MATEMATİK - 2

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

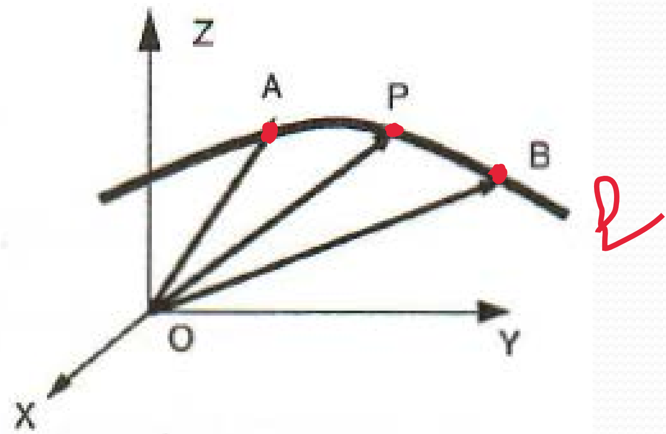
Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2021

VEKTÖR DEĞERLİ FONKSİYONLAR

Şimdiye kadar yapılan çalışmalarda, reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonlarla, yani $f : A \subset R \rightarrow R$ biçimindeki fonksiyonlarla ilgilendik. Değişkenler birer reel sayı olduğu gibi fonksiyonun aldığı değerler de birer sayı (skaler) idi. Bu bölümde aldığı değerler birer vektör olan fonksiyonları inceleyecek, onların diferensiyel ve integrali üzerinde duracağız.

Uzayda bir eğri üzerinde hareket eden bir cisim, t_1 anında A noktasında ise onun konum vektörü $\overrightarrow{\mathbf{OA}}$, t_2 anında B noktasında ise onun konum vektörü $\overrightarrow{\mathbf{OB}}$ olacaktır. Şu halde herbir t anına bir $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$ konum vektörü karşılık gelecektir.



Şekil 6.1

TANIM 6. 1 : $A \subset R$ ve V de bir vektör uzayı olsun. A nın herbir elemanına V nin bir ve yalnız bir elemanını karşılık getiren fonksiyona bir **vektör değerli fonksiyon** adı verilir.

Bu bölümde A olarak, R nin bir alt aralığını, V olarak da çoğu kez, E^3 üç boyutlu Öklid uzayını alacağız. Dolayısıyla

$$\boxed{F : A \to E^3}$$

biçimindeki fonksiyonları inceleyeceğiz. Buna göre herbir $t \in A$ sayısına bir $F(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ vektörü karşılık gelecektir. **i**, **j** ve **k**, E^3 uzayının standart birim vektörleri olmak üzere,

$$F(t) = f_1(t)\,\mathbf{i} + f_2(t)\,\mathbf{j} + f_3(t)\,\mathbf{k}$$

yazılabileceği açıktır. buradaki f_1, f_2 ve f_3 fonksiyonlarına, vektör değerli **F** fonksiyonunun **bileşen fonksiyonları** adı verilir. Vektör değerli fonksiyonlar ya **F** şeklinde koyu yazılarak, ya da $\vec{F}$ şeklinde üstüne ok konularak gösterilir. Biz bu kitapta vektörleri ve vektör değerli fonksiyonları koyu yazarak, **F, G, r, ...** biçiminde göstereceğiz.

Tanım kümesi belirtilmediğinde

$$\mathbf{F}(t) = f_1(t)\,\mathbf{i} + f_2(t)\,\mathbf{j} + f_3(t)\,\mathbf{k}$$

biçiminde verilen bir **F** fonkisiyonunun tanım kümesi, f_1, f_2 ve f_3 fonksiyonlarını tanımlı kılan t parametlerinin kümesidir. Örneğin f_1 fonksiyonunun tanım kümesi A_1, f_2 nin tanım kümesi A_2 ve f_3 ün tanım kümesi A_3 ise **F** fonksiyonunun tanım kümesi $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ olacaktır.

