MATEMATIK 1

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2020

- $f'(x_1) = 0$ ve $f''(x_1) < 0$ ise, f fonksiyonu x_1 noktasında $f(x_1)$ yerel maksimum değerini alır.
- $f'(x_2) = 0$ ve $f''(x_2) > 0$ ise, f fonksiyonu x_2 noktasında $f(x_2)$ yerel minimum değerini alır.

Örnek 7.16.4.2. Çevresi 200 br olan dikdörtgenlerden alanı maksimum olan dikdörtgenin alanını hesaplayınız.

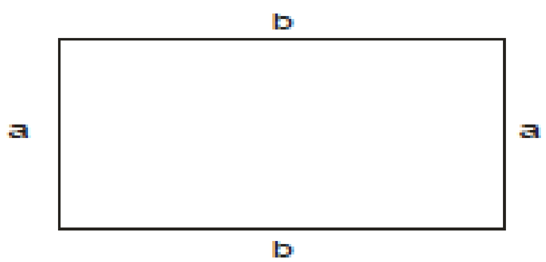
Çözüm.

Kısa kenar a br, uzun kenar b br olsun.

$2(a+b) = 200$ olup,

$(a+b) = 100$

$b = 100 - a$ dır.



Şekil 7.16.4.2.

Bu durumda dikdörtgenin alanı:

$$A = a.b = a.(100-a) = 100a - a^2$$

dir. $A'(a)=100-2a$ olup, $A'=0$ ise $a=50$ dolayısıyla $b=50$ dir.

O halde, maksimum alanlı dikdörtgenin alanı:

$$A_{\max}=50.50=2500br^2$$

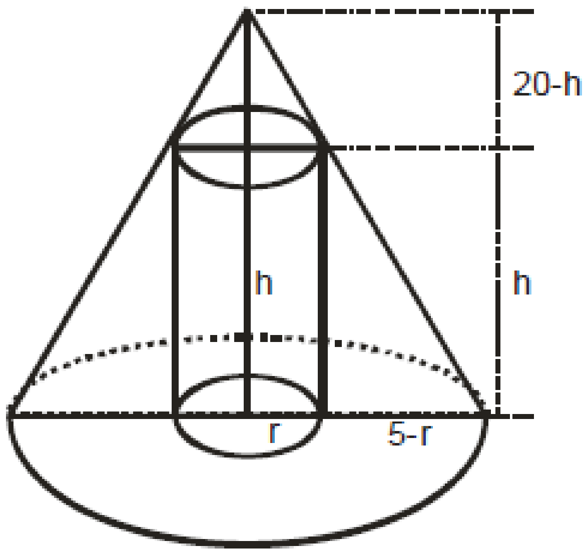
dir.

Örnek 7.16.4.3. Taban çapı 10 cm, yüksekliği 20 cm olan dik koninin içine yerleştirilebilecek maksimum hacimli silindirin hacmini hesaplayınız.

Çözüm.

Taban yarı çapı r ve yüksekliği h olan silindirin hacmi $V = \pi.r^2.h$ dır. Silindir ve koni arasındaki bağıntı:

$$\frac{h}{20} = \frac{5-r}{5}$$



Şekil 7.16.4.3.

Buradan, $h = \dfrac{20}{5}(5-r) = 4(5-r)$ elde edilir. Bu durumda

$V = 4.\pi.r^2.(5-r)$ dir.

$V' = 4.\pi.(10r - 3r^2)$ olup, $V' = 0$ ise $r_1 = 0$ ve $r_2 = \dfrac{10}{3}$ dür.

Bulunan değerler ikinci türevde yerine yazılırsa,

$$V''(0) > 0 \text{ ve } V''(\frac{10}{3}) < 0$$

dir. O halde $r = \dfrac{10}{3}$ için hacim maksimumdur.

$$V_{\max} = \pi . r^2 . h = \pi \left(\frac{10}{3} \right)^2 4 \left(5 - \frac{10}{3} \right) = \frac{2000}{27} br^3$$

elde edilir.

