MATEMATIK 1

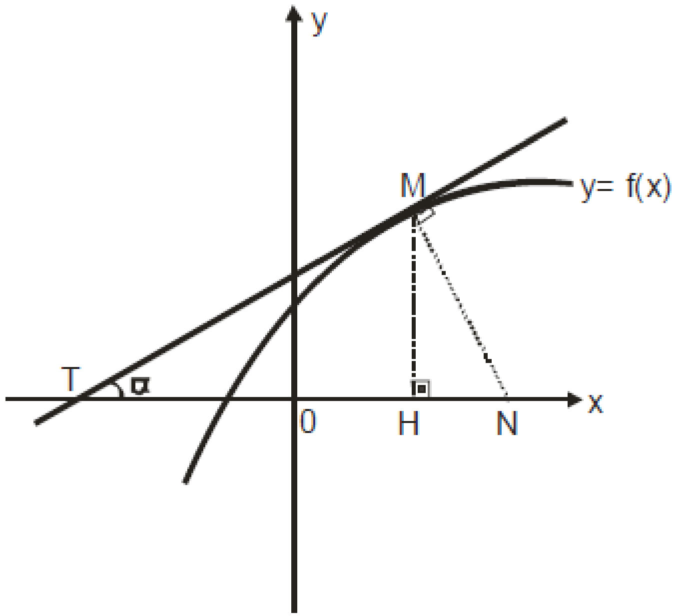
Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2020

7.14. Türevin Geometrik Anlamı

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $x_0 \in (a,b)$ noktasında türevlenebilir fonksiyon ise, bu fonksiyonun grafiğine $(x_0, f(x_0))$ noktasındaki teğetin eğimi, türevin o noktada aldığı değerdir.



Şekil 7.14.1.

$$m = \tan\alpha = f'(x_0) = \frac{|MH|}{|TH|}$$

dır.

$M(x_0, f(x_0))$ noktasındaki teğetin denklemi ise,

$$f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow y = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$$

dır.

Grafikte verilen ve M noktasında teğete dik olan doğruya, bu noktadaki normali denir.

Teğetin eğimi $m_t = f'(x_0)$ olduğundan normalin eğimi $m_n = -\dfrac{1}{f'(x_0)}$ dır ve dolayısıyla normalin denklemi ise,

$$-\frac{1}{f'(x_0)} = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

dır.

Örnek 7.14.1. $f(x)=x^2+3x+5$ fonksiyonunun $x=1$ noktasındaki teğetinin ve normalinin denklemlerini bulunuz.

Çözüm. $x=1$ için $f(1)=1^2+3.1+5=9$ dur. $f'(x)=2x+3 \Rightarrow$ $f'(1)=2.1+3=5$ dir. Bu durumda, $x=1$ noktasındaki teğetin denklemi:

$$y=f(1)+f'(1).(x-1) \Rightarrow y=9+5.(x-1) \Rightarrow y=5x+4$$

dür.

$x=1$ noktasındaki normalin denklemi ise:

$$y=f(1)-\frac{1}{f'(1)}(x-1) \Rightarrow y=9-\frac{1}{5}(x-1) \Rightarrow y=-\frac{x}{5}+\frac{46}{5}$$

dir.

7.15. Türevin Fiziksel Anlamı

Bir hareketlinin gittiği yol $y = f(t)$ kuralı ile verilmiş olsun. Bu durumda,

- Hareketlinin t_0 anındaki hızı:

$$V_0 = f'(t_0) = \frac{dy}{dt}(t_0)$$

dır.

