Graflar - Çizgeler

Ders 9

9-1

Graflar ve Tanımlar

- Bir grafın ne olduğunu açıklamadan önce belki de ne olmadığını söylemek daha iyi olabilir.
- Bu bölümde kullanılan graf bir fonksiyonun grafiği değildir.

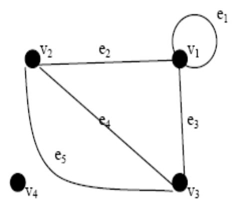
O halde graf nedir?

- Basitçe bir graf düğüm olarak adlandırılan noktalar ve her biri bu noktaları veya sadece noktanın kendisini birleştiren ve ayrıt olarak adlandırılan çizgiler topluluğudur.
- Örnek olarak şehirleri düğüm (vertice) ve onları bağlayan yolları ayrıt (edge) olarak gösteren yol haritaları verilebilir.
- Bir grafı tanımlamak için öncelikle düğümlerin ve ayrıtların kümesini tanımlamamız gerekir.
- Daha sonra hangi ayrıtların hangi düğümleri bağladığını belirtmeliyiz.
- Bir ayrıt her iki ucunda da bir düğüm olacak şekilde tanımlandığından graftaki tüm ayrıtların uç noktalarını bir düğüm ile ilişkilendirmek gerekir.
- Bu nedenle, her bir e ayrıt'ı için $\{v_1, v_2\}$ kümesi tanımlarız. Bunun anlamı e ayrıt'ının v_1 ve v_2 düğümlerini bağladığıdır. $v_1 = v_2$ olabilir. $\{v_1, v_2\}$ kümesi $\delta(e)$ ile gösterilir ve düğümler kümesinin bir alt kümesidir.

9-2

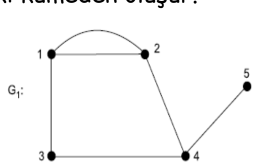
- **Tanım:** Bir **yönsüz (undirected) graf *G*** şunlardan oluşur: ***G***(V,E)
  - i. boş olmayan sonlu bir V düğümler kümesi
  - ii.sonlu bir E ayrıtlar kümesi ve
  - iii.bir $\delta: E \rightarrow P(V)$ fonksiyonu öyle ki her bir e ayrıt' i için $\delta(e)$ V 'nin bir veya iki elemanlı bir alt kümesidir.

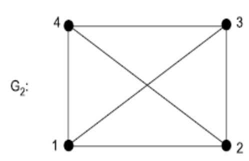
- Şekil 7.1 ' deki *G* grafına bakalım. Açıktır ki *G* grafının düğüm kümesi $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ve ayrıt kümesi $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.
  $\delta: E \rightarrow P(V)$ fonksiyonu şöyle tanımlanmaktadır:
  - δ: $e_1 \rightarrow$ a $\{v_1\}$
  - δ: $e_2 \rightarrow$ a $\{v_1, v_2\}$
  - δ: $e_3 \rightarrow$ a $\{v_1, v_3\}$
  - δ: $e_4 \rightarrow$ a $\{v_2, v_3\}$
  - δ: $e_5 \rightarrow$ a $\{v_2, v_3\}$
- Bu basitçe, e_1' in v_1 düğümünü kendisine, e_2'nin v_1 ve v_2 düğümlerini vs. bağladığını gösterir.



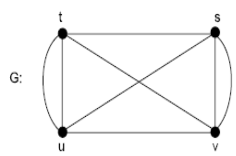
Şekil 7.1

- Yukarıda görüldüğü gibi bir ayrıt bir düğümü yine kendisine bağlayabileceği (loop) gibi v_4' te olduğu gibi bir düğüm hiçbir ayrıt ile bağlanmamış olabilir. Ayrıca iki düğüm birden fazla ayrıt ile de çoklu ayrıtlar (multiple edge) ile bağlanmış olabilir.
- Eğer bir graf, bir düğümü yine kendisine bağlayan (loop içermeyen) bir ayrıt ve aynı iki düğümü birden fazla bağlayan ayrıtlara (paralel ayrıtlar) sahip değil ise basit (simple) graftır.
- Dikkat edilmesi gereken bir nokta bir graf ile onu temsil eden diyagram aynı değildir. Daha önce de söylediğimiz gibi bir graf bir fonksiyon ile birlikte iki kümeden oluşur.



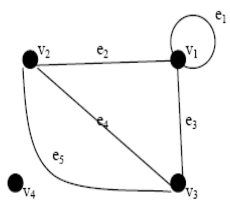


- Eğer bir *G*(V,E) graf paralel ayrıtlara sahip ise çoklu (multi) graftır.

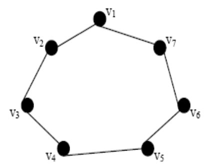


- Şekil 7.1 kendi başına bir graf değildir sadece bir grafın gösterimidir. Verilen bir graf birbirinden çok farklı görünen iki graf ile gösterilebilir.

