MATEMATİK 2

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

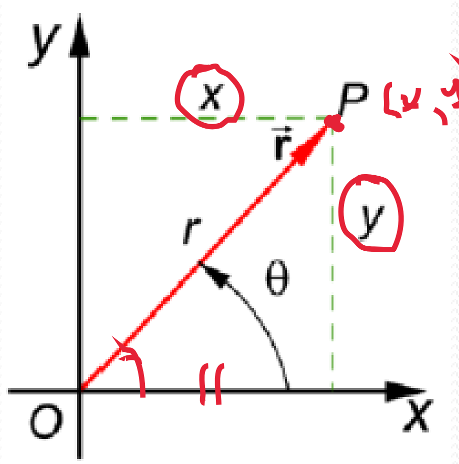
2021

İKİ KATLI İNTEGRALLERDE DEĞİŞKEN DÖNÜŞÜMÜ

Kutupsal koordinatlarda iki katlı integraller.

B bölgesinde sürekli $f(x,y)$ fonksiyonunun $I=\iint_B f(x,y)\,dxdy$

iki katlı integrali için



$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}\right\}$$

dönüşümleri ile kutupsal koordinatlara geçilirse, dönüşümün jakobiyeni

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=r$$

$|J|$

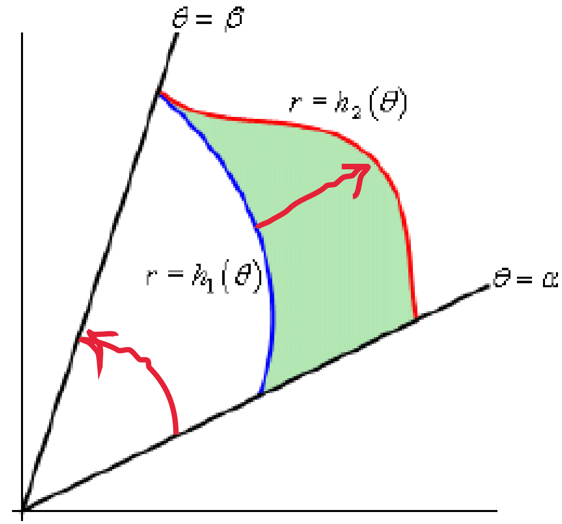
olduğundan

$$I=\iint_B f(x,y)dxdy=\iint_{B^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|dr\,d\theta=\iint_{B^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

olur. Eğer B bölgesi;

$$B=\{(r,\theta):\ h_1(\theta)\le r\le h_2(\theta), \alpha\le\theta\le\beta\}$$

biçiminde tanımlanmış ve $\alpha\le\theta\le\beta$ deki her θ değeri için x ekseni ile θ derecelik açı yapan bir ışın vektörünün B bölgesine girişinde $h_1(\theta)$ eğrisine,bölgeyi terk edişinde de $h_2(\theta)$ eğrisine değiyorsa;bu tür bölgelere kutupsal koordinatlarda basit bölge (açısal basit bölge) adı verilir.Örneğin şekildeki bölge bu türden bir bölgedir.



Şekildeki gibi bir bölgede $f(x,y)$ nin iki katlı integrali aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\iint_B F(\theta,r)r\,dr\,d\theta=\int_{\alpha}^{\beta}\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)}F(\theta,r)\,dr\,d\theta$$

Burada $F(\theta,r)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ dır.

$$\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)}F(\theta,r)r\,dr$$

integralini hesap ederken θ sabit gibi düşünülür.

İki katlı integrallerin eğrisel koordinatlarda ifadesi

B bölgesinde sürekli *f(x,y)* fonksiyonunun iki katlı

$$I = \iint_B f(x,y)\,dxdy$$

integrali verilsin. $\left.\begin{aligned} x &= \phi(u,v) \\ y &= \psi(u,v) \end{aligned}\right\}$ örten dönüşümü ile (x,y) düzleminin B bölgesi, (u,v) düzleminin bir B^* bölgesine $1-1$ karşılık gelsin. B bölgesinde ϕ,ψ ve $\phi_u,\phi_v,\psi_u,\psi_v$ kısmi türevleri sürekli olsun.

