MATEMATİK 2

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2021

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=?\quad 1$$

$$S_n=\frac{n+1-1}{(n+1)!}=\frac{\cancel{n+1}}{\cancel{(n+1)}!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$\left.\begin{aligned}
S_1&=1-\cancel{\frac{1}{2!}}\\
S_2&=\cancel{\frac{1}{2!}}-\cancel{\frac{1}{3!}}\\
S_3&=\cancel{\frac{1}{3!}}-\cancel{\frac{1}{4!}}\\
&\vdots\\
S_n&=\cancel{\frac{1}{n!}}-\frac{1}{(n+1)!}
\end{aligned}\right\}\sum S_n=1-\frac{1}{(n+1)!}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)!}\right)=1$$

$$S_n=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{1.3.5.....(2k-1)},$$ serisinin karakteri?

$= \frac{1}{2}$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)!}{\cancel{(2k-1)!!}\,(2k+1)}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{2k+1} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{100}},$$ serisinin karakteri?

$$= \frac{1}{2^{100}}\sum_{n=1}^{\infty}(2n)!$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n}} - 1,$ serisinin karakteri?

Limit testine göre, $b_n = \frac{1}{n}$ seçilirse $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\frac{-1}{n^2}} e^{\frac{1}{n}}}{\cancel{\frac{-1}{n^2}}} = 1$ a_n, b_n ile aynı karakterdedir.

O halde verilen seri ıraksaktır.

i) $m \in R - \{0\}$ ise; $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ serileri aynı karakterdedirler.

ii) $m = 0$ ise; $\sum b_n < \infty$ (yakınsak) ise $\sum a_n < \infty$ yakınsaktır.

iii) $m = \infty$ ise; $\sum b_n = \infty$ (ıraksak) ise $\sum a_n$ de ıraksaktır.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\alpha = 1$ ıraksa

$\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = x^n \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty > 1$ olduğundan seri, tüm $x(\neq 0)$ ler için ıraksaktır.

Fakat $x = 0$ için seri toplamı 0 olacağından seri yakınsak olur.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n.5^n}$ serisinin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}}.\frac{n.5^n}{(x-3)^n}\right| = |x-3|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{5n+5}\right) = |x-3|.\frac{1}{5} < 1 \Rightarrow |x-3| < 5 \text{ olduğundan seri, } r = 5 \text{ dir.}$$

$-5 < x-3 < 5 \Rightarrow -2 < x < 8$

$x = -2$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cancel{5^n}}{n.\cancel{5^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow \text{azalan genel terime sahip ve limiti 0 olduğundan Leibniz testi gereği seri yakınsaktır.}$$

$a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$ $\quad$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

$x = 8$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{5^n}}{n.\cancel{5^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow \text{harmonik serisi ıraksaktır.}$$

Yakınsaklık aralığı $\Rightarrow -2 \le x < 8 \Rightarrow x \in [-2, 8)$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\left(x-1\right)^{n}}{2^{n}}$ serisinin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\left(x-1\right)^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^{n}}{n!\left(x-1\right)^{n}}\right|=\left|x-1\right|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2}\right)=\infty>1$$ olduğundan seri $x=1$ haricinde her $\forall x\in\mathbb{R}$ için verilen seri ıraksaktır. $x=1$ için *yakınsak* olacaktır.

$\ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ fonksiyonunu seriye açınız. (Ödev sorusu)

$\ln(1-x)^{-1} = -\ln(1-x)$

$\dfrac{1}{1-x} = \sum$

$\dfrac{1}{1+x} = \sum$

$-\ln(1-x) = \sum$

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)=\ln\left(1\right)-\ln\left(1-x\right)=-\ln\left(1-x\right)$$ dır. Ayrıca biz biliyoruz ki $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^{k}=\dfrac{1}{1-x}\Rightarrow\sum\limits_{k=0}^{\infty}\int\limits_{0}^{x} x^{k}dx=\int\limits_{0}^{x}\dfrac{dx}{1-x}$

$$\Rightarrow\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1}=-\ln\left(1-x\right)\Rightarrow-\ln\left(1-x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1}$$ elde edilir.

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$

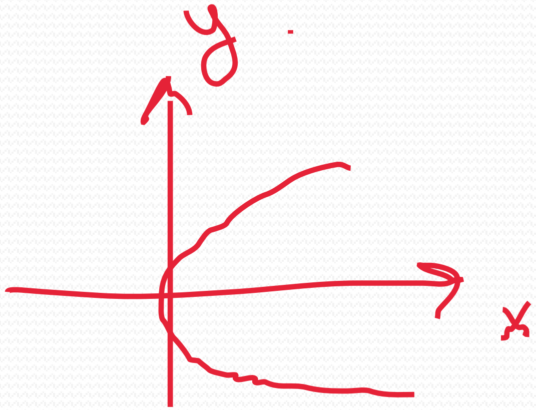
sinh x seri açılımını bulunuz.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\left(1-(-1)^n\right)}{n!}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(0 + \frac{2x}{1!} + 0 + \frac{2x^3}{3!} + 0 + \frac{2x^5}{5!}\right) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$r = \cot\theta \csc\theta$ kartezyen formda yazınız.

$$r = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{1}{\sin\theta} \Rightarrow r = \frac{\frac{x}{r}}{\left(\frac{y}{r}\right)^2} \Rightarrow \frac{y^2}{\cancel{r}} = \frac{x}{\cancel{r}} \Rightarrow \boxed{y^2 = x}$$