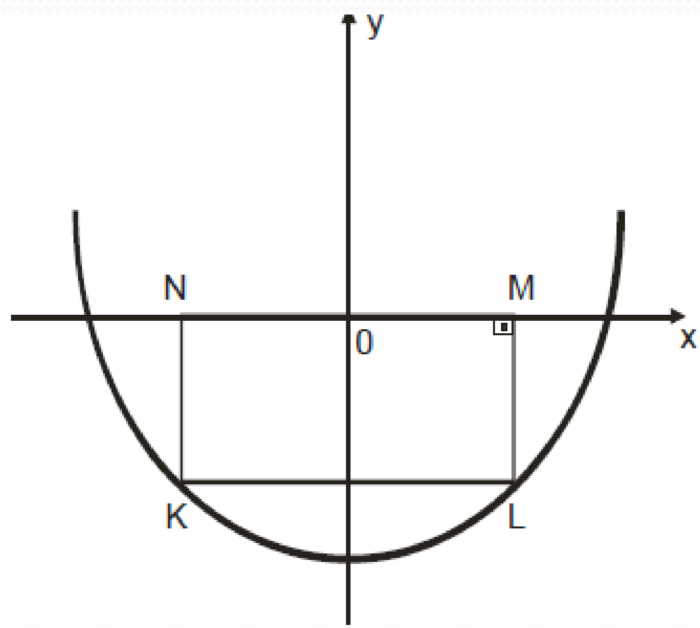
Örnek 7.17.16. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-27$ parabolü veriliyor. Bir kenarı x-ekseni ve iki köşesi parabol üzerinde bulunan dikdörtgenlerden maksimum alanlı olanın alanını hesaplayınız.

Çözüm. K ve L noktaları y-eksenine göre simetrik olduğundan $L(x,-y)$ ise $K(-x,-y)$ dir. Bu durumda:

$$|KL|=|MN|=2x$$

$$|KN|=|LM|=y$$

dir.



O halde, dikdörtgenin alanı:

$$A = 2xy = 2x(x^2 - 27) = 2x^3 - 54x$$

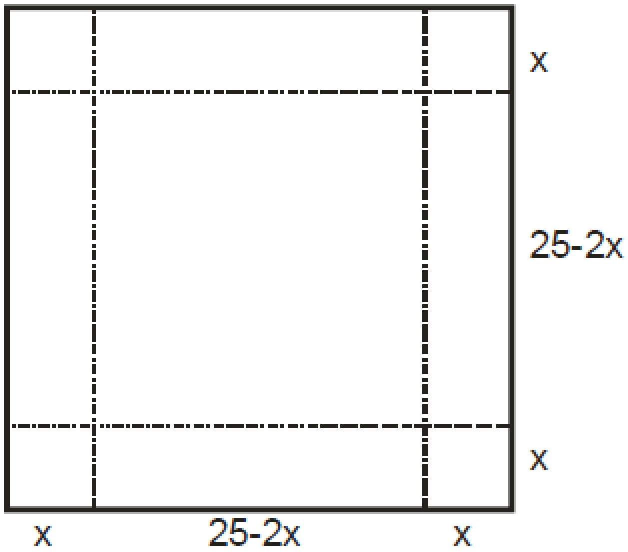
dir. Buradan, $A' = 6x^2 - 54$ dür. $A' = 0$ ise $x = \mp 3$ dür. $x = 3$ ise $y = 18$ olur. Dolayısıyla,

$$A_{\max} = 2.3.18 = 108br^2$$

elde edilir.

Örnek 7.17.17. Bir kenarı 25 cm olan kare şeklindeki karton plakanın köşelerinden kareler kesilerek kalan parça ile üst kısmı açık bir kutu yapılıyor. Bu kutunun hacminin maksimum olması için kesilen karelerin boyutları ne olmalıdır?

Çözüm. Karton plakanın köşelerinden kesilecek olan karelerin bir kenarının x cm olduğunu kabul edelim.



$$V = (25-2x)^2 . x = 4x^3 - 100x^2 + 625x$$

$$V' = 12x^2 - 200x + 625$$

$$V' = 0 \text{ ise } x_1 = \frac{25}{6} \text{ ve } x_2 = \frac{25}{2} \text{ dir.}$$

İkinci türev ise $V'' = 24x - 200$ bulunur. Bulunan değerler ikinci türevde yerine yazılırsa $V''\left(\frac{25}{6}\right) < 0$ ve $V''\left(\frac{25}{2}\right) > 0$ elde edilir. Bu durumda maksimum hacimli bir kutu yapmak için kesilecek karelerin bir kenarının uzunluğu $x = \frac{25}{6}$ cm olmalıdır.

