İŞ VE KİNETİK ENERJİ

1. Sabit Bir Kuvvetin Yaptığı İş
2. İki Vektörün Skaler Çarpımı
3. Değişken Bir Kuvveti Yaptığı İş
4. Kinetik Enerji ve İş-Kinetik Enerji Teoremi
5. Güç

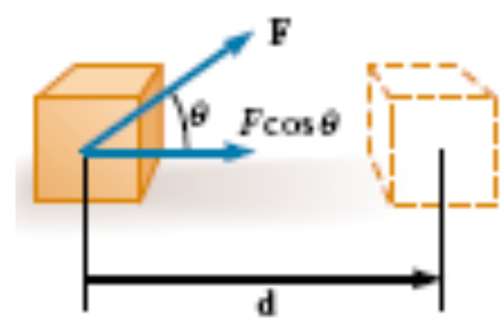
FİZİK – 1 MEKANİK (İş ve Kinetik Enerji)

Bu bölümde, iş tanım yapılacak, önce sabit bir kuvvetin yaptığı iş, daha sonra büyüklüğü konuma göre değişen bir kuvvetin yaptığı iş hesaplanacaktır. İki vektörün skalar çarpımı anlatılacak ve iş ifadesinin skalar çarpım olarak nasıl ifade edileceği gösterilecektir. Son olarak de güç kavramına değinilecektir.

1. Sabit Bir Kuvvetin Yaptığı İş

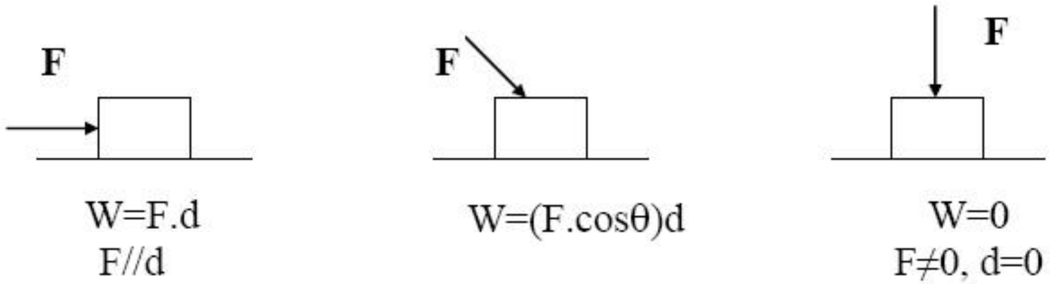
İş : Cisim üzerine sabit bir kuvvet uygulayan bir etkenin cisim üzerinde yaptığı iş (W), kuvvetin (F) yer değiştirme (d) yönündeki bileşeni ile yer değiştirmenin çarpımıdır. F uygulanan kuvvet, d yer değiştirme ve θ F ve d vektörleri arasındaki açı olmak üzere;

$$W = (F Cos\theta)d$$



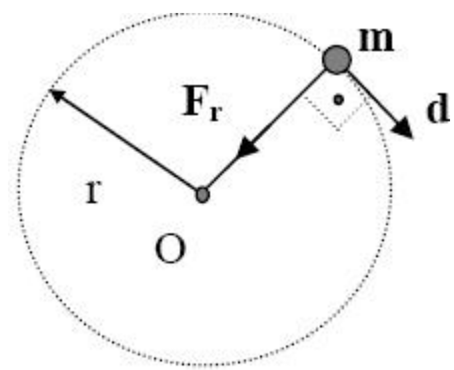
İş, skalar bir niceliktir, boyutu (kuvvet).(uzunluk) yada temel boyutlar cinsinden (ML^2/T^2) dir. İşin SI birim sisteminde birimi ***Newton-metre*** (N.m) veya ***Joule*** (J) olarak ifade edilir. İşin sıfırdan farklı olabilmesi için kuvvet (F) ve yer değiştirme (d) niceliklerinden her ikisinin de değerinin sıfırdan farklı olması gerekmektedir.

FİZİK – 1 MEKANİK (İş ve Kinetik Enerji)



Bu şartın yanında, yer değiştirmenin kuvvet yönünde bileşeninin de olması gerekmektedir. Eğer yer değiştirme ile kuvvet arasında 90^o lik bir açı varsa yapılan iş sıfırdır. Bu duruma en güzel örnek dairesel harekettir. Dairesel harekette dairesel hareket yapan cisme etki eden kuvvet çapsal doğrultuda ve merkeze doğru olmasına rağmen cismin yer değiştirmesi bu kuvvete dik olan yörüngeye teğet doğrultudadır.

$$W = (FCos90^o)d = 0$$

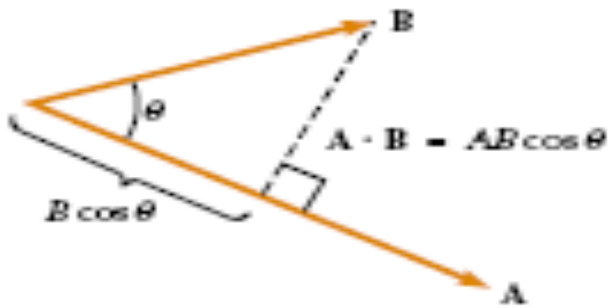


Örnek 1:

Döşemeyi temizleyen bir adam, elektrik süpürgesini yatayla 30° lik bir açıda F=50 N büyüklüğünde bir kuvvetle çekiyor. Süpürge sağa doğru 3 m yer değiştirdiğinde, kuvvetin süpürge üzerinde yaptığı işi hesaplayınız.

2. İki Vektörün Skaler Çarpımı

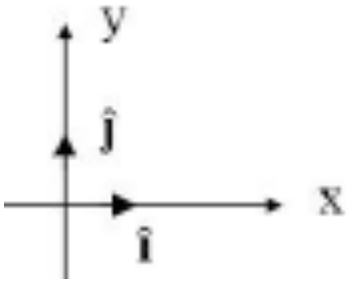
A ve **B** gibi herhangi iki vektörün skalar çarpımı, bu iki vektörün büyüklükleri ile bunların arasındaki açının kosinüsünün çarpımına eşit olan skaler bir niceliktir.



$$\vec{A}.\vec{B} = \left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\right|.Cos\,\theta \qquad Skalar\ Çarpma$$

Skaler çarpımda vektörlerden birinin diğer vektör üzerindeki iz düşümü alınarak aynı doğrultuya getirilir ve bunlara skaler sayı muamelesi yapılabilir.

A ve **B** vektörlerini birim vektörler cinsinden ifade ederek iki vektörün skalar çarpımını bulmaya çalışalım.



