Bağıntı ve Fonksiyon

Ders 4

4-1

Konular

Bağıntılar
- Giriş
- Küme İçi Bağıntılar
- Özel Bağıntılar

Fonksiyonlar
- Giriş
- Güvercin Deliği İlkesi
- Rekürsiyon

4-2

Bağıntı

Tanım

bağıntı: $\alpha \subseteq A \times B \times C \cdots \times N$

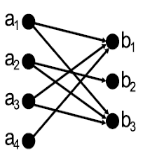
- bağıntının her bir elemanı bir çoklu
- iki küme üzerindeyse: *ikili bağıntı*
  $\alpha \subseteq A \times B$
- gösterilim:
  - çizerek
  - matrisle

Bağıntı Örneği

Örnek

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, B = \{b_1, b_2, b_3\}$

$\alpha = \{(a_1, b_1), (a_1, b_3), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_3, b_1), (a_3, b_3), (a_4, b_1)\}$



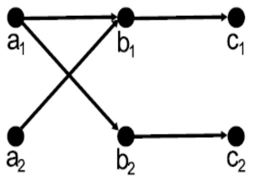
	b_1	b_2	b_3
a_1	1	0	1
a_2	0	1	1
a_3	1	0	1
a_4	1	0	0

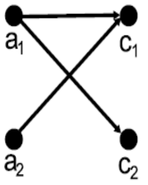
$$M_\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Bağıntı Bileşkesi

Tanım
bağıntı bileşkesi:
$\alpha \subseteq A \times B \wedge \beta \subseteq B \times C$
$\Rightarrow \alpha\beta = \{(a, c) | a \in A, c \in C, \exists b \in B[a\alpha b \wedge b\beta c)]\}$

- $M_{\alpha\beta} = M_\alpha \times M_\beta$





Bileşke Matris Örneği

$$M_\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad M_\beta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad M_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Birleşme Özelliği

Teorem

$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) = \alpha\beta\gamma$

Tanıt.

$$
\begin{array}{ll}
 & < a,d > \in (\alpha\beta)\gamma \\
\Leftrightarrow & \exists c(< a,c > \in \alpha\beta \wedge < c,d > \in \gamma) \\
\Leftrightarrow & \exists c(\exists b(< a,b > \in \alpha \wedge < b,c > \in \beta) \wedge < c,d > \in \gamma) \\
\Leftrightarrow & \exists b((< a,b > \in \alpha) \wedge \exists c(< b,c > \in \beta \wedge < c,d > \in \gamma) \\
\Leftrightarrow & \exists b(< a,b > \in \alpha \wedge < b,d > \in \beta\gamma) \\
\Leftrightarrow & < a,d > \in \alpha(\beta\gamma)
\end{array}
$$

$\square$

4-7

Bileşke Özelliği

- $\alpha, \delta \subseteq A \times B \wedge \beta, \gamma \subseteq B \times C$
  - $\alpha(\beta \cup \gamma) = \alpha\beta \cup \alpha\gamma$
  - $\alpha(\beta \cap \gamma) \subseteq \alpha\beta \cap \alpha\gamma$
  - $(\alpha \cup \delta)\beta = \alpha\beta \cup \delta\beta$
  - $(\alpha \cap \delta)\beta \subseteq \alpha\beta \cap \delta\beta$
  - $(\alpha \subseteq \delta \wedge \beta \subseteq \gamma) \Rightarrow \alpha\beta \subseteq \delta\gamma$

4-8

Bileşke Özellikleri

$\alpha(\beta \cup \gamma) = \alpha\beta \cup \alpha\gamma.$

$$
\begin{aligned}
& < x, y > \in \alpha(\beta \cup \gamma) \\
\Leftrightarrow\ & \exists z(< x, z > \in \alpha \wedge < z, y > \in (\beta \cup \gamma)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists z(< x, z > \in \alpha \wedge (< z, y > \in \beta \vee < z, y > \in \gamma)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists z((< x, z > \in \alpha \wedge < z, y > \in \beta) \\
& \vee (< x, z > \in \alpha \wedge < z, y > \in \gamma)) \\
\Leftrightarrow\ & < x, y > \in \alpha\beta \vee < x, y > \in \alpha\gamma) \\
\Leftrightarrow\ & < x, y > \in \alpha\beta \cup \alpha\gamma
\end{aligned}
$$

