MATEMATİK 3

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2020

Çok değişkenli fonksiyonlarda Extremumlar.

a) Serbest extremumlar.

$z = f(x,y)$ fonksiyonu verilmiş olsun.
Bu fonksiyonun serbest extremum olarak adlandırdığımız metodla extremumu araştırılırken aşağıdaki yol izlenir.

① $\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$ denklem sisteminin çözümleri bulunur. Bu noktalara kritik noktalar denir.

② ①'de bulunan noktaların maksimum, minimum veya sıradan bir semer nokta olup olmadığını saptamak için

$f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$ kısmi türevleri hesaplanır ve $P(x_0,y_0)$ kritik nokta olmak üzere,

$$\Delta = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y)$$

oluşturulur. Δ'nın $P(x_0,y_0)$ noktasında aldığı değerler hesaplanır.

Eğer $\Delta > 0$ ise, P noktasında $f_{xx}(x,y)$ (yada $f_{yy}(x,y)$ nın) aldığı değerler bulunur.

Bu değerler;

$$\begin{cases} f_{xx}(x,y) < 0 \ (\text{yada } f_{yy}(x,y) < 0) \text{ ise } z_{max} = f(x_0,y_0) \\ f_{xx}(x,y) > 0 \ (\text{yada } f_{yy}(x,y) > 0) \text{ ise } z_{min} = f(x_0,y_0) \end{cases}$$

olur.

Eğer $\Delta < 0$ ise. extremum yoktur. $P(x_0, y_0)$ semer noktasıdır.

Eğer $\Delta = 0$ ise fonksiyonun extremumunun olup olmadığı ~~hakkında~~ söylenemez. Yani şüpheli durumdur.

Örnek 1. $z = f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$ fonksiyonunun extremumlarını bulup cinslerini inceleyiniz.

Çözüm: Fonksiyonun x ve y' ye göre kısmi türevleri alınırsa,

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 2x - y + 3 \\ f_y &= -x + 2y - 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x - y + 3 = 0 \\ -x + 2y - 2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

olur. (1) sisteminin çözümünden, $x = -\frac{4}{3}$, $y = \frac{1}{3}$ dır. Böylelikle fonksiyonun (kritik) stasyoner noktalası $A\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ olur.

$$f_{xx} = 2$$
$$f_{yy} = 2$$
$$f_{xy} = -1$$

için

$$\Delta = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0$$

dır. $A\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ noktasında bir extremum vardır. Aynı zamanda

$$\left(f_{xx}\right)_A = 2 > 0 \quad \left[\ veya \left(f_{yy}\right)_A = 2 > 0\right]$$

olduğundan $A\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ noktasında bir minimum değere sahiptir ve $z_{\min} = -\frac{4}{3}$ tür.

Örnek 3. $z = f(x,y) = y\left(3x^2 - 6x + y^2\right)$

fonksiyonunun tüm kritik (stasyoner) noktalarını bularak cinslerini belirleyiniz.

Çözüm: Fonksiyonun x ve y' ye göre kısmi türevleri alınırsa,

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 6xy - 6y = 0 \\ f_y &= 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y(x-1) &= 0 \\ x^2 + y^2 - 2x &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

(1) Sisteminin çözüm takımları,

$$\begin{pmatrix} x - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{pmatrix}$$

dır. Bu çözüm takımlarından sistemin tüm stasyoner noktaları, A (1,1), B (1,-1), C (0,0), D (2,0) dır.

$$f_{xx} = 6y$$
$$f_{yy} = 6y$$
$$f_{xy} = 6(x-1)$$

$A(1,1)$

için $\Delta = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 36y^2 - 36(x-1)^2$ olur.

$\Delta_A = 36 > 0$ olup, A noktasında bir extremum vardır ve $(f_{xx})_A = 6 > 0$ olduğundan $A(1,\ 1)$ noktası fonksiyonun bir minimum noktası olup fonksiyonun bu noktada aldığı değer $f(1,1) = -2$ dir.