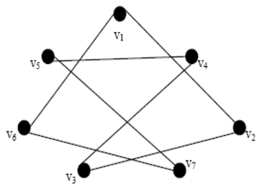
- Örneğin şekil 7.2 'deki iki diyagram çok farklı görünmelerine rağmen aynı *G* garfını temsil ederler. Şekil 7.2(a) 'daki graf 7 düğümlü çember (Wheel) graf olarak adlandırılır ve W_7 şeklinde gösterilir. Tüm n pozitif tamsayıları için n düğümlü ve n ayrıtlı bir W_n çember grafı vardır.



Şekil 7.1



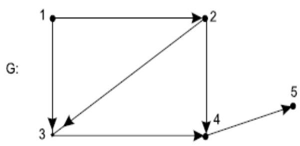
Şekil 7.2 (a)



Şekil 7.2 (b)

- Eğer bir grafta ayrıtlardan düğümlere belirli bir yönce geçiş olduğu belirtiliyorsa bu graf, digraf olarak adlandırılır.

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ and } E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 5)\}$$

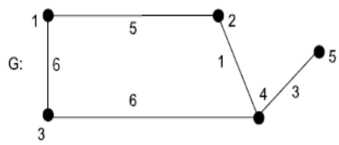


- Graftaki her bir ayrıtın kendine özgü ağırlıkları söz konusu ise ağırlıklı graf olarak alınır.

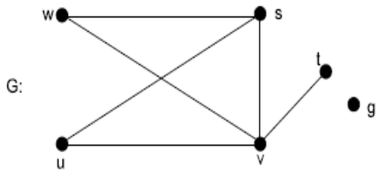
$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ and } E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

$$e_1 = (1, 2), e_2 = (1, 3), e_3 = (2, 4), e_4 = (3, 4), e_5 = (4, 5)$$

$$w(e_1) = 5, w(e_2) = 6, w(e_3) = 1, w(e_4) = 6, w(e_5) = 3$$



- **Tanım:**
  i. v ve w düğüm çiftini bağlayan bir e ayrıtı varsa bu iki düğüm komşudur (adjacent). Bu durumda hem v hem de w e' ye değer deriz ve ayrıca e de v ve w 'ya değer deriz.
  ii. e_1, e_2, … en ayrıtları en az bir ortak düğüme sahipse komşudur.
  iii. Bir v düğümünün derecesi (**degree**) σ(v), v düğümüne bağlı olan (incident) olan ayrıtların sayısıdır. Aksi belirtilmediği sürece v' yi kendisine bağlayan ayrıt v'nin derecesini iki arttırır.
  iv. Tüm düğümleri aynı r derecesine sahip grafa r dereceli düzenli (regular) graf veya r-derece graf denir.



degree $(u) = 2$; degree $(v) = 4$; degree $(t) = 1$
degree $(g) = 0$; degree $(s) = 3$; degree $(w) = 2$

Tanımlar

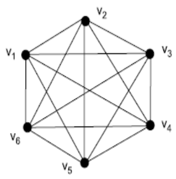
i. Bir boş graf (**null**) veya tamamen bağlı olmayan (**totally disconnected**) graf ayrıt kümesi boş olan graftır.

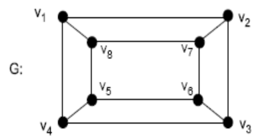
ii. Bir tam (komple) (**complete**) graf farklı düğüm çiftlerinin tümü bir ayrıt ile bağlı olan basit graftır ve n düğüm sayısı olmak üzere K_n şeklinde gösterilir.

iii. Düğüm kümesi, tüm ayrıtlerın v_1 'in bir düğümüne v_2' nin bir düğümüne bağladığı $\{v_1, v_2\}$ şeklinde bir bölümlemeye sahip olan grafa iki parçalı (**bipartite**) graf denir.

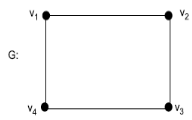
iv. Bir tam (komple) iki parçalı (**complete bipartite**) graf v_1 'in tüm düğümlerini v_2 'nin tüm düğümlerine tek bir ayrıt ile bağlayan iki parçalı graftır.

K_6





$V_1 = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ and $V_2 = \{v_4, v_2, v_6, v_8\}$
$(V_1 \cap V_2) = \phi$

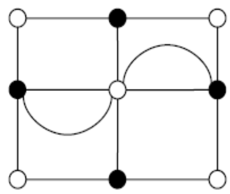


$V_1 = \{v_1, v_3\}$ and $V_2 = \{v_2, v_4\}$
$V = (V_1 \cup V_2)$; $V_1, V_2 \neq \phi$, and $(V_1 \cap V_2) = \phi$

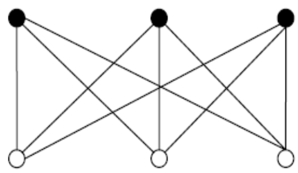
- **Örnek:** *G* , V düğüm setinin $\{V_1, V_2\}$ bölümlemesine sahip olduğu bir iki parçalı graf olsun. Dikkat edilirse *G* basit graf olmak zorunda değildir. Gereken tek şey her bir ayrıt V_1 'in bir düğümü ile V_2' nin bir düğümünü bağlamalıdır. $v_1 \in V_1$ ve $v_2 \in V_2$ dersek, bunları bağlayan birden fazla ayrıt olabilir veya hiç ayrıt olmayabilir. *G*'de loop olamayacağı da açıktır.

