MATEMATİK - 2

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2021

KUVVET SERİLERDE İŞLEMLER:

4.5. Kuvvet Serilerinde İşlemler

4.5.1. Kuvvet Serilerinde Toplama İşlemi

İki kuvvet serisini terim terime toplamak suretiyle yeni bir kuvvet serisi elde edilir. Elde edilen serinin yakınsaklık aralığı, toplanan serilerin yakınsaklık aralıklarının ara kesitine eşittir. Örneğin

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

serilerini ele alalım. Bu serileri toplamak suretiyle

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + \cdots + (a_n + b_n) x^n + \cdots$$

serisi elde edilir. Elde edilen serinin yakınsaklık aralığı toplanan serilerin yakınsaklık aralıklarının ara kesitidir.

Örnek 4.5.1.1. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ ve $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ serilerini ele alalım. $f(x)$ in yakınsaklık aralığı $(-1,1]$, $g(x)$ in yakınsaklık aralığı ise $[-1,1)$ dir.

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots$$

ve

$$g(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots$$

olup

$$f(x) + g(x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \right)$$

dir. Şimdi $f(x) + g(x)$ in yakınsaklık aralığını belirleyelim:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}}{\dfrac{\cancel{x^{2n-1}}}{2n-1}}\right| = \left|x^2\right| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n-1}{2n+1}\right| = \left|x^2\right| = x^2$$

olduğundan verilen seri $x^2 < 1$ yani $-1 < x < 1$ için yakınsaktır.

Ayrıca verilen seri $x=-1$ için $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2n-1}\right)$ şeklinde olup ıraksaktır. $x=1$ için de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ şeklinde olup yine ıraksaktır. Bu durumda serinin yakınsaklık aralığı $(-1,1)$ dir. Yani $f(x)+g(x)$ in yakınsaklık aralığı $f(x)$ ve $g(x)$ serilerinin ortak yakınsaklık aralığına eşittir.

Örnek 4.5.1.2. $\cosh x$ ve $\sinh x$ fonksiyonlarının seri açılımını elde edelim:

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}+\cdots$$

ch(x) =

ve

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^{2}}{2!}-\frac{x^{3}}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n!}+\cdots$$

olduğundan

$$\cosh x=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})=1+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

ve

$$\sinh x=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})=x+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

şeklindedir.

Bu serilerin yakınsaklık aralıklarının incelenmesi okuyucuya bırakıldı.

4.5.2. Kuvvet Serilerinde Çarpma İşlemi

İki kuvvet serisini çarpmak suretiyle yeni bir kuvvet serisi elde edilir. Elde edilen serinin yakınsaklık aralığı çarpılan serilerin yakınsaklık aralıklarının ara kesitine eşittir. Örneğin

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

serilerini ele alalım. Bu serileri çarpmak suretiyle

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \cdots$$

$(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x$

serisi elde edilir. Elde edilen serinin yakınsaklık aralığı, çarpılan serilerin yakınsaklık aralıklarının ara kesitidir. Çarpım serisinin genel terimi

$$(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0)x^n$$

şeklindedir.

Örnek 4.5.2.1. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ ve $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}$ serilerini ele alalım.

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+\cdots$$

ve

$$g(x)=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\cdots$$

olup

$$f(x).g(x)=\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{2n-2}+\cdots$$

şeklindedir.

Örnek 4.5.2.2. $f(x)=e^x$ ve $g(x)=\sin x$ ise $f(x).g(x)$ çarpımının seri açılımını elde ediniz.

Çözüm.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

ve

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} \mp \cdots$$

olduğundan

$$e^x \sin x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$= x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{90}x^6 - \cdots$$

elde edilir.

$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 =$

$b_0 = 1,\ b_1 = -\frac{1}{3!},$

$-\frac{1}{6} + 1$

$a_0 b_1 + a_1$

$a_0 b_2 + a$

4.5.3. Kuvvet Serilerinde Bölme İşlemi

İki kuvvet serisinden birini diğerine bölmek suretiyle yeni bir kuvvet serisi elde edilir. Genellikle elde edilen serinin yakınsaklık aralığı verilen serilerin ortak yakınsaklık aralığından daha küçüktür.

Örneğin

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

serilerini ele alalım. Bu serileri bölmek suretiyle

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \Big/ \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0^2} x + \cdots$$

serisi elde edilir.

Örnek 4.5.3.1. $f(x) = \tan x$ fonksiyonunun seri açılımını serilerde bölme işleminden faydalanarak elde edelim:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} \mp \cdots$$

ve

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \mp \cdots$$

olduğundan

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} \mp \cdots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \mp \cdots}$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots$$

elde edilir.

Örnek 4.5.3.2. $f(x)=\tanh x$ fonksiyonunun seri açılımını serilerde bölme işleminden faydalanarak elde edelim:

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

ve

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

olduğundan

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots}{1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots}$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \cdots$$

elde edilir.

4.5.4. Seriler Yardımıyla Türev Hesabı

$f(x)$ fonksiyonunu temsil eden serinin türevlenmesi suretiyle $f'(x)$ fonksiyonunu temsil eden seri elde edilir. Elde edilen serinin yakınsaklık aralığı $f(x)$ fonksiyonunu temsil serinin yakınsaklık aralığına eşittir. Örneğin

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

serisi $(-R,+R)$ aralığında $f(x)$ fonksiyonunu temsil ediyorsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

serisi de $f'(x)$ türev fonksiyonunu $(-R,+R)$ aralığında temsil eder.