$\Delta_B = 36 > 0$ olup, B noktasında bir extremum vardır ve $(f_{xx})_B = -6 < 0$ olduğundan $B(1,\ -1)$ noktası fonksiyonun bir maksimum noktası olup fonksiyonun bu noktada aldığı değer $f(1,-1) = 2$ dir. $\left.\begin{array}{l}\Delta_C = -36 < 0 \\ \Delta_D = -36 < 0\end{array}\right\}$ olduğundan bu noktalarda extremum yoktur

Örnek 2. $z = f(x, y) = xye^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)}$ fonksiyonunun yerel maksimum, yerel minimum ve eyer noktalarını bulunuz.

Çözüm: Fonksiyonun z_x ve z_y türevlerinin aynı anda sıfır olduğu noktalarda fonksiyon ekstremum değerlere sahiptir. Buna göre;

$$\left.\begin{aligned} z_x &= (y - yx^2)e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)} = 0 \\ z_y &= (x - xy^2)e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} y(1-x^2) = 0 \\ x(1-y^2) = 0 \end{aligned}\right\}$$

olur. Elde edilen denklem sisteminin çözüm kümesinden aranan kritik noktalar; A(0,0), B(1,1), C(1,-1), D(-1,1), E(-1,-1) olarak bulunur.

$$z_{xx} = (-3xy + x^3y)e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)}$$

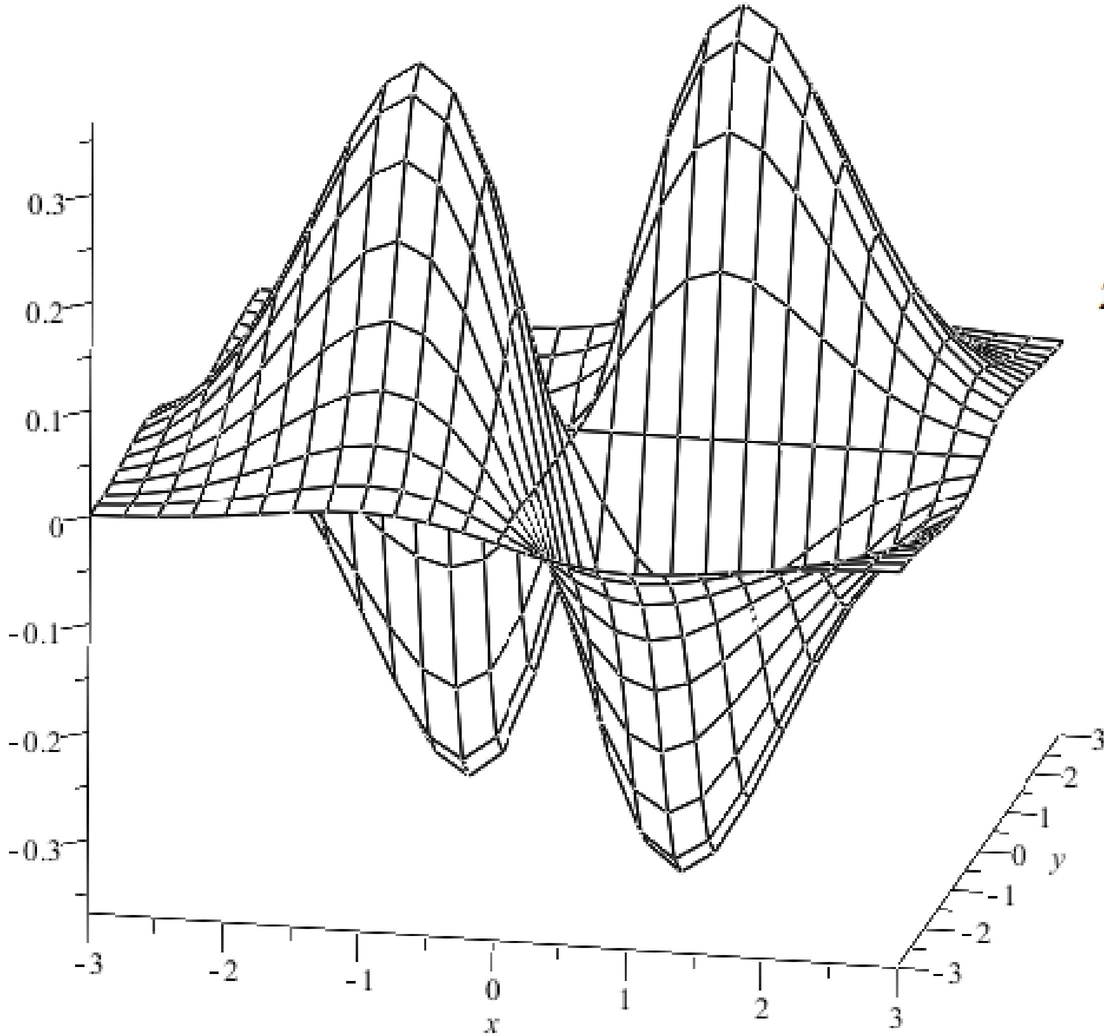
$$z_{yy} = (-3xy + xy^3)e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)}$$

