MATEMATİK 2

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2021

Denklem Sistemleri ile Kapalı Olarak Tanımlanan Fonksiyonlar Sistemi ve Jakobiyen.

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \tag{1}$$

biçiminde bir denklem sistemi verilsin. Bu kapalı denklem sisteminde

$$\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$$

fonksiyonları tanımlansın. Yani

$$\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y))=0 \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y))=0 \end{cases} \tag{2}$$

olsun.

(2) sistemine kapalı olarak tanımlanan fonksiyonlar sistemi denir.

Burada amaç $u=u(x,y)$ ve $\vartheta=\vartheta(x,y)$ fonksiyonlarının $u_x, u_y, \vartheta_x, \vartheta_y$ birinci mertebeden kısmi türevlerinin hesaplanmasıdır. Onun için aşağıdaki tanımı ve bir, iki değişkenli kapalı fonksiyonlarda vermiş olduğumuz varlık teoremini bu sistem için verelim.

Tanım: (4) $$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,\vartheta)}=\begin{vmatrix} F_u & F_\vartheta \\ G_u & G_\vartheta \end{vmatrix}$$ ifadesine

Jakobiyen yada fonksiyonel determinant denir. ✓

Teorem: (Varlık teoremi).

$$\begin{cases} F(x,y,u,\vartheta)=0 \\ G(x,y,u,\vartheta)=0 \end{cases}$$ denklem sistemi veril~~diğin~~miş

~~olsun~~ F ve G fonksiyonlarının ortak ~~ortak~~ B tanım bölgesi içindeki bir $P_0(x_0, y_0, u_0, \vartheta_0)$ noktası için

① $$\begin{cases} F(x_0, y_0, u_0, \vartheta_0)=0 \\ G(x_0, y_0, u_0, \vartheta_0)=0 \end{cases},$$

② P_0 noktasının komşuluğunda $F_x, F_y, F_u, F_\vartheta$, $G_x, G_y, G_u, G_\vartheta$ kısmi türevleri mevcut ve sürekli, ~~[illegible]~~, ③ P_0 noktası komşuluğunda

$$J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{ise}$$

bu şartlar altında (x_0, y_0) noktasını içeren uygun I_0 bölgesinde tanımlı, sürekli ve türevlenebilir ~~üçle~~ birer, $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ fonksiyonları vardır.

Bu fonksiyonlar için

$$\begin{cases} F(x, y, u(x,y), v(x,y)) \equiv 0 \\ G(x, y, u(x,y), v(x,y)) \equiv 0 \end{cases} \quad (5)$$

yazılır. O zaman

$u_0 = u(x_0, y_0)$, $\vartheta_0 = \vartheta(x_0, y_0)$ olmak üzere,

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{1}{J} \cdot \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,\vartheta)} ; & \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{J} \cdot \underbrace{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,\vartheta)}} ; \\[2ex] \dfrac{\partial \vartheta}{\partial x} = -\dfrac{1}{J} \cdot \underbrace{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}} ; & \dfrac{\partial \vartheta}{\partial y} = -\dfrac{1}{J} \cdot \underbrace{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}} \end{cases}$$

dır.

(3) denklem sistemi ile kapalı olarak verilen $u = u(x,y)$, $\vartheta = \vartheta(x,y)$ fonksiyonlarının $u_x, u_y, \vartheta_x, \vartheta_y$ kısmi türevleri hesaplanırken (6)'daki yöntemle aynı sonuçları verecek iki yöntem daha vardır.

1. Yöntem: $\begin{cases} F(x,y,u,\vartheta)=0 \\ G(x,y,u,\vartheta)=0 \end{cases}$ sistemindeki

F ve G bağıntılarını dört değişkenli fonksiyonlar olarak düşünülür ve birinci mertebeden tam diferensiyelleri hesaplanırsa,

$$\begin{cases} dF = F_x\,dx + F_y\,dy + F_u\,du + F_\vartheta\,d\vartheta = 0 \\ dG = G_x\,dx + G_y\,dy + G_u\,du + G_\vartheta\,d\vartheta = 0 \end{cases} \quad (7)$$

olur.

