MATEMATIK 1

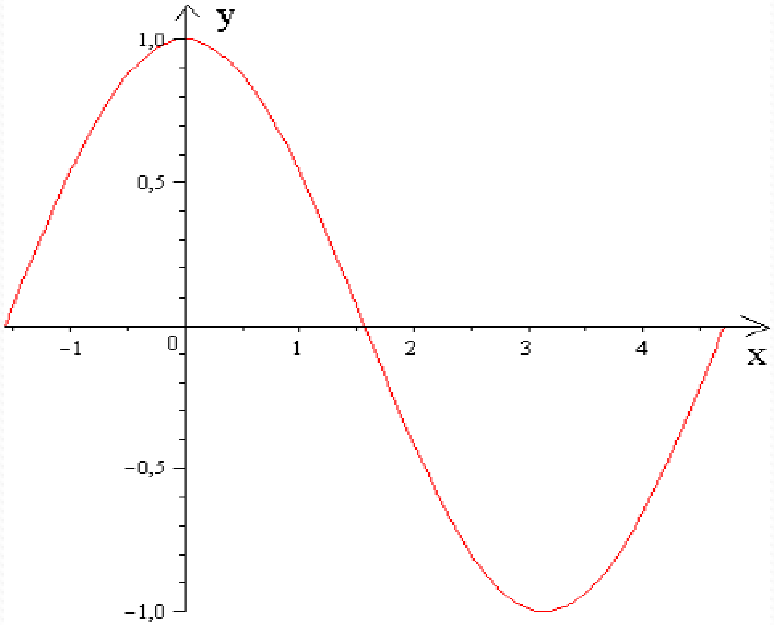
Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2020

$\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ fonksiyonu periyodik bir fonksiyon olduğu için genel anlamda bire-bir ve örten değildir. Dolayısıyla tersi yoktur. Ancak $[0, \pi]$ aralığında bire-bir ve örten olup bu aralıkta tersi vardır. $y = \cos x$ fonksiyonunun tersi $y = \arccos x$ fonksiyonudur.

$y = \cos x$ fonksiyonun grafiği



Şekil 4.3.3.9.3.

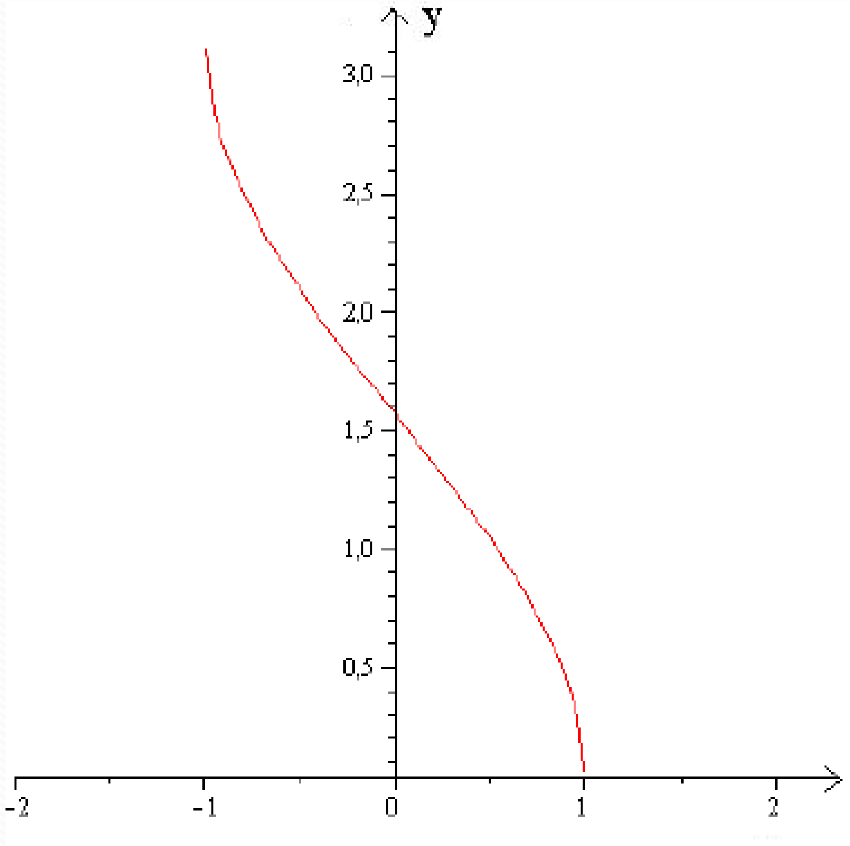
şeklindedir.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1

ve

x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\arccos x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π

olduğundan $\arccos:[-1,1]\rightarrow[0,\pi]$ fonksiyonun grafiği



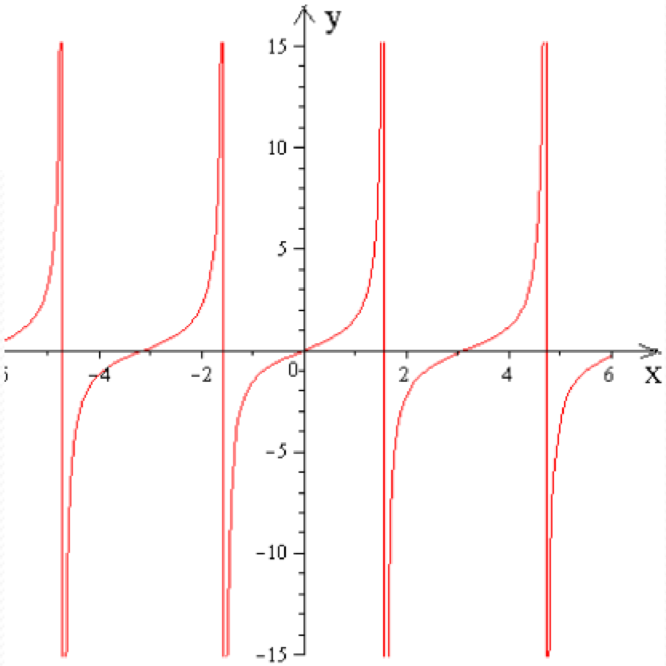
Şekil 4.3.3.9.4.

