MATEMATIK 1

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2020

Örnek 9.1.5.3. $\int cos^2(x)sin^2(x)dx$ integralini hesaplayınız.

Verilen integralde,

$$cos^2(x) = \frac{1+cos(2x)}{2} \text{ ve } sin^2(x) = \frac{1-cos(2x)}{2}$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$\int cos^2(x)sin^2(x)dx = \int \left(\frac{1+cos(2x)}{2}\right)\left(\frac{1-cos(2x)}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int(1+cos(2x))\,(1-cos(2x))dx = \frac{1}{4}\int\big(1-cos^2(2x)\big)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int cos^2(2x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\int\left(\frac{1+cos(4x)}{2}\right)dx$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{1}{8}\int(1+cos(4x))\,dx = \frac{x}{4} - \frac{x}{8} - \frac{sin(4x)}{32} + c$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{sin(4x)}{32} + c$$

elde edilir.

Uyarı 9.1.5.1. Trigonometrik integrallerde sık tercih edilen metotlardan biri de $u = tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$, $cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ ve $dx = \frac{2du}{1+u^2}$ değişken değiştirme metodudur.

Örnek 9.1.5.4. $\int \frac{dx}{cosx}$ integralini hesaplayınız.

$$\int \frac{dx}{cosx} = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int \frac{1+u^2}{1-u^2}\frac{2du}{1+u^2} = \int \frac{2du}{1-u^2} = \int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right) du$$

$$= -\,ln|1-u| + ln|1+u| + c$$

$$= ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + c = ln\left|\frac{1+tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right| + c$$

elde edilir.

Örnek 9.1.5.5.** $\int \frac{dx}{\sin x}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left\{ u = tg\left(\frac{x}{2}\right),\ \sin x = \frac{2u}{1+u^2},\ dx = \frac{2du}{1+u^2} \right\} =$$

$$= \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}} = \int \frac{du}{u} = \ln(u) + c = \ln\left(tg\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c$$

Şimdi de aynı örneği farklı bir yaklaşımla çözelim.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)} dx$$

$$= \int \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)} dx + \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)} dx$$

$$= \int \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} d\left(\frac{x}{2}\right) + \int \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} d\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \sin\left(\frac{x}{2}\right) = u, \ \cos\left(\frac{x}{2}\right) d\left(\frac{x}{2}\right) = du \\ \cos\left(\frac{x}{2}\right) = v, \ -\sin\left(\frac{x}{2}\right) d\left(\frac{x}{2}\right) = dv \end{array} \right\}$$

$$= \int \frac{du}{u} - \int \frac{dv}{v} = \ln(u) - \ln(v) + c$$

$$= \ln\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c = \ln\left(tg\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c$$

Örnek 9.1.5.4 deki $\int \frac{dx}{\cos x}$ integralini **Örnek 9.1.5.5.** den yararlanarak çözünüz.**

$\int \frac{dx}{\cos x}$ integralinde $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ olduğu göz önüne alınarak Örnek **9.1.5.5.**** örneğine dönüştürmek mümkündür.

Örnek 9.1.5.5. $\int \frac{dx}{1+sinx+cosx}$ integralini hesaplayınız.

$$\int \frac{dx}{1+sinx+cosx} = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{2(1+u)}{1+u^2}}$$

$$= \int \frac{du}{1+u} = ln|1+u| + c = ln\left|1+tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c$$ elde edilir.

Örnek 9.1.5.6. $\int \frac{dx}{3-5sinx}$ integralini hesaplayınız.

$$\int \frac{dx}{3-5sinx} = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{3-5\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)}$$

$$= \int \frac{2du}{3(1+u^2)-5.2u} = \int \frac{2du}{3u^2-10u+3}$$

$$= \int \frac{2du}{(3u-1)(u-3)} = \int \left(\frac{-\frac{3}{4}}{3u-1} + \frac{\frac{1}{4}}{u-3}\right) du$$

$$= -\frac{3}{4} ln|3u-1| + \frac{1}{4} ln|u-3| + c$$

$$= \frac{1}{4} ln\left|\frac{u-3}{(3u-1)^3}\right| + c = \frac{1}{4} ln\left|\frac{tan\left(\frac{x}{2}\right)-3}{\left(3\,tan\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)^3}\right| + c$$ elde edilir.

2. Belirli İntegral

$y = f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı ve integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in (a, b)$ için $F'(x) = f(x)$ olacak şekilde sürekli $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa belirli integral

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

şeklinde tanımlanır.

Belirli İntegralin Bazı Özellikleri:

1. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \, , k \in \mathbb{R}$

2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \, , c \in (a, b)$

Örnek 9.2.1. $\int_2^3 x dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int_2^3 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_2^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{2^2}{2} = \frac{5}{4}$$

dür.

Örnek 9.2.2. $\int_1^4 (x+11) dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int_1^4 (x+11) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 11x\right)\Big|_1^4 = \left(\frac{16}{2} + 44\right) - \left(\frac{1}{2} + 11\right) = \frac{81}{2}$$

dir.

Örnek 9.2.3. $\int_0^2 (3x-1) dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int_0^2 (3x-1) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - x\right)\Big|_0^2 = (\left(\frac{12}{2} - 2\right) - (0) = 4$$

dür.