Bu denklem sisteminden du ve $d\vartheta$ bulunur. Diğer taraftan $u=u(x,y)$ ve $\vartheta=\vartheta(x,y)$ olup,

$$\begin{cases} du = u_x\,dx + u_y\,dy \\ d\vartheta = \vartheta_x\,dx + \vartheta_y\,dy \end{cases} \quad (8)$$

yazılır.

Bu değerler (7)' den elde edilen,

$$\begin{cases} F_u\, du + F_\vartheta\, d\vartheta = -F_x\, dx - F_y\, dy \\ G_u\, du + G_\vartheta\, d\vartheta = -G_x\, dx - G_y\, dy \end{cases} \quad (9)$$

(9) sisteminde yerine yazılır ve eşitlikler karşılaştırılırsa, $u_x, u_y, \vartheta_x, \vartheta_y$ bulunur.

2. Yöntem: Kapalı türetme metodu.

(5) sistemi x ve y değişkenlerine göre kapalı türetilirse,

$$\begin{cases} F_x + F_u \cdot u_x + F_\vartheta \cdot \vartheta_x = 0 \\ G_x + G_u \cdot u_x + G_\vartheta \cdot \vartheta_x = 0 \end{cases} \quad (10)$$

ve

$$\begin{cases} F_y + F_u \cdot u_y + F_\vartheta \cdot \vartheta_y = 0 \\ G_y + G_u \cdot u_y + G_\vartheta \cdot \vartheta_y = 0 \end{cases} \quad (11)$$

sistemleri elde edilir. Bu sistemler $u_x, u_y, \vartheta_x, \vartheta_y$ ' kısmi türevlere göre düzenlenirse,

$$\begin{cases} F_u \cdot u_x + F_\vartheta \cdot \vartheta_x = -F_x \\ G_u \cdot u_x + G_\vartheta \cdot \vartheta_x = -G_x \end{cases} \quad (12)$$

ve

$$\begin{cases} F_u \cdot u_y + F_\vartheta \cdot \vartheta_y = -F_y \\ G_u \cdot u_y + G_\vartheta \cdot \vartheta_y = -G_y \end{cases} \quad (13)$$

biçiminde $u_x, u_y, \vartheta_x, \vartheta_y$ kısmi türevlere göre iki tane lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklemlerden $u_x, u_y, \vartheta_x, \vartheta_y$ 'ler çözülürse istenilen bulunur.

Bu fonksiyonların daha yüksek mertebeden kısmi türevleri benzer düşünceyle bulunur.

Örnek: $u = u(x,y)$ ve $\vartheta = \vartheta(x,y)$ olmak üzere

$$\begin{cases} u + \vartheta^2 + x^2 - y = -1 \\ u \cdot \vartheta - x \cdot y = 0 \end{cases}$$

denklem sistemiyle kapalı olarak verilen $u = u(x,y)$, $\vartheta = \vartheta(x,y)$ fonksiyonlarının u_x, u_y, ϑ_x, ϑ_y kısmi türevlerini her ~~üç yöntemle de~~ hesaplayınız.

Çözüm:

① Denklem sisteminin kapalı olarak kısmi türevleri alındığında,

$$\begin{cases} u_x + 2\vartheta\cdot\vartheta_x + 2x = 0 \\ u_x\cdot\vartheta + \vartheta_x u - y = 0 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} u_y + 2\vartheta\vartheta_y - 1 = 0 \\ u_y\vartheta + \vartheta_y\cdot u - x = 0 \end{cases}$$

elde edilir. Bu sistemler $u_x, u_y, \vartheta_x, \vartheta_y$'ye göre yeniden düzenlenirse

$$\begin{cases} u_x + 2\vartheta\cdot\vartheta_x = -2x \\ u_x\cdot\vartheta + \vartheta_x\cdot u = y \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} u_y + 2\vartheta\vartheta_y = 1 \\ u_y\vartheta + \vartheta_y u = x \end{cases}$$

