MATEMATIK 1

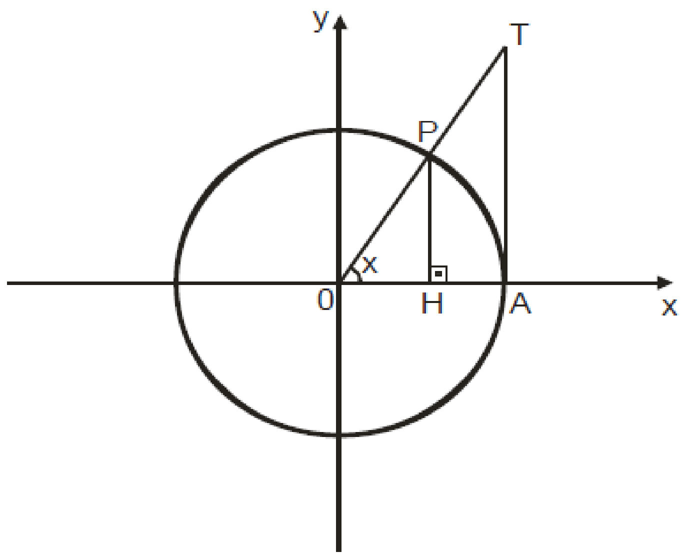
Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2020

Örnek 6.5.4.4. $\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm.



Şekil 6.5.4.1.

Yukarıdaki birim çemberde $s(P\hat{O}A) = x$ radyan ise PA yayının uzunluğunun ölçüsü x birim olur. Ayrıca $|PH| = \sin x$ ve

$|TA| = \tan x$ tir. $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ için

$$|PH| < |\overset{\frown}{PA}| < |TA|$$

$$\Rightarrow \sin x < x < \tan x$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0}(1) > \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} > \lim_{x \to 0} \cos x$$

$$\Rightarrow 1 > \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} > 1$$

olduğundan

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

dir. Buradan $a\in\mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan ax}{x}\right)=a \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{ax}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{ax}\right)=\frac{1}{a}$$

olduğu görülür.

Örnek 6.5.4.5. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{3x}\right)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{3x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin 2x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sin 2x}{2x}\right)=\frac{2}{3}$ dür.

Örnek 6.5.4.6. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan 4x}{\tan 5x}\right)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan 4x}{\tan 5x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\dfrac{\tan 4x}{x}}{\dfrac{\tan 5x}{x}}\right)=\dfrac{4}{5}$ dir.

Örnek 6.5.4.7. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin^2 5x}{4x^2}\right)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin^2 5x}{4x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 5x}{2x}\right)^2=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$ dür.

Uyarı 6.5.4.2. $a,b\in\mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{\sin bx}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan ax}{\tan bx}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{\tan bx}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan ax}{\sin bx}\right)=\frac{a}{b}$$

dir.

6.6. Süreklilik

$A \subset \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ noktası A kümesinin bir yığılma noktası, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ ise f fonksiyonu $x = a$ noktasında süreklidir denir. Aksi takdirde f fonksiyonu $x = a$ noktasında süreksizdir. Eğer f fonksiyonu A kümesinin bütün elemanlarında sürekli ise fonksiyonu A kümesinde süreklidir denir.

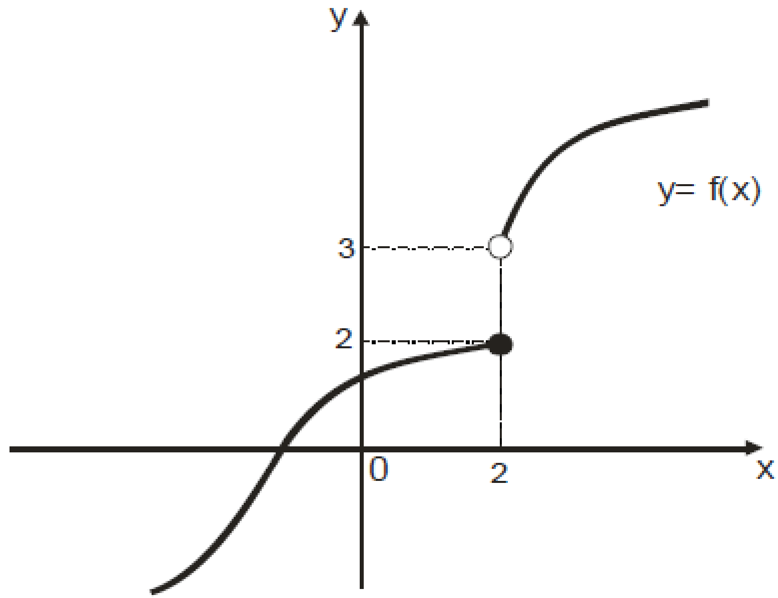
Bir f fonksiyonunun $x = a$ noktasında sürekli olması için,

(1) f fonksiyonu $x = a$ noktasında tanımlı olmalıdır,

(2) f fonksiyonunun $x = a$ noktasında limiti olmalıdır,

(3) f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki limiti, $x = a$ noktasındaki görüntüsüne eşit olmalıdır.

