# MATEMATIK 1

*Konya Teknik Üniversitesi*
*Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi*
*Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü*

**Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI**

**2020**

# LİMİT VE SÜREKLİLİK

## 6.1. Bir Fonksiyonun Limiti

**Tanım 6.1.1.** $A \subset \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ noktası $A$ kümesinin bir yığılma noktası olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunu ele alalım. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için $|x - a| < \delta$ iken $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ pozitif sayısı varsa $x$ değişkeni $a$ sayısına yaklaştığında $y = f(x)$ fonksiyonunun limiti $L$'dir denir ve $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ şeklinde gösterilir. Bir fonksiyonun herhangi bir noktada limiti varsa tektir.

Limit tanımında, $x$ değişkeni $a$ sayısına $x \neq a$ olacak şekilde her iki yönden yaklaşırken $y = f(x)$ değerlerinin giderek $L$ sayısına daha yakın değerler alması söz konusudur. Aslında $y = f(x)$ fonksiyonu $x = a$ noktasında tanımlı bile olmayabilir. Burada asıl önemli olan $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasına yakın değerler için nasıl tanımlandığıdır.

**Örnek 6.1.1.** $\lim_{x \to 1}(9x-5)=4$ olduğunu limit tanımını kullanarak gösteriniz.

**Çözüm.** Her $\varepsilon > 0$ için $|x-1| < \delta$ iken $|f(x)-4| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısının var olduğunu gösterelim.

$$|(9x-5)-4| = |9x-9| = |9(x-1)| = 9|x-1| < \varepsilon$$

olup $\delta = \dfrac{\varepsilon}{9}$ dur. Dolayısıyla $\lim_{x \to 1}(9x-5)=4$ dür.

## 6.2. Sağdan ve Soldan Limitler

Limit tanımında $x$ değişkeninin $a$ noktasına nasıl yaklaşacağı konusunda bir sınırlama yoktur ancak bazen bir sınırlama konulması gerekir.

$x$ değişkeni bir $a$ sayısından büyük ve $a$ ya yakın değerler alıyorsa $x$, $a$ ya sağdan yaklaşıyor denir ve $x \to a^+$ şeklinde gösterilir. $x$ değişkeni bir $a$ sayısından küçük ve $a$ ya yakın değerler alıyorsa $x$, $a$ ya soldan yaklaşıyor denir ve $x \to a^-$ şeklinde gösterilir.

$A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ veya $f : A - \{a\} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

$x$ değişkeni $a$ sayısına soldan yaklaştığında $f(x)$ de bir $L_1$ reel sayısına yaklaşıyorsa; $L_1$ sayısına $f$ fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki soldan limiti denir ve

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$$

şeklinde gösterilir.

$x$ değişkeni $a$ sayısına sağdan yaklaştığında $f(x)$ de bir $L_2$ reel sayısına yaklaşıyorsa; $L_2$ sayısına $f$ fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki sağdan limiti denir ve

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$$

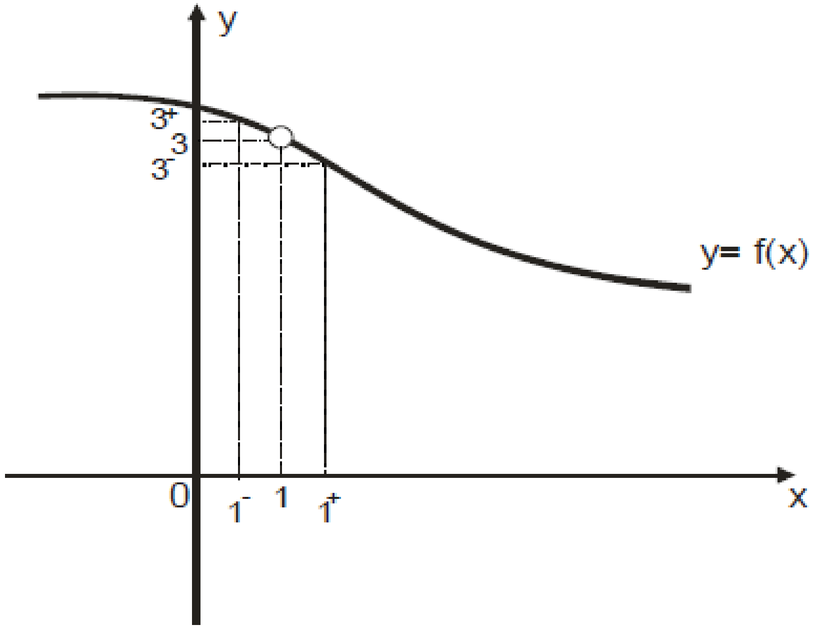
şeklinde gösterilir.