Örnek 9.2.4. $\int_1^3 (x^2+1)dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int_1^3 (x^2+1)dx = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_1^3 = \left(\frac{27}{3}+3\right) - \left(\frac{1}{3}+1\right)$$

$$= \left(\frac{26}{3}+2\right) = \frac{32}{3} \quad \text{dür.}$$

Örnek 9.2.5. $\int_1^3 (e^x)dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int_1^3 e^x dx = e^x \Big|_1^3 = (e^3 - e^1) \quad \text{dir.}$$

Örnek 9.2.6. $\int_0^{\pi/2} cosxdx$ integralini hesaplayınız.

$$\int_0^{\pi/2} cosxdx = sinx \Big|_0^{\pi/2} = sin\frac{\pi}{2} - sin0 = 1 \quad \text{dir.}$$

Örnek 9.2.7. $\int_0^2 (x^2-4)dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int_0^2 (x^2-4)dx = \left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\Big|_0^2 = \left(\frac{8}{3}-8\right) - (0) = -\frac{16}{3} \quad \text{dür.}$$

Örnek 9.2.8. $\int_1^e lnxdx$ integralini hesaplayınız.

$$\int_1^e lnxdx = (xlnx - x)\Big|_1^e = (elne - e) - (1.ln1 - 1)$$

$$= (e - e) - (0 - 1) = 1$$

Örnek 9.2.9. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ integralini hesaplayınız.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctanx\Big|_0^1 = arctan1 - arctan0 = \frac{\pi}{4}$$

Örnek 9.2.10. $\int_1^2 \frac{1}{25-x^2}dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int_1^2 \frac{1}{25-x^2}dx = \int_1^2 \frac{1}{5^2-x^2}dx = \frac{1}{10}\left(ln\left(\frac{7}{3}\right) - ln\left(\frac{6}{4}\right)\right)$$

Örnek 9.2.11. $\int_{-1}^{2} |x|dx$ integralini hesaplayınız.

$$-1 \leq x < 0 \text{ için } |x| = -x$$

ve

$$0 \leq x \leq 2 \text{ için } |x| = x$$

olduğundan

$$\int_{-1}^{2}|x|dx = \int_{-1}^{0}(-x)dx + \int_{0}^{2} xdx = -\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{2}$$

$$= -\left(0 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{4}{2} - 0\right) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Örnek 9.2.12. $\int_{-3}^{5} sgn(x)dx$ integralini hesaplayınız.

$$-3 \leq x < 0 \text{ için } sgn(x) = -1$$

ve

$$0 < x \leq 5 \text{ için } sgn(x) = 1$$

olduğundan

$$\int_{-3}^{5} sgn(x)dx = \int_{-3}^{0} sgn(x)dx + \int_{0}^{5} sgn(x)dx$$

$$= \int_{-3}^{0} (-1).\, dx + \int_{0}^{5} 1.\, dx = -\,x\Big|_{-3}^{0} + x\Big|_{0}^{5}$$

$$= -\big(0-(-3)\big) + (5-0) = 2$$

Örnek

$$\int_0^{a/2} \sqrt{\frac{x}{a-x}}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{a\sin^2 t}}{\sqrt{a-a\sin^2 t}} \cdot 2a\sin t.\cos t\,dt = \int_0^{\pi/4} 2a.\sin^2 t\,dt \qquad [x = a\sin^2 t]$$

$$= 2a\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = a\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) = a\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4}(\pi - 2)$$

Örnek

$$\int_\pi^{5\pi/4} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x}\,dx = \int_\pi^{5\pi/4} \frac{\sin 2x}{(1-\sin^2 x)^2 + (\sin^2 x)^2}\,dx = \int_0^{1/2} \frac{du}{(1-u)^2 + u^2} \qquad [\sin^2 x = u]$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{du}{1-2u+u^2+u^2} = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{du}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{1}{2}}\arctan\left(\frac{u-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \arctan(2u-1)\Big|_0^{1/2} = \arctan 0 - \arctan(-1) = 0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Örnek

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}} = \int_1^3 \frac{u\,du}{1+u} = \int_1^3 \frac{u+1-1}{u+1}\,du = \int_1^3 \left(1-\frac{1}{1+u}\right)du \qquad [2x+1=u^2]$$

$$= u - \ln|1+u|\Big|_1^3 = 3 - \ln 4 - 1 + \ln 2 = 2 + \ln\frac{1}{2} = 2 - \ln 2$$

Örnek

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} a^2\sin^2 t\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t\,dt = \frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2}(2\sin t\cos t)^2\,dt \qquad [x = a\sin t]$$

$$= \frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2}(\sin 2t)^2\,dt = \frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4t}{2}\,dt = \frac{a^4}{4}\left(\frac{t}{2}-\frac{\sin 4t}{8}\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{a^4}{4}\left(\frac{\pi}{4}-0\right) = \frac{\pi}{16}a^4$$

Örnek

r) $$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int_0^{\pi/6} \frac{4\sin^2 t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} \cdot 2\cos t\, dt = 4\int_0^{\pi/6} \sin^2 t dt \qquad [x = 2\sin t]$$

$$= 4\int_0^{\pi/6} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = 2\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\pi/6}\right) = 2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

s) $$\int \frac{dx}{3+2\cos x} = 2\int \frac{1/(1+t^2)}{3+\frac{2-2t^2}{1+t^2}} dt = 2\int \frac{1}{5+t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{5}} \arctan\frac{t}{\sqrt{5}} \qquad \left[\tan\frac{x}{2} = t\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{5}}\right)$$ olur. Buradan $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$ elde edilir.

Örnek

v) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{2+\pi}{4}$

v) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$ integralinde $u = \dfrac{1}{1+x^2}$, $dv = dx$ alınıp kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2} + 2\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = 1 + 2\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$$

$$= 1 + 2\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)}dx - 2\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)^2}dx \Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)}dx$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\arctan x \,\Big|_{-1}^{1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\arctan 1 - \arctan(-1)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{2+\pi}{4}$$

Belirli İntegral ile Alan Hesabı

$y = f(x)$ fonksiyonu, $x = a$, $x = b$ doğruları ve x ekseni ile sınırlanan kapalı bölgenin alanı