$\square$

Evrik Bağıntı - Ters Bağıntı

Tanım

$\alpha^{-1} : \{< y, x > \mid < x, y > \in \alpha\}$

- $M_{\alpha^{-1}} = M_{\alpha}^{T}$

Evrik Bağıntı Özellikleri

- $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$
- $(\alpha \cup \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cup \beta^{-1}$
- $(\alpha \cap \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cap \beta^{-1}$
- $\overline{\alpha}^{-1} = \overline{\alpha^{-1}}$
- $(\alpha - \beta)^{-1} = \alpha^{-1} - \beta^{-1}$
- $\alpha \subset \beta \Rightarrow \alpha^{-1} \subset \beta^{-1}$

4-11

Evrik Bağıntı Teoremleri

$\overline{\alpha}^{-1} = \overline{\alpha^{-1}}$.

$$
\begin{aligned}
& < x, y > \in \overline{\alpha}^{-1} \\
\Leftrightarrow\ & < y, x > \in \overline{\alpha} \\
\Leftrightarrow\ & < y, x > \notin \alpha \\
\Leftrightarrow\ & < x, y > \notin \alpha^{-1} \\
\Leftrightarrow\ & < x, y > \in \overline{\alpha^{-1}}
\end{aligned}
$$

$\square$

4-12

Evrik Bağıntı Teoremleri

$(\alpha \cap \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cap \beta^{-1}$.

$$\begin{aligned} & <x,y> \in (\alpha \cap \beta)^{-1} \\ \Leftrightarrow\ & <y,x> \in (\alpha \cap \beta) \\ \Leftrightarrow\ & <y,x> \in \alpha \wedge <y,x> \in \beta \\ \Leftrightarrow\ & <x,y> \in \alpha^{-1} \wedge <x,y> \in \beta^{-1} \\ \Leftrightarrow\ & <x,y> \in \alpha^{-1} \cap \beta^{-1} \end{aligned}$$

$\square$

4-13

Evrik Bağıntı Teoremleri

$(\alpha - \beta)^{-1} = \alpha^{-1} - \beta^{-1}$.

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)^{-1} &= (\alpha \cap \overline{\beta})^{-1} \\ &= \alpha^{-1} \cap \overline{\beta}^{-1} \\ &= \alpha^{-1} \cap \overline{\beta^{-1}} \\ &= \alpha^{-1} - \beta^{-1} \end{aligned}$$

$\square$

4-14

Bileşke Evriği

Teorem
$(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$

Tanıt.

$$
\begin{aligned}
& <c, a> \in (\alpha\beta)^{-1} \\
\Leftrightarrow\ & <a, c> \in \alpha\beta \\
\Leftrightarrow\ & \exists b(<a, b> \in \alpha \wedge <b, c> \in \beta) \\
\Leftrightarrow\ & \exists b(<c, b> \in \beta^{-1} \wedge <b, a> \in \alpha^{-1}) \\
\Leftrightarrow\ & <c, a> \in \beta^{-1}\alpha^{-1}
\end{aligned}
$$

$\square$

Bileşke Evriği Matrisi

- $M_{(\alpha\beta)^{-1}} = M_{\beta^{-1}} \times M_{\alpha^{-1}}$
- $M^T_{\alpha\beta} = M^T_{\beta} \times M^T_{\alpha}$

$$M_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Örnek

$$M_{\alpha} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad M_{\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad M_{\alpha\beta^{-1}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Kümeiçi Bağıntı

- $\alpha \subseteq A \times A$
- *birim bağıntı* $E = \{< x, x > | x \in A\}$
- bileşke: $\alpha\alpha = \alpha^2$
  - $\alpha\alpha \dots \alpha = \alpha^n$

Kümeiçi Bağıntı Özellikleri

- yansıma — Yansıyan, reflexive
- bakışlılık — Simetrik
- geçişlilik

Bağıntıların Özellikleri

Tanım: ***R***, *A* kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. O halde ***R***;

i. Tüm a∈*A* için, sadece ve sadece a***R***a ise **yansıyandır.** (reflexive).

ii. a,b∈*A* için a***R***b, sadece ve sadece b***R***a anlamına geliyorsa **simetriktir (bakışlıdır).**

iii. a,b∈*A* için a***R***b ve b***R***a sadece ve sadece a=b anlamına geliyorsa **ters simetriktir (ters bakışlıdır).**

iv. a,b,c∈*A* için a***R***b ve b***R***c sadece ve sadece a***R***c anlamına geliyorsa **geçişlidir** (transitive).

