MATEMATIK 1

Konya Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

2020

Örnek 4.3.2.3.3. $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$ tanımlı $f(x)=[\![x^2]\!]$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm. $f(-x)=[\![(-x)^2]\!]=[\![x^2]\!]=f(x)$ olduğundan fonksiyon çifttir. Çift fonksiyonların grafikleri y eksenine göre simetrik olduğundan fonksiyonun grafiğinin $[0,2]$ aralığındaki parçası çizilip y eksenine göre simetriği alınır.

$[\![x^2]\!]=k$, $k\in\mathbb{N}$ için

$$k\le x^2<k+1 \Rightarrow \sqrt{k}\le x<\sqrt{k+1}$$

dir. Dolayısıyla

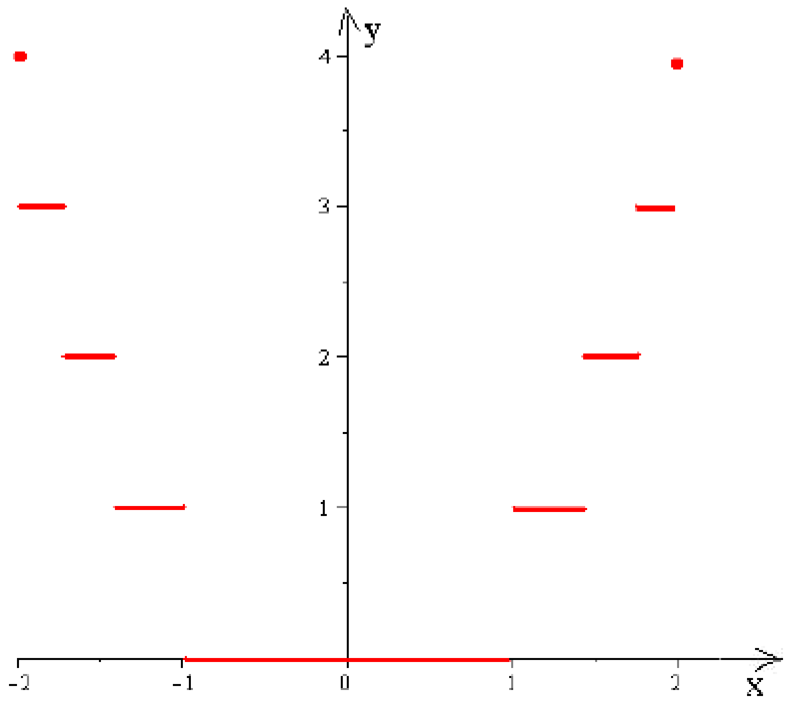
$k = 0$ ise $0 \le x < 1 \Rightarrow 0 \le x^2 < 1 \Rightarrow [\![x^2]\!] = 0$

$k = 1$ ise $1 \le x < \sqrt{2} \Rightarrow 1 \le x^2 < 2 \Rightarrow [\![x^2]\!] = 1$

$k = 2$ ise $\sqrt{2} \le x < \sqrt{3} \Rightarrow 2 \le x^2 < 3 \Rightarrow [\![x^2]\!] = 2$

$k = 3$ ise $\sqrt{3} \le x < \sqrt{4} = 2 \Rightarrow 3 \le x^2 < 4 \Rightarrow [\![x^2]\!] = 3$

$x = 2$ için $[\![x^2]\!] = [\![2^2]\!] = [\![4]\!] = 4$



Şekil 4.3.2.3.2.

dir. Bu durumda grafik şeklindedir.

2.4. Uzaklık Fonksiyonu

Tanım 4.3.2.4.1. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $d(x,y) = |x-y|$ değerine x ile y arasındaki uzaklık denir.

Tanım 4.3.2.4.2. $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ olmak üzere $d(x,y) = |x-y|$ şeklinde tanımlanan fonksiyona $\mathbb{R}$ de tanımlı uzaklık fonksiyonu veya $\mathbb{R}$ de metriktir denir.

Uzaklık fonksiyonu için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

(1) $|x-y| \geq 0$ olduğundan $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ için

$$d(x,y) \geq 0$$

dır.

(2) $|x-y|=0 \Leftrightarrow x=y$ olduğundan

$$d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$$

dir.