- Hareketlinin t_0 anındaki ivmesi:

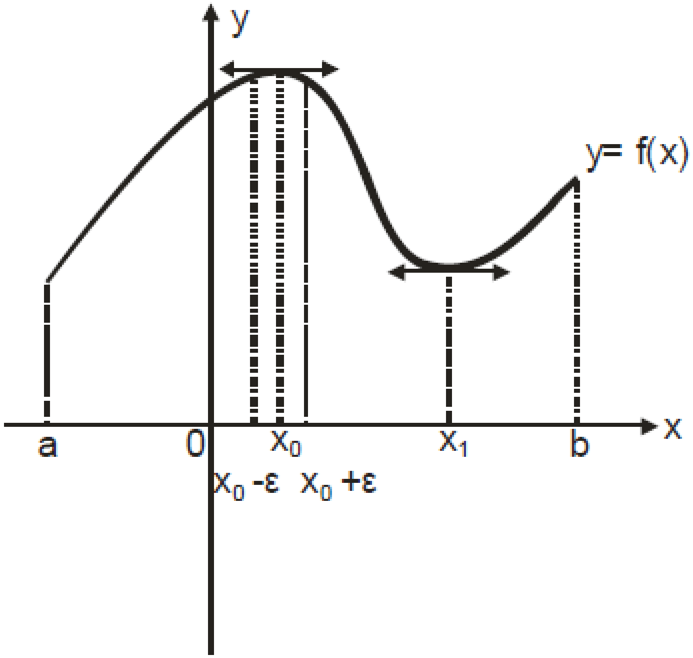
$$a_0 = f''(t_0) = \frac{dv}{dt}(t_0)$$

dır.

7.16. Türevin Bazı Uygulamaları

7.16.1. Maksimum ve Minimum

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonunda $x_0 \in (a,b)$ olmak üzere,



Şekil 7.16.1.1.

- Her $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ için $f(x) < f(x_0)$ olacak şekilde en az bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu x_0 noktasında yerel maksimum değeri alıyor denir ve bu maksimum değer $f(x_0)$ dır.
- Her $x \in (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon)$ için $f(x) > f(x_1)$ olacak şekilde en az bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu x_1 noktasında yerel minimum değeri alıyor denir ve bu minimum değer $f(x_1)$ dir.

Yerel maksimum ve yerel minimum değerlere kısaca yerel ekstremum değerleri denir.

Teorem 7.16.1.1 (Fermat Teoremi). $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında türevli ve $x_0\in(a,b)$ için x_0 noktasında yerel ekstremum değeri varsa, $f'(x_0)=0$ dır. Yani yerel ekstremum değerlerinde grafiğe çizilen teğetler x eksenine paraleldir.

Teorem 7.16.1.2 (Rolle Teoremi). $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli, (a,b) aralığında türevli ve $f(a)=f(b)$ ise en az bir $x_0\in(a,b)$ için $f'(x_0)=0$ dır.

Teorem 7.16.1.3 (Ortalama Değer Teoremi). $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli, (a,b) aralığında türevli ise, en az bir $x_0\in(a,b)$ için $f'(x_0)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ dır.

7.16.2. Artan veya Azalan Fonksiyonlar

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında türevlenebilir olsun.

f fonksiyonunun (a,b) aralığında artan olması için gerek ve yeter şart her $x\in(a,b)$ için $f'(x)>0$ olmasıdır.

f fonksiyonunun (a,b) aralığında azalan olması için gerek ve yeter şart her $x \in (a,b)$ için $f'(x) < 0$ olmasıdır.

f fonksiyonunun (a,b) aralığında sabit olması için gerek ve yeter şart her $x \in (a,b)$ için $f'(x) = 0$ olmasıdır.