$f$ fonksiyonunun $x = a$ noktasında limitinin var olması için gerek ve yeter şart bu noktadaki sağdan ve soldan limitlerinin mevcut ve birbirine eşit olmasıdır. Yani $L_1 = L_2 = L$ ise $f$ fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki limiti $L$ dir denir ve

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

şeklinde gösterilir.

**Örnek 6.2.1.**




**Şekil 6.2.1.**

$x \to 1^+$ iken $f(x) \to 3^-$ olduğundan $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3$ dür.

$x \to 1^-$ iken $f(x) \to 3^+$ olduğundan $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$ dür. Bu durumda

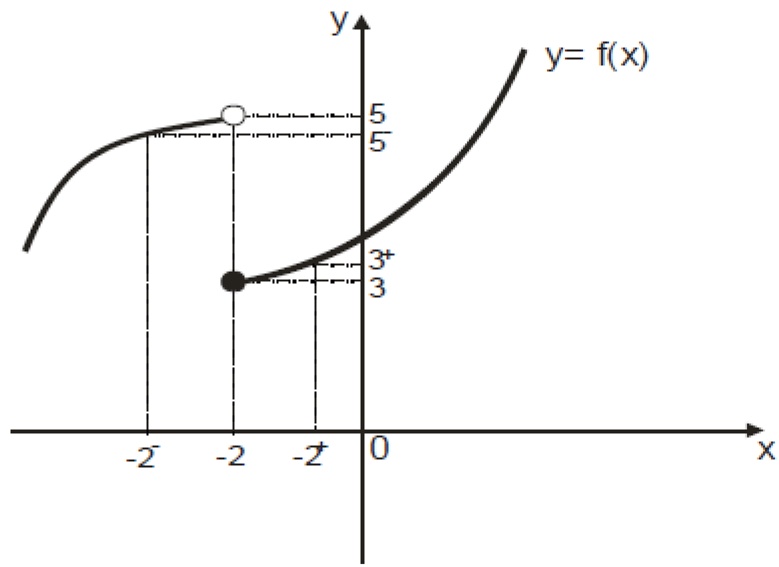
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 3$$

olduğundan $f$ fonksiyonunun $x=1$ noktasında limiti vardır ve

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 3$$

dür.

**Örnek 6.2.2.**




**Şekil 5.6.2.**

$x \to -2^+$ iken $f(x) \to 3^+$ olduğundan $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 3$ dür.

$x \to -2^-$ iken $f(x) \to 5^-$ olduğundan $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 5$ dir. Bu durumda

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) \neq \lim_{x \to -2^-} f(x)$$

olduğundan $f$ fonksiyonunun $x = -2$ noktasında limiti yoktur.

## 6.3. Limit Teoremleri

$A \subset \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ noktası $A$ kümesinin bir yığılma noktası, $f : A \to \mathbb{R}$ ve $g : A \to \mathbb{R}$ tanımlı iki fonksiyon olmak üzere $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$, $k$ sabit bir reel sayı ve $n \in \mathbb{N}^+$ olsun.

**(1)** $\lim\limits_{x \to a} x = a$ ve $\lim\limits_{x \to a}(k) = k$ dır.

**Örnek 6.3.1.** $\lim\limits_{x \to 3} x = 3$, $\lim\limits_{x \to -3} x = -3$, $\lim\limits_{x \to 2} 5 = 5$, $\lim\limits_{x \to -2} 5 = 5$ dir.

**(2)** $\lim\limits_{x \to a}\left[f(x) \mp g(x)\right] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \mp \lim\limits_{x \to a} g(x) = L_1 \mp L_2$ dir.

$\lim\limits_{x \to a}\left[k.f(x)\right] = k.L_1$ dir.

$\lim\limits_{x \to a} f^n(x) = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]^n = L_1^n$ dir.