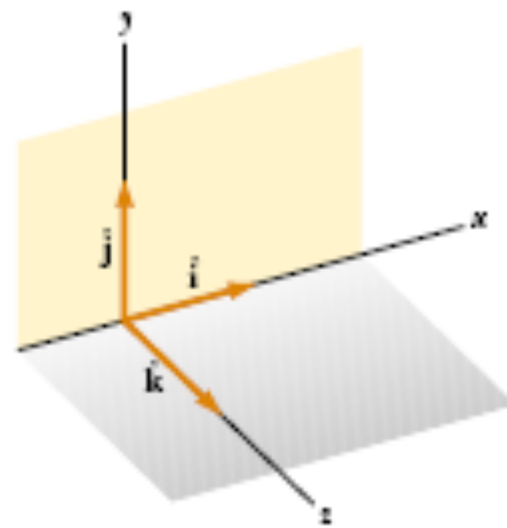
$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \qquad \vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$$

$$\vec{A}.\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j}).(B_x\hat{i} + B_y\hat{j})$$

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x(\hat{i}.\hat{i}) + A_xB_y(\hat{i}.\hat{j}) + A_yB_x(\hat{j}.\hat{i}) + A_yB_y(\hat{j}.\hat{j})$$

$$\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = 1, \quad ve \quad \hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y$$

A ve **B** vektörlerini birim vektörler cinsinden ifade ederek iki vektörün skaler çarpımını, üç eksenli (boyutlu) sistem için bulmaya çalışalım.



$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \qquad \vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

$$\vec{A}.\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}).(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

FİZİK – 1 MEKANİK (İş ve Kinetik Enerji)

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x(\hat{i}.\hat{i}) + A_x B_y(\hat{i}.\hat{j}) + A_x B_z(\hat{i}.\hat{k}) +$$

$$A_y B_x(\hat{j}.\hat{i}) + A_y B_y(\hat{j}.\hat{j}) + A_y B_z(\hat{j}.\hat{k}) +$$

$$A_z B_x(\hat{k}.\hat{i}) + A_z B_y(\hat{k}.\hat{j}) + A_z B_z(\hat{k}.\hat{k})$$

$$\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1, \quad ve \quad \hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{i} = 0, \quad \hat{i}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0, \quad \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{j} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad bulunur.$$

A = **B** özel durumu için ; $\vec{A}.\vec{A} = A_x A_x + A_y A_y + A_z A_z = A^2 \quad elde\ edilir.$

Skalar çarpım notasyonunu kullanarak daha önce tanımladığımız işi, **F** ve **d** niceliklerinin her ikisini de vektörel nicelik olarak alıp ;

$W = \vec{F}.\vec{d} = |\vec{F}|.|\vec{d}|.Cos\theta$ ifadesini yazabiliriz.

Vektörel Çarpım

A ve B gibi herhangi

gi iki vektör verildiğinde, **A × B vektörel çarpımı**, üçüncü bir **C** vektörü olarak tanımlanır. Bu **C** vektörünün büyüklüğü, $AB\sin\theta$ ya eşittir. θ ise **A** ve **B** vektörleri arasındaki açıdır. Yani, **C** vektörü

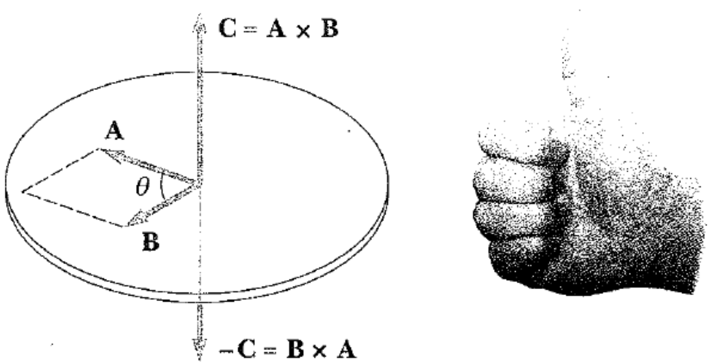
$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \qquad \textbf{(11.8)}$$

eşitliğiyle verilirse, büyüklüğü

$$C \equiv AB\sin\theta \qquad \textbf{(11.9)}$$

olur. Şekil 11.8'de görüldüğü gibi, $AB \sin\theta$ niceliği, **A** ve **B** vektörleri tarafından oluşturulan paralelkenarın alanına eşittir. **C**'nin *doğrultusu*, **A** ve **B** vektörleri tarafından oluşturulan düzleme diktir ve bu doğrultuyu tayin etmenin en iyi yolu Şekil 11.8'de gösterilen sağ-el kuralını kullanmaktır. Buna göre önce sağ elin dört parmağı **A**'yı gösterecek şekilde tutulur. Sonra bu parmaklar **B**'ye doğru θ açısı kadar "bükülür". Bu durumda yana açılan baş parmak **A** × **B** = **C** yönündedir. Gösterimin şeklinden dolayı, **A** × **B**, "**A** vektörel çarpım **B**" şeklin-

Sağ-el kuralı



Şekil 11.8 **A** × **B** vektörel çarpımı, şekilde görülen paralelkenarın alanına eşit bir $AB\sin\theta$ büyüklüğüne sahip olan üçüncü bir **C** vektörü verir. **C**'nin doğrultusu **A** ve **B** vektörleri tarafından oluşturulan düzleme diktir ve yönü sağ-el kuralına göre tayin edilir.

Vektörel çarpımın tanımından çıkan bazı özellikleri aşağıda verilmiş tir:

1. Skaler çarpımın aksine, iki vektörün vektörel çarpımındaki sıra *önemlidir*, yani

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \tag{11.10}$$

dır. Bu yüzden, vektörel çarpımdaki vektörlerin sırasını değiştirirseniz, çarpımın işaretini de değiştirmelisiniz. Bu ilişkiyi, sağ–el kuralını kullanarak kolayca gerçekleyebilirsiniz.

2. **A** vektörü **B**'ye paralelse ($\theta = 0°$ veya $180°$), $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$ olur. Bunun sonucu olarak da $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$ olduğu görülür.
3. **A** vektörü **B** vektörüne dikse, $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB$ olur.
4. Yine vektörel çarpımın, dağılım kuralına uyduğuna dikkat etmek önemlidir, yani:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \tag{11.11}$$

5. Son olarak, vektörel çarpımın t gibi herhangi bir değişkene göre türevi

$$\frac{d}{dt}(A \times B) = A \times \frac{dB}{dt} + \frac{dA}{dt} \times B \tag{11.12}$$

şeklinde ifade edilir. Bu işlem yapılırken **A** ve **B** vektörlerinin vektörel çarpımdaki sırasını korumak gerekmektedir (11. 10 Eşitliğine bakınız).

