MATEMATIK 1

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

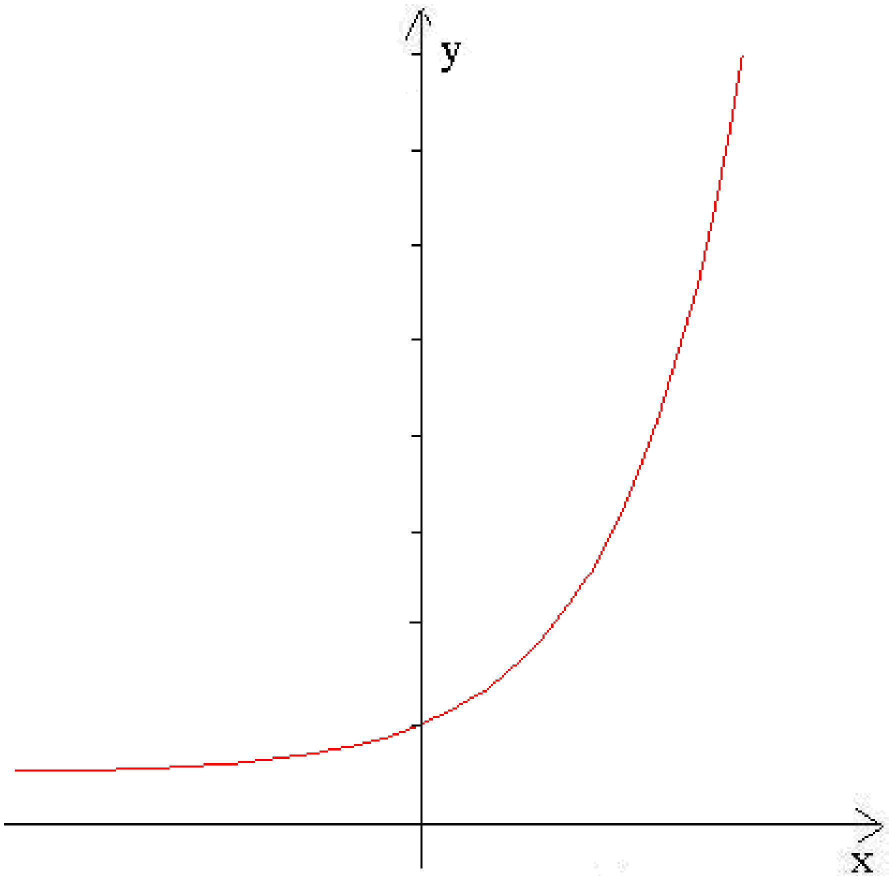
2020

2.5. Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar

2.5.1. Üstel Fonksiyon

Tanım 4.3.2.5.1.1. $a \in \mathbb{R}^{+} - \{1\}$ için $y = a^{x}$ şeklinde tanımlanan fonksiyona üstel fonksiyon denir. Üstel fonksiyonun tanım kümesi bütün reel sayılar kümesi, değer kümesi ise pozitif reel sayılar kümesidir. Bu fonksiyon için:

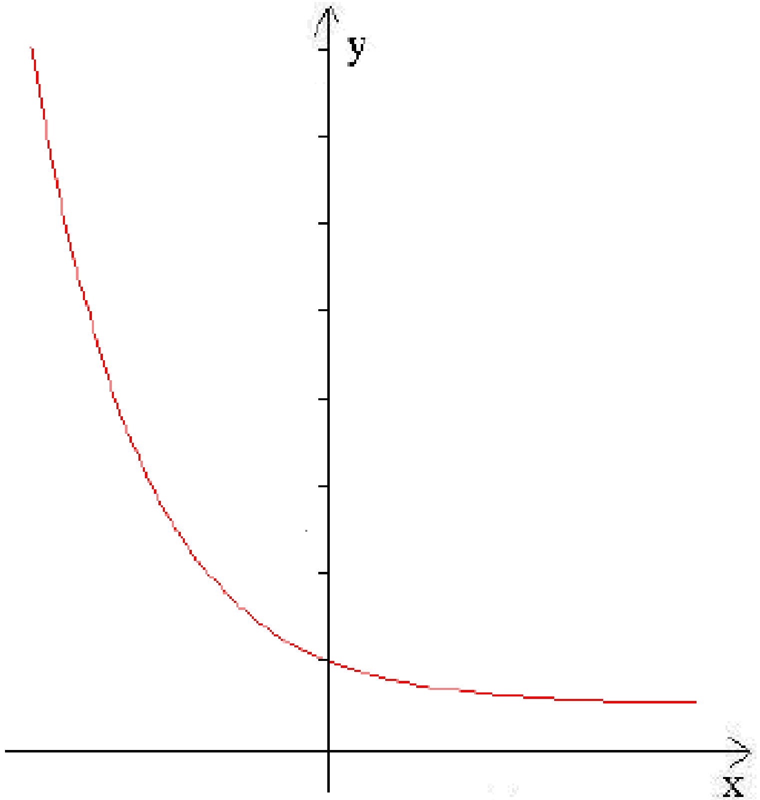
(1) $a > 1$ için $y = a^x$ fonksiyonu artandır ve grafiği