Örnek

- **Örnek:** $A=\{a,b,c,d\}$ ve
  $R=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(b,d),(d,d)\}$
  olsun.

- ***R*** bağıntısı yukarıdaki tanımdaki hiçbir özelliği sağlamaz.
- ***R*** yansıyan değildir çünkü c***R***c değildir; bu nedenle tüm $x \in A$ için x***R***x doğru değildir.
- ***R*** simetrik değildir zira örneğin a***R***c'dir fakat c***R***a değildir.
- ***R*** ters simetrik değildir zira a***R***b ve b***R***a 'dır fakat a=b değildir.
- ***R*** geçişli değildir çünkü a***R***b ve b***R***d 'dir fakat a***R***d değildir.

UYARI

- Verilen digraphlar veya ikili matrisler ile bağıntı özelliklerinin anlaşılması mümkündür.
- Eğer bağıntı yansıyan bağıntı ise ***R*** nin digraphının her noktasından kendisine bir yönlü ok vardır.
- İkili matrisinde ise diyagonal elemanların hepsi 1' dir.
- Eğer ***R*** simetrik ise digraphtaki okların tamamı iki-yönlüdür.
- Ters simetrik ise okların hiçbiri iki yönlü değildir.
- Öte yandan geçişli bağıntıların digraphlarından veya ikili matrislerinden özellik tanımlamak zordur.

Yansıma

yansıma

$\forall a \in A \; [a \alpha a]$

- $E \subseteq \alpha$
- bağıntı matrisinde ana köşegen bütünüyle 1

Yansımasızlık

- $\exists a \in A \; [\neg(a \alpha a)]$
- $\neg(E \subseteq \alpha)$
- bağıntı matrisinde ana köşegende en az bir tane 0

Yansıma Örnekleri

Örnek

$A = \{1, 2\}$

$\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (2, 2)\}$

- $\mathcal{R}_1$ yansımalı

Örnek

$A = \{1, 2, 3\}$

$\mathcal{R}_2 = \{(1, 1), (2, 2)\}$

- $\mathcal{R}_2$ yansımasız

Örnek

$A = \mathbb{Z}$

$(a, b) \in \mathcal{R} \equiv ab \geq 0$

- $\mathcal{R}$ yansımalı

Ters Yansıma

- $\forall a \in A\ [\neg(a \alpha a)]$
- $E \subseteq \overline{\alpha}$
- bağıntı matrisinde ana köşegen bütünüyle 0

Örnek

$A = \{1, 2, 3\}$

$\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$

- $\mathcal{R}$ ters yansımalı

4-23

Bakışlılık - Simetrik

bakışlılık

$\forall a, b \in A$

$a = b \vee (a \alpha b \wedge b \alpha a) \vee [\neg(a \alpha b) \wedge \neg(b \alpha a)]$

$\forall a, b \in A$

$a = b \vee (a \alpha b \Leftrightarrow b \alpha a)$

- $\alpha = \alpha^{-1}$
- bağıntı matrisi ana köşegene göre simetrik: $M_\alpha = M_\alpha^T$

Örnek

$A = \mathbb{Z}$

$(a, b) \in \mathcal{R} \equiv ab \geq 0$

- $\mathcal{R}$ bakışlı

4-24

Bakışsızlık (simetrik değil)

- $\exists a, b \in A$
  $a \neq b \wedge [(a\alpha b \wedge \neg(b\alpha a)) \vee (\neg(a\alpha b) \wedge b\alpha a)]$
- $\exists a, b \in A$
  $a \neq b \wedge [(a\alpha b \vee b\alpha a) \wedge (\neg(a\alpha b) \vee \neg(b\alpha a))]$

