MATEMATIK 1

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2020

SAYILAR VE BAZI TEMEL ÖZELLİKLERİ

- Sayılar Matematiğin temel taşlarından biridir ve insanlık tarihi kadar eski bir tarihe sahiptir. Bu bölümde sayıların, ileride ihtiyacımız olacak, bazı temel özelliklerini ele alacağız.

Doğal Sayılar:
Peano Aksiyomları:

- Aşağıdaki beş aksiyomu sağlayan, elemanlarına doğal sayılar denilen ve $\mathbb{N}$ sembolü ile gösterilen küme vardır.

Aksiyom 2.2.1. "1" Bir diye adlandırılan bir doğal sayı vardır.

Aksiyom 2.2.2. Her $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için n nin ardışığı diye adlandırılan n den farklı bir ve yalnız bir $n' \in \mathbb{N}$ vardır.

Aksiyom 2.2.3. Her $n \in \mathbb{N}$ için $n' \neq 1$ dir. Yani "1" hiçbir sayının ardışığı değildir.

Aksiyom 2.2.4. $n, m \in \mathbb{N}$ ve $n \neq m$ ise $n' \neq m'$ dir. Yani farklı doğal sayıların ardışıkları da farklıdır.

Aksiyom 2.2.5. $\mathbb{N}$ nin herhangi bir D alt kümesi için

(1) $1 \in D$

(2) $n \in D \Rightarrow n' \in D$

şartları sağlanıyorsa, $\mathbb{N} = D$ dir. (Bu aksiyom, Matematik İndüksiyon metodu veya Tümevarım metodu olarak bilinmektedir.)

Peano aksiyomlarından elde edilen küme $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ şeklindedir. Bu aksiyomlardan yararlanılarak, elde edilen doğal sayıları göstermek için kullandığımız 2, 3, 4, 5, 6, 7, … sembollerini

$$2=1',\ 3=2',4=3',5=4',6=5',7=6',\ \ldots$$

işleminden de elde etmek mümkündür.

Doğal sayılar kümesi toplama ve çarpma işlemine göre kapalıdır. Fakat çıkarma ve bölme işlemine göre kapalı değildir.

Tanım 2.2.5. 1 ve kendisinden başka çarpanı bulunmayan ve 1 den büyük olan her doğal sayıya asal sayı denir.

Tanım 2.2.6. $n \geq 2$ olmak üzere $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ler sıfırdan farklı doğal sayılar olmak üzere $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$ ise bu doğal sayılara aralarında asal sayılar denir. Ayrıca $i,j = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere $i \neq j$ indisleri için $(a_i, a_j) = 1$ ise $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sayılarına aralarında ikişer-ikişer asal denir.

Örnek 2.2.10. 5, 9 ve 10 sayıları $(5,9,10)=1$ olup aralarında asaldır. Fakat $(5,10)=5$ olduğundan aralarında ikişer-ikişer asal değildir.

Tanım 2.2.10. $P(n)$ doğal sayılarla ilgili bir önerme ve D de bu önermenin doğruluk değerlerinin kümesi olmak üzere

$$D=\{n\in N : P(n) \text{ doğru}\}$$

olsun. Eğer

(1) $1\in D$

ve

(2) $k\in D$ olduğunda $(k+1)\in D$ ise $D=\mathbb{N}$ dir. Yani önerme tüm doğal sayılar kümesinde doğrudur.

Tanımdan açıkça görülür ki $P(n)$ önermesinin doğal sayılar kümesinde doğru olduğunu ispatlamak için öncelikle $n=1$ için doğru olduğunu göstermeliyiz. Daha sonra $n=k$ için doğru olduğunu kabul edip $n=k+1$ için doğru olduğunu göstermemiz gereklidir.

Örnek 2.2.12. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n.(n+1)}{2} \qquad (2.2.1)$$

olduğunu tümevarım metodu ile gösteriniz.

Çözüm. $n=1$ için $1=\frac{1.(1+1)}{2}=\frac{2}{2}=1$ doğrudur. Yani $1 \in D$ dir.

$$n=k\in\mathbb{N} \text{ için } 1+2+3+\ldots+k=\frac{k.(k+1)}{2} \qquad (2.2.2)$$

olduğunu kabul edip $n=k+1\in\mathbb{N}$ için

$$1+2+3+\ldots+(k+1)=\frac{(k+1).(k+2)}{2} \qquad (2.2.3)$$

olduğunu gösterirsek önerme tüm doğal sayılar için geçerli olur.

(2.2.2) ifadesinin her iki tarafına $(k+1)$ eklersek eşitlik bozulmaz.

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{k.(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$=\frac{k.(k+1)}{2}+\frac{2.(k+1)}{2}=\frac{(k+1).(k+2)}{2}$$

olur ki önerme $n=k+1$ için doğrudur. Yani önerme tüm doğal sayılar için doğrudur.

Bazı önermeler tüm doğal sayılar için doğru olmayabilir. Fakat her $r \leq n \in \mathbb{N}$ doğal sayıları için doğru olabilir. O zaman Tanım 2.2.10 aşağıdaki gibi yeniden tanımlanabilir.