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

jakobiyeni sıfırdan farklı olmak üzere olmak üzere,

$$I = \iint_B f(x,y)dxdy = \iint_{B^*} f(\phi(u,v),\psi(u,v))\left|J\right|dudv$$

dir. Burada B ve B^* bölgeleri yatay basit veya düşey basit düzlemsel bölgeler olarak ele alınmıştır.

Not: Eğer B^{*} bölgesi,

$$\begin{cases} u = h(s,t) \\ v = g(s,t) \end{cases}$$

dönüşümleri ile (s,t) düzleminde B^{**} bölgesine dönüşüyorsa

$$I = \iint_{B} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{B^{**}} F(s,t)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \cdot \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\right| ds\,dt$$

bulunacağı açıktır.

$f(\varphi(u,v),\psi(u,v)) = f[\varphi(h(s,$

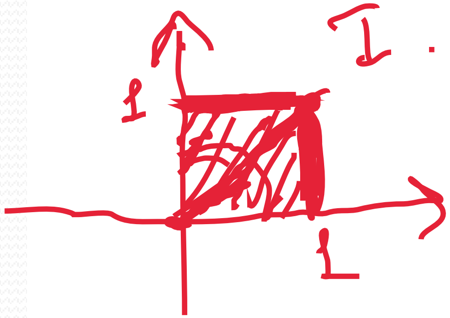
Örnek 1. Aşağıdaki iki katlı integralleri kutupsal koordinatlara dönüştürünüz ve yeni değişkenlere göre integralin sınırları belirleyiniz.

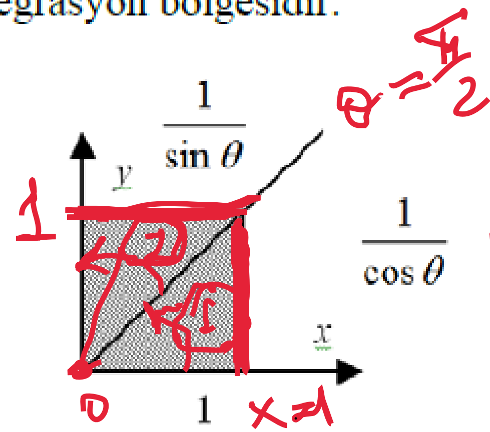
a) $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx = ?$

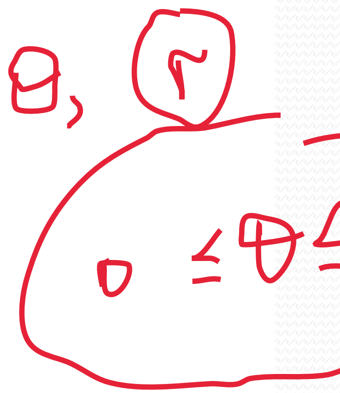
$B = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}.$

Çözüm:

a) Aşağıdaki şekildeki taralı bölge integrasyon bölgesidir.







kutupsal koordinatlara geçilirse, $x = 1$ doğrusunun kutupsal koordinatlardaki karşılığının $r = \dfrac{1}{\cos\theta}$, $y = 1$ doğrusunun da $r = \dfrac{1}{\sin\theta}$ olduğu görülür. Buradan,

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$ olur.