**Örnek 6.3.2.** $\lim\limits_{x\to 3}\left(3x^2+4x+5\right)=\lim\limits_{x\to 3}3x^2+\lim\limits_{x\to 3}4x+\lim\limits_{x\to 3}5$

$$=3\lim_{x\to 3}x^2+4\lim_{x\to 3}x+\lim_{x\to 3}5$$

$$=3.3^2+4.3+5=44 \text{ dür.}$$

**(3)** $\lim\limits_{x\to a}(f(x).g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x).\lim\limits_{x\to a}g(x)=L_1.L_2$ dir.

**Örnek 6.3.3.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+\frac{3}{2}x+1\right)=\lim\limits_{x\to 1}x^2+\lim\limits_{x\to 1}\frac{3}{2}x+\lim\limits_{x\to 1}1$

$$=\lim_{x\to 1}x.\lim_{x\to 1}x+\frac{3}{2}\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}1$$

$$=1.1+\frac{3}{2}.1+1=\frac{7}{2} \text{ dir.}$$

**(4)** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\dfrac{L_1}{L_2}\quad (L_2\neq 0)$ dir.

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{1}{L_2}\quad (L_2\neq 0)\ \text{dir.}$$

**Örnek 6.3.4.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x}{x^3+3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^3+3)}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1}x^2+2\lim\limits_{x\to 1}x}{\lim\limits_{x\to 1}x^3+\lim\limits_{x\to 1}3}=\frac{1^2+2.1}{1^3+3}=\frac{3}{4}\ \text{dür.}$$

**(5)** $n\in\mathbb{N}^+$ ve tek sayı ise $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a}f(x)}$ dir. $n\in\mathbb{N}^+$ ve çift sayı ise, $f(x)\geq 0$ ve $\lim\limits_{x\to a}f(x)\geq 0$ olmak üzere

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}$$

dir.

**Örnek 6.3.5.** $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt[3]{3x+2} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 2}(3x+2)} = \sqrt[3]{8} = 2$ dir.

**(6)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ fonksiyonunun

$x \to a$ iken limiti

$$\lim_{x\to a} f(x) = b_n a^n + b_{n-1}a^{n-1} + \ldots + b_1 a + b_0$$

dır.

**Örnek 6.3.6.** $\lim\limits_{x\to 1}(x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1)$

$$= 1^5 + 4.1^4 + 3.1^3 + 2.1^2 + 1 + 1 = 12 \text{ dir.}$$

**(7)** $\lim\limits_{x\to a} k^{f(x)} = k^{L_1}$ dir.

**Örnek 6.3.7.** $\lim\limits_{x\to 4} 2^{x+2} = 2^{\lim\limits_{x\to 4}(x+2)} = 2^6 = 64$ dür.

**(8)** $\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = L_1^{L_2}$ dir.

**Örnek 6.3.8.** $\lim_{x\to 0}[x^2+1]^{(2x+5)} = [\lim_{x\to 0}(x^2+1)]^{\lim_{x\to 0}(2x+5)} = 1^5 = 1$ dir.

**(9)** $\lim_{x\to a}\log_b f(x) = \log_b(\lim_{x\to a} f(x)) = \log_b L_1 \quad (L_1 > 0)$ dir.

$L_1 \leq 0$ ise $\lim_{x\to a}\log_b f(x)$ limiti mevcut değildir.

**Örnek 6.3.9.** $\lim_{x\to 0}\ln(\cos x) = \ln(\lim_{x\to 0}(\cos x)) = \ln 1 = 0$ dır.

**(10)** $\lim_{x\to a}|f(x)| = |L_1|$ dir.

**Örnek 6.3.10.** $\lim_{x\to 3}|x^2-5x| = |\lim_{x\to 3}(x^2-5x)| = |9-15| = |-6| = 6$ dır.

## 6.4. Sonsuz Kavramı

Bir $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. $a\in\mathbb{R}$ olmak üzere, eğer $x\to a$ için $f(x)\to 0$ ise, $f$ fonksiyonuna sonsuz küçük, eğer $x\to a$ için $\dfrac{1}{f(x)}\to 0$ ise, $f$ fonksiyonuna sonsuz büyük denir ve

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \text{ veya } f(x)\to\infty$$

şeklinde ifade edilir.

Limit tanımına dikkat edilirse, "$\infty$" un gerçek anlamda bir limit olmadığı ancak fonksiyon için sürekli olarak büyüme anlamına geldiğine dikkat edilmelidir.