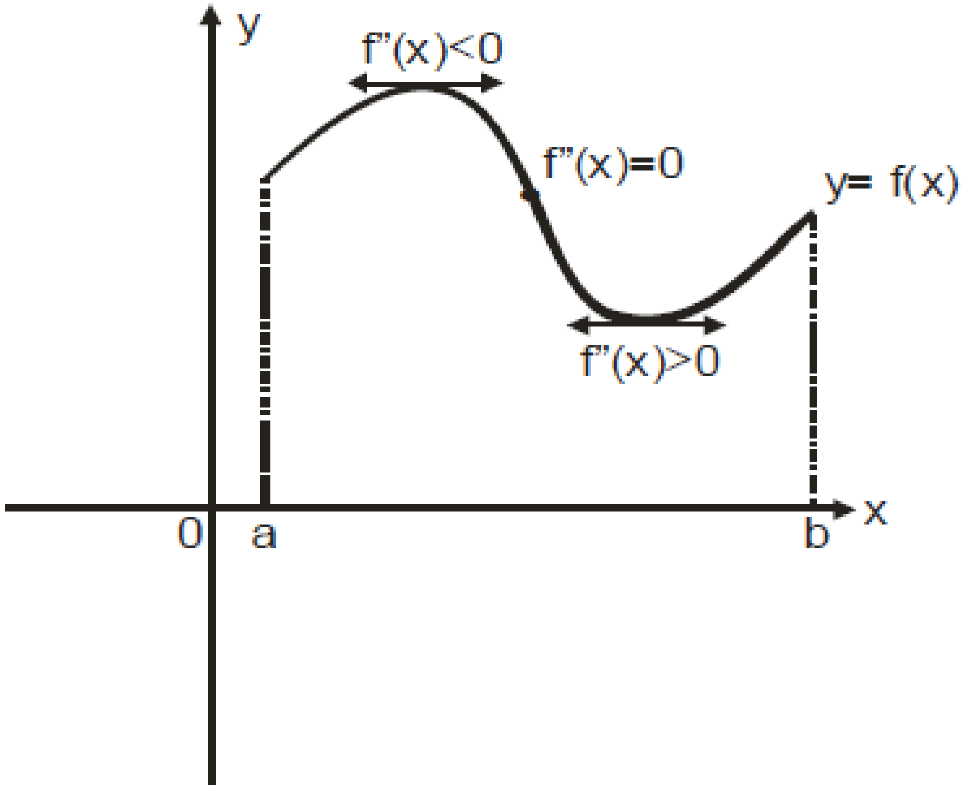
7.16.3. İkinci Türevin Anlamı

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında birinci ve ikinci türevleri mevcut olan bir fonksiyon olmak üzere, $x_1, x_2 \in (a,b)$ için

- $f'(x_1) = 0$ ve $f''(x_1) < 0$ ise, f fonksiyonu x_1 noktasında $f(x_1)$ yerel maksimum değerini alır.
- $f'(x_2) = 0$ ve $f''(x_2) > 0$ ise, f fonksiyonu x_2 noktasında $f(x_2)$ yerel minimum değerini alır.

7.16.4. Dönüm Noktası

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunda $f''(x_0) = 0$ olmak üzere, x_0 ın sağında ve solunda f'' zıt işaretli olacak şekilde $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ aralığı varsa, bu nokta f fonksiyonunun dönüm (büküm) noktasıdır.



Şekil 7.16.4.1.

Örnek 7.16.4.1. $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-4x^2+15x-5$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını ve büküm noktasını bulunuz.

Çözüm. $f'(x)=x^2-8x+15=0$ için $x_1=3$ ve $x_2=5$ dir.

$$x_1=3 \Rightarrow f(3)=\frac{3^3}{3}-4.3^2+15.3-5=13 \ (\text{max})$$

$$x_2=5 \Rightarrow f(5)=\frac{5^3}{3}-4.5^2+15.5-5=\frac{35}{3} \ (\text{min})$$

$f''(x)=2x-8=0$ için $x=4$ olduğundan $(4, f(4))$ noktası dönüm noktasıdır.

Örnek 7.16.4.2. Çevresi 200 br olan dikdörtgenlerden alanı maksimum olan dikdörtgenin alanını hesaplayınız.

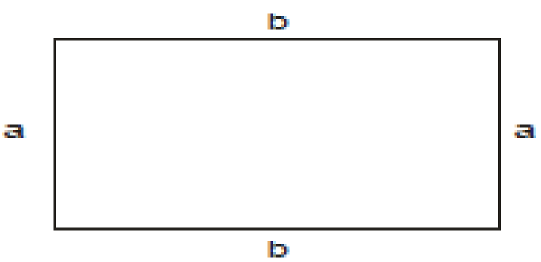
Çözüm.

Kısa kenar a br, uzun kenar b br olsun.