şeklindedir.

$y = \arccos x$ fonksiyonunun eğrisi ile $y = \cos x$ fonksiyonun eğrisi $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.

$\tan : \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \right\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu periyodik bir fonksiyon olduğu için genel anlamda bire-bir ve örten değildir. Dolayısıyla tersi yoktur. Ancak $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right)$ aralığında bire-bir ve örten olup bu aralıkta tersi vardır. $y = \tan x$ fonksiyonunun tersi $y = \arctan x$ fonksiyonudur.

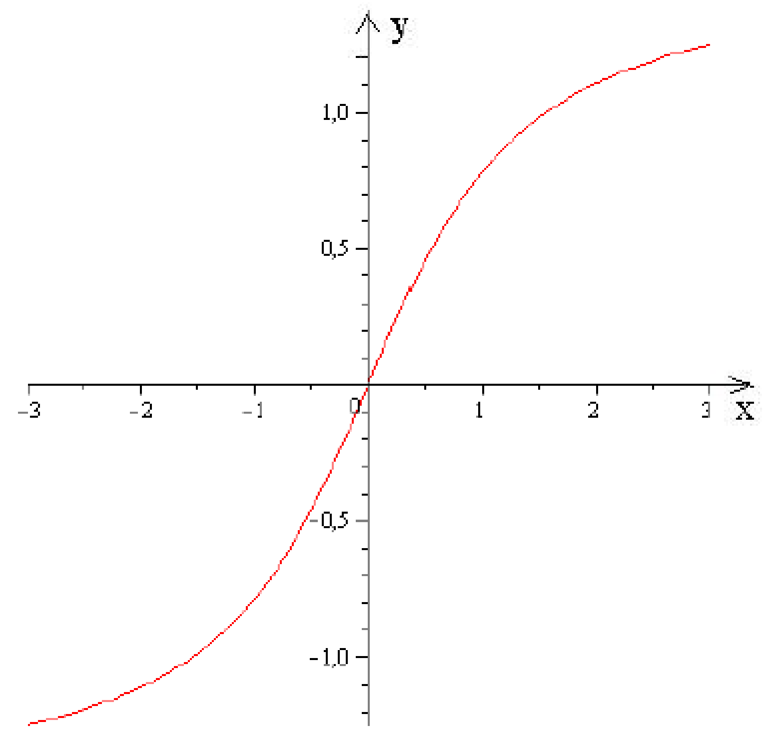
$y = \tan x$ fonksiyonun grafiği



Şekil 4.3.3.9.5.

şeklindedir.

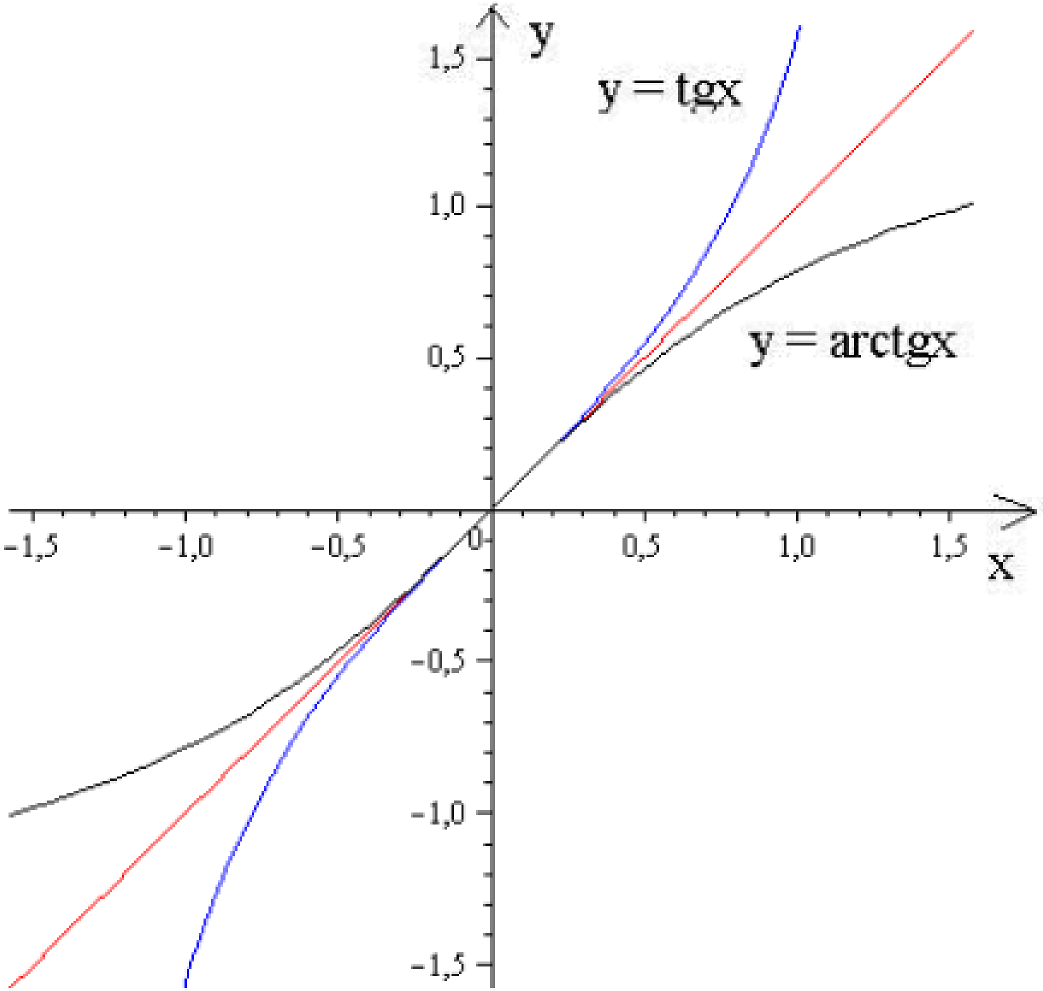
Bu durumda $\arctan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun grafiği



Şekil 4.3.3.9.6.