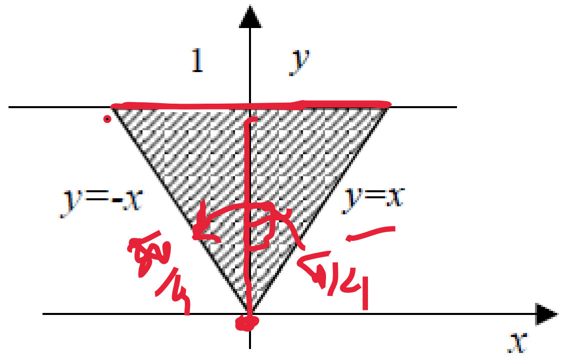
$B=\{(x,y): 0\leq$

b) Verilen doğruların sınırladığı bölge aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$y = r\sin\theta$

$1 = r\sin\theta$

$r = \frac{1}{\sin\theta}$



$x = r\cos\theta$

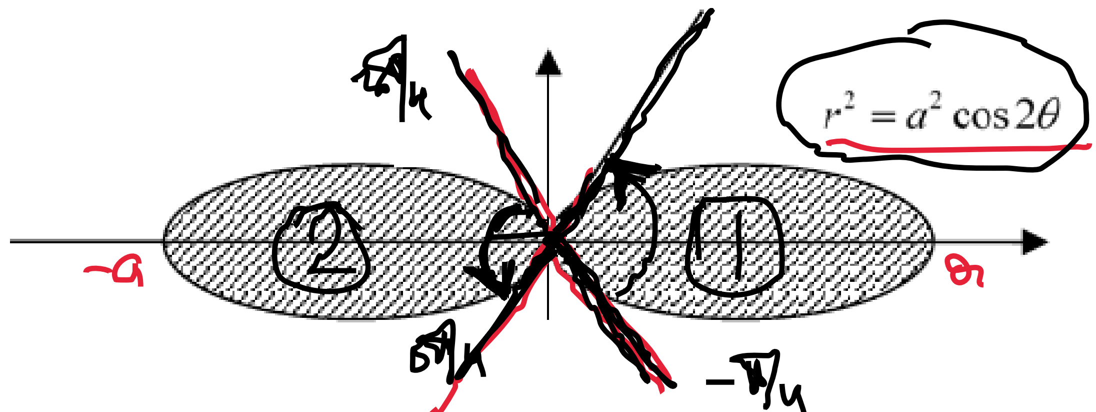
$y = r\sin\theta$

kutupsal koordinatlara geçildiğinde; $y=1$ doğrusunun kutupsal koordinatlardaki karşılığı $r=\dfrac{1}{\sin\theta}$ olduğundan;

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

bulunur.

c) ox eksenini $x = \pm a$ da kesen liminiskatın şekli aşağıda verilmiştir.



Leminiskat eğrisinin $y = \mp x$ doğrularına teğet olduğu da hatırlanırsa,

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta \; +$$

$$+ \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

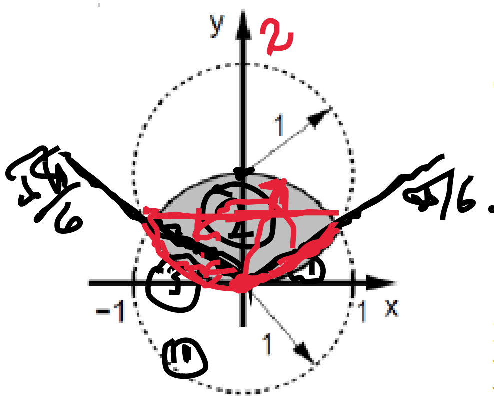
olur.

r = a

$x^2+y^2=1^2$ $\quad x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

Örnek 2.



Şekildeki yarıçapları 1 birim olan çemberler ile sınırlı taralı bölge B ise;

$$I=\iint_B f(x,y)\,dxdy$$

integralininin integrasyon sınırlarını kutupsal koordinatlarda yazınız.

Çözüm: B bölgesini sınırlayan eğriler sırasıyla $r_1=1,\ r_2=2\sin\theta$ olup ortak çözümden kesiştikleri noktaların kutup açılarının; $r_1=r_2 \Leftrightarrow \theta_1=\dfrac{\pi}{6}, \theta_2=\dfrac{5\pi}{6}$ olduğu kolaylıkla bulunabilir. Buna göre;

$$I=\iint_B f(x,y)\,dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\int_0^{1} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$+\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

olur.