Tanım 2.2.11. $P(n)$ doğal sayılarla ilgili bir önerme ve $B=\{n\in\mathbb{N}:r\leq n\}$ de bu önermenin doğruluk değerlerinin kümesi olsun. Eğer

(1) $P(r)$ doğru

ve

(2) $r \leq k \in B$ için doğru olduğunda $r \leq (k + 1) \in B$ için doğru olduğunu gösterebilirsek önerme $r\leq k\in B\subset\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinde doğrudur.

Yani, $P(n)$ önermesinin doğru olması için öncelikle $n = r$ için doğru olduğunu göstermeliyiz. Eğer $n=k$ için doğru olduğunu kabul edip $n=k+1$ için doğru olduğunu gösterirsek, önerme $r\leq n\in\mathbb{N}$ doğal sayıları için doğru olur.

Örnek 2.2.13. Her $n \geq 2$ için $3^n + 4^n \leq 5^n$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $n = r = 2$ için $3^2 + 4^2 \leq 5^2 \Rightarrow 9 + 16 = 25 \Rightarrow 25 = 25$ olup önerme doğrudur. $n = k$ için doğru olduğunu kabul edelim. O zaman, $3^k + 4^k \leq 5^k$ dır. Eğer $n = k + 1$ için doğruluğunu gösterirsek önerme her $n \geq 2$ için doğru olur. Bu amaçla $3^k + 4^k \leq 5^k$ ifadesinin her iki tarafını 5 ile çarpalım.

$$5.3^k + 5.4^k \leq 5.5^k$$

$$3.3^k + 4.4^k < 5.3^k + 5.4^k \leq 5.5^k$$

$$3^{k+1} + 4^{k+1} \leq 5^{k+1}$$

elde edilir ki istenendir. Yani önerme her $n \geq 2$ için doğrudur.

2.15. Çözümlü Problemler

Örnek 2.15.1. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (2.15.1)$$

olduğunu Tümevarım Metodu ile gösteriniz.

Çözüm. $n = 1$ için $1^2 = \dfrac{1.(1+1).(2.1+1)}{6} = \dfrac{2.3}{6} = 1$ doğrudur.

Yani $1 \in D$ dir. $n = k \in \mathbb{N}$ için

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \qquad (2.15.2)$$

olduğunu kabul edip $n=k+1\in\mathbb{N}$ için

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \qquad (2.15.3)$$

olduğunu gösterirsek önerme tüm doğal sayılar için doğru olur.

(2.15.2) ifadesinin her iki tarafına $(k+1)^2$ eklersek eşitlik bozulmaz.

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

olur ki verilen eşitlik $n=k+1$ için de doğrudur. Yani önerme tüm doğal sayılar için doğrudur.

Uyarı 2.2.4. 0 sayısının da bulunmasıyla doğal sayılar kümesi insanoğlunun pek çok ihtiyacına cevap vermiştir. Ancak bazı kaynaklarda 0 sayısı doğal sayı olarak kabul edilmez. Matematikte hala sıfırın bir doğal sayı olarak ele alınıp alınmayacağı tartışma konusudur. Eğer cebirsel inşalar yapılmak isteniyorsa 0 sayısının doğal sayı olarak alınması avantaj sağlayabilir. Matematiğin diğer dallarında da problem hangi durumda daha kolay ifade edilebilecekse doğal sayılar kümesi de o şekilde alınır.

Tanım 1.1.14. Boş olmayan A ve B kümeleri için $A\times B$ kartezyen çarpımının her alt kümesine A dan B ye bir bağıntı denir ve bağıntılar genellikle β ile gösterilir.

2.3. Tam Sayılar

Tam sayıların tanımını vermeden önce $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$(x_1, x_2) B (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 + y_2 = y_1 + x_2$$

şeklinde tanımlanan B bağıntısını ele alalım.

Örnek 2.3.1. $(2,3)B(5,6)$ dir. Çünkü $2+6=5+3$ dir.

Teorem 2.3.1. $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$(x_1, x_2) B (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 + y_2 = y_1 + x_2$$

bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 2.3.1. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de B bağıntısına göre denklik sınıflarından her birine bir tamsayı denir. Tamsayılardan oluşan küme $\mathbb{Z}$ ile gösterilir.

Denklik sınıfının tanımından $x \in \mathbb{Z}$ ve $(x_1, x_2) \in x$ ise

$$x = [(x_1, x_2)]_B = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \ (x_1, x_2) B (y_1, y_2)\}$$

dir. Bu x tamsayısına (x_1, x_2) sıralı ikilisinin ürettiği tamsayı denir.

Pozitif ve sıfır olmayan tamsayıya negatif tamsayı denir. Bu durumda $x \in \mathbb{Z}$, $(x_1, x_2) \in x$ ise x in negatif olması için gerek ve yeter şart $x_1 < x_2$ olmasıdır. Negatif tamsayıların oluşturduğu küme $\mathbb{Z}^-$ ile gösterilir. Bu durumda $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$ olur.

Kaynaklar:

1. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus I**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.
2. Prof. Dr. C. Çinar, Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, Prof. Dr. A. S. Kurbanlı, Prof. Dr. D. Şimşek, **Genel Matematik**, Dizgi Ofset, 2013.
3. Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, **Analiz III Diziler ve Seriler,** Dizgi Ofset, 2017.
4. H. İ. Karakaş, **Matematiğin Temelleri, Sayı Sistemleri ve Cebirsel Yapılar,** ODTÜ yayınları, 2011.