# Kafes Yapıları

Ders 7



# Hatırlatma

- Daha önce anlatılan sıra bağıntısını hatırlayalım. A kümesinde bir ***R*** bağıntsı verilmiş olsun. ***R*** bağıntısı;
  a. Yansıma (Tüm a∈A için, sadece ve sadece a*R*a ise **yansıyandır**(reflexive)).
  b. Ters Simetrik :(Tüm a,b∈A için sadece ve sadece a*R*b ve b*R*a, a=b anlamına geliyorsa **ters simetriktir)**
  c. Geçişlilik : (Tüm a,b,c∈A için sadece ve sadece a*R*b ve b*R*c, a*R*c anlamına geliyorsa **geçişlidir**(transitive)).

  Özelliklerine sahip olsun. Bu özelliği taşıyan kümelere kısmi sıralı kümeler(Partially Ordered Set, POSET) denir.

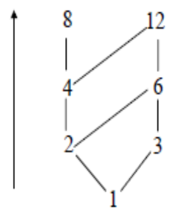
- Örnek:
- Kümelerde alt küme( ⊆ ) bağıntısı ,
- Doğal sayılarda bölünebilirlik; a/b ⇒ ak=b , a,k,b∈N ; 2/5
- Sıralama için ≤ sembolü kullanılır. a ≤ b ; a, b'nin önünde gelir anlamındadır.
- Kısmi sırlama denmesinin nedeni küme içinde birbiriyle karşılaştırılamayan elemanlar olabileceği nedeniyledir.

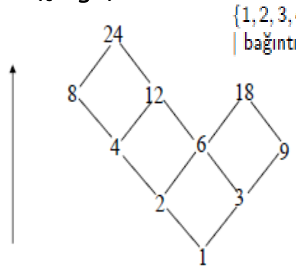
- Topyekün sıra: (Doğrusal sıra) : Kümenin her hangi iki elemanı arasında sıralama yapılabilirse topyekün sıra bağıntısı vardır. (Doğal sayılarda büyüklük, küçüklük bağıntısı )
- Sözlük sırası : S ve T topyekün sıralı kümeler ise S×T (kartezyen çarpım) kümesinde sözlük sırası:
  a, a′ $\in$ S;  b, b′$\in$T olmak üzere;
  (a,b) < (a′,b′) $\Rightarrow$ a < a′ yada a=a′, b<b′ dür.
- Örnek: A= (1,2,3,4,6,8,12) kümesinde bölünebilirlik bağıntısıyla kısmi bir kısmi sıralama yapılırsa, bağıntı matrisi aşağıdaki şekilde olacaktır

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |



- Halef-Selef(Predecessor-Successor, ilk-öndegelen – ilk-sonra-gelen) Bağıntısı:
- b, a'nın halefi ise a<c<b olamaz. Yani a ile b arasında sırlanabilen bir c elemanı bulmak mümkün değildir, yani a << b'dir.
- Bu durumda kısmi sıralı küme için yeni bir graf tanımı (hasse diyagramı) yapılarak çizilir.
- Hasse Diyagramı: a<<b şeklindeki çiftleri birleştiren ve en önde gelenin en alta konulduğu graftır (çizge).

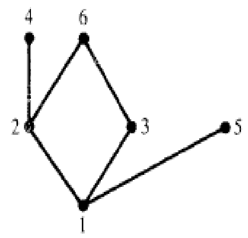



$\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}$
| bağıntısı

# Örnek

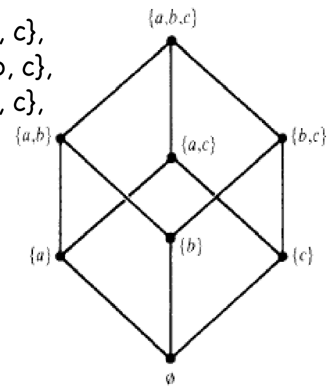
- A={1,2,3,4,5,6} kümesini ve bölünebilme bağıntısını göz önüne alalım. A kümesinin bölünebilme bağıntısına göre sıralanmasının Hasse diyagramını çiziniz.
  - 1|2, 1|3, 1|4, 1|5, 1|6
  - 2|4, 2|6
  - 3|6