Fonksiyonların Grafikleri

1. Asimptotlar

Bir eğrinin üzerindeki değişken bir P noktası, eğrinin bir kolu üzerinde sınırsız olarak uzaklaşırken bu nokta ile belli bir doğru arasındaki uzaklık sıfıra yaklaşıyorsa sözü edilen doğruya eğrinin asimptotu denir. Bazı eğriler için yukarıda belirtilen doğruların yerine aynı özelliği sağlayan eğriler bulunabilir. Böyle eğrilere de eğrinin eğri asimptotu denir.

- **Düşey Asimptotlar**

f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki sağdan ya da soldan limitlerinden en az biri sonsuz ise $x = a$ doğrusu bir düşey asimptottur. Yani,

$\lim_{x \to a} f(x) \to \mp\infty \;\Rightarrow\; x = a$ doğrusu bir düşey asimptottur.

- **Yatay Asimptotlar**

$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) \to b \;\Rightarrow\; y = b$ doğrusu bir yatay asimptottur.

- **Eğik Asimptotlar**

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m_1$ ve $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-m_1x)=n_1$ limitleri varsa ve reel ise $y=m_1x+n_1$ doğrusuna 1. eğik asimptot denir.

Benzer şekilde, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m_2$ ve $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-m_2x)=n_2$ limitleri varsa ve reel ise $y=m_2x+n_2$ doğrusuna 2. eğik asimptot denir. $m_1=0$ ya da $m_2=0$ ise yatay asimptot elde edilir.

Örnek 7.16.5.1.1. $f(x)=\dfrac{1}{1-x^3}$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonun asimptotlarını bulunuz.

Çözüm. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1-x^3}=0$ olduğundan $y=0$ doğrusu yatay asimptottur.

Fonksiyonun paydasını sıfır yapan $x=1$ değerini inceleyelim:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x^3}=\infty$$

olur. O halde, $x=1$ doğrusu düşey asimptottur.

Örnek 7.16.5.1.2. $f(x)=\dfrac{x+1}{|x|+1}$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonun asimptotlarını bulunuz.

Çözüm.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{|x|+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x+1}=1$$

ve

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{|x|+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{-x+1}=-1$$

olur. O halde, $y=1$ ve $y=-1$ doğruları yatay asimptottur.

Fonksiyonun paydası daima sıfırdan farklı olduğu için düşey asimptot yoktur.

Örnek 7.16.5.1.3. $f(x)=\dfrac{x^2+5x-7}{x-2}$ ile verilen fonksiyonun asimptotlarını bulunuz.

Çözüm. Fonksiyonun paydasını sıfır yapan $x=2$ değerini inceleyelim:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5x-7}{x-2}=\infty$$

olur. O halde, $x=2$ doğrusu düşey asimptottur.

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x - 7}{x - 2}$$

Pay ile paydanın dereceleri arasındaki fark 1 olduğundan $y = mx + n$ gibi bir eğik asimptot vardır. Bu asimptotun katsayıları hesaplanırsa,

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{x^2 + 5x - 7}{x - 2}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 5x - 7}{x^2 - 2x} = 1$$

ve

$$n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 5x - 7}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{7x - 7}{x - 2} = 7$$

olur. O halde, eğik asimptotun denklemi $y = x + 7$ olur.

Örnek 7.16.5.1.4. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ ile verilen fonksiyonun asimptotlarını bulunuz.

Çözüm. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x^2+1}=0$ olduğundan $y=0$ doğrusu yatay asimptottur.

Fonksiyonun paydası daima sıfırdan farklı olduğu için düşey asimptot yoktur.

2. Grafik Çiziminde Yapılacak İşlemler

- Grafiği çizilecek fonksiyonun tanımlı olduğu en geniş küme ve süreksizlik noktaları tespit edilir.
- Fonksiyon periyodik ise periyodu bulunur.
- Fonksiyonun tek veya çift olup olmama durumu incelenir. (Tek fonksiyonlar orijine, çift fonksiyonlar ise y-eksenine göre simetriktir.)
- Fonksiyon $x \to \mp\infty$ için tanımlıysa, $x \to \mp\infty$ için ayrı ayrı limit hesaplanır.
- Fonksiyonun türevi, türevin kökleri ve tanımsız olduğu noktalar bulunur, türevin işaretine göre fonksiyonun artan ya da azalan olduğu aralıklar ve varsa ekstremum noktaları tespit edilir.