11.9 ve 11.10 Eşitlikleri ile vektörel çarpımın tanımını kullanarak, birbirine dik **i**, **j** ve **k** birim vektörlerinin vektörel çarpımlarının aşağıdaki eşitlikleri

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0 \qquad \textbf{(11.13a)}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k} \qquad \textbf{(11.13b)}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i} \qquad \textbf{(11.13c)}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j} \qquad \textbf{(11.13d)}$$

Vektörel çarpımda işaretler değiştirilebilir. Örneğin, $\mathbf{A} \times (-\mathbf{B}) = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ve $\mathbf{i} \times (-\mathbf{j}) = -\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ dir.

$\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ gibi herhangi iki vektörün vektörel çarpımı, aşağıda gösterildiği gibi, determinantla da ifade edilebilir:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$$

Bu determinantların açılımı

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\mathbf{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{k} \qquad \textbf{(11.14)}$$

olur.

ÖRNEK 11.3 Vektörel Çarpım

xy–düzleminde bulunan iki vektör $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ ve $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ eşitlikleriyle verilmektedir. $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$'yi bulunuz ve $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm 11.13a dan 11. 13d ye kadar olan eşitlikler kullanılarak

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \times (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$$

$$= 2\mathbf{i} \times 2\mathbf{j} + 3\mathbf{j} \times (-\mathbf{i}) = 4\mathbf{k} + 3\mathbf{k} = 7\mathbf{k}$$

elde edilir. 11.13a eşitliğinden görüldüğü gibi, bu işlemlerde, $\mathbf{i} \times \mathbf{i}$ ve $\mathbf{j} \times \mathbf{j}$ terimleri sıfıra eşit oldukları için alınmadı.

Şimdi $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ olduğunu gösterebiliriz:

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \times (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$

$$= -\mathbf{i} \times 3\mathbf{j} + 2\mathbf{j} \times 2\mathbf{i} = -3\mathbf{k} - 4\mathbf{k} = -7\mathbf{k}$$

dır. Böylece $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ olduğu gösterilmiş olur.

$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$'yi hesaplamak için değişik bir yöntem olarak, (11.14) eşitliğinde; $A_x = 2$, $A_y = 3$, $A_z = 0$, $B_x = -1$, $B_y = 2$ ve $B_z = 0$ bileşen değerlerini kullanabiliriz. Bu, da

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (0)\mathbf{i} + (0)\mathbf{j} + [(2)(2) - (3)(-1)]\mathbf{k} = 7\mathbf{k}$$

sonucunu verir.

Alıştırma A ve B vektörleri arasındaki açıyı bulmak için, bu örnekte elde edilmiş olan sonucu ve 11. 9 Eşitliğini kullanınız.

Cevap 60, 3°

ÖRNEK 7.2 Skaler Çarpım

A ve **B** vektörleri, **A** = 2**i** + 3**j** ve **B** = − **i** + 2**j** olarak veriliyor. (a) **A·B** skaler çarpımını hesaplayınız.

Çözüm

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (2\mathbf{i}+3\mathbf{j})\cdot(-\mathbf{i}+2\mathbf{j})$$

$$= -2\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + 2\mathbf{i}\cdot 2\mathbf{j} - 3\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + 3\mathbf{j}\cdot 2\mathbf{j}$$

$$= -2(1) + 4(0) - 3(0) + 6(1)$$

$$= -2 + 6 = 4$$

Burada $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1$ ve $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{i} = 0$ olduğu gerçeğini kullandık. 7.9 Eşitliğini kullandığımızda aynı sonuç elde edilir. Burada $A_x = 2$, $A_y = 3$, $B_x = -1$ ve $B_y = 2$ dir.

(b) **A** ile **B** arasındaki θ açısını bulunuz.

Çözüm **A** ve **B** nin büyüklükleri şöyledir:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

7.3.Eşitliğini ve (a) şıkkının sonucunu kullanarak

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB} = \frac{4}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{4}{8,06} = 60,2°$$

buluruz.

ÖRNEK 7.3 Sabit Bir Kuvvet Tarafından Yapılan iş

xy-düzleminde hareket eden bir parçacık, $\mathbf{F} = (5\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$ N luk sabit bir kuvvetin etkisi ile $\mathbf{d} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$ lik yerdeğiştirme yapıyor (a) Yerdeğiştirme ve kuvvetin büyüklüklerini hesaplayınız.

Çözüm

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = 3{,}6 \text{ m}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(5)^2 + (2)^2} = 5{,}4 \text{ N}$$

(b) **F** tarafından yapılan işi hesaplayınız.

Çözüm **F** ve **d** ifadelerini 7.4 ve 7.5 Eşitliklerinde yerine yazarak,

$$\begin{aligned} W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{d} &= (5\mathbf{i} + 2\mathbf{j})\cdot(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \text{ N}\cdot\text{m} \\ &= 5\mathbf{i}\cdot 2\mathbf{i} + 5\mathbf{i}\cdot 3\mathbf{j} + 2\mathbf{j}\cdot 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}\cdot 3\mathbf{j} \\ &= 10 + 0 + 0 + 6 = 16 \text{ N}\cdot\text{m} = 16 \text{ J} \end{aligned}$$

elde ederiz.

Alıştırma **F** ile **d** arasındaki açıyı hesaplayınız

Cevap 35°

3. Değişken Bir Kuvvetin Yaptığı İş

1.Bölümde tanımladığımız iş ifadesinde **F** kuvvetinin büyüklüğünü sabit kabul etmiş ve bu kuvvetin yapmış olduğu işi

$$W = (F Cos\theta)d$$ şeklinde tanımlamıştık.

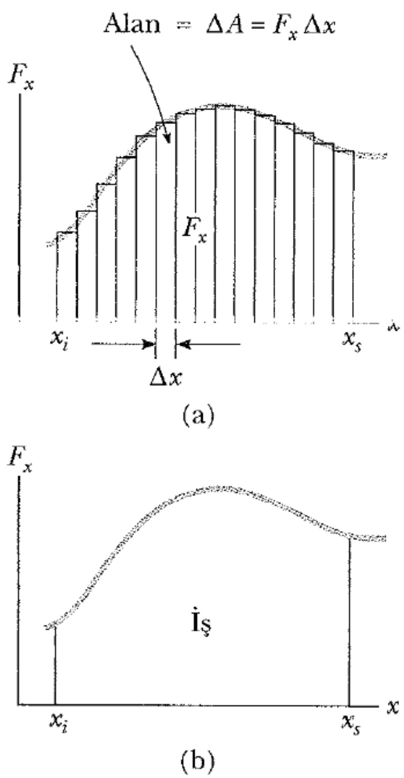
Eğer **F** kuvveti sabit değil ise yani **F**'nin değeri (büyüklüğü) konum ile değişiyor ise: Kuvvet her küçük Δx yer değiştirmesinde sabit ise, her Δx aralığında yapılan iş; F_x , **F** kuvvetinin yer değiştirme (Δx) yönündeki bileşeni ve Δx yer değiştirme olmak üzere, $\Delta W = F_x \Delta x$ olarak yazılabilir.