ϑ u 28

$$2\vartheta^2\cdot\vartheta_y - \vartheta_y\cdot u = x$$

$$\vartheta_y = \frac{\vartheta - x}{2\vartheta^2 - u};$$

$$\boxed{\vartheta_x = \frac{y + 2x\vartheta}{u - 2\vartheta^2};}$$

$$2\vartheta^2\cdot\vartheta_x - \vartheta_x\cdot u = -2x\vartheta - y.$$

$$\vartheta_x = \frac{2x\vartheta + y}{u - 2\vartheta^2}; \quad u_x = \frac{-2xu - 2y\vartheta}{u - 2\vartheta^2},$$

2. $\begin{cases} F(x,y,u,\vartheta) = u+\vartheta^2+x^2-y+1=0. \\ G(x,y,u,\vartheta) = u.\vartheta - xy = 0. \end{cases}$

sisteminin birinci mertebeden tam diferensiyeli alınırsa,

$$\begin{cases} dF = du + 2\vartheta\, d\vartheta + 2x\, dx - dy = 0. \\ dG = \vartheta du + u\, d\vartheta - y\, dx - x\, dy = 0 \end{cases}$$ elde edilir.

Buradan,

$$du = \frac{-2xu - 2y\vartheta}{u - 2\vartheta^2}\, dx + \frac{u - 2x\vartheta}{u - 2\vartheta^2}\, dy \; ;$$

$$d\vartheta = \frac{y + 2x\vartheta}{u - 2\vartheta^2}\, dx + \frac{x - \vartheta}{u - 2\vartheta^2}\, dy \quad \text{olur.}$$

Ayrıca, $u = u(x,y)$, $\vartheta = \vartheta(x,y)$ olduğu göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{cases} du = u_x\, dx + u_y\, dy \\ d\vartheta = \vartheta_x\, dx + \vartheta_y\, dy \end{cases} \quad \text{olup,}$$

$$\begin{cases} u_x\, dx + u_y\, dy = \dfrac{-2xu - 2y\vartheta}{u - 2\vartheta^2}\, dx + \dfrac{u - 2x\vartheta}{u - 2\vartheta^2}\, dy. \\ \vartheta_x\, dx + \vartheta_y\, dy = \dfrac{y + 2x\vartheta}{u - 2\vartheta^2}\, dx + \dfrac{x - \vartheta}{u - 2\vartheta^2}\, dy \end{cases}$$

bulunur. dx ve dy lerin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$u_x = \frac{-2xu - 2y\vartheta}{u - 2\vartheta^2}, \qquad \vartheta_x = \frac{y + 2x\vartheta}{u - 2\vartheta^2},$$

$$u_y = \frac{u - 2x\vartheta}{u - 2\vartheta^2}; \qquad \vartheta_y = \frac{x - \vartheta}{u - 2\vartheta^2}$$ elde edilir.

(3)
$$\begin{cases} F(x,y,u,\vartheta) = u + \vartheta^2 + x^2 - y - 1 = 0 \\ G(x,y,u,\vartheta) = u\cdot\vartheta - xy = 0 . \end{cases}$$

fonksiyonu için

$$J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,\vartheta)} = \begin{vmatrix} F_u & F_\vartheta \\ G_u & G_\vartheta \end{vmatrix}$$ olmak üzere,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$$

formülleri geçerlidir. Burada,

$F_u = 1, \quad F_v = 2v, \quad F_x = 2x, \quad F_y = -1.$

$G_u = v, \quad G_v = u, \quad G_x = -y, \quad G_y = -x$ dir.

$$J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 2v \\ v & u \end{vmatrix} = u - 2v^2;$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} = \begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2v \\ -y & u \end{vmatrix} = 2xu + 2yv;$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} = \begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2v \\ -x & u \end{vmatrix} = -u + 2xv;$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} = \begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2x \\ v & -y \end{vmatrix} = -y - 2xv;$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)} = \begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ v & -x \end{vmatrix} = -x+v \, ;$$

olur.