Örnek 3. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,dx$ integralini kutupsal koordinatlarda hesaplayınız.

Çözüm: Verilen integralin integrasyon bölgesinden de görüleceği gibi;

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{e^r}{\cancel{r}}\cancel{r}\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2}(e-1)$$

olur.

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$

$B = \{(x,y)$

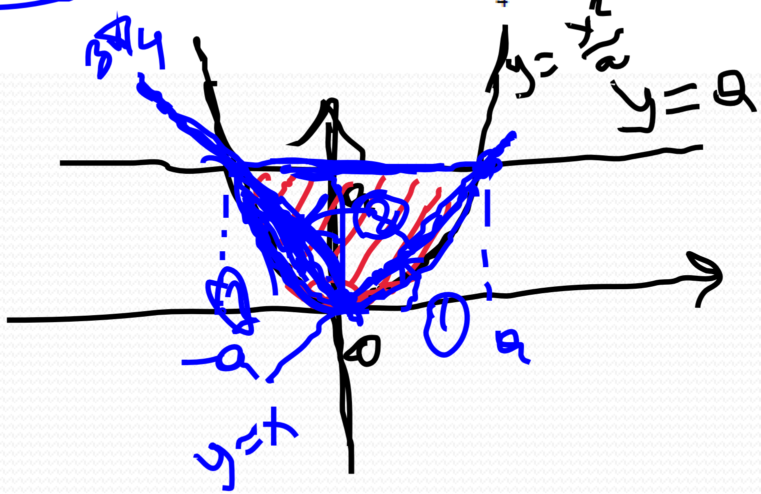
Örnek 4. $y=a$ ve $y=\dfrac{x^2}{a}$ ile sınırlanan bölge B olmak üzere $I=\iint\limits_{B} f(x,y)dydx$ integralini kutupsal koordinatlarda ifade ediniz. $(a>0)$

Çözüm: $y=a$ ve $y=\dfrac{x^2}{a}$ nin kutupsal koordinatlardaki karşılığı sırasıyla $r_1(\theta)=\dfrac{a}{\sin\theta}$ ve $r_2(\theta)=\dfrac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}$ olup,

1 2 3

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,drd\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^{\frac{a}{\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,drd\theta+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\int_0^{\frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,drd\theta$$

dir.



$$\frac{x^2}{a}=a$$

$$x^2=a^2$$

$$x=a$$

Örnek 5. $I=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dydx = ?$

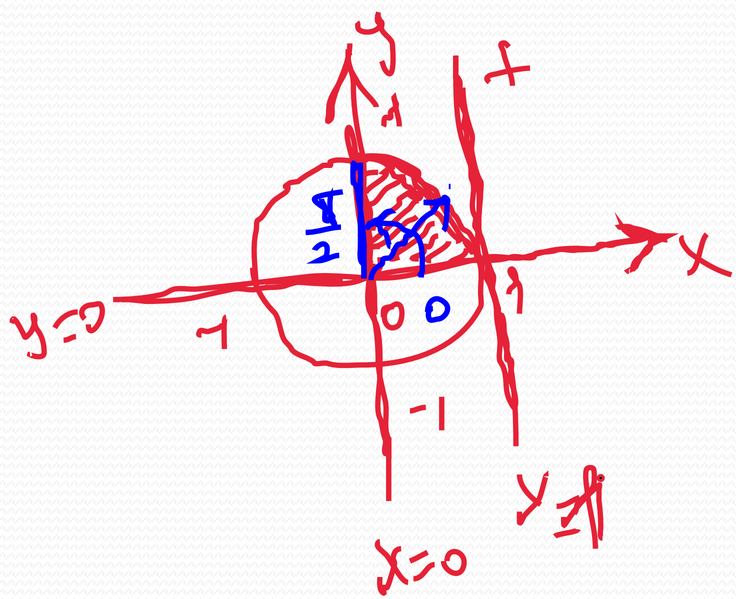
$\sqrt{1-(x^2+y^2)}$

$B=\{(x,y): 0\le x\le 1, 0$

Çözüm: B bölgesi için kutupsal koordinatlar kullanılırsa,

$= d(1-r^2)\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\sqrt{1-r^2}\;rdrd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{3}\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 d\theta=\frac{\pi}{6}\;br^3$$ olur.