$$z_{xy} = (1 - x^2 - y^2 + x^2y^2)e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)}$$

ifadeleri $\Delta(x, y) = z_{xx}z_{yy} - (z_{xy})^2$ de yazılıp ve her bir kritik noktanın Δ ve z_{xx} (veya z_{yy}) de almış olduğu değerler hesaplandığında aşağıdaki tablo elde edilir.

Aynı zamanda fonksiyonun aşağıdaki grafiğinden de bulunan sonuçların doğruluğu görülebilir.

Kritik Noktalar	$\Delta(x,y)$	$z_{xx}(x,y)$	Noktanın Cinsi
$A(0,0)$	$\Delta(0,0)=-1<0$	0	Eyer noktası
$B(1,1)$	$\Delta(1,1)=4e^{-2}>0$	$-2e^{-1}<0$	Yerel maksimum
$C(1,-1)$	$\Delta(1,-1)=4e^{-2}>0$	$2e^{-1}>0$	Yerel minimum
$D(-1,1)$	$\Delta(-1,1)=4e^{-2}>0$	$2e^{-1}>0$	Yerel minimum
$E(-1,-1)$	$\Delta(-1,-1)=4e^{-2}>0$	$-2e^{-1}<0$	Yerel maksimum



$$z = xye^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)}$$

Örnek 4. $z = f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$ fonksiyonunun tüm kritik noktalarını bulup cinslerini inceleyiniz.

Çözüm: Fonksiyonun *x* ve *y*' ye göre kısmi türevleri alınırsa,

$$\begin{aligned} f_x &= 3x^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \\ f_y &= 3y^2 - 12 = 0 \Rightarrow y^2 - 4 = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

olur. Birinci denklemden $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \mp 1$ dir. Bunlar ikici denklemde yazılırsa,

$x = 1$ için $\{y^2 - 4 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \mp 2\}$ olup syasyoner noktalar *A*(1,2), *B*(1,-2)

$x = -1$ için $\{y^2 - 4 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \mp 2\}$ olup stasyoner noktalar, C(-1,2), *D*(-1,-2) olurlar.

Sonuç olrak; (1) sisteminin çözümünden tüm stasyoner noktalar; *A*(1,2), *B*(1,-2), C(-1,2), *D*(-1,-2) olarak bulunur.

$$f_{xx} = 6x$$
$$f_{yy} = 6y$$
$$f_{xy} = 0$$

için $\Delta = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 36xy$ olur. Şimdi bulunan stasyoner noktaların cinsleri incelenirse,

$\Delta_A = 72 > 0$ olup, A noktasında bir extremum vardır ve $(f_{xx})_A = 6 > 0$ olduğundan (1, 2) noktası fonksiyonun bir minimum noktasıdır.

$\left.\begin{array}{l}\Delta_B = -72 < 0 \\ \Delta_C = -72 < 0\end{array}\right\}$ olduğundan bu noktalarda extremum yoktur.

$\Delta_D = 72 > 0$ olup, D noktasında bir extremum vardır ve $(f_{xx})_D = -6 < 0$ olduğundan (-1, -2) noktası fonksiyonun bir maksimum noktasıdır.