ÖRNEK. 6. 1 :

$F(t) = \ln t\, i + e^t\, j + \sqrt{1-t^2}\, k$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm:

$f_1(t) = \ln t$, $f_2(t) = e^t$ ve $f_3(t) = \sqrt{1-t^2}$ dir. f_1 in tanımlı olması için $t > 0$ olmalıdır. O halde $A_1 = (0, +\infty)$ dir. f_2 nin tanım kümesi $A_2 = R$ dir. f_3 ün tanımlı olması için

$|t| \leq 1$

$1 - t^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq t \leq 1$ olmalıdır. Şu halde $A_3 = [-1, 1]$ dir. O halde **F** nin tanım kümesi $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = (0, +\infty) \cap R \cap [-1, 1] = (0, 1]$ aralığıdır.

TANIM 6. 2 : **F** ile **G** vektör değerli, h ile u da reel değerli fonksiyonlar olsun.

F + G, **F − G**, h**F**, **F . G**, **F x G** ve **F**ou fonksiyonları

a) $(F + G)(t) = F(t) + G(t)$

b) $(F - G)(t) = F(t) - G(t)$

c) $(h F)(t) = h(t) F(t)$

d) $(F . G)(t) = F(t) \cdot G(t)$

e) $(F \times G)(t) = F(t) \times G(t)$

f) $(Fou)(t) = F(u(t))$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyonların tanım kümeleri sağdaki ifadeleri tanımlı yapan t parametrelerinin kümesidir. Burada **F . G** skalar değerli, diğerleri vektör değerli birer fonksiyondur.

ÖRNEK. 6. 2 :

$\mathbf{F}(t) = \sin t\, \mathbf{i} - \cos t\, \mathbf{j} + t\, \mathbf{k}$, $\mathbf{G}(t) = \cos t\, \mathbf{i} - \sin t\, \mathbf{j} + \mathbf{k}$

$h(t) = \sqrt{t}$, $u(t) = t^2$ olduğuna göre $\mathbf{F} + \mathbf{G}$,

$\mathbf{F} - \mathbf{G}$, $\mathbf{F} . \mathbf{G}$, $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$, $h\,\mathbf{F}$ ve $\mathbf{F}o u$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm:

$(\mathbf{F} + \mathbf{G})(t) = \mathbf{F}(t) + \mathbf{G}(t) = (\sin t + \cos t)\, \mathbf{i} - (\sin t + \cos t)\, \mathbf{j} + (t + 1)\, \mathbf{k}$

$(\mathbf{F} - \mathbf{G})(t) = \mathbf{F}(t) - \mathbf{G}(t) = (\sin t - \cos t)\, \mathbf{i} + (-\cos t + \sin t)\, \mathbf{j} + (t - 1)\, \mathbf{k}$

$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})(t) = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{G}(t) = \sin t \cos t + \sin t \cos t + t = \sin 2t + t$

$$(\mathbf{F} \times \mathbf{G})(t) = \mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos t & -\sin t & 1 \\ \sin t & -\cos t & t \end{vmatrix} =$$

$$= (t \sin t - \cos t)\, \mathbf{i} - (\sin t - t \cos t)\, \mathbf{j} + (\cos^2 t - \sin^2 t)\, \mathbf{k}$$

$(h\,\mathbf{F})(t) = h(t)\, \mathbf{F}(t) = \sqrt{t} \sin t\, \mathbf{i} - \sqrt{t} \cos t\, \mathbf{j} + t^{3/2}\, \mathbf{k}$

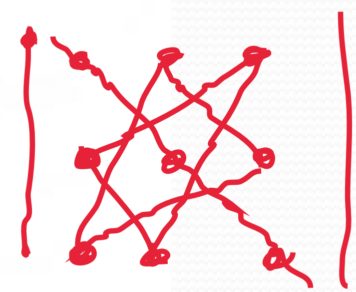
$(\mathbf{F}o u)(t) = \mathbf{F}(u(t)) = \sin(t^2)\, \mathbf{i} - \cos(t^2)\, \mathbf{j} + t^2\, \mathbf{k}$

olur. Yukarıdaki fonksiyonlardan $h\mathbf{F}$ fonksiyonunun tanım kümesi $[0, +\infty)$, diğerlerininki tüm reel sayılardır.