Bu değerler yukarıda yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x = -\frac{1}{u-2v^2} \cdot (2xu+2yv) = -\frac{2xu+2yv}{u-2v^2} \, ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_y = -\frac{-u+2xv}{u-2v^2} = \frac{u-2xv}{u-2v^2} \, ;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = v_x = -\frac{-y-2xv}{u-2v^2} = \frac{y+2xv}{u-2v^2} \, ;$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = v_y = -\frac{-x+v}{u-2v^2} = \frac{x-v}{u-2v^2}$$

elde edilirki istenendir.

Örnek: $\begin{cases} x = u\cdot\vartheta \\ y = \frac{1}{2}(\vartheta^2 - u^2) \end{cases}$ denklem sistemi ile kapalı verilen

$u \equiv u(x,y)$, $\vartheta = \vartheta(x,y)$ fonksiyonlarının

$u_x, u_y, \vartheta_x, \vartheta_y$ kısmi türevlerini

hesaplayınız.

Çözüm: Kapalı türetme metodundan

$$\begin{cases} \vartheta\cdot u_x + u\cdot\vartheta_x = 1 \\ \vartheta\cdot\vartheta_x - u\cdot u_x = 0 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} u_y\vartheta + u\cdot\vartheta_y = 0 \\ \vartheta\cdot\vartheta_y - u\cdot u_y = 1 \end{cases}$$

denklem sisteminden $u_x, u_y, \vartheta_x, \vartheta_y$ bulunur ki istenendir

(*) Fonksiyonel determinant ile ilgili vermiş olduğumuz tanım üç ve daha fazla değiş-kenli fonksiyonlar için de geçerlidir.
Ayrıca söz konusu fonksiyonel determinant için genelleştirilmiş zincir kuralı da geçerlidir.

Tanım: $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ ve $\begin{cases} u = u(r,s) \\ v = v(r,s) \end{cases}$ ise

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)} \quad (16) \text{ dir.}$$

(16) eşitliğine Jakobiyenler için zincir kuralı denir.

Tanım: $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ fonksiyonları arasında $F(x,y) = 0$ biçiminde bir bağıntı varsa bu fonksiyonlara fonksiyonel bağımlıdır denir.

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$ olmak üzere u ve v arasında fonksiyonel bir bağıntının olması için gerek ve yeter şart

$$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \equiv 0$$ olmasıdır.

Örnek:

$$(1) \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$ sistemi için varlık teoreminin şartları geçerli olması durumunda, bu sistemden elde edilen

(2) $\begin{cases} u = u(x,y) \\ \vartheta = \vartheta(x,y) \end{cases}$ sistemleri için

(3) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,\vartheta)} \cdot \dfrac{\partial(u,\vartheta)}{\partial(x,y)} = 1$ dir. Gösteriniz.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\vartheta)} \cdot \frac{\partial(u,\vartheta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} x_u & x_\vartheta \\ y_u & y_\vartheta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ \vartheta_x & \vartheta_y \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_u u_x + x_\vartheta \vartheta_x & x_u u_y + x_\vartheta \vartheta_y \\ y_u u_x + y_\vartheta \vartheta_x & y_u u_y + y_\vartheta \vartheta_y \end{vmatrix} \quad (4)$$

elde edilir.

Varlık Teoreminden

$$\begin{cases} x \equiv x\left(u(x,y), \vartheta(x,y)\right) \\ y \equiv y\left(u(x,y), \vartheta(x,y)\right) \end{cases} \quad (5)$$

olup,

(5) in x ve y'ye göre kapalı türevi alınırsa,

$$\begin{cases} 1 = x_u u_x + x_v v_x \\ 0 = y_u u_x + y_v v_x \end{cases} \quad (6) \quad \text{ve}$$

$$\begin{cases} 0 = x_u u_y + x_v v_y \\ 1 = y_u u_y + y_v v_y \end{cases} \quad (7) \quad \text{elde edilir.}$$

(6) ve (7) sistemindeki bu değerler (4)'ün sağ tarafında determinantta yerine konursa,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{bulunur ki}$$

Doç. Dr. A. GURBANLYYEV

istenendir.