$2(a+b)=200$ olup,

$(a+b)=100$

$b=100-a$ dır.



Şekil 7.16.4.2.

Bu durumda dikdörtgenin alanı:

$$A=a.b=a.(100-a)=100a-a^2$$

dir. $A'(a) = 100 - 2a$ olup, $A' = 0$ ise $a = 50$ dolayısıyla $b = 50$ dir.

O halde, maksimum alanlı dikdörtgenin alanı:

$$A_{\max} = 50.50 = 2500br^2$$

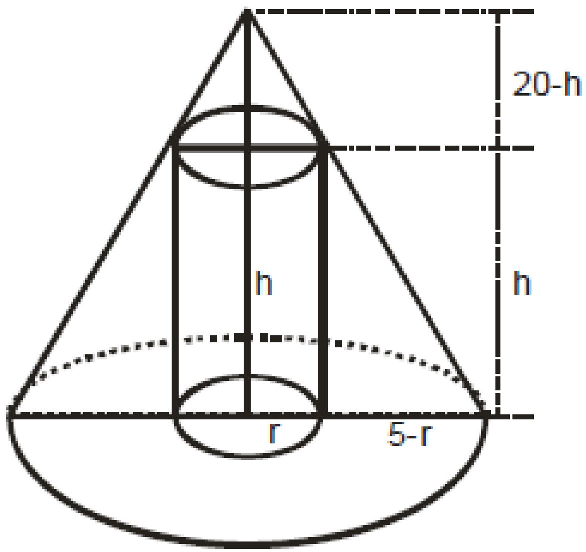
dir.

Örnek 7.16.4.3. Taban çapı 10 cm, yüksekliği 20 cm olan dik koninin içine yerleştirilebilecek maksimum hacimli silindirin hacmini hesaplayınız.

Çözüm.

Taban yarı çapı r ve yüksekliği h olan silindirin hacmi $V=\pi.r^2.h$ dır. Silindir ve koni arasındaki bağıntı:

$$\frac{h}{20}=\frac{5-r}{5}$$



Şekil 7.16.4.3.

Buradan, $h = \frac{20}{5}(5-r) = 4(5-r)$ elde edilir. Bu durumda

$V = 4.\pi.r^2.(5-r)$ dir.

$V' = 4.\pi.(10r - 3r^2)$ olup, $V' = 0$ ise $r_1 = 0$ ve $r_2 = \frac{10}{3}$ dür.

Bulunan değerler ikinci türevde yerine yazılırsa,

$$V''(0) > 0 \text{ ve } V''(\frac{10}{3}) < 0$$

dir. O halde $r = \frac{10}{3}$ için hacim maksimumdur.

$$V_{\max} = \pi . r^2 . h = \pi \left(\frac{10}{3} \right)^2 4 \left(5 - \frac{10}{3} \right) = \frac{2000}{27} br^3$$

elde edilir.

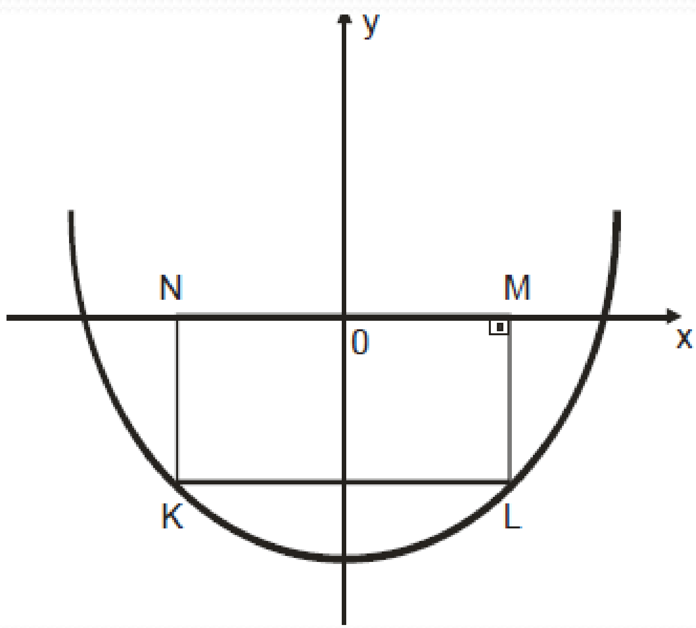
Örnek 7.17.16. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-27$ parabolü veriliyor. Bir kenarı x-ekseni ve iki köşesi parabol üzerinde bulunan dikdörtgenlerden maksimum alanlı olanın alanını hesaplayınız.

