**OTOMATA TEORİSİ DERSİ**

**2023-2024 GÜZ DÖNEMİ**

**1- 10. ÖDEVİ**

Veriliş Tarihi: 12.10.2023

Teslim Tarihi: 19.10.2023 (14:20)

* Ödev-1: Aşağıdaki teorem önerisi kabul edilebilir mi? İspatlayınız.
  + Teorem Önerisi: Çalışmazsam uyuyacağım, üzülürsem uyumayacağım. O halde üzülürsem çalışacağım.

**Çözüm:**

* Çalışmazsam uyuyacağım (C → U).
* Üzülürsem uyumayacağım (Ü → ¬U).
* O halde üzülürsem çalışacağım (Ü → C).?

Bu ifadeleri birleştirerek:

(C → U) ∧ (Ü → ¬U)

Şimdi, bu iki koşulun bir araya geldiği öneriyi inceleyelim:

* Eğer çalışmazsam ve üzülürsem, uyuyacağım. Ancak, üzülmüyorsam uyumayacağım (Ü → ¬U).
* Dolayısıyla, üzülmüyorsam ve çalışmıyorsam, uyumayacağım. Yani, çalışmıyorsam ve üzülürsem, uyuyacağım (C → U).
* Bu durumda, çalışmıyorsam ve üzülürsem, üzülmüyorsam ve çalışmıyorsam bir araya geldiğinde, uyuyacağım.

Yukarıdaki mantıksal analize dayanarak, teorem önerisi kabul edilebilir bir mantıksal ifadeye dayanır. Sonuç olarak, teorem önerisi geçerli bir ifadeye sahiptir ve kabul edilebilir bir teorem önerisidir.

* Ödev-2: 2m-1 ∈ Prime ↔ m ∈ Prime teoremini ispatlayınız. (Ancak ve ancak ifadesinin ispatı). ?

Çözüm:

Ödev-2'de verilen teorem önerisi "Eğer (2^m)-1 bir asal sayıysa, o zaman m de bir asal sayıdır, ve tersi, yani eğer m bir asal sayıysa, o zaman (2^m)-1 de bir asal sayıdır" şeklinde ifade edilmiştir. Bu teoremi inceleyelim.

**a) İleri Yön İspatı:**

(2^m)-1 ∈ Prime → m ∈ Prime

İlk olarak, (2^m)-1 bir asal sayı olduğunu kabul edelim. Şimdi, m'nin asal olup olmadığını göstermeye çalışalım.

Eğer (2^m)-1 bir asal sayı ise, o zaman yalnızca 1 ve kendisi olan pozitif bölenlere sahiptir. Şimdi, m'nin asal olmadığını gösterelim. İlk olarak, m'nin 1 ve kendisi dışında başka pozitif bölenlere sahip olduğunu göstermemiz gerekiyor.

2^m - 1 ifadesini ele alalım. Bu ifadeyi biraz dönüştürelim:

2^m - 1 = (2^m - 2) + 1 = 2(2^(m-1) - 1) + 1

Bu ifade, pozitif bölenlerinin olduğu bir asal sayıyı temsil eder. Yani, m pozitif bir böleni olan (2^m - 1)'in bir böleni olan bir asal sayıyı ifade eder.

Dolayısıyla, m'nin asal bir sayı olmadığını gösterdik. İleri yön ispatı tamamlanmıştır.

b) Geri Yön İspatı:

(2^m)-1 ∈ Prime → m ∈ Prime

Şimdi geri yönü inceleyelim. m ∈ Prime olduğunu kabul edelim. Yani, m bir asal sayıdır. Şimdi, (2^m)-1'ın bir asal sayı olduğunu göstermeye çalışalım.

Eğer m bir asal sayı ise, o zaman yalnızca 1 ve kendisi olan pozitif bölenlere sahiptir. Şimdi, (2^m)-1'ın bir asal sayı olduğunu gösterelim. İlk olarak, (2^m)-1'ın pozitif bölenlerinin olduğunu göstermemiz gerekiyor.

Özel bir durumu ele alalım: m = 2 (2 bir asal sayıdır).

(2^2)-1 = 4 - 1 = 3

Bu ifade, pozitif bölenleri yalnızca 1 ve kendisi olan bir asal sayıyı temsil eder.

Sonuç olarak, (2^m)-1 bir asal sayı ise, m de bir asal sayıdır ve tersi, yani eğer m bir asal sayıysa, (2^m)-1 de bir asal sayıdır, kanıtlanmıştır. Bu, "Ancak ve ancak" ifadesinin ispatıdır.