$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

integrali ile hesaplanır. Mutlak değerin tanımından alan

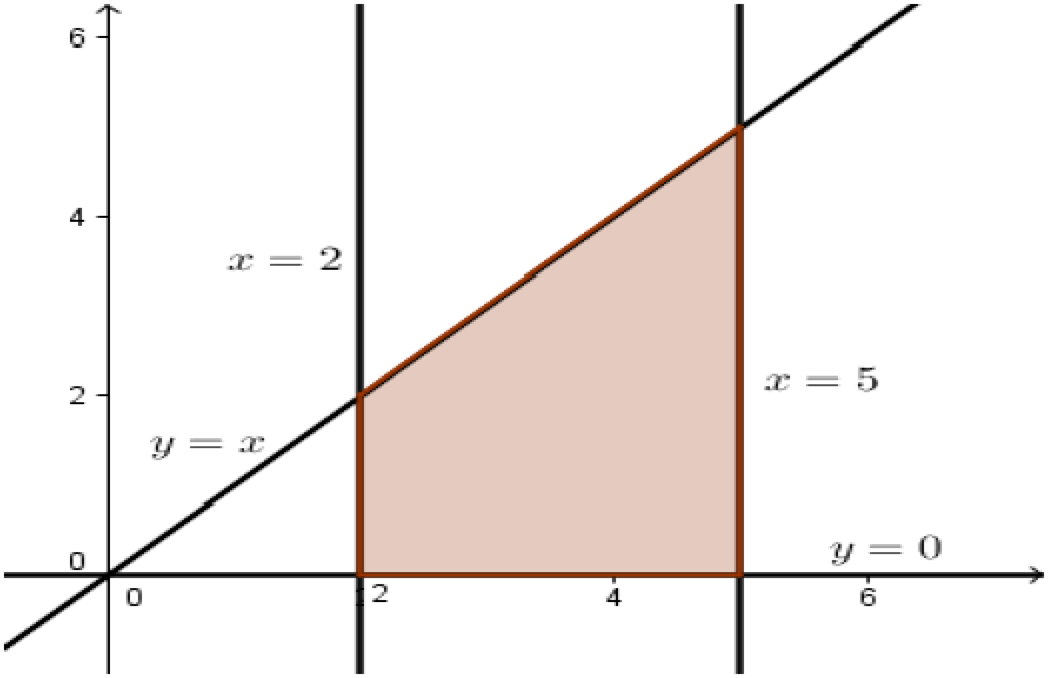
$$f(x) \geq 0 \text{ ise } A = \int_a^b f(x)dx$$

ve

$$f(x) \leq 0 \text{ ise } A = -\int_a^b f(x)dx$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 9.2.1.1. $y = x$ fonksiyonu, $x = 2$, $x = 5$ doğruları ve x ekseni ile sınırlanan kapalı bölgenin alanını bulunuz.

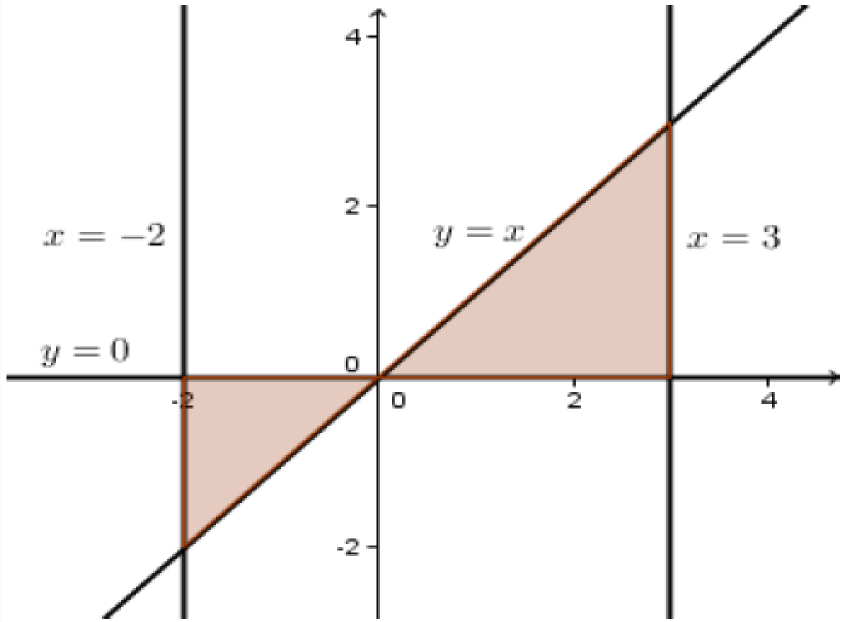


Şekil 9.2.1.1.

$2 \leq x \leq 5$ için $|x| = x$ olduğundan

$$\int_2^5 |x|dx = \int_2^5 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_2^5 = \left(\frac{25}{2} - 2\right) = \frac{21}{2} br^2$$

Örnek 9.2.1.2. $y = x$ fonksiyonu, $x = -2$, $x = 3$ doğruları ve x ekseni ile sınırlanan kapalı bölgenin alanını bulunuz.