Örnek: $\begin{cases} x = \ln\left(\dfrac{\vartheta}{u}\right) \\ y = \dfrac{u\cdot\vartheta}{u^2+\vartheta^2} \end{cases}$ ise x ve y

fonksiyonları arasında fonksiyonel bir bağıntı varmıdır? Varsa nedir?

Çözüm: Fonksiyonel bir bağın olması için

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\vartheta)} \equiv 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\vartheta)} = \begin{vmatrix} x_u & x_\vartheta \\ y_u & y_\vartheta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{u} & \dfrac{1}{\vartheta} \\ \dfrac{\vartheta(\vartheta^2-u^2)}{(u^2+\vartheta^2)^2} & \dfrac{u(u^2-\vartheta^2)}{(u^2+\vartheta^2)^2} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\cancel{u}}\cdot\frac{\cancel{u}(u^2-\vartheta^2)}{(u^2+\vartheta^2)^2} - \frac{1}{\cancel{\vartheta}}\cdot\frac{\cancel{\vartheta}(\vartheta^2-u^2)}{(u^2+\vartheta^2)^2} =$$

$$= \frac{\vartheta^2 - u^2}{(u^2+\vartheta^2)^2} - \frac{\vartheta^2 - u^2}{(u^2+\vartheta^2)^2} \equiv 0 \quad \text{olur.}$$

yani fonksiyonel bağ var. $x = \ln\left(\frac{\vartheta}{u}\right) \Rightarrow \frac{\vartheta}{u} = e^x$

ve $$y = \frac{u\vartheta}{u^2+\vartheta^2} = \frac{\frac{\vartheta}{u}}{1+\left(\frac{\vartheta}{u}\right)^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}} = \frac{1}{e^{-x}+e^x} = \frac{1}{2\,\mathrm{ch}\,x}$$

bulunur.

Not: Fonksiyonel determinant, kapalı fonksiyonun kısmı türevlerini hesaplamanın yanısıra, fonksiyonel bağ araştırılırken, ayrıca koordinat dönüşümlerinde de geniş bir şekilde kullanılmaktadır.

Doç. Dr. A. GURBANLYYEV

Örnek 10. $\left.\begin{array}{l} x=\sin(u^2+v^2) \\ y=\cos(u^2+v^2) \end{array}\right\}$ ise x ile y fonksiyonları arasında fonksiyonel bir bağıntı var mıdır? Varsa nedir?

Çözüm: Bu iki fonksiyon arasında fonksiyonel bir bağ olması için

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \equiv 0$$

olmalıdır. Gerçekten;

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u\cos(u^2+v^2) & 2v\cos(u^2+v^2) \\ -2u\sin(u^2+v^2) & -2v\sin(u^2+v^2) \end{vmatrix} \equiv 0$$

dır. Yani x ve y arasında fonksiyonel bir bağ vardır. Bunun için x ve y 'nin tersleri alınırsa;

$$u^2 + v^2 = \operatorname{Arcsin} x$$
$$u^2 + v^2 = \operatorname{Arccos} y$$

olur. Eşitliklerinin sol tarafları eşit olduğundan. Bu fonksiyonlar arasındaki bağ

$$\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arccos} y \Rightarrow \sin x = \cos y$$

dır. Ayrıca,

$$\sqrt{1-\cos^2 x} = \cos y$$
$$1-\cos^2 x = \cos^2 y$$
$$\cos^2 x + \cos^2 y = 1$$

eşitliği de doğru bir gösterimdir.

Örnek 12. $\left.\begin{aligned} u &= \frac{x+y}{1-xy} \\ v &= Arctgx + Arctgy \end{aligned}\right\}$ ise u ile v fonksiyonları arasında fonksiyonel bir bağıntı var mıdır? Varsa nedir?