Örnek 5. $f(x,y) = xy(1-x^2-4y^2)$ fonksiyonunun extremumlarını bulup cinslerini inceleyiniz.

Çözüm: Fonksiyonun x ve y' ye göre kısmi türevleri alınırsa,

$$\left.\begin{aligned} f_x &= y - 3x^2y - 4y^3 = 0 \Rightarrow y(1-3x^2-4y^2) = 0 \\ f_y &= x - x^3 - 12xy^2 = 0 \Rightarrow x(1-x^2-12y^2) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

olur. (1) sisteminin çözüm takımları,

$$\begin{pmatrix} y=0 \\ x=0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y=0 \\ 1-x^2-12y^2=0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1-3x^2-4y^2=0 \\ x=0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1-3x^2-4y^2=0 \\ 1-x^2-12y^2=0 \end{pmatrix}$$

dır. Çözüm takımlarından sistemin tüm stasyoner noktaları,

$$A(0,0), \quad B(1,0), \quad C(-1,0), \quad D(0,\frac{1}{2}), \quad E(0,-\frac{1}{2}),$$

$$F(\frac{1}{2},\frac{1}{4}), \quad G(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}), \quad H(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}) \ ,I(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}),$$

olur.

$$f_{xx} = -6xy$$
$$f_{yy} = -24xy$$
$$f_{xy} = 1 - 3x^2 - 12y^2$$

için, $\Delta = 144x^2y^2 - (1 - 3x^2 - 12y^2)^2$ dır.

$$\left.\begin{aligned} \Delta_A &= -1 < 0 \\ \Delta_B &= -4 < 0 \\ \Delta_C &= -4 < 0 \\ \Delta_D &= -4 < 0 \\ \Delta_E &= -4 < 0 \end{aligned}\right\} \text{olduğundan bu noktalarda extremum yoktur.}$$

$\Delta_F = 2 > 0$ olup, F noktasında bir extremum vardır. $(f_{xx})_F = -\dfrac{3}{4} < 0$ olduğundan fonksiyon F noktasında bir maksimum değere sahiptir.

$\Delta_G = 2 > 0$ olup, G noktasında bir extremum vardır. $(f_{xx})_G = \frac{3}{4} > 0$ olduğundan fonksiyon G noktasında bir minimum değere sahiptir.

$\Delta_H = 2 > 0$ olup, H noktasında bir extremum vardır. $(f_{xx})_H = \frac{3}{4} > 0$ olduğundan fonksiyon H noktasında bir minimum değere sahiptir.

$\Delta_I = 2 > 0$ olup, I noktasında bir extremum vardır. $(f_{xx})_I = -\frac{3}{4} < 0$ olduğundan fonksiyon I noktasında bir maksimum değere sahiptir.

b) Bağlı extremeum ve Lagrange çarpanı.

$z = f(x,y)$ fonksiyonunun yardımcı $g(x,y)=0$ koşulu altında extremeumu incelenmesi problemine bağlı extremeum problemi denir.

Bu tür problemlerin çözümü üç farklı yöntemle yapılır.

1 Yöntem. fonksiyonun f_x, f_y, ve bağ fonksiyonun g_x, g_y kısmi türevleri hesaplanır, ve

$$\begin{cases} \dfrac{f_x}{g_x} = \dfrac{f_y}{g_y} \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi çözülür.

Bu denklem sisteminin çözümü olan (x_0, y_0) noktası buluruz.

② Yöntem: (Lagrange çarpanı):

$\dfrac{f_x}{g_x} = \lambda$ ve $\dfrac{f_y}{g_y} = \lambda$ denilerek,

$$\begin{cases} f_x + \lambda g_x = 0 \\ f_y + \lambda \cdot g_y = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

sisteminden (x_0, y_0) ve λ değerleri bulunur. Buradaki λ'ya Lagrange çarpanı denir.

$z = f(x, y)$

③ Yöntem.

Eğer $g(x,y,z)=0$ bağ denkleminin değişkenlerinden biri, örneğin z çözülerek $z=h(x,y)$ bulunur. Bulunan $z=h(x,y)$, $f(x,y,z)$'de yerine yazılır. ve bu problem iki değişkenli serbest extremum problemine indirgenir.