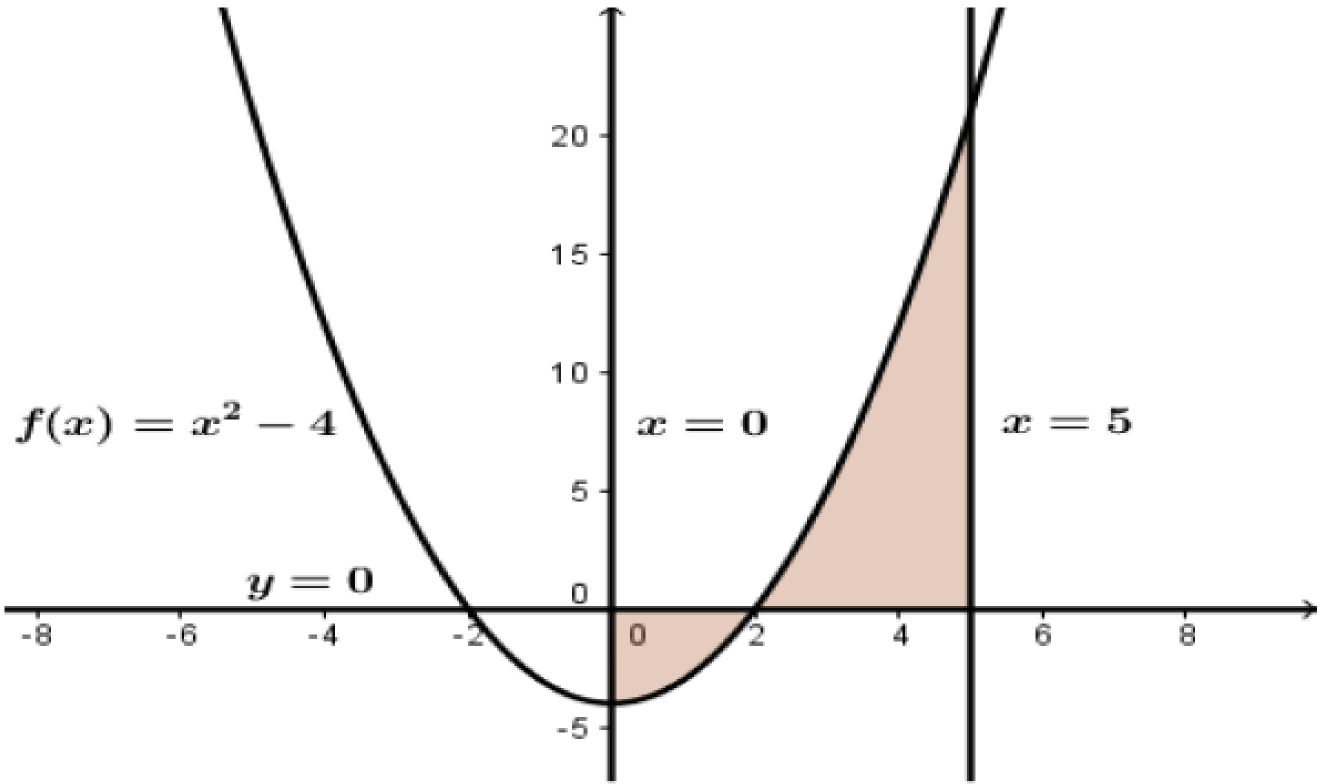
Şekil 9.2.1.2.

$-2 \leq x < 0$ için $|x| = -x$ ve $0 \leq x \leq 3$ için $|x| = x$ olduğundan

$$\int_{-2}^{3} |x| dx = \int_{-2}^{0} (-x) dx + \int_{0}^{3} x dx$$

$$= -\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{3} = -(0-2) + \left(\frac{9}{2} - 0\right) = \frac{13}{2} br^2$$ dir.

Örnek 9.2.1.3. $y = x^2 - 4$ fonksiyonu ve $x = 0$, $x = 5$ doğruları ve x ekseni ile sınırlanan kapalı bölgenin alanını bulunuz.



Şekil 9.2.1.3.

$0 \leq x \leq 2$ için $(x^2 - 4) \leq 0$ ve $2 \leq x \leq 5$ için $(x^2 - 4) \geq 0$ olduğundan

$$\int_0^5 |x^2 - 4\,|dx = \int_0^2 -(x^2 - 4\,)dx + \int_2^5 (x^2 - 4\,)dx$$

$$= -\int_0^2 (x^2 - 4\,)dx + \int_2^5 (x^2 - 4\,)dx$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)\Big|_2^5$$

$$= -\left(\left(\frac{8}{3} - 8\right) - (0)\right) + \left(\left(\frac{125}{3} - 20\right) - \left(\frac{8}{3} - 8\right)\right)$$

$$= \frac{16}{3} + \frac{65}{3} + \frac{16}{3} = \frac{97}{3}\,br^2$$

dir.

1. **Aşağıda denklemleri verilen eğriler ile Ox–ekseni tarafında sınırlanan düzlemsel bölgelerin alanını bulunuz.**

a) $y = 2 + x - x^2$ **b)** $y = 4x - x^2$ **c)** $y = x(x-1)(x-2)$

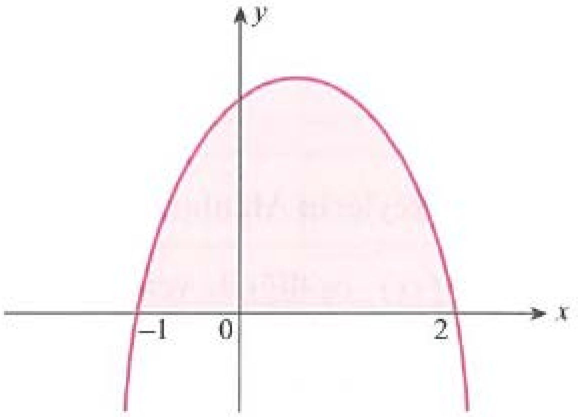
Çözüm

a) $y = 2 + x - x^2$

$y = 0 \Leftrightarrow x = -1$ veya $x = 2$

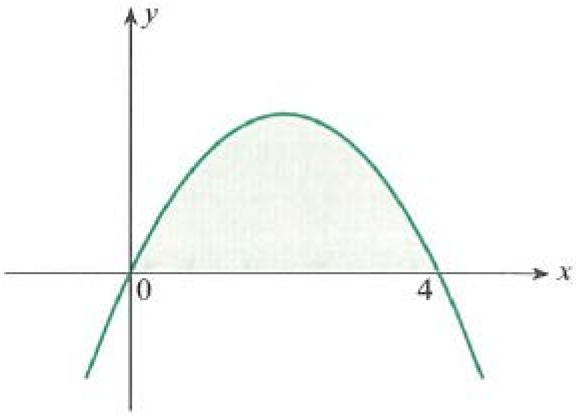
$$A = \int_{-1}^{2} |f(x)|dx = \int_{-1}^{2} |2 + x - x^2|dx = \int_{-1}^{2} (2 + x - x^2)dx$$