Şekil 4.3.2.5.1.1.

şeklindedir.

(2) $0 < a < 1$ için $y = a^x$ fonksiyonu azalandır ve grafiği



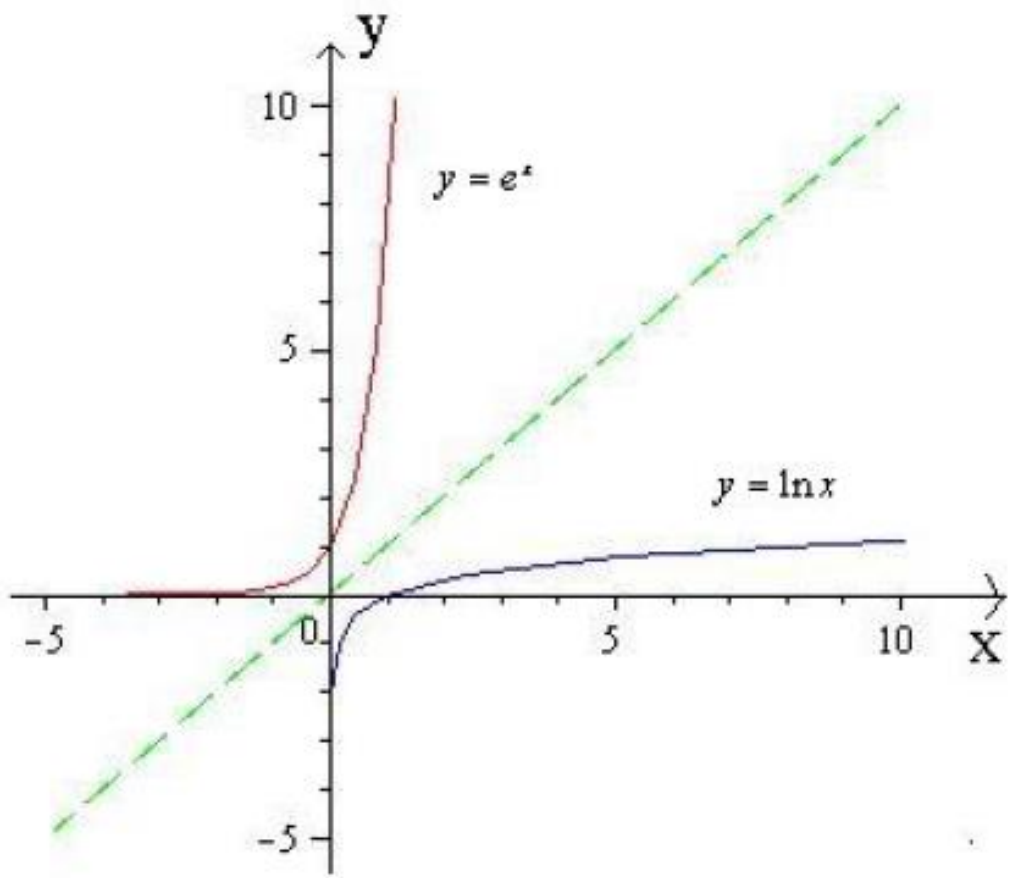
Şekil 4.3.2.5.1.2.

şeklindedir.