Örnek
$A = \{1, 2, 3\}$
$\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$

- $\mathcal{R}$ bakışsız

4-25

Ters Bakışlılık (Ters Simetri)

$$\begin{aligned} & \forall a, b \in A\ [a = b \vee \neg(a\alpha b) \vee \neg(b\alpha a)] \\ \Leftrightarrow\quad & \forall a, b \in A\ [\neg(a\alpha b \wedge b\alpha a) \vee (a = b)] \\ \Leftrightarrow\quad & \forall a, b \in A\ [(a\alpha b \wedge b\alpha a) \Rightarrow (a = b)] \end{aligned}$$

- $\alpha\alpha^{-1} \subseteq E$

Örnek
$A = \{1, 2, 3\}$
$\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2)\}$

- $\mathcal{R}$ bakışlı ve ters bakışlı

4-26

Geçişlilik

geçişlilik

$\forall a, b, c \in A$

$(a\alpha b \wedge b\alpha c) \Rightarrow a\alpha c$

- $\alpha^2 \subseteq \alpha$

Geçişsizlik

- $\exists a, b, c \in A$
  $a\alpha b \wedge b\alpha c \wedge \neg(a\alpha c)$

Örnek

$A = \mathbb{Z}$

$(a, b) \in \mathcal{R} \equiv ab \geq 0$

- $\mathcal{R}$ geçişsiz

Ters Geçişlilik

- $\forall a, b, c \in A$
  $(a\alpha b \wedge b\alpha c) \Rightarrow \neg(a\alpha c)$

Örnek
$A = \{1, 2, 3\}$
$\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$

- $\mathcal{R}$ ters geçişli

4-29

Evrik Bağıntı

Teorem
Yansıma, bakışlılık ve geçişlilik özellikleri evrik bağıntıda korunur.

4-30

Özel Bağıntılar

önce gelen - sonra gelen

$A = \mathbb{Z}$

$(a, b) \in \mathcal{R} \equiv a - b = 1$

- $\mathcal{R}$ ters yansımalı
- $\mathcal{R}$ ters bakışlı
- $\mathcal{R}$ ters geçişli

bitişiklik

$A = \mathbb{Z}$

$(a, b) \in \mathcal{R} \equiv |a - b| = 1$

- $\mathcal{R}$ ters yansımalı
- $\mathcal{R}$ bakışlı
- $\mathcal{R}$ ters geçişli

4-32

Özel Bağıntılar

dar sıra

$A = \mathbb{Z}$

$(a, b) \in \mathcal{R} \equiv a < b$

- $\mathcal{R}$ ters yansımalı
- $\mathcal{R}$ ters bakışlı
- $\mathcal{R}$ geçişli

kısmi sıra

$A = \mathbb{Z}$

$(a, b) \in \mathcal{R} \equiv a \leq b$

- $\mathcal{R}$ yansımalı
- $\mathcal{R}$ ters bakışlı
- $\mathcal{R}$ geçişli

4-33

Özel Bağıntılar

önsıra
$A = \mathbb{Z}$
$(a, b) \in \mathcal{R} \equiv |a| \leq |b|$

- $\mathcal{R}$ yansımalı
- $\mathcal{R}$ bakışsız
- $\mathcal{R}$ geçişli

sınırlı fark
$A = \mathbb{Z}$
$(a, b) \in \mathcal{R} \equiv |a - b| \leq m$

- $\mathcal{R}$ yansımalı
- $\mathcal{R}$ bakışlı
- $\mathcal{R}$ geçişsiz

4-34

Özel Bağıntılar

karşılaştırılabilirlik
$A = \mathcal{U}$
$(a, b) \in \mathcal{R} \equiv (a \subseteq b) \vee (b \subseteq a)$

- $\mathcal{R}$ yansımalı
- $\mathcal{R}$ bakışlı
- $\mathcal{R}$ geçişsiz

kardeşlik

- ters yansımalı
- bakışlı
- geçişli

- bir bağıntı bakışlı, geçişli ve ters yansımalı olabilir mi?