Not! Bu yöntemler değişken sayısı ikiden fazla olması durumunda da geçerlidir.

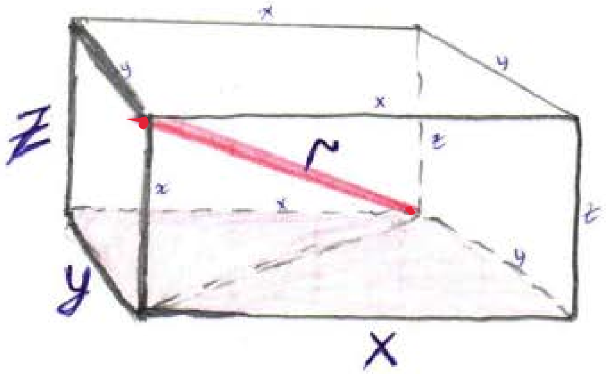
okduğundan

Örnek: Köşegeni uzunluğu r olan maksimum hacimli dikdörtgenler prizmasının boyutlarını bulunuz.

Çözüm: Prizmanın kenar uzunlukları x, y, z olmak üzere extremumu aranan hacim fonksiyonu

$$\boxed{f(x,y,z) = x \cdot y \cdot z}$$

dir.



Prizmanın köşegen uzunluğu $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ olduğundan bağ fonksiyonu

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \quad \text{olur.}$$

Extremum bulunması için

$$\begin{cases} \dfrac{f_x}{g_x} = \dfrac{f_y}{g_y} = \dfrac{f_z}{g_z} \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

sistem ortak çözülmelidir.

Ozaman, $f(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$ olup,

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} = \frac{f_z}{g_z}$$

$f_x = y.z$ $\qquad$ $g_x = 2x$

$f_y = x.z$ $\qquad$ $g_y = 2y$

$f_z = x.y$ $\qquad$ $g_z = 2z$ olur.

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} \Rightarrow \frac{y.\cancel{z}}{2x} = \frac{x.\cancel{z}}{2y} \Rightarrow \frac{y.z}{x.z} = \frac{2x}{2y} \Rightarrow \boxed{x = y}$$

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_z}{g_z} \Rightarrow \frac{f_x}{f_z} = \frac{g_x}{g_z} \Rightarrow \frac{y.z}{x.y} = \frac{2x}{2z} \Rightarrow \boxed{x = z}$$ olurki

$\boxed{x = y = z}$ olde edilir. Bu değerleri $g(x,y,z) = 0$ da yerine yazarsak, $3x^2 - r^2 = 0$ olur. $\Rightarrow x^2 = \frac{r^2}{3} \Rightarrow \boxed{x = \frac{r}{\sqrt{3}}}$

Kenar uzunlukları $x=y=z=\frac{r}{\sqrt{3}}$ olduğundan istenilen maksimum hacimli prizma, kenar uzunlukları $\frac{r}{\sqrt{3}}$ olan bir küptür.

Şimdi aynı örneği Lagrange çarpanları ile çözelim. Yani,

$$\frac{f_x}{g_x}=\lambda \quad , \quad \frac{f_y}{g_y}=\lambda \quad \text{ve} \quad \frac{f_z}{g_z}=\lambda \quad \text{dan}$$

$$\begin{cases} f_x - \lambda \cdot g_x = 0 \\ f_y - \lambda g_y = 0 \\ f_z - \lambda g_z = 0 \end{cases}$$ elde edilir. Bu sistemde

kısmı türevlerin değerlerini yerine yazalım.

$$y \cdot z - \lambda \cdot 2x = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{y \cdot z}{2x} \quad (*)$$

$$x \cdot z - \lambda \cdot 2y = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{x \cdot z}{2y}; \quad (\#)$$

$$x \cdot y - \lambda \cdot 2z = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{x \cdot y}{2z} \quad (**)$$

$(*)$ ve $(\#)$ den $\frac{y \cdot z}{2x} = \frac{x \cdot z}{2y} \Rightarrow \frac{y \cdot \cancel{z}}{x \cdot \cancel{z}} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}y} \Rightarrow \boxed{x = y}$