Yapılan toplam işi bulmak istersek her Δx aralığında yapılan işleri (F_x . Δx) toplamamız gerekecektir. Bu toplamı matematiksel olarak ifade edersek

$$W = \sum_{x_i}^{x_s} F_x \Delta x$$ elde edilir.

Yer değiştirme Δx'i çok küçük alırsak toplam iş ifadesi yukarıdaki kesikli toplam (Σ) ifadesi sürekli toplam (∫) ifadesine dönüşür. Sürekli toplam gösteren bu ifade matematikte integral olarak bilinir.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_s} F_x \Delta x = \int_{x_i}^{x_s} F_x dx$$ ve değişken bir kuvvetin yaptığı iş; $$W = \int_{x_i}^{x_s} F_x dx$$ olarak yazılır.



Şekil 7.7 (a) Küçük Δx yerdeğiştirmesi için F_x kuvvetinin yaptığı iş $F_x \Delta x$ dir. Bu değer boyanmış dikdörtgenin alanına eşittir. x_i den x_s'ye olan bir yerdeğiştirme için yapılan toplam iş, yaklaşık olarak tüm diktörtgenlerin alanlarının toplamına eşittir. (b) Parçacık x_i'den x_s ye giderken F_x değişken kuvvetinin yaptığı iş tam olarak bu eğrinin altındaki alana eşittir.

Yerdeğiştirmeler sıfıra yaklaştırılırsa, toplamdaki terimlerin sayısı sonsuza gider. Fakat toplamın değeri, F_x eğrisi ile x ekseninin sınırladığı gerçek alana eşit sonlu bir değere yaklaşır:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_s} F_x \, \Delta x = \int_{x_i}^{x_s} F_x \, dx$$

Bu belirli integral, sayısal olarak x_i ile x_s arasındaki F_x in x e göre değişim eğrisinin altındaki alana eşittir. Dolayısıyla, cismin x_i den x_s ye yerdeğiştirmesi halinde F_x in yaptığı iş

$$W = \int_{x_i}^{x_s} F_x \, dx \qquad \textbf{(7.7)}$$

olarak ifade edilebilir. $F_x = F\cos\theta$ sabit olduğunda bu eşitlik, 7.1 Eşitliğine indirgenir.

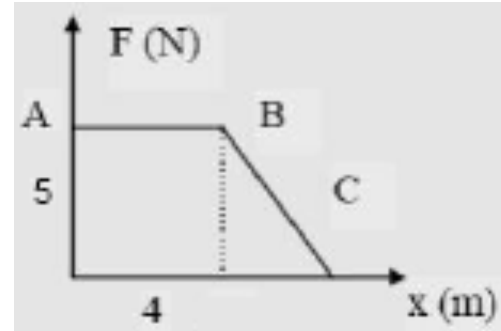
Bir parçacık üzerine birden fazla kuvvet etkirse, yapılan toplam iş, tam olarak bileşke kuvvetin yaptığı iştir. x doğrultusundaki bileşke kuvveti $\sum F_x$ olarak ifade edersek, cismin, x_i den x_s'ye hareket etmesi halinde yapılan net iş

$$\sum W = W_{\text{net}} = \int_{x_i}^{x_s} \left(\sum F_x\right) dx \qquad \textbf{(7.8)}$$

olur.

Örnek 3:

Bir cismin üzerine etkiyen kuvvet şekilde görüldüğü gibi x ile değişmektedir. Cisim x=0'dan x=6 m'ye hareket ettiğinde kuvvetin yaptığı işi hesaplayınız.



FİZİK – 1 MEKANİK (İş ve Kinetik Enerji)

Bir yayın yaptığı iş

Konuma göre değişken kuvvete verilebilecek güzel bir örnek kütle yay sistemidir. Bir yayın uyguladığı kuvvet, yayın denge noktasından ne kadar uzaklaştığı (x) ile ve yayı karakterize eden yay sabiti (k) ile orantılıdır.

$$F = -kx$$

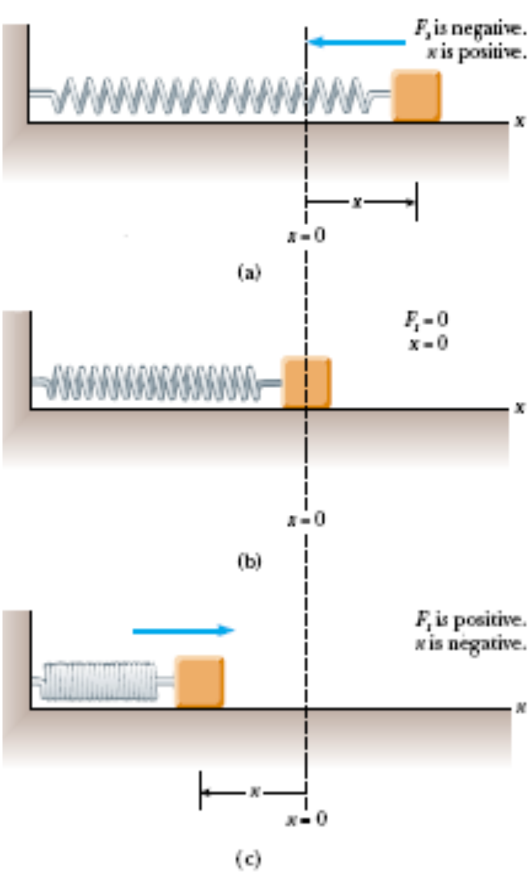
k yay sabitinin boyutu:

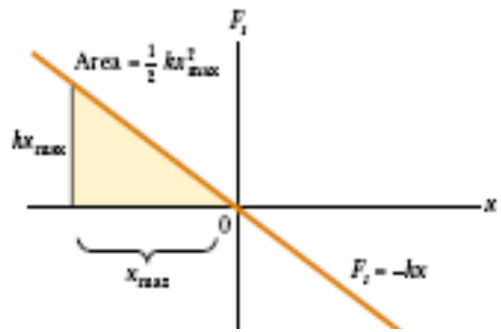
$$[k] = [Kuvvet]/[Uzunluk]$$
$$[k] = [Newton]/[Metre]$$

Yaylar icin hooke kanunu olarak bilinen bu kuvvet yasası sadece küçük yerdeğistirmeler icin geçerlidir. Sert yaylar daha büyük, yumusak yaylar daha küçük k değerine sahiptir.

Eksi işareti, yayın etkidiği kuvvetin daima yerdeğistirme ile zıt yönlü olduğunu ifade eder.

