

# BAĞINTI

Tanımı, Özellikleri,  
Denklik ve Sıra Bağıntısı

İki kümenin kartezyen çarpımının, tüm sıralı ikililerin kümesi olduğunu gördük. Bu kümenin herhangi bir alt kümesi bağıntıdır. Yani kartezyen çarpım kümesinden keyfi ikililer seçip bir küme oluşturursak bu küme bir bağıntı olur.

$A$  ve  $B$  gibi iki kümenin kartezyen çarpımı  $s(A) \cdot s(B)$  tane ikili içeriyordu. Bağıntı da bu kümenin herhangi bir alt kümesi olduğundan toplam bağıntı sayısı  $2^{s(A) \cdot s(B)}$  olur.

Tanıma uyduğuna göre boş küme de bir bağıntıdır. Boş küme her kümenin ve dolayısıyla kartezyen çarpımın da bir altkümesidir. Aynı şekilde kartezyen çarpımın kendisi de bir bağıntıdır. Her küme kendisinin alt kümesidir.

Örneğin  $A = \{1, 2, 3\}$  ve  $B = \{a, b\}$  olsun.

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

Buradan alacağımız ikililerle oluşturacağımız her altküme,  $A$  dan  $B$  ye bir bağıntıdır. Bağıntılar genellikle  $\beta$  harfi ile gösterilir.

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \{\} \\ \beta_2 &= \{(1, a), (2, b)\} \\ \beta_3 &= \{(1, a), (3, a), (3, b)\} \end{aligned} \right|$$

A ve B sonlu sayıda elemanı olan 2 küme olsun. A'dan B'ye  $\beta$  bağıntısı için, bağıntıyı göstermenin 3 farklı yolu vardır:

1) Bağıntı  $\beta$ 'nin elemanları  $A \times B$  Kartezyen çarpımının koordinat çizelgesinde işaretlenir.

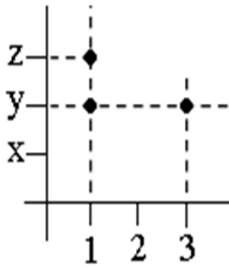
2) A ve B'nin elemanları Venn şeması ile gösterilir. Bağıntı  $\beta$  için,  $a \in A$ 'dan  $b \in B$ 'ye oklar çizilir.

3) Matris formatında gösterilir. Bağıntıda  $a\beta b$  için  $\beta$ 'nin ikili matrisi, A kümesinin eleman sayısı kadar satıra, B kümesinin eleman sayısı kadar sütuna sahiptir. Elemanlardan a ve b arasında ilişki var ise 1, yoksa 0 konularak **bağıntı matrisi** oluşturulur.

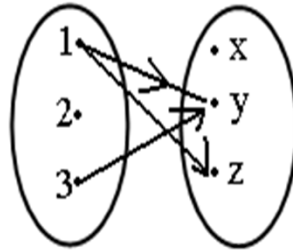
ÖRNEK:

$A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{x, y, z\}$  kümeleri olsun. Bağıntı  $\beta = \{(1, y), (1, z), (3, y)\}$  ise  $\beta$  bağıntısı 3 şekilde de gösterin.

1) Koordinat sisteminde



2) Venn şemasında



3) Matris formatında

	x	y	z
1	0	1	1
2	0	0	0
3	0	1	0

# Tanım ve Değer Kümesi (Domain and Range)

---

$X$ 'den  $Y$ 'ye verilen bir  $R$  bağıntısında,

□  $R$ 'nin tanım kümesi (domain)

$$\text{Dom}(R) = \{ x \in X \mid (x, y) \in R \text{ for some } y \in Y \}$$

□  $R$ 'nin değer kümesi (range)

$$\text{Rng}(R) = \{ y \in Y \mid (x, y) \in R \text{ for some } x \in X \}$$

□ Örnek:

■  $X = \{1, 2, 3\}$  ve  $Y = \{a, b\}$

■  $R = \{(1,a), (1,b), (2,b)\}$

■  $\text{Dom}(R) = \{1, 2\}$ ,  $\text{Rng}(R) = \{a, b\}$

# Bağıntının Digraph Gösterimi

**Tanım:**  $A$  bir sonlu küme ve  $R \subseteq A \times A$  bir bağıntı olsun.  
Bu durumda  $R$  şekilsel olarak gösterilebilir.