(3) $|x-y|=|y-x|$ olduğundan $\forall(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ için

$$d(x,y)=d(y,x)$$

dir.

(4) $\forall(x,y),(y,z),(x,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ için $|x-z|\leq|x-y|+|y-z|$ olduğundan

$$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$$

dir.

(1), (2), (3), (4) özelliklerini sağlayan $d(x,y)$ fonksiyonu ile $\mathbb{R}$ kümesi birlikte matematiksel bir yapı belirtir. Bu yapıya $(\mathbb{R},d)$ metrik uzayı veya bir boyutlu Euclid uzayı denir ve $\mathbb{R}^1$ şeklinde gösterilir.

Örnek 4.3.2.4.1. $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+}\cup\{0\}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}$ de

$$d(x,y)=|x-y|$$

ile tanımlı uzaklık fonksiyonu olmak üzere $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+}\cup\{0\}$, $f(x,y)=\min\{d(x,y),\ 1\}$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun $\mathbb{R}$ de bir uzaklık fonksiyonu (metrik) olduğunu gösteriniz.

Çözüm. f fonksiyonunun reel sayılar kümesinde metrik olduğunu göstermek için (1), (2), (3), (4) özelliklerini gerçeklediğini göstermek yeterlidir:

(1) $1>0$ ve $d(x,y)\geq 0$ olduğundan $f(x,y)=\min\{d(x,y),\ 1\}\geq 0$ olur.

(2) $f(x,y)=0 \Leftrightarrow \min\{d(x,y),\ 1\}=0 \Rightarrow 1\neq 0$ olup $d(x,y)=0$ olur. $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ olmasıdır. Yani $f(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ bulunur.

(3) $d(x,y)=d(y,x)$ olduğundan $f(x,y)=f(y,x)$ dir. Dolayısıyla $f(x,y)=\min\{d(x,y),\ 1\}=\min\{d(y,x),\ 1\}=f(y,x)$ elde edilir.

(4) $f(x,z)\leq f(x,y)+f(y,z)$ olduğunu gösterebilmek için:

(4) $f(x,z) \le f(x,y) + f(y,z)$ olduğunu gösterebilmek için:

1. $f(x,z) = \min\{d(x,z),1\} = 1$ veya $f(x,z) = d(x,z)$,

2. $f(x,y) = \min\{d(x,y),1\} = 1$ veya $f(x,y) = d(x,y)$,

3. $f(y,z) = \min\{d(y,z),1\} = 1$ veya $f(y,z) = d(y,z)$,

durumları yorumlanmalıdır.

	$f(x,z)$	$f(x,y)$	$f(y,z)$	$f(x,z) \le f(x,y) + f(y,z)$
1	1	1	1	$1 \le 1+1$
2	1	$d(x,y)$	1	$1 \le d(x,y)+1$
3	1	1	$d(y,z)$	$1 \le 1+d(y,z)$
4	1	$d(x,y)$	$d(y,z)$	$1 \le d(x,y)+d(y,z)$
5	$d(x,z)$	$d(x,y)$	$d(y,z)$	$d(x,z) \le d(x,y)+d(y,z)$
6	$d(x,z)$	1	1	$d(x,z) \le 1+1$

7	$d(x,z)$	$d(x,y)$	1	$d(x,z) \le d(x,y) + 1$
8	$d(x,z)$	1	$d(y,z)$	$d(x,z) \le 1 + d(y,z)$

Tablonun 1., 2. ve 3. satırlarından görüldüğü gibi

$1 \le 1+1$, $1 \le d(x,y)+1$, $1 \le 1+d(y,z)$ ve $d(x,y) \ge 0$, $d(y,z) \ge 0$

olup eşitsizlikler doğrudur. Ayrıca tablonun 4. satırında

$$f(x,z) = \min\{d(x,z),1\} = 1$$

seçilmiş olup $1 < d(x,z)$ olduğu açıktır. Ayrıca $d(x,z)$ bir uzaklık fonksiyonu olduğundan

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$$

dir. Bu son iki eşitsizlikten

$$1 < d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$$

bulunur ki doğrudur. 5. satır $d(x,z)$ bir uzaklık fonksiyonu olduğundan açıktır. Yani