4-35

Eşdeğerlilik

Tanım
eşdeğerlilik bağıntısı: ϵ

- yansımalı
- bakışlı
- geçişli

- eşdeğerlilik sınıfları
- her eleman tek bir eşdeğerlilik sınıfına girer

- eksizsiz örtü: C_ϵ

4-42

Bölmeleme veya Eşdeğerlik Sınıfları

- her eşdeğerlilik bağıntısı tanımlandığı kümeyi ayrık eşdeğerlilik sınıflarına *bölmeler*
- her *bölmeleme* bir eşdeğerlilik bağıntısına karşı düşer

Örnek
$A = \mathbb{Z}$
$(a, b) \in \mathcal{R} \equiv 5 \mid |a - b|$

x *mod* 5 işlemi $\mathbb{Z}$ kümesini yukarıdaki bağıntıya göre 5 eşdeğerlilik sınıfına bölmeler

4-43

Fonksiyon

Tanım

fonksiyon: $f : X \to Y$

$\forall x \in X\ \forall y_1, y_2 \in Y\ (x, y_1), (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

- X: *tanım kümesi*, Y: *değer kümesi*
- $(x, y) \in f \equiv y = f(x)$
- y, x'in f altındaki *görüntüsü*

Birebir Fonksiyon

Tanım

$f : X \to Y$ fonksiyonu birebir:

$\forall x_1, x_2 \in X\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Örnek

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = 3x + 7$

$$\begin{aligned} & f(x_1) &=& f(x_2) \\ \Rightarrow\ & 3x_1 + 7 &=& 3x_2 + 7 \\ \Rightarrow\ & 3x_1 &=& 3x_2 \\ \Rightarrow\ & x_1 &=& x_2 \end{aligned}$$

Karşı Örnek

$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$g(x) = x^4 - x$

$$\begin{aligned} g(0) &= 0^4 - 0 &= 0 \\ g(1) &= 1^4 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Örten Fonksiyon

Tanım

$f : X \to Y$ fonksiyonu örten:

$\forall y \in Y \; \exists x \in X \; f(x) = y$

- $f(X) = Y$

Örnek

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^3$

Karşı Örnek

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$f(x) = 3x + 1$

Bijektif Fonksiyon

Tanım

$f : X \to Y$ fonksiyonu bijektif:

f fonksiyonu birebir ve örten

Altküme Görüntüsü

Tanım

altküme görüntüsü:

$f : X \to Y \wedge X_1 \subseteq X$

$f(X_1) = \{y | y \in Y, x \in X_1 \wedge y = f(x)\}$

Altküme Görüntüsü Özellikleri

- $f : A \to B \wedge A_1, A_2 \subseteq A$:
  - $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
  - $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
  - f birebir ise:
    $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

Örnek

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$

- $f(\mathbb{Z}) = \{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\}$
- $A = \{-2, 1\}$
  $f(A) = \{1, 4\}$

4-48

Fonksiyon Bileşkesi

Tanım

$f : X \to Y, g : Y \to Z$

$g \circ f : X \to Z$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

- değişme özelliği göstermez
- birleşme özelliği gösterir:
  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

4-49

Fonksiyon Bileşkesi Örnekleri

Örnek (değişme özelliği)

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$g(x) = x + 5$

$g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$(g \circ f)(x) = x^2 + 5$

$f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$(f \circ g)(x) = (x + 5)^2$

4-50

Fonksiyon Bileşkesi Teoremleri

Teorem

$f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$:
$f \text{ birebir} \wedge g \text{ birebir} \Rightarrow g \circ f \text{ birebir}$

Tanıt.

$$
\begin{array}{rrcl}
 & (g \circ f)(a_1) & = & (g \circ f)(a_2) \\
\Rightarrow & g(f(a_1)) & = & g(f(a_2)) \\
\Rightarrow & f(a_1) & = & f(a_2) \\
\Rightarrow & a_1 & = & a_2
\end{array}
$$

$\square$

4-51

Fonksiyon Bileşkesi Teoremleri

Teorem

$f : X \to Y, g : Y \to Z$:

f örten $\wedge$ g örten $\Rightarrow$ $g \circ f$ örten

Tanıt.