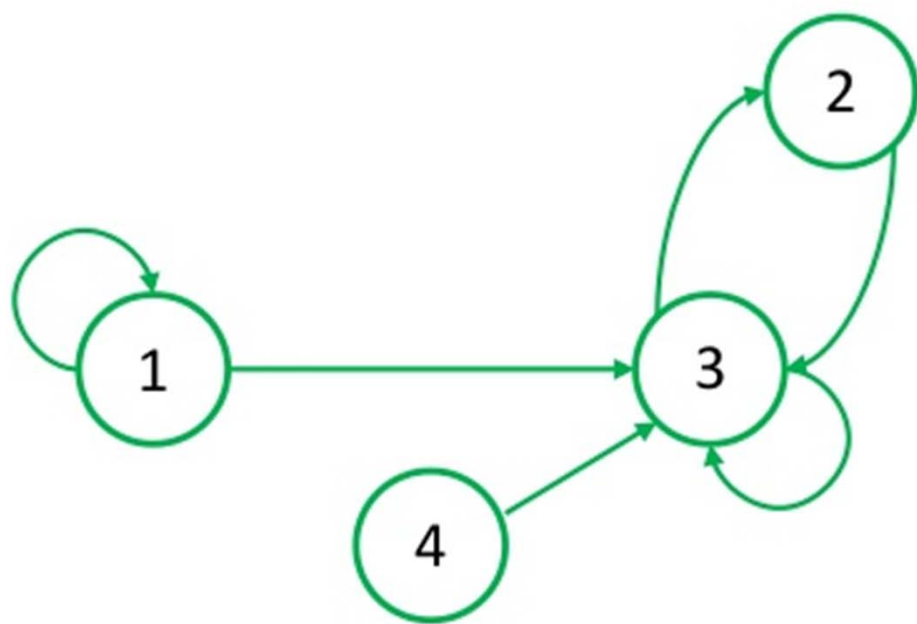
- $A$  kümesindeki her eleman için **düğüm (vertex/node)** adı verilen daireler çiz ve bu dairelere elemanları yerleştir
- $R$  bağıntısına göre eşleşen sıralı ikililerden  $(x,y)$  için  $x$ 'ten  $y$ 'ye doğru yönlü ok çiz

Sonuçta elde edilen gösterim şekline  $R$  bağıntısı için **yönlü graf** ya da **digraph** denir