$0\le r\le 1$

$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$\boxed{J=r}$

$x=r\cos\theta \Rightarrow x^2=r^2\cos^2\theta$

$y=r\sin\theta \Rightarrow y^2=r^2\sin^2\theta$

$+\quad x^2+y^2=r^2,$

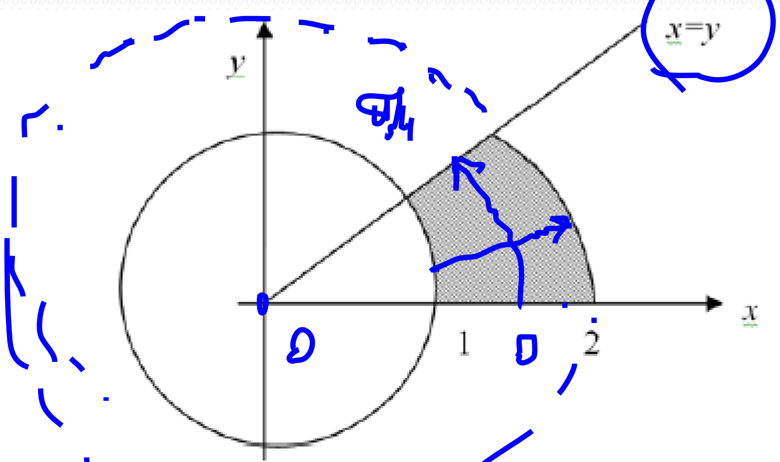
Örnek 6. $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy\,dydx + \int_{1}^{\sqrt{2}}\int_{0}^{x} xy\,dydx + \int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xy\,dydx = ?$ integralini; kutupsal koordinatlar kullanarak hesaplayınız.

Çözüm:

$\frac{\pi}{4} = \theta$

$x = r\cos$

$y = r$



$1 \le r \le 2$

Verilen integrallerin integrasyon bölgelerinin birleşimi yukarıdaki Şekilde verilmiştir. Kutupsal koordinatlar kullanılırsa,

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{1}^{2} r^2\cos\theta\sin\theta\, r\,dr\,d\theta=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{1}^{2} r^3\frac{1}{2}\sin 2\theta\, dr\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin 2\theta\,\frac{r^4}{4}\Big|_{1}^{2}d\theta=\frac{15}{8}\left(-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{15}{16}$$

br^3

olur.

$0,\ y=x$ $\qquad x=\frac{1}{\sqrt{2}},\ x=1,\ y=0,\ y=\sqrt{1-x^2}$

Örnek 7. $I=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_0^{x}2(x^2+y^2)e^{x^2+y^2}\,dydx+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}}2(x^2+y^2)e^{x^2+y^2}\,dydx$ İntegralinin değerini kutupsal koordinatları kullanarak hesaplayınız.

Çözüm: B bölgesi için kutupsal koordinatlara geçilirse,

$$I=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_0^{x}2\underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2}e^{\overbrace{x^2+y^2}^{r^2}}\,dydx+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}}2(x^2+y^2)e^{x^2+y^2}\,dydx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{1}2r^2e^{r^2}\,rdrd\theta = \left(\int_0^{\pi/4} 1.d\ldots\right.$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(r^2e^{r^2}-e^{r^2}\Big|_0^1\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}\ \ br^3$$

elde edilir.

