MATEMATİK 1

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2020

BELİRSİZ DURUMLAR

$y = f(x)$ fonksiyonunun, x değişkeninin bazı değerleri için limiti hesaplanırken $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0.\infty$, 1^{∞}, 0^{0} ve ∞^{0} belirsizlik ifadelerinden biri karşımıza çıkabilir. Ayrıca, $x = a$ için $y = f(x)$ fonksiyonunun değeri belirsiz iken $\lim_{x \to a} f(x) = L$ mevcut olabilir. Bu bölümde belirsizlik durumları için fonksiyonların gerçek değerlerini veren limitler ele alınacaktır.

Teorem 8.1. (L'Hospital Kuralı) $f(x)$ ve $g(x)$, $A \subset \mathbb{R}$ de tanımlı ve sürekli fonksiyonlar olmak üzere, bu fonksiyonlar $x = a \in A$ noktasında türevli ve

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0, \ \lim_{x \to a} g(x) = 0, \ \lim_{x \to a} g'(x) \neq 0$$

ise

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

dir.

Eğer $\lim_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ limitinde $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği devam ediyor ise L'Hospital kuralı bir kez daha uygulanır. Bu işlem belirsizlik yok edilinceye kadar uygulanır.

Yukarıda verilen bu kural $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği durumunda da uygulanabilir. Çünkü,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$$

şeklinde yazılabilir ki bu durumda $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği $\frac{0}{0}$ belirsizliğine dönüştürülür. Dolayısıyla yukarıdaki kural uygulanabilir.

$\frac{0}{0}$ Belirsizliği

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limiti hesaplanırken $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ ve $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ oluyorsa, $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. Bu durumda limit hesaplamak için üç farklı yol kullanılabilir.

(1) $x = a$ noktasında $f(a) = 0$ ve $g(a) = 0$ olduğundan her iki fonksiyonunda $(x-a)$ gibi bir çarpanı olacağından $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $(x-a)$ parantezine alınarak sadeleştirme yapıldıktan sonra belirsizlik durumu ortadan kaldırılır ve limit hesaplanabilir.

(2) Verilen fonksiyonlara denk olan ifadeler yerine yazılmak suretiyle veya fonksiyonun pay ya da paydasındaki ifadelerin eşleniği ile çarpılmak suretiyle belirsizlik durumu ortadan kaldırılabilir.

(3) L'Hospital kuralı uygulanabilir. Ancak bu kural uygulanırken öncelikle a) ve b) durumları göz önüne alınmalıdır.

Örnek 8.1.1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x-3}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $\lim\limits_{x\to 3}(x^3-27)=0$ ve $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)=0$ olduğundan $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x^2+3x+9)$$

$$=3^2+3.3+9=27$$

dir.

Örnek 8.1.2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln^2 x}{\sqrt{1+\ln^2 x}-\sqrt{1-\ln^2 x}}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır. Pay ve payda $\sqrt{1+\ln^2 x}+\sqrt{1-\ln^2 x}$ ile

çarpılırsa,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln^2 x}{\sqrt{1+\ln^2 x}-\sqrt{1-\ln^2 x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln^2 x(\sqrt{1+\ln^2 x}+\sqrt{1-\ln^2 x})}{1+\ln^2 x-1+\ln^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{1+\ln^2 x}+\sqrt{1-\ln^2 x})}{2} = 1$$

dir.

Örnek 8.1.3. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}-1)=0$ ve $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$ olduğundan $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}$$

dir.

Örnek 8.1.4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x+1-\sqrt{5-x}}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır. Pay ve payda $(x+1+\sqrt{5-x})$ ile çarpılırsa,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x+1-\sqrt{5-x}} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1+\sqrt{5-x})}{(x+1-\sqrt{5-x})(x+1+\sqrt{5-x})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1+\sqrt{5-x})}{(x+1)^2-(\sqrt{5-x})^2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1+\sqrt{5-x})}{x^2+3x-4}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1+\sqrt{5-x})}{(x-1)(x+4)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x+1+\sqrt{5-x}}{x+4} = \frac{4}{5}$$

dir.