- İkinci türev bulunarak, fonksiyonun konkav, konveks olduğu noktalar ve dönüm noktaları tespit edilir.
- Grafiğin x ve y eksenlerini kesen noktaları tespit edilir.
- Varsa asimptotlar bulunur.
- Bu incelemelerin sonuçları kullanılarak değişim tablosu yapılır.
- Son olarak değişim tablosunda elde edilen verilere göre grafik çizilir.

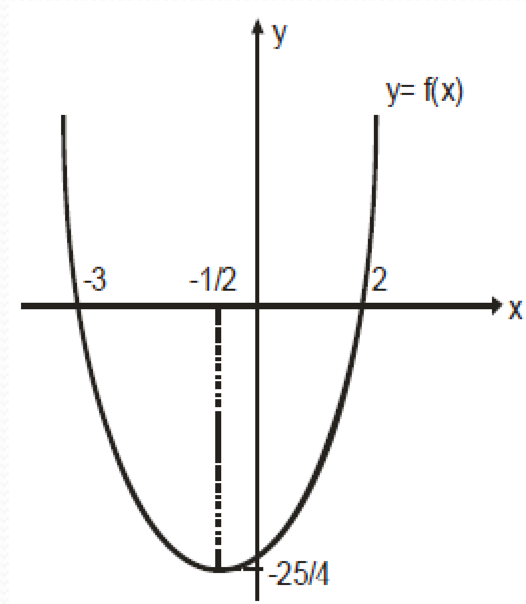
Örnek 7.16.5.2.1. $y = x^2 + x - 6$ fonksiyonunun değişimini inceleyip, grafiğini çiziniz.

Çözüm.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$ için fonksiyon tanımlıdır.
2. $\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \lim_{x \to \mp\infty} (x^2 + x - 6) = +\infty$ olup yatay asimptot mevcut değildir.
3. $x = 0$ için $y = -6$ ve $y = 0$ için $x_1 = -3$, $x_2 = 2$ olur.
4. $y' = 2x + 1$ dir. $y' = 0$ ise $x = -\dfrac{1}{2}$ olup $y = -\dfrac{25}{4}$ bulunur.

Elde edilen değerler ile değişim tablosu yapılıp grafik çizilirse,

x	$-\infty$		-3		$-1/2$		0		2		$+\infty$
y'		-		-		+		+		+	
Y"	∞	↘	0	↘	$-25/4$	↗	-6	↗	0	↗	∞



elde edilir.

Örnek 7.16.5.2.2. $y = \dfrac{2x+1}{x+3}$ fonksiyonunun değişimini inceleyip, grafiğini çiziniz.

Çözüm.

1. Fonksiyon $\mathbb{R} - \{-3\}$ için tanımlıdır.

2. $\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{2x+1}{x+3} = 2$ olup $y = 2$ yatay asimptottur.

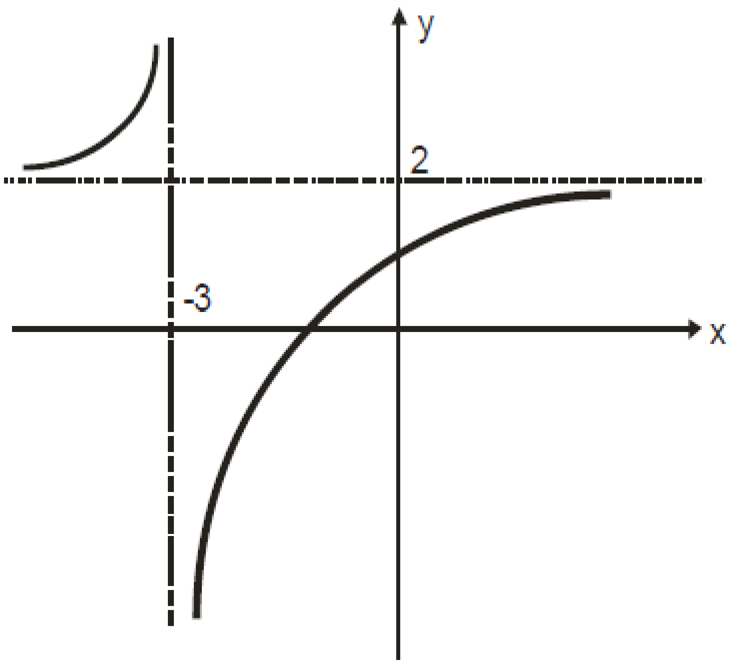
$x = -3$ için $x + 3 = 0$ olduğundan $x = -3$ düşey asimptottur.