Yayın bloğa uyguladığı kuvvet, bloğun x=0 denge konumundan olan uzaklığıyla değişir. (a) x, pozitif olduğunda (gerilmiş yay), yay kuvveti sola doğrudur, negatif x yönüne yönelmiştir. (b) x sıfır olduğunda, yay kuvveti sıfırdır (yay doğal boyunda). Yay gerilmemiştir. F=0 dir. (c) x, negatif olduğunda (yay sıkıştırılmış durumda), yay kuvveti sağa doğrudur yani pozitif x-doğrultusunda yönelir. (d) F_S in x' e göre grafiği olup blok $-x_{maks}$ dan 0'a giderken yay kuvvetinin yaptığı iş, gölgeli üçgenin alanı kadardır.





bi $x = 0$ olduğunda yay gerilmemiştir ve $F_s = 0$ dır. Yay kuvveti daima denge konumuna doğru etkidiği için, *geri çağırıcı kuvvet* olarak adlandırılır. Kütle, denge konumundan $-x_{maks}$ kadar yerdeğiştirilerek serbest bırakıldığında, $-x_{maks}$ den sıfıra ve oradan $+x_{maks}$ ye hareket edecektir. Yay bu kez de, blok x_{maks} noktasına gelinceye kadar gerdirilir ve sonra bırakılırsa, blok, $+x_{maks}$ dan, sıfırdan geçerek $-x_{maks}$ a hareket eder. Daha sonra yön değiştirerek $+x_{maks}$ a yönelir ve ileri geri titreşimini sürdürür.

Bloğun, denge konumundan sola doğru bir x_{maks} kadar itildiğini ve sonra serbest bırakıldığını varsayınız. Blok $x_i = -x_{maks}$ den $x_s = 0$ a hareket ederken yay kuvvetinin yaptığı işi hesaplayalım. 7.7 Eşitliğini uygulayarak

$$W_s = \int_{x_i}^{x_s} F_s\,dx = \int_{-x_{maks}}^{0} (-kx)\,dx = \tfrac{1}{2}kx^2_{maks} \qquad \textbf{(7.10)}$$

ru) yapılan iş pozitiftir. Bununla birlikte cisim, $x_i = 0$ dan $x_s = x_{maks}$ a giderken yay kuvvetinin yaptığı işi gözönüne aldığımızda, $W_s = -\frac{1}{2} kx_{maks}^2$ buluruz. Çünkü hareketin bu kısmında, yerdeğiştirme sağa doğru, yay kuvveti sola doğrudur. Dolayısıyla cisim $x_i = -x_{maks}$ den $x_s = x_{maks}$ a giderken yay kuvvetinin yaptığı net iş *sıfırdır.*

Şekil 7.10d, x'e göre F_s nin grafiğidir. 7.10 Eşitliğinde hesaplanan iş, gölgeli üçgenin alanı olup $-x_{maks}$ dan 0'a yerdeğiştirmeye karşılık gelir. Üçgenin tabanı x_{maks} ve yüksekliği kx_{maks} olduğu için alanı, 7.10 Eşitliği ile verilen, yayın yaptığı $\frac{1}{2} kx_{maks}^2$ işidir.

Kütle $x = x_i$ den $x = x_s$ ye keyfi bir yerdeğiştirme yaparsa, yay kuvvetinin yaptığı iş

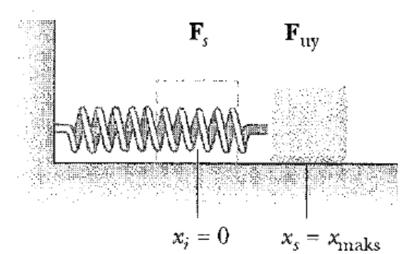
$$W_s = \int_{x_i}^{x_s} (-kx)\, dx = \frac{1}{2}k\, x_i^2 - \frac{1}{2}k\, x_s^2 \qquad \textbf{(7.11)}$$

Yayın yaptığı iş

7.10 ve 7.11 Eşitlilikleri, yayın blok üzerinde yaptığı işi anlatır. Şimdi Şekil 7.11 de görüldüğü gibi yayı yavaş yavaş $x_i = 0$ dan $x_s = x_{maks}$ a geren bir *dış etkinin* yaptığı işi inceleyelim. Bu iş, *uygulanan kuvvetle* $\mathbf{F}_{uy}$, $\mathbf{F}_s$ yay kuvvetinin eşit ve zıt yönlü olduğuna dikkat ederek kolayca hesaplanabilir. Bu durumda herhangi bir x yerdeğiştirmesi için $\mathbf{F}_{uy} = -(-kx) = kx$ olacaktır. Dolayısıyla bu dış kuvvetin yaptığı iş,

$$W_{F_{uy}} = \int_0^{x_{maks}} F_{uy}\, dx = \int_0^{x_{maks}} kx\, dx = \frac{1}{2} kx_{maks}^2$$

olur. Bu iş, aynı yerdeğiştirme için yaptıran yay kuvvetinin yaptığı işin negatifine eşittir.



Şekil 7.11 Sürtünmesiz bir yüzeyde bir $\mathbf{F}_{uy}$ kuvvetiyle $x = 0$ dan $x = x_{maks}$ a çekilen bir blok. İşlem çok yavaş yapılırsa, uygulanan kuvvet her bir an için yay kuvvetine eşit fakat zıt yönlü olur.

ÖRNEK 7.6 Bir Yay, k'nın Ölçülmesi

Bir yayın kuvvet sabitini ölçmek için kullanılan yaygın bir yöntem Şekil 7.12 de tanımlanmaktadır. Yay, düşey olarak asılır ve m kütleli bir cisim yayın alt ucuna tutturulur. Yay, $m\mathbf{g}$ "yükü"nün etkisiyle denge konumundan bir d uzunluğu kadar uzar. Yay kuvveti yukarı doğru olduğu için (yerdeğiştirmeye zıt), sistem durgun olduğunda aşağı doğru bir mg ağırlığıyla dengelenmelidir. Bu durumda Hooke yasasına göre $|\mathbf{F}_s| = kd = mg$,

