MATEMATİK - 2

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2021

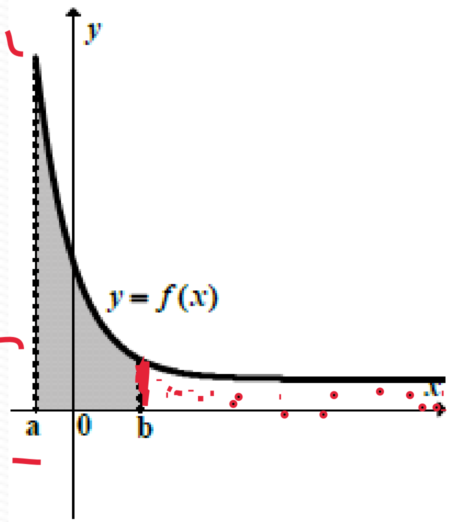
Has ve Has Olmayan İntegral Kavramı

Bir $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli ise, hatta bu aralıkta sonlu süreksizliğe sahipse, Riemann belirli integral tanımına göre, $\int_a^b f(x)dx$ integralinin mevcut olduğu biliniyor. Böyle bir integral bir toplamın limiti olan bir sayıdır. Diğer yandan, bir $f(x)$ fonksiyonu integrasyon aralığında sınırsız ise, veya integrasyon sınırının birisinde veya her ikisinde de sonsuz ise Riemann belirli integral tanımı uygulanamaz. Bu koşulların herhangi birisi varsa böyle integrallere **has olmayan integral (improper integral)** denir.

Bu bölümde integral kavramı genişletilerek $f(x)$ integrandının sürekli, ancak integrasyon sınırlarının sonsuz olması ile sonlu bir aralıkta $f(x)$ integrandının bir ya da birden çok süreksizlik noktasının mevcut olması durumları incelenecektir.

İntegrallenebilir bir $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ gibi kapalı ve sınırlı bir aralıkta tanımlanır; $f(x)$ bu aralıkta sınırlıdır. Diğer bir deyişle, a dan b ye kadar olan integrasyon aralığı sonludur ve bu aralıkta $f(x)$ integrandının değer aralığı sonludur. bu koşulların birini veya ikisini sağlamayan integraller **has olmayan integrallerdir.** Yani bu tip integrallerde $f(x)$ integrandı, ya sınırsız bir aralıkta tanımlı bir fonksiyon ya da sınırlı bir aralıkta tanımlı sınırsız bir fonksiyondur.

8.2 Birinci Tür Has Olmayan İntegraller



Şekil 8.1:
$f(x)$, $a \leq x < +\infty$ da sürekli ise

$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$ dır.

$f(x)$, $-\infty < x \leq b$ da sürekli ise

$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$ dır.

$\int_a^b f(x)dx$ integralinde, integral sınırlarından birisi veya herikisi birden sonsuz ise (yani aralık sınırsız ise) ve $f(x)$ integrandı bu aralıkta sürekli ise bu tür integrallere **birinci tür has olmayan integral** denir.

a) $f(x)$, $a \leq x < +\infty$ da sürekli ise birinci tür has olmayan integral (Şekil 8.1)

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

olarak tanımlanır ve limit mevcutsa integral yakınsaktır, aksi halde ıraksaktır.

b) $f(x)$, $-\infty < x \leq b$ da sürekli ise birinci tür has olmayan integral (Şekil 8.1)

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

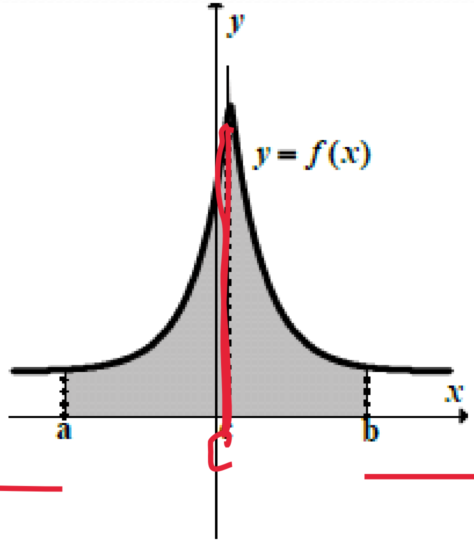
$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$

olarak tanımlanır ve limit mevcutsa integral yakınsaktır, aksi halde ıraksaktır.