$$\boxed{x^2+y^2=r^2}$$

$$\int_0^{1/\sqrt{2}}\int_y^{\sqrt{1-y^2}}2(x^2+y^2)e^{x^2+y^2}\,dxdy$$

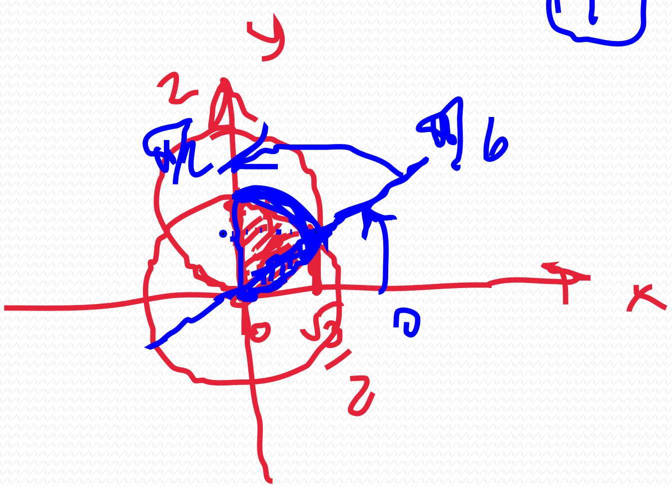
$$B=\left\{(x,y):\ 0\le x\le \frac{\sqrt{3}}{2},\ 1-\sqrt{1-x^2}\le y\le \sqrt{1-x^2}\right\}$$

Örnek 8. $I=\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int\limits_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1\cdot dydx$ integralinin değerini kutupsal koordinatlarda hesaplayınız.

Çözüm: B bölgesinde kutupsal koordinatlara geçilirse;

$$I=\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int\limits_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dydx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\int\limits_{0}^{2\sin\theta} rdrd\theta+\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{0}^{1} rdrd\theta=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}2\sin^2\theta d\theta+\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}d\theta=\left(\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{6}}+\frac{\theta}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

1



$x^2+y^2=1.$

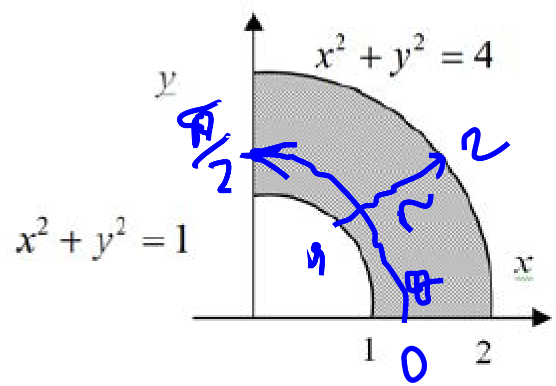
$\frac{(\sqrt{3})^2}{4}+y^2=1$

$y^2=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2}=r.\sin\theta\Rightarrow$

Örnek 12. $B=\{(x,y): x\geq 0, y\geq 0,\ 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$ bölgesinde $f(x,y)=xye^{(x^2+y^2)}$ fonksiyonunun iki katlı integralini hesaplayınız.(Bkz. Şekil)

Çözüm: $x^2+y^2=1$ ve $x^2+y^2=4$ eğrilerinin kutupsal koordinatlardaki karşılığı $r=1$ ve $r=2$ olduğundan ve dörtte birlik daire dilimini kutupsal koordinatlarda tanımlayan θ değerinin değişim aralığı $0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$ dır. Buna göre;



$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$x^2+y^2=r^2$
$J = r.$

$$I=\iint_B xye^{x^2+y^2}\,dxdy=\iint_B (r\cos\theta)(r\sin\theta)e^{r^2}\,rdrd\theta=\iint_B \sin\theta\cos\theta r^3e^{r^2}\,drd\theta$$

olup burada integrasyon sınırları yazılırsa

$\left(\int_1^2 e^{r^2} r^3\,dr\right)$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 \sin\theta\cos\theta r^3e^{r^2}\,drd\theta=\left(\frac{\sin^2\theta}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\left(\frac{(r^2-1)e^{r^2}}{2}\bigg|_1^2\right)=\frac{3e^4}{4}$$ bulunur.