3. $x = 0$ için $y = \dfrac{1}{3}$ ve $y = 0$ için $x = -\dfrac{1}{2}$ olur.

4. $y' = \dfrac{2(x+3) - (2x+1)}{(x+3)^2} = \dfrac{5}{(x+3)^2}$ bulunur.

Elde edilen değerler ile değişim tablosu yapılıp grafik çizilirse,

x	$-\infty$		-3		$-1/2$		0		$+\infty$
y'		+	‖	+		+		+	
y	2	↗	$+\infty^{-}$	↗	0	↗	$1/3$	↗	2



elde edilir.

Örnek 7.16.5.2.3. $y = \dfrac{x^2 + 8x + 15}{x - 1}$ fonksiyonunun değişimini inceleyip, grafiğini çiziniz.

Çözüm.

1. Fonksiyon $\mathbb{R} - \{1\}$ için tanımlıdır.

2. $\lim\limits_{x \to \mp\infty} y = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{x^2 + 8x + 15}{x - 1} = \mp\infty$ dur ve $x = 1$ doğrusu düşey asimptottur. Pay ile paydanın dereceleri arasındaki fark 1 olduğundan $y = mx + n$ gibi bir eğik asimptot vardır. Bu asimptotun katsayıları hesaplanırsa,

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2+8x+15}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+8x+15}{x^2-x}=1$$

ve

$$n=\lim_{x\to\infty}(y-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+8x+15}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{9x+15}{x-1}=9$$

olur. O halde, eğik asimptotun denklemi $y=x+9$ olur.

3. $x=0$ için $y=-15$ ve $y=0$ için $x_1=-3$, $x_2=-5$ olur.

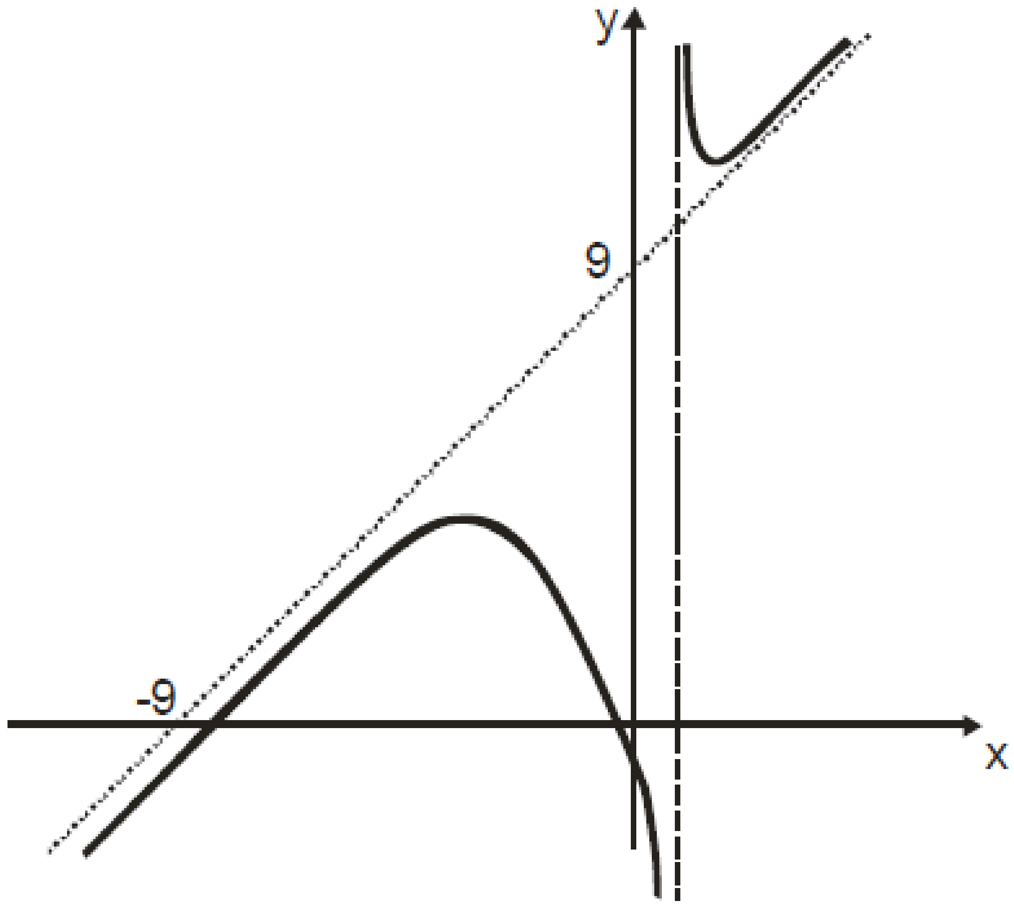
4. $y'=\dfrac{(2x+8)(x-1)-(x^2+8x+15)}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-23}{(x-1)^2}$ bulunur.