2.5.2. Logaritma Fonksiyonu

Tanım 4.3.2.5.2.1. $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ için $y = a^x$ eşitliğini sağlayan x reel sayısına y nin a tabanına göre logaritması denir ve $x = \log_a y$ şeklinde gösterilir.

Uyarı 4.3.2.5.2.1. Logaritma fonksiyonu üstel fonksiyonunun tersidir.



Şekil 4.3.2.5.2.1.

Logaritma fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

Logaritma fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(1) $y = a^{\log_a(y)}$ **(2)** $\log_a(a) = 1$ **(3)** $\log_a(1) = 0$ **(4)** $\log_a A^n = n\log_a A$

(5) $\log_a(A.B) = \log_a A + \log_a B$

Uyarı 4.3.2.5.2.2. $n \in \mathbb{N}$ ve $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ sayıları için

$$\log_a(A_1A_2\ldots A_n) = \log_a A_1 + \log_a A_2 + \ldots + \log_a A_n$$

dir.

(6) $\log_a\left(\dfrac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$ **(7)** $\log_a \sqrt[n]{A} = \dfrac{1}{n}\cdot\log_a A$ **(8)** $\log_a(A) = \dfrac{\log_b A}{\log_b a}$

(9) $(\log_a b).(\log_b a) = 1$

Tanım 4.3.2.5.2.2. $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ $(e = 2{,}71\ldots)$ olmak üzere

$$\log_e A = \ln A\ ,\ \log_{10} A = \log A = \lg A$$

şeklinde gösterilir. $\ln A$ gösterimi doğal logaritma olarak okunur.

Örnek 4.3.2.5.2.1. $\log_{\frac{1}{3}} 81 = ?$

Çözüm. $\log_{\frac{1}{3}} 81 = \dfrac{\log_3 81}{\log_3 1/3} = \dfrac{\log_3 3^4}{\log_3 3^{-1}} = -\dfrac{4}{1} = -4$ dür.

Örnek 4.3.2.5.2.2. $\log_3 5.\log_{25} 27 = ?$

Çözüm. $\log_3 5.\log_{25} 27 = \log_3 5.\dfrac{\log_3 27}{\log_3 25} = \log_3 5.\dfrac{\log_3 3^3}{\log_3 5^2} = \dfrac{3}{2}$ dir.

Örnek 4.3.2.5.2.3. $\log_2(x-1)=\log_2(x^2-x-16)$ ise $x=?$

Çözüm. $\log_2(x-1)=\log_2(x^2-x-16)$ olduğundan $x-1=x^2-x-16$ ve dolayısıyla $x^2-2x-15=0$ dır. Buradan $x=-3$ ve $x=5$ elde edilir. Ancak $x=-3$ için $x-1<0$ olduğundan $x=5$ dir.

4.5.12. $\log 2 = 0.30103$ ise $\log 50 = ?$

4.5.13. $\log_7 2 = a$ ise $\log_{\frac{1}{2}} 28 = ?$

4.5.14. $\log_{30} 3 = a$ ve $\log_{30} 5 = b$ ise $\log_{30} 8 = ?$

4.5.15. $\log(x+3) = -\log 2$ ise $x = ?$

4.5.16. Aşağıdaki ifadeleri logaritma formunda yazınız.

(1) $7^x = 5$ **(2)** $a = c^{3x}$ **(3)** $\sqrt{5} = 4.2^x$

4.5.17. Aşağıdaki ifadeleri üstel fonksiyon formunda yazınız.

(1) $\log_3 y = \sqrt{4}$ **(2)** $y = \log_2\left(\dfrac{x}{3}\right)$ **(3)** $5\log_2 x = 4$

