MATEMATIK 1

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2020

2.5. Rasyonel, İrrasyonel ve Reel (Gerçek) Sayılar

Tanım 2.5.1. $m, n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z},\ (m,n) = 1,\ n \neq 0 \right\}$$

kümesinin her bir elemanına rasyonel sayılar denir. Burada m sayısına rasyonel sayının payı, n sayısına da rasyonel sayının paydası adı verilir.

İki tam sayının 1 den başka ortak böleni yoksa bu iki sayıya aralarında asaldırlar denir. c bir tam sayı olmak üzere $m/n = cm/cn$ olduğundan ($c \neq 0$) yukarıdaki m ile n sayıları aralarında asal kabul edilecektir. Aksi takdirde $\mathbb{Q}$ cümlesinde birbirine eşit sonsuz çoklukta eleman bulunur.

Daha önce belirtmiş olduğumuz $\frac{4}{7} \notin \mathbb{Z}$ sayısının artık bir adı vardır. Yani $7x = 4$ denkleminin çözümü vardır. Rasyonel sayılar kümesi tamsayılar kümesini de kapsar. Yani tamsayılar aynı zamanda rasyonel sayılardır. Gerçekten, $3 \in \mathbb{Z}$ olup bu sayı aynı zamanda $3 = \frac{3}{1} \in \mathbb{Q}$ bir rasyonel sayıdır. Buradan görüldüğü gibi $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ dir.

$$-2 = \sqrt[3]{(-8)} = (-8)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= (-8)^{\frac{1.2}{3.2}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \left((-8)^{\frac{1}{6}}\right)^{2} =$$

$$= \left((-8)^{2}\right)^{\frac{1}{6}} = (64)^{\frac{1}{6}} = \left(2^{6}\right)^{\frac{1}{6}} =$$

$= 2$ dersek hatayı

nerede yapmış oluruz.

Yani $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ demek yalnış.

$\frac{1}{3} \equiv \frac{2}{6}$ yazılmalıdır.

Ayrıca rasyonel sayılar kümesi toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerine göre kapalıdır. Ancak bu sayılarla bazı ikinci ve daha yüksek dereceden denklemleri çözmek mümkün değildir. Örneğin $x^2 - 2 = 0$, $x^2 - 3 = 0$ ve benzeri denklemlerin rasyonel sayılar kümesinde çözümü yoktur. Çünkü $\pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{5}$ sayıları rasyonel sayı değildir. O zaman yeni bir sayı kümesine ihtiyaç vardır. Bu sayılara irrasyonel sayılar denir ve irrasyonel sayıların oluşturduğu küme $\overline{\mathbb{Q}}$ ile gösterilir. Bazı kaynaklarda $\mathbb{I}\mathbb{R}$ şeklinde de gösterilmektedir. Fakat irrasyonel sayılar doğru tanımlanmalıdır. Bazen "rasyonel olmayan sayılar" ya da "köklü sayılar" yada "yalnız π, e,... gibi sayılar" şeklinde tanımlar ile yetinilmeye çalışılır. Ancak bu tanımlar irrasyonel sayıların tanımı için yeterli değildir.

Tanım 2.5.2. Kesir olarak ifade edilemeyen ve belirli bir düzeni olmaksızın ondalık kısmı sonlandırılamayan sonsuz basamaklı sayılara irrasyonel sayılar adı verilir.

Rasyonel sayılar ile irrasyonel sayıların birleşimine reel sayılar denir ve $\mathbb{R}$ ile gösterilir. Yani, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \overline{\mathbb{Q}}$ dir.

Bir kenarının uzunluğu 1 birim olan karenin köşegen uzunluğu $\sqrt{2}$ birimdir. Şimdi $\sqrt{2}$ sayısının bir rasyonel sayı olup olmadığını araştıralım. $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olduğunu göstermek için m/n şeklinde yazılabildiğini göstermek gerekir. $\sqrt{2}$ nin rasyonel bir sayı olduğunu kabul edelim. O halde m ve n aralarında asal olmak üzere $\sqrt{2} = m/n$ biçimde yazılabilir. Her iki tarafın karesi alınır ve n^2 ile çarpılırsa $2n^2 = m^2$ bulunur. Eşitliğin birinci tarafı çift sayı olduğundan ikinci tarafında bulunan m^2 de çifttir. Dolayısıyla m çifttir. O halde r bir tamsayı olmak üzere $m = 2r$ yazılabilir. O zaman $n^2 = 2r^2$ bulunur ki bu n^2 nin dolayısıyla n nin çift olduğunu gösterir. Hem m hem de n çift olduğundan 2 sayısı bunların ortak bölenidir. Halbuki biz m ve n sayılarını aralarında asal kabul etmiştik. Bu bir çelişkidir. O halde $\sqrt{2}$ sayısı rasyonel bir sayı değil irrasyonel bir sayıdır.

