



BACHELORPROJEKT - HA(MAT.)

Enhanced Portfolio Optimization - EPO

Vejleder

MARTIN RICHTER

Gruppenavn:

FRI-161694-4

Studerende

ASTA ELBÆK (S161548)

NIKOLAJ BØDKER MEYER (S162054)

50 sider, 97584 tegn

22. maj 2025

Abstract

This project investigates the issues associated with the application of Mean-Variance Optimization (MVO) and explores how the empirical performance of the approach can be improved. Key issues of MVO are identified, including estimation noise in both risk and expected return, leading to the identification of the principal component portfolios, where the least important components are referred to as problem portfolios. To address these issues, an alternative method is presented theoretically and subsequently implemented empirically. The improved method, Enhanced Portfolio Optimization (EPO), developed by Pedersen m.fl. (2021) is shown mathematically to be an extension of MVO. EPO reduces noise in the estimation parameters by shrinking the correlations between assets. Here the shrinkage parameter, w , plays a vital role as it reduces the weights of the aforementioned problem portfolios, thereby essentially reducing the estimation noise in both risk and expected return.

For the empirical implementation, EPO is applied to the "49 Industry Portfolios" dataset. Based on the empirical results, it is concluded that EPO generally yields significant improvements over MVO. In addition to outperforming standard MVO, EPO also outperforms benchmarks such as $1/N$ and $1/\sigma$ when evaluated using Sharpe ratio. These results hold across various portfolio constructions. However, EPO does not consistently outperform the industry momentum portfolio. When regressing on the Fama-French factors, EPO shows statistically significant positive alphas in all but two cases. It also generates more realistic portfolios with lower leverage and turnover compared to a standard MVO portfolio, but under certain circumstances EPO does produce highly leveraged portfolios. Despite the improvements in both performance and robustness, it should be noted that the results are obtained under simplifying assumptions regarding the investment environment. Thus, EPO shouldn't be directly implemented in practice without further adjustments.

Indholdsfortegnelse

1	Introduktion	4
1.1	Problemformulering	4
1.2	Afgrænsning	5
1.3	Videnskabsteoretisk tilgang	5
1.4	Software	6
2	Porteføljeteorি	6
2.1	Mean-Variance Optimazation	6
2.2	Problemer ved MVO	8
2.3	Problemporbeføljer	10
3	Enhanced Portfolio Optimization	14
3.1	Simpel EPO	14
3.2	Ankret EPO	15
3.3	Generel EPO	17
4	Litteraturgennemgang	22
5	Rammer for implementering	24
5.1	Performancemål	24
5.2	Afkastsignaler	26
5.3	Risikomodeller	28
5.4	Porteføljekonstruktion	29
5.5	Benchmark porteføljer	31
6	Data	32
7	Analyse og resultater	36
7.1	Porteføljernes realiserede performance	36
7.2	Out-of-sample udvikling i w	38
7.3	EPO-porteføljernes alfa og faktor-loadings	39
7.4	Gearing og Turnover	42

8 Diskussion	45
8.1 Sammenligning med det oprindelige papirs resultater	45
8.2 Kovariansmatricen og singularitet	46
8.3 Realistiske porteføljer	48
9 Konklusion	49
9.1 Perspektivering	50
Litteraturliste	51
10 Bilag	53
A Link til kode	53
B Heat-map korrelationer	53
C FF5 korrelationer	53
D Gearing og turnover, OOS	54

1 Introduktion

En af de centrale problemstillinger inden for finansiering er, hvordan investorer bedst muligt kan optimere sammensætningen af deres porteføljer. Porteføljeteori beskæftiger sig netop med denne opgave: At sammensætte porteføljer, der opnår den optimale balance mellem afkast og risiko. Praktikere på det finansielle marked har siden midten af det 20. århundrede udviklet metoder, der netop søger at optimere denne balance. Et af de mest indflydelsesrige bidrag til den moderne porteføljeteori er Harry Markowitz' Mean-Variance Optimization (MVO) (Markowitz, 1952), som er udgangspunktet for mange af de porteføljeoptimeringsmetoder, der anvendes i dag. MVO søger at finde den middelværdi-varians-optimerende portefølje, som er porteføljen med den størst mulige forventede Sharpe ratio, ved at udnytte diversifikation samt indbyrdes korrelationer mellem aktiver. Selvom metoden teoretisk er appelerende, anvendes den dog sjældent i praksis, da den bl.a. er meget følsom overfor estimeringsfejl i kovarians og forventet afkast. Dette har motiveret udviklingen af alternative porteføljeoptimeringsmetoder, der søger at adressere metodens svagheder og gøre porteføljeoptimering mere robust i praksis.

Dette projekt præsenterer et af disse alternativer, nemlig Enhanced Portfolio Optimization (EPO) udviklet af Pedersen m.fl. (2021). EPO tager udgangspunkt i MVO, og tilbyder en simpel metode til at forbedre dens empiriske performance ved at mindske fejl i estimeringen af risiko og forventet afkast. I projektet gennemgås både det teoretiske grundlag for EPO og en empirisk implementering baseret på et datasæt bestående af 49 industriporteføljer. Vi søger, at replikere enkelte af papirets resultater for både at skabe et sammenligningsgrundlag og validere implementeringen. Ellers anvendes varierende porteføljekonstruktioner med det formål at undersøge, om EPO også leverer gode og robuste resultater i andre tilfælde. Vi vurderer metodens performance i forhold til MVO samt diverse benchmarks som $1/N$, $1/\sigma$ og industrimomentumporteføljen. I dette projekt vurderes performance med udgangspunkt i Sharpe ratio samt porteføljernes alfa.

1.1 Problemformulering

Motiveret af udfordringerne ved anvendelsen af MVO i praksis har denne opgave til formål at undersøge nedenstående arbejdsspørgsmål på baggrund af det teoretiske grundlag for Enhanced Portfolio Optimization (EPO), som præsenteret i Pedersen m.fl. (2021), samt en efterfølgende empirisk implementering:

- Hvilke problemer er der ved anvendelsen af den klassiske MVO?
- Hvordan forsøger EPO at adressere MVO's problemer?

- Bliver EPO's porteføljekonstruktion mere robust?

1.2 Afgrænsning

Som beskrevet ovenfor, har dette projekt til formål at undersøge, hvorvidt EPO empirisk fungerer bedre end den klassiske MVO. EPO sammenlignes med tre simple benchmarkstrategier: $1/N$, $1/\sigma$ og industri-momentumporteføljen (INDMOM). Metoden vurderes altså ikke i forhold til mere avancerede alternativer såsom Risk-Based Optimization, som typisk vil være sværere at slå. Da vi i dette projekt ikke har valgt at analysere sådanne metoder, anvendes en tilsvarende simpel strategi som anker, specifikt i form af $1/N$. Dette kan potentielt svække EPO-metodens performance, da en mere sofistikeret ankerportefølje formentlig ville kunne forbedre resultaterne.

Af hensyn til projektets omfang baseres den empiriske implementering udelukkende på ét datasæt, nemlig ”49 Industry Portfolios”(French, 2025), der dækker perioden 1942 til 2018. Dette giver mulighed for en mere dybdegående analyse. Der testes således ikke på andre aktivklasser såsom obligationer eller valuta. Desuden baseres implementeringen på månedlig data, hvilket reducerer datamængden og nødvendiggør længere estimeringsvinduer for risikomodellerne for at undgå brugen af meget ustabile kovariansmatricer. Begrænsningen til ét datasæt og månedlig data er en metodisk afvejning, der skal sikre en mere overskuelig analyse og gøre det muligt at sammenligne resultaterne på tværs af porteføljekonstruktioner på et ensartet grundlag.

Slutteligt afgrænses undersøgelsen til et forsimpleret investeringsmiljø, hvor der ikke tages højde for en række virkelighedsnære forhold. Dette omfatter blandt andet transaktionsomkostninger, kapitalbegrænsninger, short-selling begrænsninger eller skattemæssige forhold. Selvom sådanne forhold i praksis kan have væsentlig indflydelse på både implementering og performance, er de ikke en del af dette projekts analyse.

1.3 Videnskabsteoretisk tilgang

Vi benytter en kritisk rationalistisk tilgang i vores undersøgelse og analyse. Ontologisk er den kritiske rationalisme realistisk, og epistemologisk er den objektivistisk: Den ydre virkelighed eksisterer uafhængigt af mennesket, og det er muligt at opnå en objektiv sandhed om denne ydre virkelighed gennem objektive metoder. Metodologisk anvendes kvantitative metoder, herunder matematisk modellering og statistisk analyse, mens den logiske slutningsform er den hypotetisk-deduktive metode. I dette projekt undersøges to forskellige porteføljeoptimeringsmetoder: Først MVO og hereftder EPO, der er en udvidelse af førstnævnte. Implicit antages, at EPO vil præstere bedre end MVO, da EPO netop er en udvidel-

se af MVO, der søger at adressere problemerne ved dens anvendelse. Metoderne evalueres empirisk på baggrund af historiske data for at teste, om denne antagelse holder. Falsifikation anvendes dermed som grundlag for den kritiske vurdering af, hvorvidt EPO reelt udgør en forbedring af en porteføljes robusthed i forhold til MVO.

1.4 Software

Den empiriske analyse i projektet baseres på data fra Kenneth Frenchs hjemmeside (French, 2025), hvor datamaterialet hentes direkte i form af en CSV-fil.

Data behandles i programmeringssproget R, som er open source og særligt velegnet til statistiske beregninger og grafisk præsentation. Det er også i R, at de anvendte metoder implementeres. Som editor benyttes Visual Studio Code, der ligeledes er open source.

2 Porteføljeteori

I dette afsnit introduceres den porteføljeteoretiske ramme, der ligger til grund for projektets metoder. Først præsenteres resultaterne for den klassiske MVO (Markowitz, 1952) samt de problemer, der knytter sig til anvendelsen af metoden. På baggrund heraf identificeres de såkaldte problemporleføljer ved hjælp af en teoretisk gennemgang af Principal Components Analysis (PCA).

2.1 Mean-Variance Optimazation

Den moderne porteføljeteori tager udgangspunkt i Harry Markowitz' klassiske Mean-Variance Optimization (MVO), introduceret i papiret Portfolio Selection (Markowitz, 1952). Siden da har optimering været et centralt element i porteføljestyring og udgør et fundamentalt redskab til afvejning af risiko og forventet afkast (Kim m.fl., 2024). MVO danner grundlag for de fleste nyere porteføljeteorier benyttet i dag og forsøger at besvare, hvordan en middelværdi-varians-optimerende investor bør sammensætte sin portefølje. Metoden antager, at investoren opfatter forventet afkast som ønskværdigt og risiko som uønsket. Heraf følger, at hvis to porteføljer har samme forventede afkast, vil investoren foretrække den med lavest risiko. Porteføljevalget baseres således på at minimere risikoen for et givent forventet afkastniveau.

Betrægt et investeringsunivers med N risikofyldte aktiver og et risikofrit aktiv r_f . Lad \mathbf{r} betegne vektoren af aktivafkast, $\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{r})$ betegne vektoren af forventede afkast, og x_i betegne andelen investeret i aktiv

i. Således kan det forventede porteføljeafkast opskrives som:

$$\mu_{pf} = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\mu} = \sum_{i=1}^N x_i E(r_i) \quad (2.1)$$

Yderligere defineres det forventede merafkast som $\boldsymbol{\mu}^e = \boldsymbol{\mu}_{pf} - r_f$. Dermed kan porteføljens forventede merafkast, μ_{pf}^e , skrives som:

$$\mu_{pf}^e = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\mu}^e = \sum_{i=1}^N x_i E(r_i^e) \quad (2.2)$$

Det i 'te aktiv har varians σ_i^2 og kovarierer med de andre aktiver i universet, hvor kovariansen mellem aktiv i og j skrives som $\sigma_{i,j}$. Kovarianerne mellem universets aktiver kan opskrives i den symmetriske kovariansmatrix Σ . Bemærk, at det i 'te aktivs varians også kan udtrykkes som $\sigma_{i,i}$ og således fremgår af diagonalen. Det antages, at Σ er positiv definit – specielt altså regulær og invertibel. Den samlede porteføljevariens findes som:

$$\sigma_{pf}^2 = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} x_i x_j \quad (2.3)$$

Investor skal altså løse følgende minimeringsproblem:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x} \\ & \text{u.b.} \\ & \mathbf{x}^T \boldsymbol{\mu}^e = \mu_{pf}^e \\ & \mathbf{x} \mathbf{1} = 1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Bemærk, at bibetingelsen udtrykker det merafkast, som investoren ønsker af porteføljen. Problemet løses vha. Lagrange, der giver følgende løsning:

$$\mathbf{x}^{MVO} = \frac{\boldsymbol{\mu}^e}{(\boldsymbol{\mu}^e)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}^e} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}^e \quad (2.5)$$

Dette er løsningen, som angiver de porteføljevægte, der minimerer variansen for et givent merafkast.

Nyttemaksimering i MVO

I stedet for at minimere risikoen, som i foregående afsnit, kan vi i stedet maksimere middelværdi-variансnytten. Dette vil vi her kort gøre rede for, idet denne notation netop benyttes i EPO-fraaworket. Notationen følger Pedersen m.fl. (2021).

Vi har fortsat et investeringsunivers med N risikofyldte aktiver og et risikofrit aktiv r_f . De risikofyldte aktiver har merafkast givet ved $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_N)^T$. Investor modtager et signal, \mathbf{s} , om aktiverne, som eksempelvis kan være en form for momentum. Ved brug af dette signal kan investor beregne vektoren af de risikofyldte aktivers betingede forventede merafkast, $\boldsymbol{\alpha} = E[\mathbf{r}|\mathbf{s}]$. Det antages, at investor ser bort fra eventuel støj i \mathbf{s} , og at \mathbf{s} er skaleret, således at $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{s}$. Foruden $\boldsymbol{\alpha}$ beregner investor også en risikomodel i form af kovariansmatricen for merafkast, $\Sigma = \text{Var}(\mathbf{r}|\mathbf{s})$.

Vi kan nu opstille modellen som følgende: Lad W_0 være investors formue i dag. Ved at vælge passende porteføljevægte $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^T$ kan investor maksimere sin formue. Bemærk, at investor således investerer $x_i W_0$ i det i 'te aktiv. Givet valget af \mathbf{x} er investors fremtidige formue givet som $W = W_0(1 + r_f + \mathbf{x}^T \mathbf{r})$. Som tidligere nævnt, ønsker investor at maksimere middelværdi-variansnytten, og ikke blot den endelige formue. Nyten maksimeres med absolut risikoaversion givet ved $\bar{\gamma} = \frac{\gamma}{W_0}$. Således fås, at:

$$\begin{aligned} \text{Formuenytte: } & E(W|\mathbf{s}) - \frac{\bar{\gamma}}{2} \text{Var}(W|\mathbf{s}) = W_0(1 + r_f + \mathbf{x}^T \mathbf{s} - \frac{\bar{\gamma}}{2} \mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x}) \\ \text{Maksimeringsproblem: } & \max_{\mathbf{x}} (\mathbf{x}^T \mathbf{s} - \frac{\bar{\gamma}}{2} \mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x}) \\ \text{Løsning: } & \mathbf{x}^{MVO} = \frac{1}{\bar{\gamma}} \Sigma^{-1} \mathbf{s} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Løsningen, \mathbf{x}^{MVO} , er altså den middelværdi-varians optimerende portefølje, dvs. den portefølje der har den størst mulige Sharpe ratio blandt alle porteføljer. Dog er MVO følsom overfor estimeringsfejl, hvilket belyses i det følgende afsnit.

2.2 Problemer ved MVO

Under antagelse af at der hverken er fejl i estimeringen af kovarianser eller estimeringen af forventede afkast, er MVO den bedste metode til optimering af en porteføljes Sharpe ratio. Dog er støjfrie estimerer sjældne i praksis, hvorfor anvendelse af MVO ofte resulterer i porteføljer med lav performance.