$i \times i =$

$j \times j =$

$k \times k =$



TANIM 6. 3 :

$\mathbf{F}(t) = f_1(t)\,\mathbf{i} + f_2(t)\,\mathbf{j} + f_3(t)\,\mathbf{k}$ fonksiyonu verildiğinde

$$\|\mathbf{F}(t)\| = \sqrt{(f_1(t))^2 + (f_2(t))^2 + (f_3(t))^2}$$

biçiminde tanımlanan $\|\mathbf{F}\|$ fonksiyonu bir reel değerli fonksiyondur.

Bu fonksiyona **F nin normu** veya **büyüklüğü** denir.

ÖRNEK. 6. 3 :

$\mathbf{F}(t) = 4\cos t\,\mathbf{i} + 4\sin t\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$ fonksiyonunun normunu bulunuz.

Çözüm :

$$\|\mathbf{F}(t)\| = (16\cos^2 t + 16\sin^2 t + 9)^{1/2} = \sqrt{25} = 5$$

olur.

$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

TANIM 6.4 : **F** ve **G** vektör değerli fonksiyonlar olsun.

F ile **G**, A üzerinde **ortogonaldir**(diktir). $\Leftrightarrow \forall t \in A$ için $F(t) \cdot G(t) = 0$

ÖRNEK. 6.4 :

$F(t) = (t - t^2)\,\mathbf{i} + (1 + 3t)\,\mathbf{j} - 2t\,\mathbf{k}$

$G(t) = (1 - 2t)\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + (1 + t^2)\,\mathbf{k}$

fonksiyonlarının ortogonal olduklarını gösteriniz.

Çözüm :

$$F(t) \cdot G(t) = (t - t^2) \cdot (1 - 2t) + (1 + 3t)\,t - 2t\,(1 + t^2)$$

$$= \cancel{t} - \cancel{2t^2} - \cancel{t^2} + \cancel{2t^3} + \cancel{t} + \cancel{3t^2} - \cancel{2t} - \cancel{2t^3} = 0$$

olduğundan fonksiyonlar R üzerinde ortogonaldir.

VEKTÖR DEĞERLİ FONKSİYONLARIN LİMİT VE SÜREKLİLİĞİ

Bu kesimde önce vektör değerli fonksiyonların limit ve sürekliliğini inceleyecek, daha sonra reel değerli bileşen fonksiyonları ile olan ilişkilerini araştıracağız.

TANIM 6. 5 : t_o, **F** fonksiyonunun tanım kümesinin bir yığılma noktası olsun.

F fonksiyonunun t_o noktasındaki limiti **L** vektörüdür $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta > 0$ öyleki

$0 < |t - t_o| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan herbir t için $\|\mathbf{F}(t) - \mathbf{L}\| < \varepsilon$ dur.

Limitin var olması halinde bu limit

$$\lim_{t \to t_o} \mathbf{F}(t) = \mathbf{L}$$

şeklinde gösterilir.

TEOREM 6. 1 :

$\mathbf{F}(t) = f_1(t)\,\mathbf{i} + f_2(t)\,\mathbf{j} + f_3(t)\,\mathbf{k}$ olsun. **F** fonksiyonunun t_o da bir limite sahip olması için gerek ve yeter şart f_1, f_2, f_3 fonksiyonlarının t_o da birer limite sahip olmasıdır. Limitin varolması durumunda

$$\lim_{t \to t_o} \mathbf{F}(t) = \left[\lim_{t \to t_o} f_1(t)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t \to t_o} f_2(t)\right]\mathbf{j} + \left[\lim_{t \to t_o} f_3(t)\right]\mathbf{k}$$

olur.

ÖRNEK. 6. 6 : f_2 f_3

f_1

$$\lim_{t\to 0}\left(2e^t\,\mathbf{i}+\frac{\sin t}{t}\,\mathbf{j}+\frac{3-t}{1+t}\,\mathbf{k}\right)$$

$f(t)$

limitini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\lim_{t\to 0} 2e^t = 2,\qquad \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1,\qquad \lim_{t\to 0}\frac{3-t}{1+t} = 3$$

olduğundan istenen limit,

$$L = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

dır.

TEOREM 6. 2: :

F ve G vektör değerli, h da skalar değerli fonksiyonlar olup her üçü de t_o ın bir komşuluğunda tanımlı olsun.