Örnek 8.1.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x^2}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır. O halde L'Hospital kuralını uygulayacak olursak,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{4x}$$

$\dfrac{0}{0}$ belirsizliği ortadan kalkmadığı için tekrar L'Hospital kuralını uygulayacak olursak,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{4}=\frac{1}{4}$$

dür.

Örnek 8.1.6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{\ln(x^2 + x + 1)}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır. O halde L'Hospital kuralını uygulayacak olursak,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{\ln(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{3e^{3x} + 3e^{-3x}}{\dfrac{2x+1}{x^2 + x + 1}} = \frac{3e^0 + 3e^0}{1} = 6$$

dır.

Örnek 8.1.7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{3^{\sin x}-1}{\log_3(x+1)}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır. O halde L'Hospital kuralını uygulayacak olursak,

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^{\sin x}-1}{\log_3(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x.3^{\sin x}.\ln 3}{\dfrac{1}{x+1}\log_3 e} = \frac{1.3^0.\ln 3}{1.\log_3 e} = \frac{\ln 3}{\log_3 e} = \ln 3.\ln 3 = (\ln 3)^2$$

dir.

Örnek 8.1.8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{e^{\cos 2x}-1}{\sin 2x.\cos 2x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır. O halde L'Hospital kuralını uygulayacak olursak,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\cos 2x}-1}{\sin 2x.\cos 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-2.\sin 2x.e^{\cos 2x}}{2.\cos 2x.\cos 2x - 2.\sin 2x.\sin 2x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin 2x.e^{\cos 2x}}{.\cos^2 2x - \sin^2 2x} = \frac{-1.e^0}{0-1} = 1$$

dir.

$\frac{\infty}{\infty}$ Belirsizliği

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ limiti hesaplanırken $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ ve $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$

oluyorsa, $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. Bu durumda limit hesaplanmak için

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\dfrac{1}{g(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

şeklinde yazılabilir. O zaman ifade $\frac{0}{0}$ belirsizliği dönüştürülür.

Dolayısıyla yukarıdaki kurallar uygulanabilir.

Örnek 8.2.1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cot x)}{\ln x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. O halde L'Hospital kuralını uygulayacak olursak,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cot x)}{\ln x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{-\dfrac{1}{\sin^2 x}}{\cot x}}{\dfrac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{\sin^2 x} \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x}}{\dfrac{1}{x}}$$

$$= -\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = -1.1 = -1$$

dir.

Örnek 8.2.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{3x}}{x^3}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. O halde L'Hospital kuralını uygulayacak olursak,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{3x}}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3e^{3x}}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{3x}}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3e^{3x}}{2x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{e^{3x}}{x}$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{3e^{3x}}{1}=\infty$$ dur.

Örnek 8.2.3. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. O halde L'Hospital kuralını uygulayacak olursak,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 0$$

dır.

Uyarı 8.2.1. $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ ve

$g(x)=b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0$ birer polinom olmak üzere,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m}=\begin{cases} n>m \text{ ise } (+\infty \text{ veya } -\infty) \\ n=m \text{ ise } \dfrac{a_n}{b_m} \\ n<m \text{ ise } 0 \end{cases}$$

değerlerini alır.

Örnek 8.2.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2+2x+5}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm.

$$\lim_{x\to\infty}(x^4+x^2+1)=\lim_{x\to\infty}\left[x^4\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)\right]=(\infty)^4.(1+0+0)=+\infty$$

ve

$$\lim_{x\to\infty}(x^2+2x+5)=\lim_{x\to\infty}\left[x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)\right]=(\infty)^2.(1+0+0)=+\infty$$

olduğundan $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^2+1}{x^2+2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}$$

$$=\frac{(\infty)^2(1+0+0)}{(1+0+0)}=+\infty$$

dur.

Örnek 8.2.5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+2x^2+x}{3x^3+x+1}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm.