şeklindedir.

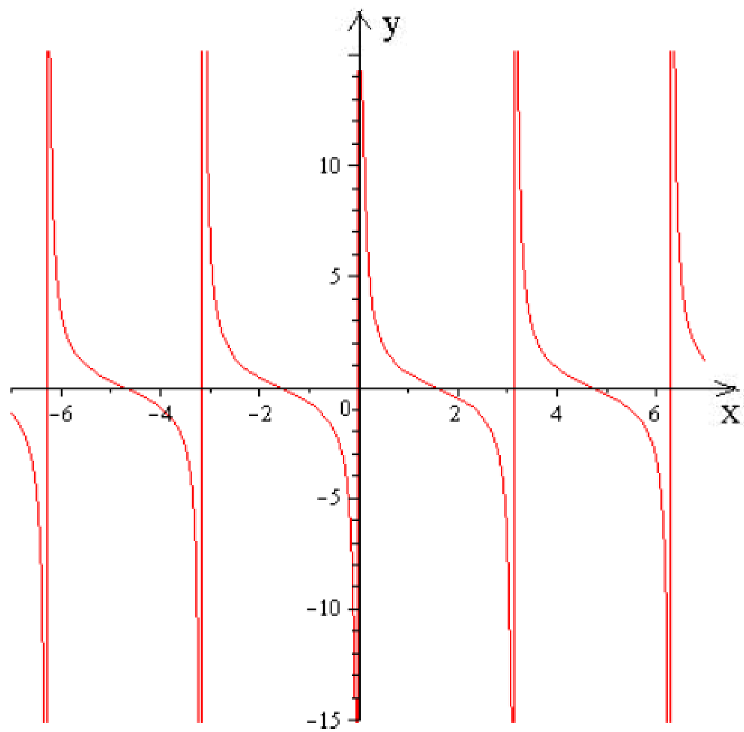
$y = \tan x$ ve $y = \arctan x$ fonksiyonlarının grafikleri $y = x$ birim fonksiyonunun grafiğine göre simetriktir.



Şekil 4.3.3.9.7.

$\cot : \mathbb{R} - \{k\pi\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu periyodik bir fonksiyon olduğu için genel anlamda bire-bir ve örten değildir. Dolayısıyla tersi yoktur. Ancak $(0, \pi)$ aralığında bire-bir ve örten olup bu aralıkta tersi vardır. $y = \cot x$ fonksiyonunun tersi $y = \operatorname{arc}\cot x$ fonksiyonudur.

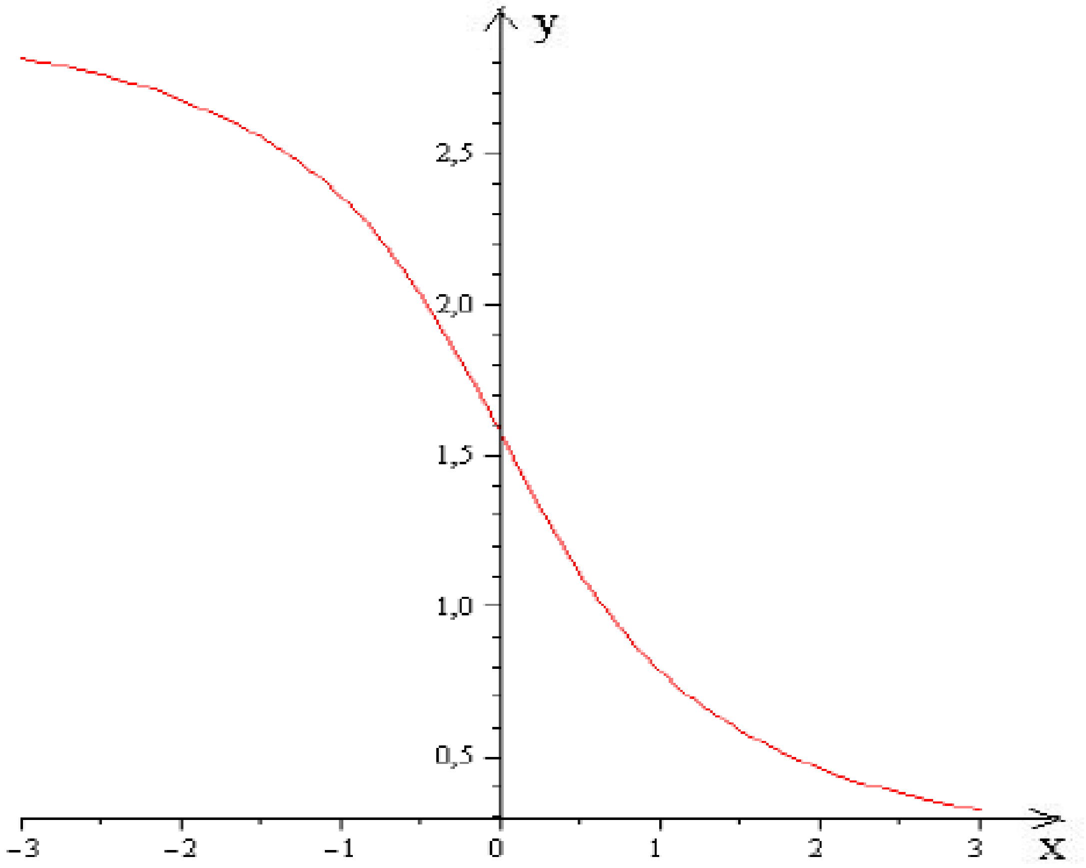
$y = \cot x$ fonksiyonun grafiği



Şekil 4.3.3.9.7.