$x^2 + y^2 = r^2$

$x = r\cos\theta \Rightarrow \cos$

$y = r\sin\theta \Rightarrow \sin$

$x^2 + y^2 = r^2$

$r = 5$

$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$

$\left(\lim_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim_{y \to b} f_2(y)\right)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,\ln 2)} e^{x-y} = ?$$

$$\lim_{x\to 0} e^{x} \cdot \lim_{y\to \ln 2} e^{-y} = 1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ ya da;}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to \ln 2} e^{x-y}\right] &= \lim_{x\to 0} e^{x-\ln 2} = e^{0-\ln 2} = \frac{1}{2} \\ \lim_{y\to \ln 2}\left[\lim_{x\to 0} e^{x-y}\right] &= \lim_{y\to \ln 2} e^{0-\ln 2} = e^{0-\ln 2} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} y = mx + \ln 2 \Rightarrow \lim_{x\to 0} e^{x-mx-\ln 2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right) = ?$$

$= 1$

$$\lim_{r\to 0} \cos\left(\frac{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}{r\cos\theta + r\sin\theta}\right) = \lim_{r\to 0} \cos\left(\frac{r^2}{r(\cos\theta+\sin\theta)}\right) = \lim_{r\to 0} \cos(0) = 1$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(xy^2\right)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ fonksiyonunun sürekliliği hakkında bilgi veriniz.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\left(xy^2\right)}{xy^2}\cdot\frac{xy^2}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\left(xy^2\right)}{xy^2}\cdot\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^2}=1.\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{m^2x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}\left(1+m^2\right)}=0\ \left(y=mx \text{ ile yaklaşıldı}\right)$$

ve $f(x,y)=0$ olduğundan verilen fonksiyon $(0,0)$ noktasında süreklidir.

$$\lim_{(x,y)\to(3,4)}\frac{\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}=?$$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to3}\left[\lim_{y\to4}\frac{\ln\left(\sqrt{x^2+16}\right)}{\sqrt{x^2+16}}\right]=\lim_{x\to3}\frac{\ln\left(\sqrt{9+16}\right)}{\sqrt{9+16}}=\frac{\ln5}{5}\\ &\lim_{y\to4}\left[\lim_{x\to3}\frac{\ln\left(\sqrt{9+y^2}\right)}{\sqrt{9+y^2}}\right]=\lim_{y\to4}\frac{\ln\left(\sqrt{9+16}\right)}{\sqrt{9+16}}=\frac{\ln5}{5}\end{aligned}\right\}\underset{y=m(x-3)+4}{\Rightarrow}\quad \lim_{x\to3}\frac{\ln\left(\sqrt{x^2+m^2(x-3)^2+8m(x-3)+16}\right)}{\sqrt{x^2+m^2(x-3)^2+8m(x-3)+16}}=\boxed{\frac{\ln5}{5}}$$

$f(x,y,z) = yz\ln(xy)$ fonksiyonunun birinci mertebeden kısmi türevlerini hesaplayınız.

$$f_x = \frac{yzy}{xy} = \frac{yz}{x}, \quad f_y = z\ln(xy) + \frac{yzx}{xy} = z\ln(xy) + z, \quad f_z = y\ln(xy)$$

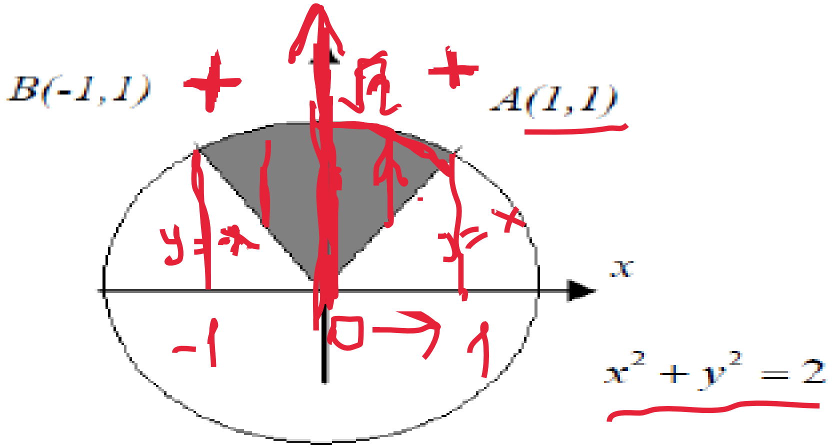
$z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ fonksiyonunu, $x = e^u \cos v$ ve $y = e^u \sin v$ dönüşümleri yardımıyla z_u ve z_v kısmi türevlerini hesaplayınız.

$$z_u = z_x.x_u + z_y.y_u = \frac{2x}{x^2+y^2}.e^u\cos v + \frac{2y}{x^2+y^2}.e^u \sin v = \frac{2e^{2u}\cos^2 v}{e^{2u}\cos^2 v + e^{2u}\sin^2 v} + \frac{2e^{2u}\sin^2 v}{e^{2u}\cos^2 v + e^{2u}\sin^2 v} = 2$$

$$z_v = z_x.x_v + z_y.y_v = \frac{2x}{x^2+y^2}.\left(-e^u \sin v\right) + \frac{2y}{x^2+y^2}.\left(e^u\cos v\right) = \frac{-2e^{2u}\sin v\cos v}{e^{2u}\cos^2 v + e^{2u}\sin^2 v} + \frac{2e^{2u}\sin v\cos v}{e^{2u}\cos^2 v + e^{2u}\sin^2 v} = 0$$

Örnek 3. B bölgesi; merkezi $O(0,0)$ olan çemberinin üzerindeki $A(1,1)$, $B(-1,1)$ noktaları arasındaki yay parçası ve OA, OB yarıçaplarıyla sınırlanan bir daire kesmesidir.