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+2x^2+x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^3\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right]=(-\infty)^3.(1+0+0)=-\infty$$

ve

$$\lim_{x\to-\infty}(3x^3+x+1)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^3\left(3+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\right]=(-\infty)^3.(3+0+0)=-\infty$$

olduğundan $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+2x^2+x}{3x^3+x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(3+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}$$

$$=\frac{(1+0+0)}{(3+0+0)}=\frac{1}{3}$$ dür.

Örnek 8.2.6. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x^3 + x^2}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm.

$$\lim_{x \to \infty} x^2 = (\infty)^2 = \infty$$

ve

$$\lim_{x \to \infty}(x^3 + x^2) = \lim_{x \to \infty}\left[x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = (\infty)^3.(1+0) = \infty$$

olduğundan $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to \infty}\frac{x^2}{x^3+x^2} = \lim_{x \to \infty}\frac{x^2}{x^3\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to \infty}\frac{1}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\infty(1+0)} = 0$$

dır.

Örnek 8.2.7. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^4 + 2x^2 + 2}{x^4 + 2x^2 + 1}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^4 + 2x^2 + 2}{x^4 + 2x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^4 \left(1 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^4}\right)}{x^4 \left(1 + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x^4}\right)} = 2$ dir.

Örnek 8.2.8 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5^x-3^x}{5^{x+1}+3^x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $\lim\limits_{x\to\infty}(5^x-3^x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[5^x\left(1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^x\right)\right]=5^\infty(1-0)=+\infty$

ve

$$\lim_{x\to\infty}(5^{x+1}+3^x)=\lim_{x\to\infty}\left[5^x\left(5+\left(\frac{3}{5}\right)^x\right)\right]=5^\infty(5+0)=+\infty$$

olduğundan $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5^x-3^x}{5^{x+1}+3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{5^x\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^x\right)}{5^x\left(5+\left(\frac{3}{5}\right)^x\right)}=\frac{1-0}{5+0}=\frac{1}{5}$$

dir.

Örnek 8.2.9 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3^x}{3^x + 2^x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^x = 3^{-\infty} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\infty} = 0$

ve

$$\lim_{x\to-\infty}(3^x + 2^x) = 3^{-\infty} + 2^{-\infty} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\infty} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = 0$$

olduğundan $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x}{3^x+2^x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2^x\left(\frac{3}{2}\right)^x}{2^x\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x+1\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^x+1}$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-\infty}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-\infty}+1} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{\infty}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{\infty}+1} = \frac{0}{0+1} = 0$$

dır.

$\infty - \infty$ Belirsizliği

$x \to a$ veya $x \to \pm\infty$ için $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının her ikisinin de limiti $+\infty$ veya $-\infty$ ise $f(x) - g(x)$ fonksiyonunun limitinde $\infty - \infty$ belirsizliği ortaya çıkar.

Örnek 8.3.1. $\lim_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{5}{x^2 + x - 6} \right)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $\lim_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2} = \infty$ ve $\lim_{x \to 2} \dfrac{5}{x^2 + x - 6} = \infty$ olduğundan $\infty - \infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{5}{x^2 + x - 6} \right) = \lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{5}{(x-2)(x+3)} \right)$$

paydalar eşitlenirse,

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+3-5}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2+3} = \frac{1}{5} \qquad \text{dir.}$$

Örnek 8.3.2. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x+2}{x^3-1}\right)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$ ve $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{x^3-1}=\infty$ olduğundan $\infty-\infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)$$

paydalar eşitlenirse,

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1-x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x^2+x+1}=\frac{1+1}{1+1+1}=\frac{2}{3}\quad \text{dür.}$$

Örnek 8.3.3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x}-x)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^3+x}=+\infty$ ve $\lim\limits_{x\to\infty}x=+\infty$ olduğundan $\infty-\infty$ belirsizliği vardır. Pay ve payda verilen fonksiyonun eşleniği ile çarpılırsa;

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{x^3+x}-x)(\sqrt[3]{(x^3+x)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x}+x^2)}{(\sqrt[3]{(x^3+x)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x}+x^2)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{x^3+x})^3-x^3}{(\sqrt[3]{(x^3+x)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x}+x^2)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^6}+x\sqrt[3]{x^3}+x^2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+x.x+x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x}=0 \text{ dır.}$$

Örnek 8.3.4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{ax^2+bx+c}$ limitini hesaplayalım.