Çözüm: Bu örnekte de

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \equiv 0$$

olduğu görülür. Yani u ve v fonksiyonları fonksiyonel bağımlıdırlar. Aralarındaki bağ ise;

$$tgv = tg\left(Arctgx + Arctgy\right) = \frac{tg\left(Arctgx\right) + tg\left(Arctgy\right)}{1 - tg\left(Arctgx\right)tg\left(Arctgy\right)}$$

$$= \frac{x+y}{1-xy}$$

buradan

$$tgv = u$$

olur.

Örnek 13. $\left.\begin{array}{l} u=\ln x-\ln y \\ v=\dfrac{x^2+y^2}{xy} \end{array}\right\}$ ise u ve v fonksiyonları arasında fonksiyonel bir bağ var mıdır? Varsa nedir?

Çözüm: $u=\ln x-\ln y$ ve $v=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$ fonksiyonları için

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{x} & -\dfrac{1}{y} \\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{x^2} & -\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{1}{x} \end{vmatrix}\equiv 0$$

olduğundan fonksiyonel bir bağ vardır. $u=\ln\dfrac{x}{y}$ eşitliğinden x çözülürse,

$$x=y\,e^u$$

bu x değeri v' de yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$v=\frac{e^{2u}}{e^u}+\frac{1}{e^u}=e^u+e^{-u}=2Chu$$

$v=2Chu$ olur.

Örnek 14. $\left.\begin{aligned} u &= xy + yz + zx \\ v &= x^2 + y^2 + z^2 \\ w &= x + y + z \end{aligned}\right\}$ ise u,v,w fonksiyonları fonksiyonel olarak bağlımıdır? Varsa aralarındaki bağ nedir?

Çözüm: Bu fonksiyonlar arasında fonksiyonel bir bağ olabilmesi için, fonksiyonel determinant özdeş olarak sıfır olmalıdır. Gercekten;

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y+z & x+z & x+y \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0$$

dır. Fonksiyonlar arasında bir fonksiyonel bağ vardır. Aralarındaki bağ ise;

$$w^2 = (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2zy$$

$$w^2 = v + 2u$$

dır.

3) $\left.\begin{aligned} v^2-u^2+x-u+2=0 \\ -v-2uv+y-3=0 \end{aligned}\right\}$ denklem sistemi ile kapalı olarak verilen $u=u(x,y)$ $v=v(x,y)$ fonksiyonlarının birinci mertebeden kısmi türevlerini bulunuz.

4) $\left.\begin{aligned} x=u+v \\ y=3u+2v \end{aligned}\right\}$ denklem sistemi ile kapalı olarak verilen $u=u(x,y)$ $v=v(x,y)$ fonksiyonları ve $w=\dfrac{u}{v}$ fonksiyonu veriliyor. $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ ve $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ kısmi türevlerini bulunuz. **C:** $\dfrac{\partial w}{\partial x}=-\dfrac{2v+3u}{v^2}, \dfrac{\partial w}{\partial y}=\dfrac{u+v}{v^2}$

5) $\left.\begin{aligned} u^2-v^2-x^3+3y=0 \\ u+v-2x-y^2=0 \end{aligned}\right\}$ denklem sistemi ile kapalı olarak verilen $u=u(x,y)$ $v=v(x,y)$ fonksiyonlarının birinci mertebeden kısmi türevlerini bulunuz.

6) $\left.\begin{aligned} u+v=x+y \\ xu+yv=1 \end{aligned}\right\}$ denklem sistemi ile kapalı olarak verilen $u=u(x,y)$ $v=v(x,y)$ fonksiyonlarının birinci mertebeden kısmi türevlerini bulunuz. **C:** $u_y=-\dfrac{v+y}{x-y}, v_y=\dfrac{v+x}{x-y}$

7) $\left.\begin{aligned} \ln uv=x \\ \ln\frac{u}{v}=y \end{aligned}\right\}$ denklem sistemi ile kapalı olarak verilen $u=u(x,y)$ $v=v(x,y)$ fonksiyonlarının birinci mertebeden kısmi türevlerini bulunuz.