$\lim_{t \to t_0} F(t) = A$, $\lim_{t \to t_0} G(t) = B$ ve $\lim_{t \to t_0} h(t) = m$ ise

a) $\lim_{t \to t_0} [F(t) + G(t)] = A + B$

b) $\lim_{t \to t_0} [F(t) \cdot G(t)] = A \cdot B$

c) $\lim_{t \to t_0} [F(t) \times G(t)] = A \times B$

d) $\lim_{t \to t_0} [h(t)\, F(t)] = mA$

dır.

ÖRNEK. 6.5 :

$\mathbf{F}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ ve $\mathbf{G}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + (t-1)\,\mathbf{k}$ olduğuna göre

$\lim\limits_{t\to 0}[\mathbf{F}(t)\cdot\mathbf{G}(t)]$ ve $\lim\limits_{t\to 0}[\mathbf{F}(t)\times\mathbf{G}(t)]$ limitlerini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\lim_{t\to 0}\mathbf{F}(t) = \mathbf{i} \quad \text{ve} \quad \lim_{t\to 0}\mathbf{G}(t) = \mathbf{j}-\mathbf{k} \quad \text{olacağından,}$$

$$\lim_{t\to 0}\mathbf{F}(t)\cdot\mathbf{G}(t) = (\mathbf{i})\cdot(\mathbf{j}-\mathbf{k}) = \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}-\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0$$

$$\lim_{t\to 0}\left[\mathbf{F}(t)\times\mathbf{G}(t)\right] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{j}+\mathbf{k}$$

$$\lim_{t\to 0} F(t) = 1.i + 0.j + 0.k$$

$$G(t) = 0.i + 1.j - 1k$$

TANIM 6. 6 :

F, $A \subset R$ üzerinde tanımlı bir vektör değerli fonksiyon ve t_o, A nın bir yığılma noktası olsun.

F fonksiyonu t_o da süreklidir $\Leftrightarrow$ $\lim_{t \to t_o} \mathbf{F}(t) = \mathbf{F}(t_o)$ dır.

F, A üzerinde süreklidir $\Leftrightarrow$ **F**, A nın her noktasında süreklidir.

Yukarıdaki tanıma göre **F** fonksiyonunun t_o da sürekli olması için,

1) **F** fonksiyonu t_o da tanımlı olmalıdır,

2) $\lim_{t \to t_o} \mathbf{F}(t)$ var olmalı,

3) Bu limit $\mathbf{F}(t_o)$ vektörüne eşit olmalı.

TEOREM 6. 3 :

Vektör değerli bir **F** fonksiyonunun t_o da sürekli olması için gerek ve yeter şart onun bileşen fonksiyonlarının t_o da sürekli olmasıdır.

TEOREM 6. 4 :

Eğer **F, G** ve h fonksiyonları t_o da sürekli ise **F + G**, **F . G**, **F x G** ve h**F** fonksiyonları da t_o noktasında süreklidir.

ÖRNEK. 6.7 :

$\mathbf{F}(t) = |t|\,\mathbf{i} + t [\![t]\!]\, \mathbf{j} + e^t\, \mathbf{k}$ fonksiyonunun $t = 0$ ve $t = 1$ noktalarında sürekli olup olmadığını araştırınız.

Çözüm :

$$\lim_{t\to 0} \mathbf{F}(t) = \lim_{t\to 0} [\, |t|\,\mathbf{i} + t [\![t]\!]\, \mathbf{j} + e^t\, \mathbf{k} \,]$$

$$= 0 \,.\, \mathbf{i} + 0 \,.\, \mathbf{j} + 1 \,.\, \mathbf{k} = \mathbf{k}$$

ve $\mathbf{F}(0) = \mathbf{k}$ olduğundan **F** fonksiyonu $t = 0$ noktasında süreklidir.

$$\lim_{t\to 1^+} t [\![t]\!] = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{t\to 1^-} t [\![t]\!] = 0$$

olduğundan $\lim\limits_{t\to 1} t [\![t]\!]$ mevcut değildir.

Şu halde verilen fonksiyon $t = 1$ de sürekli değildir. Zira limiti yoktur.