Forventet afkast

MVO medfører en række problemer. Det første problem ligger i bestemmelsen af det forventede afkast. Det forventede afkast kan være svært at forudsige, da det netop er en forventet, teoretisk størrelse, hvorfor der ofte er en del usikkerhed i estimatet. Da MVO er følsom over for input, vil et dårligt estimat føre til et dårligt porteføljevalg.

Betrægt følgende eksempel: Antag to risikofyldte aktiver, der er stærkt positiv korrelerede, dvs. $\sigma_{A,B} \simeq 1$. Aktiv A har et afkast på 2%, mens aktiv B har et afkast på 3%. Strategien vil udnytte den relative forskel

i estimeret forventet afkast under antagelse af høj korrelation: Ved en korrelation tæt på 100% vil det være muligt at gå kort i aktiv A og langt i aktiv B for at udnytte forskellen i det forventede afkast. Denne strategi kan stadig synes attraktiv ved en høj, men mindre end perfekt, korrelation. Problemet opstår, hvis man ikke med sikkerhed kan antage, at de forventede afkast er korrekte. Hvis det viser sig, at aktiv A har et højere afkast end aktiv B, vil strategien føre til negativt afkast. Med en mere realistisk korrelation og usikkerhed omkring de forventede afkast bliver det derfor klart, at MVO-løsningen ikke kan udnyttes uden forbehold. Man er nødt til at tage højde for ovenstående, da modellen ellers kan foreslå en portefølje, der er mere risikabel end antaget.

Afhængighed af estimerede paramenter

Et andet kritikpunkt af MVO er metodens afhængighed af estimerede parametre. Udover forventede afkast skal investor også give estimater på kovarianser for alle aktiver i investeringsuniverset, og ifølge Kolm m.fl. (2014) er det usandsynligt, at investor har en tilstrækkelig dyb forståelse for samtlige aktiver – herunder også en tilstrækkelig forståelse for virksomheder, industrier og sektorer. Det argumenteres, at en investor typisk har et specifikt kompetenceområde for at kunne opnå så høje realiserede afkast som muligt, og at det således er urealistisk at forvente, at investor kan give rimelige estimater på fornævnte parametre. Hertil bemærkes, at der i selve estimeringen også er en usikkerhed i form af estimeringsfejl.

Et yderligere problem opstår ved selve løsningen af optimeringsproblemet: Usikkerheden ved de forskellige inputs fra investors estimater bliver helt ignoreret i mange tilfælde, idet optimeringsproblemet ofte løses som et deterministisk problem, dvs. inputs antages at være kendte og uden usikkerhed og fejl. MVO bruger altså punktestimater for forventede afkast og kovarianser, men behandler dem herefter som værende fejlfri, hvilket ikke er fornuftigt.

Et sidste aspekt af MVO metodens afhængighed af estimerede parametre, som her belyses, er, hvordan estimeringsfejl fører til over- og undervægtede aktiver. Vi følger Kolm m.fl. (2014) og ser på tilfældet, hvor forventede afkast og kovarianser estimeres, og disse størrelsers estimeringsfejl er tilfældigt fordelt med middelværdi nul. I dette tilfælde vil nogle størrelser overestimeres, mens andre underestimeres, og optimeringsprocessen vil alllokere højere (lavere) vægte til aktiver med over- (under-)estimerede forventede afkast og under- (over-)estimerede risici. Jo større estimeringsfejl, desto større bliver indvirkningen på de optimerede vægte. Dette problem relaterer sig direkte til de såkaldte problemporleføljer identificeret af Pedersen m.fl. (2021), som vi vil se nærmere på i følgende afsnit.

2.3 Problemporbeføljer

Problemporbeføljerne er de porbeføljer, der skaber problemer for MVO grundet støjfyldte estimater af forventet afkast og risiko. Disse identificeres vha. Principal Components Analysis (PCA), hvorfor vi i det følgende først præsenterer denne metode. Ved hjælp af PCA kan vi konstruere principale komponentporbeføljer og heraf identificere problemporbeføljerne.

2.3.1 Principal Components Analysis

Dette afsnit bygger på metoder præsenteret i Johnson og Wichern (2013, kapitel 8), men benytter en notation, der er tilpasset resten af opgaven. PCA bruges til at forklare varians-kovarians-strukturen for et sæt af variable gennem linearkombinationer af disse variable. Selvom det kræver N komponenter at reproducere hele systemvariationen, så kan vi ofte forklare størstedelen af denne variation ved at mindre tal $k < N$. Vi kan altså erstatte de oprindelige N variable med k principale komponenter. Ved brug af PCA kan vi i mange tilfælde identificere mønstre eller strukturer i data, som ikke tidligere var åbenlyse, og dermed opnå en mere nuanceret forståelse af datastrukturen.

Principale komponenter er særlige linearkombinationer af stokastiske variable. Bemærk, at antallet af stokastiske variable i vores tilfælde er antallet af aktiver N , dvs. X_1, X_2, \dots, X_N . Formålet med PCA er at finde nye akser – dvs. linearkombinationer – som bedst forklarer variationen i data. Dette gøres ved at rotere det oprindelige koordinatsystem med X_1, X_2, \dots, X_N som koordinatakser, således at de nye akser repræsenterer de retninger, der har maksimal variation. Eksempelvis vil den nye førsteakse pege i den retning, hvor variansen er størst, og er altså den første principale komponent.

Problemet kan opstilles som følger: Lad $\mathbf{X}^T = [X_1, X_2, \dots, X_N]$ være vektoren af stokastiske variable. Vektoren har kovariansmatrix Σ med egenværdier $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$. Vi kan da opskrive følgende linearkombinationer:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \mathbf{h}_1^T \mathbf{X} = h_{11}X_1 + h_{12}X_2 + \dots + h_{1N}X_N \\ Y_2 &= \mathbf{h}_2^T \mathbf{X} = h_{21}X_1 + h_{22}X_2 + \dots + h_{2N}X_N \\ &\vdots \\ Y_N &= \mathbf{h}_N^T \mathbf{X} = h_{N1}X_1 + h_{N2}X_2 + \dots + h_{NN}X_N \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ligning (2-45) i Johnson og Wichern (2013) siger, at linearkombinationerne $\mathbf{Z} = \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{X}$ har kovariansmatrix $\Sigma_{\mathbf{Z}} = \text{Cov}(\mathbf{Z}) = \text{Cov}(\mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{X}) = \mathbf{C}\Sigma_{\mathbf{T}\mathbf{X}}\mathbf{C}^T$. Ved brug af dette resultat fås, at

$$\text{Var}(Y_i) = \mathbf{h}_i^T \Sigma \mathbf{h}_i \quad (2.8)$$

$$\text{Cov}(Y_i, Y_k) = \mathbf{h}_i^T \Sigma \mathbf{h}_k \quad (2.9)$$

De principale komponenter er de ukorrelerede linearkombinationer Y_1, Y_2, \dots, Y_N , der svarer til de største varianser. Den første principale komponent er linearkombinationen med den største varians, den anden principale komponent er linearkombinationen med den næststørste varians og så fremdeles. Idet $\text{Var}(Y_i) = \mathbf{h}_i^T \Sigma \mathbf{h}_i$ kan øges ved at gange ethvert \mathbf{h}_i med en vilkårlig konstant, begrænses disse vektorer til enhedslængde, dvs. $\mathbf{h}_i^T \mathbf{h}_i = 1$. Således kan vi definere

1. principale komp. = $\max_{\mathbf{h}_1^T \mathbf{X}} (\text{Var}(\mathbf{h}_1^T \mathbf{X}))$ u.b. $\mathbf{h}_1^T \mathbf{h}_1 = 1$
 2. principale komp. = $\max_{\mathbf{h}_2^T \mathbf{X}} (\text{Var}(\mathbf{h}_2^T \mathbf{X}))$ u.b. $\mathbf{h}_2^T \mathbf{h}_2 = 1$ og $\text{Cov}(\mathbf{h}_1^T \mathbf{X}, \mathbf{h}_2^T \mathbf{X})$
 - ⋮
 - i 'te principale komp. = $\max_{\mathbf{h}_i^T \mathbf{X}} (\text{Var}(\mathbf{h}_i^T \mathbf{X}))$ u.b. $\mathbf{h}_i^T \mathbf{h}_i = 1$ og $\text{Cov}(\mathbf{h}_i^T \mathbf{X}, \mathbf{h}_k^T \mathbf{X})$ for $k < i$
- (2.10)

Resultat **8.1** i Johnson og Wichern (2013) siger da, at hvis vi lader Σ have egenværdi-egenvektorpar $(\lambda_1, \mathbf{e}_1), (\lambda_2, \mathbf{e}_2), \dots, (\lambda_N, \mathbf{e}_N)$, hvor $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$, så kan vi skrive det i 'te principale komponent som

$$Y_i = \mathbf{e}_i^T \mathbf{X} = e_{i1}X_1 + e_{i2}X_2 + \dots + e_{iN}X_N \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.11)$$

hvor

$$\text{Var}(Y_i) = \mathbf{e}_i^T \Sigma \mathbf{e}_i = \lambda_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.12)$$

$$\text{Cov}(Y_i, Y_k) = \mathbf{e}_i^T \Sigma \mathbf{e}_k = 0 \quad , \quad i \neq k \quad (2.13)$$

Hvis nogle λ_i er ens, så er valg af de korresponderende vektorer, \mathbf{e}_i , og således Y_i , ikke unikke.

Af ligning (2.12) ses, at egenværdierne, λ_i , er lig den tilhørende principale komponents variens. Resultat **8.2** i Johnson og Wichern (2013) giver os yderligere, at summen af alle de principale komponenters varianser er lig den totale populationsvariens – Dvs. summen af alle variables varianser. Således kan vi

beregne andelen af den totale varians forklaret ved den i 'te principale komponent vha. egenværdierne:

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N} , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.14)$$

Hvis størstedelen af den totale populationsvariens kan tilskrives de første 1-3 principale komponenter, så kan vi 'erstatte' de oprindelige N variable med fornævnte komponenter uden særlig meget informationstab.

2.3.2 Principale komponentporteføljer

Ved brug af PCA kan vi nu konstruere de principale komponentporteføljer, som bruges til at identificere problemporbeføljerne.

Til forskel fra foregående afsnit vil analysen basere sig på de principale komponenter for korrelationsmatricen, Ω , og ikke kovariansmatricen, Σ . At analysere korrelationsmatricen svarer til at standardisere de oprindelige variable, så de får ens volatilitet. Således ser vi kun på aktivernes indbyrdes forhold og ikke også deres volatiliteter. Fremadrettet har vi dog fortsat behov for aktivvolatiliteterne, så vi udnytter, at kovariansmatricen kan dekomponeres:

$$\Sigma = \sigma \Omega \sigma \quad (2.15)$$

hvor $\sigma = \text{diag}(\sqrt{\Sigma_{11}}, \sqrt{\Sigma_{22}}, \dots, \sqrt{\Sigma_{NN}})$ er aktivvolatiliteterne. Da vi i dette projekt arbejder med finansiell data, fortolkes de principale komponenter fra ligning (2.10) som porteføljerisikoniveauer, dvs. den første principale komponent er den mest risikofyldte portefølje, og den sidste principale komponent er den mindst risikofyldte portefølje. Det er netop de sidste principale komponenter, der ofte giver anledning til problemer i MVO: Per definition har disse porteføljer den lavest mulige varians blandt alle porteføljer, hvorfor deres risici ofte underestimeres en smule. Selvom de forventede afkast falder med de principale komponenters nummer, dvs. det forventede afkast for den j 'te principale komponent er lavere end det forventede afkast for den i 'te principale komponent for $i > j$, så er de forventede afkast for de laveste principale komponenter for høje relativt til deres realiserede afkast. I MVO vil disse problemporbeføljer således have høje estimerede Sharpe ratios, hvorfor MVO har tendens til at tage højtgearede positioner i disse porteføljer. Det er netop dette, som vi forsøger at undgå ved at bruge Enhanced Portfolio Optimization (Pedersen m.fl., 2021).

Vi finder de principale komponenter, herunder problemporbeføljerne, ved brug af PCA. Betragt følgende egendekomponering af korrelationsmatricen

$$\Omega = P D P^{-1} \quad (2.16)$$

hvor \mathbf{P} -matricens søjler er givet som de principale komponenter (egenvektorer), og \mathbf{D} er en diagonal-matrix med de principale komponenters varianser (egenværdier). De principale komponenter skaleres, så $\mathbf{P}\mathbf{P}^T = \mathbf{I}$, hvormed $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$, dvs. så \mathbf{P} er ortogonal. Givet denne egendekomponering beregnes de principale komponentporteføljers realiserede merafkast som $\mathbf{P}^T\boldsymbol{\sigma}^{-1}\mathbf{r}$ og de forventede merafkast som $\mathbf{s}^p = \mathbf{P}^T\boldsymbol{\sigma}^{-1}\mathbf{s}$. Da \mathbf{D} er en diagonalmatrix, følger det, at de principale komponentporteføljer er ukorrelerede. Således kan optimeringsproblemet fra (2.6) skrives som

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{s} - \frac{\gamma}{2} \mathbf{x}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x} &= (\mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{x})^T \mathbf{s}^p - \frac{\gamma}{2} (\mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{x})^T \mathbf{D} (\mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{z}^T \mathbf{s}^p - \frac{\gamma}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{D} \mathbf{z} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Her er $\mathbf{z} = \mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{x}$ porteføljens vægte, når vi beskriver den med principale komponentporteføljér i stedet for enkeltaktiver. Som i MVO-løsningen fra ligning (2.6) fås, at den optimale porteføljevægt, $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_N]$ for de principale komponenter er

$$\mathbf{z}^{MVO} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{s}^p \quad (2.18)$$

Idet alle principale komponenter er ukorrelerede, betyder ligning (2.18), at risikoen taget i den i 'te principale komponent er proportional med dens Sharpe ratio:

$$\underbrace{z_i^{MVO}}_{\substack{\text{Teoretisk position i portefølje } i}} = \frac{1}{\gamma} \underbrace{\frac{s_i^p}{\sqrt{D_i}}}_{\substack{\text{SR for portefølje } i}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{D_i}}}_{\substack{\text{Gearing for at opnå volatilitet på 1 for portefølje } i}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{D_i}}}_{\substack{\text{Ønsket volatilitet for portefølje } i}} \quad (2.19)$$

Problemporbeføljerne er de principale komponenter med de laveste volatiliteter, $\sqrt{D_i}$. Da disse i MVO vælges som de mindst risikofyldte porbeføljer, vil enhver fejl i risikoestimeringen sandsynligvis lede til underestimering af volatiliteterne for problemporbeføljerne. Desuden vil enhver støj i estimeringen af forventet afkast, s_i^p , ofte være høj i forhold til risikoen. Heraf følger to problematiske støjrelaterede effekter for de laveste principale komponenter i MVO: For det første vil Sharpe ratio være høj, da estimatet af forventet afkast vil have meget støj relativt til risikoen, hvorfor en høj volatilitet for en sådan problemporbefølje ønskes. For det andet geares problemporbeføljerne grundet den lave estimerede risiko for at opnå et givent risikoniveau. Disse effekter medfører, at MVO ofte tager højtgearede positioner i problemporbeføljerne. Yderligere forstærker de to effekter hinanden.

3 Enhanced Portfolio Optimization

Vi ser nu på en metode, der adresserer de problemer ved MVO, som blev beskrevet i det foregående afsnit – specielt dem forårsaget af problemporløfjerne. Som tidligere nævnt, leder MVO ofte til underestimering af problemporløfjernes volatilitet, hvilket medfører, at MVO ofte tager højtgearede positioner i problemporløfjerne. Således kan en løsning på problemerne være at øge den estimerede risiko for problemporløfjerne. Til dette formål kan vi benytte Enhanced Portfolio Optimization (EPO) (Pedersen m.fl., 2021).