4.5.18. $\log_2 x + \log_2(x-12) = 4$ ise $x = ?$

4.5.19. $\log_3(x^2-4) - \log_3(x+2) = 1$ ise $x = ?$

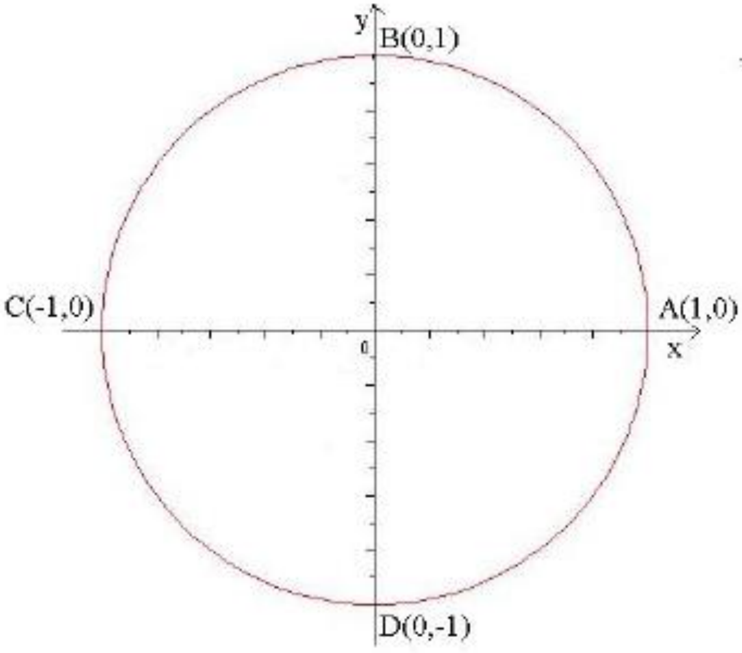
4.5.20. $\log(x^{\log x}) = 9$ ise $x = ?$

4.5.21. $\log(x^2+36) = 2$ ise $x = ?$

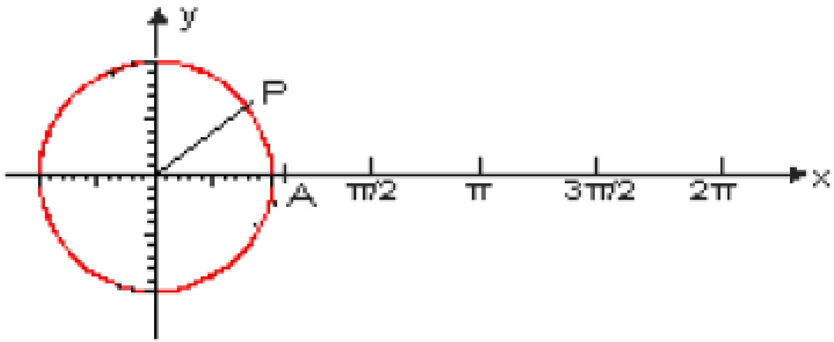
4.5.22. $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{x} = 4$ ise $x = ?$

4.3.3. Trigonometrik Fonksiyonlar ve Tersleri

Tanım 4.3.3.1. Yarıçapı 1 birim olan ve üzerinde bir yön seçilen çembere birim çember ya da trigonometrik çember denir.



Şekil 4.3.3.1.



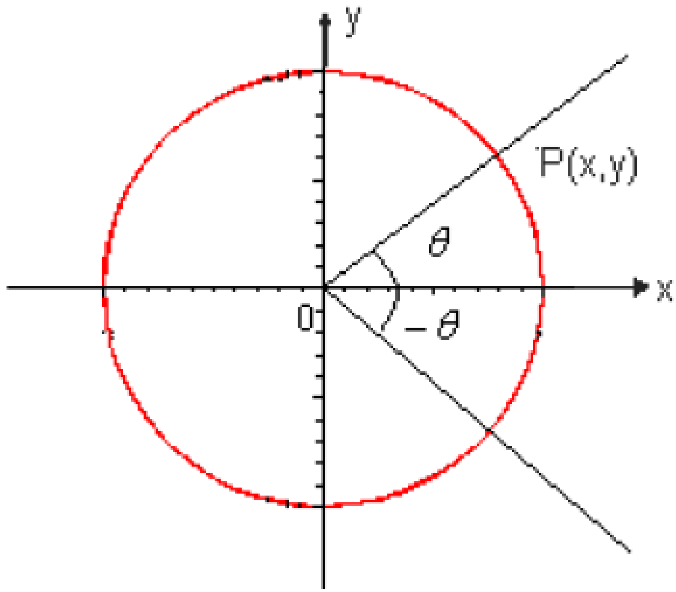
Şekil 4.3.3.2.