c) $f(x)$, $-\infty < x < \infty$ da sürekli ise birinci tür has olmayan integral, $-\infty < c < \infty$ olmak üzere, **(Şekil 8.2)**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b \to \infty} \int_{c}^{b} f(x)dx$$

olarak tanımlanır ve her iki limit de mevcutsa integral yakınsak olur. Burada c, $(-\infty, \infty)$ aralığının içinde alınan keyfi bir noktadır; limitler ayrı ayrı gözönüne almak gerekir.



Şekil 8.2:
$f(x)$, $-\infty < x < \infty$ da sürekli ise $-\infty < c < \infty$ olmak üzere,
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b \to \infty} \int_{c}^{b} f(x)dx$
dir.

$[1, +\infty)$ $\quad f(x) = \frac{1}{x^3}$

Örnek:

$\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx$ **has olmayan integralinin yakınsak veya ıraksak olup olmadığını belirleyiniz; yakınsak ise değerini hesaplayınız.**

Çözüm:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-3} dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{x^{-2}}{2} \right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left[-\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{2b^2}} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}$$

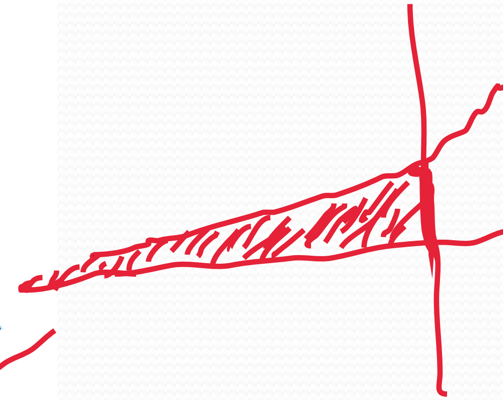
bulunur. Böylece, $\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx$ integrali $\frac{1}{2}$ ye yakınsar.

Örnek:

$\int_{-\infty}^0 e^x dx$ **integralini hesaplayınız.**

Çözüm:

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a\to-\infty} \left[e^x \right]_a^0 = \lim_{a\to-\infty} \left[1 - \overset{\nearrow 0}{e^a} \right] = 1 - e^{-\infty} = 1$$



bulunur. Böylece, $\int_{-\infty}^0 e^x dx$ integrali 1 ye yakınsar.

Örnek:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ integralini hesaplayınız.}$$

Çözüm:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{b\to-\infty} \left[2\sqrt{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[2\sqrt{b}-2\right] = \infty$$

$\infty - 2$

(integral ıraksak)

Örnek:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \text{ integralini hesaplayınız.}$$

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\mathbb{R}$ $(-\infty, +\infty)$

Çözüm:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left[\arctan x\right]_a^0+\lim_{b\to\infty}\left[\arctan x\right]_0^b=\lim_{a\to-\infty}(\arctan 0-\arctan a)+\lim_{b\to\infty}(\mathrm{arctg}(b)$$

$$=-\arctan(-\infty)+\arctan(\infty)=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi$$