Çözüm: İntegrasyon bölgesi aşağıdaki taralı bölge olup, bu bölge için



$x = \mp\sqrt{2-y^2}$

$y = \sqrt{2-x^2}$

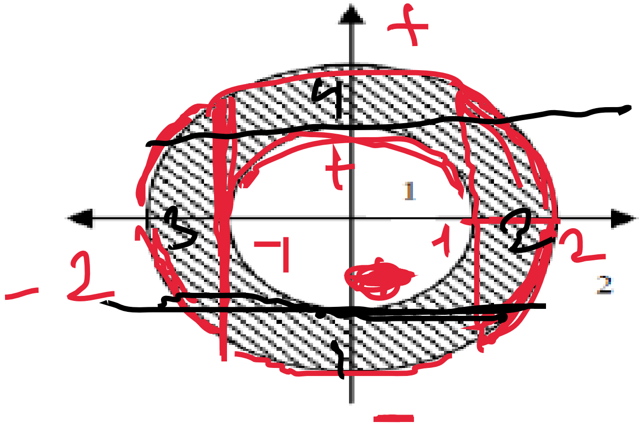
$$\iint_B f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_{-y}^{y} f(x,y)dxdy + \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dxdy$$

$$\iint_B f(x,y)dydx = \int_{-1}^{0} \int_{-x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dydx + \int_0^1 \int_{x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dydx$$

biçiminde yazılır.

Örnek 4. B bölgesi; merkezleri $O(0,0)$ noktası yarıçapları $r=1$ ve $r=2$ olan, merkezcil iki çemberin sınırladığı halka alandır.

Çözüm: Aşağıdaki taralı bölge ile verilen integrasyon bölgesi; eksenlere paralel doğrular ile



basit bölgelere ayrıldıklarında

1 2 3 4

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \int_{-2}^{-1}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dxdy + \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dxdy$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dxdy + \int_{1}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dxdy$$

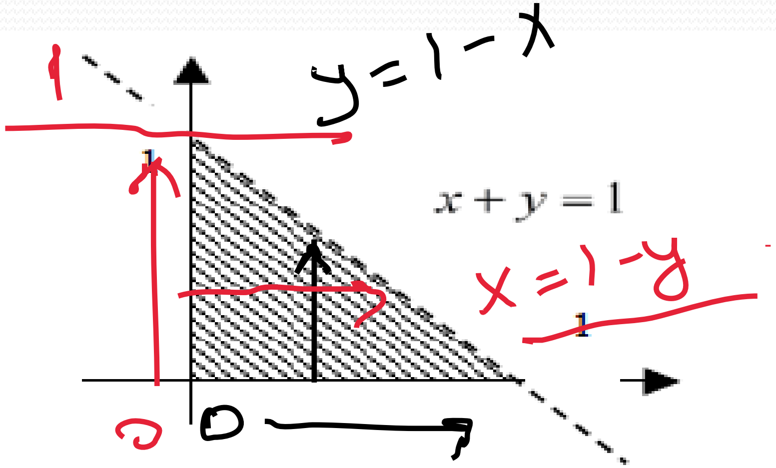
$$\iint_B f(x,y)\,dydx = \int_{-2}^{-1}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dydx + \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dydx$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dydx + \int_{1}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dydx$$

eşitlikleri elde edilir.

Örnek 5. B bölgesi; $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x + y \leq 1$ eşitsizliği ile tanımlanan bölgedir.

Çözüm: Verilen integrasyon bölgesi aşağıdaki taralı bölgedir. Buna göre,



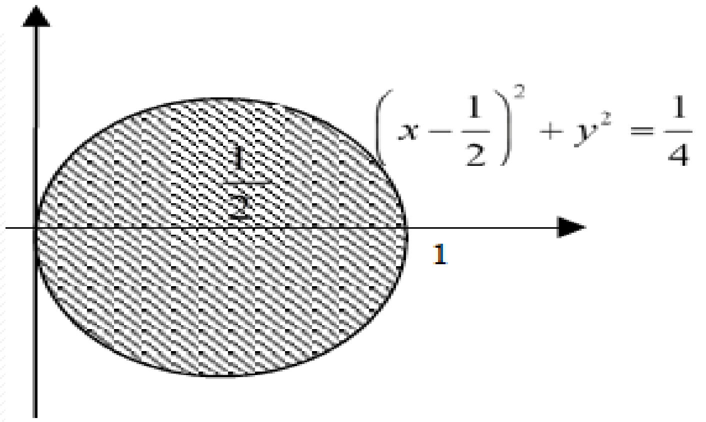
$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{1-y} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\iint_B f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx$$

biçiminde verilen integraller bölgeyi tanımlamaktadır.

Örnek 6. B bölgesi; $x^2+y^2 \le x$ ile sınırlanan bölge (merkezi $\left(\frac{1}{2},0\right)$ ve yarıçapı $r=\frac{1}{2}$ olan çemberin içi).

Çözüm: Tanımlanan bölge aşağıdaki şekilde olduğu gibi, merkezi x ekseni üzerinde, çapı 1 birim olan ve orjine teğet olan $x^2+y^2 \le x$ çemberin içidir.