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$$

geçerlidir. Tablonun 6. satırında,

$$f(x,z)=\min\{d(x,z),1\}=d(x,z)$$

seçilmiş olup $d(x,z)<1$ olduğu açıktır. Bu durumda $d(x,z)<1<1+1$ olup $d(x,z)\leq 1+1$ eşitsizliği doğrudur. Tablonun 7. satırında

$$f(x,z)=\min\{d(x,z),1\}=d(x,z)$$

seçilmiş olup $d(x,z)<1$ olduğu açıktır. Bu durumda $d(x,z)<1$ olup

$$d(x,z)\leq d(x,y)+1$$

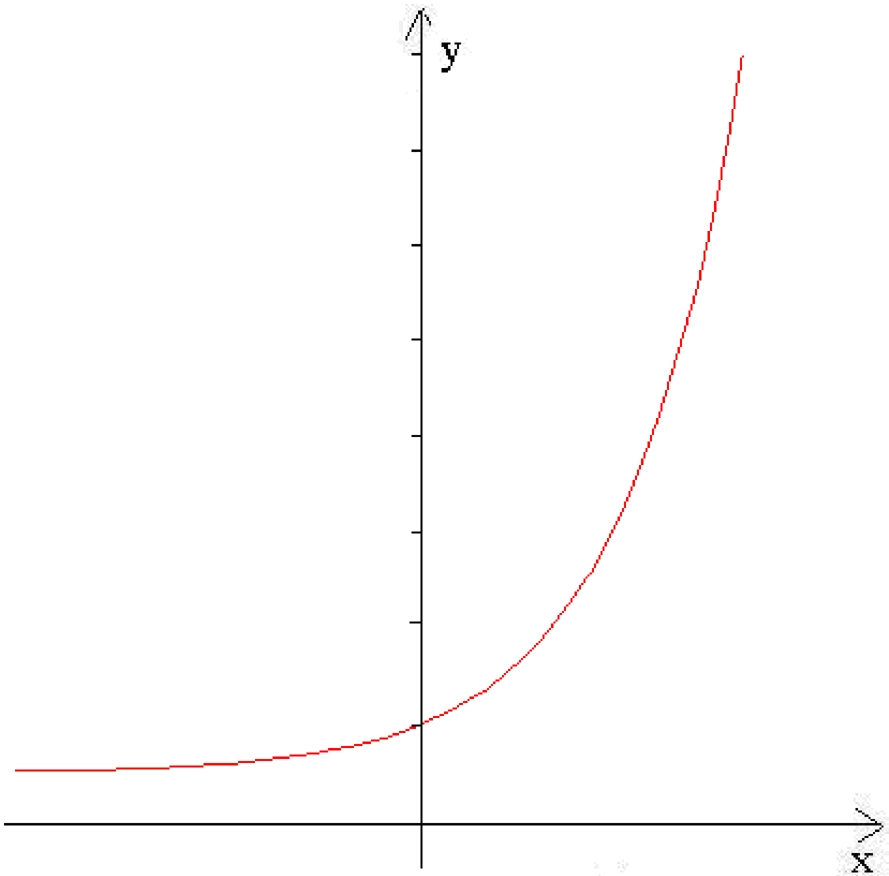
eşitsizliği doğrudur. Son satırın doğru olduğu 7. satıra benzer şekilde gösterilir.

2.5. Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar

2.5.1. Üstel Fonksiyon

Tanım 4.3.2.5.1.1. $a \in \mathbb{R}^{+} - \{1\}$ için $y = a^{x}$ şeklinde tanımlanan fonksiyona üstel fonksiyon denir. Üstel fonksiyonun tanım kümesi bütün reel sayılar kümesi, değer kümesi ise pozitif reel sayılar kümesidir. Bu fonksiyon için:

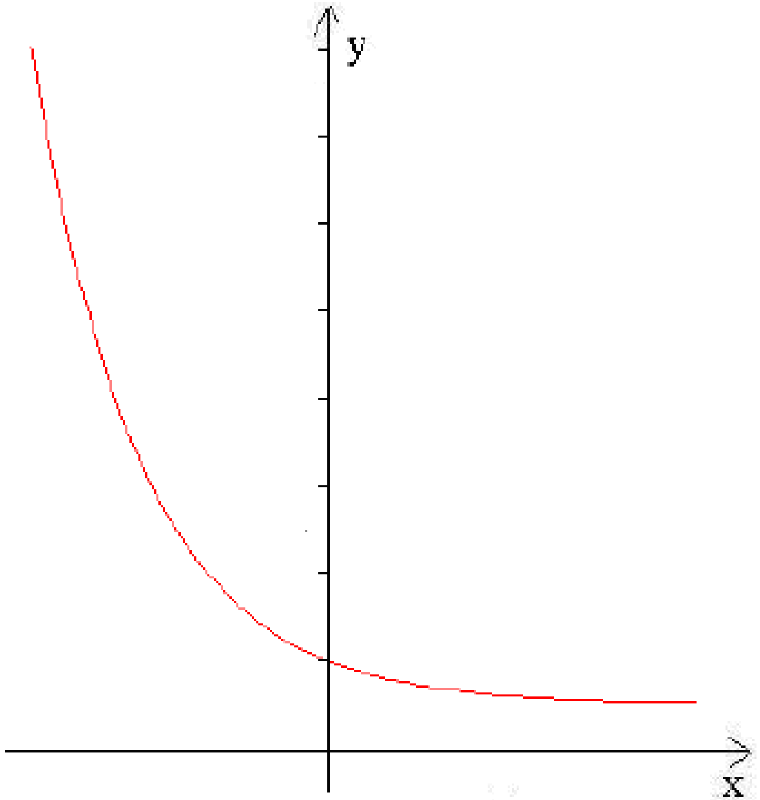
(1) $a > 1$ için $y = a^x$ fonksiyonu artandır ve grafiği



Şekil 4.3.2.5.1.1.

şeklindedir.

(2) $0 < a < 1$ için $y = a^x$ fonksiyonu azalandır ve grafiği



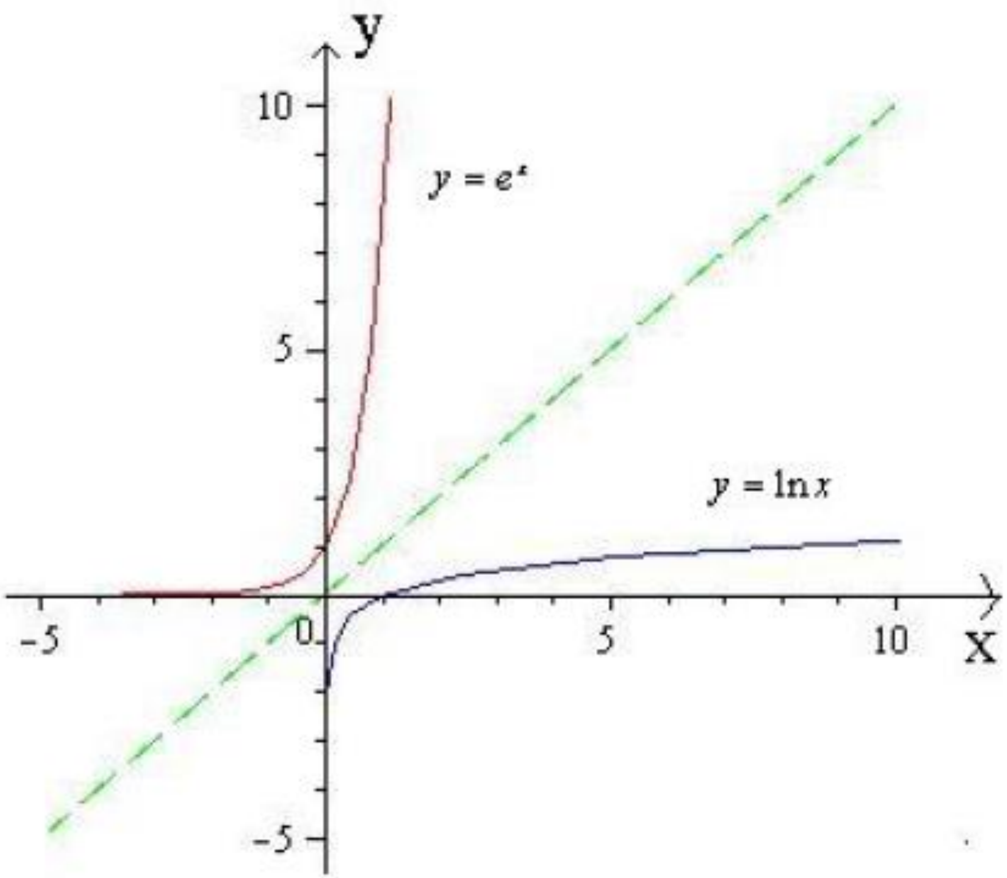
Şekil 4.3.2.5.1.2.