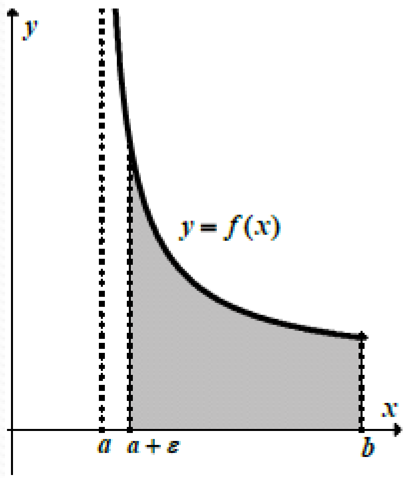
8.3 İkinci Tür Has Olmayan İntegraller

$\int_a^b f(x)dx$ integralinde, integral sınırları sonlu fakat $f(x)$ integrandı bu sonlu aralıkta süreksizlik noktalarına sahipse (yani $f(x)$, aralığın uç veya iç noktalarında sınırsız ise) bu tip integrallere **ikinci tür has olmayan integral** denir.

a) $f(x)$, $a<x\le b$ da sürekli $x=a$ da süreksiz ise, integral (Şekil 8.3)

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

olarak tanımlanır ve limit mevcutsa integral yakınsaktır, aksi halde ıraksaktır.



Şekil 8.3:

$f(x)$, $a<x\le b$ da sürekli $x=a$ da süreksiz ise,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

[a, b)

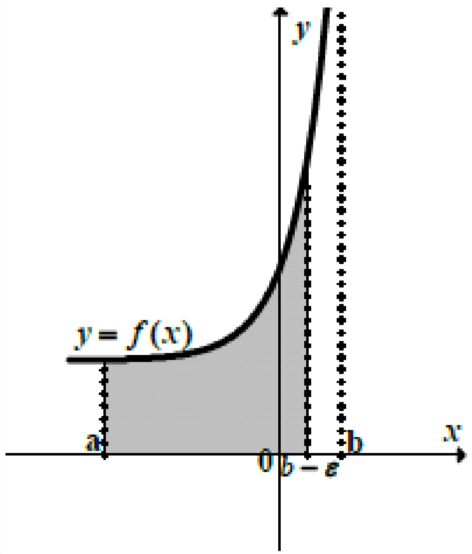
b) $f(x)$, $a \le x < b$ da sürekli ve $x = b$ de süreksiz ise integral (Şekil 8.4)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

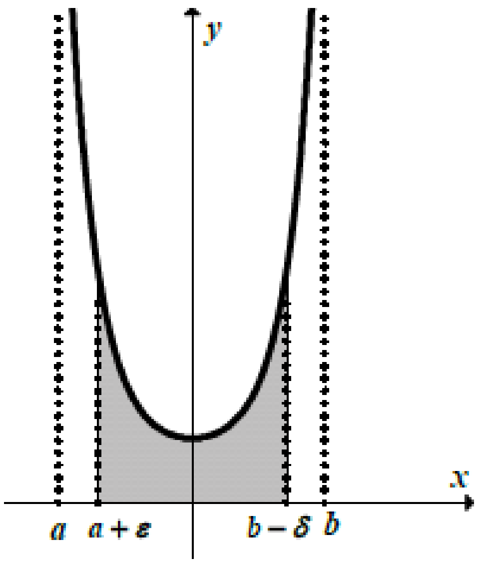
olarak tanımlanır. Eğer limit mevcutsa integral yakınsak, limit mevcut değilse ıraksak olur.

c) $f(x)$, $a < x < b$ da sürekli; $x = a$ ve $x = b$ uç noktalarında süreksiz ise, integral (Şekil 8.5)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \delta \to 0}} \int_{a+\varepsilon}^{b-\delta} f(x)dx$$ olarak tanımlanır.



Şekil 8.4:
$f(x)$, $a \le x < b$ da sürekli ve $x = b$ de süreksiz ise
$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ dır.



Şekil 8.5:
$f(x)$, $a<x<b$ da sürekli; $x=a$ ve $x=b$ uç noktalarında süreksiz ise

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \delta\to 0}}\int_{a+\varepsilon}^{b-\delta} f(x)dx$$ dır.

d) $f(x)$, $a<c<b$ olmak üzere, $x=c$ de süreksiz ve $a\le x<c$ ve $c<x\le b$ aralıklarında sürekli ise, integral

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim_{\delta\to 0}\int_{c+\delta}^{b} f(x)dx$$

olarak tanımlanır.