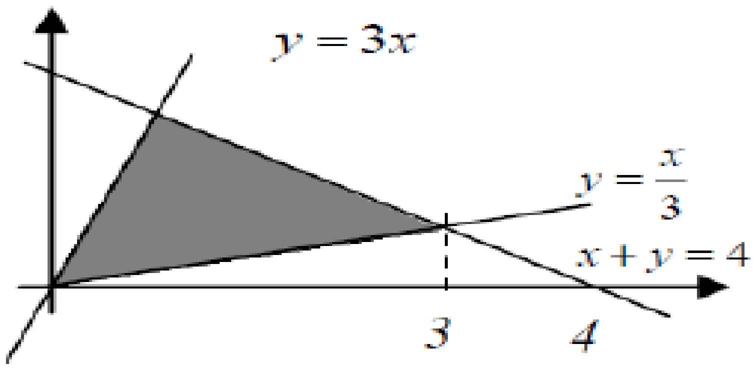
$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2}} f(x,y)\,dxdy$$

$$\iint_B f(x,y)\,dydx = \int_0^1 \int_{-\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}^{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} f(x,y)\,dydx$$

olur.

Örnek 28. B bölgesi; $y = 3x, x = 3y, x + y = 4$ eğrilerinin sınırladığı bölge ise; $\iint_B x^2 dxdy = ?$

Çözüm:

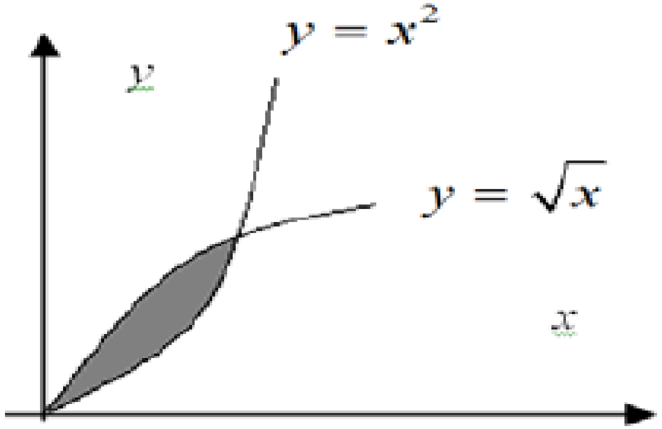


$$I = \int_0^1 \int_{\frac{x}{3}}^{3x} x^2 dydx + \int_1^3 \int_{\frac{x}{3}}^{4-x} x^2 dydx = \int_0^1 x^2 [y\Big|_{\frac{x}{3}}^{3x} dx + \int_1^3 x^2 [y\Big|_{\frac{x}{3}}^{4-x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{8x^3}{3} dx + \int_1^3 (4x^2 - \frac{4x^3}{3}) dx = \frac{26}{3}$$

Örnek 35. B bölgesi; $y=x^2$ ve $y^2=x$ parabollerinin sınırladığı bölge ise $\iint_B (x+y)\,dxdy=?$

Çözüm:



$$I=\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x+y)\,dydx=\int_0^1\left[xy+\frac{y^2}{2}\right|_{x^2}^{\sqrt{x}}dx=\int_0^1\left(x\sqrt{x}+\frac{x}{2}-x^3-\frac{x^4}{2}\right)dx$$

$$I=\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{10}\right|_0^1=\frac{3}{10}$$

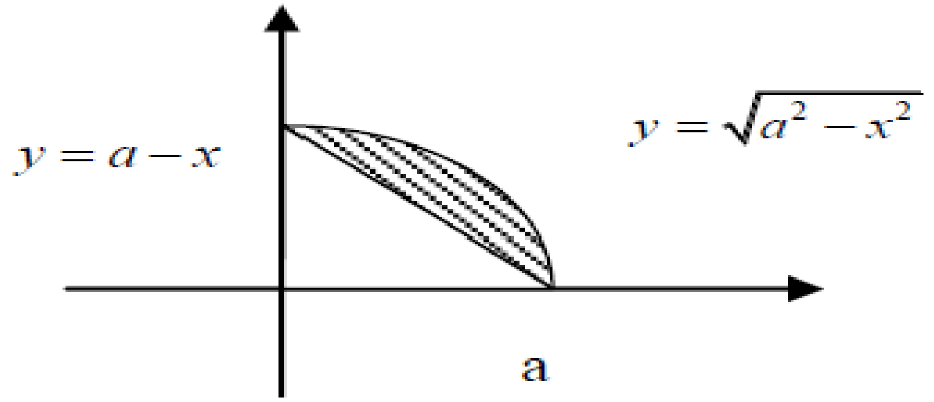
Örnek 37. Aşağıdaki iki katlı integrallerin değerlerini integrasyon sıralarını değiştirerek hesaplayınız.

a) $I=\int_0^a \int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy\,dx$ **b)** $I=\int_0^4 \int_0^{\frac{x^2}{2}} x\,dy\,dx$ **c)** $I=\int_0^1 \int_{2-2x^2}^{2} xy\,dy\,dx$

d) $I=\int_1^{e^2} \int_0^{\ln x} 2x\,dy\,dx$ **e)** $I=\int_0^3 \int_{y^2}^{3y} x\,dx\,dy$ **f)** $I=\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} y\,dx\,dy$ **g)** $I=\int_0^1 \int_x^1 e^x\,dy\,dx$

Çözüm:

a) $x = 0, x = a \; y = a - x, y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ile sınırlanan bölge şekildeki taralı bölgedir. İntegrasyon sırası değiştirildiğinde,