- Bir komple iki parçalı graf tamamen $|V_1|$ ve $|V_2|$ ile belirtilir. n ve m düğümlü komple iki parçalı graf $K_{n,m}$ ile gösterilir ve $|V_1|=n$ ve $|V_2|=m$ 'dir. Şekil 7.3 iki tane iki parçalı graf örneğidir.

- Her iki şekilde de V_1 'in düğümleri içi dolu noktalar ile, V_2 'nin düğümleri ise içi boş noktalar ile gösterilmiştir. (b)' deki graf komple iki parçalı $K_{3,3}$ grafıdır.



Şekil 7.3 (a)



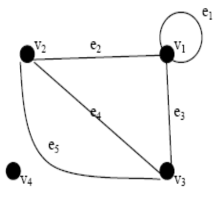
Şekil 7.3 (b)

Komşuluk Matrisi

- **Tanım:** *G* düğüm kümesi $\{v_1, v_2, .., v_n\}$ olan bir graf olsun. *G* 'nın komşuluk matrisi; a_{ij}, v_i ve v_j 'yi bağlayan ayrı ayrıtların sayısı olmak üzere n x n *A=A(G)* matrisidir.
- Komşuluk matrisi v_i ve v_j 'yi bağlayan ayrıtların sayısı, v_j ve v_i 'yi bağlayan ayrıtların sayısıyla aynı olduğundan simetrik olmalıdır.
- v_i düğümünün derecesi komşuluk matrisinden kolayca belirlenebilir. v_i de bir loop yoksa bu düğümün derecesi matrisin i. sütunundaki değerlerin toplamıdır.
- Her bir loop dereceyi iki kere etkilediğinden i. sütundaki değerleri toplarken a_{ii} diyagonal elemanın iki katı alınır.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Örnek:** Aşağıdaki *A* komşuluk matrisi (adjoint matrix) şekil 7.1 'de gösterilen grafa aittir.



$$A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Şekil 7.1

- $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ile *A'* nın satırları ve sütunları düğümleri temsil eder. Grafın iki özelliği matrise bakılarak hemen görülebilir.
- Öncelikle, diyagonale bakıldığında bir tek döngü (loop) vardır- v_1 'den kendisine. İkincisi, son satır veya sütundaki 0' lar v_4 'ün bir izole edilmiş düğüm yani başka hiçbir düğüme bağlı olmayan (kendisi dahil) bir düğüm olduğunu gösterir.
- Düğümlerin dereceleri matristen kolayca hesaplanabilir:

  $\sigma\,(v_1) = 2.1+1+1=4$

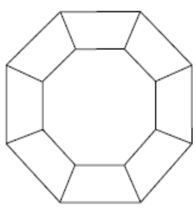
  $\sigma\,(v_2) = 1+2=3$

  $\sigma\,(v_3) = 1+2=3$

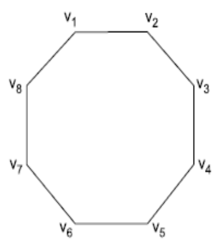
  $\sigma\,(v_4) = 0.$

- **Tanım:** Σ grafının tüm e ayrıtları için $V_\Sigma \in V_G$, $E_\Sigma \in E_G$ ve $\delta_\Sigma(e)=\delta_G(e)$ ise Σ grafı *G* grafının alt grafıdır (subgraph) denir ve $\Sigma \leq G$ şeklinde gösterilir.
- Σ grafının tüm e ayrıtları için $\delta_\Sigma(e)=\delta_G(e)$ durumu Σ alt grafının ayrıtlarının *G* de olduğu gibi aynı düğümleri bağlaması gerektiği anlamına gelir.
- Eğer *G'* nin diyagramından bazı düğümleri veya ayrıtları silerek Σ 'nin diyagramını elde edebiliyorsak Σ, *G* 'nin alt grafıdır.
- Tabii ki, bir düğümü siliyorsak ona bağlı (incident) olan tüm ayrıtları de silmeliyiz.

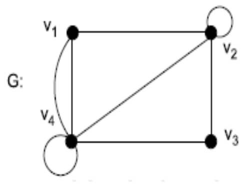
G:

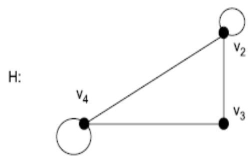


H:

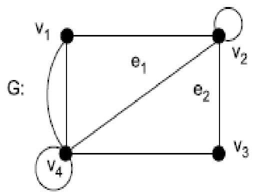


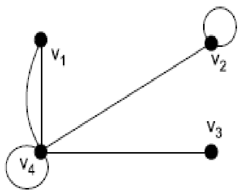
- Düğüm silinerek elde edilen altgraflar:





- Ayrıt silinerek elde edilen altgraflar:





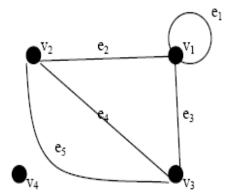
Yollar ve Devreler

- Eğer bir graf çeşitli şehirleri bağlayan yol ağını temsil ediyorsa aklımıza şu soru gelebilir: her yoldan bir kere geçerek ve her şehre sadece bir kez uğrayarak aynı şehirden başlayıp aynı şehirde biten bir yolculuk yapılabilir mi?