Not:

Eğer, $\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$ gibi birden fazla süreksizlik noktası varsa

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{c_1} f(x)dx+\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx+\ldots+\int_{c_n}^{b} f(x)dx$$ alınarak, her bir integral (c) deki gibi hesaplanır.

Örnek:

$\int_0^1 (1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$ **integralini hesaplayınız.**

Çözüm:

$f(x)=(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ fonksiyonu $0\le x<1$ aralığında sürekli, fakat $x=1$ uç noktasında süreksizdir.

$$\int_0^1 (1-x)^{-\frac{1}{2}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-2(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{1-\varepsilon}=2\quad (yakınsak)$$

bulunur.

Örnek:

$\int_0^1 x^{-\frac{3}{5}}\,dx$ **integralini hesaplayınız.**

Çözüm:

$f(x)=x^{-\frac{3}{5}}$ fonksiyonu $0<x\le 1$ aralığında sürekli ve $x=0$ da süreksizdir.

$$\int_0^1 x^{-\frac{3}{5}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{1} x^{-\frac{3}{5}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}}\right]_{\varepsilon}^{1}=\frac{5}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(1-\varepsilon^{\frac{2}{5}}\right)=\frac{5}{2}\quad (yakınsak)$$

bulunur.

Örnek:

$\int_0^3 (x-2)^{-\frac{1}{3}}\, dx$ **integralini hesaplayınız.**

Çözüm:

$f(x)=(x-2)^{-\frac{1}{3}}$ fonksiyonu $x=2$ de süreksiz $[0,3]-\{2\}$ aralığında süreklidir.

$$\int_0^3 (x-2)^{-\frac{1}{3}}\, dx=\int_0^2 (x-2)^{-\frac{1}{3}}\, dx+\int_2^3 (x-2)^{-\frac{1}{3}}\, dx$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2-\varepsilon} (x-2)^{-\frac{1}{3}}dx+\lim_{\delta\to 0}\int_{2+\delta}^{3} (x-2)^{-\frac{1}{3}}dx$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{3}{2}(x-2)^{\frac{2}{3}}\right]_0^{2-\varepsilon}+\lim_{\delta\to 0}\left[\frac{3}{2}(x-2)^{\frac{2}{3}}\right]_{2+\delta}^{3}=\frac{3}{2}\left(-\sqrt[3]{4}+1\right)$$

bulunur.

yakınsaktır

Örnek:

$\int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} dx$ **integralini hesaplayınız.**

Çözüm:

$f(x)=\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ fonksiyonu $x=\pm 1$ uç noktasında süreksiz; $-1<x<1$ aralığında süreklidir.

$$\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \delta\to 0}}\int_{-1+\varepsilon}^{1-\delta}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \delta\to 0}}\left[\arcsin x\right]_{-1+\varepsilon}^{1-\delta}$$

$$=\arcsin 1-\arcsin(-1)=\pi$$

bulunur.

yakınsak

Üçüncü Tür Has Olmayan İntegraller

$\int_a^b f(x)\,dx$ integralinde, hem integralin sınırlarında sonsuzluk varsa ve hem de bu aralıkta $f(x)$ süreksiz ise, yani birinci ve ikinci tür has olmayan integrallerinin koşulları birlikte oluşuyorsa, bu tip integrallere **üçüncü tür has olmayan integral** denir. Hesaplama yöntemi, birinci ve ikinci tür integrallerdeki yöntemlerin birlikte kullanılmasından oluşur.