I de følgende afsnit redegøres først for den simple EPO, og herefter for den ankrede EPO. Til slut ser vi på den generelle EPO-løsning, herunder EPO-krympningsparameteren w , som kombinerer de to førstnævnte metoder.

3.1 Simpel EPO

Den simple EPO søger at øge den estimerede risiko for problemporløfjerne ved at krympe aktivernes estimerede korrelationer. Vi har fra afsnit 2.3.2, at de principale komponenter kan ses som porløfjer, der ordnes efter graden af risiko, hvor den første principale komponent er den mest risikofyldte porløfje. For at undgå over- og underestimering af varianserne foreslår EPO at krympe de estimerede varianser mod deres gennemsnit. Jf. ligning (2.16) konstrueres de principale komponentporløfjer vha. en egendekomponering af korrelationsmatricen for de oprindelige aktiver: $\Omega = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1}$. Idet vi har at gøre med en korrelationsmatrix med N aktiver, så er $\text{diag}(\Omega) = 1$ for alle i og $\text{trace}(\Omega) = N$. Da vi bruger PCA er altså $\text{trace}(\Omega) = \text{trace}(\mathbf{D}) = \sum_{i=1}^N \lambda_i = N$, hvormed den gennemsnitlige varians af de principale komponentporløfjer er $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$. Vi kan altså krympe varianserne mod deres gennemsnit ved at krympe diagonalmatricen \mathbf{D} mod identitetsmatricen:

$$\tilde{\mathbf{D}} = (1 - \theta)\mathbf{D} + \theta\mathbf{I} \quad (3.1)$$

hvor $\theta \in [0, 1]$ er graden af krympning. Den tilhørende korrelationsmatrix, $\tilde{\Omega}$ er da:

$$\tilde{\Omega} = \mathbf{P} \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}[(1 - \theta)\mathbf{D} + \theta\mathbf{I}] \mathbf{P}^T = (1 - \theta)\Omega + \theta\mathbf{I} \quad (3.2)$$

Til sidst kan en ny kovariansmatrix konstrueres fra $\tilde{\Omega}$:

$$\tilde{\Sigma} = \sigma \tilde{\Omega} \sigma \quad (3.3)$$

Bruges i stedet $\tilde{\Sigma}$ som kovariansmatrix i MVO-løsningen fra ligning (2.6), fås følgende simple EPO-løsning:

$$EPO^s = \frac{1}{\gamma} \tilde{\Sigma}^{-1} s \quad (3.4)$$

Denne krympning er ikke udelukkende med til at adressere fejlene ved kovariansmatricen. Den er også implicit med til at mindske fejlene ved det forventede afkast ved at krympe de principale komponentporteføljers Sharpe ratio. Herved opnås en forbedring i forhold til standard MVO: Den simple EPO formår at anvende tilstrækkelig korrelationsinformation til at forbedre diversifikationen relativt til en ikke-optimeret portefølje, men undgår samtidig at benytte så meget korrelationsinformation, at den løber ind i de samme problemer som den klassiske MVO (Pedersen m.fl., 2021).

3.2 Ankret EPO

Hvor den simple EPO søger at mindske fejlene i de principale komponenters varianser, så søger den ankredte EPO at mindske de estimeringsfejl, der ofte følger af estimeringen af de forventede afkast. Her benyttes en Bayesiansk tilgang, der er i retning af den af Black-Litterman (Pedersen m.fl., 2021).

Lad investor observerer en signalvektor $s = \mu + \epsilon$. Her er μ det sande, men ikke-observerbare forventede afkast, og ϵ er et støjled. Sidstnævnte fanger estimeringsfejlene i det forventede afkast, og er normalfordelt med middelværdi 0 og kovarians på Λ . Bemærk, at standard MVO antager, at $s = \mu$. Det antages altså, at signalet er lig med det forventede afkast uden at tage højde for støj. I modsætning hertil skal investor i den ankredte EPO forsøge at estimere det sande forventede afkast, μ , baseret på et støjfyldt signal. Der antages en Bayesiansk investor, hvilket betyder, at investor opdaterer sine forudgående antagelser om μ for at have bedre mulighed for at estimere det sande forventede afkast. Investor skal altså estimerer μ givet s : $E(\mu|s)$. Investors forudgående antagelser vedrørende μ er givet ved

$$\mu = \gamma \Sigma a + \eta \quad (3.5)$$

hvor $\gamma \Sigma a$ er en konstant, og η repræsenterer tilfældige udsving. Det antages, at $\eta \sim N(0, \tau \Sigma)$ for en konstant τ .

Første led i ligning (3.5) er det ubetingede gennemsnitlige afkast, og er et produkt af investors risikoaversion, γ , kovariansmatricen, Σ , samt en ankerportefølje, a . Ankerporteføljen er investors 'typiske portefølje', som eksempelvis kunne være markedsporteføljen eller $1/N$. Hertil bemærkes, at når de forventede afkast er ved deres gennemsnitlige værdi, dvs. når $\eta = 0$ i ligning (3.5), så er den optimale

portefølje givet ved ankeret:

$$\boldsymbol{\eta} = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \frac{1}{\gamma} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} = \frac{1}{\gamma} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a} + \mathbf{0}) = \mathbf{a} \quad (3.6)$$

Udover \mathbf{a} introduceres yderligere to nye parametre: $\boldsymbol{\Lambda}$, der er mængden af fejl i observationerne, og τ , der indikerer variationen i investors optimale portefølje. Vi vender tilbage til disse tre parametre senere.

Modellen kan nu løses. Først beregnes det forventede afkast givet investors signal og forudgående antagelser, $E(\boldsymbol{\mu}|\mathbf{s})$. Det benyttes, at $\boldsymbol{\mu}$ er normalfordelt, hvormed følgende resultat fra Dalgaard (2024, s. 9) om betinget middelværdi i den flerdimensionale normalfordeling gælder:

$$E(\mathbf{Y}_1|\mathbf{Y}_2) = \boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{Y}_2 - \boldsymbol{\mu}_2) = E(\mathbf{Y}_1) + \text{Cov}(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2)\text{Var}(\mathbf{Y}_2)^{-1}(\mathbf{Y}_2 - E(\mathbf{Y}_2)) \quad (3.7)$$

Med $\mathbf{s} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\epsilon}$ og $\boldsymbol{\mu}$ givet ved ligning (3.5) er

$$E(\boldsymbol{\mu}) = E(\gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a} + \boldsymbol{\eta}) = E(\gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a}) + E(\boldsymbol{\eta}) = \gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a} + E(\boldsymbol{\eta}) = \gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a} + 0 = \gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a} \quad (3.8)$$

$$E(\mathbf{s}) = E(\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\epsilon}) = E(\boldsymbol{\mu}) + E(\boldsymbol{\epsilon}) = \gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a} + 0 = \gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a} \quad (3.9)$$

$$\text{Var}(\mathbf{s}) = \text{Var}(\gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a} + \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\epsilon}) = \text{Var}(\boldsymbol{\eta}) + \text{Var}(\boldsymbol{\epsilon}) = \tau \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Lambda} \quad (3.10)$$

og

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) &= E(\boldsymbol{\mu}\mathbf{s}) - E(\boldsymbol{\mu})E(\mathbf{s}) = E[(\gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a} + \boldsymbol{\eta})(\gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a} + \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\epsilon})] - (\gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a})^T(\gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a}) \\ &= E[(\gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a})^T(\gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a}) + 2\gamma \mathbf{a} \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\Sigma} + \gamma \mathbf{a} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\eta}^2 + \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\epsilon}] - (\gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a})^T(\gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a}) \\ &= E(\boldsymbol{\eta}^2) = \text{Var}(\boldsymbol{\eta}) = \tau \boldsymbol{\Sigma} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dermed er det forventede afkast givet investors signal og forudgående antagelser

$$\begin{aligned}
E(\boldsymbol{\mu}|\mathbf{s}) &= E(\boldsymbol{\mu}) + \text{Cov}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) \text{Var}(\mathbf{s})^{-1}(\mathbf{s} - E(\mathbf{s})) \\
&= \gamma \Sigma \mathbf{a} + \tau \Sigma (\tau \Sigma + \Lambda)^{-1}(\mathbf{s} - \gamma \Sigma \mathbf{a}) \\
&= \gamma \Sigma \mathbf{a} + \tau \Sigma (\tau \Sigma + \Lambda)^{-1}\mathbf{s} - \tau \Sigma (\tau \Sigma + \Lambda)^{-1}\gamma \Sigma \mathbf{a} \\
&\stackrel{(3.12)}{=} \tau \Sigma (\tau \Sigma + \Lambda)^{-1}\mathbf{s} + \gamma \Sigma [\mathbf{I} - (\tau \Sigma + \Lambda)^{-1}\tau \Sigma] \mathbf{a} \\
&= \tau \Sigma (\tau \Sigma + \Lambda)^{-1}\mathbf{s} + \gamma \Sigma (\mathbf{I} + \Lambda^{-1}\tau \Sigma)^{-1} \mathbf{a} \\
&= \tau \Sigma (\tau \Sigma + \Lambda)^{-1}\mathbf{s} + \gamma \Sigma (\Lambda^{-1}(\Lambda + \tau \Sigma))^{-1} \mathbf{a} \\
&= \tau \Sigma (\tau \Sigma + \Lambda)^{-1}\mathbf{s} + \gamma \Sigma (\tau \Sigma + \Lambda)^{-1} \Lambda \mathbf{a} \\
&= \Sigma (\tau \Sigma + \Lambda)^{-1}(\tau \mathbf{s} + \gamma \Lambda \mathbf{a})
\end{aligned}$$

hvor det fjerde lighedstegn fås ved brug af Woodburys formel, som findes i Henderson og Searle (1981, ligning 2)

$$(\mathbf{A} - \mathbf{U}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{V})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{D} - \mathbf{V}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}\mathbf{A}^{-1} \quad (3.12)$$

Investors forventede afkast er altså

$$E(\boldsymbol{\mu}|\mathbf{s}) = \Sigma (\tau \Sigma + \Lambda)^{-1}(\tau \mathbf{s} + \gamma \Lambda \mathbf{a}) \quad (3.13)$$

Løsningen til optimeringsproblemet findes ved at indsætte (3.13) for \mathbf{s} i den klassiske MVO-løsning, jf. ligning (2.6):

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \Sigma (\tau \Sigma + \Lambda)^{-1}(\tau \mathbf{s} + \gamma \Lambda \mathbf{a}) = \frac{1}{\gamma} (\tau \Sigma + \Lambda)^{-1}(\tau \mathbf{s} + \gamma \Lambda \mathbf{a}) \quad (3.14)$$

Med udgangspunkt i den klassiske MVO-løsning ses, at (3.14) substituerer Σ med $(\tau \Sigma + \Lambda)^{-1}$ og \mathbf{s} med $\tau \mathbf{s} + \gamma \Lambda \mathbf{a}$. Altså skaleres både middelværdi og varians for at tage højde for det støjfylde signal, selvom vi tidligere kun antog, at middelværdien indeholdt fejl.

3.3 Generel EPO

Dette afsnit drejer sig om den generelle EPO, som er en forening af den simple EPO og den ankrede EPO. De to metoder forsøger at løse hver deres problem: Den simple EPO søger at mindske estimeringsfejl i kovariansmatricen, mens den ankrede EPO søger at mindske estimeringsfejl i forventet afkast. I afsnit 3.1 sås, at problemet med estimeringsfejl i kovariansmatricen kunne løses ved at krympe de oprindelige

aktivers estimerede korrelationer, og vi fik den simple EPO-løsning givet ved ligning (3.4). I afsnit 3.2 sås, at problemet med estimeringsfejl i forventet afkast kunne løses ved en Bayesiansk tilgang, hvor det forventede afkast baseres på, at investor opdaterer sine forudgående antagelser om det sande forventede afkast, μ , givet signalet, s . Vi fik den ankrede EPO-løsning givet ved ligning (3.14).

Hvis disse to metoder forenes, fås den generelle EPO-løsning

$$EPO = \frac{1}{\gamma}(\tau \tilde{\Sigma} + \Lambda)^{-1}(\tau s + \gamma \Lambda a) \quad (3.15)$$

Den generelle EPO-løsning, (3.15), afhænger af en række forskellige parametre. Som i den oprindelige klassiske MVO-løsning (2.6) har vi parametrene Σ og s . Kovariansmatricen Σ kan estimeres på sædvanelig vis ud fra et givent datasæt, og kan yderligere forbedres ved at krympe aktivernes korrelationer, som beskrevet i afsnit 3.1, for at opnå $\tilde{\Sigma}$. Signalet s vælges af investor og er det afkastsignal, som estimeringen af det forventede afkast baseres på. De resterende fire parametre i den generelle EPO-løsning – a , γ , τ og Λ – er lidt sværere at estimere, hvorfor vi må lave nogle antagelser om disse parametre.

Λ er en usikkerhedsmatrix, og her antages, at fejl i estimeringen af forventede afkast er uafhængig på tværs af aktiver, dvs. ingen korrelation, hvormed Λ bliver en diagonalmatrix. Vi kan således udtrykke Λ som en skalering af de oprindelige aktivers varianser: $\Lambda = \lambda V$, hvor λ er en konstant og $V = \sigma^2$.

Ankeret, a , vælges af investor. Denne vender vi tilbage til i senere afsnit.

Vi ser nu på parametrene τ og λ , hvor sidstnævnte kommer fra udtrykket for Λ . Ifølge Pedersen m.fl. (2021) forsvinder disse parametre, hvis vi definerer EPO-krympningsparameteren $w = \frac{\lambda}{\tau+\lambda} \in [0, 1]$. Således behøves vi ikke længere bekymre os om τ og λ , men skal blot holde øje med deres relative

størrelser. Indsættes $\Lambda = \lambda \mathbf{V}$ og $w = \frac{\lambda}{\tau + \lambda} \Leftrightarrow \tau = \frac{\lambda(1-w)}{w}$ i ligning (3.15) fås:

$$\begin{aligned}
\mathbf{EPO} &= \frac{1}{\gamma} (\tau \tilde{\Sigma} + \Lambda)^{-1} (\tau \mathbf{s} + \gamma \Lambda \mathbf{a}) \\
&= \frac{1}{\gamma} \left(\left(\frac{\lambda(1-w)}{w} \right) \tilde{\Sigma} + (\lambda \mathbf{V}) \right)^{-1} \left(\left(\frac{\lambda(1-w)}{w} \right) \mathbf{s} + \gamma (\lambda \mathbf{V}) \mathbf{a} \right) \\
&= \frac{1}{\gamma} \left[\frac{1}{\lambda} \left(\left(\frac{1-w}{w} \right) \tilde{\Sigma} + \mathbf{V} \right)^{-1} \right] \left[\lambda \left(\left(\frac{1-w}{w} \right) \mathbf{s} + \gamma \mathbf{V} \mathbf{a} \right) \right] \\
&= \frac{1}{\gamma} \left[\left(\frac{w}{1-w} \right) \left(\tilde{\Sigma} + \left(\frac{w}{1-w} \right) \mathbf{V} \right)^{-1} \right] \left[\left(\frac{1-w}{w} \right) \left(\mathbf{s} + \left(\frac{w}{1-w} \right) \gamma \mathbf{V} \mathbf{a} \right) \right] \\
&= \frac{1}{\gamma} \left[\left(\tilde{\Sigma} + \left(\frac{w}{1-w} \right) \mathbf{V} \right)^{-1} \right] \left[\mathbf{s} + \left(\frac{w}{1-w} \right) \gamma \mathbf{V} \mathbf{a} \right] \\
&= \frac{1}{\gamma} \left[((1-w)\tilde{\Sigma} + w\mathbf{V})^{-1} \right] [(1-w)\mathbf{s} + w\gamma\mathbf{V}\mathbf{a}] \\
&= \left[((1-w)\tilde{\Sigma} + w\mathbf{V})^{-1} \right] \left[\frac{1}{\gamma} ((1-w)\mathbf{s} + w\gamma\mathbf{V}\mathbf{a}) \right] \\
&= \left[((1-w)\tilde{\Sigma} + w\mathbf{V})^{-1} \right] \left[(1-w)\frac{1}{\gamma}\mathbf{s} + w\mathbf{V}\mathbf{a} \right]
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Indholdet i den første parantes i (3.16) erstattes med et udtryk for en krympet kovariansmatrix, Σ_w , som er en funktion af EPO-krympningsparameteren w . Den tilhørende korrelationsmatrix for Σ_w er den krympede korrelationsmatrix fra ligning (3.2), $\tilde{\Omega}$:

$$\Sigma_w = (1-w)\tilde{\Sigma} + w\mathbf{V} = \boldsymbol{\sigma}[(1-w)\tilde{\Omega} + w\mathbf{I}]\boldsymbol{\sigma} \tag{3.17}$$

Ved indsættelse af (3.17) i ligning (3.16) kan den generelle EPO-løsning som funktion af w opskrives som følgende:

$$\mathbf{EPO}(w) = \overbrace{\left[((1-w)\tilde{\Sigma} + w\mathbf{V})^{-1} \right]}^{\Sigma_w^{-1}} \left[(1-w)\frac{1}{\gamma}\mathbf{s} + w\mathbf{V}\mathbf{a} \right] = \Sigma_w^{-1} \left[(1-w)\frac{1}{\gamma}\mathbf{s} + w\mathbf{V}\mathbf{a} \right] \tag{3.18}$$

EPO-krympningsparameteren w har stor betydning i den empiriske implementation, eftersom den både kontrollerer krympning af det forventede afkast, samt krympning af korrelationerne mod 0. Det følger, at der for $w = 0$ fås MVO-løsningen, da (3.17) blot bliver $\tilde{\Sigma}$. Ved $w = 100\%$ fås ankerporteføljen, da (3.17) blot bliver \mathbf{V} .