şeklindedir.

Bu durumda $\operatorname{arc\,cot}:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun grafiği



Şekil 4.3.3.9.8.

şeklindedir.

Örnek 4.3.3.9.1. $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $\arcsin x = a$ ise $\sin a = x$ dir. $\cos a = \sqrt{1-\sin^2 a}$ olduğundan

$$\cos a = \sqrt{1-x^2} \text{ ve } \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

dir.

Örnek 4.3.3.9.2. $\sin(\arccos x) = ?$

Çözüm. $\arccos x = y$ ise $\cos y = x$ dir. $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ olduğundan

$$\sin^2 y = 1 - x^2 \text{ ve } \sin y = \sqrt{1-x^2}$$

dir. Bu durumda $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ dir.

4. Hiperbolik Fonksiyonlar ve Tersleri

Simetrik bir küme üzerinde tanımlı her fonksiyon biri tek diğeri de çift, iki fonksiyonun toplamı şeklinde yazılabilir. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu durumda

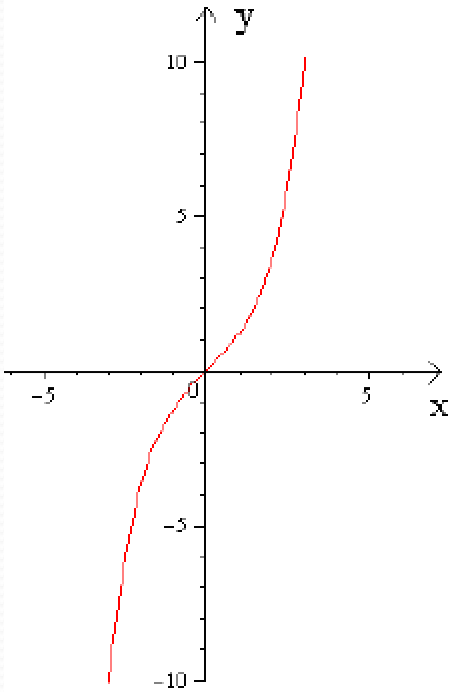
$$f(x)=\underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{çift kısmı}}+\underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{tek kısmı}}$$

yazılabilir. Örneğin $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$ fonksiyonunu

$$e^x=\underbrace{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}_{\text{çift kısmı}}+\underbrace{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}_{\text{tek kısmı}}$$

şeklinde yazılır.

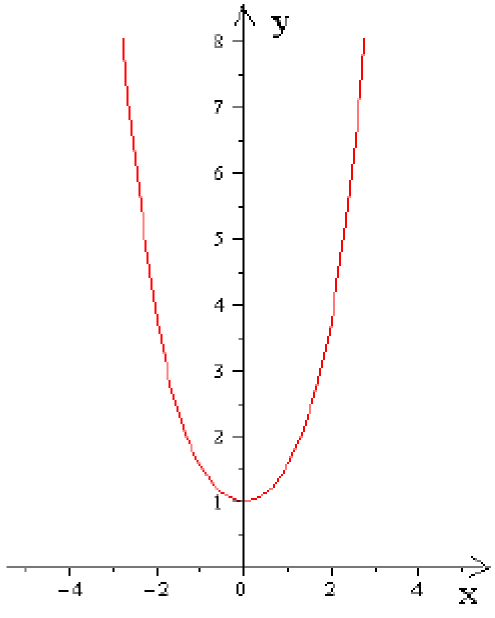
Tanım 4.3.4.1.1. $f(x)=e^x$ fonksiyonunun tek kısmına hiperbolik sinüs fonksiyonu denir ve $\sinh x$ veya $\mathrm{sh}x$ şeklinde gösterilir. Bu durumda $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ dir ve $\sinh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonun grafiği



Şekil 4.3.4.1.1.

şeklindedir.

Tanım 4.3.4.1.2. $f(x)=e^x$ fonksiyonunun çift kısmına hiperbolik kosinüs fonksiyonu denir ve $\cosh x$ veya $\mathrm{ch}x$ şeklinde gösterilir. Bu durumda $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ dir ve $\cosh:\mathbb{R}\to[1,\infty)$ fonksiyonunun grafiği



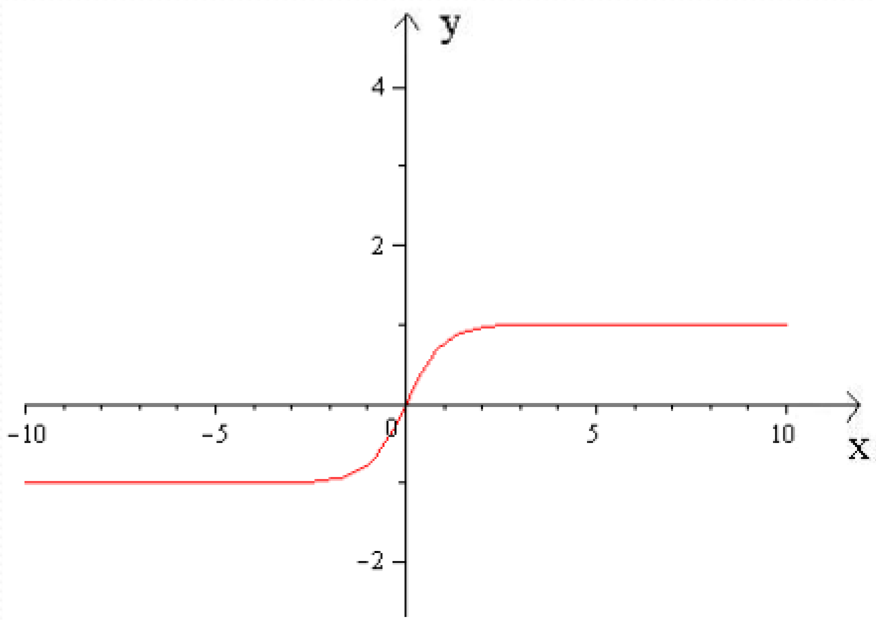
Şekil 4.3.4.1.2.