∞ ve 1

Örnek:

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x-1}\,dx$ **integralini hesaplayınız.**

Çözüm:

$f(x)=\frac{1}{x-1}$ fonksiyonu $x=1$ de süreksiz ve uç noktada $b=\infty$ olmaktadır; $1<x<\infty$ aralığında süreklidir.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ b\to\infty}} \int_{1+\varepsilon}^{b} \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ b\to\infty}} \Big[\ln|x-1|\Big]_{1+\varepsilon}^{b} = \infty \quad (\text{ıraksak})$$

bulunur.

1) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ **integralini hesaplayınız.**

Çözüm:

$f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$ fonksiyonu $x=0$ da süreksiz ve $0<x\leq 1$ aralığında süreklidir.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 x^{-\frac{1}{2}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[2\sqrt{x}\right]_{\varepsilon}^{1}=2\lim_{\varepsilon\to 0}\left[1-\sqrt{\varepsilon}\right]=2(yakınsak)$$

2) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx$ **integralini hesaplayınız.**

Çözüm:

$f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonu $x=0$ da süreksiz

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx=\int_{-1}^0 \frac{1}{x}dx+\int_0^1 \frac{1}{x}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{1}{x}dx+\lim_{\delta\to 0}\int_{0+\delta}^{1}\frac{1}{x}dx$$

$$\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln|x|\right]_{-1}^{-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\varepsilon=-\infty$$

olduğundan integral ıraksaktır. 2. limiti incelemeye gerek yoktur. İki parçadan birisi ıraksak ise integral ıraksak olur.

3) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+4}\,dx$ **integralini hesaplayınız.**

Çözüm:

$f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$ fonksiyonu $0 \le x < \infty$ aralığında süreklidir; integral sınırında $b=\infty$ dur.

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+4}\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{x^2+4}\,dx=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\right]_0^b=\frac{\pi}{4}$$

4) $\int_0^2 x\ln x\,dx$ **integralini hesaplayınız.**

Çözüm:

$f(x)=x\ln x$, fonksiyonu $x=0$ da tanımsız ve dolayısıyla süreksizdir.

$$\int_0^2 x\ln x\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^2 x\ln x\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}\right]_\varepsilon^2=2\ln 2-1$$

Not:

Sağdaki integralde belirsizlik olduğundan L'Hospital kuralı uygulanmıştır.

ALIŞTIRMALAR

1°) Aşağıdaki has olmayan integralleri hesaplayınız.

a) $\int_{0}^{1}(x-1)^{-\frac{2}{3}}dx$ C: 3

b) $\int_{1}^{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}dx$ C: $3\sqrt[3]{2}$

c) $\int_{0}^{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}dx$ C: $3\left(1+\sqrt[3]{2}\right)$

d) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4+x^2}dx$ C: $\frac{\pi}{2}$

e) $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ C: $\frac{\pi}{4}$

f) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(1-4x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx$ C: $\frac{\pi}{2}$

g) $\int_{1}^{\infty}\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}dx$ C: $\infty \quad (\text{ıraksak})$

Gama Fonksiyonu.

Tanım: $0 < x < +\infty$ için Euler integrali dediğimiz

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

integrali ile tanımlanan fonksiyona **Gama fonksiyonu** denir ve $\Gamma(x)$ ile gösterilir. Yani

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt \quad (1)$$ dir.

(*) Bu fonksiyon x bir tamsayı olmadığı durumlarda $(x+1)!$ veya $(1-x)!$ gibi faktöriyelleri hesaplamada yaygın olarak kullanılmaktadır.

$\circledast$ $x=1$ olsun.