6.4. VEKTÖR DEĞERLİ FONKSİYONLARIN TÜREVİ

Vektör değerli fonksiyonların türevi de, limit ve süreklilikte olduğu gibi, reel değerli fonksiyonların türevine benzer şekilde tanımlanır.

TANIM 6. 9 :

F vektör değerli bir fonksiyon ve t_o da **F** nin tanım kümesinin bir yığılma noktası olsun. Eğer

$$\lim_{t \to t_o} \frac{F(t) - F(t_o)}{t - t_o} \tag{6.4}$$

limiti varsa bu limite **F** fonksiyonunun t_o noktasındaki türevi denir, $F'(t_o)$ veya $\frac{dF}{dt}(t_o)$ sembollerinden biri ile gösterilir.

$F'(t_o)$, eğriye $P(t_o)$ noktasında teğet olan bir vektördür. Bu vektör boyuna bölünürse

$$T(t_o) = \frac{F'(t_o)}{\|F(t_o)\|}$$

birim vektörü bulunur. Bu vektöre eğrinin t_o noktasındaki **birim teğet vektörü** adı verilir. Bu bölümde, aksi söylenmedikçe, teğet vektör denilince birim teğet vektör anlaşılacaktır.

T bir birim vektör olduğundan , $\|T(t)\| = 1$ dir. Teorem 6.6. da ispatlanacağı üzere

$$T(t) \cdot T'(t) = 0$$

olur. $\|T'(t)\| \neq 0$ ise $\dfrac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$ vektörü **T**(t) vektörüne dik olan bir birim vektördür. Bu vektöre t noktasındaki **birim normal vektör**, veya kısaca, **normal vektör** denir. Şu halde,

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$$

dir.

ÖRNEK. 6.13 :

$$r(t) = \cos t\, \mathbf{i} + \cos t\, \mathbf{j} + \sqrt{2}\sin t\, \mathbf{k}$$

eğrisine $t = \frac{\pi}{4}$ noktasından çizilen teğet ve normali bulunuz.

Çözüm :

$r'(t) = -\sin t\, \mathbf{i} - \sin t\, \mathbf{j} + \sqrt{2}\cos t\, \mathbf{k}$ ve $\|r'(t)\| = \sqrt{2}$ olduğundan

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t\, \mathbf{i} - \sin t\, \mathbf{j} + \sqrt{2}\cos t\, \mathbf{k})$$

$\|r'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (-\sin ...}$

$= \sqrt{2\sin^2 t}$

$= \sqrt{2}$;

olur. $t = \frac{\pi}{4}$ yazılırsa

$$T\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$$

olur.

$$T'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t\, \mathbf{i} - \cos t\, \mathbf{j} - \sqrt{2}\sin t\, \mathbf{k})$$

olduğundan,

$$\|T'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos^2 t + \cos^2 t + 2\sin^2 t\right)^{1/2} = 1$$

dir. Bu durumda

$$N = \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{T'(\frac{\pi}{4})}{\left\|T'(\frac{\pi}{4})\right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} - \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$$

olur.

Reel değerli fonksiyonlar için verilen türev alma kuralları vektör değerli fonksiyonlar için de geçerlidir.

TEOREM 6.6 :

F, G ve h fonksiyonları t noktasında, u da u(s) = t eşitliğini sağlayan s noktasında türevli ise,

$$[F(t) + G(t)]' = F'(t) + G'(t)$$

$$[h(t)\ F(t)]' = h'(t)\ F(t) + h(t)\ F'(t)$$

$$[F(t) \cdot G(t)]' = F'(t) \cdot G(t) + F(t) \cdot G'(t)$$

$$[F(t) \times G(t)]' = F'(t) \times G(t) + F(t) \times G'(t)$$

$$[(F o u)(s)]' = F'(u(s)) \cdot u'(s)$$

$[\vec{F}(t).\vec{G}(t)]' = \vec{F}'(t)\vec{G}$

ÖRNEK. 6.17 :

$F(t) = i - t^2\, j + t\, k$ ve $G(t) = t\, i + (1 + t)\, j + (t^2 + 1)\, k$ fonksiyonları için $[F(t) \cdot G(t)]'$ ve $[F(t) \times G(t)]'$ türevlerini hesaplayınız.