Çözüm. ax^2+bx+c üç terimlisini tam kareye tamamlayalım.

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]$$

olur. O halde,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|$$

dır. Buna göre,

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$$

ve

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{a}\left(-x-\frac{b}{2a}\right)$$

elde edilir.

Örnek 8.3.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2+2x+5}-\sqrt{3}x\right)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{3x^2+2x+5}-\sqrt{3}x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3}\left(x+\frac{2}{6}\right)-\sqrt{3}x\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

dür.

Örnek 8.3.6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+5x}-\sqrt{2x^2-5x}\right)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+5x}-\sqrt{2x^2-5x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{2}\left(-x-\frac{5}{4}\right)-\sqrt{2}\left(-x+\frac{5}{4}\right)\right]$$

$$=-\frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ dir.}$$

$0.\infty$ Belirsizliği

$x \to a$ veya $x \to \pm\infty$ için $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının birinin limiti 0 ve diğerinin limiti $\pm\infty$ ise $f(x).g(x)$ fonksiyonunun limitinde $0.\infty$ belirsizliği ortaya çıkar. Bu durumda,

$$f(x).g(x) = \frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}} \quad \text{veya} \quad f(x).g(x) = \frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

şeklinde yazılarak hesaplanacak limit $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliklerinden birine dönüştürülür.

Örnek 8.4.1. $\lim_{x\to\infty}\left(x^2.\tan\frac{3}{x^2}\right)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $\lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty$ ve $\lim_{x\to\infty}\left(\tan\frac{3}{x^2}\right) = 0$ olduğundan $0.\infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2.\tan\frac{3}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\tan\frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 3 \text{ dür.}$$

Örnek 8.4.3. $\lim_{x\to 0^+}(\sin x.\ln x)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $0.\infty$ belirsizliği vardır. O halde,

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x.\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\sin^2 x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\right) = -1.0 = 0 \text{ dır.}$$

Örnek 8.4.2. $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{-2x}.x^3)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $0.\infty$ belirsizliği vardır. O halde,

$$\lim_{x\to\infty}(e^{-2x}.x^3)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{2x}}$$

olup, $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. Bu durumda L'Hospital kuralı belirsizlik ortadan kaldırılıncaya kadar tekrarlanır.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{2e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{4e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2e^{2x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{4e^{2x}}=0 \text{ dır.}$$

Örnek 8.4.3. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x.\ln x)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $0.\infty$ belirsizliği vardır. O halde,

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x.\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\right)=-1.0=0 \text{ dır.}$$

Örnek 8.4.4. $\lim\limits_{x\to 0}(x^3 . \ln x)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $0.\infty$ belirsizliği vardır. O halde,

$$\lim_{x\to 0}(x^3 . \ln x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-3}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-3x^{-4}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{-3x^{-3}} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^3}{3} = 0$$

dır.

1^{∞} , 0^0 ve ∞^0 Belirsizlikleri

x değişkeni sonlu veya sonsuz bir değere yaklaşırken $y=[f(x)]^{g(x)}$ fonksiyonu 1^{∞}, 0^0 veya ∞^0 belirsiz hallerinden birini alıyorsa fonksiyonun her iki tarafının logaritması alınır yani,

$$\ln y = g(x).\ln f(x)$$

yazılırsa daha önce incelenen $0.\infty$ haline dönüşür. Burada limit alınırsa,

$$\lim_{x\to a}(\ln y) = L$$

elde edilir. Logaritma fonksiyonu sürekli olduğundan istenen limit

$$\ln(\lim_{x\to a} y) = L \quad \text{veya} \quad \lim_{x\to a} y = e^L$$

şeklini alır.

Örnek 8.5.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. 1^{∞} belirsizliği vardır. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ ise $\ln y = x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ dir.