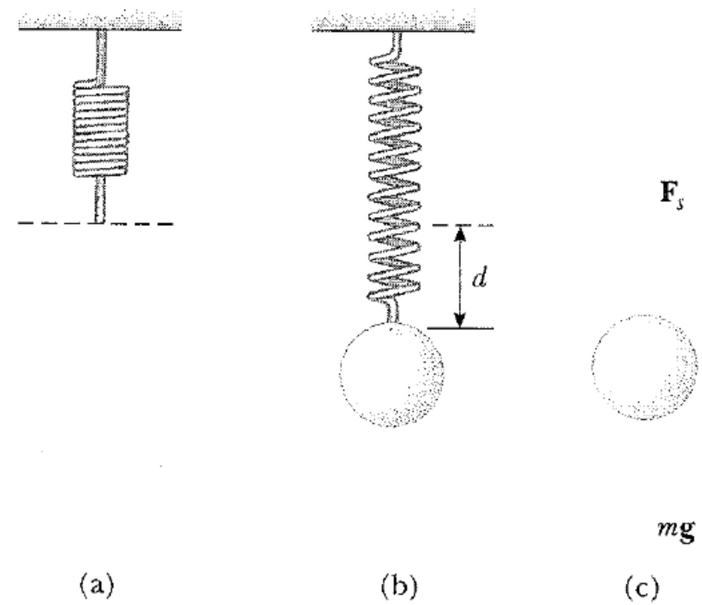
veya

$$k = \frac{mg}{d}$$

olarak bulunur. Örneğin bir yay 0,55 kg lık bir kütleyle 2 cm gerilirse, yayın kuvvet sabiti

$$k = \frac{mg}{d} = \frac{(0{,}55 \text{ kg})(9{,}80 \text{ m/s}^2)}{2 \times 10^{-2} \text{ m}} = 2{,}7 \times 10^2 \text{ N/m}$$

olur.

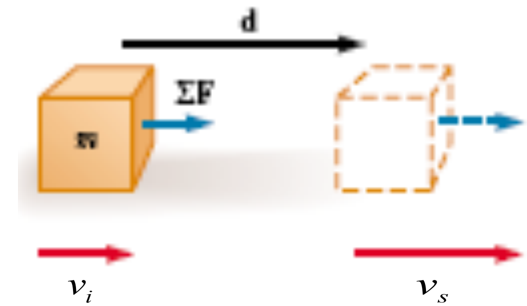


Şekil 7.12 Bir yayın kuvvet sabitinin tayini. Yay, mg ağırlığı nedeniyle d kadar uzar. Yukarı yöndeki yay kuvveti, ağırlığı dengelediğinden $k = mg/d$ olarak bulunur.

4. Kinetik Enerji ve İş - Kinetik Enerji Teoremi

Sabit bir **F** kuvvetinin etkisi altında sağa doğru hareket eden m kütleli cismi göz önüne alalım.

Cismin, kuvvet uygulanmadan önceki hızı v_i ve F kuvvetinin d mesafesi uygulandıktan sonraki hızı da v_s olsun. Kuvvet sabit olduğu için cisim, d mesafesi boyunca sabit bir a=F/m ivmesi ile hareket edecektir ve hızı v_i den v_s'a çıkacaktır.



d mesafesi boyunca F kuvvetinin cismin üzerinde yaptığı toplam iş: W=F.d=(ma).d
Yer değiştirme ve ivme sabit olduğundan ortalama hızı kullanarak

$$d = \frac{1}{2}(v_i + v_s)t \qquad a = \frac{v_s - v_i}{t}$$ yazabiliriz.

$$\sum W = m\left(\frac{v_s - v_i}{t}\right).\left[\frac{1}{2}(v_i + v_s)t\right] = \frac{1}{2}mv_s^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$\frac{1}{2}mv^2$ niceliği parçacığın hareketi ile ilgili enerjiyi temsil eder. Bu niceliğe ***Kinetik Enerji*** denir. Genel olarak bir v hızı ile hareket eden m kütleli bir parçacığın kinetik enerjisi (K yada E_K);

$$K = E_k = \frac{1}{2}mv^2$$ olarak tanımlanır.

FİZİK – 1 MEKANİK (İş ve Kinetik Enerji)

Kinetik enerji skalar bir niceliktir ve iş ile aynı boyut ve birime sahiptir.

Yukarıdaki ifade de cisim F kuvveti uygulanmadan önceki v_i hızından dolayı sahip olduğu kinetik enerjiyi K_i , F kuvvetinden sonra v_s hızından dolayı sahip olduğu kinetik enerjiyi K_s ile gösterirsek, ifade

$$\sum W = \frac{1}{2}mv_s^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = K_s - K_i = \Delta K$$

formunu alır. Bu eşitlik "***İş - Kinetik Enerji***" teoremi olarak bilinir. Bu teorem, dışarıdan uygulanan bir kuvvetin cismin hızını v_i den v_s değerine çıkarmakla cismin kinetik enerjisinde ΔK lık bir artışa neden olur.

İş-kinetik enerji teoremini sabit bir net kuvvet varsayımı ile türettik, fakat sonuç kuvvet değişken olduğunda da geçerlidir. Bunu görmek için bir parçacık üzerine x yönünde etkiyen net kuvvetin $\sum F_x$ olduğunu varsayınız. $\sum F_x = ma_x$ şeklindeki Newton'un ikinci yasasını ve 7.8 Eşitliğini kullanarak yapılan net işi

$$\sum W = \int_{x_i}^{x_s} \left(\sum F_x\right) dx = \int_{x_i}^{x_s} m a_x dx$$

olarak ifade edebiliriz. Bileşke kuvvet x ile değişirse ivme ve hız da x'e bağlı olur. İvmenin normalde t nin bir fonksiyonu olduğunu düşündüğümüzden şimdi biraz farklı yolla a yı ifade etmek için aşağıdaki zincir kuralını uyguluyoruz:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

a nın bu ifadesini $\sum W$ de yerine koyarsak

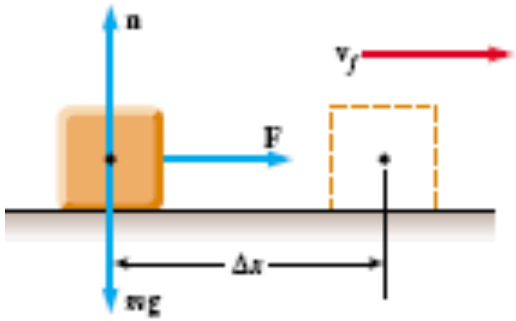
$$\sum W = \int_{x_i}^{x_s} mv \frac{dv}{dx} dx = \int_{v_i}^{v_s} mv dv$$

$$\sum W = \frac{1}{2} m v_s^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 \qquad \textbf{(7.16)}$$

eşitliğini buluruz. Değişken x den v ye değiştiği için, integralin sınırları x değerlerinden v değerlerine değiştirildi. Buna göre, bir parçacığa etkileyen net kuvvetin, parçacık üzerinde yaptığı net işin, parçacığın kinetik enerjisindeki değişime eşit olduğu sonucunu çıkarıyoruz. Net kuvvet sabit olsa da olmasa da bu söz doğrudur.