# Digraph örneği

Let  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  and

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 2), (4, 3)\}$$



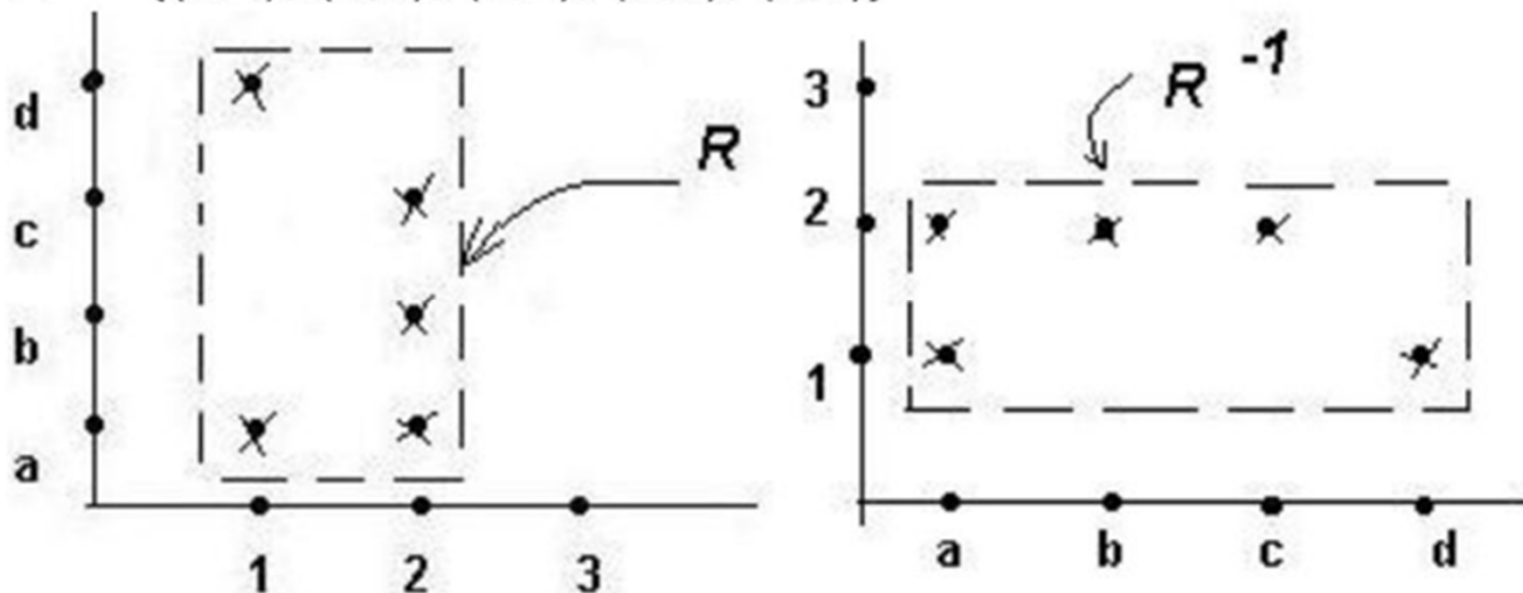


# Bağıntının tersi

$X$ 'den  $Y$ 'ye bir  $R$  bağıntısı verilmiş olsun, bu bağıntının *tersi (inversi)*  $Y$ 'den  $X$ 'e olup  $R^{-1}$  ile gösterilir

$$R^{-1} = \{ (y,x) \mid (x,y) \in R \}$$

□ Örnek: Eğer  $R = \{(1,a), (1,d), (2,a), (2,b), (2,c)\}$  ise  
 $R^{-1} = \{(a,1), (d,1), (a,2), (b,2), (c,2)\}$

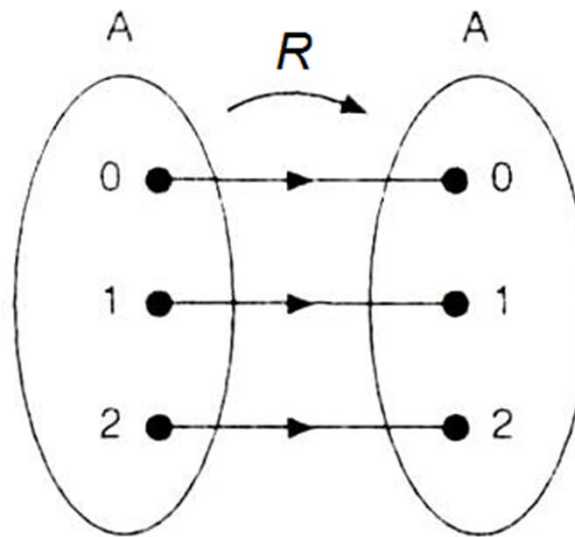


# Birim bağıntı

Birim Bağıntı:  $A \times A$  kümesinde tanımlı bir  $\beta$  bağıntısı olsun. Bağıntı  $\beta$ , sadece ve sadece  $A \times A$ 'nın köşegen elemanlarından oluşuyorsa,  $\beta$  bağıntısı birim bağıntıdır.  $I_A$  ile gösterilir.  $I_A = \{ (x,x): x \in A \}$  olur.