Ligning (3.18) skrives som funktion af w , da w vælges empirisk. Valget afhænger af τ og λ : Den optimale

EPO-krymningsparameter bliver større, når data udviser større estimationsfejl for det forventede afkast, eksempelvis som følge af lav datakvalitet. I sådanne tilfælde vil w stige i λ . På den anden side vil den optimale EPO-krympningsparameter blive lavere, når det sande forventede afkast svinger mere. I sådanne tilfælde falder w i τ .

Omskrivning til simpel EPO

Vi viser her, hvordan den simple EPO-løsning kan findes ud fra den generelle EPO-løsning fra ligning (3.18).

Lad ankerporteføljen være givet ved $\mathbf{a} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{s}$. Vi kan da udtrykke den simple EPO som et specialtilfælde af den generelle EPO:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{EPO}^s(w) &= \Sigma_w^{-1} \left[(1-w) \frac{1}{\gamma} \mathbf{s} + w \mathbf{V} \mathbf{a} \right] \\
 &= \Sigma_w^{-1} \left[(1-w) \frac{1}{\gamma} \mathbf{s} + w \mathbf{V} \left(\frac{1}{\gamma} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{s} \right) \right] \\
 &= \Sigma_w^{-1} \left[\frac{1}{\gamma} \mathbf{s} - \frac{1}{\gamma} w \mathbf{s} + \frac{1}{\gamma} w \mathbf{V} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{s} \right] \\
 &= \Sigma_w^{-1} \left[\frac{1}{\gamma} \mathbf{s} - \frac{1}{\gamma} w \mathbf{s} + \frac{1}{\gamma} w \mathbf{s} \right] \\
 &= \frac{1}{\gamma} \Sigma_w^{-1} \mathbf{s}
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Det ses, at denne løsning svarer til den klassiske MVO-løsning. Dog er kovariansmatricen, Σ , den krympede kovariansmatrix $\tilde{\Sigma}$ tilhørende korrelationsmatricen $\tilde{\Omega}$, som krympes med faktoren θ . Herefter anvendes EPO-krympningsparameteren w , hvilket giver den krympede kovariansmatrix fra (3.17).

Som tidligere nævnt, tager den simple EPO højde for fejl forbundet med kovariansestimering. Omskrivningen af den generelle EPO til den simple EPO viser, at krympning af korrelationer fungerer som et middel til at afbøde disse fejl. Den simple EPO fra ligning (3.19) krympes dog yderligere sammenlignet med den oprindelige version fra ligning (3.4). Dette skyldes, at den generelle EPO også tager højde for estimeringsfejl i de forventede afkast, som ligeledes kan afbødes med korrelationskrympning.

Desuden er udtrykket fra (3.19) lineært i risikoaversion, γ . Det betyder, at performancemål, såsom Sharpe ratio, ikke afhænger af risikoaversionen. Således er udtrykket nemt at implementere, da vi kan sætte γ til ethvert ønskeligt risikoniveau.

Omskrivning til ankret EPO

Vi viser her, hvordan den ankrede EPO-løsning kan findes ud fra den generelle EPO-løsning fra ligning (3.18).

Nogle investorer foretrækker at binde deres porteføljer til et anker. I den generelle EPO-løsning, ligning (3.15), skal nogle af parametrene vælges eksplisit af investor. Givet at investor ønsker at binde sine porteføljer til et anker, \mathbf{a} , skal investor selv vælge dette anker. \mathbf{a} kan eksempelvis være den ligevægtede portefølje $1/N$ eller $1/\sigma$ -porteføljen, hvor sidstnævnte tildeler hvert aktiv den samme volatilitet. Når ankeret er valgt, skal investor vælge et signal, \mathbf{s} , til brug for estimeringen af de sande forventede afkast, μ . Signalet kan eksempelvis baseres på momentum.

Når investor har valgt \mathbf{a} og \mathbf{s} , kender vi alle input i den generelle EPO-løsning undtagen parametrene w og λ . Som tidligere nævnt, vælges $w \in [0, 1]$ empirisk, så vi mangler kun en måde at vælge risikoaversionen, λ , på. Risikoaversionen ligger typisk mellem 0 og 10 (Pedersen m.fl., 2021), og baseres eksempelvis på investors præferencer. Dog kan λ ikke direkte implementeres i ligning (3.15), før man har sikret sig, at afkastsignalet, \mathbf{s} , og det sande forventede afkast, μ , måles i de rigtige enheder. Signalet skal altså ikke kun forudsige afkast, men skal også skaleres, således at hvis $s_i = 2\%$, så skal det forventede afkast estimeres til 2% for aktiv i .

Vi kan dog også bruge en anden type afkastsignal i (3.15): Antag, at vi ikke kender forholdet mellem signalet og det forventede afkast, men at signalet er proportionalt til det forventede afkast. Et eksempel på et sådant signal er et momentumsignal, da det udelukkende angiver retningen [’sign’] på de forventede afkast, men ikke størrelsen. Idet den generelle EPO-løsning er en kombination af ankerporteføljen, \mathbf{a} , og porteføljen $\frac{1}{\gamma} \Sigma_w^{-1} \mathbf{s}$ (jf. ligning (3.19)), kan investor vælge γ , så de to porteføljer bidrager ligeligt til risikoen i den samlede portefølje. Dvs. vælge γ , så de to porteføljer har samme varians:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{a}) &= \mathbf{a}^T \tilde{\Sigma} \mathbf{a} \wedge \text{Var}\left(\frac{1}{\gamma} \Sigma_w^{-1} \mathbf{s}\right) = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 \text{Var}(\Sigma_w^{-1} \mathbf{s}) = \frac{1}{\gamma^2} (\mathbf{s}^T \Sigma_w^{-1}) \tilde{\Sigma} (\Sigma_w^{-1} \mathbf{s}) \\ \text{Var}(\mathbf{a}) &= \text{Var}\left(\frac{1}{\gamma} \Sigma_w^{-1} \mathbf{s}\right) \Leftrightarrow \mathbf{a}^T \tilde{\Sigma} \mathbf{a} = \frac{1}{\gamma^2} (\mathbf{s}^T \Sigma_w^{-1}) \tilde{\Sigma} (\Sigma_w^{-1} \mathbf{s}) \Leftrightarrow \frac{1}{\gamma} = \frac{\sqrt{\mathbf{a}^T \tilde{\Sigma} \mathbf{a}}}{\sqrt{(\mathbf{s}^T \Sigma_w^{-1}) \tilde{\Sigma} (\Sigma_w^{-1} \mathbf{s})}} \end{aligned}$$

Altså skal investor vælge γ , så

$$\gamma = \frac{\sqrt{(\mathbf{s}^T \Sigma_w^{-1}) \tilde{\Sigma} (\Sigma_w^{-1} \mathbf{s})}}{\sqrt{\mathbf{a}^T \tilde{\Sigma} \mathbf{a}}} \quad (3.20)$$

Indsættes ligning (3.20) for γ i den generelle EPO-løsning fra ligning (3.18), fås den generelle ankrede EPO-løsning som funktion af w :

$$EPO^a(w) = \Sigma_w^{-1} \left[(1-w) \frac{1}{\gamma} \mathbf{s} + w \mathbf{V} \mathbf{a} \right] = \Sigma_w^{-1} \left[(1-w) \frac{\sqrt{\mathbf{a}^T \tilde{\Sigma} \mathbf{a}}}{\sqrt{(\mathbf{s}^T \Sigma_w^{-1}) \tilde{\Sigma} (\Sigma_w^{-1} \mathbf{s})}} \mathbf{s} + w \mathbf{V} \mathbf{a} \right] \quad (3.21)$$

Ligning (3.21) er den generelle ankrede EPO-løsning for at anker, \mathbf{a} , baseret på EPO-krympningsparameteren w . Risikoaversionen, λ , vælges endogent.

4 Litteraturgennemgang

EPO er kun en af mange porteføljeoptimeringsmetoder. Emnet porteføljeoptimering er et centralet forskningsområde inden for finansiel økonomi og har længe været genstand for både teoretisk og empirisk behandling i den akademiske litteratur. Som beskrevet, danner MVO (Markowitz, 1952) grundlaget for den moderne porteføljeteori, og er hjørnestenen i de nyere porteføljeoptimeringsteorier, som benyttes i dag. Vi vil i det følgende se på nogle af disse metoder, som hver på sin vis relaterer sig til EPO (Pedersen m.fl., 2021).

Forbedring af kovarianseestimater via krympning

Et af de centrale problemer i porteføljeoptimering er estimeringsfejl i kovariansmatricen. Ledoit og Wolf (2003) adresserer dette problem ved at bruge krympning til at forbedre estimatet. Metoden tager bygger videre på MVO, hvor de optimale porteføljevægte afhænger af den inverse kovariansmatrix (jf. afsnit 2.1). Hvis den estimerede kovariansmatrix er ill-conditioned og dermed tæt på at være singulær, kan invertering forstærke estimeringsfejl yderligere. Den estimerede kovariansmatrix vil altid være singulær, hvis antallet af aktiver, N , er større end antallet af historiske afkast per aktiv, T . De foreslår derfor at krympe den estimerede kovariansmatrix med en empirisk estimeret faktor, \hat{S} , som er et vægtet gennemsnit af to positivt semidefinitte matricer: En single-index model, som er invertibel, samt den estimerede kovariansmatrix. Deres resultater viser, at metoden giver lavere out-of-sample risiko i minimumsvariansporteføljer sammenlignet med en række eksisterende estimatorer, herunder industrifaktorer baseret på industriporteføljer og krympning mod identitetsmatricen. Sidstnævnte performede dog næstbedst.

Risikomodellering med principale komponenter

Vi fortsætter her med at se på metoder, der adresserer problemet med estimeringsfejl i kovariansmatricen. Udenfor singularitetsproblemet, nævnt i forrige afsnit, kan der også opstå et problem kaldet fejlmaksimering. Store empiriske kovariansmatricer indeholder mange volatilitetsestimater samt parvise kovarianseestimater, hvilket fører til outliers, der kan dominere den optimerede portefølje. På baggrund heraf præsenterer Clarke m.fl. (2006) en metode, der, ligesom Ledoit og Wolf (2003), søger at give struktur til den empiriske kovariansmatrix, men her ved brug af principale komponenter og Bayesiansk krympning. Resultaterne viser at strukturering af den empiriske kovariansmatrix via principale komponenter giver nogle rimelige korrelationestimater mellem aktiver. I tilfælde af store datasæt – og tilsvarende store empiriske kovariansmatricer – er det dog ikke ualmindeligt, at flere af de individuelle aktiver får estimeret lave standardafvigelser. Optimeringsmodellen har da tendens til at overinvestere i disse aktiver uden at tage hensyn til korrelationestimaterne, hvis der ikke er en vægtbegrænsning inkorporeret i modellen. De ekstreme estimater af både korrelationer og kovarianser kan dog, som Clarke m.fl. (2006) også viser, afhjælpes med den Bayesianske krympningsmetode udviklet af Ledoit og Wolf (2003).

Støj i forventede afkast

Et andet centralt problem i porteføljeoptimering er støj i det forventede afkast. I denne forbindelse fremstætter Black og Litterman (1992) en teori til forbedring af estimeringen af det forventede merafkast. Black-Litterman modellen bygger ligeledes videre på MVO, og kritiserer metoden for at være meget sensitiv over for selv små ændringer i det forventede merafkast. Black-Litterman kombinerer investors subjektive syn på afkast med markedsrigevægten: Der er to kilder til information om det forventede merafkast, nemlig investors syn og markedsrigevægten. Begge kilder antages at være usikre, og de kan bedst udtrykkes som sandsynlighedsfordelinger – specielt multivariat normalfordelt. I fravær af subjektive syn er den optimale portefølje givet ved den globale markedsportefølje (Kolm m.fl., 2021), som dermed fungerer som anker i Black-Litterman modellen. Herved opnås et mere robust og stabilt estimat af det forventede merafkast, som – i modsætning til MVO – afspejler både markedets forventninger og investorens egne vurderinger.

EPO: Forening af litteraturen

Metoderne beskrevet ovenfor relaterer sig alle til EPO (Pedersen m.fl., 2021). EPO søger at indlemme flere forskellige optimeringsmetoder, herunder Clarke m.fl. (2006), hvis metode søger at strukturere den

empiriske kovariansmatrix via principale komponenter. EPO benytter sig ligeledes af principale komponenter, specielt til identificering af de porteføljer, der leder til problemer for MVO, jf. afsnit 2.3.2.

EPO læner sig også op ad Ledoit og Wolf (2003), der krymper den estimerede kovariansmatrix i et forsøg på at forbedre dennes estimat. Dog bruger EPO en dobbelt krympning, via hhv. θ og w , og metoden benytter en betydeligt stærkere krympning. Dette skyldes, at der tages højde for estimeringsfejl i både kovariansmatrix og forventet afkast (Pedersen m.fl., 2021).

Black og Litterman (1992) var blandt de første til systematisk at adressere problemet med estimeringsfejl i de forventede afkast. Det kan vises, at den generelle EPO-løsning, ligning (3.15), er lig med den Bayesianske estimator, $E(\mu|s)$, givet ved ligning (3.13). Denne er ækvivalent med Black-Litterman, når 1) ankerporteføljen er markedsporteføljen, 2) signalet er givet ved investors subjektive syn, og 3) det antages, at kovariansmatricen ikke har estimeringsfejl (Pedersen m.fl., 2021). Til forskel fra Black-Litterman, der udelukkende ankres i markedsporteføljen, tillader EPO vilkårlige ankre samt intet anker overhovedet.