$\vec{F}'(t) = -2tj +$

$\vec{G}'(t) = 1i + j +$

Çözüm :

Önce çarpmalar yapılıp sonra türev alınabilir. Bu durumda

$$F(t) \cdot G(t) = t - t^2 \cancel{- t^3} + \cancel{t^3} + t = 2t - t^2$$

olacağından

$$[F(t) \cdot G(t)]' = 2 - 2t = 2(1 - t)$$

bulunur.

$\vec{F}'(t).\vec{G}(t) = -2t(1+$

$= -2t$

$= 1 - 2t$

$$F(t) \times G(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -t^2 & t \\ t & 1+t & 1+t^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(t^4 + 2t^2 + t)\, i - j + (1 + t + t^3)\, k$$

olacağından, $(-t^2 - t^4)i + j t^2 + (1+t)k + t^3 k -$

$\vec{F}(t).\vec{G}'(t) = 1 + (-$

$$[F(t) \times G(t)]' = -(4t^3 + 4t + 1)\, i + (1 + 3t^2)\, k$$

olur. $(-t - t^2)i - (1 + t^2)j =$

$2 - 2t$

$= t +$

Şimdi de bu türevleri, türev kurallarından yararlanarak hesaplayalım.

$$F'(t) = -2t\,j + k, \quad G'(t) = i + j + 2t\,k$$

olduğundan,

$$[F(t) \cdot G(t)]' = F'(t) \cdot G(t) + F(t) \cdot G'(t)$$

$$= (0 - 2t - 2t^2 + t^2 + 1) + (1 - t^2 + 2t^2)$$

$$= 2 - 2t$$

olur.

$$F'(t) \times G(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2t & 1 \\ t & 1+t & t^2+1 \end{vmatrix} = (-2t^3 - 3t - 1)\,i + t\,j + 2t^2\,k$$

$$F(t) \times G'(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -t^2 & t \\ 1 & 1 & 2t \end{vmatrix} = (-2t^3 - t)\,i - t\,j + (1 + t^2)\,k$$

olduğundan,

$$[F(t) \times G(t)]' = F'(t) \times G(t) + F(t) \times G'(t)$$

$$= \left[(-2t^3 - 3t - 1)\,i + t\,j + 2t^2\,k\right] + \left[(-2t^3 - t)\,i - t\,j + (1 + t^2)\,k\right]$$

$$= -(4t^3 + 4t + 1)\,i + (1 + 3t^2)\,k$$

olur.

TEOREM 6.8 :

C eğrisi, parametrik gösterimi,

$$\mathbf{r}\,(t) = x\,(t)\,\mathbf{i} + y\,(t)\,\mathbf{j} + z\,(t)\,\mathbf{k}, \qquad a \le t \le b$$

olan bir parçalı düzgün eğri ise bu eğrinin uzunluğu

$$\ell = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt$$

dir.

$$\ell = \int_a^b \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}$$

ÖRNEK. 6.19 :

$$\mathbf{r}(t) = 4\cos t\,\mathbf{i} + 4\sin t\,\mathbf{j} + 3t\,\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

helis parçasının uzunluğunu hesaplayınız.

Çözüm :

$$\mathbf{r}'\,(t) = -4\sin t\,\mathbf{i} + 4\cos t\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$$

olduğundan

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{16\sin^2 t + 16\cos^2 t + 9} = \sqrt{25} = 5$$

dir. Buna göre

$$\ell = \int_0^{2\pi} \|\mathbf{r}'(t)\| = dt = \int_0^{2\pi} 5\,dt = 10\pi$$

birim olur.

ÖRNEK. 6. 20 : Paremetrik gösterimi

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \frac{t^2}{2}\,\mathbf{j} + \frac{t^3}{6}\,\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le 6$$

olan eğri parçasının uzunluğunu hesaplayınız.

Çözüm :

$$\mathbf{r}'\,(t) = \mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\,\mathbf{k}$$

olduğundan

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{1 + t^2 + \frac{t^4}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{t^4 + 4t^2 + 4} = \frac{1}{2}\left(t^2 + 2\right)$$

dır. Buradan

$$\ell = \int_0^6 \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt = \frac{1}{2}\int_0^6 (t^2 + 2)\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3} + 2t\right)\Bigg|_0^6 = 42$$

birim olur.