## 6.5. Özel Tanımlı Fonksiyonların Limiti

### 6.5.1. Parçalı Fonksiyonların Limiti

Parçalı fonksiyonların kritik noktalarındaki ve rasyonel fonksiyonların paydasını sıfır yapan noktalardaki limitini hesaplamak için bu noktalardaki sağdan ve soldan limite bakılır.

**Örnek 6.5.1.1.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tanımlı $f(x)=\begin{cases} x^3+2x+1, & x>1 \\ 3^x+2x-1, & x\le 1 \end{cases}$

fonksiyonunun $x=1$ noktasındaki limitini, varsa hesaplayınız.

**Çözüm.** $x=1$ noktası $f$ fonksiyonunun kritik noktası olduğundan, sağdan ve soldan limite bakılmalıdır.

$x > 1$ için $f(x) = x^3 + 2x + 1$ olduğundan,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^3 + 2x + 1) = 1^3 + 2.1 + 1 = 4$$

dür.

$x \leq 1$ için $f(x) = 3^x + 2x - 1$ olduğundan,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3^x + 2x - 1) = 3^1 + 2.1 - 1 = 4$$

dür.

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 4$ olduğundan, $f$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasında limiti vardır ve

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 4$$

dür.

**Örnek 6.5.1.2.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tanımlı $f(x)=\begin{cases} x^3+1, & x\le 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), & x>0 \end{cases}$

fonksiyonunun $x=2$ noktasındaki limitini, varsa hesaplayınız.

**Çözüm.** $x>0$ için $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ olup, $x=2$ noktası kritik nokta

olmadığından,

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]=\sin(\pi)=0$$

dır.

## 6.5.2. Mutlak Değer Fonksiyonunun Limiti

$y = |f(x)|$ fonksiyonunun kritik noktalarında yani $f(x) = 0$ denkleminin köklerinde limiti sıfırdır.

**Örnek 6.5.2.1.** $\lim_{x \to 3} |x^3 - 27| = |3^3 - 27| = 0$ dır.

**Örnek 6.5.2.2.** $\lim_{x \to -2} |x + 2| = |-2 + 2| = 0$ dır.

**Örnek 6.5.2.3.** $\lim_{x \to 2} |1 - x^2| = \left|\lim_{x \to 2} (1 - x^2)\right| = |-3| = 3$ dür.

### 6.5.3. İşaret Fonksiyonunun Limiti

$y = \operatorname{sgn} f(x)$ fonksiyonunun kritik noktalarında yani $f(x) = 0$ denkleminin köklerinde limitini hesaplamak için sağdan ve soldan limite bakılır.

**Örnek 6.5.3.1.** $f(x) = x^2 + 5 + \operatorname{sgn}(x^3 - 3) + \operatorname{sgn}(x - 5)$ fonksiyonunun $x = 3$ noktasındaki limitini, varsa hesaplayınız.

**Çözüm.** $x = 3$ noktası $f$ fonksiyonunun kritik noktası olmadığından,

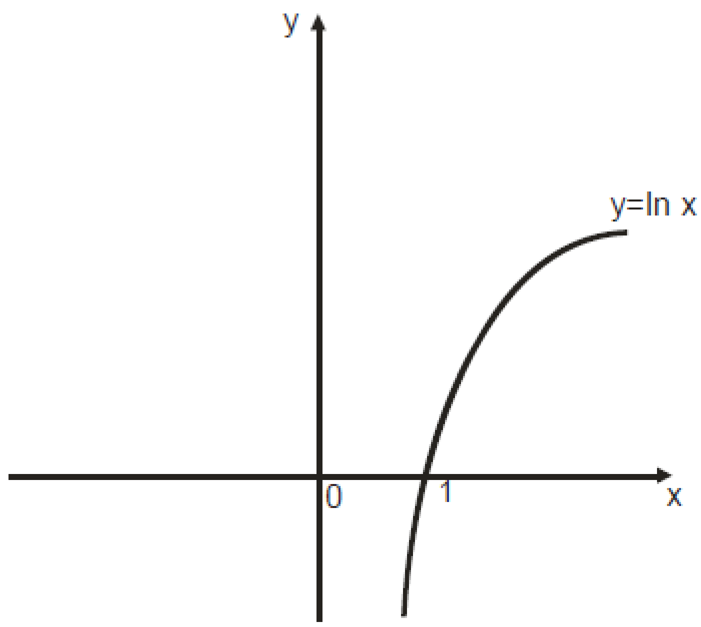
$$\lim_{x \to 3} \left( x^2 + 5 + \operatorname{sgn}(x^3 - 3) + \operatorname{sgn}(x - 5) \right) = 3^2 + 5 + \operatorname{sgn}(24) + \operatorname{sgn}(-2)$$

$$= 9 + 5 + 1 - 1 = 14$$

dür.