5 Rammer for implementering

Som bro mellem den teoretiske gennemgang og den empiriske analyse beskrives i dette afsnit de metodiske rammer for implementeringen af EPO. Først introduceres de performancemål, der anvendes til evaluering af porteføljerne, og efterfølgende præsenteres de anvendte afkastsignaler, risikomodeller og porteføljekonstruktioner. Sluttligt beskrives de benchmarks, som porteføljerne holdes på imod.

5.1 Performancemål

Vi vil benytte to forskellige performancemål: Sharpe ratio samt alfa fra regressionen på de fem Fama-French faktorer. Disse mål gør det muligt at sammenligne de konstruerede porteføljers performance, hvilket er grundlaget for analyseafsnittet.

5.1.1 Fama-French femfaktormodel

Fama-French femfaktormodel er en femfaktorregressionsmodel, der anvendes til at estimere en strategis α og β 'er. β^i angiver strategiens eksponering mod risikofaktor i , mens α måler strategiens merafkast justeret for de fem risikofaktorer (Pedersen, 2015). Modellen ser ud som følger:

$$r_t^e = \alpha + \beta^M r_t^{M,e} + \beta^{HML} r_t^{HML} + \beta^{SMB} r_t^{SMB} + \beta^{RMW} r_t^{RMW} + \beta^{CMA} r_t^{CMA} + \epsilon_t \quad (5.1)$$

Den er altså en multipel lineær regression, og intercept (α) samt regressionskoefficienterne (β^i 'erne) findes ved at benytte OLS. De fem risikofaktorer beskrives kort herunder med udgangspunkt i beskrivelserne fra French (2025):

$r^{m,e}$ er merafkastet for den værdivægtede markedsportefølje i forhold til den risikofrie rente. Fama-French femfaktormodellen forklarer aktivers forventede afkast ud fra fem systematiske risikofaktorer: r^{SMB} ("Small-Minus-Big") er forskellen i afkast mellem diversificerede porteføljer med lav og høj markedsværdi. SMB konstrueres som merafkastet ved at være lang i small-cap aktier (aktiver med lav markedsværdi) og kort i big-cap aktier (aktiver med høj markedsværdi). r^{HML} ("High-Minus-Low") er forskellen i afkast mellem diversificerede porteføljer af aktiver med hhv. høj og lav book-to-market ratio (B/M). HML går langt i aktiver med høj B/M (value-aktiver) og kort i aktiver med lav B/M (growth-aktiver). r^{RMW} ("Robust-Minus-Weak") er forskellen i afkast mellem diversificerede porteføljer af aktiver med hhv. robust og svag rentabilitet. RMW går lang i porteføljer med robust rentabilitet og kort i porteføljer med svag rentabilitet. Den sidste faktor er r^{CMA} ("Conservative-Minus-Aggressive"), som er forskellen i afkast mellem diversificerede porteføljer af hhv. lave (konservative) og høje (aggressive) investeringsvirksomheder.

Bemærk, at porteføljerne nævnt i ovenstående beskrivelser alle er værdivægtede. Desuden måler ϵ_t den idiosynkratiske risiko og har middelværdi nul.

Ved at kontrollere for de fem risikofaktorer kan vi vurdere, om de konstruerede porteføljer genererer merafkast ud over, hvad modellen kan forklare. Hvis de fem risikofaktorer fanger al variation i de forventede afkast, vil den udførte regressions intercept være nul, dvs. $\alpha = 0$, for alle aktiver i portefølje i . Således testes nulhypotesen $H_0 : \alpha = 0$. Hvis nulhypotesen forkastes, indikerer det, at modellen ikke fuldstændigt kan forklare det observerede afkast, og at strategien dermed har et signifikant (positivt eller negativt) merafkast.

Hypotesetest

I forbindelse med femfaktormodellen er vi nødt til at kunne skelne mellem statistisk signifikant og insig-nifikant performance. Da modellen er en multipel lineær regression, kan vi benytte to-sidede hypotesetest til at teste signifikans af både koefficienterne og interceptet. Vi tester mod

$$H_0 : \beta^i = 0$$

$$\text{Teststørrelse} : T = \frac{\hat{\beta}^i}{S\sqrt{c_i}} \sim t_\nu$$

hvor $S\sqrt{c_i}$ er standardfejlen for koefficientestimatet $\hat{\beta}_i$, og T er t -fordelt med $\nu = n - k - 1$ frihedsgrader under H_0 . Her er n mængden af observationer, og k er antallet af koefficienter. Vi bestemmer den statistiske signifikans på et $\alpha = 5\%$ signifikansniveau på baggrund af den observerede værdi t_{obs} af T som p -værdien $p = 2 \cdot P(T \geq |t_{obs}|)$ (Rønn-Nielsen, 2024, s. 10–13).

5.1.2 Sharpe ratio

I ovenstående afsnit blev α introduceret, som en strategis merafkast justeret for eksponering mod fem Fama-French faktorer, og objektivt er et positivt merafkast, $\alpha > 0$, bedre end et negativt. Det forholder sig dog ikke sådan, at en strategi med et højt $\alpha > 0$ kan siges at være bedre end en strategi med et lavere $\alpha > 0$. Dette skyldes gearing: Hvis en strategi geares med eksempelvis k , vil denne have $k\alpha$, mens en ugearet strategi har α . Desuden fortæller α heller ikke noget om risikoen forbundet med det afkast, som strategien leverer (Pedersen, 2015).

Brug af risiko-belønningsratioer kan dog løse disse problemer. Derfor vil vi også benytte os af en sådan ratio, nemlig Sharpe ratio. Sharpe ratio er et mål for forholdet mellem fremtidige forventede merafkast, $E(r^e)$, og risikoen forbundet med dette afkast, $\sigma(r^e)$, og kaldes også det risikojusterede afkast. Den beregnes som

$$SR = \frac{E(r^e)}{\sigma(r^e)}, \quad r^e = r - r_f \tag{5.2}$$

hvor r_f er den risikofrie rente.

Det fremgår af ligning (5.2), at Sharpe ratio stiger, jo større det forventede merafkast er relativt til risikoen. Altså foretrækkes en høj Sharpe ratio fremfor en lav.

5.2 Afkastssignaler

Til implementeringen af EPO er der behov for et signal om det forventede afkast. Vi vil benytte to forskellige typer af momentumsignaler: Time series momentum (TSMOM) og cross-sectional momentum (XSMOM). Herved testes robustheden af EPO, da EPO-porteføljerne er afhængige af signalinngabet. De to typer signaler er baseret på historisk data, og gennemgangen følger primært Moskowitz m.fl. (2012). Generelt kan EPO bruge enhver prædiktor om fremtidige afkast til signalet. Den kan også bruge en kombination af prædiktorer, så der behøves altså ikke at være udelukkende ét input til signalet. I dette projekt benyttes dog kun en prædiktor ad gangen, TSMOM eller XSMOM, til at estimere det sande forventede afkast.

5.2.1 Time Series Momentum

Time series momentum er en strategi, der essentielt følger trends i markedet: Den går langt i et marked, der har oplevet positive merafkast over en bestemt look-back periode, og kort i et marked, der har oplevet negative merafkast (Pedersen, 2015, s. 209). Strategien fokuserer altså udelukkende på aktivers egne tidligere afkast, og ifølge Moskowitz m.fl. (2012) vil en look-back periode på $k = 12$ måneder være effektiv, da der er en statistisk signifikant sandsynlighed for, at et aktivs afkast fortsætter i samme retning (positiv eller negativ) i op til et år. Efter et år vil denne tendens gradvist vende.

I praksis kan vi identificere trends ved at se på hvert aktivs merafkasts 'sign': Hvis merafkastet er positivt, indgår aktivet med en lang position i porteføljen, og hvis merafkastet er negativt, indgår aktivet med en kort position i porteføljen. Vi anvender en $k = 12$ måneders rullende look-back periode, da denne er mest effektiv (Moskowitz m.fl., 2012), samt en $h = 1$ måneds holding periode, da vi rebalancerer porteføljerne månedligt. Således er signalet givet ved

$$s_t^i = 0.1 \cdot \sigma_t^i \cdot \text{sign}(r_{t-12,t}^i) \quad (5.3)$$

hvor $r_{t-12,t}^i$ er det realiserede merafkast i løbet af look-back perioden.

Ligning (5.3) siger, at hvert aktiv har et positivt forventet merafkast, når signalet for de sidste 12 måneder er positivt, og omvendt for negativt forventet merafkast. Den siger også, at hvert aktiv har en konstant Sharpe ratio på 0.1, hvilket ses af følgende omskrivning af ligning (5.3): $0.1 = \frac{s_t^i}{\sigma_t^i} \cdot \text{sign}(r_{t-12,t}^i)$. Bemærk, at vi kan lave denne omskrivning, da $\text{sign}(r_{t-12,t}^i)$ er en binær variabel, der kan antage værdien 1 eller -1.

5.2.2 Cross-sectional Momentum

Hvor Time series momentum fokuserer på det enkelte afkasts eget tidligere afkast, fokuserer Cross-sectional momentum på aktivernes performance relativt til hinanden. Her vil aktiver, der fornægtigt har præsteret bedre end andre over de sidste 3–12 måneder, i gennemsnit vedblive at præstere bedre over den næste måned (Moskowitz m.fl., 2012). Det vil altså sige, at det enkelte aktivs signal afhænger af dets tidligere 12 måneders relative outperformance. Her skal relativ outperformance forstås som det i 'te aktivs afkast minus det gennemsnitlige afkast på tværs af alle aktiver. Således kan XSMOM-signalet opskrives som

$$s_t^i = XSMOM_t^i = c_t \left(r_{t-12,t}^i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r_{t-12,t}^j \right) \quad (5.4)$$

Her er c_t en skaleringsfaktor, der løser

$$\sum_i s_t^i \cdot 1_{\{s_t^i > 0\}} = \sum_i |s_t^i| \cdot 1_{\{s_t^i < 0\}} = 1 \quad (5.5)$$

Faktoren c_t vælges altså, så både de positive signaler og de negative signaler summer 1. Dermed er sammen af alle signaler nul, hvilket sikrer, at porteføljen er dollarneutral. Ligesom ved TSMOM-signalet anvendes en rullende look-back periode på 12 måneder og en holding periode på 1 måned.

På baggrund af ligning (5.4) kan vi konstruere industrimomentumporteføljen (INDMOM) som en simpel cross-sectional strategi. I den klassiske INDMOM-strategi, går man langt i den øverste del af de bedst præsterende industrier, og går omvendt kort i den tilsvarende nederste del af de dårligst præsterende industrier over en bestemt tidsperiode (Moskowitz & Grinblatt, 1999). INDMOM konstrueres ved at anvende signalet $XSMOM_t^i$ som vægt for hvert aktiv. Skaleringsfaktoren c_t sikrer, at porteføljen er dollarneutral. I praksis går vi langt i de ca. 10% bedst præsterende industrier og kort i de 10% dårligst præsterende – svarende til de fem bedste og fem dårligste industrier.

Vi vil anvende INDMOM-porteføljen som benchmark samt som forklarende variabel i Fama-French regressionen.

5.3 Risikomodeller

Til implementeringen af EPO har vi også behov for risikomodeller. Først redegøres kort for estimering af volatilitet, kovarians og korrelation. Herefter præsenteres de specifikke risikomodeller, som implementeres i forbindelse med test af EPO.

Til estimering af kovariansmatricen benyttes R's indbyggede funktion `cov`. Da kovariansmatricens diagonalelementer er de forskellige aktivers varians, findes estimerater for aktivernes volatilitet ved at tage kvadratroden af den estimerede kovariansmatrices diagonal:

$$\boldsymbol{\sigma}^2 = \text{diag}(\Sigma_{ii}) \quad (5.6)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \text{diag}(\sqrt{\Sigma_{ii}}) \quad (5.7)$$

Her er $\boldsymbol{\sigma}$ en diagonalmatrix med aktivernes volatiliteter, og Σ den estimerede kovariansmatrix.

Som vist i afsnit 2.3.2, kan kovariansmatricen dekomponeres til korrelationsmatricen og diagonalmatri-

cen bestående af aktivvolatiliteterne. Således findes korrelationsmatricen som

$$\Sigma = \sigma \Omega \sigma \Leftrightarrow \Omega = \sigma^{-1} \Sigma \sigma^{-1} \quad (5.8)$$

Vi bruger altså standard ligevægtede estimerer for varians og kovarians. Bemærk dog, at estimererne ikke beregnes på baggrund af hele datasættet, men derimod på rullende risikovinduer med varierende længder, hvilket uddybes herunder.

Alle risikomodeller tager udgangspunkt i den krympede korrelationsmatrix $\tilde{\Omega} = (1 - \theta)\Omega + \theta I$ givet ved ligning (3.2), hvor $\Omega = \sigma^{-1} \Sigma \sigma^{-1}$ er den estimerede korrelationsmatrix.

Risikomodel 1 har initial korrelationskrympning på $\theta = 5\%$. Hvert instruments volatilitet bestemmes ud fra de sidste 36 månedlige afkast, og korrelationerne ligeså.

De resterende risikomodelle er identiske med risikomodel 1 bortset fra, at instrumenterne i:

Risikomodel 2 bestemmes ud fra de sidste 60 månedlige afkast, og korrelationerne ligeså.

Risikomodel 3 bestemmes ud fra de sidste 90 månedlige afkast, og korrelationerne ligeså.

Risikomodel 4 bestemmes ud fra de sidste 120 månedlige afkast, og korrelationerne ligeså.

Den eneste forskel på de fire risikomodelle er altså længden på risikovinduet. Vi benytter netop disse risikomodelle, da vi gerne vil undersøge den effekt, som længden af risikovinduet har på kovariansmatrixestimatet, og i forlængelse heraf, hvordan dette påvirker en porteføljes performance.

5.4 Porteføljekonstruktion

Her præsenteres de porteføljekonstruktioner, som implementeres og analyseres i projektet. Hver portefølje konstrueres ud fra et signal, en risikomodel og en optimeringsmetode, og for overskuelighedens skyld listes hver porteføljes komponenter i punktform. Porteføljerne baseres alle på samme dataperiode for at opnå et konsistent sammenligningsgrundlag:

Data start: Januar 1927

Backtest start: Januar 1942

Backtest slut: December 2018

Vi har således en periode på 15 år til at estimere risiko, afkast og krympningsparametre for at kunne opnå stabile parametre i backtestperioden. De forskellige porteføljer opstilles herunder.

Portefølje 1

Portefølje 1, 2, 3 og 4 bruger alle cross-sectional momentum (XSMOM) som signal, hvilket er beskrevet i afsnit 5.2.2. De adskiller sig fra hinanden gennem forskellige risikomodeller. Udgangspunktet er Portefølje 1, der har følgende komponenter:

- Signal (XSMOM): $s_i^t = c_t \left(r_{t-12,t}^i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r_{t-12,t}^j \right)$
- Risikomodel: $\tilde{\Omega} = (1 - \theta)[\boldsymbol{\sigma}^{-1} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\sigma}^{-1}] + \theta \mathbf{I}$, Risikovindue = 36 måneder, $\theta = 5\%$
- Optimeringsmetode: $\mathbf{EPO}^s(w) = \frac{1}{\gamma} \boldsymbol{\Sigma}_w^{-1} \mathbf{s}$ (3.19)

Portefølje 2

Denne portefølje (samt portefølje 3 og 4) bruges til at undersøge, hvordan længden af risikovinduet påvirker risikoestimatet.

- Signal (XSMOM): $s_i^t = c_t \left(r_{t-12,t}^i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r_{t-12,t}^j \right)$
- Risikomodel: $\tilde{\Omega} = (1 - \theta)[\boldsymbol{\sigma}^{-1} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\sigma}^{-1}] + \theta \mathbf{I}$, Risikovindue = 60 måneder, $\theta = 5\%$
- Optimeringsmetode: $\mathbf{EPO}^s(w) = \frac{1}{\gamma} \boldsymbol{\Sigma}_w^{-1} \mathbf{s}$ (3.19)

Portefølje 3

Her undersøges fortsat, hvordan længden af risikovinduet påvirker risikoestimatet.