$$= 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$



b) $y = 4x - x^2$

$$A = \int_0^4 |f(x)|\,dx = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx = 2x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = \frac{32}{3}$$



c) $y = x(x-1)(x-2)$

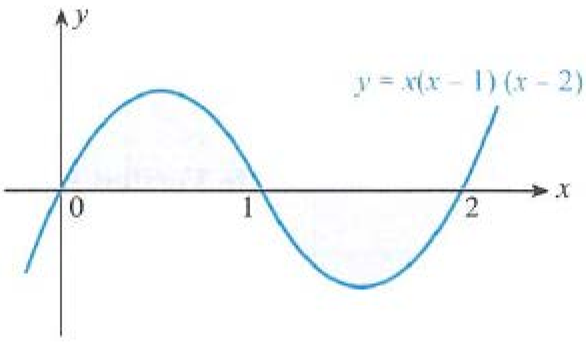
$y = 0 \iff x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$

$$A = \int_0^2 |x(x-1)(x-2)|\,dx$$

$$= \int_0^1 x(x-1)(x-2)\,dx + \int_1^2 -x(x-1)(x-2)\,dx$$

$$= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx$$

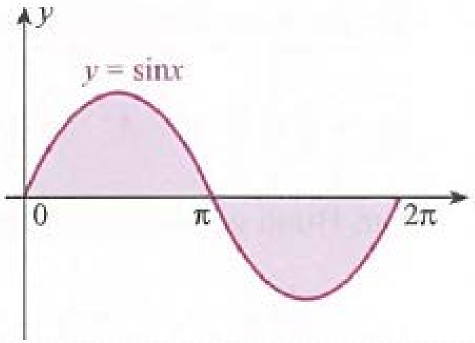
$$= \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right)\Big|_0^1 - \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}$$



2. $y = \sin x$ eğrisi $x = 0$ ve $x = 2\pi$ doğruları ile x–ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

Çözüm

$$A = \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x\,dx = -\cos x\,\Big|_0^{\pi} + \cos x\,\Big|_{\pi}^{2\pi} = 4$$



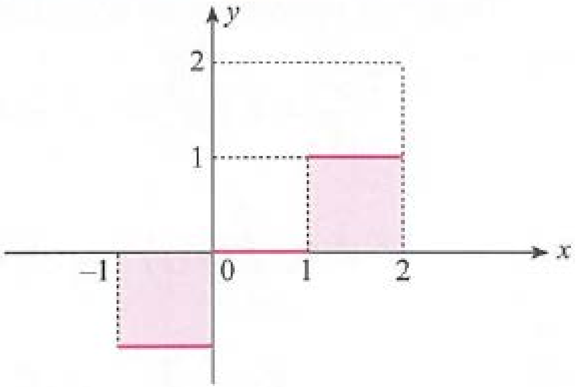
NOT: *Her iki alan eşit olduğundan biri bulunup 2 katı alınabilir.*

3. $y = [\![x]\!]$, $x = -1$, $x = 2$ ve x–ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanının hesaplayınız.

Çözüm

$$A = \int_{-1}^{2} |f(x)|\,dx = \int_{-1}^{2} |[\![x]\!]|\,dx = -\int_{-1}^{0} [\![x]\!]\,dx + \int_{0}^{1} [\![x]\!]\,dx + \int_{1}^{2} [\![x]\!]\,dx$$

$$= -\int_{-1}^{0} (-1)\,dx + \int_{0}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{2} dx = 1 + 1 = 2$$



4. **Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin alanlarını hesaplayınız.**

a) $y = \frac{x^2}{4}$, $y = \frac{x}{2} + 2$

b) $y^2 = 2x$, $x - y = 4$

c) $x = y^3 - 4y$, $x = 4 - y^2$

d) $y = x^3 - 12x$, $y = x^2$

e) $y = x^3$, $y = x^2$

f) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $y = x$

g) $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$, $x = 0$

h) $y = x^2$, $y = x - 1$, $y = \frac{1}{9}$, $y = 0$

ı) $y = \cos x$, $y = x + 1$, $y = 0$

i) $y^2 = 2x$, $x^2 = 2y$

j) $y = x^4 - 2x^2$, $y = 2x^2$

k) $y = |x|$, $y = x^2 - 2$

a) $y=\frac{x^2}{4}$, $y=\frac{x}{2}+2$

Çözüm

a) $y=\frac{x^2}{4}$, $y=\frac{x}{2}+2$

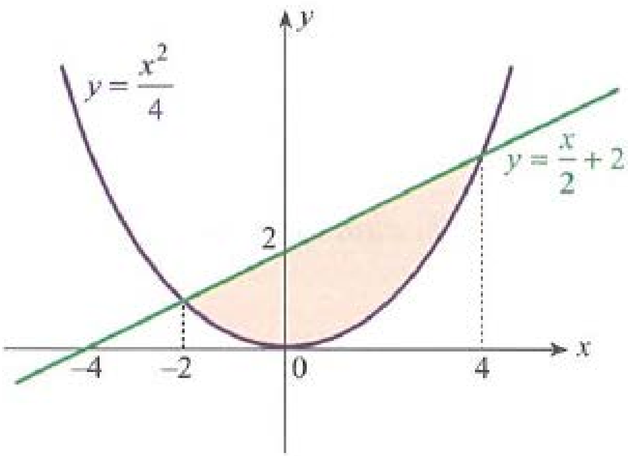
Eğri ile doğrunun kesim noktalarının apsisleri

$$\frac{x^2}{4}=\frac{x}{2}+2 \Rightarrow x^2-2x-8=0 \Rightarrow x_1=-2, \quad x_2=4$$

olur. Buna göre istenen alan

$$A=\int_{-2}^{4}\left(\frac{x}{2}+2-\frac{x^2}{4}\right)dx=\left(\frac{x^2}{4}+2x-\frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_{-2}^{4}=9$$

birimkare olur.



