MATEMATİK - 2

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2021

3.3.2. Karşılaştırma (Mukayese) Kriteri

Teorem 3.3.2.1. *Pozitif terimli* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ve* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *serileri verilmiş olsun.*

(1) *Eğer* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *serisi yakınsak ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $b_n \leq a_n$ *ise* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *serisi de yakınsaktır*

(2) *Eğer* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *serisi ıraksak ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $a_n \leq b_n$ *ise* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *serisi de ıraksaktır.*

~~yak~~ yak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

ırak ırak.

Örnek 3.3.2.1. Aşağıdaki serilerin karakterlerini belirleyiniz.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+5^n}$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{2^n}$

(7) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}-1}$ (8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$ (9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$

$\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n \cdot n} = \frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Çözümler:

(1) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$ dir. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi, $p = 2$ serisi olduğundan yakınsaktır. Dolayısıyla Karşılaştırma Kriteri gereği $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ serisi de yakınsaktır.

< 1 .

(2) Her $n > 2$ için $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^n}$ dir. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ serisi, $r = \frac{1}{2}$ olan geometrik seri olduğundan yakınsaktır. Dolayısıyla Karşılaştırma Kriteri gereği $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ serisi de yakınsaktır.

(3) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ dir. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik seri ıraksaktır. Dolayısıyla Karşılaştırma Kriteri gereği $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ serisi de ıraksaktır.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$, $p = \frac{1}{2} < 1$ ~~old~~. harmonik

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty}$

$1 + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$

(4) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}\right)$ dir. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ harmonik seri ıraksaktır. Dolayısıyla Karşılaştırma Kriteri gereği $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ serisi de ıraksaktır.

< 1

(5) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{3+5^n} < \frac{1}{5^n}$ dir. serisi, $r = \frac{1}{5}$ olan geometrik seri olduğundan yakınsaktır. Dolayısıyla Karşılaştırma Kriteri gereği $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3+5^n}$ serisi de yakınsaktır.

< 1

(6) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{\cos^2 n}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ dir. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ serisi, $r = \frac{1}{2}$ olan geometrik seri olduğundan yakınsaktır. Dolayısıyla Karşılaştırma Kriteri gereği $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{2^n}$ serisi de yakınsaktır.

(7) Her $n > 1$ için $\frac{3}{\sqrt{n-1}} > 3\frac{1}{\sqrt{n}}$ dir. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ serisi, $p = \frac{1}{2}$ serisi olduğundan ıraksaktır. Dolayısıyla Karşılaştırma Kriteri gereği $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n-1}}$ serisi de ıraksaktır.

$p = 2 >$

(8) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n(2n-1)} = \frac{1}{2n^2-n} < \frac{1}{2n^2-n^2} = \frac{1}{n^2}$ dir. serisi, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi olduğundan yakınsaktır. Dolayısıyla Karşılaştırma Kriteri gereği $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$ serisi de yakınsaktır.

(9) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\ln n < n$ olduğundan $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ dir. Bu durumda $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$ dir. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}}$ serisi harmonik seri olup ıraksak olduğundan Karşılaştırma Kriteri gereği $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ serisi de ıraksaktır.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak, $\sum_{n=1}^{\infty}$

Teorem 3.3.2.2. (Karşılaştırma Kriterinin Limit Formu)

Pozitif terimli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ve* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *serileri için*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$$

olsun. Bu durumda

(1) $0 < l < +\infty$ *ise iki seri aynı karakterdedir.*

(2) $l = 0$ *ve* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *yakınsak ise* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *serisi de yakınsaktır.*

(3) $l \to \infty$ *ve* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *ıraksak ise* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *serisi de ıraksaktır*

Uyarı 3.3.2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 n^p + a_2 n^{p-1} + \cdots}{b_1 n^q + b_2 n^{q-1} + \cdots}$ *serisinin karakterini belirlemek için* $b_n = \frac{n^p}{n^q}$ *şeklinde seçilmelidir. Bu durumda*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_1 n^p + a_2 n^{p-1} + \cdots}{b_1 n^q + b_2 n^{q-1} + \cdots}}{\frac{n^p}{n^q}} = \frac{a_1}{b_1} \neq 0$$

elde edilir.

