

Örnek 3.3.3.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ serilerinin karakterini belirlemek için Oran Kriterini uygulayalım: İlk seri için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

elde edilir. Bu seri ıraksak ve D =1 dir. Benzer şekilde ikinci seri için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=1$$

elde edilir. Bu seri yakınsak fakat $D=1$ dir. Yani p nin her iki değeri için $D=1$ olmasına rağmen verilen seri $p=1$ için ıraksak, $p=2>1$ için yakınsaktır.

Yani yakınsak ve ıraksak seriler için Oran Kriterine göre $D=1$ bulunabilir. Buradan $D=1$ olması serinin karakterinin belirlenmesi konusunda belirleyici olmaz sonucuna varılabilir.

Örnek 3.3.3.2. Aşağıdaki serilerin karakterlerini belirleyiniz.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n^2}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1.3.5\ldots(2n-1)}$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n.n!}{n^n}$

Çözüm.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}}\right)=\frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{3}<1$ dir.

Bu durumda Oran Kriteri gereği $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ serisi yakınsaktır.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{(n+1)!}{5^{n+1}}}{\frac{n!}{5^n}}\right)=\frac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\to\infty$ dur.

Bu durumda Oran Kriteri gereği $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ serisi ıraksaktır.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1$ dir.

Bu durumda Oran Kriteri gereği $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ serisi ıraksaktır.

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^4 e^{-(n+1)^2}}{n^4 e^{-n^2}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \cdot \frac{1}{e^{2n+1}}\right) = 0 < 1$ dir.

Bu durumda Oran Kriteri gereği $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n^2}$ serisi yakınsaktır.

(5) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{(n+1)!}{1.3.5...(2n-1)(2n+1)}}{\frac{n!}{1.3.5...(2n-1)}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} < 1$ dir.

Bu durumda Oran Kriteri gereği $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1.3.5...(2n-1)}$ serisi yakınsaktır.

(6) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{2^{n+1}.(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n.n!}{n^n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\right) = \frac{2}{e} < 1$ dir.

Bu durumda Oran Kriteri gereği $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n.n!}{n^n}$ serisi yakınsaktır.

3.3.4. Cauchy Kök Kriteri

Teorem 3.3.4.1. *Pozitif terimli* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *serisi için* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$ *olsun. Bu durumda*

(1) $c < 1$ *ise seri yakınsaktır.*

(2) $c > 1$ *ise seri ıraksaktır.*

(3) $c = 1$ *ise Cauchy Kök Kriterine göre serinin karakteri için kesin bir şey söylenemez.*

Örnek 3.3.4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n}}$ serilerinin karakterlerini belirlemek için Cauchy Kök Kriteri uygulayalım:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi $p = 2$ serisi olduğundan yakınsaktır.

$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n}}$ serisi ise $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$ olduğundan ıraksaktır.

Biri yakınsak, diğeri ıraksak olan bu iki seri için $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$ ve $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{\frac{1}{n}}} = 1$ olduğundan $C = 1$ dir. Yani yakınsak ve ıraksak seriler için Cauchy Kök Kriterine göre $C = 1$ bulunabilir. Buradan $C = 1$ olması serinin karakterinin belirlenmesi konusunda belirleyici olmaz sonucuna varılabilir.

Uyarı 3.3.4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *serisi için* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$ *ve* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = C$ *ise* $D = C$ *dir.*

Örnek 3.3.4.2. Aşağıdaki serilerin karakterlerini belirleyiniz.

(1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{n^n}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{n}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan \frac{1}{n}\right)^{n}$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{\pi}{e}\right)^{n}$

Çözüm.

(1) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0<1$ dir.

Bu durumda Cauchy Kök Kriteri gereği $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$ serisi yakınsaktır.

(2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^{3n+1}}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{3+\frac{1}{n}}}{n}=0<1$ dir.

Bu durumda Cauchy Kök Kriteri gereği $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n+1}}{n^n}$ serisi yakınsaktır.

(3) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1$ dir.

Bu durumda Cauchy Kök Kriteri gereği $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ serisi ıraksaktır.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right) = \frac{1}{2} < 1$ dir.

Bu durumda Cauchy Kök Kriteri gereği $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$ serisi yakınsaktır.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\arctan\frac{1}{n}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\arctan\frac{1}{n}\right) = 0 < 1$ dir.

Bu durumda Cauchy Kök Kriteri gereği $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan\frac{1}{n}\right)^n$ serisi yakınsaktır.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{\pi}{e}\right)^n} = \frac{\pi}{e} \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{e} > 1$ dir.

Bu durumda Cauchy Kök Kriteri gereği $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.\left(\frac{\pi}{e}\right)^n$ serisi ıraksaktır.

KAYNAKLAR:

1. **Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA,** Analiz III Diziler ve Seriler, Dizgi Ofset, 2017.
2. **G. B. Thomas ve Ark.,** Thomas Calculus I, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.