ÖRNEK:

$A = \{0, 1, 2\}$  olsun. Birim bağıntı  $I_A = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$  olur.





## Bağıntı Özellikleri: Yansıma, Simetri, Ters Simetri ve Geçişkenlik

### \* Yansıma

$A$  da tanımlı bir  $\beta$  bağıntısı eğer  $A$  nın her elemanını kendisi ile eşliyorsa yansıma bağıntısıdır. Yani her  $a \in A$  için  $(a, a) \in \beta$  ise bağıntının yansıma özelliği vardır.

Örneğin  $A = \{a, b, c\}$  ise  $A$  da tanımlı, yani  $A \times A$  nın altkümesi olan bir bağıntının yansıyan olması için, mutlaka  $(a, a)$ ,  $(b, b)$  ve  $(c, c)$  sıralı ikililerini içermesi gerekir.

$A = \{1, 2, 3, 4\}$  olsun.

a)  $\beta_1 = \{(1,1), (2,2), (2,4), (3,1), (3,4), (4,4), (4,2)\}$  yansıyan değildir

b)  $\beta_2 = \{(1,1), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (4,4), (4,2)\}$  yansıyandır

## Bağıntı Özellikleri: Yansıma, Simetri, Ters Simetri ve Geçişkenlik

### \* Simetri

$A$  da tanımlı bir bağıntıda, bağıntıdaki her  $(a, b)$  için  $(b, a)$  da bağıntının elemanı ise bu bağıntı simetriktir. Yani bağıntının içindeki her ikilinin tersi de bağıntıda bulunmalı. Bir tanesinin bile tersi yoksa simetri özelliği yoktur.

$$\beta = \{(1, a), (2, b), (3, b), (a, 1), (b, 2)\}$$

Yukarıdaki bağıntıda  $(3, b)$  nin tersi olmadığı için simetri özelliği yoktur.

$$\beta = \{(1, 1)\}$$

Yukarıdaki bağıntı simetriktir. Çünkü  $(1, 1)$  in tersi kendisidir. Simetri tanımında her  $(a, b)$  ikilisi derken  $a \neq b$  şartı olmadığına dikkat edelim.

## Bağıntı Özellikleri: Yansıma, Simetri, Ters Simetri ve Geçişkenlik

### \* Ters Simetri

$A$  da tanımlı bir bağıntıda  $(a, b)$  ve  $(b, a)$  bağıntı da ise  $a = b$  olmalıdır. Yani  $a \neq b$  iken  $(a, b)$  varsa tersi  $(b, a)$  bağıntıda olmamalıdır. Farklı elemanları birbirine bağlayan sıralı ikililerden hiçbirinin tersi olmayacak. Birinin bile tersi varsa, bağıntı ters simetrik değildir.

$$\beta = \{(a, b), (a, c), (b, a)\}$$

Yukarıdaki bağıntı ters simetrik değildir, çünkü  $(a, b)$  nin tersi var, aynı şekilde simetrik de değildir, çünkü  $(a, c)$  nin tersi yok. Bir bağıntı ne simetrik ne ters simetrik olmayabilir. Simetrik olmayan ters simetriktir gibi bir sonuç çıkarmak yanlış olur.

Tanımın  $(a, a)$  gibi ikililerin bağıntıda olmasına izin verdiğine dikkat edelim. Örneğin  $\beta = \{(a, a), (b, b)\}$  bağıntısı hem simetrik hem de ters simetriktir.

## Bağıntı Özellikleri: Yansıma, Simetri, Ters Simetri ve Geçişkenlik

### \* Geçişme

Geçişme özelliği için,  $A$  kümesinde tanımlı bir bağıntı  $(a, b)$  ve  $(b, c)$  ikililerini içeriyorsa,  $(a, c)$  ikilisi de o bağıntının elemanı olmalıdır.