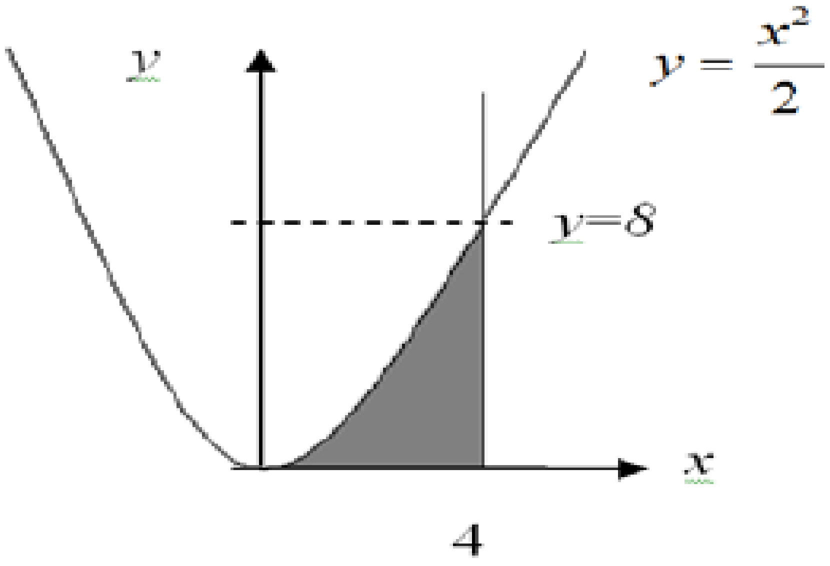


$$I = \int_0^a \int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} y\,dx\,dy = \int_0^a \left[yx\Big|_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} \right. dy = \int_0^a y(\sqrt{a^2 - y^2} - a + y)dy$$

$$I = -\frac{1}{3}(a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} - a\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^a = \frac{a^3}{3}$$

olur.

b) (Bkz.Şekil 1)

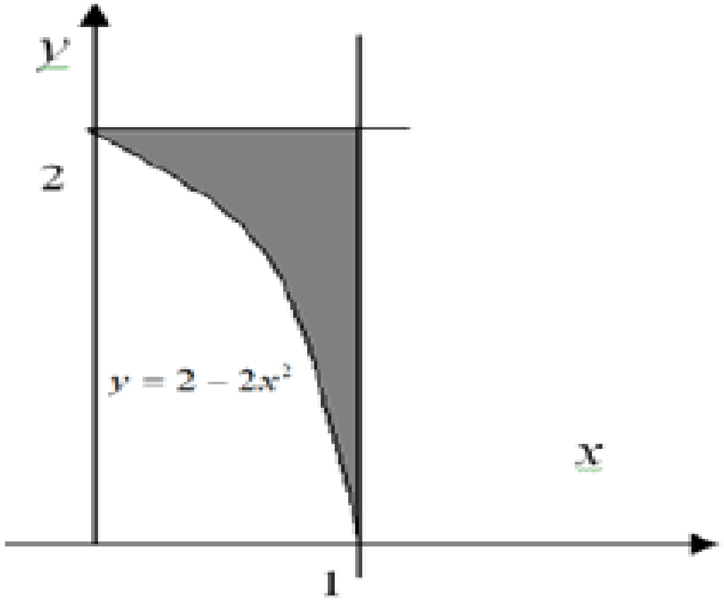


Şekil.1

$$I=\int_0^8\int_{\sqrt{2y}}^4 x\,dx\,dy=\int_0^8\left[\frac{x^2}{2}\right|_{\sqrt{2y}}^4 dy=\int_0^8(8-y)\,dy=\left(8y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^8=32$$

c) (Bkz.Şekil 2)

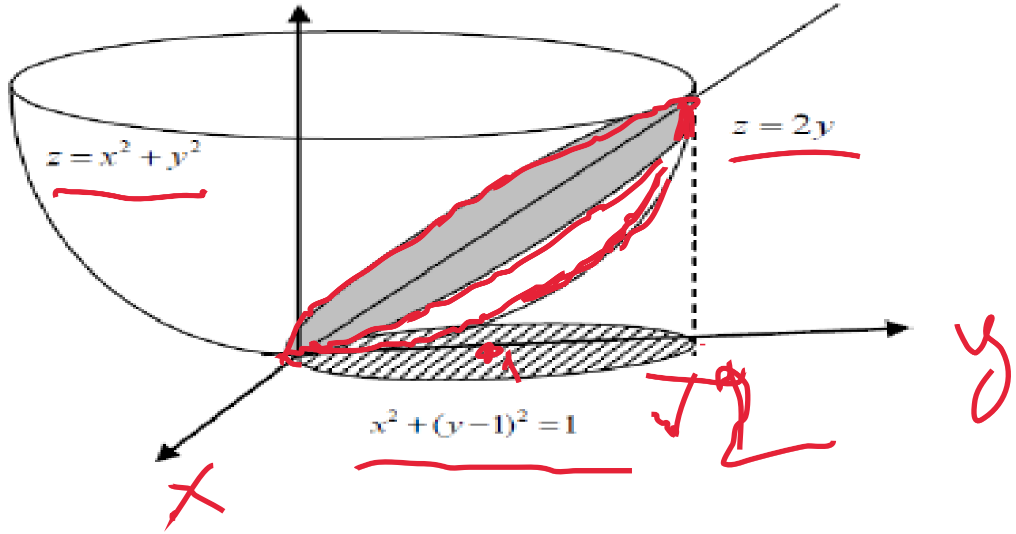
$$\int_0^2 \int_{\sqrt{1-\frac{1}{2}y}}^{1} xydxdy = \int_0^2 y[\frac{x^2}{2}\Bigg|_{\sqrt{1-\frac{1}{2}y}}^{1} dy = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{y^2}{2}dy = \frac{1}{2}[\frac{y^3}{6}\Bigg|_0^2 = \frac{2}{3}$$



Şekil 2

Örnek 10. $z = x^2 + y^2$ paraboloidinden $z = 2y$ yüzeyinin ayırdığı cismin hacmini hesaplayınız.