$\forall z \in Z\ \exists y \in Y\ g(y) = z$

$\forall y \in Y\ \exists x \in X\ f(x) = y$

$\Rightarrow \forall z \in Z\ \exists x \in X\ g(f(x)) = z$

□

4-52

Birim Fonksiyon

Tanım

birim fonksiyon: 1_X

$1_X : X \to X$

$1_X(x) = x$

4-53

Evrilebilir (Ters) Fonksiyon

Tanım

$f : X \to Y$ fonksiyonu evrilebilir:

$\exists g : Y \to X \; g \circ f = 1_X \wedge f \circ g = 1_Y$

Örnek

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = 2x + 5$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(x) = \frac{x-5}{2}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 5) = \frac{(2x+5)-5}{2} = \frac{2x}{2} = x$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{x-5}{2}) = 2\frac{x-5}{2} + 5 = (x - 5) + 5 = x$

4-54

Fonksiyon Evriği

Teorem

Bir fonksiyon evrilebilirse evriği tektir.

Tanıt.

$f : X \to Y$

$g, h : Y \to X$

$g \circ f = 1_X \wedge f \circ g = 1_Y$

$h \circ f = 1_X \wedge f \circ h = 1_Y$

$h = h \circ 1_Y = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = 1_X \circ g = g$

$\square$

Teorem

Bir fonksiyon yalnız ve ancak birebir ve örten ise evrilebilir.

4-55

Evrilebilir (Ters) Fonksiyon

Evrilebilir ise birebirdir.
$f : A \to B$

$$
\begin{aligned}
& a_1, a_2 \in A \wedge f(a_1) = f(a_2) \\
\Rightarrow\ & f^{-1}(f(a_1)) = f^{-1}(f(a_2)) \\
\Rightarrow\ & (f^{-1} \circ f)(a_1) = (f^{-1} \circ f)(a_2) \\
\Rightarrow\ & 1_A(a_1) = 1_A(a_2) \\
\Rightarrow\ & a_1 = a_2
\end{aligned}
$$

□

Evrilebilir ise örtendir.
$f : A \to B$

$$
\begin{aligned}
& b \\
=\ & 1_B(b) \\
=\ & (f \circ f^{-1})(b) \\
=\ & f(f^{-1}(b)
\end{aligned}
$$

□

4-56

Evrilebilir Fonksiyon

Birebir ve örten ise evrilebilir.
$f : A \to B$

- f örten $\Rightarrow \forall b \in B\ \exists a \in A\ f(a) = b$
- $g : B \to A$ fonksiyonu $a = g(b)$ ile belirlensin
- $g(b) = a_1 \neq a_2 = g(b)$ olabilir mi?
- $f(a_1) = b = f(a_2)$ olması gerekir
- olamaz: f birebir

□

4-57

Permutasyonlar

- permutasyon: küme içi bijektif bir fonksiyon

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ p(a_1) & p(a_2) & \dots & p(a_n) \end{pmatrix}$$

- n elemanlı bir kümede $n!$ permutasyon tanımlanabilir

Örnek
$A = \{1, 2, 3\}$

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad p_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Çevrimli Permutasyon

- *çevrimli permutasyon*:
  - elemanların bir altkümesi bir çevrim oluşturuyor
  - diğerleri yer değiştirmiyor

$$(a_i, a_j, a_k) = \begin{pmatrix} \dots & a_i & \dots & a_n & \dots & a_j & \dots & a_k & \dots \\ \dots & a_j & \dots & a_n & \dots & a_k & \dots & a_i & \dots \end{pmatrix}$$

- *transpozisyon*: 2 uzunluklu çevrimli permutasyon

Örnek
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$(1, 3, 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Permutasyon Bileşkesi

- permutasyon bileşkesi değişme özelliği göstermez

Örnek
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\begin{aligned}
(4,1,3,5) \diamond (5,2,3) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \diamond \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\
(5,2,3) \diamond (4,1,3,5) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \diamond \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Çevrimli Permutasyon Bileşkesi

- çevrimli olmayan her permutasyon ayrık çevrimlerin bileşkesi olarak yazılabilir

Örnek
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 2 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix} = (1,3,6) \diamond (2,4,5) \diamond (7,8)$$