- Signal (XSMOM): $s_i^t = c_t \left(r_{t-12,t}^i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r_{t-12,t}^j \right)$
- Risikomodel: $\tilde{\Omega} = (1 - \theta)[\boldsymbol{\sigma}^{-1} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\sigma}^{-1}] + \theta \mathbf{I}$, Risikovindue = 90 måneder, $\theta = 5\%$
- Optimeringsmetode: $\mathbf{EPO}^s(w) = \frac{1}{\gamma} \boldsymbol{\Sigma}_w^{-1} \mathbf{s}$ (3.19)

Portefølje 4

Som ved Portefølje 2 og 3 undersøges, hvordan længden af risikovinduet påvirker risikoestimatet.

- Signal (XSMOM): $s_i^t = c_t \left(r_{t-12,t}^i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r_{t-12,t}^j \right)$
- Risikomodel: $\tilde{\Omega} = (1 - \theta)[\boldsymbol{\sigma}^{-1} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\sigma}^{-1}] + \theta \mathbf{I}$, Risikovindue = 120 måneder, $\theta = 5\%$
- Optimeringsmetode: $\mathbf{EPO}^s(w) = \frac{1}{\gamma} \boldsymbol{\Sigma}_w^{-1} \mathbf{s}$ (3.19)

Portefølje 5-8

Portefølje 5, 6, 7 og 8 er identiske med hhv. Portefølje 1, 2, 3 og 4, bortset fra at de anvender et andet signal. Hvor Portefølje 1–4 benytter et cross-sectional momentum (XSMOM) signal, benytter Portefølje 5-8 et time series momentum (TSMOM) signal, som er beskrevet i afsnit 5.2.1. De øvrige komponenter, dvs. risikomodel og optimeringsmetode, forbliver uændrede. De fire porteføljer har således følgende fælles struktur:

- Signal (TSMOM): $s_i^t = 0.1 \cdot \sigma_t^i \cdot \text{sign}(r_{t-12,t}^i)$
- Risikomodel: $\tilde{\Omega} = (1 - \theta)[\boldsymbol{\sigma}^{-1} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\sigma}^{-1}] + \theta \mathbf{I}$, Risikovindue = 36, 60, 90, 120 måneder, $\theta = 5\%$
- Optimeringsmetode: $\mathbf{EPO}^s(w) = \frac{1}{\gamma} \boldsymbol{\Sigma}_w^{-1} \mathbf{s}$ (3.19)

Portefølje 5 svarer til et risikovindue på 36 måneder, Portefølje 6 til 60 måneder, og så fremdeles. Herved kan vi teste EPO-metodens robusthed i forhold til signalet – altså i forhold til estimatet af det forventede afkast.

Portefølje 9

Portefølje 9 anvender et XSMOM-signal. Til forskel fra de resterende porteføljer benytter den en anden optimeringsmetode, specifikt den ankrede EPO (jf. ligning (3.21)). Formålet med denne portefølje er at teste EPO-metodens robusthed i forhold til optimeringsmetode. Den ligevægtede portefølje, $1/N$, anvendes som anker:

- Signal (XSMOM): $s_i^t = c_t \left(r_{t-12,t}^i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r_{t-12,t}^j \right)$
- Risikomodel: $\tilde{\Omega} = (1 - \theta)[\boldsymbol{\sigma}^{-1} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\sigma}^{-1}] + \theta \mathbf{I}$, Risikovindue = 60 måneder, $\theta = 5\%$
- Optimeringsmetode: $\mathbf{EPO}^a(w) = \boldsymbol{\Sigma}_w^{-1} \left[(1 - w) \frac{\sqrt{\mathbf{a}^T \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{a}}}{\sqrt{(\mathbf{s}^T \boldsymbol{\Sigma}_w^{-1}) \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} (\boldsymbol{\Sigma}_w^{-1} \mathbf{s})}} \mathbf{s} + w \mathbf{V} \mathbf{a} \right]$ (3.21), $a_i = \frac{1}{N}$

5.5 Benchmark porteføljer

For bedre at kunne vurdere performance for EPO-porteføljerne beskrevet i foregående afsnit, sammenlignes de med tre forskellige benchmarks. I det følgende præsenteres de benchmarks, som porteføljerne holdes op imod: $1/N$, $1/\sigma$ og industrimomentum (INDMOM).

5.5.1 Ligevægtet portefølje: 1/N

En enkel metode til vægtallokering i en portefølje er at fordele vægtene ligeligt mellem alle aktiver. Dette er en klassisk strategi for aktivallokering, hvor hvert aktiv tildeles den samme vægt, nemlig $\frac{1}{N}$, hvor N er antallet af aktiver. Denne portefølje består udelukkende af lange positioner, hvormed summen af porteføljevægtene er lig med 1:

$$x_i = \frac{1}{N}, \quad \sum_i^N x_i = \sum_i^N |x_i| = 1 \quad (5.9)$$

Her betegner x_i vægten tildelt aktiv i , og N det samlede antal aktiver. Bemærk, at denne portefølje er anker i Portefølje 9.

5.5.2 Volatilitetsjusteret portefølje: $1/\sigma$

I stedet for $1/N$ -porteføljen består $1/\sigma$ -porteføljen udelukkende af lange positioner. Forskellen er, at vægtene fordeles i forhold til det enkelte aktivs risiko. Aktiver med lavere volatilitet tildeles en større vægt ved at vælge vægtene omvendt proportionalt med aktivernes estimerede volatilitet:

$$x_t^i = \frac{1/\sigma_t^i}{\sum_{j=1}^N (1/\sigma_t^j)} \quad (5.10)$$

hvor σ_t^i betegner det i ’te aktivs estimerede volatilitet til tid t . Det betyder altså, at investoren selv skal estimere volatiliteten for hvert aktiv.

5.5.3 Industrimomentum

Som beskrevet i afsnit 5.2.2 konstrueres INDMOM-porteføljen med udgangspunkt i *XSMOM*-signalet fra ligning (5.4). For hver periode identificeres de 10% højeste og 10% laveste signalværdier – svarende til de fem bedst og fem dårligst præsterende industrier. De fem højeste tildeles en vægt på $1/5$, mens de fem laveste tildeles en vægt på $-1/5$. Alle øvrige industrier får vægt nul. Denne vægtning sikrer, at porteføljen er dollarneutral, idet summen af positionerne er nul.

6 Data

I dette afsnit præsenteres det datasæt, der anvendes til implementeringen af EPO, samt de valg og behandlinger, vi har foretaget. Datavalget er baseret på Pedersen m.fl. (2021), men vi arbejder dog kun med

é t datasæt og ikke to.

Vi valgt at arbejde med datasættet ”49 Industry Portfolios”, som hentes fra Kenneth Frenchs hjemmeside (French, 2025). Datasættet er sammensat af amerikanske aktier handlet på NYSE, AMEX og NASDAQ, og industriporteføljerne dækker en bred vifte af industrier såsom landbrug, fødevarer, tobak, underholdning, kul og ædelmetaller. Hver aktie tildeles til en industriportefølje baseret på en SIC-kode, som, afhængigt af tilgængelighed, kommer fra enten Compustat eller CRSP (French, 2025). Dvs. at hvis en aktie eksempelvis har en SIC-kode mellem 1040–1049, så tildeles den til ædelmetalindustrien, som i datasættet kaldes ’Gold’. Vi anvender ”49 Industry Portfolios” med værdivægtede afkast. Datasættet indeholder data fra og med juli 1926 til og med december 2024, men afgrænses til perioden 1927–2018 for at sikre et sammenligningsgrundlag med relevante resultater fra Pedersen m.fl. (2021).

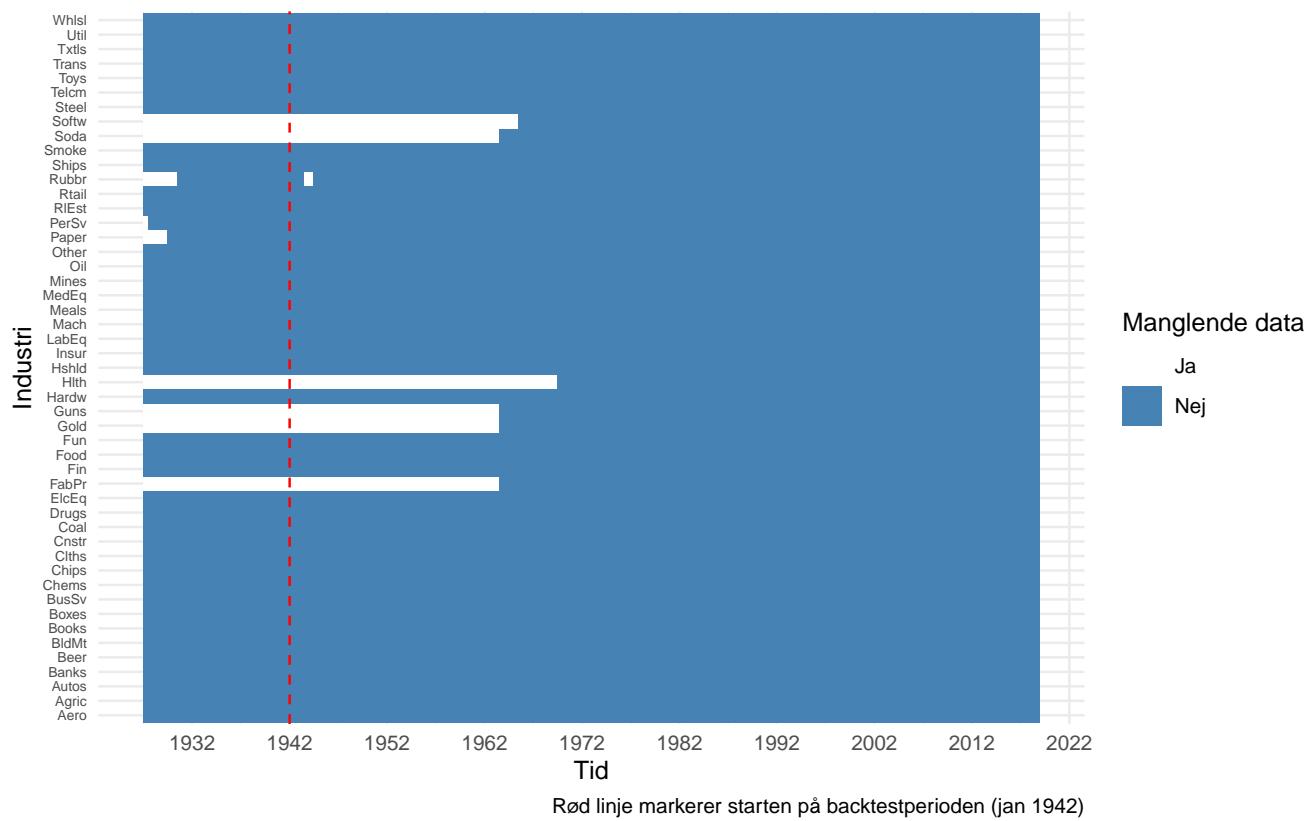
Datasættet har desuden den fordel, at det dækker en bred vifte af industrier og dermed udgør et varieret aktivunivers. Dette afspejles i betydelige forskelle i korrelationerne mellem industriporteføljerne, jf. bilag B. Der observeres dog ingen negative korrelationer, hvilket kan tilskrives, at alle industrierne er baseret i USA og derfor typisk udviser positiv samvariation. En undtagelse er ’Gold’, som i mange tilfælde fremstår næsten uafhængig af de øvrige 48 porteføljer. Dette giver mulighed for at undersøge, hvordan EPO håndterer porteføljer med forskellig grad af indbyrdes afhængighed.

Datasættet indeholder manglende data, som indikeres af enten –99.99 eller –999. Disse erstattes med NaN-værdier i stedet. Såfremt en industri har manglende data, anvendes den først fra det tidspunkt, hvor der er tilgængelige observationer. Når en industri ikke længere indeholder NaN-værdier, indgår den aktivt i estimeringerne, hvorfor de herfra kaldes ’aktive’ aktiver. Figuren herunder viser udviklingen i antallet af aktive aktiver i perioden 1927–2018:



Figur 1: Udvikling i antal 'aktive' aktiver, 1927–2018

Som det fremgår af figuren, er der kun 40 industrier med tilgængelig data i 1927. Antallet af aktive aktiver stiger løbende gennem perioden og når et maksimum omkring 1970, hvor alle 49 industrier har fuldt tilgængelige data. Det er dog værd at bemærke, at der i 1943 opstår et pludseligt fald i antallet af aktive aktiver. Følgende figur viser, hvilke industrier der har manglende data i perioden, herunder også den industri, der mister datadækning i 1943:



Figur 2: Industrier med manglende data, 1927–2018

Heraf fremgår, at det er industrien ”Rubbr” (dvs. gummi- og plastprodukter), der har et hul i dataserien. French (2025) giver ikke selv en forklaring på, hvorfor dette er tilfældet. Et plausibelt bud er, at det midlertidige hul skyldes forstyrrelser relateret til 2. verdenskrig, hvor gummi blev betragtet som en strategisk ressource. I begyndelsen af 1940’erne blev adgangen til naturgummi kraftigt begrænset, hvilket førte til rationering og en hastig omstilling til syntetisk gummiproduktion i USA (ACS, 2025).

Da vi udelukkende har at gøre med amerikanske aktier, kan vi beregne en serie af merafkast ved at trække den amerikanske risikofri rente fra aktiernes afkast. Vi bruger en proxy for den amerikanske risikofri rente r_f . Her anvendes den amerikanske 1-month T-Bill rate, som ligeledes hentes fra Kenneth Frenchs hjemmeside (French, 2025). Den svarer kort sagt til den rente, som kan opnås ved at investere i et amerikansk statsgældsbevis med en løbetid på 1 måned. De amerikanske statsgældsbeviser betragtes som meget sikre investeringer, da de er garanteret af den amerikanske stat og understøttet af dens høje kreditværdighed (Loo, 2025). Således er statsgældsbeviser en god proxy for den risikofrie rente.

7 Analyse og resultater

I dette afsnit analyseres de forskellige porteføljer konstrueret i afsnit 5.4, og analysens resultater præsenteres. EPO-porteføljernes performance evalueres ud fra deres Sharpe ratio og alfaer. Sharpe ratio sammenlignes med diverse benchmarks som $1/N$, $1/\sigma$, INDMOM og de fem Fama-French-faktorer (FF5). Porteføljernes robusthed evalueres på baggrund af in-sample- og out-of-sample-resultater, variation i modelinput – herunder forskellige risikovinduer, signaler og optimeringsmetoder – samt porteføljernes faktor-loadings i Fama-French-regressionerne. Bemærk, at in-sample porteføljerne krympes med $w = [0, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9, 0.99, 1]$. For out-of-sample porteføljerne vælges i hver periode det w , som ville have givet den højeste Sharpe ratio i de foregående perioder, hvorefter denne anvendes i den efterfølgende periode.