- **Tanım:**
  i. G grafında n uzunluğunda ayrıt dizisi; i =1, 2,…, n-1 için e_i ve e_{i+1} komşu olmak üzere e_1, e_2,…e_n ayrıtlarının dizisidir. Ayrıt dizisi, $\delta(e_i)=\{v_{i-1}, v_i\}$ olmak üzere $v_0,v_1,v_2,…v_{n-1},v_n$ düğüm dizisini belirler. v_0'a ilk düğüm, v_n 'e son düğüm denir.
  ii. Bir **yol (path)** tüm ayrıtları birbirinden ayrı (distinct) olan ayrıt dizisidir. Buna ek olarak eğer tüm düğümler de birbirinden ayrı ise bu yol basit (simple) yoldur.
  iii. $v_0=v_n$ ise ayrıt dizisi kapalıdır(closed). En az bir ayrıt içeren basit kapalı bir yol devre (circuit) olarak adlandırılır.

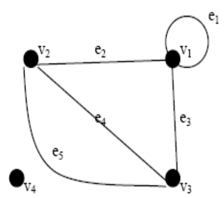
Ayrıt Dizisi

- Bir ayrıt dizisi grafın diyagramında kalemi kağıdın üzerinden kaldırmadan çizebileceğimiz herhangi sonlu ayrıt dizisidir.
- Ayrıtlar tekrar edilebilir veya döngüler tekrarlanabilir vs. özelliklerine sahip ayrıt dizileri çok genel olduklarından kullanıma uygun değillerdir ve bu yüzden yollar tanımlanmıştır.
- Bir yolda aynı ayrıttan birden fazla geçmeye izin verilmediğine dikkat edilmelidir.
- Buna ek olarak eğer aynı düğümü birden fazla ziyaret etmiyorsak bu yol, basit yol olarak adlandırılır.
- Ayrıt dizisi veya yol, bir yerden başlayıp aynı yerde bitiyorsa kapalıdır denir.



Şekil 7.1

- Yandaki graf için bir ayrıt dizisi:
  $e_1, e_2, e_4, e_5, e_2, e_3$
- Basit yol:
  e_1, e_2, e_4
- Kapalı yol:
  e_2, e_4, e_3



Şekil 7.1

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \qquad A^2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

- G şekil 7.1 'de gösterilen graf olsun. A ise bu grafın Komşuluk matrisidir.
- A'nın (i,j). elemanı v_i ve v_j düğümlerini bağlayan ayrıtların sayısıdır. Bunu bu iki düğümü bağlayan 1 uzunluğunda ayrıt dizilerinin sayısı şeklinde düşünebiliriz.

Bu durumda, komşuluk matrisinin karesi:

- A^2 de (i,j). eleman v_i ve v_j 'yi bağlayan 2 uzunluğunda ayrıt dizilerinin sayısını temsil eder.
- Örneğin, A(2,2) elemanı 5' tir ve v_2 'yi kendisine bağlayan 2 uzunluğunda 5 tane ayrıt dizisi vardır:

  e_2, e_2; e_4, e_4; e_5, e_5; e_4, e_5; e_5, e_4.

Açıklama

- Bunun niçin böyle olduğunu görmek zor değildir. A^{2}' nin (i,j). elemanı A' nın i. satırı ile j. sütununun çarpılması ile elde edilir. Matris çarpımı

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$$

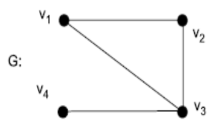
- Toplamdaki r. terim $a_{ir}a_{rj}$, v_i ve v_r 'yi bağlayan ayrıtların sayısı ile v_r ve v_j 'yi bağlayan ayrıtların sayısının çarpımıdır. Bir başka ifade ile v_i ve v_j 'yi v_r aracılığı ile bağlayan 2 uzunluğundaki ayrıt dizilerinin sayısıdır. Tüm k değerleri için ortaya çıkanların toplanması v_i ve v_j 'yi bağlayan 2 uzunluğunda ayrıt dizilerinin sayısını verir.
- Benzer şekilde A^3 'te (i,j). eleman v_i ve v_j 'yi bağlayan 3 uzunluğundaki ayrıt dizilerinin sayısıdır. Bu graf için

$$A^3 = \begin{vmatrix} 9 & 9 & 9 & 0 \\ 9 & 5 & 13 & 0 \\ 9 & 13 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

- Teorem: G, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ gibi n tane düğümden oluşan graf ve A matrisi de G'nin komşuluk matrisi olsun.

$$B = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{n-1}$$

Eğer her farklı i,j indisleri için $b_{i,j} \neq 0$ ise graf bağlantılıdır (connected) denir.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & 6 & 2 \\ 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$b_{ij} \neq 0$ for $i \neq j$; the graph G is connected.