şeklindedir.

2.5.2. Logaritma Fonksiyonu

Tanım 4.3.2.5.2.1. $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ için $y = a^x$ eşitliğini sağlayan x reel sayısına y nin a tabanına göre logaritması denir ve $x = \log_a y$ şeklinde gösterilir.

Uyarı 4.3.2.5.2.1. Logaritma fonksiyonu üstel fonksiyonunun tersidir.



Şekil 4.3.2.5.2.1.

Logaritma fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

Logaritma fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(1) $y = a^{\log_a(y)}$ **(2)** $\log_a(a) = 1$ **(3)** $\log_a(1) = 0$ **(4)** $\log_a A^n = n \log_a A$

(5) $\log_a(A.B) = \log_a A + \log_a B$

Uyarı 4.3.2.5.2.2. $n \in \mathbb{N}$ ve $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ sayıları için

$$\log_a(A_1 A_2 ... A_n) = \log_a A_1 + \log_a A_2 + ... + \log_a A_n$$

dir.

(6) $\log_a\left(\dfrac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$ **(7)** $\log_a \sqrt[n]{A} = \dfrac{1}{n} \cdot \log_a A$ **(8)** $\log_a(A) = \dfrac{\log_b A}{\log_b a}$

(9) $(\log_a b).(\log_b a) = 1$

Tanım 4.3.2.5.2.2. $e = \lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ $(e = 2{,}71\ldots)$ olmak üzere

$$\log_e A = \ln A \ , \ \log_{10} A = \log A = \lg A$$

şeklinde gösterilir. $\ln A$ gösterimi doğal logaritma olarak okunur.

Örnek 4.3.2.5.2.1. $\log_{\frac{1}{3}} 81 = ?$

Çözüm. $\log_{\frac{1}{3}} 81 = \dfrac{\log_3 81}{\log_3 1/3} = \dfrac{\log_3 3^4}{\log_3 3^{-1}} = -\dfrac{4}{1} = -4$ dür.

Örnek 4.3.2.5.2.2. $\log_3 5.\log_{25} 27 = ?$

Çözüm. $\log_3 5.\log_{25} 27 = \log_3 5.\dfrac{\log_3 27}{\log_3 25} = \log_3 5.\dfrac{\log_3 3^3}{\log_3 5^2} = \dfrac{3}{2}$ dir.

Örnek 4.3.2.5.2.3. $\log_2(x-1)=\log_2(x^2-x-16)$ ise $x=?$

Çözüm. $\log_2(x-1)=\log_2(x^2-x-16)$ olduğundan $x-1=x^2-x-16$ ve dolayısıyla $x^2-2x-15=0$ dır. Buradan $x=-3$ ve $x=5$ elde edilir. Ancak $x=-3$ için $x-1<0$ olduğundan $x=5$ dir.

Kaynaklar:

1. G. B. Thomas ve Ark., **Thomas Calculus I**, Çeviri: R. Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2009.
2. Prof. Dr. C. Çinar, Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, Prof. Dr. A. S. Kurbanlı, Prof. Dr. D. Şimşek, **Genel Matematik**, Dizgi Ofset, 2013.
3. Prof. Dr. İ. Yalçınkaya, **Analiz III Diziler ve Seriler,** Dizgi Ofset, 2017.
4. H. İ. Karakaş, **Matematiğin Temelleri, Sayı Sistemleri ve Cebirsel Yapılar,** ODTÜ yayınları, 2011.