şeklindedir.

Tanım 4.3.4.1.3. $f(x)=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ şeklinde tanımlanan fonksiyona hiperbolik tanjant fonksiyonu denir ve $\tanh x$ veya th$x$ şeklinde gösterilir. Bu durumda

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

dir ve $\tanh:\mathbb{R}\rightarrow(-1,1)$ fonksiyonunun grafiği



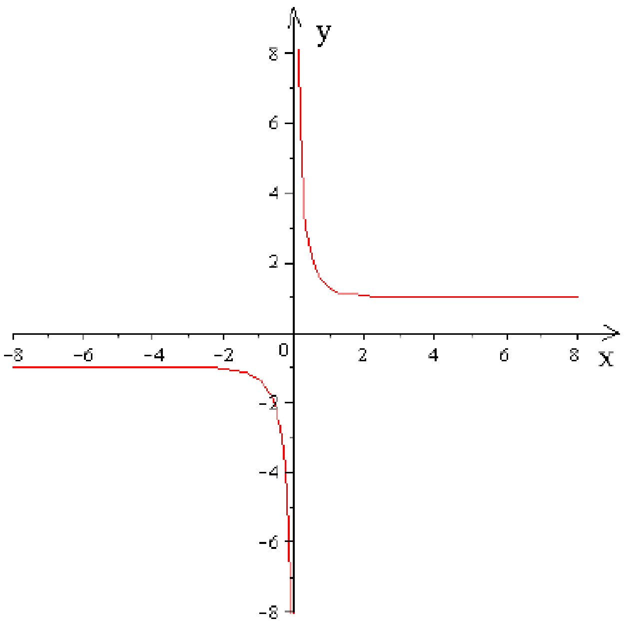
Şekil 4.3.4.1.3.

şeklindedir.

Tanım 4.3.4.1.4. $f(x)=\dfrac{\cosh x}{\sinh x}$ şeklinde tanımlanan fonksiyona hiperbolik kotanjant fonksiyonu denir ve $\coth x$ veya $\mathrm{cth}x$ şeklinde gösterilir. Bu durumda

$$\coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$$

dir ve $\coth:\mathbb{R}-\{0\}\to(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ fonksiyonunun grafiği



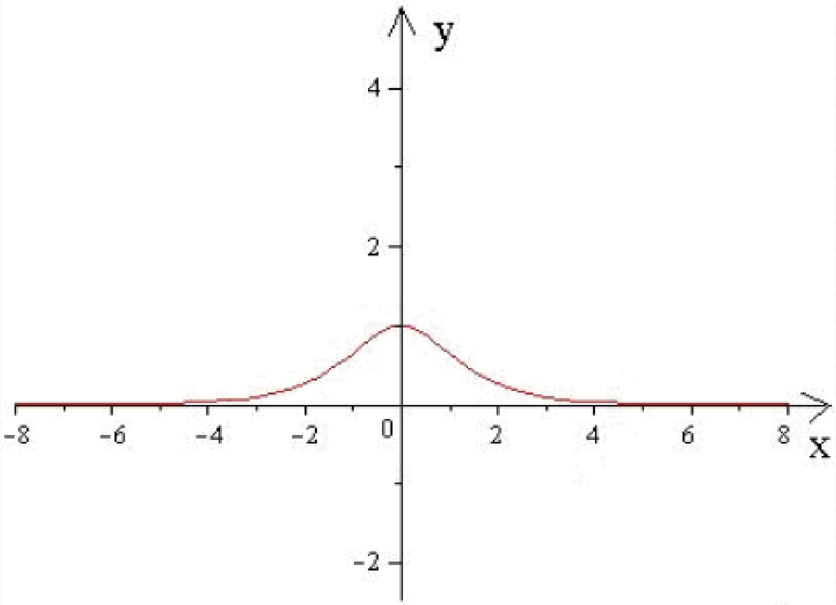
Şekil 4.3.4.1.4.

şeklindedir.

Tanım 4.3.4.1.5. $f(x)=\dfrac{1}{\cosh x}$ şeklinde tanımlanan fonksiyona hiperbolik sekant fonksiyonu denir ve $\operatorname{sech} x$ şeklinde gösterilir. Bu durumda

$$\operatorname{sech} x=\frac{1}{\cosh x}=\frac{2}{e^{x}+e^{-x}}$$

dir ve $\operatorname{sech}:\mathbb{R}\to(0,1]$ fonksiyonunun grafiği



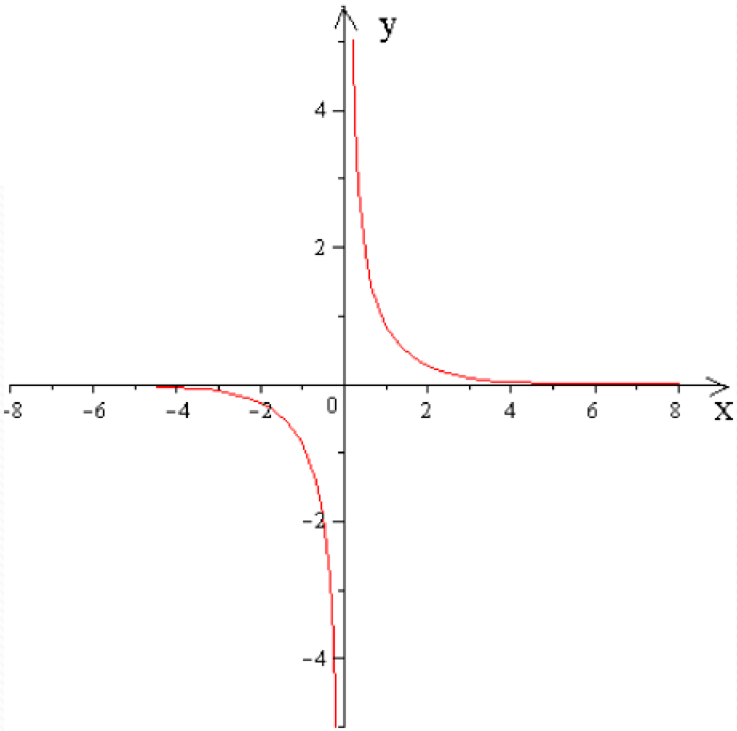
Şekil 4.3.4.1.5.

