MATEMATİK - 2

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2021

3.3. Pozitif Terimli Seriler İçin Yakınsaklık Kriterleri

Her seri için s_n kısmi toplamını en sade şekilde yazmak, yani limitini alabileceğimiz duruma dönüştürmek mümkün olmayabilir. Böyle durumlarda serilerin karakteri hakkında bir şeyler söylemek için (s_n) kısmi toplamlar dizisinin limitinin mevcut olup olmadığının incelenmesi mümkün olmaz. Bu nedenle serilerin karakterlerinin belirlenmesi için farklı kriterlere ihtiyaç vardır.

Tanım 3.3.1. *Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $a_n > 0$ *ise* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *serisine pozitif terimli seri denir.*

Bu kısımda pozitif terimli seriler için kullanılan yakınsaklık kriterlerini inceleyeceğiz. Karakterlerinin incelenmesi bakımından, negatif terimli seriler ile herhangi bir terimden itibaren sabit işaretli olan seriler pozitif terimli seriler gibi düşünülebilir. Çünkü negatif terimli bir serinin terimleri -1 parantezine alınarak aynı karakterde olan pozitif terimli bir seri elde edilir. Benzer şekilde bir seride belirli bir terimden itibaren terimler sabit işaretli ise sabit işaretli olmayan terimler seriden atılmak suretiyle sabit işaretli ve ilk seri ile aynı karakterde olan yeni bir seri elde edilebilir.

Uyarı 3.3.1. *Pozitif terimli serilerin kısmi toplamlar dizisi* ***monoton artan*** *olduğundan bu serilerin yakınsak olduğunu göstermek için kısmi toplamlar dizisinin* ***üstten sınırlı*** *olduğunu göstermek yeterlidir.*

3.3.1. İntegral Kriteri

Teorem 3.3.1.1. (Cauchy İntegral Kriteri)

(a_n) *pozitif terimli monoton azalan bir dizi ve* $f:[1,\infty) \to \mathbb{R}^+$ *fonksiyonu da monoton azalan, sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $f(n) = a_n$ *ise genel terimi* a_n *olan serinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart* $\int_1^{\infty} f(n)dn$ *integralinin mevcut olmasıdır.*

$\left(\int_1^{\infty} f(n)dn\right)$

Tanım 3.3.1.1. $p > 0$ *için tanımlanan* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *serisine p-serisi veya Riemann serisi denir. Özel olarak* $p = 1$ *için elde edilen* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *serisine ise harmonik seri adı verilir.*

Uyarı 3.3.1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}, \ \ldots, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+k}$ *serileri de harmonik seridir. Çünkü bu seriler ile* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *serisi arasında sonlu sayıda terim farkı vardır.*

(1) $p \leq 1$

(2) $p > 1$

Örnek 3.3.1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

Çözüm. Öncelikle $p = 1$ için elde edilen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik serinin karakterini belirleyelim. Bu seride $f(n) = \frac{1}{n}$ dir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n} > 0$ olduğundan harmonik seri pozitif terimli bir seridir. Ayrıca $f'(n) = -\frac{1}{n^2}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f'(n) < 0$ olduğundan $f(n) = \frac{1}{n}$ fonksiyonu azalandır. Yani harmonik serinin karakterini belirlemek için İntegral Kriteri kullanılabilir.

$\ln n \Big|_1^k = \ln k - \ln 1 = \ln k$

$$\int_1^\infty f(n)dn = \int_1^\infty \frac{dn}{n} = \lim_{k\to\infty}\left(\int_1^k \frac{dn}{n}\right) = \lim_{k\to\infty}(\ln k - \ln 1) \to \infty$$

olduğundan harmonik seri İntegral Kriteri gereği ıraksaktır. $p \neq 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f(n) = \frac{1}{n^p}$ dir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n^p} > 0$ olduğundan p-serisi de pozitif terimli bir seridir. Ayrıca $f'(n) = -\frac{p}{n^{p+1}}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f'(n) < 0$ olduğundan $f(n) = \frac{1}{n^p}$ fonksiyonu azalandır. Yani p-serisinin karakterini belirlemek için İntegral Kriteri kullanılabilir.

$\int_1^k n^{-p} \, d$

$$\int_1^\infty f(n)dn = \int_1^\infty \frac{dn}{n^p} = \lim_{k\to\infty}\left(\int_1^k \frac{dn}{n^p}\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{n^{1-p}}{1-p}\Big|_1^k\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{1-p}\cdot\frac{1}{k^{p-1}} - \frac{1}{1-p}\right)$$

$$= \frac{1}{1-p}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k^{p-1}} - 1\right)$$

$\to 0$

dir. Buradan

$$\int_1^\infty f(n)dn = \begin{cases} \infty, & p<1 \\ \dfrac{1}{p-1}, & p>1 \end{cases}$$

Sonlu.

elde edilir.

Yani p - serisi; $p \leq 1$ için ıraksak,

$p > 1$ için yakınsaktır.

Örnek 3.3.1.2.

>1

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisinde $p = 2$ olduğundan seri yakınsaktır.

<1

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ serisinde $p = \frac{1}{2}$ olduğundan seri ıraksaktır.

>1

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ serisinde $p = \frac{3}{2}$ olduğundan seri yakınsaktır.