Çözüm: Verilen yüzeylerin sınırladıkları bölge,



yüzeylerin ortak çözümünden, $2y = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$ çemberinin sınırladığı B bölgesinin cismin xoy deki iz düşüm bölgesi olduğu bulunur. O halde aranan hacim,

$$V = \iint_B [2y - (x^2 + y^2)]dxdy$$

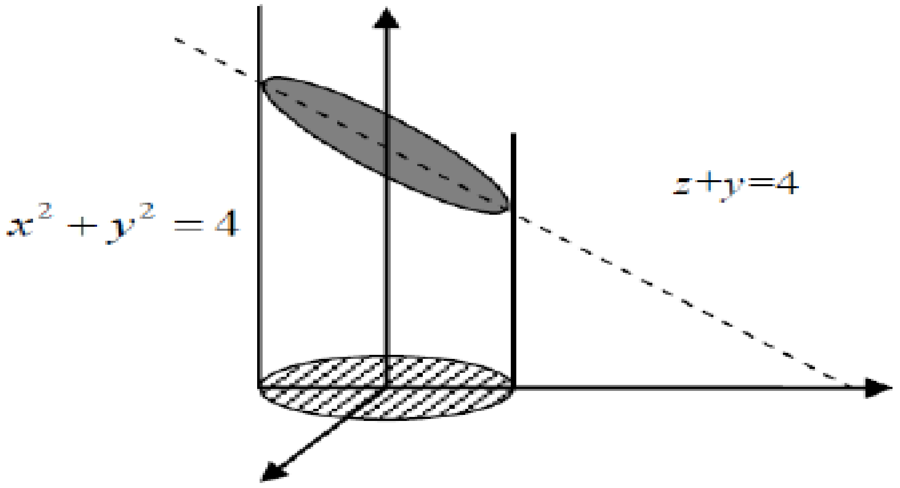
dir. B bölgesi dairesel bir bölge olduğundan kutupsal koordinatlara geçildiğinde;

$$V=\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}(2r\sin\theta-r^2)rdrd\theta=\int_0^{\pi}\left(\frac{2}{3}r^3\sin\theta-\frac{r^4}{4}\right|_0^{2\sin\theta}d\theta=\int_0^{\pi}\frac{4}{3}\sin^4\theta\, d\theta=\frac{\pi}{8}\, br^3$$

elde edilir.

Örnek 11. $x^2+y^2=4$ silindiri ve $z=0$, $y+z=4$ düzlemleri ile sınırlanan cismin hacmini hesaplayınız. (Bkz. Şekil)

Çözüm: Verilen yüzeyler ile sınırlanan cisim,



yukarıdaki şekildeki gibidir. Bu cismin *xoy* düzlemine izdüşümü $x^2+y^2=4$ dairesidir. Kutupsal koordinatlara geçilirse,

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \text{ için } |J| = r \ , \ 0 \le r \le 2 \ , \ 0 \le \theta \le 2\pi$$

olup,

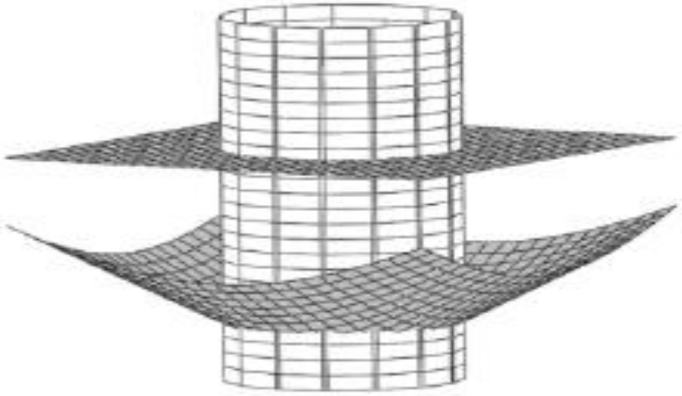
$$V = \iint_B (4-y)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 - r\sin\theta) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} [2r^2 - \frac{r^3}{3}\sin\theta \Big|_0^2 d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi} \left(8 - \frac{8}{3}\sin\theta\right) d\theta = 16\pi\, br^3$$

elde edilir.

Örnek 17. $x^2+y^2=1$ silindirinin içinde, $z=\sqrt{x^2+y^2}$ nin üstünde $z=4$ düzleminin altında kalan cismin hacmini bulunuz. (Bkz.Şekil)

Çözüm:

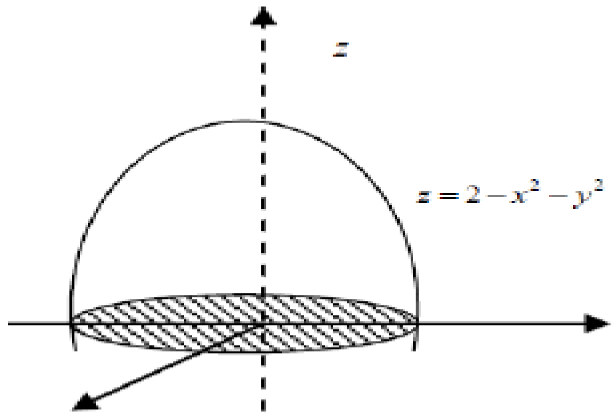


$V=\iint\limits_B\left(4-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$ olup, B bölgesi dairesel bölge olduğundan;

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^1 (4-r)rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\left(2r^2-\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^1 d\theta=\frac{10}{3}\pi br^3 \quad \text{olur.}$$

Örnek 2. $z = 2-(x^2+y^2)$ dönel paraboloidinin ve $z=0$ düzleminin üstünde kalan kısmının yüzey alanını hesaplayınız.