Örnek 4:

Başlangıçta durgun olan 6 kg kütleye sahip bir blok, 12 N'luk sabit, yatay bir kuvvetle yatay sürtünmesiz bir yüzey boyunca çekilmektedir. Blok 3 m'lik bir uzaklığa hareket ettikten sonra hızını, ivmesini ve zamansız hız formülünden son hızı bulunuz.



tedir. Yerdeğiştirme yatay doğrultuda olduğundan, bu iki kuvvetten hiçbirisi iş yapmaz. Sürtünme kuvveti olmadığı için bloğa etkiyen net dış kuvvet 12 N luk kuvvettir. Bu kuvvet tarafından yapılan iş

$$W = Fd = (12\ \text{N})\ (3\ \text{m}) = 36\ \text{N} \cdot \text{m} = 36\ \text{J}$$

dir. İlk kinetik enerjinin sıfır olduğunu dikkate alıp, iş enerji teoremi kullanıldığında,

$$W = K_s - K_i = \tfrac{1}{2}\, m v_s^{\,2} - 0$$

$$v_s^2 = \frac{2W}{m} = \frac{2(36\ \text{J})}{6\ \text{kg}} = 12\ \text{m}^2/\text{s}^2$$

$$v_s = \quad 3{,}5\ \text{m/s}$$

bulunur.

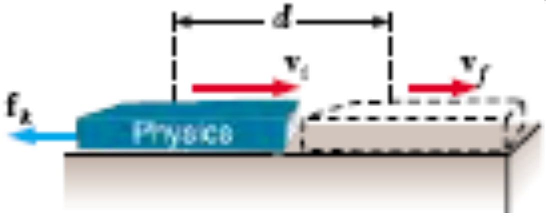
Alıştırma Bloğun ivmesini ve $v_{xs}^{\;2} = v_{xi}^{\;2} + 2a_x d$ kinematik eşitliğini kullanarak bloğun son hızını bulunuz.

Cevap $a_x = 2\ \text{m/s}^2$; $v_s = 3{,}5\ \text{m/s}$.

FİZİK – 1 MEKANİK (İş ve Kinetik Enerji)

Kinetik Sürtünmeyi İçeren Durumlar

Eğer bir yüzey üzerinde hareket eden bir cisme sürtünme kuvveti etki ediyorsa, bu kuvvet cismin kinetik enerjisini azaltacak yönde olur.



Sürtünme kuvvetinin yaptığı iş, f_k kinetik sürtünme kuvveti ve d yer değiştirme olmak üzere;

$$W_{Sürtünme} = -f_k.d \quad \text{olur.}$$

Negatif olması nedeniyle kaybolan bu enerjinin bir kısmı kitabın, geri kalanı da yüzeyin ısınmasına harcanmıştır. Sürtünme kuvveti her zaman hızın doğrultusunun tersi yönde olduğu için cisim üzerine yapılan toplam iş ifadesi

$$K_i - f_k.d = K_s \qquad \text{olur.}$$

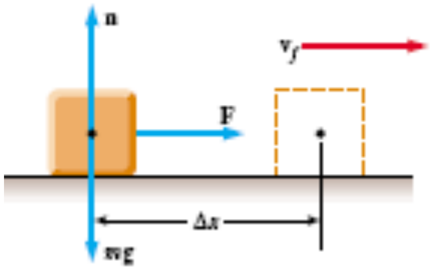
İş-kinetik enerji formülünde sürtünmeyi de yazarsak en genel haliyle

$$K_i + \sum W_{diğ} - f_k.d = K_s$$

elde edilir, buradaki $\Sigma w_{diğer}$ kinetik sürtünmenin dışındaki kuvvetlerin yaptıkları işlerin toplamını temsil eder.

Örnek 5:

Örnek 4: deki kayma yüzeyinin 0,15'lik bir kinetik sürtünme katsayısına sahip olduğu kabulü ile aynı hız, ivme ve zamansız hız formülünden son hızı bulunuz.



Çözüm Uygulanan kuvvet Örnek 7.7'de olduğu gibi iş yapar:

$$W = Fd = (12N)\ (3m) = 36\ J$$

Bu durumda, sürtünmeden dolayı ΔK kinetik enerji kaybını hesaplamak için7.17a Eşitliğini kullanmalıyız. Sürtünme kuvvetinin büyüklüğü

$$f_k = \mu_k n = \mu_k mg = (0{,}15)\ (6kg)\ (9{,}80\ m/s^2) = 8{,}82\ N$$

olur. Sürtünmeden dolayı kinetik enerjideki değişim

$$\Delta K_{sürtünme} = -f_k d = -\ (8.82\ N)\ (3\ m) = -\ 26{,}5\ J$$

olur. Bloğun son hızı 7.17b Eşitliğinden elde edilir:

$$\tfrac{1}{2}\ mv_i^2 + \Sigma W_{diğer} - f_k d = \tfrac{1}{2}\ mv_s^{\ 2}$$

$$0 + 36\ J - 26{,}5\ J = \tfrac{1}{2}\ (6\ kg)\, v_s^{\ 2}$$

$$v_s^{\ 2} = 2(9{,}5\ J)\ /\ (6\ kg) = 3{,}18\ m^2/s^2$$

$$v_s = \quad 1{,}8\ m/s$$

Blok, pürüzlü yüzey üzerinde 3 m kaydıktan sonra, 1,8 m/s lik bir süratle hareket ediyor. Bu sonuç, sürtünmesiz bir yüzeyde aynı uzaklık alındıktan sonraki (Örnek 7.7 ye bakınız) 3,5 m/s lik süratten farklıdır.

Alıştırma Newton'un ikinci kanunundan bloğun ivmesini ve kinematiği kullanarak bloğun son hızını bulunuz.

Çözüm $a_x = 0{,}53\ m/s^2;\ v_s = 1{,}8\ m/s.$

ÖRNEK 7.11 Kütle-Yay Sistemi

1,6 kg kütleli bir blok, Şekil 7.10-daki gibi kuvvet sabiti 10^3 N/m olan yatay bir yaya bağlanmıştır. Yay 2 cm kadar sıkıştırılmış ve blok ilk hızsız serbest bırakılmıştır. (a) Yüzey sürtünmesiz olduğuna göre, blokun $x = 0$ denge konumundan geçerken hızını hesaplayınız.

Çözüm Bu durumda, $x_i = -2\text{cm}$ de $v_i = 0$ 'la harekete başlar ve $x_s = 0$ daki v_s 'yi bulmak istiyoruz. $x_{\text{maks}} = x_i = -2\text{cm} = -2 \times 10^{-2}$ m için yay tarafından yapılan işi bulurken 7.10 eşitliğini kullanıyoruz:

$$W_s = \tfrac{1}{2} k x_{\max}^2 = \tfrac{1}{2} (1 \times 10^3 \text{N/m}) \ (-2 \times 10^{-2} \text{ m})^2 = 0{,}20 \text{ J}$$

$v_i = 0$ için iş-kinetik enerji teoremini kullanarak, yayın yaptığı işten dolayı blokun kinetik enerji değişimini elde ederiz:

$$W_s = \tfrac{1}{2} m v_s^2 - \tfrac{1}{2} m v_i^2$$

$$0{,}20 \text{ J} = \tfrac{1}{2} (1{,}6 \text{ kg}) \ v_s^2 - 0$$

$$v_s^2 = \frac{0{,}4 \text{ J}}{1{,}6 \text{ kg}} = 0{,}25 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v_s = 0{,}50 \text{ m/s}$$

(b) 4,0 N luk sabit bir sürtünme kuvveti, blok serbest bırakıldığı andan itibaren harekete karşı koyarsa denge konumundan geçerken bloğun sürati ne olur?