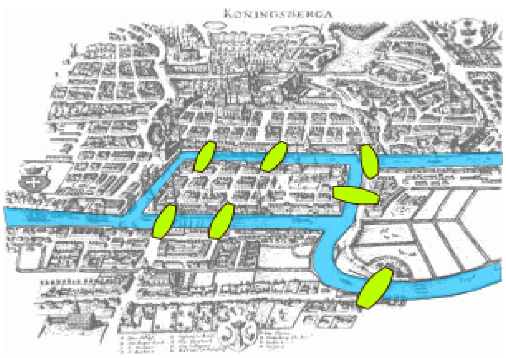
Bağlantılılık (Connectedness)

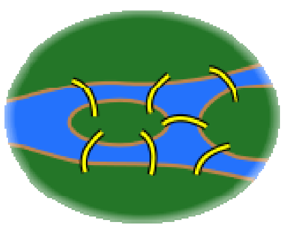
Bazı graflar tek bir parça halinde iken diğerleri çeşitli parçalardan oluşuyor olabilir. Bu fikri daha belirgin hale getirmek için yolları kullanabiliriz.

- **Tanım:** Bir graf eğer birbirinden ayrı düğümlerini bağlayan bir yol varsa bağlıdır (connected).
- Herhangi bir graf doğal olarak bileşen (component) adı verilen belli sayıda bağlı alt graflara bölünebilir.
- Bileşenler maksimal bağlı alt graflar olarak tanımlanabilirler.
- Bunun anlamı G_1, G 'in bağlı bir alt grafı ise ve kendisi G'nin başka herhangi bir bağlı alt grafının alt grafı değilse, G'nın bileşenidir denir.
- Bu ikinci durum maksimal terimi ile anlatmak istediğimiz şeydir yani Σ, $G_1 \leq \Sigma$ olacak şekilde bir bağlı alt grafsa $\Sigma = G_1$, böylece G'nin G_1'den daha büyük bağlı bir alt grafı yoktur.

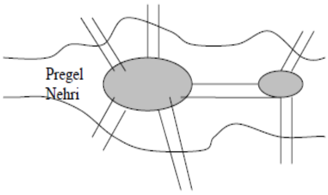
Euler Yolları (Eulerian Paths)

- Euler 1736 yılında yazdığı makale ile graf teorisinin doğmasına sebep olmuştur. Bu makale aşağıda tanımlanan Königsberg Bridge Problemini çözebilen bir teoriyi içeriyordu.
- Pregel nehri Königsberg kasabasının içinden akmaktadır. Nehrin ortasında aşağıdaki şekildeki gibi nehrin kıyılarına ve birbirine köprüler ile bağlı iki ada bulunmaktadır. Königsberg kasabasının vatandaşları için problem, kıyıların veya adaların birinden başlayıp tüm köprülerden sadece bir kez geçerek başladığımız yere yürünebilirliğinin incelenmesidir.

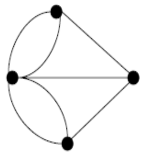




- Euler öncelikle şekil 7.4 (b) ' deki gibi Königsberg coğrafyasının gerekli özelliklerini bir graf ile gösterdi.
- Her bir nehir kıyısı ve adalar bir düğüm ile köprüler de ayrıtlar ile temsil edildi.
- Graf teorisi terimleri ile problem şu hale geldi: grafın tüm ayrıtlarını içeren kapalı bir yol var mıdır?

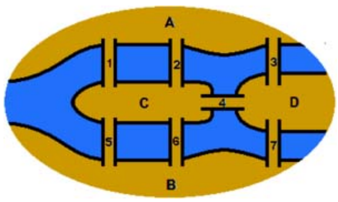


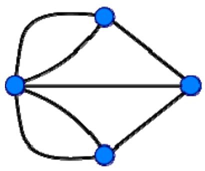
Şekil 7.4 (a)



Şekil 7.4 (b)

- **Tanım:** *G* grafındaki bir Euler Yolu, *G'* nın tüm ayrıtlarını içeren kapalı bir yoldur. Bir graf içinde en az bir Euler Yolu barındırıyorsa bu graf Euler grafıdır.
- Bir yolda hiçbir ayrıtdan birden fazla geçilemeyeceğinden Euler yolu tüm ayrıtları sadece bir kez içerir fakat düğümlerden birden fazla geçilebilir.
- Bağlı bir *G* grafında Euler Yolu olup olmadığını belirlemek için gereken durumu tanımlamak çok kolaydır: bütün düğümlerin derecesi çift olmalıdır.
- Bunu görmek için *G* bağlı ve Euler yoluna sahip olsun. *G* bağlı olduğundan Euler yolunun düğüm dizisi bütün düğümleri içerir. Yol ne zaman bir düğümden geçse bu derecesine iki katkı yapar. Tüm ayrıtlar yolda bir kere bulunduğundan her düğüm çift dereceye sahip olmalıdır.
- Königsberg' dekiler aradıkları yolu bulamamakta haklıdırlar zira böyle bir yol yoktur. Problemi temsil eden şekil 7.4 (b)' deki graf bağlıdır fakat gerekli koşulu sağlamaz. Aslında tüm düğümlerin derecesi tektir.

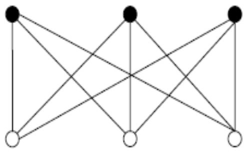




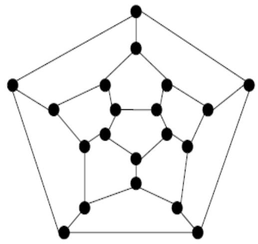
- **Teorem 7.2:** Bağlı bir G grafı sadece ve sadece tüm düğümleri çift dereceli ise Euler grafıdır.