Çözüm:



Şekilden de görüleceği gibi $z=0$ düzleminin üstünde kalan paraboloid yüzeyinin xoy düzlemine izdüşümü $x^2+y^2=2$ dairesel bölgesidir.

olur.

$$z = 2 - x^2 - y^2 \text{ için } z_x = -2x \ , \ z_y = -2y$$

olup,

$$S = \iint_B \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dy dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2}\, r dr d\theta$$

$$S = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} [\frac{2}{3}(1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} d\theta = \frac{13\pi}{3} br^2$$

olur.

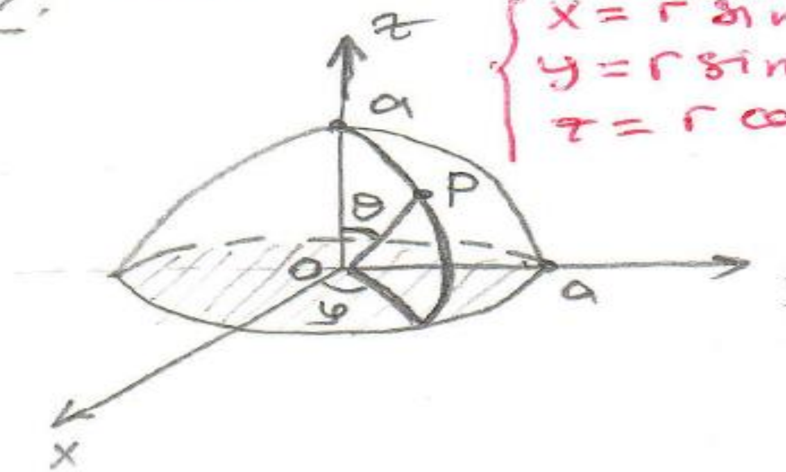
Örnek:

$$\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\, dz\, dy\, dx$$ integralini

küresel koordinatlara geçerek hesaplayınız.

Çözüm: önce küresel koordinatlar~~a~~ dönüşüm yapmak için

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$ ~~olduğunu~~ ve $J = r^2\sin\theta$ olduğunu hatırlayı[n]



$$\left.\begin{aligned} 0 \le z &\le \sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ -\sqrt{a^2-x^2} \le y &\le \sqrt{a^2-x^2} \\ -a \le x &\le a \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad z^2 = a^2 - x^2 - y^2 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2+z^2=a^2}$ bu bir yarıçap[ı]

a - olan bir küredir. $\quad y^2 = a^2 - x^2 \Rightarrow x^2+y^2 = a^2$

dik izdüşümü ise, yarıçapı a olan bir daire.

Şekilden de görüldüğü gibi $x^2+y^2=a^2$ den

$0 \le \varphi \le 2\pi$ olur. θ ise $0 \le \theta \le \pi/2$ olur, r ise

$0 \le r \le a$ olur. Yani,

$$\left\{\begin{array}{l} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le r \le a \end{array}\right.$$ olur.

Çünkü G bölgesi $z=0$ ile $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ arasında kalan kısmıdır. Bu durumda

$$\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\, dz\, dy\, dx = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{a} \Big(r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi +$$

$$+ r^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi \Big) \cdot \left| r^2 \sin\theta \right| dr\, d\theta\, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{a} \left(r^2 \sin^2\theta \cdot r^2 \sin\theta \right) dr\, d\theta\, d\varphi$$

burada $0 \le \theta \le \pi/2$ old. için mutlak değeri bıraktık. (4 7/1)

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{a} r^4 \sin^3\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{a^5}{5}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta$$

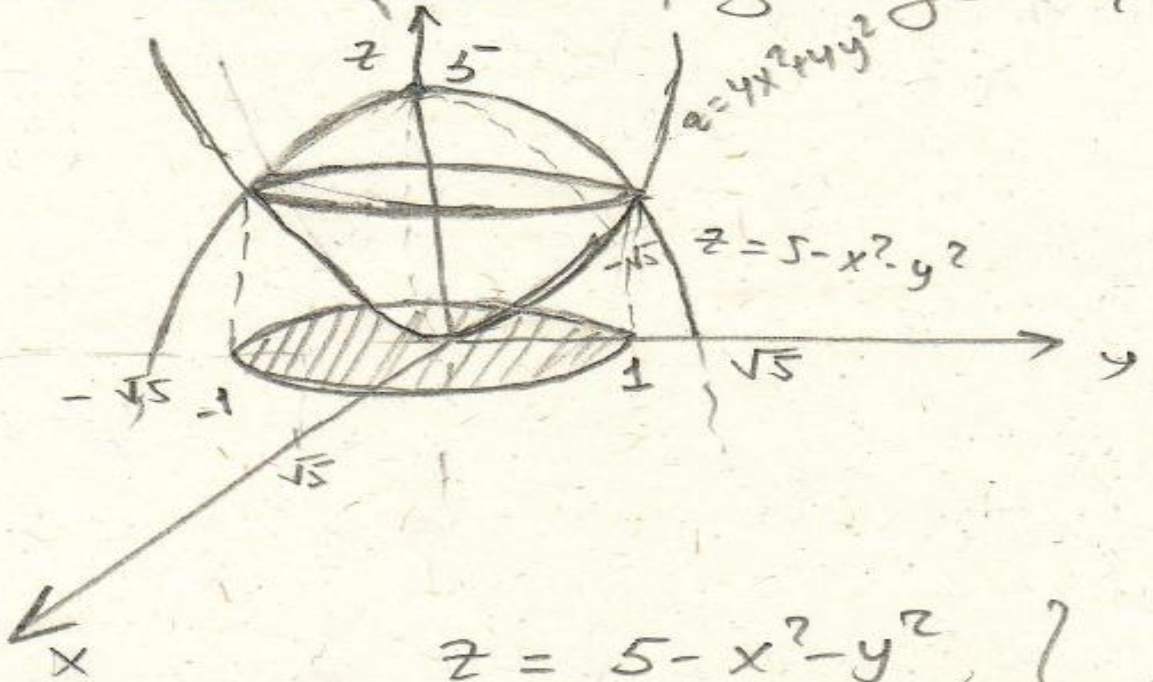
$$= -\frac{a^5}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2\theta)\,d(\cos\theta)\,d\varphi = -\frac{2\pi a^5}{5}\left[\int_0^{\pi/2} d(\cos\theta) -\right.$$