Her bir reel sayıya sayı doğrusu üzerinde bu sayıyı apsis olarak kabul eden bir tek nokta ve sayı doğrusu üzerindeki her bir noktaya bir tek reel sayı karşılık gelir.

Tanım 2.5.3. Elemanları reel sayılar olan kümelere lineer nokta kümeleri denir. Lineer nokta kümelerinden en çok kullanılanı aralıklardır. $a,b\in\mathbb{R}$ ve $a<b$ olmak üzere

$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}:a<x<b\}$ kümesine açık aralık,

$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}:a\leq x\leq b\}$ kümesine kapalı aralık,

$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}:a<x\leq b\}$ ve $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}:a\leq x<b\}$

kümelerine ise yarı açık aralık adı verilir.

Tanım 2.5.4. A bir lineer nokta kümesi olsun. Eğer $\forall x \in A$ için $x \geq a$ bağıntısını sağlayan bir a sayısı varsa A kümesi alttan sınırlı denir ve a sayısına da A nın bir alt sınırı denir. Eğer $\forall x \in A$ için $x \leq b$ olacak şekilde b reel sayısı varsa A kümesine üstten sınırlı bir küme denir ve b reel sayısına da A nın bir üst sınırı denir. Hem üstten hem de alttan sınırlı kümelere sınırlı kümeler adı verilir.

Uyarı 2.5.1. Tanım 2.5.3 de bahsedilen aralıklar birer sınırlı kümelerdir.

Uyarı 2.5.2. Lineer bir nokta kümesi sınırlı ise alt sınırının solundaki her reel sayı bir alt sınır, üst sınırının sağındaki her reel sayı da bir üst sınırdır.

Örnek 2.5.1. $A = \{x \in \mathbb{R} : \ 23 < x < 30\}$ kümesi sınırlıdır. 23 veya 23 ün solundaki herhangi bir sayı alt sınır, 30 veya 30 un sağındaki herhangi bir sayı üst sınırdır.

Örnek 2.5.2. $B=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x=\dfrac{1}{m},\ m\in\mathbb{Z}^{+}\right\}$ kümesi sınırlıdır. 0 veya herhangi bir negatif sayı bir alt sınır, 1 veya 1 in sağındaki herhangi bir sayı üst sınırdır.

Örnek 2.5.3. (1) $\mathbb{Z}$ kümesi sınırsızdır.

(2) $\mathbb{R}$ kümesi sınırsızdır.

(3) $\mathbb{N}$ kümesi alttan 0 veya herhangi bir negatif sayı ile sınırlıdır. Ancak üstten sınırsızdır.

Uyarı 2.5.3. (Tamlık Aksiyomu) Üstten sınırlı bir kümenin üst sınırları içinde bir en küçüğü, alttan sınırlı bir kümenin alt sınırları içinde bir en büyüğü vardır.

Tanım 2.5.5. A reel sayılar kümesinin üstten sınırlı bir alt kümesi olsun. A kümesinin üst sınırlarının en küçüğüne A kümesinin en küçük üst sınırı veya supremumu denir ve $\sup(A)$ ile gösterilir. A kümesinin alt sınırlarının en büyüğüne A kümesinin en büyük alt sınırı veya infimumu denir ve $\inf(A)$ ile gösterilir.

Örnek 2.5.4. $B=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x=\dfrac{1}{m},\ m\in\mathbb{Z}^{+}\right\}$ kümesi için $\sup(B)=1$ olup $1\in B$ dir. Ancak $\inf(B)=0$ olup $0\notin B$ dir.