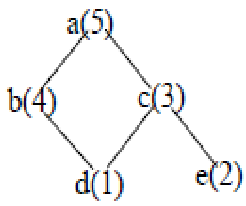



# Örnek

- A={a, b, c} kümesinin altkümelerinden oluşan kümenin P(A) içerme bağıntısına göre sıralanmasının hasse diyagramını çiziniz.
  - ∅⊆{a}, ∅⊆{b}, ∅⊆{c}, ∅⊆{a, b}, ∅⊆{a, c}, ∅⊆{b, c}, ∅⊆{a, b, c},
  - {a}⊆ {a, b}, {a}⊆ {a, c}, {a}⊆ {a, b, c},
  - {b}⊆ {a, b}, {b}⊆ {b, c}, {b}⊆ {a, b, c},
  - {c}⊆ {a, c}, {c}⊆ {b, c}, {c}⊆ {a, b, c},
  - {a, b}⊆ {a, b, c},
  - {a, c}⊆ {a, b, c},
  - {b, c}⊆ {a, b, c},



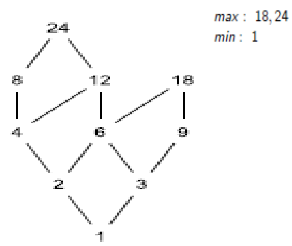
- Düzgün Sayılama (Consistent Enumeration) : Bu $f: S \rightarrow N$ bir fonksiyondur öyle ki $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$
- Parantez içindeki sayıları vererek düzgün sayılama yapılabilir.
- Burada;
  - En büyük (maximal) eleman (a) bir tane (Kendinden sonra gelen yok)
  - En küçük (minimal) eleman (d,e) iki tane (Kendinden önce gelen yok)

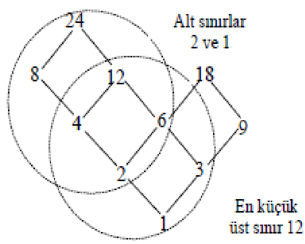



8-7

# Infimum, Supremum

- S bir POSET , $A \subseteq S$ alt POSET
- $\forall a \in A$ $m^{\vee} \leq a$ olacak şeklide $m^{\vee}$ mevcut ise $m^{\vee}$ A'nın bir alt sınırıdır.
- $\forall a \in A$ $a \leq m^{\wedge}$ olacak şeklide $m^{\wedge}$ mevcut ise $m^{\wedge}$ A'nın bir üst sınırıdır.
- Eğer A'nın bir üst sınırı, A'nın diğer bütün üst sınırlarından önde geliyorsa buna A'nın supremumu denir.
- En küçük üst sınır (Least Upper Bound) = Supremum : sup(A) ile gösterilir.
- Eğer A'nın bir alt sınırı, A'nın diğer bütün alt sınırlarını ilk izleyen ise buna A'nın infimumu denir.
- En büyük alt sınır (Greatest Lower Bound) = Infimum : inf(A)
- En Büyük Ortak Bölen (inf), en küçük ortak kat (sup) bu tanımlara uyar.