ÖRNEK. 6. 21:

Parametrik gösterimi

$$\mathbf{r}(t) = a\,(t - \sin t)\,\mathbf{i} + a\,(1 - \cos t)\,\mathbf{j}\,, \qquad -2\pi \le t \le 2\pi$$

olan sikloid eğrisinin uzunluğunu bulunuz.

Çözüm :

$$\mathbf{r}'(t) = a\,(1 - \cos t)\,\mathbf{i} + a \sin t\,\mathbf{j}$$

olduğundan

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = a\,(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)^{1/2} = 2a\,|\sin \frac{t}{2}\,|$$

dır. Eğri parçalı düzgün olup iki eş parçadan oluşmuştur (Şekil 6.16).

$$\ell = 2 \cdot \int_0^{2\pi} \|\mathbf{r}'(t)\| = 2 \cdot 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\,dt = 16a \qquad \checkmark$$

olur.

VEKTÖR DEĞERLİ FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ

Vektör değerli fonksiyonların integrali Riemann toplamları oluşturularak tanımlandığında integral yine bileşen fonksiyonların integraline indirgenir. Bu nedenle integralin tanımını doğrudan bileşen fonksiyonların integralleri cinsinden tanımlıyoruz.

TANIM 6.11 :

f_1, f_2, f_3, [a, b] üzerinde integrallenebilen fonksiyonlar olmak üzere,

$$F(t) = f_1(t)\,\mathbf{i} + f_2(t)\,\mathbf{j} + f_3(t)\,\mathbf{k}$$

fonksiyonunun [a, b] aralığındaki belirli integrali

$$\int_a^b \mathbf{F}(t)\,dt = \left(\int_a^b f_1(t)dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b f_2(t)dt\right)\mathbf{j} + \left(\int_a^b f_3(t)dt\right)\mathbf{k},$$

vektörü, belirsiz integrali

$$\int \mathbf{F}(t)\,dt = \left(\int f_1(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int f_2(t)\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int f_3(t)\,dt\right)\mathbf{k}$$

vektör değerli fonksiyonudur.

ÖRNEK. 6.22 :

$\mathbf{F}(t) = 2t\,\mathbf{i} + 6t^2\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ fonksiyonu için $\int \mathbf{F}(t)\,dt$ ve $\int_0^1 \mathbf{F}(t)\,dt$ integrallerini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\int \mathbf{F}(t)\,dt = \left(\int 2t\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int 6t^2\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int 1\,dt\right)\mathbf{k}$$

$$= t^2\,\mathbf{i} + 2t^3\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$$

$$\int_0^1 \mathbf{F}(t)\,dt = \left[t^2\,\mathbf{i} + 2t^3\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}\right]\Big|_0^1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

olur.

$i + 2j + k$

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı noktalardaki türevlerini bulunuz.

   a) $F(t) = t\cos t\,\mathbf{i} + t\sin t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$, $\quad t = \pi$

   b) $F(t) = t^{5/2}\,\mathbf{i} + (1-t)^{5/2}\,\mathbf{j} + \frac{3t}{2}\,\mathbf{k}$, $\quad t = 0$

   c) $F(t) = e^t \sin t\,\mathbf{i} + e^t \cos t\,\mathbf{j} + e^t\,\mathbf{k}$, $\quad t = 0$

2. Aşağıdaki fonksiyonların türevini bulunuz.

   a) $F(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$

   b) $F(t) = t^2 \cos t\,\mathbf{i} + t^3 \sin t\,\mathbf{j} + t^4\,\mathbf{k}$

   c) $F(t) = t^{3/2}\,\mathbf{i} - (1-t)^{3/2}\,\mathbf{j} + \frac{3}{2}t\,\mathbf{k}$

   d) $F(t) = \arcsin 4t\,\mathbf{i} - 3\arctan(2t-1)\,\mathbf{j} + 7\ln 3t^2\,\mathbf{k}$