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \{(a, b), (b, c), (a, c)\} \\ \beta_2 &= \{(a, b), (a, c)\}\end{aligned}$$

İlk bağıntı tam da tanımın istediğini yapıyor. Yani  $(a, b)$  ve  $(b, c)$  ikilileri gördüğümüz an geçişme olabilmesi için  $(a, c)$  yi arıyoruz. Ancak ikinci bağıntı da geçişkendir. Çünkü geçişme özelliğinin tanımına uyuyor. Tanım  $(a, b)$  ve  $(b, c)$  türü ikililer bağıntıda olacak demiyor. Bunlar varsa  $(a, c)$  de olacak diyor. Dolayısıyla böyle bir durum yoksa, yani bir ikilinin ikinci elemanı ile başlayan başka bir sıralı ikili yoksa bağıntı zaten geçişkendir.

Örnek:  $A=\{1,2,3\}$  kümesi üzerinde tanımlı bazı bağıntılar verilmiştir.

Bağıntılar	Yansıma	Simetri	Ters Simetri	Geçişme
$\beta_1=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$	var	var	var	var
$\beta_2=\{(2,2),(1,1),(1,3),(3,1)\}$	yok	var	yok	yok
$\beta_3=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2)\}$	var	yok	var	var
$\beta_4=\{(1,1),(2,2),(3,2),(1,3)\}$	yok	yok	var	yok
$\beta_5=\{(1,1),(2,1),(1,2),(3,1)\}$	yok	yok	yok	yok
$\beta_6=\{(2,1),(1,2),(1,1),(2,2)\}$	yok	var	yok	var
$\beta_7=\{(1,1)\}$	yok	var	var	var
$\beta_8=\{(2,3)\}$	yok	yok	var	var

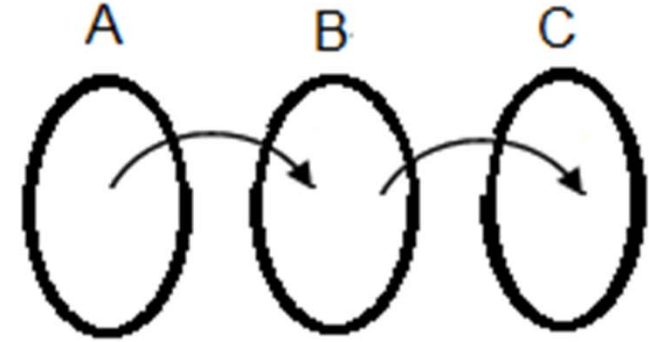
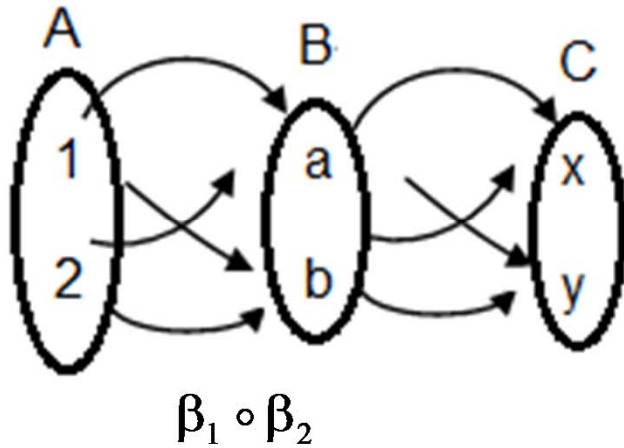
$\beta_2 = \{(2,2), (1,1), (1,3), (3,1)\}$  geçişkenlik aramada tüm sıralı ikililer aranmalıdır.