8-8

## En Küçük Üstsınır

Tanım
$A \subseteq S$

A'nın üstsınırı $M$:
$\forall x \in A \; x \preceq M$

Tanım
$M(A)$: A'nın üstsınırları kümesi

A'nın en küçük üstsınırı $sup(A)$:
$\forall M \in M(A) \; sup(A) \preceq M$

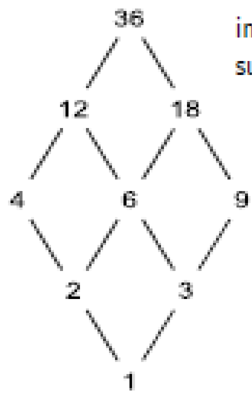
## En Büyük Altsınır

Tanım
$A \subseteq S$

A'nın altsınırı $m$:
$\forall x \in S \; m \preceq x$

Tanım
$m(A)$: A'nın altsınırları kümesi

A'nın en büyük altsınırı $inf(A)$:
$\forall m \in m(A) \; m \preceq inf(A)$




inf = obeb
sup = okek



# Kafes - Lattice

- Tanım: A kısmi sıralı bir küme verilsin. Her $x,y \in A$ öğeleri için $\sup\{x,y\}$ ve $\inf\{x,y\}$ varsa, A kümesine Latis veya Kafes denir ve
  $$\sup\{x,y\}=x \vee y \quad \text{ve} \quad \inf\{x,y\} = x \wedge y$$
  şeklinde yazılır.
- Eğer A kısmi sıralı kümesi bir kafes ise $x \wedge y$ gösterimi x ve y öğelerinin kesişimi ve $x \vee y$ gösterimi de x ve y öğelerinin birleşimi olarak okunur.
- **Teorem:** a,b ve c öğeleri A kafesinin keyfi öğeleri ise
  i. $a \leq a \vee b$ ve $b \leq a \vee b$
  ii. $a \leq c$ ve $b \leq c \Rightarrow a \vee b \leq c$
  iii. $a \wedge b \leq a$ ve $a \wedge b \leq b$
  iv. $c \leq a$ ve $c \leq b \Rightarrow c \leq a \wedge b$

  olur

# Kafes Yapıları ve Özellikleri (Lattice Structures)

- L üzerinde karşılaşma (meet) ve birleşme (join) adı altında iki ikili işlem tanımlanan boş olmayan bir küme olsun.
- Karşılaşma "$\wedge$" ; birleşme "$\vee$" birbirinin düali. Ancak işlemler aşağıdaki aksiyomları sağlamalıdır.
  - L1: Değişme : $a \wedge b = b \wedge a$ ; $a \vee b = b \vee a$
  - L2: Birleşme : $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ ; $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
  - L3: Yutma : $a \wedge (a \vee b) = a$ ; $a \vee (a \wedge b) = a$
- Bu aksiyomlar birbirinin dualidir. Buna göre diğer tanımlanacak özelliklerinde bir duali vardır.
- 1: Sabit Kuvvetlilik (idempotence)
  $a \wedge a = a$
  $a \wedge a = a \wedge [a \vee (a \wedge b)]$
  $= a \wedge (a \vee c) = a$
- **Teorem 1** : $a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$'dir.
  $b = b \vee (b \wedge a)$
  $b = b \vee a$
  $b = a \wedge (a \vee b)$
  $a = a \wedge b$ bulunur.



- **Teorem 2** : L'de $a \wedge b= a$ ($a \vee b =b$) şeklinde tanımlanan bağıntı bir sıra bağıntısıdır.
  - ❖ $a \wedge a = a$ (Yansıma)
  - ❖ $a \wedge b = a$ ve $b \wedge a = b \Rightarrow a=b$ (Antisimetri)
  - ❖ $a \wedge b = a$ , $b \wedge c = b \Rightarrow a \wedge c = a$ (Geçişme)

  Kafes bir kısmi sıralı kümedir denilebilir. Her POSET bir kafesmidir? Bu soruyu cevaplamak için aşağıdaki teoremin ispatı verilebilir.
- **Teorem 3** : P (kısmi sıralı küme) her eleman çifti için (a,b) bir infimum ve bir supremum var olan bir kısmi sıralı küme ise P bir kafes yapısıdır. Bu durumda;
  $a \wedge b = \inf(a,b)$
  $a \vee b = \sup(a,b)$ olarak tanımlanır

  **İspat:**

  inf. ve sup. ifadelerinin kafes aksiyomlarının sağlayıp sağlamadıklarına bakalım..
  $\inf(a,b) = \inf(b,a)$ ; { $a \wedge b = b \wedge a$ }
  $\inf(\inf(a,b),c) = \inf(a, \inf(b,c))$ ; { $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ }
  $\inf(a,\sup(a,b)) = a$ yazabiliriz. ; { $a \wedge (a \vee b) = a$ }
- Bu aksiyomları sup için de gerçekleyebiliriz. Böylece bu aksiyomlar tanımlandığına göre P kısmi sıralı kümesi bir kafestir.

- **Alt Kafes:** $M \subseteq L$ (kafes) , M bir alt küme. M'nin alt kafes olabilmesi için M'nin $\wedge$, $\vee$ işlemlerine kapalı olması gerekir.

- **İzomorf Kafesler:** (Aynı biçimde olan yapılar) L ve L' kafesler olmak üzere;
  - $F : L \rightarrow L'$ , $f$ evirilebilir bir fonksiyon.
  - $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ ise $f$ fonksiyonu bir izomorfizmdir.