**Örnek 6.5.3.2.** $f(x) = \operatorname{sgn}(\ln x)$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki limitini, varsa hesaplayınız.

**Çözüm.** $x = 1$ noktası $f$ fonksiyonunun kritik noktası olduğundan, sağdan ve soldan limite bakılmalıdır.




**Şekil 6.5.3.1.**

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left[\operatorname{sgn}(\ln x)\right],\ x \to 1^+ \text{ için } \ln x > 0 \text{ olduğundan,}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left[\operatorname{sgn}(\ln x)\right] = 1$$

dir.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left[\operatorname{sgn}(\ln x)\right],\ x \to 1^- \text{ için } \ln x < 0 \text{ olduğundan,}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left[\operatorname{sgn}(\ln x)\right] = -1$$

dir.

$\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$ olduğundan, $f$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasında limiti yoktur.

**Uyarı 6.5.3.1.** İşaret fonksiyonunun, kritik noktalarında limiti genellikle yoktur. Ancak istisna durumlar olabilir.

**Örnek 6.5.3.3.** $f(x)=\operatorname{sgn}\left(x^2-6x+9\right)$ fonksiyonunun $x=3$ noktasındaki limitini, varsa hesaplayınız.

**Çözüm.** $x=3$ noktası $f$ fonksiyonunun kritik noktası olduğundan sağdan ve soldan limite bakılmalıdır.

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\left[\operatorname{sgn}\left(x^2-6x+9\right)\right]=\lim_{x\to 3^+}\left[\operatorname{sgn}(x-3)^2\right]$$

ve

$x\to 3^+$ için $(x-3)\to 0^+$ ve $(x-3)^2\to 0^+>0$ olduğundan,

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=1$$

dir.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}\left[\operatorname{sgn}\left(x^2-6x+9\right)\right] = \lim_{x\to 3^-}\left[\operatorname{sgn}(x-3)^2\right]$$

ve

$x \to 3^-$ için $(x-3) \to 0^-$ ve $(x-3)^2 \to 0^+ > 0$ olduğundan,

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 1$$

dir.

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = 1$ olduğundan $f$ fonksiyonunun $x = 3$

noktasında limiti vardır ve $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$ dir.

## 6.5.4. Tam Değer Fonksiyonunun Limiti

$y=[\![f(x)]\!]$ fonksiyonunun kritik noktalarındaki yani $f(x)\in\mathbb{Z}$ olan değerlerde limitini hesaplamak için sağdan ve soldan limite bakılır.

**Örnek 6.5.4.1.** $f(x)=x-1-[\![x]\!]$ fonksiyonunun $x=2$ noktasındaki limitini, varsa hesaplayınız.

**Çözüm.** $x=2$ noktası $f$ fonksiyonunun kritik noktası olduğundan sağdan ve soldan limite bakılmalıdır.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(x-1-[\![x]\!]\right) \text{ ve } x\to 2^+ \text{ için } [\![x]\!]=2$$

olduğundan

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2-1-2 = -1$$

dir.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(x-1-[\![x]\!]\right) \text{ ve } x\to 2^- \text{ için } [\![x]\!]=1$$

olduğundan

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2-1-1 = 0$$

dır.

$\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$ olduğundan, $f$ fonksiyonunun $x=2$ noktasında limiti yoktur.

**Örnek 6.5.4.2.** $f(x) = x^3 + 2x^2 - \left[\!\left[ \frac{x}{3} \right]\!\right]$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki limitini, varsa hesaplayınız.

**Çözüm.** $x = 1$ noktası $f$ fonksiyonunun kritik noktası olmadığından

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \left( x^3 + 2x^2 - \left[\!\left[ \frac{x}{3} \right]\!\right] \right) = 1^3 + 2.1^2 - \left[\!\left[ \frac{1}{3} \right]\!\right]$$

$$= 3 - \left[\!\left[ 0,\overline{3} \right]\!\right] = 3 - 0 = 3$$

dür.

**Uyarı 6.5.4.1.** Tam değer fonksiyonunun, kritik noktalarında limiti genellikle yoktur. Ancak istisna durumlar olabilir.