Her iki tarafın limiti alınırsa,

$$\lim_{x\to\infty}(\ln y)=\lim_{x\to\infty}\left(x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}==\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3}{-x^3-x^2}=1$$

dir. Dolayısıyla, $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln y)=\ln(\lim\limits_{x\to\infty}y)=1$ olup

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e^{1}=e$$

dir.

Örnek 8.5.2. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\tan x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ ve $\lim\limits_{x\to 0}(\tan x) = 0$ olduğundan 0^0 belirsizliği vardır. $y = x^{\tan x}$ fonksiyonundan $\ln y = \tan x . \ln x$ elde edilir. Her iki tarafın limiti alınırsa,

$$\lim_{x\to 0}(\ln y) = \lim_{x\to 0}(\tan x \ln x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{\tan x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{\tan x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$$

$$= -\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right).\lim_{x\to 0}(\sin x)\right] = -(1.0) = 0$$

dır. Dolayısıyla, $\lim\limits_{x\to 0}(\ln y) = \ln(\lim\limits_{x\to 0} y) = 0$ olup

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} x^{\sin x} = e^0 = 1$$

dır.

Örnek 8.5.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3+1\right)^{\frac{1}{x}}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. ∞^0 belirsizliği vardır. $y=\left(x^3+1\right)^{\frac{1}{x}}$ ise $\ln y=\dfrac{1}{x}\ln(x^3+1)$

dır. Her iki tarafın limiti alınırsa,

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\ln(x^3+1)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^3+1)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^3+1}}{1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^3+1}=0$$

dır. Dolayısıyla, $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln y)=\ln(\lim\limits_{x\to\infty} y)=0$ olup

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to 0}(x^3+1)^{\frac{1}{x}}=e^0=1$$

dır.

Problemler

Aşağıda verilen limitleri hesaplayınız.

1. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+3x}-4x}{\sqrt{9x^2+1}+2x}$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$

4. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)$

5. $\lim_{x\to\infty} \frac{3.2^x-2^{-x}}{2^x+4.2^{-x}}$

6. $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{n}{x}\right)^x$

7. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x+\cos x-1}{\cos x-\sin x+1}$

8. $\lim_{x\to 0} \frac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$

9. $\lim_{x\to 3} \frac{\sin x-\cos 3}{\cos x-\sin 3}$

10. $\lim_{x\to a} \frac{\cos x-\cos a}{x-a}$

11. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{x^2-2x+1}$

12. $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-4}$

13. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-4x+3}{x^2+5x-6}$

14. $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x+1-\sqrt{3x+1}}$

15. $\lim_{x\to\infty} \left(x.\sin\frac{5}{x}\right)$

16. $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x}$

17. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^2}}$

18. $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(2x-2)}{3x-3}$

19. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x+1}{x^2+5x}$

20. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x^2+1}{2x^2+5x+4}$

21. $\lim_{x\to-\infty} \frac{3^{2x}+8^x}{9^{x+1}-6^x}$

22. $\lim_{x\to 0} x^{\sin x}$

23. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{\tan^2 2x}$

24. $\lim_{x\to 1} \frac{\tan(\pi x)}{\sqrt{x}-1}$

25. $\lim_{x\to 0} \frac{2^{\sin x}-1}{\log_2(x+5)}$

26. $\lim_{x\to\infty} (x^2+1)^{\frac{1}{x}}$

27. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\ln(x+1)}$

28. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right)$

29. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

30. $\lim_{x\to(-1)} \frac{x^3+4x^2+2x-1}{x^2-1}$

Kaynaklar:

1. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus I**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.
2. Prof. Dr. C. Çinar, Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, Prof. Dr. A. S. Kurbanlı, Prof. Dr. D. Şimşek, **Genel Matematik**, Dizgi Ofset, 2013.
3. Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, **Analiz III Diziler ve Seriler,** Dizgi Ofset, 2017.
4. H. İ. Karakaş, **Matematiğin Temelleri, Sayı Sistemleri ve Cebirsel Yapılar,** ODTÜ yayınları, 2011.