Örnek 6.6.1.

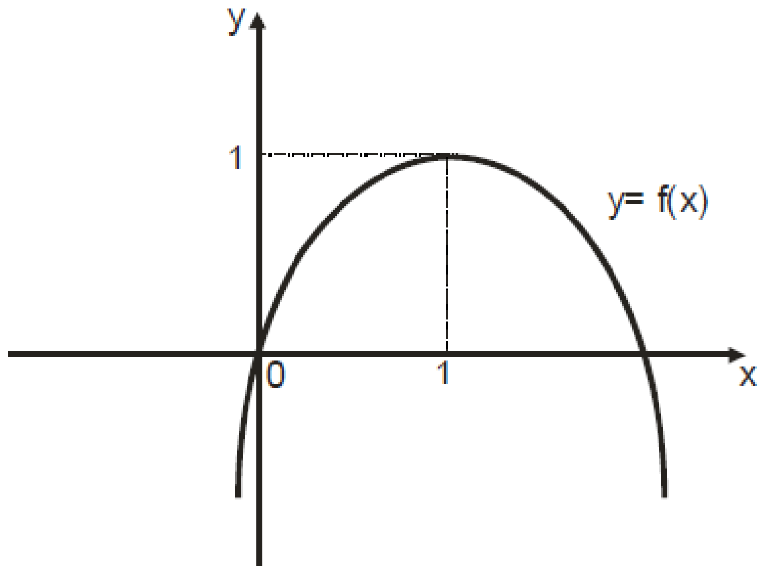


Şekil 6.6.1.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3 \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 2 \quad \text{olup} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

olduğundan f fonksiyonunun $x = 2$ noktasında limiti yoktur. Dolayısıyla bu noktada süreksizdir.

Örnek 6.6.2.



Şekil 6.6.2.

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$ olduğundan $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$ dir. Ayrıca $f(1) = 1$ olup $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1$ olduğundan fonksiyonu $x = 1$ noktasında süreklidir.

Örnek 6.6.3. $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<2 \\ 4, & x=2 \\ x+2, & x>2 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=2$ noktasında sürekli olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x+2) = 2+2 = 4$$

ve

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 2^2 = 4$$

olup $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ dür. Ayrıca, $f(2)=4$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonu $x=2$ noktasında süreklidir.

Uyarı 6.6.1. Polinom fonksiyonlar her noktada, rasyonel fonksiyonlar ise paydayı sıfır yapan değerler hariç her noktada süreklidir.

Örnek 6.6.4. $f:\mathbb{R}-\{-2,2\}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ fonksiyonu $x=-2$ ve $x=2$ noktalarında tanımlı olmadığından bu noktalarda sürekli değildir.

Uyarı 6.6.2. Mutlak değer fonksiyonunun kritik noktalarındaki limiti sıfır olduğu için bu noktalarda süreklidir. İşaret ve tam değer fonksiyonlarının kritik noktalarında genellikle limitleri olmadığı için bu noktalarda genellikle süreksizdirler. Ancak istisna durumlarda olabilir.

Örnek 6.6.5. $f(x) = |x-1| + \operatorname{sgn}\left(x^2 - 3x + 2\right) + x^2$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaları bulunuz.

Çözüm. İşaret fonksiyonu kritik noktalarında süreksiz olduğundan,

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \; x = 1 \text{ ve } x = 2$$

noktalarında $f(x)$ fonksiyonu süreksizdir.

6.6.1. Sağdan ve Soldan Süreklilik

Tanım 6.6.1.1. $A \subset \mathbb{R}$ ve $a \in A$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ ise f fonksiyonuna $x = a$ noktasında sağdan süreklidir denir. Benzer şekilde, $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$ ise f fonksiyonuna $x = a$ noktasında soldan süreklidir denir.

Buna göre, bir fonksiyonun herhangi bir noktada sürekli olması için gerek ve yeter şart bu noktada hem sağdan hem de soldan sürekli olmasıdır.

6.6.2. Süreksizlikle İlgili Bazı Tanımlar

Tanım 6.6.2.1. Bir f fonksiyonunun $x = a$ noktasında limiti var fakat bu limit değeri f fonksiyonunun bu noktadaki değerinden farklı ise bu durumdaki süreksizliğe kaldırılabilir süreksizlik denir.