b) $y^2 = 2x,\ x - y = 4$

b) $y^2 = 2x,\ x - y = 4$

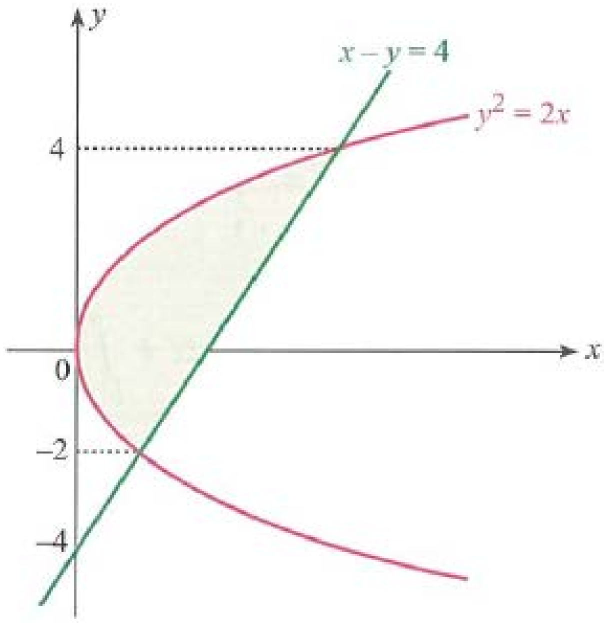
Doğruyla eğrinin kesim noktalarının ordinatları

$$\frac{y^2}{2} = 4 + y \Rightarrow y^2 - 2y - 8 = 0 \Rightarrow y = 4 \quad \text{ve} \quad y = -2$$

$$A = \int_{-2}^{4} |u(y) - v(y)|\, dy = \int_{-2}^{4} \left(y + 4 - \frac{y^2}{2} \right) dy$$

$$= \left(\frac{y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{6} \right) \Bigg|_{-2}^{4} = 18$$

birimkare bulunur.



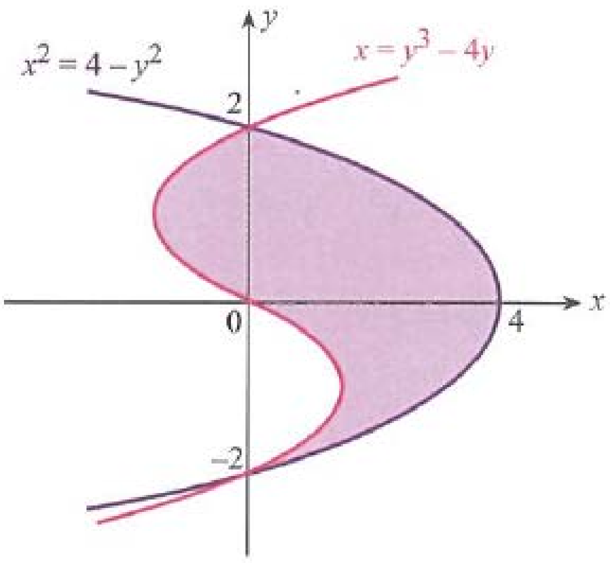
c) $x = y^3 - 4y$, $x = 4 - y^2$

c) $x = y^3 - 4y, \quad x = 4 - y^2$

$$A = \int_{-2}^{2} [4 - y^2 - (y^3 - 4y)]\,dy = \int_{-2}^{2} (4 + 4y - y^2 - y^3)\,dy$$

$$= \left(4y + 2y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4\right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$$

birimkare olur.



d) $y = x^3 - 12x$, $y = x^2$

d) $y = x^3 - 12x, \quad y = x^2$

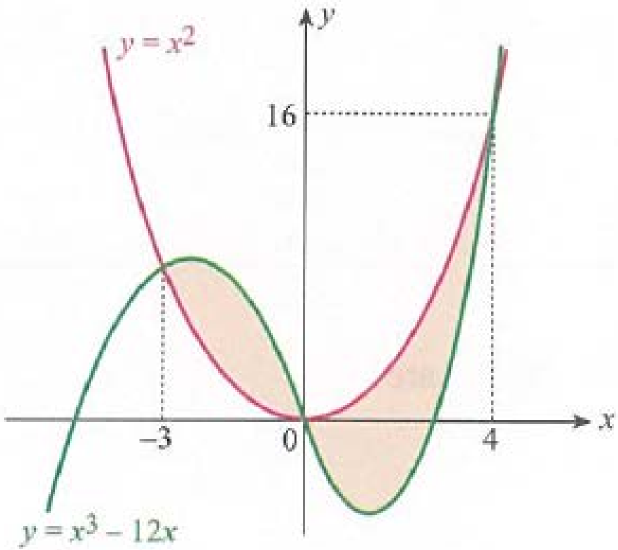
Eğrilerin kesim noktalarının apsisleri

$x^3 - 12x = x^2 \;\Rightarrow\; x^3 - x^2 - 12x = 0 \;\Rightarrow$

$x(x+3)(x-4) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -3,\; x_2 = 0,\; x_3 = 4$ olur.

$$A = \int_{-3}^{0} (x^3 - 12x - x^2)\,dx + \int_{0}^{4} [x^2 - (x^3 - 12x)]\,dx$$