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}t^{1-1}\,dt=\int_0^\infty e^{-t}\,dt=\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-t}\,dt=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\left[-e^{-t}\Big|_0^A\right]=\lim_{A\to\infty}\left[-\underbrace{e^{-A}}_{\to 0}+1\right]=1=0!$$

$$\boxed{\Gamma(1)=1=0! \quad (2)}$$

$\circledast$ $x=2$ olsun.

$$\Gamma(2)=\int_0^\infty e^{-t}t^{2-1}\,dt=\int_0^\infty e^{-t}\,t\,dt=\begin{cases}u=t \Rightarrow du=dt\\ dv=e^{-t}dt \Rightarrow v=-e^{-t}\end{cases}$$

$$=\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-t}t\,dt=\lim_{A\to\infty}\left[\overset{0}{\cancel{-e^{-t}t\Big|_0^A}}+\int_0^A e^{-t}\,dt\right]=1=1!$$

$$\boxed{\Gamma(2)=1=1!}$$ (3) elde edilir.

$x=3$ olsun.

$$\Gamma(3)=\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^{3-1}\,dt=\int_0^\infty e^{-t}t^2\,dt=\left\{\begin{array}{l}u=t^2\Rightarrow du=2t\,dt\\ dv=e^{-t}dt\Rightarrow v=-e^{-t}\end{array}\right\},$$

$$=\lim_{A\to\infty}\left[-t^2e^{-t}\Big|_0^A+2\int_0^\infty e^{-t}t\,dt\right]=2\cdot 1=2!$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma(3)=2!} \quad (4)$$

$x=p$ olsun.

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-t}t^{p-1}\,dt=\left\{\begin{array}{l}u=t^{p-1}\Rightarrow du=(p-1)t^{p-2}\,dt\\ dv=e^{-t}dt\Rightarrow v=-e^{-t}\end{array}\right\}=$$

$$\Rightarrow \lim_{A\to\infty}\left[-e^{-t}t^{p-1}\Big|_0^A+(p-1)\int_0^A e^{-t}t^{p-2}\,dt\right]=$$

$$=\lim_{A\to\infty}(p-1)\int_0^A e^{-t}t^{p-2}\,dt=\left\{\begin{array}{l}u=t^{p-2}\Rightarrow du=(p-2)t^{p-3}\,dt\\ dv=e^{-t}dt\Rightarrow v=-e^{-t}\end{array}\right\}$$

$$= \lim_{A\to\infty} (p-1)\left\{ -e^{-t}t^{p-2}\Big|_0^A + (p-2)\int_0^A e^{-t}\cancel{t}^{p-3}\,dt \right\} =$$

$$= \dots = (p-1)(p-2)\dots 1 = (p-1)! \quad \text{bulunur.}$$

$$\boxed{\Gamma(p) = (p-1)!} \qquad (5)$$

$x = p+1$ olsun.

$$\Gamma(p+1) = p! = p.(p-1)! = p.\Gamma(p)$$

$$\boxed{\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)} \qquad (6) \quad \text{olur.}$$

Bu durumda,

$$(p+1)\,\underline{\Gamma(p+1)} = \Gamma(p+2) \Rightarrow$$

$$(p+1)\,\underline{p\,\Gamma(p)} = \Gamma(p+2) \Rightarrow$$

$$(p+2)(p+1)\,p\,\Gamma(p) = (p+2)\,\Gamma(p+2) = \Gamma(p+3) \Rightarrow$$

$$\vdots$$

$$(p+n)(p+n-1)(p+n-2)\ldots(p+2)(p+1)\,\Gamma(p+1) =$$

$$= \Gamma(p+n+1)$$

olur.

$$\underline{(p+n)(p+n-1)\ldots(p+2)(p+1)\,p\,\Gamma(p)} = \Gamma(p+n+1) \qquad (7)$$

bulunur.

$x=\frac{1}{2}$ olsun.

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-t}\, t^{\frac{1}{2}-1}\, dt=\int_0^\infty e^{-t}\, t^{-\frac{1}{2}}\, dt=$$

$$=\left\{\begin{array}{l} t^{\frac{1}{2}}=u \Rightarrow t=u^2 \Rightarrow t^{-\frac{1}{2}}=u^{-1} \Rightarrow dt=2u\,du \\ t=0 \text{ için } u=0 \text{ ve } t\to\infty \text{ iken } u\to\infty \end{array}\right\}=$$

$$=2\int_0^\infty e^{-u^2}\, u^{-1}\, u\, du=2\int_0^\infty e^{-u^2}\, du \quad \text{olur.}$$

$\int_0^\infty e^{-u^2}\, du$ integralini göz önüne alalım.