Hamilton Devreleri (Hamiltonian Circuits)

- Benzer bir problem de herhangi bir ayrıttan birden fazla geçmemek kaydıyla her bir düğümü sadece bir kez ziyaret edip başladığımız yere geri dönebilir miyiz?
- Bu problem Hamilton tarafından irdelenmiştir ve ismi bu yollar ile birlikte anılmaktadır.
- **Tanım:** Bir graftaki Hamilton devresi tüm düğümlerden bir kez geçen bir devredir. Bir graf içinde bir Hamilton devresi barındırıyorsa Hamilton grafıdır.
- **Örnek:** Şekil 7.5 'te iki tane Hamilton devresi vardır.



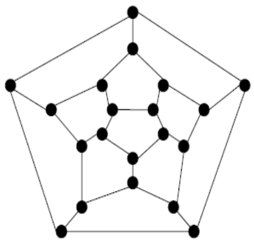
Şekil 7.5 (a)



Şekil 7.5 (b)

- Euler grafları basit bir karaktere sahipken aynı durum Hamilton grafları için doğru değildir.
- Aslında bir asırdan beri üzerinde çalışıldığı halde Hamilton graflarının karakteri hakkında bir şey bilinmemektedir (Karakter ile bir grafın Hamilton olması için gerek ve yeter koşul kastedilmektedir).
- Bu graf teorisinin çözülememiş büyük problemlerinden biridir.
- Açık bir gerek koşul grafın bağlı olmasıdır. Ayrıca çeşitli yeter koşullar da bilinmektedir.
- **Teorem 7.3:** Eğer, G n (≥3) düğümlü basit bağlı bir graf ise ve tüm v düğümleri için derecesi σ(v) ≥ n/2 ise G Hamiltondur.

- Dereceler ile ilgili koşul G 'nın Hamilton olması için gerek koşul değildir o halde, bu koşulu sağlamayan bir graf da Hamilton olabilir.
- Şekil 7.5 (b) 'ye bakarak bunu görebiliriz. Grafın 15 düğümü vardır, her düğümün derecesi 3'tür fakat hala Hamilton grafıdır.



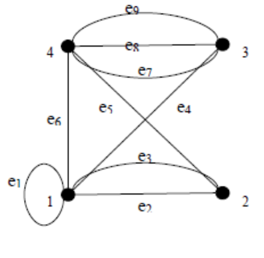
Şekil 7.5 (b)

Grafların İzomorfizmi

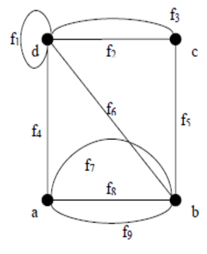
- Aşağıdaki gibi tanımlanan *G* ve Σ graflarını düşünelim. *G* ' in düğüm kümesi {1,2,3,4}, komşuluk matrisi *A* ve Σ 'nin düğüm kümesi {a,b,c,d}, komşuluk matrisi B olsun.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

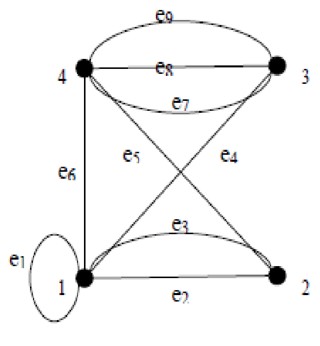
- *G* ve Σ graflarını temsil eden diyagramlar şekil 7.6 'da göste



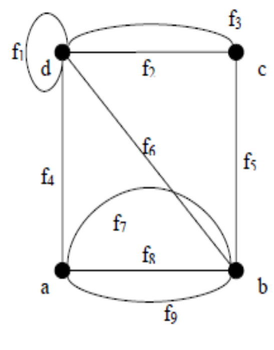
Şekil 7.6 (a)



Şekil 7.6 (b)



Şekil 7.6 (a)



Şekil 7.6 (b)

- Biraz dikkatli bakılırsa şekil 7.6 'da gösterilen grafların aynı olduğu görülebilir. Σ grafındaki a,b,c,d düğümlerini 3, 4, 2, 1 şeklinde; ve f_i ayrıtlarını i=1,…,8 için e_i ile tekrar etiketlersek şekil 7.6 'daki iki diyagrama aynı grafın farklı gösterimleri şeklinde bakabiliriz.
- Tabii ki, *G* ve Σ grafları birebir aynı değildir. Örneğin farklı düğüm kümelerine sahiptirler. Öte yandan aynı yapıya sahiptirler. *G* ve Σ grafları izomorfiktir graflar diyebiliriz.
- Σ 'nın düğümlerini yeniden etiketleyerek *G* ve Σ 'nın düğüm kümeleri arasında bir bijeksiyon tanımlamış oluruz.

- **Tanım:** G ve Σ iki graf olsun. G'den Σ'a bir izomorfizm (Θ, Φ) bir bijeksiyon çiftinden oluşur.

$$\Theta: V_G \to V_\Sigma \text{ ve } \Phi: E_G \to E_\Sigma$$

öyle ki G'nin tüm e ayrıtları için eğer

$$\delta_G(e) = \{v, w\} \text{ ise } \delta_\Sigma(\Phi(e)) = \{\Theta(v), \Theta(w)\}.$$

- İki graf, bir graftan diğerine bir izomorfizm varsa izomorfiktir denir ve

$$G \cong \Sigma$$

şeklinde gösteririz.
- $\delta_G(e) = \{v, w\}$ ise $\delta_\Sigma(\Phi(e)) = \{\Theta(v), \Theta(w)\}$ olması şartının anlamı iki grafın ayrıtları ve düğümleri arasındaki uyuşmanın doğru şekilde sağlandığından emin olmak içindir.