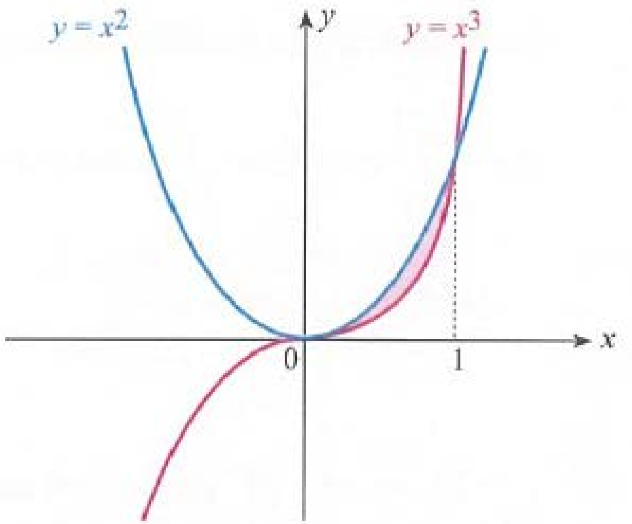
$$= \left(\frac{x^4}{4} - 6x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{0} + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + 6x^2\right)\Bigg|_{0}^{4} = \frac{99}{4} + \frac{160}{3} = \frac{937}{12}$$



e) $y = x^3$, $y = x^2$ **f)** $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $y = x$

e) $y = x^3, \quad y = x^2$

$$A = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx = \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{12}$$



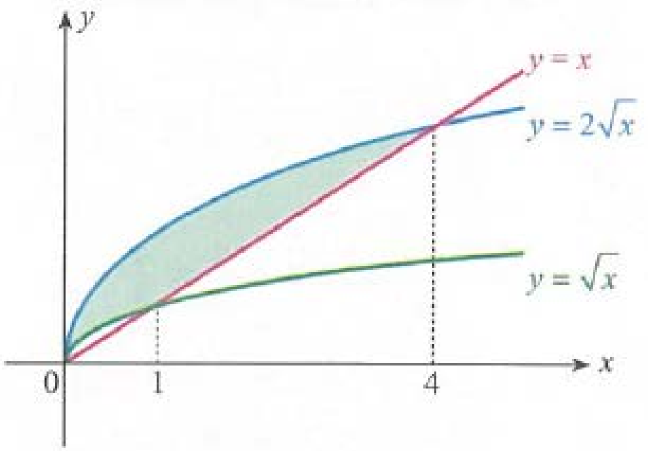
f) $y = \sqrt{x}, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad y = x$

$x = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; x^2 = x \;\Rightarrow\; x = 0$ ve $x = 1$

$x = 2\sqrt{x} \;\Rightarrow\; x^2 = 4x \;\Rightarrow\; x = 0$ ve $x = 4$

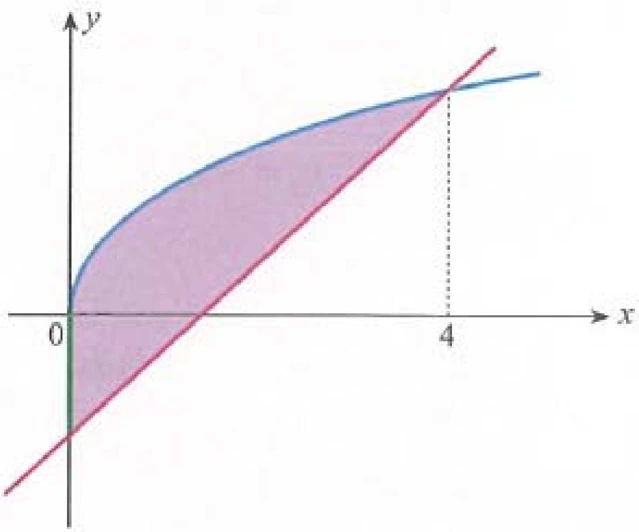
$$A = \int_0^1 (2\sqrt{x} - \sqrt{x})\,dx + \int_1^4 (2\sqrt{x} - x)\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1 + \left(\frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{5}{2}$$



g) $y=\sqrt{x}\,,\ y=x-2\,,\ x=0$ **h)** $y=x^2\,,\ y=x-1\,,\ y=\frac{1}{9}\,,\ y=0$

g) $y=\sqrt{x},\quad y=x-2,\quad x=0$



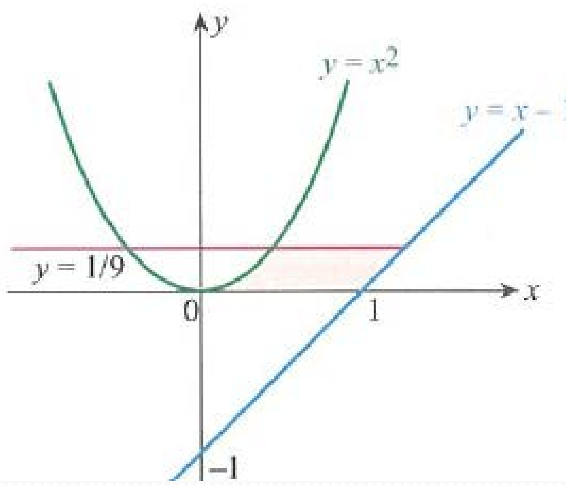
$y=\sqrt{x}$ eğrisiyle $y=x-2$ doğrusunun kesim noktasının apsisi

$\sqrt{x}=x-2 \;\Rightarrow\; x=4$ olur. Buna göre, mor bölgenin alanı

$$A=\int_0^4(\sqrt{x}-x+2)\,dx=\left(\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_0^4=\frac{16}{3}$$

birimkaredir.

h) $y=x^2,\ \ y=x-1,\ \ y=\frac{1}{9}$ ve $y=0$



Turuncu bölgenin alanı

$$A=\int_0^{1/9}\left(y+1-\sqrt{y}\right)dy=\frac{1}{2}y^2+y-\frac{2}{3}y^{3/2}\Bigg|_0^{1/9}=\frac{5}{54}$$

birimkaredir.