$(*)$ ve $(**)$ dan $\frac{y \cdot z}{2x} = \frac{xy}{2z} \Rightarrow \frac{\cancel{y} \cdot z}{x \cdot \cancel{y}} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}z} \Rightarrow \boxed{x = z}$

olur. Yani $\boxed{x=y=z}$ bulunur. Bu bağıntını

$g(x,y,z)=0$ da yerine yazarsak

$$x=y=z=\frac{r}{\sqrt{3}}$$ elde edilir. Yani $f(x,y,z)=$

$=x.y.z$ den $f\left(\frac{r}{\sqrt{3}},\frac{r}{\sqrt{3}},\frac{r}{\sqrt{3}}\right)=\frac{r^3}{3\sqrt{3}}$; olur.

Örnek: Bir düzlem koordinat eksenlerini a, b, c de keserek bir dört yüzlü oluşturuyor. Bu dört yüzlünün içine çizilebilen maksimum hacimli dikdörtgenler prizmasının boyutlarını bulunuz. ($a, b, c \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere)

Çözüm: Eksenleri a, b, c noktalarında kesen düzlemin denklemi $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ dir.

Bu dörtyüzlünün içinden çizilecek prizmanın kenarlarına x, y, z dersek, hacmi $\boxed{V = x \cdot y \cdot z}$ olur. Yani $f(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$ fonksiyonunun maksimumu istenmektedir.

Bu fonksiyonun bağ fonksiyonu da

$$g(x,y,z) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$ olur.

Ozaman,

$$\begin{cases} \dfrac{f_x}{g_x} = \dfrac{f_y}{g_y} = \dfrac{f_z}{g_z} \\ g(x,y,z) = 0. \end{cases}$$ sistemi çözülmelidir.

~~Burada~~ Sistemde ihtiyacımız olan kısmi türevleri hesaplayalım.

$f_x = y \cdot z$, $f_y = xz$, $f_z = xy$.

$g_x = \dfrac{1}{a}$, $g_y = \dfrac{1}{b}$, $g_z = \dfrac{1}{c}$ olur.

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} \Rightarrow \frac{y \cdot \cancel{z}}{\frac{1}{a}} = \frac{x \cdot \cancel{z}}{\frac{1}{b}} \Rightarrow a \cdot y = b \cdot x \Rightarrow \boxed{y = \frac{b}{a} x;}$$

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_z}{g_z} \Rightarrow \frac{\cancel{y} \cdot z}{\frac{1}{a}} = \frac{x \cancel{y}}{\frac{1}{c}} \Rightarrow a \cdot z = c \cdot x \Rightarrow \boxed{z = \frac{c}{a} x}$$

olur. $y = \frac{b}{a}x$ ve $z = \frac{c}{a}x$ değerleri $g(x,y,z)=0$ da yerine yazılırsa,

$$g\left(x, \frac{b}{a}x, \frac{c}{a}x\right) = \frac{x}{a} + \frac{\frac{\cancel{b}}{a}x}{\cancel{b}} + \frac{\frac{\cancel{c}}{a}x}{\cancel{c}} - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{x}{a} + \frac{x}{a} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{3x}{a} - 1 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{a}{3}}$ bulunur. Bu değer $y = \frac{b}{a}x$ ve $z = \frac{c}{a}x$ da yerine yazılırsa,

$y = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{3} = \frac{b}{3}$, $z = \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{3} = \frac{c}{3}$ elde edilir.

Yani, prizmanın kenarlarının uzunluğu

$$\boxed{x = \frac{a}{3}, \quad y = \frac{b}{3}, \quad z = \frac{c}{3}}$$ olur.

Aynı problem (3). yöntemden yararlanılarak serbest extremuma dönüştürülebilir.

Gerçekten,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Rightarrow z = c.\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$$ olup,

bu sonuç

$$\boxed{f(x,y,z) = x.y.z}$$ de yerine yazılırsa,

$$f(x,y,z(x,y)) = x.y.c.\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$$ olur.