Çözüm Sürtünme kuvveti harekete karşı koyacağı için, şüphesiz cevap daha küçük olmalıdır. Sürtünmeden dolayı kinetik enerji kaybını hesaplamak için, 7.17 Eşitliğini kullanıyor ve sürtünme yok iken bulunan kinetik enerjiye bu negatif değeri ekliyoruz. Sürtünmeden dolayı kinetik enerji kaybı;

$$\Delta K = -f_k d = -(4\text{N}) \ (2 \times 10^{-2}\text{m}) = -0{,}08 \text{ J}$$

(a) şıkkında bu kaybın olmadığı son kinetik enerji 0,20J olarak bulunmuştu. Dolayısıyla, sürtünme varken son kinetik enerji

$$K_s = 0{,}2 \text{ J} - 0{,}08 \text{ J} = 0{,}12 \text{ J} = \tfrac{1}{2} m v_s^2$$

$$\tfrac{1}{2} (1{,}6\text{kg}) v_s^2 = 0{,}12\text{J}$$

$$v_s^2 = \frac{0{,}24 \text{ J}}{1{,}6 \text{ kg}} = 0{,}15 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v_s = 0{,}39 \text{m/s}$$

olur. Beklendiği gibi, bu değer (a) şıkkında bulduğumuz 0,5 m/s den bir miktar küçüktür. Sürtünme kuvveti daha büyük olsaydı, bulacağımız değer daha da küçük olacaktı.

5. Güç

İş yapma hızına güç denir. Bir cisme bir dış kuvvet uygulanırsa bu kuvvetin Δt süresinde yaptığı iş W ise bu sürede harcanan ortalama güç:

$$P = W / \Delta t$$ olarak tanımlanır.

Ani gücü tanımlarsak (Δt →0) $$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

Güç ile kuvvet ilişkisine bakacak olursak ΔW=F.dx

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F.dx}{dt} = F\frac{dx}{dt} = F.v$$ elde edilir.

SI birim sisteminde güç birimi Joule/saniye (J/sn))dir. Bu birim aynı zamanda Watt (W) olarak da adlandırılır.

$$1\ W = 1\ J/s = 1\ kg \cdot m^2/s^3$$

İngilizler güç birimi olarak Beygir Gücü´nu kullanır. (BG)

$$1\ BG = 746\ W$$ ‘a eşdeğerdir.

Güç birimi ile enerjiyi ifade edersek ***Güç = Enerji / Zaman***

Şimdi, güç birimi vasıtasıyle enerji (veya iş) için yeni bir birim tanımlanabilir. Bir **kilowatt–saat** (kWh), 1 saatte, sabit bir hızla 1 kW = 1000 J/s'lik tüketilen veya dönüştürülen enerji miktarıdır. 1 kWh'in sayısal değeri,

$$1 \text{ kWh} = (10^3 \text{ W})\ (3600 \text{ s}) = 3{,}6 \times 10^6 \text{ J}$$

dür.

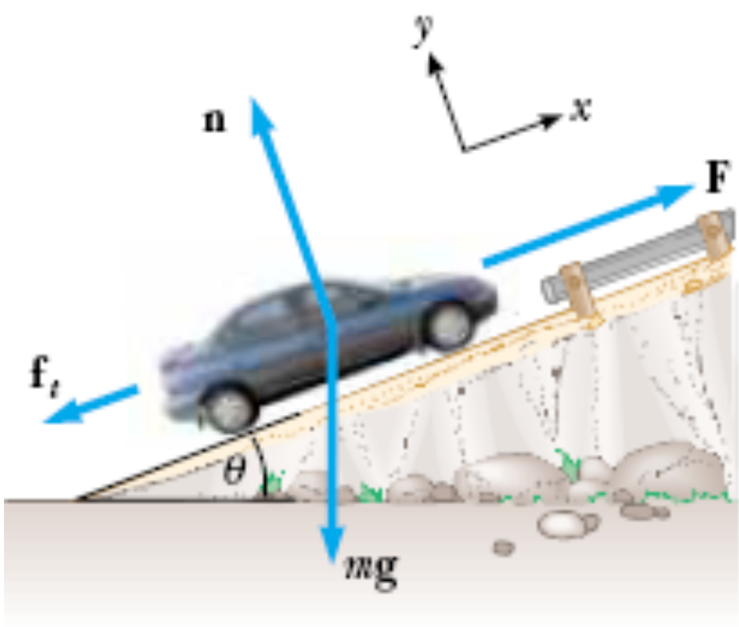
Kilowat-saatin güç birimi olmayıp, bir enerji birimi olduğunu anlamak önemlidir. Elektrik faturanızı ödediğinizde, elektrik şirketine fatura döneminde kullandığınız toplam elektrik enerjisinin karşılığını ödüyorsunuz. Bu enerji, güç ile elektriğin kullanıldığı sürenin çarpımıdır. Örneğin, 300W lık bir ampul 12 saat yandığında (0,300kW)(12 saat) = 3,6kWsaat(kWh) lık elektrik enerjisini dönüştürecektir.

Örnek 8: Bir Asansör Motorunun Verdiği Güç

Bir asansör kabini 1000 kg lık bir kütleye sahiptir ve toplam 800 kg kütleli yolcu taşımaktadır. 4000 N'luk sabit bir sürtünme kuvveti harekete karşı koymaktadır.

a) Asansör kabinini 3 m/sn lik sabit bir süratle kaldırmak için motorun verdiği minimum güç ne olmalıdır,

b) Motor yukarı doğru 1 m/sn^2 lik ivme sağlayacak şekilde tasarlanmışsa, herhangi bir anda ne kadarlık bir güç vermelidir?



Örnek 9:

Bir tepeye tırmanan m kütleli bir arabayı göz önüne alalım. Toplam sürtünme kuvvetinin büyüklüğü ;

$$f_t = (218 + 0{,}70v^2)N$$

Yol sürtünmesi Hava sürtünmesi

olsun. Motorun tekerleklere vermesi gereken gücü hesaplayınız. m = 1450 kg, v = 27 m/sn (=60 mil/saat), a = 1 m/sn^2 θ = 10^o alarak çözelim.