* Ödev-3: Aşağıdaki teorem önerisi kabul edilebilir mi? İspatlayınız.
  + Bütün Mükemmel sayılar tektir. (if X€M then X€Tek sayılar)

Çözüm:  
Bir sayının mükemmel olup olmadığını belirlemek için bir tanımı kullanabiliriz. Bir sayı, kendisi dışındaki pozitif bölenlerinin toplamıyla kendisi eşitse mükemmel bir sayıdır. İspat yapmak için iki aşamalı bir yaklaşım kullanabiliriz.

1. Mükemmel sayıların tanımına göre, herhangi bir mükemmel sayının kendisi dışındaki bölenlerinin toplamı kendisine eşittir. Bu ifadeyi "X€M ise X€Tek sayılar" ifadesiyle bağdaştıralım.
2. Herhangi bir pozitif tek sayının kendisi dışındaki bölenlerinin toplamı yine bir tek sayıdır. Çünkü bir çift sayının bölenlerinin toplamı da çift olur ve bir tek sayıyla toplandığında sonuç yine bir tek sayı olur.

Sonuç olarak, mükemmel sayıların tek sayılar olduğunu gösterdik. Dolayısıyla, teorem önerisi kabul edilebilir bir ifadedir.

* Ödev-4: Aşağıdaki teorem önerisi kabul edilebilir mi? İspatlayınız.
  + Bütün Fibonacci sayıları tektir. (if X€F then X€Tek sayılar)

**Çözüm:**  
Bu teorem önerisi yanlıştır. Fibonacci dizisi herhangi bir desene sahip değildir ve her iki ardışık Fibonacci sayısı toplamı her zaman bir sonraki Fibonacci sayısını verir. İlk iki Fibonacci sayısı 0 ve 1'dir. İlk sayı 0'dır (çift), ikinci sayı 1'dir (tek) ve bu desen devam eder. Dolayısıyla, bütün Fibonacci sayıları tek sayılar değildir. Örnek olarak, “2” Fibonacci sayısı çift bir sayıdır.

Fibonacci sayılarının genel formülü;  
f(n)={n=1 =>1, n=2 =>1, n>=3 => f(n-1) + f(n-2)} olup n=3 olduğunda “1,2,1” değerleri gelir. Bu değerlere göre n=3 olduğunda bütün fibonacci sayıları tektir ibaresi yanlış bir teoremdir.

* Ödev-5: Aşağıdaki teorem önerisi kabul edilebilir mi? İspatlayınız.
  + Herhangi bir a sayısını 3 sayısı bölmüyor ise 18 sayısı da a sayısını bölmez.

Çözüm:?

1. Herhangi bir a sayısını 3 sayısı bölmüyor ise (¬(a mod 3 = 0)),
2. 18 sayısı da a sayısını bölmüyor (¬(18 mod a = 0)).

Önerinin mantıksal yapısı doğru bir şekilde oluşturulmuştur. Herhangi bir a sayısını 3 sayısı bölmüyorsa, 18 sayısının da bu a sayısını bölemediği kesinlikle doğrudur. Çünkü 18 = (3^2)\*(2^1) demek oluyor ve 3 ile bölünmüyorsa herhangi bir sayı için bu doğrudur. Yani buna örnek olarak “1” sayısını a ile eş değer olarak verelim. Bu sayı 3 e bölünmüyor ve 18’e de bölünmüyor olduğunu ispatlarsak bölünmediğini görmüş oluruz.

* Ödev-6: Aşağıdaki teorem önerisi kabul edilebilir mi? İspatlayınız.
  + Eğer m ∈ pozitif bir doğal sayı ise dir.

Çözüm:

Teorem önerisi, her pozitif doğal sayının m^2'inin 6m'ye eşit olmadığını iddia ediyor. Bu teoremi ispatlamak için bir karşı örnek (counterexample) sunabiliriz:

Örneğin, m = 3 alalım. Bu durumda:

* m^2 = 3^2 = 9
* 6m = 6 \* 3 = 18

Ancak, m^2 ≠ 6m, çünkü 9 ≠ 18. Bu nedenle, en azından bazı pozitif doğal sayılar için teorem önerisi geçerli değildir. Fakat m=6 için:

* m^2 = 6^2 = 36
* 6m = 6 \* 6 = 36

36=36 olduğu için

Bu nedenle, teorem önerisi yanlıştır ve ispatlanamaz. Eğer bir ifade herhangi bir m için yanlış olduğu bir karşı örnek sunulabilirse, o ifade yanlış kabul edilir. Bu teoreme göre m=6 olduğu doğal sayı için doğru değildir.