Uyarı 4.5.4.1. *Bazen $f(x)$ fonksiyonunu temsil eden seri yakınsaklık aralığının sınır noktalarında yakınsak olduğu halde $f'(x)$ türev fonksiyonunu temsil eden seri bu sınır noktalarında ıraksak olabilir. Bu nedenle $f'(x)$ türev fonksiyonunu temsil eden seri için $f(x)$ fonksiyonunu temsil eden serinin yakınsaklık aralığının sınır noktalarında karakter ayrıca incelenmelidir.*

Örnek 4.5.4.1. $f(x) = \sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + \dfrac{(-1)^{n} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \mp \cdots$ ise

$$f'(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \mp \cdots = \cos x \text{ dir.}$$

Örnek 4.5.4.2. $g(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$ ise

$$g'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = e^x \text{ dir.}$$

Örnek 4.5.4.3. $h(x) = \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ ise

$$h'(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots = \sinh x \text{ dir.}$$

$$+ \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

4.5.5. Seriler Yardımıyla İntegral Hesabı

$f(x)$ fonksiyonunu temsil eden serinin integralinin alınması suretiyle $f(x)$ fonksiyonunun integrali olan fonksiyonu temsil eden seri elde edilir.

Örnek 4.5.5.1. $\int \frac{dx}{1+x^2}$ integralini seriler yardımı ile hesaplayınız.

Çözüm. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \cdots$ olduğundan

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + \cdots$$

şeklindedir. Bu durumda

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + \cdots) dx$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \right) + c$$

$$= \arctan x + c$$

dir.

Örnek 4.5.5.2. $\int \sin(x^2) dx$ integralini seriler yardımı ile hesaplayınız.

Çözüm. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} \mp \cdots$ olduğundan

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots$$

şeklindedir. Bu durumda

$$\int \sin x^2 dx = \int (x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots) dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7.3!} + \frac{x^{11}}{11.5!} - \frac{x^{15}}{15.7!} + \cdots \right) + c$$

dir.

Teorem: Yakınsak herhangi bir alternatif (ardışık işaret değiştiren) seride S toplamı yerine S_n kısmı toplamı almakla yapılan hata, $(n+1)$. terimden, yani atılan terimlerin ilkinden küçüktür.

4.5.6. Seriler Yardımıyla π Sayısının Yaklaşık Değerinin Hesabı

$|x| < 1$ için

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

olduğundan

$$\mathrm{arctg}(x) = \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$$

elde edilir. Ayrıca

$$\tan^{-1} x \pm \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x \pm y}{1 \mp xy}\right)$$

olduğundan

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \tan^{-1}(1)$$

yazılabilir. Buradan $\tan^{-1}(1)=\dfrac{\pi}{4}$,

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{7}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$$

ve

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}-\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3}+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5}-\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^7}{7}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$$

olduğundan

$$\frac{\pi}{4}\approx\left(\frac{1}{2}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3}+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5}\right)=0{,}78638$$

olup $\pi\approx 3{,}14552$ elde edilir.

Bu örneklerden her ikisinde de ilk üç terim alındığına göre, ilkinde yapılan hata, $\frac{1}{7.2^7}=\frac{1}{7.128}=\frac{1}{896}\approx 0,0011$ den küçüktür, diğerinde yapılan hatada $\frac{1}{7.3^7}=\frac{1}{7.2187}=\frac{1}{15309}\approx 0,000065$ den küçüktür.

Bu işlemde toplam yapılan hata **0,001165** den küçüktür.

4.5.7. Seriler Yardımıyla Limit Hesabı

Belirsiz şekillerin hesabı, birçok durumda seriler yardımı ile yapılabilir.

Örnek 4.5.7.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots}{x}=1-\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^4}{5!}-\cdots$

olup

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots\right)=1$$

elde edilir.

Örnek 4.5.7.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $\dfrac{\tan x}{x}=\dfrac{x+\frac{1}{3}x^{3}+\frac{2}{15}x^{5}+\cdots}{x}=1+\dfrac{x^{2}}{3}+\dfrac{2x^{4}}{15}+\cdots$

olup

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x^{2}}{3}+\frac{2x^{4}}{15}+\cdots\right)=1$$

elde edilir.

Örnek 4.5.7.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - x - 1}{x^2}$ limitini hesaplayınız.

$\cancel{1+x}$

0 0

Çözüm. $\dfrac{e^x-(x+1)}{x^2} = \dfrac{\left(1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots\right)-(x+1)}{x^2} = \dfrac{1}{2!}+\dfrac{x}{3!}+\dfrac{x^2}{4!}+\cdots$

olup

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(x+1)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2!}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}+\ldots\right) = \frac{1}{2}$$

elde edilir.

KAYNAKLAR:

1. **Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA,** Analiz III Diziler ve Seriler, Dizgi Ofset, 2017.

2. **G. B. Thomas ve Ark.,** Thomas Calculus I, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.