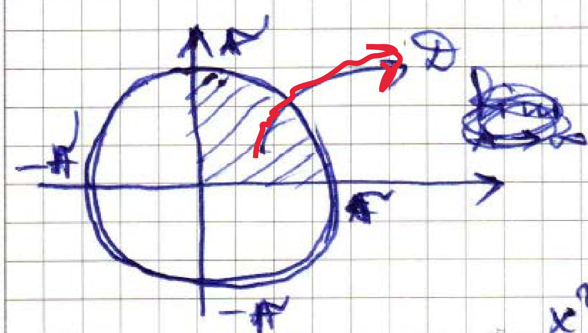
~~Kolaylık ve~~

$\int_0^\infty e^{-u^2}\, du=\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$ yazılmasında bir sakınca yoktur.

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}dx \int_0^\infty e^{-x^2}dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{-x^2}dx \int_0^\infty e^{-y^2}dy = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy =$$

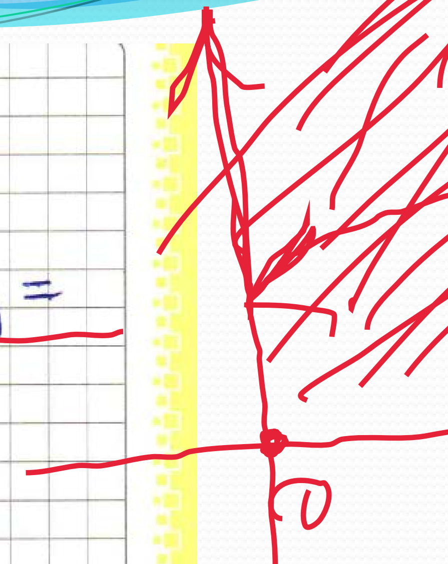


$$\mathcal{D} = \left\{ (x,y);\ 0 \le x < \infty,\ 0 \le y < \infty \right\}$$

$$x^2+y^2=r^2$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le r < \infty \end{matrix} \qquad \boxed{|J| = r}$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^\infty e^{-r^2}\, r\, dr\right] d\varphi = \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^\infty e^{-r^2} r\, dr\right] d\varphi =$$



$$= \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{\infty} e^{-r^2} \, d(-r^2) \left(-\frac{1}{2}\right) \right] d\varphi = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} \right) d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (-1) \, d\varphi = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \boxed{\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}} \text{ bulunur.}$$

İntegralin bu değerini $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ de yerine

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2}\,du = 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi} \text{ elde edilir.}$$

Yani,

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}} \qquad (8).$$

Bu durumda

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \underline{\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

olur.

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad (9).$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\pi}\;; \quad (10)$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right) = \frac{5}{2}\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{\pi}\;; \quad (11)$$

$$\vdots$$

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}+1\right)=\frac{2n-1}{2}\,\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}\ ;\ \text{bulunur.}$$

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}}\quad(12)$$

Örnek: $\left(\frac{3}{2}\right)!$ in değerini bulunuz.

$$\left(\frac{3}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\,\underbrace{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)} =$$

$$= \underbrace{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \underline{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}$$ bulunur.

Örnek:

$$\left(\frac{5}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right) = \frac{5}{2}\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) =$$

$$= \frac{5}{2}\,\frac{3}{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \underline{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}}$$ bulunur.

KAYNAKLAR:

1. **Ders Notlarım**.

2. **G. B. Thomas ve Ark.,** Thomas Calculus I, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.

3. **M. Sezer, Nurcan Baykuş Savaşaneril, Kalkülüs Cilt I,** Dora Yayıncılık, 2015.