İKİ KATLI İNTEGRALDE ALAN HESABI

Bir B düzlem bölgesinin dik koordinatlarda alanı

Birinci bölümde ele alınan B bölgesi üzerinde tanımlı sürekli $f(x,y)$ fonksiyonu için tanımlanan iki katlı integralde; $f(x,y)=1$ alınırsa kısmi toplamlar

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k$$

olur. Bu toplam; B deki küçük dikdörtgenlerin toplamı olup, limit durumunda B nin alanına yaklaşır. Buna göre;

$$Alan = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \iint_B dA$$

$f(x,y)=1$

limiti B nin **alanı** olarak tanımlanır.

Tanım1. Düzlemde kapalı ve sınırlı B bölgesinin alanı:

$$A = \iint_B dA$$

dır.

Kutupsal dik koordinatlarda alanı

Tanım 2. Kapalı ve sınırlı B bölgesinin kutupsal koordinatlardaki alanı jakobiyen r olduğundan:

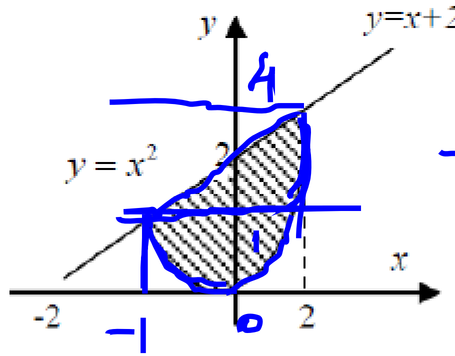
$$A = \iint_B r dr d\theta$$

dır.

Örnek 1. Aşağıdaki integrallerin göstermekte oldukları bölgeleri çizerek, bölgelerin alanlarını hem mevcut integrasyon sırasına göre hem de integrasyon sırasını değiştirerek bulunuz.

a) $\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} f(x,y)\,dydx$ $=1$ **b)** $\int_{0}^{a}\int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dxdy$

Çözüm: a) İntegrasyon sınırlarının tanımlamış olduğu bölge aşağıdaki taralı bölgedir.



$$\int_{-1}^{2}\left[(x+2)-x^2\right]$$

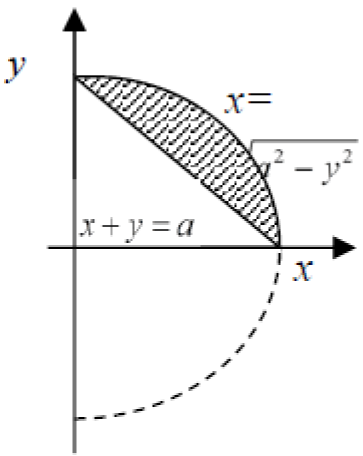
integrasyon içindeki fonksiyon $f(x,y)=1$ alındığında taralı bölgenin alanı,

$$A=\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} dydx=\int_{-1}^{2}\left(y\Big|_{x^2}^{x+2}dx=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}br^2$$

olur. İntegralde integrasyon sırasını değiştirildiğinde ise,

$$A=\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dxdy+\int_{1}^{4}\int_{y-2}^{\sqrt{y}} dxdy=\int_{0}^{1}\left(x\Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}dy+\int_{1}^{4}\left(x\Big|_{y-2}^{\sqrt{y}}dy=\int_{0}^{1}2\sqrt{y}\,dy+\int_{1}^{4}(\sqrt{y}-y+2)\,dy=\frac{9}{2}br^2$$ dir.

b) İntegrasyon sınırlarının tanımlamış olduğu bölge aşağıdaki taralı bölgedir.



taralı bölgenin alanı,

$$A=\int_0^a\int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dxdy=\int_0^a\left(x\Big|_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}}\right)dy=\int_0^a(\sqrt{a^2-y^2}-a+y)dy=\int_0^a\sqrt{a^2-y^2}\,dy+\left(\frac{y^2}{2}-ay\right|_0^a$$