$$\left. - \int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\, d(\cos\theta)\right] = -\frac{2\pi a^5}{5}\left[\cos\theta\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^{\pi/2}\right] =$$

$$= -\frac{2\pi a^5}{5}\left[-1+\frac{1}{3}\right] = \frac{2\pi a^5}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{15}\pi a^5$$ bulunur.

Misal: $z = 5-x^2-y^2$ ve $z = 4x^2+4y^2$ paraboloidle arasında kalan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm: Önce şekli çizmeye çalışalım.



$$\left.\begin{aligned} z &= 5-x^2-y^2 \\ z &= 4x^2+4y^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 5-x^2-y^2 = 4x^2+4y^2$$

$\Rightarrow \quad 5 = 5x^2 + 5y^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x^2 + y^2 = 1}$ olurki

bu da xoy düzlemine dik izdüşümü-

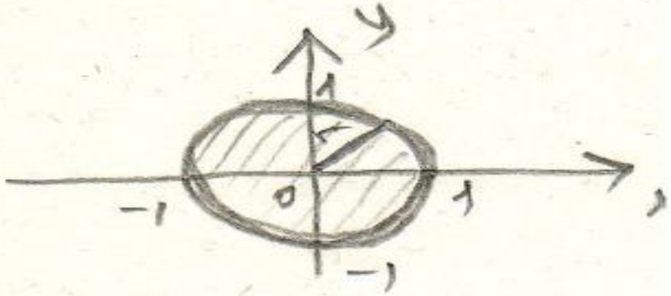
dür. Bu durumda

$$\left\{ \begin{array}{c} 4x^2+4y^2 \le z \le 5-x^2-y^2 \\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \\ -1 \le x \le 1 \end{array} \right\}$$

$$\iiint_{\sigma} dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{4x^2+4y^2}^{5-x^2-y^2} dz\,dy\,dx \,;$$

{ Burada silindirik koordinatlara geçilir

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \quad x^2+y^2=r^2$$



$$\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

z ise $\quad 4x^2+4y^2 = 4(x^2+y^2) = 4r^2$

$5-x^2-y^2 = 5-(x^2+y^2) = 5-r^2$ ol

Yani, $\quad 4r^2 \le z \le 5-r^2$ olur. $\quad \boxed{J = r.}$

$$\iiint\limits_G dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{4r^2}^{5-r^2} r \cdot dz\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\cdot\left(z\Big|_{4r^2}^{5-r^2}\right)dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\left(5-r^2-4r^2\right)dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(5r-5r^3\right)dr\,d\varphi = 5\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1\right]d\varphi =$$

$$= 5\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)d\varphi = 5\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{2}\pi \quad br^3;$$

3) $\left.\begin{array}{l} v^2 - u^2 + x - u + 2 = 0 \\ -v - 2uv + y - 3 = 0 \end{array}\right\}$ denklem sistemi ile kapalı olarak verilen $u = u(x, y)$

$v = v(x, y)$ fonksiyonlarının birinci mertebeden kısmi türevlerini bulunuz.

4) $\left.\begin{array}{l} x = u + v \\ y = 3u + 2v \end{array}\right\}$ denklem sistemi ile kapalı olarak verilen $u = u(x, y)$ $v = v(x, y)$ fonksiyonları ve $w = \dfrac{u}{v}$ fonksiyonu veriliyor. $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ ve $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ kısmi türevlerini bulunuz. **C:** $\dfrac{\partial w}{\partial x} = -\dfrac{2v + 3u}{v^2}, \dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{u + v}{v^2}$

16) $\left.\begin{array}{l} u = \ln\left(x^2 - 2y\right) \\ v = \dfrac{x^2 - 2y + 1}{x^2 - 2y - 1} \end{array}\right\}$ ise u ile v fonksiyonları arasında fonksiyonel bir bağıntı var mıdır? Varsa nedir?

- **Kaynaklar**
- **Kalkülüs (2. Cilt)**, Mehmet Sezer, Nurcan Baykuş Savaşaneril, Dora yayıncılık, 2015.
- **Thomas Kalkülüs (2. Cilt)**, G.B. Thomas, M.D. Weir ve J.R. Hass, 12.Baskıdan Çeviri, 1.Baskı, Pearson yay., Ankara, 2011.