şeklindedir.

Tanım 4.3.4.1.6. $f(x)=\dfrac{1}{\sinh x}$ şeklinde tanımlanan fonksiyona hiperbolik kosekant fonksiyonu denir ve $\operatorname{csch} x$ şeklinde gösterilir. Bu durumda

$$\operatorname{csch} x=\frac{1}{\sinh x}=\frac{2}{e^{x}-e^{-x}}$$

dir ve $\operatorname{csch}:\mathbb{R}-\{0\}\rightarrow\mathbb{R}-\{0\}$ fonksiyonunun grafiği



Şekil 4.3.4.1.6.

şeklindedir.

1. Hiperbolik Fonksiyonların Özellikleri

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

İspat. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}\right) = 1 \text{ dir.}$$

(2) $\sinh x + \cosh x = e^x$

İspat. $\sinh x + \cosh x = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right) + \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = e^x$ dir.

(3) $\sinh x - \cosh x = -e^{-x}$

İspat. $\sinh x - \cosh x = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right) - \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = -e^{-x}$ dir.

(4) $\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y$

İspat. $\sinh(x+y)=\dfrac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}=\dfrac{e^{x}e^{y}-e^{-x}e^{-y}}{2}$

$$=\frac{(\sinh x+\cosh x)(\sinh y+\cosh y)-(\sinh x-\cosh x)(\sinh y-\cosh y)}{2}$$

$=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y$ dir.

(5), (6), (7) nin ispatı (4) e benzer şekilde yapılabilir. Bu nedenle ispatları okuyucuya bırakıldı.

(5) $\sinh(x-y)=\sinh x\cosh y-\cosh x\sinh y$

(6) $\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$

(7) $\cosh(x-y)=\cosh x\cosh y-\sinh x\sinh y$

Aşağıdaki özellikler yukarıdaki özelliklerden kolaylıkla elde edilebilir.

(8) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

(9) $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$

(10) $\cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$

(11) $\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$

(12) $\operatorname{csch}^2 x = \coth^2 x - 1$

(13) $\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$

2. Ters Hiperbolik Fonksiyonlar

Her fonksiyonda olduğu gibi hiperbolik fonksiyonların da birebir ve örten oldukları aralıklarda tersleri mevcuttur ve ters hiperbolik fonksiyonlar tanımları gereği aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

(1) $\arg\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\arg\sinh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

(2) $\arg\cosh : [1,\infty) \to [0,\infty)$, $\arg\cosh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

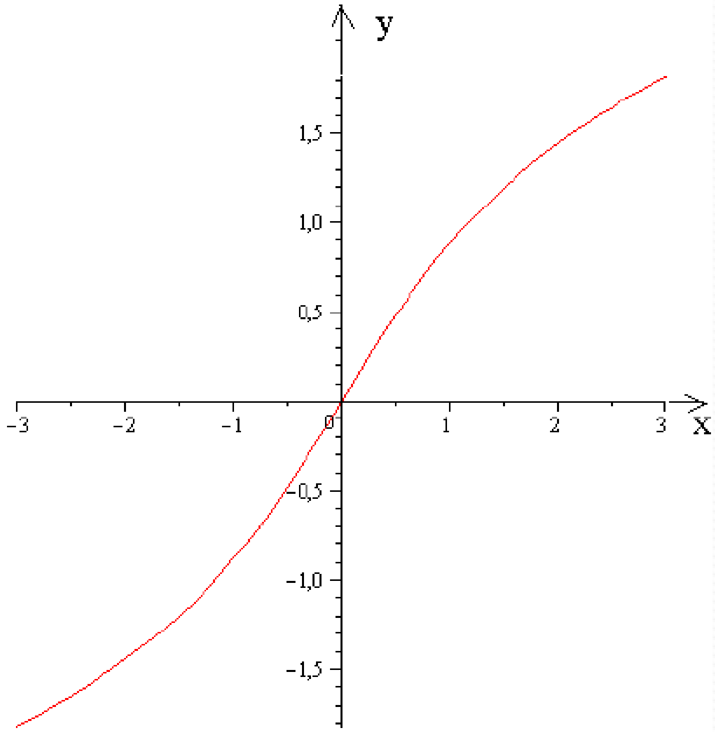
(3) $\arg\tanh : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $\arg\tanh x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

(4) $\arg\coth : (1,\infty) \to (0,\infty)$, $\arg\coth x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