**Örnek 6.5.4.3.** $f(x)=[\![2x^2]\!]+2x+1$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki limitini, varsa hesaplayınız.

**Çözüm.** $x=0$ noktası $f$ fonksiyonunun kritik noktası olduğundan, sağdan ve soldan limite bakılmalıdır.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$ olduğundan, $f$ fonksiyonunun $x=0$

$[\![2$ noktasında limiti vardır ve $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ dir.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left([\![2x^2]\!]+2x+1\right)$, $x\to 0^-$ için $x^2\to 0^+$ ve

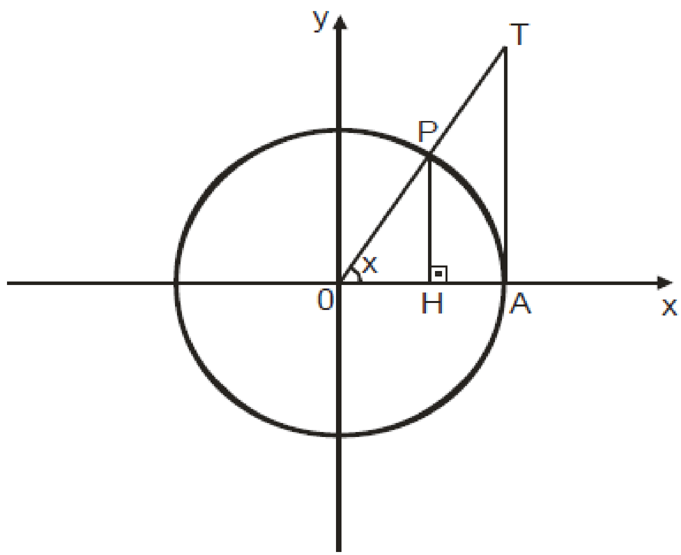
$[\![2x^2]\!]=0$ olduğundan $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0+2.0+1=1$ dir.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$ olduğundan, $f$ fonksiyonunun $x=0$

noktasında limiti vardır ve $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ dir.

**Örnek 6.5.4.4.** $\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ limitini hesaplayınız.

**Çözüm.**




**Şekil 6.5.4.1.**

Yukarıdaki birim çemberde $s(P\hat{O}A) = x$ radyan ise $PA$ yayının uzunluğunun ölçüsü $x$ birim olur. Ayrıca $|PH| = \sin x$ ve

$|TA| = \tan x$ tir. $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ için

$$|PH| < |\overset{\frown}{PA}| < |TA|$$

$$\Rightarrow \sin x < x < \tan x$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(1) > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > \lim_{x\to 0}\cos x$$

$$\Rightarrow 1 > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > 1$$

olduğundan

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

dir. Buradan $a\in\mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan ax}{x}\right)=a \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{ax}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{ax}\right)=\frac{1}{a}$$

olduğu görülür.

**Örnek 6.5.4.5.** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{3x}\right)$ limitini hesaplayınız.

**Çözüm.** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{3x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin 2x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sin 2x}{2x}\right)=\frac{2}{3}$ dür.

**Örnek 6.5.4.6.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan 4x}{\tan 5x}\right)$ limitini hesaplayınız.

**Çözüm.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan 4x}{\tan 5x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\dfrac{\tan 4x}{x}}{\dfrac{\tan 5x}{x}}\right)=\dfrac{4}{5}$ dir.

**Örnek 6.5.4.7.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin^2 5x}{4x^2}\right)$ limitini hesaplayınız.

**Çözüm.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin^2 5x}{4x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 5x}{2x}\right)^2=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$ dür.

**Uyarı 6.5.4.2.** $a,b\in\mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{\sin bx}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan ax}{\tan bx}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{\tan bx}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan ax}{\sin bx}\right)=\frac{a}{b}$$

dir.

# Kaynaklar:


1. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus I**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.
2. Prof. Dr. C. Çinar, Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, Prof. Dr. A. S. Kurbanlı, Prof. Dr. D. Şimşek, **Genel Matematik**, Dizgi Ofset, 2013.
3. Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, **Analiz III Diziler ve Seriler,** Dizgi Ofset, 2017.
4. H. İ. Karakaş, **Matematiğin Temelleri, Sayı Sistemleri ve Cebirsel Yapılar,** ODTÜ yayınları, 2011.