3. $F(t) = \frac{2}{\cos t}\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + \frac{1}{\sin t}\,\mathbf{k}$, $\quad G(t) = 3t\,\mathbf{i} - t^2\,\mathbf{j} - \frac{4}{\sin t}\,\mathbf{k}$

   olduğuna göre aşağıdaki fonksiyonların türevini bulunuz.

   a) $4F - 2G$, $\quad$ b) $F \cdot G$ $\quad$ c) $F \times G$

4. $F(t) = \frac{3}{t}\,\mathbf{i} - \mathbf{j}$ ve $G(t) = t\mathbf{i} - e^{-t}\,\mathbf{j}$ için $(F \cdot G)'(t)$ ve $(F \times G)'(t)$ türevlerini hesaplayınız.

5. $r(t) = a(t - \sin t)\,\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\,\mathbf{j}$ için $r'(t) = 0$ eşitliğini sağlayan t değerlerini bulunuz. Bu eğri R üzerinde parçalı düzgün müdür?

6. $F(t) = a\sin 2t\,\mathbf{i} + a(1 + \cos 2t)\,\mathbf{j} + 2a\sin t\,\mathbf{k}$, $\quad 0 \le t \le 2\pi$

   fonksiyonu için $\|F(t) \cdot F'(t)\|$ ifadesini hesaplayınız.

7. F, ikinci mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun.

$[F(t) \times F'(t)]' = F(t) \times F''(t)$

olacağını gösteriniz.

8. Aşağıda denklemleri verilen eğri parçalarının uzunluklarını hesaplayınız.

a) $r(t) = \sin t\, i + t\, j + (1 - \cos t)\, k,$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

b) $r(t) = e^t\, i + 2\sqrt{2}\, e^{t/2}\, j + k,$ $\quad 0 \le t \le 1$

c) $r(t) = \sin t\, i + \cos t\, j + \frac{2}{3} t^{3/2}\, k,$ $\quad 0 \le t \le 8$

d) $r(t) = t\, i + \frac{\sqrt{6}}{2} t^2\, j + t^3\, k,$ $\quad -1 \le t \le 2\pi$

e) $r(t) = \cos^3 t\, i + \sin^3 t\, j,$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

f) $r(t) = \frac{1}{3}(1 + t)^{3/2}\, i + \frac{1}{2}(1 - t)^{3/2}\, j + \frac{1}{2} t\, k,$ $\quad -1 \le t \le 1$

g) $r(t) = t\, i + t^2\, j + \frac{2}{3} t^3\, k,$ $\quad 0 \le t \le 3$

9. Aşağıda parametrik gösterimleri verilen eğrilerin karşılarında yazılı noktalar arasında kalan parçasının uzunluğunu bulunuz.

a) $r(t) = t\, i + \frac{1}{3} t^2\, j + \frac{2}{27} t^3\, k,$ $\quad (0, 0, 0)$ ve $(3, 3, 2)$

b) $r(t) = t\, i + 2 \arcsin \frac{t}{2}\, j + \frac{1}{2} \ln \frac{2 + t}{2 - t}\, k$ $\quad (0, 0, 0)$ ve (a, b, c)

10. Aşağıda parametrik gösterimleri verilen eğrilerin, karşılarında parametleri verilen noktalardaki birim teğet vektörlerini bulunuz.

a) $r(t) = e^t\, i + e^{-t}\, j + (1 + t^2)\, k,$ $\quad t = 0$

b) $r(t) = 2(t - \sin t)\, i + 2(1 - \cos t)\, j,$ $\quad t = \frac{\pi}{2}$

c) $r(t) = a \cos t\, i + b \sin t\, j,$ $\quad t = \frac{\pi}{4}$

d) $r(t) = \sqrt{2}\, t\, i + \frac{1}{2} t^2\, j + \frac{1}{2} t^2\, k,$ $\quad t = 1$

e) $r(t) = t \cos t\, i + t \sin t\, j + t\, k,$ $\quad t = \frac{\pi}{2}$

KAYNAKLAR:

1. **Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA,** Analiz III Diziler ve Seriler, Dizgi Ofset, 2017.
2. **G. B. Thomas ve Ark.,** Thomas Calculus I, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.
3. **Prof. Dr. M. Balcı,** Analiz 2, Balcı Yayınları, Ankara, 1997.