$[0,2\pi]$ aralığındaki sayılarla birim çember üzerindeki noktaları Şekil 4.3.3.2. deki gibi birebir eşlediğimiz zaman A noktası ile 0, B noktası ile $\frac{\pi}{2}$, C noktası ile π, D noktası ile $\frac{3\pi}{2}$ ve 2π ile tekrar A noktası ile eşlenmiş olur. Benzer eşleşmeyi $[2\pi,4\pi]$, $[4\pi,6\pi]$ ve $[-4\pi,-2\pi]$ aralıkları için de yapabiliriz. Çember üzerindeki herhangi bir T noktası ile sonsuz tane sayı eşlenir. $0 \le \theta \le 2\pi$ olmak üzere P noktası ile eşlenen sayılar $\theta + k2\pi$ şeklindedir.

Tanım 4.3.3.2. Başlangıç noktası OA olan açının bitim kolunun trigonometrik çemberi kestiği P noktası ile eşlenen θ sayısına $A\hat{O}P$ açısının ölçüsü denir. θ° dereceye de açının esas ölçüsü adı verilir.

4.3.3.1. Kosinüs ve Sinüs Fonksiyonları

Tanım 4.3.3.1.1. Başlangıç kolu OA, ölçüsü θ olan açının bitim kolunun trigonometrik çemberi kestiği P noktasının ordinatına θ açısının sinüsü, apsisine de kosinüsü denir. Sıra ile $\sin\theta$ ve $\cos\theta$ şeklinde gösterilir.



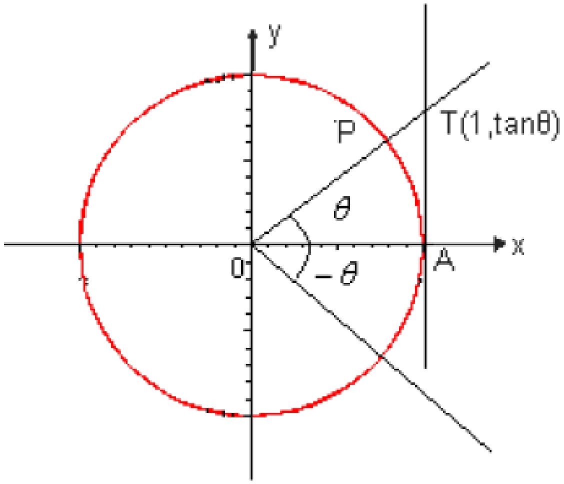
Şekil 4.3.3.1.1.

$\sin:\mathbb{R}\to[-1,1]$ birebir olmayan ve örten bir fonksiyondur. $\sin(\theta+k2\pi)=\sin(\theta)$ olduğundan Sinüs fonksiyonu 2π periyotludur. Ayrıca $\sin(-\theta)=-\sin(\theta)$ olduğundan Sinüs fonksiyonu bir tek fonksiyondur.

$\cos:\mathbb{R}\to[-1,1]$ birebir olmayan ve örten bir fonksiyondur. $\cos(\theta+k2\pi)=\cos(\theta)$ olduğundan Kosinüs fonksiyonu 2π periyotludur. Ayrıca $\cos(-\theta)=\cos(\theta)$ olduğundan Kosinüs fonksiyonu bir çift fonksiyondur.

4.3.3.2. Tanjant Fonksiyonu

Tanım 4.3.3.2.1. Başlangıç kolu OA, ölçüsü θ olan açının bitim kolunun çembere A noktasından çizilen teğeti kestiği noktanın ordinatına θ açısının tanjantı denir. $\tan\theta$ veya $\mathrm{tg}\theta$ şeklinde gösterilir.

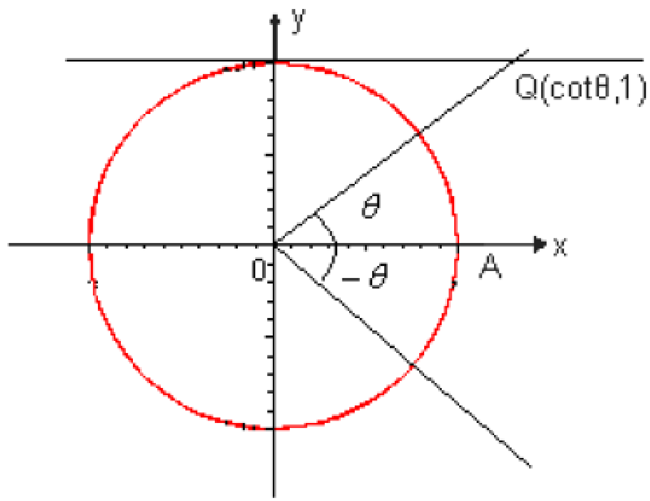


Şekil 4.3.3.2.1.