(2,2)	(1,1)	(1,1)	(3,1)	(3,1)
(2,2)	(1,1)	(1,3)	(1,1)	(1,3)



### Bağıntıların Bileşkesi (Combining Relations):

A, B ve C kümeleri 3 farklı küme olsun. A'dan B'ye (A ile B arasında) bir bağıntı  $\beta_1$  olsun. B'den C'ye (B ile C arasında) bir bağıntı ise  $\beta_2$  olsun. Bu durumda A'dan C'ye (A ile C arasında) bir bağıntı  $\beta_1 \circ \beta_2$  ile gösterilir.  $\beta_1 \circ \beta_2$  bağıntısı,  $\beta_1$  ve  $\beta_2$ 'nin bileşkesi olur.



$$\beta_1 \circ \beta_2 = \{(x, z) : (x, y) \in \beta_1 \wedge (y, z) \in \beta_2\}$$

### Bağıntıların Kesişimi ve Birleşimi (Intersection and Union of Relations):

A kümesinden B kümesine (A ile B arasında) bir bağıntı  $\beta_1$  ve C kümesinden D kümesine (C ile D arasında) bir bağıntı  $\beta_2$  olsun. Bu 2 bağıntının kesişim ( $\beta_1 \cap \beta_2$ ) ve birleşimi de ( $\beta_1 \cup \beta_2$ ) birer bağıntıdır.

A kümesinden B kümesine (A ile B arasında) 2 farklı bağıntı  $\beta_1$  ve  $\beta_2$  olsun. Bu 2 bağıntının kesişim ve birleşimi de birer bağıntıdır.

$$\beta_1 \subseteq A \times B \quad \text{ve} \quad \beta_2 \subseteq A \times B \quad \text{ise} \quad \beta_1 \cap \beta_2 \subseteq A \times B$$

$$\beta_1 \subseteq A \times B \quad \text{ve} \quad \beta_2 \subseteq A \times B \quad \text{ise} \quad \beta_1 \cup \beta_2 \subseteq A \times B$$

A kümesi üzerinde tanımlı 2 farklı  $\beta_1$  ve  $\beta_2$  bağıntıları olsun.

- 1) Hem  $\beta_1$  hem de  $\beta_2$  yansıyan ise  $\rightarrow (\beta_1 \cap \beta_2)$  ve  $(\beta_1 \cup \beta_2)$  her ikisi birden yansıyandır.
- 2) Hem  $\beta_1$  hem de  $\beta_2$  simetrik ise  $\rightarrow (\beta_1 \cap \beta_2)$  ve  $(\beta_1 \cup \beta_2)$  her ikisi birden simetriktir.
- 3) Hem  $\beta_1$  hem de  $\beta_2$  ters simetrik ise  $\rightarrow (\beta_1 \cap \beta_2)$  ters simetriktir ancak  $(\beta_1 \cup \beta_2)$  ters simetrik olmayabilir.
- 4) Hem  $\beta_1$  hem de  $\beta_2$  geçişli ise  $\rightarrow (\beta_1 \cap \beta_2)$  geçişlidir ancak  $(\beta_1 \cup \beta_2)$  geçişli olmayabilir.



Eşdeğerlik Bağıntısı (Denklik) ve Denklik sınıfları:  
(Equivalence Relations and Equivalence Classes) :

$A=\{1, 2, 3\}$  kümesinde tanımlı  $\beta=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$  bağıntısı verilmiştir. Bağıntının özelliklerini inceleyiniz.

a)  $(1,1), (2,2), (3,3) \in \beta \rightarrow \beta$  yansıyan

b)  $(1,2)-(2,1) \in \beta \rightarrow \beta$  simetrik

c)  $(1,2)-(2,1) \rightarrow (1,1) \in \beta$  ve  $(2,1)-(1,2) \rightarrow (2,2) \in \beta \rightarrow \beta$ geçişli

Tanım:

A kümesinde tanımlı bir  $\beta$  bağıntısı olsun. Eğer  $\beta$  bağıntısı;  
(yansıyan + simetrik + geçişli) ise,

$\beta$  bağıntısına A kümesi üzerinde bir **eşdeğerlik bağıntısı (denklik bağıntısı)** denir.