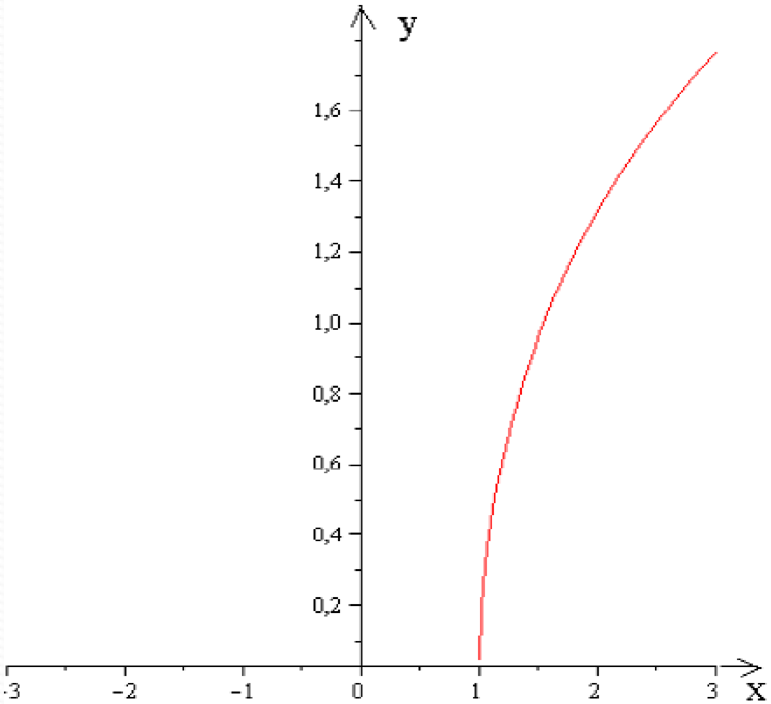
(5) $\arg\operatorname{sech} : (0,1) \to (0,\infty)$, $\arg\operatorname{sech} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

(6) $\arg\operatorname{csch} : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $\arg\operatorname{csch} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)$

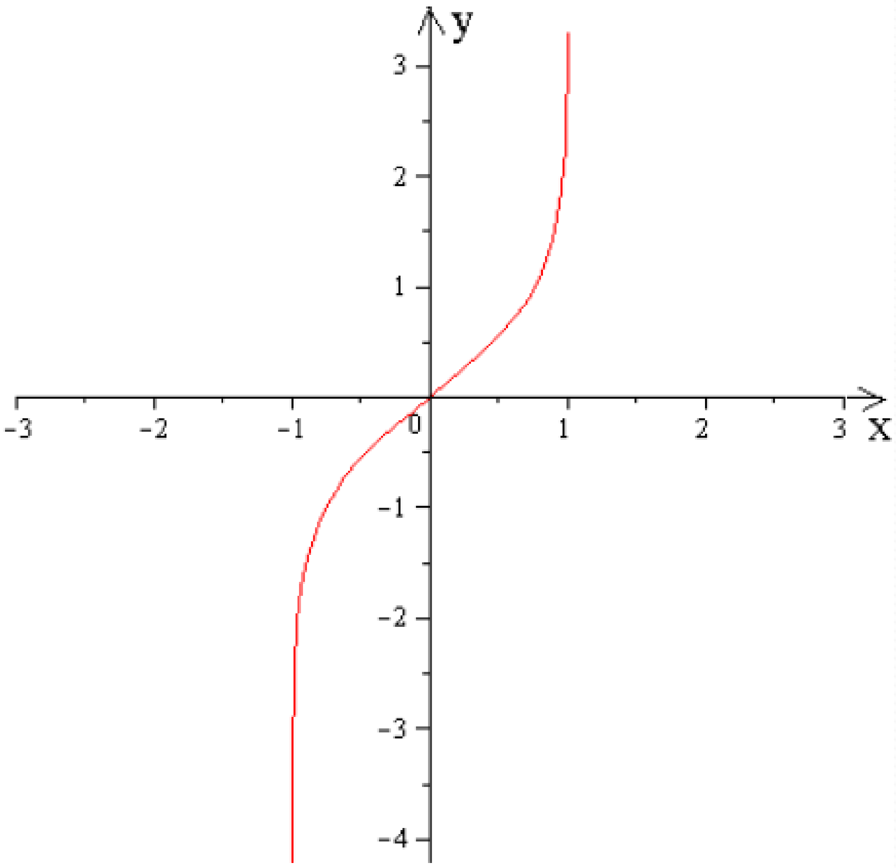
Ters hiperbolik fonksiyonların grafikleri aşağıda verilmiştir:



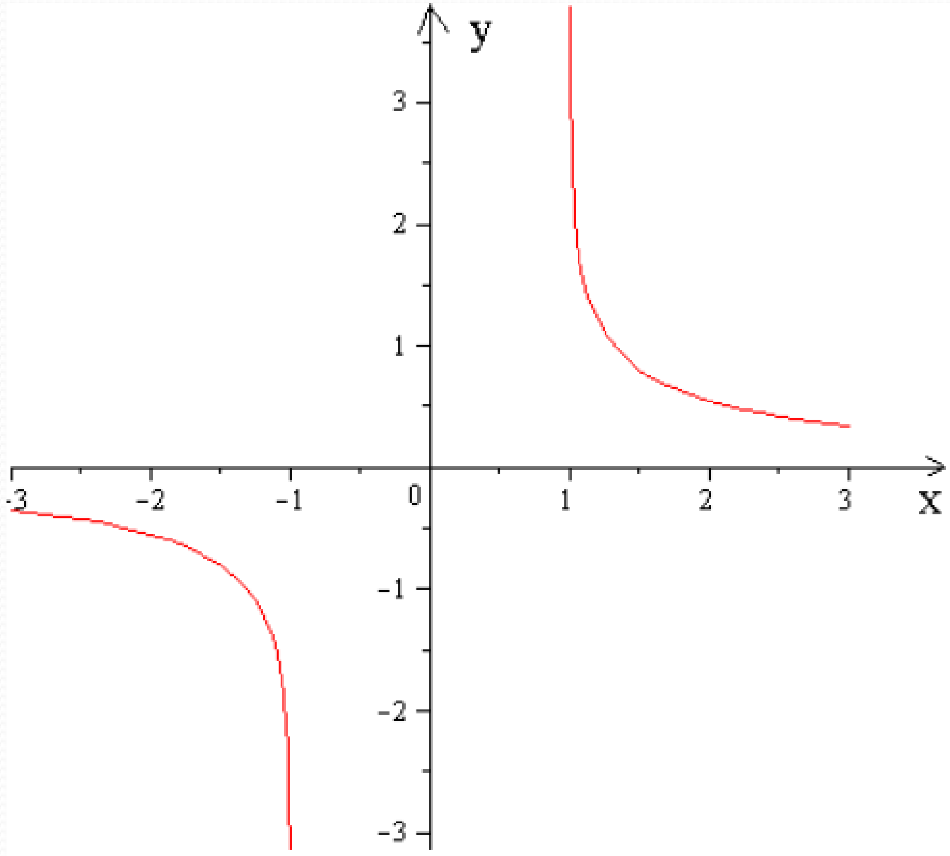
Şekil 4.3.4.2.1. (argsinhx)