Örnek 2.5.5. $C=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x=\dfrac{1}{m},\ m\in\mathbb{Q}\text{ ve }m>0\right\}$ kümesi için

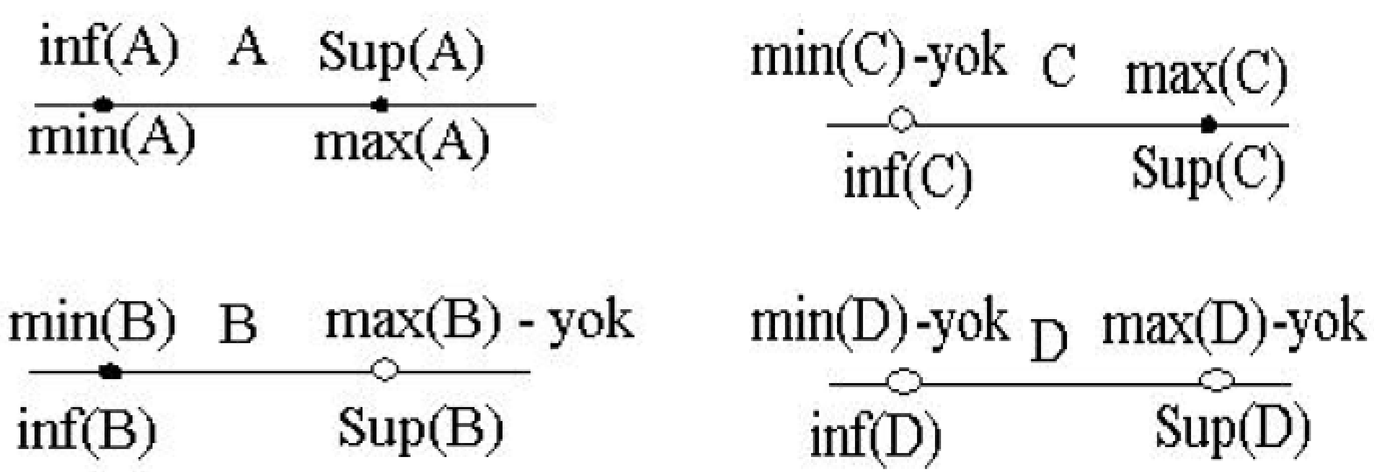
$\inf(C)=0$ olup $\sup(C)$ yoktur.

Uyarı 2.5.4. **(1)** Her kümenin infimumu veya supremumu olması gerekmez. Örneğin $A=(0,\infty)$ kümesinin supremumu ve $B=(-\infty,0)$ kümesinin infimumu yoktur. Bu kümeler için $\sup(A)=\infty$ ve $\inf(B)=-\infty$ yazılabilir.

(2) Eğer $\sup(A)$ ve $\inf(A)$ varsa $\inf(A)\leq\sup(A)$ dır.

(3) $\sup(A)$ veya $\inf(A)$, A kümesinin elemanı olmak zorunda değildir.

Tanım 2.5.6. $A \subset \mathbb{R}$ kümesinin en küçük üst sınırı bu kümenin elemanı ise bu elemana kümenin en büyük elemanı veya maksimum elemanı denir ve max(A) veya maks(A) ile gösterilir. Benzer şekilde A kümesinin en büyük alt sınırı kümenin elemanı ise bu elemana A kümesinin minimum elemanı denir ve min(A) ile gösterilir.



Teorem 2.5.1. (İnfimum Özelliği) $A \subset \mathbb{R}$ ve $\inf(A) = a$ olsun.

$\forall x \in A$ için

(1) $x \geq a$

(2) $\varepsilon > 0$ için $a + \varepsilon > x$ olacak şekilde $\exists x \in A$ vardır.

Teorem 2.5.2. (Supremum özelliği) $A \subset \mathbb{R}$ ve $\sup(A) = b$ olsun.

$\forall x \in A$ için

(1) $x \leq b$

(2) $\varepsilon > 0$ için $b - \varepsilon < x$ olacak şekilde $\exists x \in A$ vardır.

Kaynaklar:

1. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus I**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.
2. Prof. Dr. C. Çinar, Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, Prof. Dr. A. S. Kurbanlı, Prof. Dr. D. Şimşek, **Genel Matematik**, Dizgi Ofset, 2013.
3. Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, **Analiz III Diziler ve Seriler,** Dizgi Ofset, 2017.
4. H. İ. Karakaş, **Matematiğin Temelleri, Sayı Sistemleri ve Cebirsel Yapılar,** ODTÜ yayınları, 2011.