8) $\left.\begin{array}{l} x^2 - y - 3u + v = 0 \\ x - 2y^2 - u + 2v = 0 \end{array}\right\}$ denklem sistemi ile kapalı olarak verilen $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$

fonksiyonlarının birinci mertebeden kısmi türevlerini bulunuz. **C:** $x_u = \dfrac{12y-1}{8xy-1}, y_u = \dfrac{-2x+3}{8xy-1}$

9) $\left.\begin{array}{l} u^2 - v - x^2 + y + 2 = 0 \\ u + v^2 - x - y^2 = 0 \end{array}\right\}$ denklem sistemi ile kapalı olarak verilen $u = u(x,y)$ $v = v(x,y)$

fonksiyonları için $u_{xx} + u_{yy} = ?$ ve $v_{xx} + v_{yy} = ?$ değerlerini bulunuz.

10) $\left.\begin{array}{l} 2u^2 - 2v^2 - y^2 + 2x = 0 \\ 3u + 3v - y^2 - 2x = 0 \end{array}\right\}$ denklem sistemi ile kapalı olarak verilen $u = u(x,y)$ $v = v(x,y)$

fonksiyonlarının birinci mertebeden kısmi türevlerini bulunuz.**C:** $u_x = \dfrac{4v-3}{6(u+v)}, v_x = \dfrac{4u+3}{6(u+v)}$

11) $\left.\begin{array}{l} x = u + v + w \\ y = u^2 + v^2 + w^2 \\ z = u^3 + v^3 + w^3 \end{array}\right\}$ denklem sistemi ile kapalı olarak verilen $u = u(x,y,z)$ $v = v(x,y,z)$

$w = w(x,y,z)$ fonksiyonlarından u_x, u_y, u_z kısmi türevlerini bulunuz.

12) $\left.\begin{array}{l} u=\sqrt{x^2+y^2} \\ v=Arctgxy \end{array}\right\}$ ise u ile v fonksiyonları arasında fonksiyonel bir bağıntı var mıdır? Varsa nedir?

C: $J \neq 0$, bağlı değildir.

13) $\left.\begin{array}{l} u=Arctgx-Arctgy \\ v=\dfrac{x-y}{1+xy} \end{array}\right\}$ ise u ile v fonksiyonları arasında fonksiyonel bir bağıntı var mıdır?Varsa nedir?

14) $\left.\begin{array}{l} u=Arctgx-Arctgy \\ v=\dfrac{x-y}{1+xy} \end{array}\right\}$ ise u ile v fonksiyonları arasında fonksiyonel bir bağıntı var mıdır?Varsa nedir?

15) $\left.\begin{array}{l} u=\ln\left(x^2-2y\right) \\ v=\dfrac{x^2-2y+1}{x^2-2y-1} \end{array}\right\}$ ise u ile v fonksiyonları arasında fonksiyonel bir bağıntı var mıdır? Varsa nedir?

C: $v=\dfrac{e^u+1}{e^u-1}$

16) $\left.\begin{array}{l} u=\ln\left(x^2-2y\right) \\ v=\dfrac{x^2-2y+1}{x^2-2y-1} \end{array}\right\}$ ise u ile v fonksiyonları arasında fonksiyonel bir bağıntı var mıdır? Varsa nedir?

C: $v=\dfrac{e^u+1}{e^u-1}$

17) $\left.\begin{array}{l} u=\dfrac{x+y}{1-xy} \\ v=\dfrac{(x+y)(1-xy)}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)} \end{array}\right\}$ ise u ile v fonksiyonları arasında fonksiyonel bir bağıntı var mıdır?Varsa nedir?

18) $\left.\begin{array}{l} u=x+2y+1 \\ v=x^2+4y^2+4xy+3x+6y+2 \end{array}\right\}$ ise u ile v fonksiyonları arasında fonksiyonel bir bağıntı var mıdır?Varsa nedir?

C: $v=u^2+u$

Kaynaklar:

1. A. H. Berksoy, O. Özkan, Mühendisler İçin Çözümlü Kalkülüs, S.Ü. Basımevi, 2010
2. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus II**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2010.
3. J. Stewart, Kalkülüs Kavram ve Kapsam (Diferansiyel ve İntegral Hesap), TÜBA, 2010.