Eğer $q - p > 1$ *ise* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n^q}$ *serisi yakınsaktır. Dolayısıyla verilen seri de yakınsak olur.*

Benzer şekilde $q - p \leq 1$ *ise* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n^q}$ *serisi ıraksaktır. Dolayısıyla verilen seri de ıraksak olur.*

Örnek 3.3.2.2. Aşağıdaki serilerin karakterlerini belirleyiniz.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-n+3}{n^3+2n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4-16}}{n^2\sqrt{n+2}}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n} = 4 \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \right)$ $p=1$ ıraksak

Çözüm.

(1) $b_n = \frac{4n^2}{n^3} = \frac{4}{n}$ olarak seçilirse

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{4n^2 - n + 3}{n^3 + 2n}}{\dfrac{4n^2}{n^3}} = 1 \neq 0$$

$0 < L < +\infty$

elde edilir. Bu durumda iki seri aynı karakterdedir.

$4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi harmonik seri olup ıraksak olduğundan Karşılaştırma Kriteri gereği $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-n+3}{n^3+2n}$ serisi de ıraksaktır.

(2) $b_n = \frac{\sqrt[3]{n^4}}{n^2\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{7/6}}$ olarak seçilirse

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt[3]{n^4-16}}{n^2\sqrt{n+2}}}{\dfrac{\sqrt[3]{n^4}}{n^2\sqrt{n}}} = 1 \neq 0$$

elde edilir. Bu durumda iki seri aynı karakterdedir. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{7/6}}$ serisi $p = \frac{7}{6}$ serisi olup yakınsak olduğundan Karşılaştırma Kriteri gereği $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4-16}}{n^2\sqrt{n+2}}$ serisi de yakınsaktır.

(3) $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$ olarak seçilirse

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}} = \pi \neq 0$$

elde edilir.

Bu durumda iki seri aynı karakterdedir. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik seri ıraksak olduğundan Karşılaştırma Kriteri gereği $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$ serisi de ıraksaktır.

(4) $b_n = \frac{1}{n}$ olarak seçilirse

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \ln e = 1$$

elde edilir. Bu durumda iki seri aynı karakterdedir. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ harmonik seri ıraksak olduğundan Karşılaştırma Kriteri gereği $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ serisi de ıraksaktır.

(5) $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ olarak seçilirse

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1 \neq 0$$

elde edilir. Bu durumda iki seri aynı karakterdedir. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ serisi $p = \frac{1}{2}$ serisi olup ıraksak olduğundan Karşılaştırma Kriteri gereği $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ serisi de ıraksaktır.

(6) $b_n = \frac{1}{n}$ olarak seçilirse

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} \right) = 1 \neq 0$$

elde edilir. Bu durumda iki seri aynı karakterdedir. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik seri ıraksak olduğundan Karşılaştırma Kriteri gereği $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$ serisi de ıraksaktır.

Sonuç 3.3.2.1. *Pozitif terimli* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *serisi verilmiş olsun. Bu durumda*

(1) $\lim_{n\to\infty} n^p a_n = l \neq 0$ *ise* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *serisi* $p \leq 1$ *için ıraksak ve* $p > 1$ *için yakınsaktır.*

(2) $\lim_{n\to\infty} n^p a_n = 0$ *ve* $p > 1$ *ise* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *serisi yakınsaktır.*

(3) $\lim_{n\to\infty} n^p a_n = +\infty$ *ve* $p \leq 1$ *ise* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *serisi ıraksaktır.*

Teorem 3.3.2.3. *Pozitif terimli* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ve* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *serilerini ele alalım. Her* $n(\varepsilon) < n$ *için* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ *olacak şekilde bir* $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *sayısı mevcut olsun. Bu durumda*

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *serisi yakınsak ise* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *serisi de yakınsaktır.*

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *serisi ıraksak ise* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *serisi de ıraksaktır.*

Kaynak:

1. Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA, Analiz III Diziler ve Seriler, Dizgi Ofset, 2017.

2. G. B. Thomas ve Ark., Thomas Calculus I, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.

KAYNAKLAR:

1. Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA, Analiz III Diziler ve Seriler, Dizgi Ofset, 2017.

2. G. B. Thomas ve Ark., Thomas Calculus I, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.