7.1 Porteføljernes realiserede performance

De konstruerede porteføljer har til formål at stressteste EPO ved at bruge metoden på varierende længder risikovidue, signaler og optimeringsmetoder. Som nævnt, testes EPO mod forskellige benchmark-porteføljer, nemlig $1/N$, $1/\sigma$ og INDMOM, som alle er beskrevet i afsnit 5.5, samt mod Sharpe ratio for FF5. Desuden testes EPO også mod projektets udgangspunkt, den klassiske MVO, som blot er EPO-løsningen med initial korrelationskrympning $\theta = 0\%$ og EPO-krympningsparameter $w = 0\%$. Der testes både in-sample (IS) og out-of-sample (OOS). De ni porteføljers realiserede, annualiserede Sharpe ratios fremgår af Tabel 1 nedenfor:

Tabel 1: Realiserede, annualiserede Sharpe ratios, 1942–2018

	Pf1	Pf2	Pf3	Pf4	Pf5	Pf6	Pf7	Pf8	Pf9
Porteføljer									
1/N	0.44	0.44	0.44	0.44	0.44	0.44	0.44	0.44	0.44
1/ σ	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43
INDMOM	0.66	0.66	0.66	0.66	0.66	0.66	0.66	0.66	0.66
MVO: $w = 0\%$ ($\theta = 0\%$)	NaN	0.22	0.52	0.80	NaN	0.05	0.29	0.48	0.23
EPO(w): OOS	0.81	0.84	0.82	0.86	0.76	0.61	0.66	0.65	0.80
<i>EPO(w): IS</i>									
0% (MVO)	0.38	0.62	0.66	0.82	0.30	0.41	0.45	0.55	0.56
10%	0.56	0.73	0.73	0.83	0.46	0.56	0.55	0.60	0.65
25%	0.68	0.79	0.78	0.85	0.61	0.66	0.62	0.63	0.71
50%	0.77	0.84	0.82	0.86	0.74	0.72	0.67	0.66	0.77
75%	0.81	0.85	0.83	0.86	0.76	0.70	0.64	0.63	0.83
90%	0.81	0.83	0.83	0.86	0.66	0.60	0.54	0.53	0.68
99%	0.74	0.79	0.80	0.84	0.47	0.41	0.36	0.35	0.45
100% (anker)	0.72	0.77	0.79	0.83	0.43	0.37	0.33	0.32	0.44

FF5	SR
Mkt-RF	0.40
SMB	0.27
HML	0.40
RMW	0.40
CMA	0.49

Note: Værdier markeret med **fed** angiver de højeste in-sample Sharpe ratios for hver af de ni porteføljer givet de forskellige valg af w . Medmindre andet specificeres, har alle porteføljer initial krympning på $\theta = 5\%$.

For hver in-sample test vælges porteføljen med det w , der ud fra resultaterne giver den højeste realiserede Sharpe ratio. Det fremgår af Tabel 1, at Pf 1-4, som er identiske bortset fra længden af risikovinduet, primært leverer den bedste performance for $w \in [75\%, 90\%]$. Disse fire porteføljer slår alle benchmarkstrategier, herunder også den klassiske MVO og samtlige FF5. Det samme gør sig gældende for Pf 5-8, som benytter TSMOM-signal frem for XSMOM, dog med den undtagelse, at Pf 8 leverer samme Sharpe ratio på 0.66 som INDMOM, hvorfor denne ikke kan siges at slå dette benchmark. Pf 5-8 præsterer desuden bedst for $w \in [50\%, 75\%]$. Dette indikerer, at estimeringsfejl for porteføljer med TSMOM-signal i lidt højere grad fanges af den initiale krympning på $\theta = 5\%$ sammenlignet med porteføljer med XSMOM-signal. Porteføljer med XSMOM-signal drager fordel af en lidt højere krympning via w , der krymper korrelationerne mod nul og reducerer støj i signalet.

Pf 9 genererer den højeste realiserede in-sample Sharpe ratio for $w = 75\%$. Porteføljen er identisk med

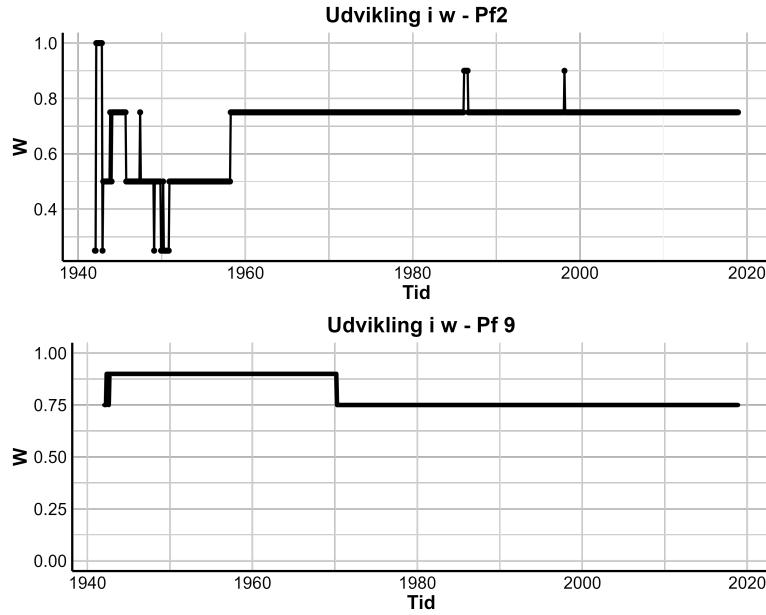
Pf 2 bortset fra optimeringsmetoden, hvor der anvendes ankret EPO fremfor simpel EPO, og porteføljerne giver en Sharpe ratio på hhv. $SR_{Pf9} = 0.83$ og $SR_{Pf2} = 0.85$ IS. Det bemærkes, at Pf 9 har en lavere in-sample Sharpe ratio end Pf 2 for alle w : For $w \in [0\%, 75\%]$ er afvigelserne dog relativt små, hvorfor det ikke umiddelbart kan siges, at $1/N$ -ankeret forværrer EPO-metodens performance. For $w \in [90\%, 100\%]$ ses større afvigelser, hvilket viser, at jo mere porteføljen nærmer sig ankeret, des mere ignorerer porteføljen information om risiko og forventet afkast, hvormed dens performance falder. Dog har Pf 9 en out-of-sample Sharpe ratio på 0.80, hvilket tyder på, at ankerporteføljen er relativt robust.

Ser vi i stedet på porteføljernes out-of-sample performance, fremgår det, at Pf 1-5 samt Pf 9 fortsat overgår samtlige benchmarks. Pf 6, 7 og 8 slår alle benchmarks på nær INDMOM. Alle out-of-sample porteføljer, undtagen Pf 6, er meget tæt på at realisere den højeste in-sample Sharpe ratio for den givne porteføljekonstruktion. Dette illustrerer, at EPO-metoden er relativt stabil og robust.

Endeligt er det værd at bemærke, at den klassiske MVO – dvs. $w = 0\%$ og $\theta = 0\%$ – for Pf 1 og Pf 5 leverer NaN-resultater. Dette skyldes, at de to porteføljer har et meget kort risikovidue på 36 måneder, som er lavere end antallet af aktiver (industrier) på ethvert givent tidspunkt. I dette tilfælde er kovariansmatricen singulær, hvormed den ikke er invertibel. Singularitetsproblemet uddybes i afsnit 8.

7.2 Out-of-sample udvikling i w

Out-of-sample bestemmes EPO-krympningsparameteren w dynamisk og varierer altså henover perioden 1942–2018. Parameteren begrænses, så den kan antage de samme værdier som i in-sample. Udviklingen i w out-of-sample for den simple EPO (Pf 2) samt den ankrede EPO (Pf 9) over perioden 1942–2018 ses på figurerne herunder:



Figur 3: Udvikling i w OOS for Pf 2 og Pf 9, 1942–2018

Det ses, at w varierer tidligt i perioden, særligt for Pf 2. Dette skyldes, at der er i starten af out-of-sample perioden kun få observationer at basere parameteren på, men i takt med at flere observationer bliver tilgængelige, jo mindre varierer w . Parameteren stabiliseres relativt hurtigt: For Pf 2 stabiliseres w allerede omkring slutningen af 1950'erne på $w = 75\%$, dog med få udsving. For Pf 9 stabiliseres w i omkring 1970 ligeledes på $w = 75\%$, og der ses ingen udsving herefter.

Det stabile out-of-sample $w = 75\%$ stemmer overens med de in-sample w , der genererer den bedste performance for både Pf 2 og Pf 9 i Tabel 1. Som nævnt, stabiliseres out-of-sample w ikke med det samme, hvilket kan forklare, at porteføljernes out-of-sample Sharpe ratios er lidt lavere end de maksimale in-sample Sharpe ratios for disse porteføljer.

7.3 EPO-porteføljernes alfa og faktor-loadings

FF5 bruges ofte i multipel regressionsanalyse, for at estimere en porteføljes alfa og faktor-loadings. Fem-faktordata kan hentes fra French (2025), men går dog kun tilbage til 1963, hvorfor vores regressioner bruger data fra perioden 1963–2018. Dette stemmer overens med Pedersen m.fl. (2021). Vi ser på både EPO-porteføljernes alfa, når der justeres for faktor-loadings, samt på deres eksponering mod risikofaktorerne. Som tidligere nævnt, findes de ni porteføljers intercept og regressionskoefficienter ved at anvende OLS, og modellen ser ud som beskrevet i afsnit 5.1. Dog tilføjes en ekstra forklarende variabel i form af INDMOM. Det er her vigtigt at bemærke, at modellens seks forklarende variable ikke

er uafhængige. Inden regressionerne køres, tjekker vi derfor først korrelationerne mellem de forklarende variable. Alle korrelationer fremgår af bilag C. Den eneste bemærkelsesværdige korrelation er korrelationen mellem CMA- og HML-faktoren på 0.69. En høj korrelation mellem disse to faktorer er dog forventeligt, da porteføljer med høje book-to-market ratios ofte har konservative investeringer (Fama & French, 2015). Vi undersøger desuden korrelationen mellem markedsfaktoren, Mkt-RF, og ankeret $1/N$. Her fås en korrelation på 0.96, hvilket vil sige, at markedsporteføljen og den ligevægtede portefølje er tæt på perfekt positivt korrelerede.

Vi laver ti regressioner i alt: En for hver out-of-sample portefølje samt en for out-of-sample ankerporteføljen med $w = 100\%$, dvs. ankeret $1/N$. De ti regressioner fremgår af søjlerne i Tabel 2. For at kunne sammenligne koefficienterne skaleres alle regressionsvariable, så de har en ex post volatilitet på 10%.

Tabel 2: Alfa og faktor-loadings for OOS-EPO, 1963–2018

	Pf 1	Pf 2	Pf 3	Pf 4	Pf 5	Pf 6	Pf 7	Pf 8	Pf 9	Pf 9 ($w = 100\%$)
Alfa (annualiseret)	4.41% (4.29)	3.94% (4.23)	3.85% (4.35)	3.95% (4.67)	2.74% (2.49)	1.99% (1.85)	2.46% (2.26)	2.20% (2.06)	1.01% (1.09)	-2.28% (-8.22)
INDMOM	0.68 (23.69)	0.74 (28.66)	0.77 (31.31)	0.80 (33.78)	0.61 (20.10)	0.65 (21.68)	0.63 (20.73)	0.65 (22.04)	0.70 (27.07)	-0.05 (-6.30)
Mkt-RF	0.11 (3.56)	0.12 (4.09)	0.07 (2.50)	0.05 (1.82)	0.09 (2.60)	0.11 (3.28)	0.04 (1.26)	0.02 (0.51)	0.36 (12.70)	0.96 (111.23)
SMB	-0.02 (-0.65)	-0.06 (-2.01)	-0.02 (-0.89)	-0.03 (-1.01)	-0.02 (-0.77)	0.03 (0.88)	-0.02 (-0.59)	-0.01 (-0.30)	0.01 (0.50)	0.19 (22.94)
HML	0.02 (0.44)	-0.01 (-0.16)	-0.04 (-1.15)	-0.02 (-0.60)	-0.12 (-2.86)	-0.11 (-2.76)	-0.10 (-2.46)	-0.07 (-1.82)	-0.04 (-1.25)	0.05 (4.35)
CMA	-0.19 (-4.63)	-0.17 (-4.46)	-0.14 (-3.88)	-0.15 (-4.24)	-0.04 (-0.91)	0.01 (0.16)	-0.05 (-1.17)	-0.08 (-1.77)	-0.06 (-1.73)	0.04 (3.27)
RMW	-0.00 (-0.12)	-0.03 (-0.94)	-0.04 (-1.56)	-0.04 (-1.65)	-0.02 (-0.66)	0.03 (0.91)	-0.05 (-1.67)	-0.06 (-1.92)	0.03 (0.94)	0.14 (16.88)
R^2	49%	58%	62%	66%	42%	45%	43%	45%	59%	96%

Note: Statistikker markeret med **fed** angiver, at værdien er statistisk signifikant på et 5%-signifikansniveau. De observerede t -teststørrelser rapporteres i parentes. Alle regressioner udføres for OOS-porteføljer på nær Pf9($w = 100\%$), der er IS.

Vi kører regressionen for Pf 9 med $w = 100\%$ (dvs. $1/N$), da Pf 9 har en markeds-loading på 0.36, som er lavere end forventet. Da markedsporteføljen og $1/N$ er stærkt korrelerede, og Pf 9 netop krympes mod $1/N$, havde vi forventet en markeds-loading tættere på 1. Dette illustreres i yderste højre søjle i

Tabel 2, hvor den $w = 100\%$ krympede Pf 9 (svarende til $1/N$) har en markeds-loading på 0.96. Den lave eksponering mod markedet for Pf 9 skyldes formentlig udviklingen i w out-of-sample, som beskrives i afsnit 7.2. Som nævnt, varierer w i starten af out-of-sample perioden, hvorefter den stabiliserer sig på $w = 75\%$. I størstedelen af out-of-sample perioden er Pf 9 altså krympet 75% mod ankeret, hvorfor Pf 9 har en relativt lavere markdes-loading end Pf 9 med $w = 100\%$. Vi vil ikke fortolke yderligere på Pf 9 med $w = 100\%$, og ser fremadrettet kun på de første 9 regressioner.

Efter kontrol for både INDMOM og FF5 fås et positivt alfa for alle ni OOS-porteføljer. Dette tyder på, at strategierne alle leverer et risikojusteret merafkast uover det, som kan forklares af standardfaktorerne. Med undtagelse af Pf 6 og Pf 9 har alle porteføljer et statistisk signifikant alfa på et 5%-signifikansniveau, hvilket betyder, at nulhypotesen $\alpha = 0$ forkastes, og at der dermed findes evidens for systematisk merafkast. Omvendt betyder det ikke-signifikante alfa for Pf 6 og Pf 9, at der ikke er evidens for, at porteføljen skaber et systematisk merafkast.

Vi ser nu på risikofaktorerne. Fælles for alle ni porteføljer er statistisk signifikante loadings mod INDMOM-porteføljen. Dette indikerer, at INDMOM forklarer en væsentlig del af alle porteføljernes afkast, men da alle porteføljer på nær Pf 6 og Pf 9 har positivt signifikant alfa, tyder det på, at porteføljerne genererer merafkast, som ikke kan forklares fuldt af modellens risikofaktorer.

Pf 1-4 har alle signifikant eksponering mod investering, dvs. CMA. De fire porteføljer har alle negative CMA-loadings, hvilket indikerer, at de hælder mod aggressive investeringsstrategier. Pf 1, 2 og 3 har derudover positive signifikante markeds-loadings, hvilket betyder, at porteføljerne profiterer af stigninger i markedet. De tjener dog kun en smule, da koeficienterne alle ligger mellem 0.07 og 0.12. Det ses, at Pf 2 også har en signifikant eksponering mod SMB. Da eksponeringen er negativ, svarer det til at være lang i big-cap aktier, hvilket kan være med til at forklare en del af porteføljens merafkast.

Pf 5 og 6 har også positive markeds-loadings. Sammen med Pf 7 har de også en negativ eksponering mod HML, hvilket betyder, at porteføljerne foretrækker vækstaktier. Pf 6 og Pf 9 har som de eneste porteføljer ikke et signifikant alfa. Det vil sige, at disse porteføljers signifikante risikofaktorer, statistisk set formår at fange porteføljens systematiske merafkast. Som den eneste portefølje har Pf 8 udelukkende en signifikant eksponering mod INDMOM, så denne porteføljes systematiske merafkast kan primært forklares af INDMOM, men da porteføljen har et signifikant alfa, kan det kun forklare en del af merafkastet.