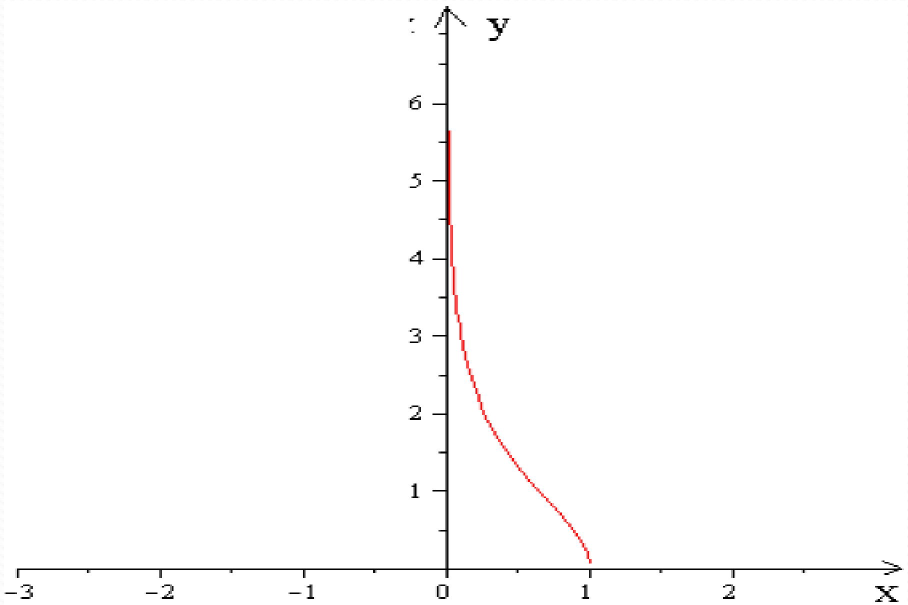
Şekil 4.3.4.2.2. (argcoshx)



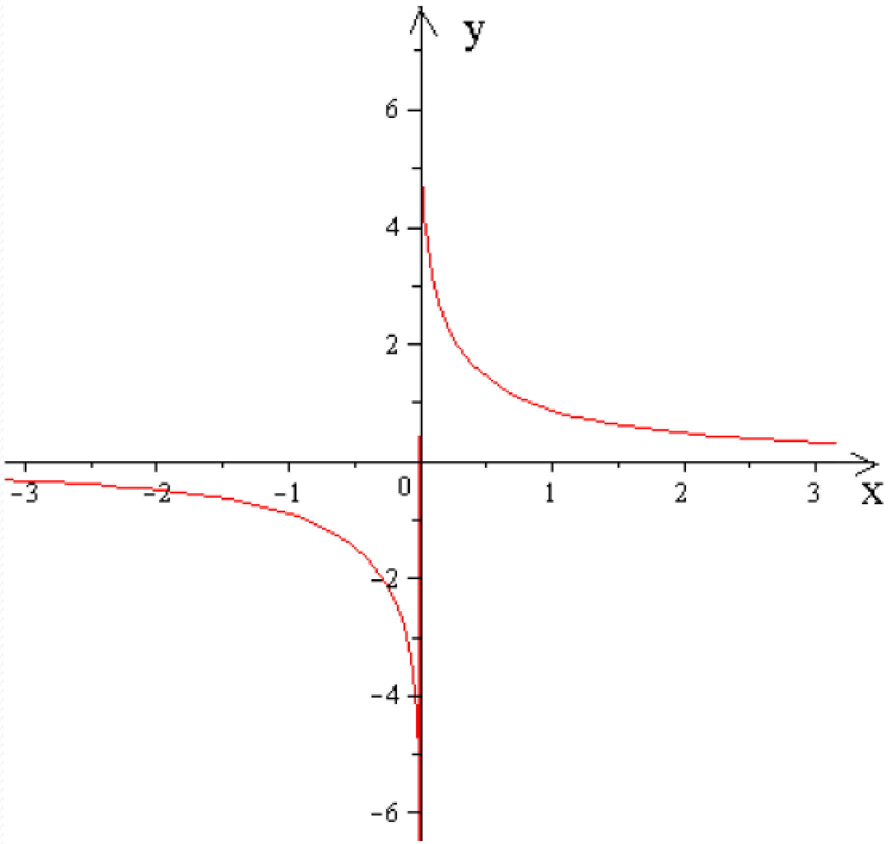
Şekil 4.3.4.2.3. (argtanhx)



Şekil 4.3.4.2.4. (argcothx)



Şekil 4.3.4.2.5. (argsechx)



Şekil 4.3.4.2.6. (argcschx)

Kaynaklar:

1. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus I**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.
2. Prof. Dr. C. Çinar, Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, Prof. Dr. A. S. Kurbanlı, Prof. Dr. D. Şimşek, **Genel Matematik**, Dizgi Ofset, 2013.
3. Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, **Analiz III Diziler ve Seriler,** Dizgi Ofset, 2017.
4. H. İ. Karakaş, **Matematiğin Temelleri, Sayı Sistemleri ve Cebirsel Yapılar,** ODTÜ yayınları, 2011.