Örnek 6.6.2.1. $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & x < 1 \text{ ise} \\ 2 & x = 1 \text{ ise} \\ 2x + 1 & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonunun, $x = 1$ noktasındaki süreklilik durumunu inceleyiniz.

Çözüm.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x + 1) = 2.1 + 1 = 3$$

ve

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^3+2) = 1^3+2 = 3$$

olup, $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$ ve $f(1) = 2$ dir. $\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$ olduğundan, $f(x)$ fonksiyonu $x=1$ noktasında kaldırılabilir süreksizdir.

Bu süreksizlik çeşidine kaldırılabilir süreksizlik adı verilmesinin nedeni yeni bir fonksiyon tanımlanarak kolaylıkla süreksizliğin ortadan kaldırılabilmesidir. Örneğin yukarıda verilen fonksiyon kullanılarak $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon sürekli bir fonksiyondur.

Tanım 6.6.2.2. Bir f fonksiyonunun $x = a$ noktasında sağdan ve soldan limitleri var fakat farklı ise bu durumdaki süreksizliğe sıçrama süreksizliği denir. Burada sıçrama miktarı $d = \left| \lim_{x \to a^+} f(x) - \lim_{x \to a^-} f(x) \right|$ kadardır.

Örnek 6.6.2.2. $f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 3 \text{ ise} \\ 5 & x = 3 \text{ ise} \\ x+2 & x < 3 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonunun, $x = 3$ noktasındaki süreklilik durumunu inceleyiniz.

Çözüm.

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (x+1) = 3 + 1 = 4$$

ve

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(x+2) = 3+2 = 5$$

olup $\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$ olduğundan, $f(x)$ fonksiyonu $x=3$ noktasında sıçrama süreksizliğe sahiptir. ($d=1$ dir.)

Tanım 6.6.2.3. Bir f fonksiyonunun $x=a$ noktasında sağdan ve soldan limitlerinden en az biri $+\infty$ veya $-\infty$ veya mevcut değil ise bu durumda f fonksiyonu $x=a$ noktasında sonsuz süreksizliğe sahiptir denir.

Örnek 6.6.2.3. $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & x<1 \text{ ise} \\ 2 & x=1 \text{ ise} \\ \dfrac{1}{x-1} & x>1 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonunun, $x=1$ noktasındaki süreklilik durumunu inceleyiniz.

Çözüm.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=\infty$$

ve

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^2+2x)=1^2+2.1=3$$

olup, $f(x)$ fonksiyonu $x=1$ noktasında sonsuz süreksizliğe sahiptir.

Problemler

6.8.1. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(1) $\lim\limits_{x\to(-3)^-}\left(\dfrac{|x+3|}{x+2}+\operatorname{sgn}(-x-3)+x^2\right)$ **(2)** $\lim\limits_{x\to 2^-}\left([\![3-x]\!]+\operatorname{sgn}(x-2)\right)$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}$ **(4)** $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}$ **(5)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{[\![x]\!]}{x}$

(6) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{[\![x]\!]}{x}$ **(7)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}$ **(8)** $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{\sin(x^2-3)}{x-\sqrt{3}}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}$ **(10)** $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+2x+1)$ **(11)** $\lim\limits_{x\to 2}5$

(12) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{|x|}$ **(13)** $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{|x|}$ **(14)** $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{[\![3x+1-[\![x+2]\!]]\!]}{2x-1}$

6.8.2. $f(x)=\begin{cases} 3x-2, & x\geq 2 \text{ ise} \\ mx^2+4x, & x<2 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ de sürekli bir fonksiyon ise m 'nin değeri nedir?

6.8.3. $f:[-2,+2]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x)=[\![x]\!]+\operatorname{sgn}(-x^2+1)$ ile tanımlıdır. f fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaları bulunuz.

6.8.4. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-(m+3)x+m^2}$ ile tanımlıdır. f fonksiyonunun $\forall x\in\mathbb{R}$ için sürekli olması için m 'nin alabileceği değerler kümesi nedir?

Kaynaklar:

1. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus I**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.
2. Prof. Dr. C. Çinar, Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, Prof. Dr. A. S. Kurbanlı, Prof. Dr. D. Şimşek, **Genel Matematik**, Dizgi Ofset, 2013.
3. Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, **Analiz III Diziler ve Seriler,** Dizgi Ofset, 2017.
4. H. İ. Karakaş, **Matematiğin Temelleri, Sayı Sistemleri ve Cebirsel Yapılar,** ODTÜ yayınları, 2011.