Transpozisyon Bileşkesi

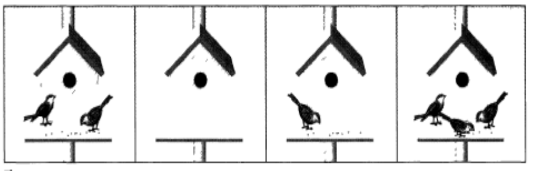
- çevrimli her permutasyon transpozisyon bileşkesi olarak yazılabilir

Örnek
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$(1, 2, 3, 4, 5) = (1, 2) \diamond (1, 3) \diamond (1, 4) \diamond (1, 5)$

4-62

Güvercin Deliği İlkesi



Tanım
güvercin deliği ilkesi (Dirichlet kutuları):
m adet güvercin n adet deliğe yerleşirse ve $m > n$ ise
en az bir delikte birden fazla güvercin vardır

- $f : X \to Y \wedge |X| > |Y|$ ise f birebir bir fonksiyon olamaz
- $\exists x_1, x_2 \in X \; x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$

4-63

Güvercin Deliği İlkesi

Örnek

- 367 kişinin bulunduğu bir yerde en az iki kişinin doğum günü aynıdır
- 0 ile 100 arasında notlar alınan bir sınavda en az iki öğrencinin aynı notu alması için sınava kaç öğrenci girmiş olmalıdır?

Genelleştirilmiş Güvercin Deliği İlkesi

Tanım

genelleştirilmiş güvercin deliği ilkesi:
m adet nesne n adet kutuya dağıtılırsa
en az bir kutuda en az $\lceil m/n \rceil$ adet nesne olur

Örnek

100 kişinin bulunduğu bir yerde en az $\lceil 100/12 \rceil = 9$ kişi aynı ayda doğmuştur

Teorem

$S = \{1,2,3,\ldots,9\}$ kümesinin 6 elemanlı herhangi bir altkümesinde toplamı 10 olan iki sayı vardır.

Güvercin Deliği İlkesi Örneği

Teorem

S kümesi en büyüğü 14 olabilen 6 elemanlı bir pozitif tamsayılar kümesi olsun.
S'nin boş olmayan altkümelerinin elemanlarının toplamlarının hepsi birbirinden farklı olamaz.

Tanıt Denemesi

$A \subseteq S$

s_A : A'nın elemanlarının toplamı

- delik:
  $1 \leq s_A \leq 9 + \cdots + 14 = 69$
- güvercin: $2^6 - 1 = 63$

Tanıt.

$|A| \leq 5$ olan altkümelere bakalım.

- delik:
  $1 \leq s_A \leq 10 + \cdots + 14 = 60$
- güvercin: $2^6 - 2 = 62$

□

4-66

Güvercin Deliği İlkesi Örneği

Teorem

$S = \{1, 2, 3, \ldots, 200\}$ kümesinden seçilecek 101 elemanın içinde en az bir çift vardır ki çiftin bir elemanı diğerini böler.

Tanıt Yöntemi

- $\forall n \; \exists! p \; (n = 2^r p \wedge r \geq 0 \wedge \exists t \in \mathbb{Z} \; p = 2t + 1)$
  olduğu gösterilecek
- bu teorem kullanılarak asıl teorem tanıtlanacak

4-67

Güvercin Deliği İlkesi Örneği

Teorem
$\forall n\ \exists! p\ (n = 2^r p \wedge r \geq 0 \wedge \exists t \in \mathbb{Z}\ p = 2t + 1)$

Varlık Tanıtı.

$n = 1$: $r = 0, p = 1$

$n \leq k$: $n = 2^r p$

$n = k + 1$:

$$\begin{array}{ll} n = 2 : & r = 1, p = 1 \\ n > 2 \wedge n \ asal : & r = 0, p = n \\ \neg(n \ asal) : & n = n_1 n_2 \\ & n = 2^{r_1} p_1 \cdot 2^{r_2} p_2 \\ & n = 2^{r_1 + r_2} \cdot p_1 p_2 \end{array}$$

$\square$

Teklik Tanıtı.