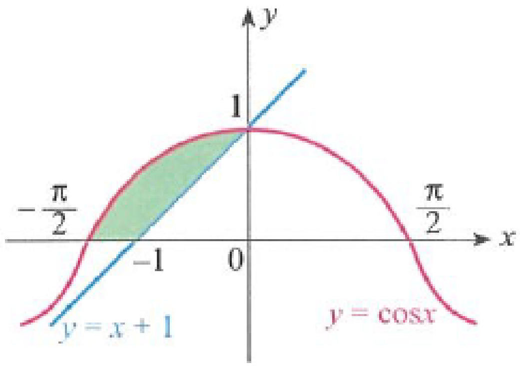
ı) $y=\cos x$, $y=x+1$, $y=0$ i) $y^2=2x$, $x^2=2y$

l) $y=\cos x,\ y=x+1,\ y=0$

Sözkonusu bölge yandaki şekilde yeşil renkte gösterilmiştir.

$$A=\int_{-\pi/2}^{-1}\cos x\,dx+\int_{-1}^{0}(\cos x-x-1)\,dx=\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{-1}+\left(\sin x-\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_{-1}^{0}$$

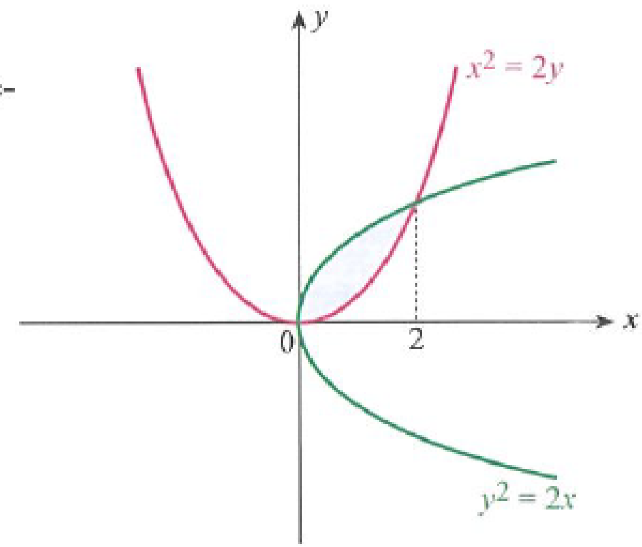
$$=-\sin 1+1+\sin 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$



i) $y^2=2x$ ve $x^2=2y$ parabolleri tarafından sınırlanan bölge yandaki şekilde mavi renkte gösterilmiştir.

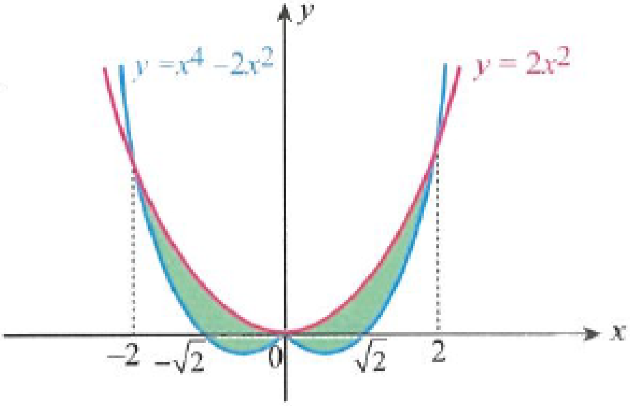
$$A=\int_0^2\left(\sqrt{2x}-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2}-\frac{1}{6}x^3\right)\Big|_0^2$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot 2\sqrt{2}-\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$$



j) $y = x^4 - 2x^2, \quad y = 2x^2$

j) $y = x^4 - 2x^2$ ile $y = 2x^2$ eğrileri tarafından sınırlanan bölge yandaki şekilde yeşil renkte gösterilmiştir.



$$x^4 - 2x^2 = 2x^2 \;\Rightarrow\; x^2(x^2-4) = 0 \;\Rightarrow$$

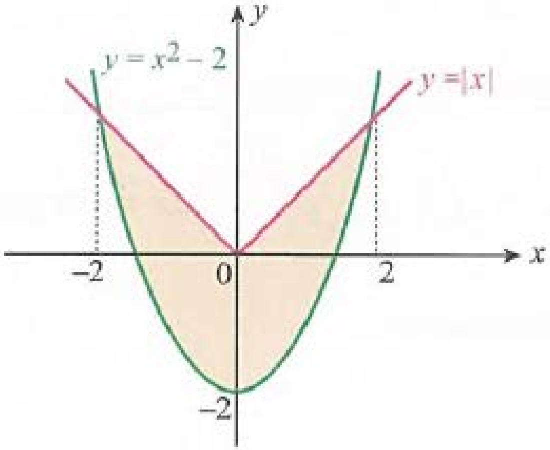
$$x_1 = x_2 = 0,\; x_3 = -2,\; x_4 = 2$$

$$A = 2\int_0^2 (2x^2 - x^4 + 2x^2)\,dx = 2\int_0^2 (4x^2 - x^4)\,dx = 2\left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{128}{15}$$

birimkaredir.

k) $y = |x|$, $y = x^2 - 2$

k) $y = |x|$ ve $y = x^2 - 2$ eğrileri tarafından sınırlanan bölge turuncu renkte gösterilmiştir.



$$x = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$-x = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

Bölge simetrik olduğundan, alanı

$$A = 2\int_0^2 [|x| - (x^2 - 2)]\,dx = 2\int_0^2 (x - x^2 + 2)\,dx$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 2x\right)\Big|_0^2 = \frac{20}{3}$$

birimkaredir.

Kaynaklar:

1. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus I**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.
2. Prof. Dr. C. Çinar, Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, Prof. Dr. A. S. Kurbanlı, Prof. Dr. D. Şimşek, **Genel Matematik**, Dizgi Ofset, 2013.
3. Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, **Analiz III Diziler ve Seriler,** Dizgi Ofset, 2017.
4. H. İ. Karakaş, **Matematiğin Temelleri, Sayı Sistemleri ve Cebirsel Yapılar,** ODTÜ yayınları, 2011.