$\tan:\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}\to\mathbb{R}$ birebir olmayan ve örten bir fonksiyondur. Tanjant fonksiyonu π periyotlu ve tek bir fonksiyondur.

4.3.3.3. Kotanjant Fonksiyonu

Tanım 4.3.3.3.1. Başlangıç kolu OA, ölçüsü θ olan açının bitim kolunun çembere B noktasından çizilen teğeti kestiği noktanın apsisine θ açısının kotanjantı denir. $\cot\theta$ veya $\text{ctg}\,\theta$ şeklinde gösterilir.

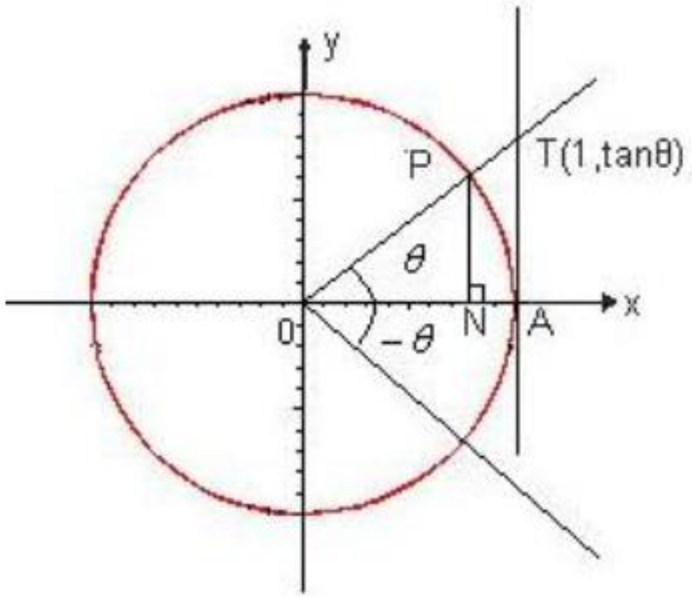


Şekil 4.3.3.3.1.

$\cot : R-\{k\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$ birebir olmayan ve örten bir fonksiyondur.

Kotanjant fonksiyonu π periyotlu ve tek bir fonksiyondur

4.3.3.4. Trigonometrik Fonksiyonlar Arasındaki Bağıntılar



Şekil 4.3.3.4.1.

(1) ONP üçgeninde $|ON|^2+|NP|^2=|OP|^2$ dir. Yani

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

dir.

(2) $ONP \sim OAT$ olduğundan $\dfrac{|AT|}{|NP|}=\dfrac{|OA|}{|ON|}$ dir. Yani

$$\frac{\tan\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

dır. Benzer şekilde $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ elde edilir. Bu durumda

$$\tan\theta.\cot\theta=1$$

dir.

Örnek 4.3.3.4.1. $\sin\theta = \frac{1}{3}$ ise $\tan\theta = ?$

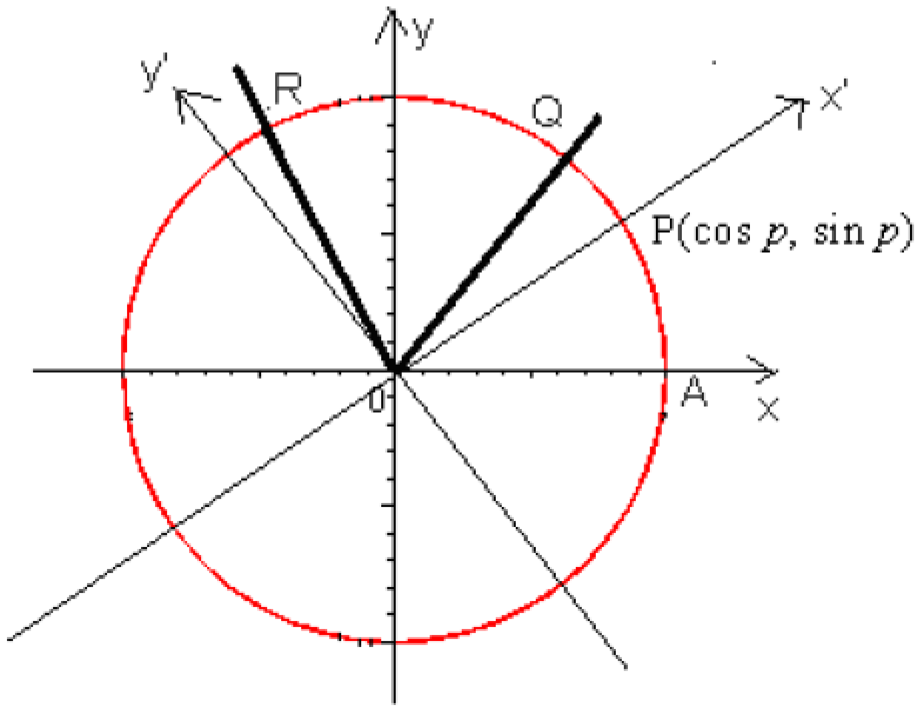
Çözüm. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ olduğundan $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$ dir. Buradan