$y'=0$ ise $x_1=1+2\sqrt{6}$, $x_2=1-2\sqrt{6}$ noktaları kritik noktalardır.

5. $y'' = \dfrac{48}{(x-1)^3}$ olduğundan $y''(x_1) > 0$ ve $y''(x_2) < 0$ olup x_1 noktasında minimum, x_2 noktasında da maksimum vardır.

Elde edilen değerler ile değişim tablosu yapılıp grafik çizilirse,

x	$-\infty$		-5		$1-2\sqrt{6}$		-3		0		1		$1+2\sqrt{6}$		$+\infty$
y'		+		+	0	-		-		-	‖	-	0	+	
y		↗		↗		↘		↘		↘	‖	↘		↗	
	$-\infty$		0		$10-4\sqrt{6}$		0		-15		$-\infty$ $+\infty$		$10+4\sqrt{6}$		$+\infty$



elde edilir.

Örnek 7.17.18. $y=-x^3+12x$ fonksiyonunun değişimini inceleyip, grafiğini çiziniz.

Çözüm.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$ için fonksiyon tanımlıdır.

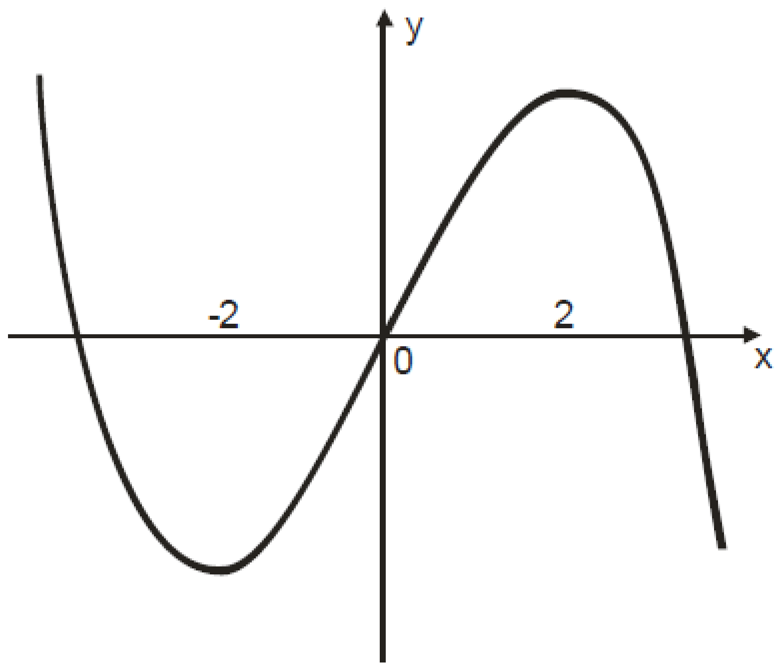
2. $\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\mp\infty} (-x^3+12x) = \pm\infty$ olup yatay asimptot mevcut değildir.

3. $x=0$ için $y=0$ ve $y=0$ için $x_{1,2}=\mp 2\sqrt{3}$ olur.

4. $y'=-3x^2+12$ dir. $y'=0$ ise $x_{1,2}=\mp 2$ olup $y_{1,2}=\mp 16$ bulunur.

Elde edilen değerler ile değişim tablosu yapılıp grafik çizilirse,

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		-2		0		2		$2\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		-		-		+		+		-		-	
y	$+\infty$	↘	0	↘	-16	↗	0	↗	16	↘	0	↘	$-\infty$



elde edilir.

Kaynaklar:

1. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus I**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.
2. Prof. Dr. C. Çinar, Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, Prof. Dr. A. S. Kurbanlı, Prof. Dr. D. Şimşek, **Genel Matematik**, Dizgi Ofset, 2013.
3. Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, **Analiz III Diziler ve Seriler,** Dizgi Ofset, 2017.
4. H. İ. Karakaş, **Matematiğin Temelleri, Sayı Sistemleri ve Cebirsel Yapılar,** ODTÜ yayınları, 2011.