  Karşılaştırma işlemi de L ve L' nde bir izomorf kafes tanımlar. Düalite burada da geçerlidir.

- Sınırlı Kafesler (Bounded Lattices): Bir kafeste bir alt sınır varsa bunu o simgesi ile göstereceğiz. Bir üst sınır varsa bunu I ile göstereceğiz.
  - $\forall x \in L$ , $o \leq x$ ;
  - $\forall x \in L$ , $x \leq I$

  şeklinde sınırları tanımlanabiliyorsa buna sınırlı kafes denir.

- Kafeste eleman sayısı sonlu ise sınırlar vardır.

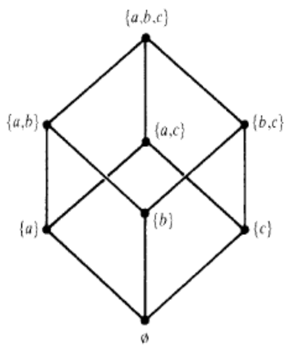
- Eğer o ve I mevcutsa, $\forall$a için;
  $a \vee I = I$ ;   $a \vee o = a$
  $a \wedge I = a$;   $a \wedge o = o$

- **Teorem:** Sonlu kafes sınırlıdır.
  $a1 \vee a2 \vee a3 .............. \vee an = I$ dır.
  $a1 \wedge a2 \wedge a3 .............. \wedge an = o$ dır

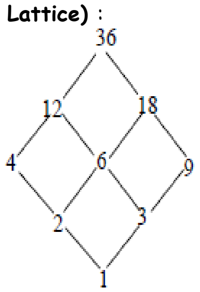


# Örnek

- U sonlu bir küme P(U) 'U'nun alt kümeler kümesi olsun.
  $\subseteq$ :Sıra bağıntısı (içine alma)
  $\cap$ :Kesişme karşılama
  U : Birleşme bağıntıları olsun.
  U= {a,b,c} dersek hasse diyagramı aşağıdaki gibi olur.

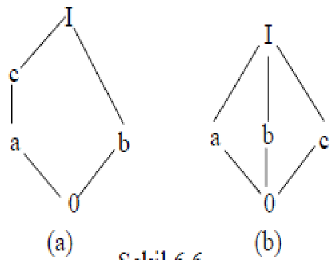


- **İşlemleri Dağılma Özelliği Gösteren Kafesler (Distribütif Lattice)** :
  $\forall$ a,b,c $\in$ L için
  $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ ve;
  $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
  yazılabiliyorsa böyle kafeslere distribütif kafesler denir.




- **Örnek** : 36'nın bölenleri 12,6 ve 9'u alalım.
  $12 \wedge (6 \vee 9) = (12 \wedge 6) \vee (12 \wedge 9)$
  $12 \wedge 18 = 6 \vee 3$
  $6 = 6$
  Bütün elemanlar için bu yapılabilir.

- **Karşı Örnek** : Distribütif olmayan Kafes
  Şekil (a)
  $a \vee (b \wedge c) = a$
  $(a \vee b) \wedge (a \vee c) =$
  $I \wedge c = c$
  Şekil (b)
  $a \vee (b \wedge c) = a$
  $(a \vee b) \wedge (b \vee c) = I$



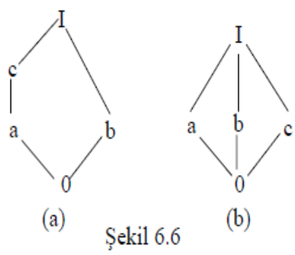

Şekil 6.6



**Teorem:** Şekil 6.6 de verilen örnek kafesten birini alt kafes olarak içine alan hiçbir kafes distribütif değildir.

**Tanım:** Elemanları tümlenen sonlu kafesler(alt sınır o, üst sınır I) x 'a'nın tümleyenidir . O halde; $a \vee x = I$ ve $a \wedge x = o$ demektir.

- Bir kafeste her elemanın tümleyeni olmayabilir.
- Bazı elemanların tümleyeni tek olmayabilir.
- Kafeste üst ve alt sınır muhakkak tektir.
- Şekil 6.6 (a) için :
  - $c \vee b = I$ ; $c \wedge b = o$
  - $a \vee b = I$ ; $a \wedge b = o$ (c, a ve b' nin tümleyen




Şekil 6.6