- Basit bir G grafı için G' dan Σ 'ya bir izomorfizm tanımlamak için sadece uygun $\Theta: V_G \to V_\Sigma$ düğüm bijeksiyonunu belirlemek gerekir.
- Bunun nedeni herhangi düğüm çiftini birleştiren en az bir tane ayrıt vardır o halde, bir kez Θ tanımlandığında gerekli özellikleri sağlayan sadece bir tane $\Phi: E_G \to E_\Sigma$ fonksiyonu vardır.

- İzomorfik grafların aynı yapıya sahip olmaları gerektiğinden birine ait graf teorisine dahil herhangi bir özellik diğerinde de bulunmalıdır.
- Bu özelliklerin bir kısmı aşağıdaki teoremde sıralanmıştır.

Teorem: (Θ, Φ) G dan Σ ya bir izomorfizm olsun. Bu durumda;

i. G ve Σ aynı sayıda düğüme sahiptir;
ii. G ve Σ aynı sayıda ayrıta sahiptir;
iii. G ve Σ aynı sayıda bileşene sahiptir;
iv. birbirine karşılık gelen düğümler aynı dereceye sahiptir;
v. G basitse, Σ da öyledir;
vi. G Euler grafı ise Σ de Eulerdir.
vii. G Hamilton grafı ise Σ de Hamiltondur.

İzomorfizm Prensibi

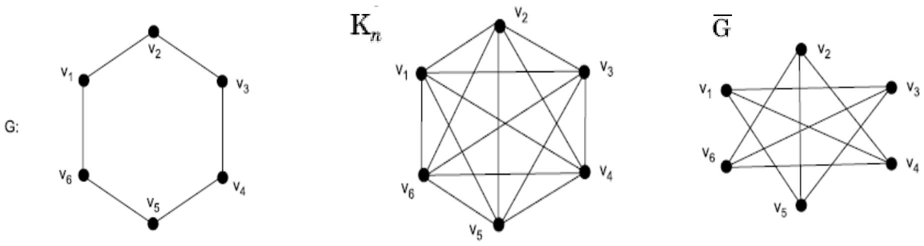
İki grafın izomorfik olduğunu göstermek için birinden diğerine bir izomorfizm bulunmalıdır; iki grafın izomorfik olmadığını göstermek için ise bir grafın sahip olduğu ama diğerinin sahip olmadığı graf teorisine dahil bir özellik bulunmalıdır.

Graflarda İşlemler

- Birleşim:
  G_1 ve G_2 iki graf olsun. $G_1 \cup G_2$ birleşimi de graftır öyle ki
  $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ ve $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$

- Kesişim:
  G_1 ve G_2 en az bir ortak düğümü olan iki graf olsun.
  $G_1 \cap G_2$ kesişimi de graftır öyle ki
  $V(G_1 \cap G_2) = V(G_1) \cap V(G_2)$ ve $E(G_1 \cap G_2) = E(G_1) \cap E(G_2)$

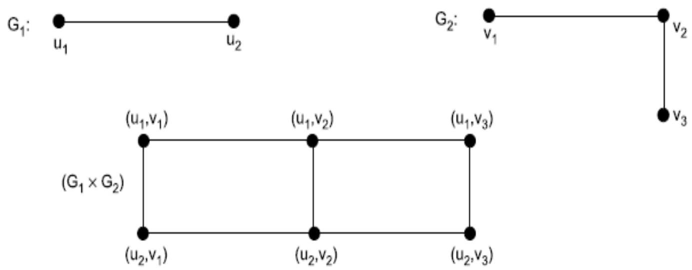
- Tümleyeni:
  G, n tane düğümü olan bir basit graf olsun. $\overline{G}$, G nin tümleyeni K_n complete grafından G nin ayrıtlarının silinmesiyle elde edilir.



9-29

Graflarda İşlemler

- Grafların çarpımı:
  $G_1:(V_1,E_1)$ ve $G_2:(V_2,E_2)$ iki graf olsun. G_1 ve G_2 graflarının çarpımı $G_1 \times G_2$ şeklinde yazılır ve $(G_1 \times G_2) : (V,E)$, $V = V_1 \times V_2$ ve E ayrıtlar kümesi aşağıdaki bağıntılardan hesaplanır:
  (a,b) ve (c,d) düğümleri $G_1 \times G_2$ grafının iki düğümü ise bu iki düğüm arasında aşağıdaki bağıntılardan birisi varsa ikisi arasında bir ayrıt vardır:
  i. a=c ve b ile d bitişik ise
  ii. a ile c bitişik ve b=d