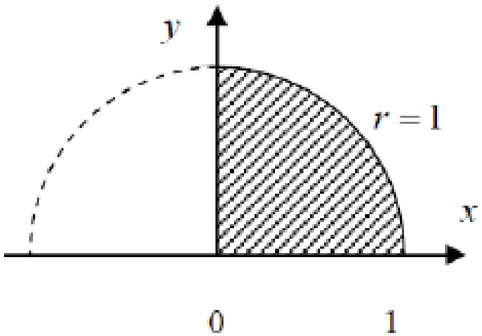
$$A=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^2}{2}(\frac{\pi}{2}-1)br^2$$

olarak bulunur. İntegralde integrasyon sırasını değiştirildiğinde ise,

$$A=\int_0^a\int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} dydx=\int_0^a y\Big|_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} dx=\int_0^a(\sqrt{a^2-x^2}-a+x)dx=\frac{a^2}{2}(\frac{\pi}{2}-1)br^2$$ olur.

Örnek 2. Kutupsal koordinatlardaki denklemi $r = 1$ olan eğri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm: Eğri, orijine 1 birim uzaklıkta olan noktaların geometrik yeridir.Yani merkeziorijinde bulunan, yarıçapı 1 birim olan çemberdir (Bkz Şekil).

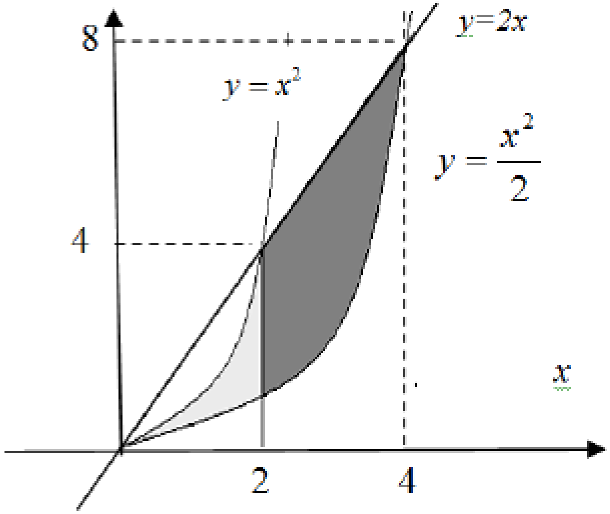


$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{r=1} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\bigg|_0^1 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \pi br^2$$

Yukarıdaki şekildeki taralı alan integrasyon bölgesinin dörtte birlik kısmıdır. Bu tür simetri kuralının kullanılabileceği alan sorularında simetrik parçalardan en küçüğü üzerinden işlem yapılması tercih edilmelidir.

Örnek 3. $y=x^2, y=\frac{x^2}{2}$ parabolleri ve $y=2x$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm: Verilen eğriler tarafından sınırlanan bölge aşağıdaki taralı bölge olup,



$$A=\int_0^2\int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2} dydx+\int_2^4\int_{\frac{x^2}{2}}^{2x} dydx=\int_0^2\left(x^2-\frac{x^2}{2}\right)dx+\int_2^4\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)dx=4\ \ br^2$$

olur. İntegralde integrasyon sırası değiştirildiğinde ise

$$A=\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2y}} dxdy+\int_4^8\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{2y}} dxdy=\int_0^4\left(\sqrt{2y}-\sqrt{y}\right)dy+\int_4^8\left(\sqrt{2y}-\frac{y}{2}\right)dy=4br^2$$ olur.

Kaynaklar:

1. A. H. Berksoy, O. Özkan, Mühendisler İçin Çözümlü Kalkülüs, S.Ü. Basımevi, 2010
2. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus II**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2010.
3. J. Stewart, Kalkülüs Kavram ve Kapsam (Diferansiyel ve İntegral Hesap), TÜBA, 2010.