$\cos^2\theta = \frac{8}{9}$ elde edilir. Bu durumda $\cos\theta = \mp\frac{2\sqrt{2}}{3}$ dir. Dolayısıyla

$$\tan\theta = \mp\frac{\sqrt{2}}{4}$$

dür.

4.3.3.5. Toplam ve Fark Formülleri



Şekil 4.3.3.5.1.

p: $A\overset{\frown}{O}P$ yayının ölçüsü

q: $A\overset{\frown}{O}Q$ yayının ölçüsü

$p+q$: $A\overset{\frown}{O}R$ yayının ölçüsü

Koordinat ekseni pozitif yönde p kadar döndürüldüğünde x, x' ve y de y' şekline dönüşür. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
|AR|^2 &= (\cos(p+q)-1)^2 + (\sin(p+q)-0)^2 \\
&= \cos^2(p+q) - 2\cos(p+q) + 1 + \sin^2(p+q) \\
&= 2 - 2\cos(p+q)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Elde edilen $x'oy'$ sisteminde $A(\cos p, -\sin p)$ ve $R(\cos q, \sin q)$ olur. Dolayısıyla

$$|AR|^2 = (\cos p - \cos q)^2 + (\sin p - \sin q)^2$$

$$= 2 - 2\cos p \cos q - 2\sin p \sin q$$

elde edilir. Bu iki eşitlikten

$$\cos(p+q) = \cos p.\cos q - \sin p.\sin q$$ formülü elde edilir.

Benzer şekilde

$$\cos(p-q) = \cos p.\cos q + \sin p.\sin q$$

$$\sin(p+q) = \sin p.\cos q + \cos p.\sin q$$

$$\sin(p-q) = \sin p.\cos q - \cos p.\sin q$$

$$\tan(p \mp q) = \frac{\tan p \mp \tan q}{1 \pm \tan p.\tan q}$$

$$\cot(p \mp q) = \frac{\cot p.\cot q \pm 1}{\cot p \mp \cot q}$$ formülleri de elde edilir.

4.3.3.6. Yarım Açı Formülleri

(1) $\sin 2x = \sin(x+x) = 2\sin x \cos x$

(2) $\sin x = \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

(3) $\cos 2x = \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1-\sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

(4) $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$

(5) $\tan 2x = \tan(x+x) = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

(6) $\cot 2x = \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2\sin x \cos x}$

Örnek 4.3.3.6.1. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x.\cos x - \sin 2x.\sin x$

$$= (2\cos^2 x - 1).\cos x - 2\sin x.\cos x.\sin x$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x.\cos x$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x$$

$$= 4\cos^3 x - 3\cos x \text{ dir.}$$

Kaynaklar:

1. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus I**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.
2. Prof. Dr. C. Çinar, Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, Prof. Dr. A. S. Kurbanlı, Prof. Dr. D. Şimşek, **Genel Matematik**, Dizgi Ofset, 2013.
3. Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, **Analiz III Diziler ve Seriler,** Dizgi Ofset, 2017.
4. H. İ. Karakaş, **Matematiğin Temelleri, Sayı Sistemleri ve Cebirsel Yapılar,** ODTÜ yayınları, 2011.