### Eşdeğerlik Bağıntısı ve Denklik sınıfları:

Bağıntı  $\beta$ , A kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olmak üzere;  $(x,y) \in \beta$  ise, y elemanı x elemanına  $\beta$  bağıntısı ile denktir. Bu şekildeki y elemanlarının oluşturduğu kümeye x'in **denklik sınıfı** denir ve  $\bar{x} = [x]$  ile gösterilir.

$$\bar{x} = \{y : y \in A \wedge (x,y) \in \beta\} \quad \text{ve} \quad \bar{x} \subseteq A$$

### Bölmeleme:

Bağıntı  $\beta$ 'de tüm denklik sınıflarından oluşan kümeye **A'nın bölmelemesi veya denklik bölükleri kümesi** denir.  $A / \beta$  ile gösterilir.

$A=\{1, 2, 3\}$  kümesinde tanımlı  $\beta=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$  bağıntısı verilmiştir. Bağıntının denklik bağıntısını olduğu görülmüştür. Denklik bağıntısı olduğuna göre denklik sınıflarını ve denklik bölükleri kümesini yazınız.

Denklik sınıfları  $\rightarrow$

$$1\text{'in denklik sınıfı } \bar{1} = \{1,2\}$$

$$2\text{'nin denklik sınıfı } \bar{2} = \{1,2\}$$

$$3\text{'nin denklik sınıfı } \bar{3} = \{3\}$$

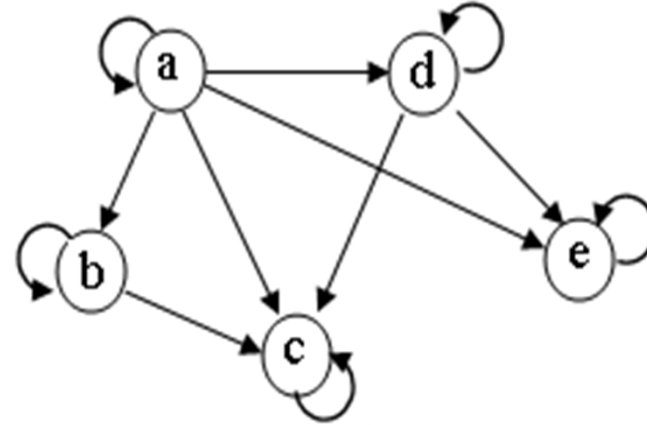
Denklik bölükleri kümesi  $\rightarrow$

$$A / \beta = \{\{1,2\}, \{3\}\}$$

### Sıra (Sıralama) bağıntısı:

(Partial Ordering Relations)

$A=\{a, b, c, d, e\}$  ise digraphı verilen  $\beta$  bağıntısının özelliklerini inceleyiniz.



Bağıntı  $\beta=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,c),(d,c),(d,e)\}$

a)  $(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e) \in \beta \rightarrow \beta$  yansıyan

b) $(a,b) \in \beta - (b,a) \notin \beta$	$(a,d) \in \beta - (d,a) \notin \beta$
$(b,c) \in \beta - (c,b) \notin \beta$	$(a,e) \in \beta - (c,a) \notin \beta$
$(a,c) \in \beta - (c,a) \notin \beta$	$(d,c) \in \beta - (c,d) \notin \beta$
	$(d,e) \in \beta - (e,d) \notin \beta \rightarrow \beta$ ters simetrik

c)  $(a,b) \in \beta, (b,c) \in \beta \rightarrow (a,c) \in \beta$

$(a,d) \in \beta, (d,c) \in \beta \rightarrow (a,c) \in \beta$

$(a,d) \in \beta, (d,e) \in \beta \rightarrow (a,e) \in \beta \rightarrow \beta$  geçişli

Tanım: A kümesi üzerinde bir  $\beta$  bağıntısı olsun. Eğer  $\beta$  bağıntısı;