$f(x,$

$$\begin{cases} f_x = c \cdot y\left(1 - \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) - \dfrac{c}{a}\, x \cdot y = 0 \\ f_y = c \cdot x\left(1 - \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) - \dfrac{c}{b}\, x \cdot y = 0 \end{cases}$$

sisteminin çözümünü bulalım.

$$\begin{cases} c \cdot y\left(1 - \dfrac{2x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = 0 \\ c \cdot x \cdot \left(1 - \dfrac{x}{a} - \dfrac{2y}{b}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ için} \\ c \cdot x\left(1 - \dfrac{x}{a}\right) = 0 \end{cases} \text{ ve} \quad 1$$

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{2x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0 \text{ için} \quad 2 \\ c \cdot x\left(1 - \dfrac{x}{a} - \dfrac{2y}{b}\right) = 0 \end{cases} \text{ yazılır.}$$

$\begin{cases} y=0 \text{ için} \\ x=0 \text{ ve } x=a \end{cases}$ bulunur. $A(0,0)$, $B(a,0)$.

$\begin{cases} 1-\frac{2x}{a}-\frac{y}{b}=0 \\ x=0 \text{ için} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=b \\ x=0 \end{cases}$ bulunur. $C(0,b)$

$-2\begin{cases} 1-\frac{2x}{a}-\frac{y}{b}=0 \\ 1-\frac{x}{a}-\frac{2y}{b}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{b}{3} \\ -1+\frac{3x}{a}=0 \Rightarrow x=\frac{a}{3} \end{cases}$ olur.

$D\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3}\right)$ olur.

Şimdi Δ'nın A, B, C, D noktalarındaki işaretini inceleyelim. Onun için ikinci mertebeden kısmi türevleri ve bu türevlerin A, B, C, D noktalarındaki değerlerini hesaplayalım:

$$f_{xx} = c\cdot y\cdot\left(-\frac{2}{a}\right) = -\frac{2c}{a}\cdot y$$

$$f_{yy} = -\frac{2c}{b}x\,; \qquad f_{xy} = c\cdot\left(1-\frac{2x}{a}-\frac{y}{b}\right)-\frac{1}{b}\cdot cy =$$

$$= c-\frac{2c}{a}x-\frac{2c}{b}y \quad \text{olup,}$$

$$f_{xx}\Big|_{A(0,0)} = 0, \qquad f_{yy}\Big|_{A(0,0)} = 0, \qquad f_{xy}\Big|_{A(0,0)} = c\,;$$

$$f_{xx}\Big|_{B(a,0)} = 0, \qquad f_{yy}\Big|_{B(a,0)} = -\frac{2ac}{b}, \qquad f_{xy}\Big|_{B(a,0)} = -c\,;$$

$$f_{xx}\Big|_{C(0,b)} = -\frac{2b.c}{a}, \quad f_{yy}\Big|_{C(0,b)} = 0, \quad f_{xy}\Big|_{C(0,b)} = -c;$$

$$f_{xx}\Big|_{D(\frac{a}{3},\frac{b}{3})} = -\frac{2c.b}{3a}; \quad f_{yy}\Big|_{D(\frac{a}{3},\frac{b}{3})} = -\frac{2ac}{3b},$$

$$f_{xy}\Big|_{D(\frac{a}{3},\frac{b}{3})} = -\frac{c}{3};$$

bulunur. Şimdi

$\Delta\Big|_{A(0,0)} = 0.0 - c^2 = -c^2 < 0$ old. $A(0,0)$ noktasında fonksiyonun extremumu yoktur.

Semer

$\Delta\Big|_{B(a,0)} = 0.\left(-\frac{2ab}{b}\right) - (-c)^2 = -\cancel{\frac{2ac}{b}} - c^2 < 0$ olup fonksiyonun $B(a,0)$ noktasında extremumu yoktur.

semer

$$\Delta\Big|_{C(0,b)} = \left(-\frac{2bc}{a}\right)\cdot 0 - (-c)^2 = -\left(\cancel{\frac{2bc}{a}} + c^2\right) < 0 .\ \checkmark$$

olduğundan $C(0,b)$'de extremumu yoktur.

$$\Delta\Big|_{D\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3}\right)} = \left(-\frac{2c.b}{3a}\right)\cdot\left(-\frac{2ac}{3b}\right) - \left(-\frac{c}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{4c^2}{9} - \frac{c^2}{9} = \frac{3}{9}c^2 = \frac{c^2}{3} > 0$$ olup

fonksiyon $D\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3}\right)$ noktasında extremuma sahiptir.