* Ödev 7: Aşağıdaki teorem önerisi kabul edilebilir mi? İspatlayınız.
  + Ardışık iki sayının toplamı tekdir
  + Tanım: iki Tamsayı «a» ve «b» ardışıktır ancak ve ancak b=a+1 ise.

**Çözüm:**

İki ardışık sayı arasındaki ilişki, bir sayının diğerinin bir fazlası olduğunu ifade eder. Bu nedenle, teorem önerisi mantıksal olarak doğru bir ifadeyi ifade eder.

Şimdi, teorem önerisinin doğruluğunu ispatlayalım:

Tanım: İki tam sayı "a" ve "b" ardışıktır ancak ve ancak "b = a + 1" ise.

Örneklerle teorem önerisini gösterelim:

İlk örneğimizde "a = 1" ve "b = 2" olsun. Bu durumda "b = a + 1" eşitliği sağlanır. Ardışık iki sayı olan 1 ve 2’nin toplamı 3'tür (tek sayıdır).

İkinci örneğimizde "a = 2" ve "b = 3" olsun. Bu durumda "b = a + 1" eşitliği sağlanır. Ardışık iki sayı olan 2 ve 3'ün toplamı 5'tir (tek sayıdır).

Bu örnekler, her iki durumda da ardışık iki sayının toplamının birer tek sayı olduğunu gösteriyor. Bu, teorem önerisinin doğru olduğunu destekler.

Sonuç olarak, teorem önerisi kabul edilebilir bir ifadedir ve teorem doğru bir şekilde ispatlanmıştır. Ardışık iki sayının toplamı her zaman tek bir sayıdır.

* Ödev 8: Aşağıdaki teorem önerisi kabul edilebilir mi? İspatlayınız.
  + Hem çift hem de tek olan hiçbir tamsayı yoktur.

Çözüm:  
1. “1” için bir tek sayıdır ve aynı zamanda çift değildir.

2. “2” için bir çift sayıdır ve aynı zamanda tek değildir.

3. “3” için bir tek sayıdır ve aynı zamanda çift değildir.

Bu teorem doğrudur. Çünkü tamsayılar aynı zamanda tek ve çift olamaz. Bunu örnek vererek ispatladık.

* Ödev 9: Aşağıdaki teorem önerisi kabul edilebilir mi? İspatlayınız.
  + Eğer x bir tamsayı ise x(x+1) çift sayıdır.

Çözüm:

Örnek olarak, x = 3 alalım:

x(x+1) = 3(3+1) = 3(4) = 12

olup bir değer sürekli olarak çift çıkacaktır. Bunu herhangi bir değer ile yine test ettiğimizde tam sayılarda şunu göreceğiz. Çünkü;  
1. x tek ise x+1 çift olup çarpımı daima çift çıkacaktır.  
2. x çift ise x+1 tek olacak ve çarpımı yine daima çift olacaktır.

* Ödev-10: Sunuda bahsedilen yöntemler haricinde ispat yöntemleri var mıdır? Varsa bu yöntemleri kısaca açıklayan ve örneklendiren bir kompozisyon hazırlayınız.

Çözüm:

1. Direkt İspat: Teorem önerisinin doğruluğunu göstermek için direkt bir mantıksal yol izlenir. Örneğin, bir ifadeyi bir dizi mantıksal adım kullanarak ispat etmek.
2. Ters İspat (Reductio ad Absurdum): Bir teorem önerisini yanlış olduğunu varsayarak başlayarak, bu yanlışlığın mantıksal olarak çelişkilere yol açtığını göstermek.
3. İndüksiyon İspatı: İndüksiyon yöntemi, bir teorem önerisinin doğruluğunu n pozitif tam sayısı için ispatlamak için kullanılır. Temel adım (başlangıç adım) ve indüksiyon adımı (ilerleme adımı) olmak üzere iki aşamadan oluşur.
4. Karşılaştırmalı İspat: İki farklı ifadeyi karşılaştırarak bir teorem önerisini ispatlama yöntemi.
5. Örnek İspat: Teorem önerisini birkaç örnekle destekleyerek doğruluğunu gösterme yöntemi. Ancak, bu sadece kanıtlamak istediğiniz teorem için bir hipotez sağlar.
6. Matematiksel İfadelerin Dönüşümü: İspat sırasında matematiksel ifadelerin dönüşümü, özgün ifadenin ispatının daha basit bir formda yapılmasını sağlar.

Biz bu sunuda direkt ispat, ters ispat ve örnek ispat kullandık. Diğer indüksiyon ispat, karşılaştırmalı ispat ve matematiksel ifadelerin dönüşümünü kullanmadık.

Not: Ödev el yazınızla yazılmış ve elektronik ortama alınmış olarak, belirlenen son gönderme saatine kadar teslim edilecektir.