(yansıyan + ters simetrik + geçişli) ise,

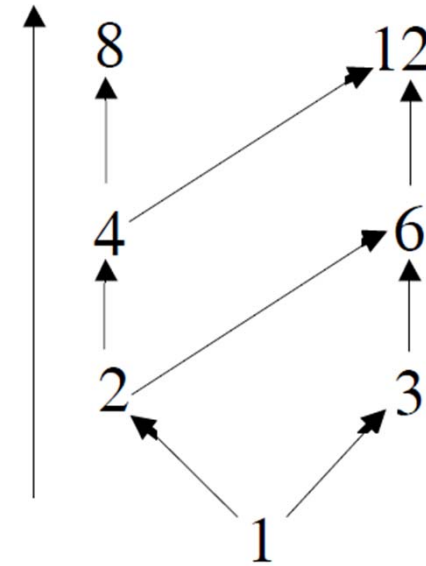
$\beta$  bağıntısına A kümesi üzerinde bir **kısmi parçalı sıra bağıntı** denir. A kümesine de **kısmi parçalı sıra küme** denir. Parçalı sıra bağlantı  $\leq$  ile gösterilir.  $a \leq b \rightarrow a$  elemanı b elemanından önce gelir anlamındadır.

### Hasse Diyagramı:

$A=\{1,2,3,4,6,8,12\}$  kümesinde  $\beta=\{(x,y): x,y \in A \text{ ve } x,y\text{'yi tam böler}\}$  bağıntısı verilmiştir. Bağıntı bir kısmi parçalı sıra bağıntısıdır.

$\beta=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,6),(1,8),(1,12),(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(2,12),(3,3),(3,6),(3,12),(4,4),(4,8),(4,12),(6,6),(6,12),(8,8),(12,12)\}$  olur.

Bağıntı matrisi gibi kısmi parçalı sıra bağıntıdaki sıralı ikilileri bir düzlemde birleştiren yani sıralı çiftlerin bağlantılarını yönlü oklarla gösteren diyagrama **Hasse diyagramı** denir. Hasse diyagramında  $(x,x)$  sıralı ikililerinin bağlantıları gösterilmez. Sıralı ikililerden en önde gelen eleman en alta konulur ve bağlantısı olan elemanlarla birleştirilir. Bağıntının Hasse diyagramı çizilecek olursa;



## En büyük ve en küçük eleman (Minimum and Maximum element):

A kümesi üzerinde bir  $\beta$  sıralama bağıntısı olsun. B kümesi ise A kümesinin alt kümesi olsun.  $\emptyset \neq B \subset A$  iken;

$\forall x \in B$  için  $b_1 \leq x$  olacak şekilde bir  $b_1 \in B$  varsa  $b_1$ 'e **B'nin en küçük elemanı** veya **minimalı** denir.

$\forall x \in B$  için  $x \leq b_2$  olacak şekilde bir  $b_2 \in B$  varsa  $b_2$ 'ye **B'nin en büyük elemanı** veya **maximalı** denir.

ÖRNEK:

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$ ,  $B = \{b, c, d\}$  ve

$\beta = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (f,f), (a,c), (a,d), (a,e), (b,c), (b,d), (b,e), (c,d), (c,e)\}$  olsun. B kümesinin en küçük ve en büyük elemanı nedir?

Bağıntı  $\beta$  sıralama bağıntısı mı ona bakmak lazım. Bağıntı  $\beta$  (yansıyan + ters simetrik + geçişli) olduğuna göre sıralama bağıntısıdır

$\emptyset \neq B \subset A$  olduğundan B kümesi için en küçük ve en büyük elemanı bulabiliriz.

$$b \leq b \quad b \leq d$$

$$b \leq c \quad c \leq d$$

$$b \leq d \quad d \leq d$$

$$B_{EK} = b \quad B_{EB} = d$$

EK için;

$B = \{b, c, d\}$

$(b, \dots)$

$(b, b) - \text{var}$

$(b, c) - \text{var}$

$(b, d) - \text{var}$

$(c, \dots)$

$(c, b) - \text{yok}$

$(d, \dots)$

$(d, b) - \text{yok}$

EB için;

$B = \{b, c, d\}$

$(\dots, d)$

$(b, d) - \text{var}$

$(c, d) - \text{var}$

$(d, d) - \text{var}$