Uyarı 3.3.1.2. *Her* $k \in \mathbb{N}$ *için* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+k}$ *şeklinde tanımlanan seriler de harmonik seri olduğundan ıraksak serilerdir.*

f(x),

Örnek 3.3.1.3. $\sum_{n=1}^{\infty} n.e^{-n^2}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

Çözüm. Verilen seride $f(n) = n.e^{-n^2}$ dir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $n.e^{-n^2} > 0$ olduğundan seri pozitif terimlidir. Ayrıca $f'(n) = (1 - 2n^2)e^{-n^2}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f'(n) < 0$ olduğundan $f(n)$ fonksiyonu azalandır. Yani verilen serinin karakterini belirlemek için İntegral Kriteri kullanılabilir.

$ndu = -$

$$\int_1^{\infty} f(n)dn = \int_1^{\infty} n.e^{-n^2}dn = \lim_{k\to\infty}\left(\int_1^{k} n.e^{-n^2}dn\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{e^{-n^2}}{2}\Big|_1^k\right) = \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{e^{-k^2}}{2} + \frac{e^{-1}}{2}\right) = \frac{1}{2e}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{2e^{k^2}} + \frac{1}{2e}\right) =$$

dir. Bu durumda verilen seri İntegral Kriteri gereği yakınsaktır.

$\frac{1}{1+n^2} < \frac{1}{n^2}$

Örnek 3.3.1.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

Çözüm. Verilen seride $f(n) = \frac{1}{1+n^2}$ dir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{1+n^2} > 0$ olduğundan seri pozitif terimlidir. Ayrıca $f'(n) = -\frac{2n}{(1+n^2)^2}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f'(n) < 0$ olduğundan $f(n)$ fonksiyonu azalandır. Yani verilen serinin karakterini belirlemek için İntegral Kriteri kullanılabilir.

$$\int_1^{\infty} f(n)dn = \int_1^{\infty} \frac{dn}{1+n^2} = \lim_{k\to\infty}\left(\int_1^{k} \frac{dn}{1+n^2}\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\arctan n\big|_1^k\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\arctan k - \arctan 1\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

tür. Bu durumda verilen seri İntegral Kriteri gereği yakınsaktır.

Örnek 3.3.1.5. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n.\ln(n).\ln(\ln(n))}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

Çözüm. Verilen seri de $f(n)$ fonksiyonu pozitif terimli ve azalan bir fonksiyon olduğundan serinin karakterini belirlemek için İntegral Kriteri kullanılabilir.

$$\int_3^{\infty} f(n)dn = \int_3^{\infty} \frac{dn}{n.\ln(n).\ln(\ln(n))} = \lim_{k\to\infty}\left(\int_3^{k} \frac{dn}{n.\ln(n).\ln(\ln(n))}\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\ln(\ln(\ln(n)))|_3^k\right) \to \infty$$

d(ln(l

$\ln(\ln(\ln k)) - \ln(\ln(\ln 3))$

dur. Bu durumda verilen seri İntegral Kriteri gereği ıraksaktır.

$n^2-4n+5=(n$

Örnek 3.3.1.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

Çözüm. Verilen seride $f(n)=\frac{1}{n^2-4n+5}=\frac{1}{1+(n-2)^2}$ dir. Her $n\geq 2$ için $f(n)$ fonksiyonu pozitif terimli ve azalan bir fonksiyon olduğundan serinin karakterini belirlemek için İntegral Kriteri kullanılabilir.

$\frac{1}{2}+$

$$\int_2^{\infty} f(n)dn=\int_2^{\infty}\frac{dn}{1+(n-2)^2}=\lim_{k\to\infty}\left(\int_2^{k}\frac{dn}{1+(n-2)^2}\right)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\arctan(n-2)|_2^k\right)=\lim_{k\to\infty}(\arctan(k-2)-\arctan 0)=\frac{\pi}{2}$$

$+\frac{1}{2}$

dir. Bu durumda verilen seri İntegral Kriteri gereği yakınsaktır.

$r = \frac{1}{e} < 1$ $\qquad\qquad$ $\frac{1}{e^n} < \frac{1}{2^n}$

Örnek 3.3.1.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

Çözüm. Verilen seride $f(n) = \frac{1}{e^n}$ dir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f(n)$ fonksiyonu pozitif terimli ve azalan bir fonksiyon olduğundan serinin karakterini belirlemek için İntegral Kriteri kullanılabilir.

$e^{-n}\,dn$

$$\int_1^{\infty} f(n)dn = \int_1^{\infty} \frac{dn}{e^n} = \lim_{k\to\infty}\left(\int_1^{k} \frac{dn}{e^n}\right)$$

0

$$= \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{e^n}\Big|_1^k\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^k}\right) = \frac{1}{e}$$

dir. Bu durumda verilen seri İntegral Kriteri gereği yakınsaktır.

Örnek 3.3.1.8. 100 metrelik bir yol; önce 1 metre, sonra $\frac{1}{2}$ metre, daha sonra $\frac{1}{3}$ metre, … , $\frac{1}{n}$ metre, … yol alınarak bitirilebilir mi?

Çözüm. Alınan yol $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ metredir. Bu seri ıraksak olup toplamı ∞ dur. Bu durumda yol sonlu adımda bitirilemez.

Kaynak:

1. Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA, Analiz III Diziler ve Seriler, Dizgi Ofset, 2017.

2. G. B. Thomas ve Ark., Thomas Calculus I, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.

KAYNAKLAR:

1. **Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA,** Analiz III Diziler ve Seriler, Dizgi Ofset, 2017.

2. **G. B. Thomas ve Ark.,** Thomas Calculus I, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.