$f_{xx}\Big|_{D}$, (ya da $f_{yy}\Big|_{D}$)

Bu durumda

$$f_{xx}\Big|_{D\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3}\right)} = -\frac{2c.b}{3a} < 0 \quad \left(f_{yy}\Big|_{D\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3}\right)} = -\frac{2ac}{3b} < 0 \right)$$

olup fonksiyon $D\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3}\right)$ noktasında maksimuma sahiptir.

$$z_{max}\Big|_{D\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3}\right)} = f\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3}\right) = \frac{a}{3}\cdot\frac{b}{3}\cdot c\left(1-\frac{\frac{a}{3}}{a}-\frac{\frac{b}{3}}{b}\right) =$$

$$= \frac{a.b.c}{9}\cdot\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right) = \frac{a.b.c}{9.3} = \frac{a.b.c}{27};$$

olur. Yani, $x=\frac{a}{3}$, $y=\frac{b}{3}$ olduğuna göre

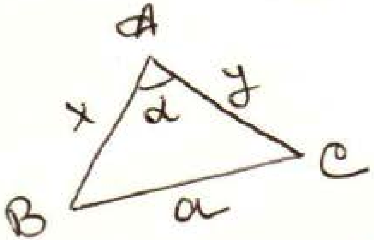
$$V = x.y.z = \frac{a}{3}\cdot\frac{b}{3}\cdot z = \frac{a.b.c}{27} \Rightarrow \boxed{z=\frac{c}{3}}$$

elde edilir ki, prizmanın boyutları,

$x = \frac{a}{3}$, $y = \frac{b}{3}$, $z = \frac{c}{3}$ olur.

Örnek: Tepe açısı α, tabanı a olan üçgenlerden çevresi maksimum olanını bulunuz.

Çözüm:



çevresi, $f(x,y) = x + y + a$ olur. Kenar uzunlukları x, y, a olan üçgen için cosinüs teoreminden bağ fonksiyonu

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - a^2 - 2xy\cdot\cos\alpha = 0 \quad \text{dır.}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \cos(\widehat{x,y})}$$

O zaman, $f_x = 1$, $f_y = 1$, $g_x = 2x - 2y\cos\alpha$

$g_y = 2y - 2x\cos\alpha$ olur.

$$\begin{cases} \dfrac{f_x}{g_x} = \dfrac{f_y}{g_y} \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2(x - y\cos\alpha)} = \dfrac{1}{2(y - x\cos\alpha)} \\ x^2 + y^2 - a^2 - 2xy\cos\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y\cos\alpha = y - x\cos\alpha \\ x^2 + y^2 - a^2 - 2xy\cos\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\cancel{(1+\cos\alpha)} = y\cdot\cancel{(1+\cos\alpha)} \\ x^2 + y^2 - a^2 - 2xy\cos\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x^2 - a^2 - 2x^2\cos\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2(2 - 2\cos\alpha) = a^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \dfrac{a}{\sqrt{2-2\cos\alpha}} \end{cases}$$ yani, üçgen ikizkenar üçgendir.

Örnek: Pozitif bir a sayısını öyle bir üç parçaya ayırınız ki, bunların çarpımları maksimum olsun.

$f(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$

$g(x,y,z) = x+y+z-a=0$ olsun.

(30 sayısı için uygula)

$x+y+z=a$

Kaynaklar:

1. A. H. Berksoy, O. Özkan, Mühendisler İçin Çözümlü Kalkülüs, S.Ü. Basımevi, 2010
2. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus II**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2010.
3. J. Stewart, Kalkülüs Kavram ve Kapsam (Diferansiyel ve İntegral Hesap), TÜBA, 2010.