9-30

Bileşke

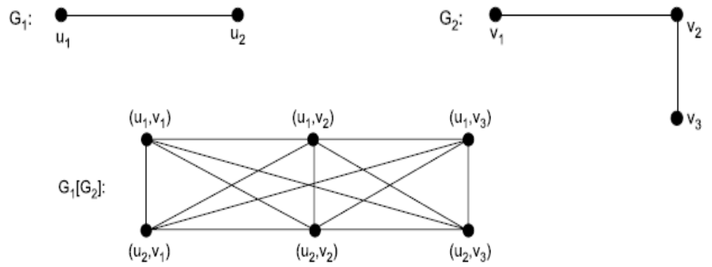
- G_1:(V_1,E_1) ve G_2:(V_2,E_2) iki graf olsun. G_1[G_2] bileşke graf aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$G_1[\ G_2] : (V,E)$$

Buradaki V= $V_1 \times V_2$ ve E ayrıtlar kümesi aşağıdaki gibi hesaplanır:

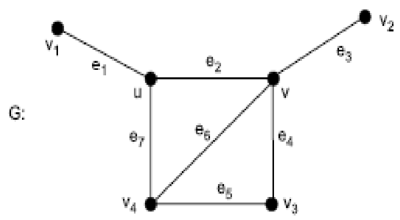
(a,b) ve (c,d) düğümleri G_1[G_2] grafının iki düğümü ise bu iki düğüm arasında aşağıdaki bağıntılardan birisi varsa ikisi arasında bir ayrıt vardır:

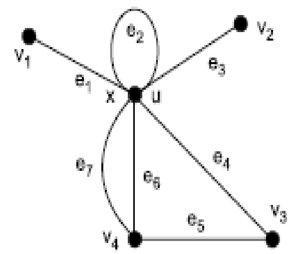
i. a ile c bitişik ise
ii. a = c ve b ile d bitişik ise



Grafın Düğümlerinin Birleştirilmesi

- u ve v G grafının iki farklı düğümü olsun. Bu G grafının iki düğümünü birleştirerek yeni G_1 grafını oluşturabiliriz.
- Bu u ve v ile bağlantılı olan ayrıtların tek bir x düğümü ile bağlanarak elde edilir.

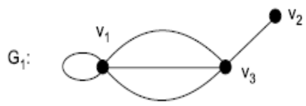


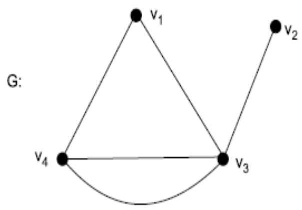


Komşuluk Matrisi (İki düğümün birleştirilmesinin ardından)

- u ve v gibi iki düğümün birleştirilmesi sonrasında komşuluk matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir:
    1. u. satır u. satır ile v. satırın toplamları ile elde ediniz. Benzer bir şekilde u. sütunu u. ve v. sütun toplamıyla elde edilir.
    2. v. düğüm ile ilgili satır ve sütunları siliniz. Sonuçta elde edilen matris komşuluk matrisidir.

v_1 ile v_4 düğümlerini birleştirelim





$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A(G_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

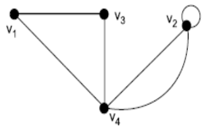
Birleştirme Algoritması (Bağlantılılık)

- Aşağıdaki aşamalar *G* grafının bağlantılılığının kontrol edilmesi için kullanılır:
    1. *G*'yi temelini oluşturan basit graf ile değiştirelim. Köşegen haricindeki sıfırdan farklı her bir elemanı 1 ve köşegen üzerindeki elemanları da 0 ile değiştirelim.
    2. Yeni bir graf oluşturmak için v_1 ile komşu olan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ düğümlerinin ilkiyle birleştirelim. Yeni düğümü v_1 ile isimlendirerek grafı *G* ile gösterelim.
    3. 1. adımı tekrar edelim.
    4. 2. adım ve üçüncü adımı v1 ile v1'e komşu başka bir düğüm kalmayıncaya kadar tekrar edelim.
    5. 2. adımdan 4. adıma kadar ki kısmı en son grafın v2 ve geri kalan tüm düğümler üzerine uygulayalım. Sonuç graf boştur ve izole edilmiş düğümlerinin sayısı ilk grafın bağlantılı bileşenlerinin sayısıdır.

Örnek

- Aşağıdaki grafı göz önüne alalım:

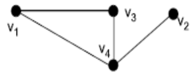
G:



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- G'yi temsil eden basit graf

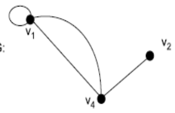
G_0:



$$A(G_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- v_1 ile v_3 düğümlerini birleştirelim:

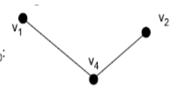
G:



$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- G'yi temsil eden basit graf

G_0:



$$A(G_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

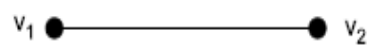
- v_1 ile v_4 düğümlerini birleştirelim:

G:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- G'yi temsil eden basit graf

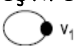
G_0:



$$A(G_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- v_1 ile v_2 düğümlerini birleştirelim:

G:



$A(G) = (1)$

- G'yi temsil eden basit graf

G_0:

$A(G_0) = (0)$

- Son graf boştur ve süreç sona erer. İzole edilmiş nokta sayısı birdir. Bundan dolayı graf bağlantılıdır.