Çözüm. K ve L noktaları y-eksenine göre simetrik olduğundan $L(x,-y)$ ise $K(-x,-y)$ dir. Bu durumda:

$|KL|=|MN|=2x$

$|KN|=|LM|=y$

dir.



O halde, dikdörtgenin alanı:

$$A = 2xy = 2x(x^2 - 27) = 2x^3 - 54x$$

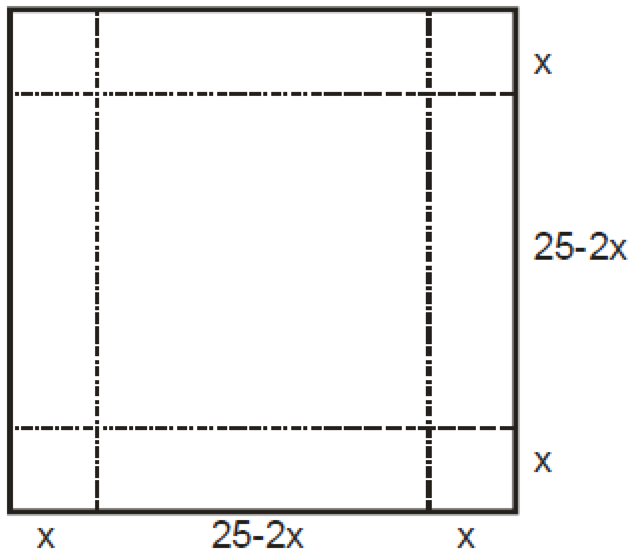
dir. Buradan, $A' = 6x^2 - 54$ dür. $A' = 0$ ise $x = \mp 3$ dür. $x = 3$ ise $y = 18$ olur. Dolayısıyla,

$$A_{\max} = 2.3.18 = 108br^2$$

elde edilir.

Örnek 7.17.17. Bir kenarı 25 cm olan kare şeklindeki karton plakanın köşelerinden kareler kesilerek kalan parça ile üst kısmı açık bir kutu yapılıyor. Bu kutunun hacminin maksimum olması için kesilen karelerin boyutları ne olmalıdır?

Çözüm. Karton plakanın köşelerinden kesilecek olan karelerin bir kenarının x cm olduğunu kabul edelim.



$$V = (25-2x)^2.x = 4x^3 - 100x^2 + 625x$$

$$V' = 12x^2 - 200x + 625$$

$$V' = 0 \text{ ise } x_1 = \frac{25}{6} \text{ ve } x_2 = \frac{25}{2} \text{ dir.}$$

İkinci türev ise $V'' = 24x - 200$ bulunur. Bulunan değerler ikinci türevde yerine yazılırsa $V''\left(\frac{25}{6}\right) < 0$ ve $V''\left(\frac{25}{2}\right) > 0$ elde edilir. Bu durumda maksimum hacimli bir kutu yapmak için kesilecek karelerin bir kenarının uzunluğu $x = \frac{25}{6}$ cm olmalıdır.

Kaynaklar:

1. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus I**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.
2. Prof. Dr. C. Çinar, Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, Prof. Dr. A. S. Kurbanlı, Prof. Dr. D. Şimşek, **Genel Matematik**, Dizgi Ofset, 2013.
3. Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, **Analiz III Diziler ve Seriler,** Dizgi Ofset, 2017.
4. H. İ. Karakaş, **Matematiğin Temelleri, Sayı Sistemleri ve Cebirsel Yapılar,** ODTÜ yayınları, 2011.