tek değilse:

$$\begin{array}{rcll} n & = & 2^{r_1} p_1 & = 2^{r_2} p_2 \\ & \Rightarrow & 2^{r_1 - r_2} p_1 & = p_2 \\ & \Rightarrow & 2 | p_2 & \end{array}$$

çelişki $\square$

4-68

Güvercin Deliği İlkesi Örneği

Teorem
$S = \{1, 2, 3, \ldots, 200\}$ *kümesinden seçilecek 101 elemanın içinde en az bir çift vardır ki çiftin bir elemanı diğerini böler.*

Her $x \in S$ için

$$x = 2^r p, r \geq 0 \quad \text{ve} \quad obeb(2, p) = 1.$$

Buradan p nin tek olduğu ortaya çıkar.

$$y \in T = \{1, 3, 5, \ldots, 199\} \ \ ve \ \ |T| = 100$$

S kümesinden 101 tane eleman seçildiğinden güvercin deliği ilkesinden dolayı $p \in T$ olmak üzere

$$a = 2^r p \quad ve \quad b = 2^s p$$

gibi iki farklı eleman vardır.

Burada, eğer $r < s$ ise $a|b,$ aksi halde $r > s$ ise $b|a$ dır.

4-69

Rekürsif Fonksiyonlar

Tanım

rekürsif fonksiyon:

kendisi cinsinden tanımlanan fonksiyon

$f(n) = h(f(m))$

- *tümevarımla tanımlanan fonksiyon*:
  her rekürsiyonda boyut azalıyor

$$f(n) = \begin{cases} k & n = 0 \\ h(f(n-1)) & n > 0 \end{cases}$$

Örnek

$$f91(n) = \begin{cases} n - 10 & n > 100 \\ f91(f91(n+11)) & aksi\ halde \end{cases}$$

4-70

Tümevarımla Tanımlanan Fonksiyon Örnekleri

Örnek (faktöryel)

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n \cdot f(n-1) & n > 0 \end{cases}$$

Örnek (fonksiyon kuvveti)

$$f^n = \begin{cases} f & n = 1 \\ f \circ f^{n-1} & n > 1 \end{cases}$$

4-71

Öklid Algoritması

Örnek (ortak bölenlerin en büyüğü)

$$\begin{aligned} obeb(333, 84) &= 3 \cdot 84 + 81 \\ obeb(84, 81) &= 1 \cdot 81 + 3 \\ obeb(81, 3) &= 27 \cdot 3 + 0 \end{aligned}$$

$obeb(333, 84) = 3$

$$obeb(a, b) = \begin{cases} b & b \mid a \\ obeb(b, a \ mod \ b) & b \nmid a \end{cases}$$

4-72

Fibonacci Dizisi

Fibonacci dizisi

$$F_n = fib(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 1 & n = 2 \\ fib(n-1) + fib(n-2) & n > 2 \end{cases}$$

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	...
1	1	2	3	5	8	13	21	...

Leonardo Fibonacci

4-73

Fibonacci Dizisi

Teorem

$\sum_{i=1}^{n} {F_i}^2 = F_n \cdot F_{n+1}$

Tanıt.

$$
\begin{aligned}
n = 2: \quad & \sum_{i=1}^{2} {F_i}^2 &= {F_1}^2 + {F_2}^2 = 1 + 1 = 1 \cdot 2 = F_2 \cdot F_3 \\
n = k: \quad & \sum_{i=1}^{k} {F_i}^2 &= F_k \cdot F_{k+1} \\
n = k+1: \quad & \sum_{i=1}^{k+1} {F_i}^2 &= \sum_{i=1}^{k} {F_i}^2 + {F_{k+1}}^2 \\
& &= F_k \cdot F_{k+1} + {F_{k+1}}^2 \\
& &= F_{k+1} \cdot (F_k + F_{k+1}) \\
& &= F_{k+1} \cdot F_{k+2}
\end{aligned}
$$

$\square$ 4-74

Ackermann Fonksiyonu

Ackermann fonksiyonu

$$
ack(x, y) = \begin{cases} y + 1 & x = 0 \\ ack(x-1, 1) & y = 0 \\ ack(x-1, ack(x, y-1)) & x > 0 \wedge y > 0 \end{cases}
$$

4-75