Som det fremgår af tabellen, har Pf 5-8 alle lave forklaringsgrader (R^2), der spænder mellem 42% og

45%, relativt til Pf 1-4, der har forklaringsgrader mellem 49% og 66%. En lav R^2 indikerer, at størstedelen af risikoen ikke kan forklares af modellens standardfaktorer, og der fortsat er ændringer, modellen ikke er i stand til at forklare.

Slutteligt ser vi på Pf 9. Denne har signifikant eksponering mod faktorerne: INDMOM, og Mkt-RF. Her lægges der specielt mærke til en markeds-loading på 0.36, hvilket er lavere end forventet. Eftersom det ses fra 7.2, at der holdes et $w = 75\%$, største delen af perioden. Hvilket dermed burde resultere i retningen af den ligevægtet portefølje, som forklaret tidligere.

7.4 Gearing og Turnover

Som det sidste i analysen undersøges EPO-porteføljernes gearing og turnover. Selvom vi undlader at se på transaktionsomkostninger, kan disse mål give en god indikation af, om EPO genererer realistiske porteføljer. Vi ser primært på gearing og turnover for Pf 2, hvor målene først rapporteres i en tabel og senere illustreres i et plot. Resultaterne varierer dog fra portefølje til portefølje, hvorfor vi også illustrerer målene for Pf 9 – jf. evt. bilag D. For afklaring beregnes gearing og turnover som følgende:

$$\text{Gennemsnitlig gearing} = \frac{1}{T} \sum_t^T \sum_i |w_{i,t}| \quad (7.1)$$

$$\text{Gennemsnitlig turnover} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T \sum_i |w_{i,t} - w_{i,t-1} \cdot r_{i,t-1,t}| \quad (7.2)$$

I Tabel 3 nedenfor rapporteres gearing og turnover for Pf 2 både in-sample og out-of-sample samt for benchmark-porteføljerne $1/N$ og $1/\sigma$. Bemærk, at porteføljerne her skaleres, så de har en årlig volatilitet på 10%, så vi kan sammenligne gearing og turnover direkte for porteføljerne.

Tabel 3: Gearing og turnover

	Gearing	Turnover
$1/N$	60.86%	2.90%
$1/\sigma$	60.91%	4.53%
MVO: $w = 0\% (\theta = 0\%)$	458.94%	46.76%
$EPO(w)$: OOS	285.88%	37.14%
$EPO(w)$: IS		
0% (MVO)	445.88%	38.83%
10%	384.00%	38.51%
25%	343.18%	38.33%
50%	306.24%	37.72%
75%	279.27%	36.88%
90%	262.71%	36.25%
99%	244.17%	35.75%
100% (anker)	237.92%	35.66%

Note: For sammenlignelighed skaleres alle porteføljer, så de har en årlig ex post volatilitet på 10%. Yderligere er turnover angivet som en den %-del af porteføljen der ændres.

De to benchmark-porteføljer vil i udgangspunktet have en gearing på 100%, da de per definition er long-only porteføljer, hvis vægte summer til 1. Dette er dog ikke tilfældet her, eftersom de skaleres til at have en årlig volatilitet på 10%. Før skaleringen havde begge porteføljer volatiliteter over 10%. Altså bliver vægtene skaleret ned, hvilket medfører en lavere gearing, da vægtene bliver mindre.

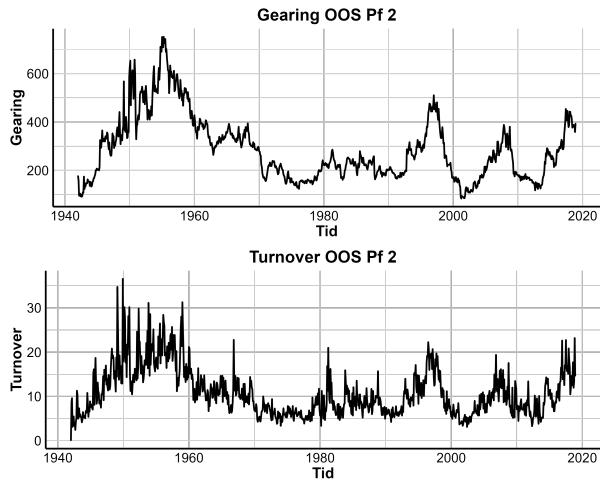
I denne forbindelse ses også, at turnover for $1/N$ er større end nul. Årsagen til at den ligevægtede portefølje også skal rebalances er, at den skal sørge for at justere sin position til $1/N$ i alle perioder, hvor afkastene ikke er præcis ens. Dette følger også af ligning (7.2), hvor det ses, at afkastet indgår i den totale ændring.

Generelt ses en sammenhæng mellem gearing og turnover, hvor højere gearing medfører højere turnover og omvendt. Dette skyldes, at vi skal rebalance mere i takt med, at den investerede kapital øges.

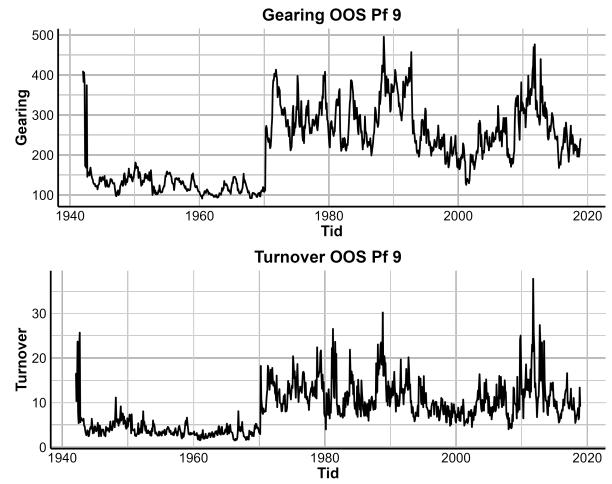
Yderligere observeres, at højere værdier af w fører til lavere gearing og dermed turnover. Et højere w er ensbetydende med større krympning, hvilket resulterer i lavere porteføljevægte. Det vil altså sige, at der

generelt investeres mindre ved højere w . Eksempelvis fremgår det af Tabel 3, at MVO-løsningen ($w = 0\%$ og $\theta = 0\%$) kræver 458.88% gearing og at 46.76% af hele porteføljen i gennemsnit skal ændres. Sammenlignet med porteføljen med $w = 100\%$ ses et fald på 208.73 procentpoint i gearing, mens turnover reduceres til 35.66% af porteføljen. Resultaterne indikerer dermed, at en højere grad af krympning – gennem parametrene w og θ – fører til lavere gearing og lavere turnover.

Vi ser nu lidt nærmere på gearing og turnover out-of-sample. Nedenfor illustreres de to mål for Pf 2 (venstre) og Pf 9 (højre). Bemærk, at porteføljerne her ikke skaleres for bedre at illustrere portefølernes praktiske implikationer.



Figur 4: Gearing og turnover for Pf 2 OOS, 1942–2018 i %



Figur 5: Gearing og turnover for Pf 9 OOS, 1942–2018 i %

Der observeres en markant forskel i både gearing og turnover mellem de to out-of-sample porteføljer. Ser man nærmere på Pf 2, ses en tydelig sammenhæng mellem gearing og turnover. Dette skyldes, at en højere gearing medfører, at der er investeret mere kapital. Dette betyder, at ændringer i porteføljen kræver større justeringer, da vægtene også er større. Derudover ses, at gearing og turnover typisk er højere i perioder med større markedsstabilitet, mens de falder i perioder, hvor det finansielle marked er ustabilt.

Tre tydelige eksempler på dette er begyndelsen af 1970’erne (oliekrisen), starten af 2000’erne (IT-boblen) og perioden omkring 2007–2008 (finanskrisen), hvor både gearing og turnover falder markant. Dette illustrerer, at EPO tilpasser sig markedsforholdene ved at reducere eksponeringen i usikre perioder. Denne tilpasning kan skyldes, at signalstyrken falder, fordi markedet bevæger sig mere ensartet under nedgang, eller at volatiliteten stiger, hvilket resulterer i lavere positioner som følge af det risikojusterede signal.

Rettes fokus mod Pf 9, ses en høj gearing i begyndelsen af perioden. Dette skyldes, at $w = 75\%$ i denne periode (jf. Figur 3), hvilket passer til Tabel 3, hvor der ligeledes ses højere gearing ved lave værdier af w . Kort efter stiger w til 90%, og her ses også en lavere gearing, i takt med at porteføljen nærmer sig ankerporteføljen. I denne periode foretages der dog stadig en del handler, selvom porteføljen i høj grad følger ankeret. Dette skyldes løbende justeringer til markedsændringer, som tidligere beskrevet. Efter perioden med $w = 90\%$ stabiliserer porteføljen sig omkring $w = 75\%$, hvilket også afspejles i gearingen: De store udsving forsvinder, og der ses på ny, hvordan EPO tilpasser sig markedsforholdene, som det også blev observeret for out-of-sample Pf 9.

8 Diskussion

Vi vil her diskutere resultaterne fra foregående afsnit, hvoraf nogle forholdes til relevante resultater fra Pedersen m.fl. (2021). Kovariansmatricens singularitetsproblem uddybes, og vi ser nærmere på de principale komponenter for MVO. Slutteligt diskuteses, hvor realistisk implementeringen af EPO er i praksis set i lyset af gearing og turnover.

8.1 Sammenligning med det oprindelige papirs resultater

Som beskrevet i afsnit 5.4 anvender vi fire forskellige risikovinduer på hhv. 36, 60, 90 og 120 måneder. Vi har valgt netop disse for at undersøge, hvor stabil EPO er overfor både korte og lange vinduer. På trods af svagheden ved korte vinduer beskrevet i afsnit 8.2, har de dog den fordel, at de hurtigere kan opfange markedsændringer sammenlignet med længere vinduer, der er mere statiske. For længere vinduer opfanges markedsændringer altså ikke ligeså hurtigt, men til gengæld resulterer de ofte i mere stabile kovariansmatrcier. Af de fire forskellige risikovinduer har vi et tilfældes med Pedersen m.fl. (2021), nemlig det på 60 måneder. Tager vi også højde for signaler og optimeringsmetode, har vi to porteføljekonstruktioner tilfældes med papiret ud af vores ni. Vi har valgt at medtage disse to porteføljer for at skabe et sammenligningsgrundlag samt for at validere vores resultater. Vores Pf 2 svarer til papirets Equity 1, og vores Pf 9 svarer til papirets Equity 6. Vores resultater har nogle afvigelser sammenlignet med Pedersen m.fl. (2021), men disse er dog ofte forholdsvis små.

Starter vi med at se på den realiserede performance, ses afvigelser i in-sample Sharpe ratios for Pf 2 og Equity 1 på omkring 0.05, mens out-of-sample Sharpe ratio kun afviger med 0.02. Ved sammenligning af Pf 9 og Equity 6 ses lidt større afvigelser i in-sample Sharpe ratios mellem 0.03 og 0.15, samt en afvigelse out-of-sample på 0.03. Selvom der få steder er relativt store afvigelser, får vi dog samme

struktur i resultaterne som Pedersen m.fl. (2021), og når altså til de samme konklusioner. De større in-sample afvigelser for Pf 9 kan forklares ved, at vi estimerer en lavere Sharpe ratio for $1/N$ -porteføljen end Pedersen m.fl. (2021). Da ankerporteføljen (Pf 9) gradvist nærmer sig $1/N$ i takt med, at $w \rightarrow 100\%$, kommer denne forskel tydeligt til udtryk og medfører en lavere samlet Sharpe ratio.

På samme måde kan vi sammenligne vores resultater for de to porteføljers alfaer og faktor-loadings. For Pf 2 ses kun små afvigelser mellem alfa og faktor-loadings. Ingen er resultaternes struktur i overensstemmelse med Pedersen m.fl. (2021), hvor alfa er positiv og signifikant, og regressionens forklarende variable har samme fortegn. Dog med undtagelse af HML-faktoren, hvor vi får en HML-loading på 0.02, mens papiret rapporterer en HML-loading på -0.01. Begge resultater er dog meget tæt på nul, og ingen af dem er signifikante, hvorfor dette formentlig blot er et tilfælde.

For Pf 9 fås lidt større afvigelser, hvilket er i tråd med sammenligningen af realiseret performance. Her bemærkes særligt tre forskelle: INDMOM, Mkt-RF og R^2 . Vores resultater viser en høj INDMOM, mens vores forklaringsgrad er lav sammenlignet med papiret. Med hensyn til markeds-loadingen får vi en relativt lav eksponering mod markedet. Dette har vi dog allerede berørt i afsnit 7.3, hvor vi som nævnt forventede en markeds-loading tættere på 1, hvilket også ville være i tråd med papirets resultater.

En mulig forklaring på afvigelserne mellem Pf 9 og Equity 6 kan være, at Pedersen m.fl. (2021) fastsætter risikoaversionen, γ , eksogent, mens vi i vores analyse bestemmer γ endogent, jf. ligning (3.20) og (3.21). En anden forklaring kan være forskelle i håndteringen af manglende data for visse industrier, hvilket ligeledes kan bidrage til variationen i Sharpe ratio for $1/N$ -porteføljen. Endelig kan forskellen, som tidligere nævnt, også skyldes, at Sharpe ratio for den $1/N$ afviger mellem de to analyser.

Generelt ses der primært små afvigelser mellem vores resultater og dem i papiret, hvilket formentligt kan tilskrives databehandling og -håndtering. På trods af lidt større afvigelser for ankerporteføljen anser vi vores resultater som en tilfredsstillende tilnærmelse. I de følgende afsnit ser vi nærmere på vores egne resultater med henblik på at vurdere, om EPO genererer mere robuste resultater end MVO.

8.2 Kovariansmatricen og singularitet

Som det fremgår af Tabel 1 præsterer EPO-porteføljerne ofte markant bedre end den klassiske MVO, når der vurderes på baggrund af Sharpe ratio. Den primære grund er, at MVO ofte tager store positioner i støjfyldte porteføljer, da den antager, at der ikke er estimeringsfejl i hverken kovariansmatrix eller

forventede afkast, hvilket stort set aldrig er tilfældet i praksis. Det skal dog bemærkes, at MVO er den bedste metode til optimering af Sharpe ratio, såfremt der ikke er estimeringsfejl. De førnævnte støjfyldte porteføljer er de såkaldte problemporleføljer beskrevet i afsnit 2.3. De mest problematiske porteføljer er dem, som er mindst risikofyldte og svarer til de sidste principale komponenter. Disse porteføljers risici bliver ofte underestimeret, da de per definition har den lavest mulige varians blandt alle porteføljer. Typisk overestimeres de forventede afkast for disse porteføljer også. Fra det klassiske MVO-perspektiv vil disse problemporleføljer altså have højt estimerede Sharpe ratios, hvorfor MVO tager store positioner i dem. Dette resulterer i praksis ofte i ringe performance, da allokeringerne vælges på baggrund af støjfyldte estimater.

Af Tabel 1 ses også, at den klassiske MVO genererer NaN-værdier for Pf 1 g Pf 5 – dvs. for porteføljer med risikovindue på 36 måneder. Dette skyldes, at længden af risikovinduet er kortere end antallet af aktiver. Når korrelationerne ikke krympes, dvs. $\theta = 0$, er kovariansmatricen per defination singulær, hvormed MVO-løsningen $x^{MVO} = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} s$, ikke kan opnås, da Σ ikke er invertibel.

Vi kan undersøge, hvornår kovariansmatricen er singulær ud fra dens egenværdier. Kovariansmatricen er singulær, hvis den har egenværdier på nul eller derunder – den skal altså være positivt definit. Givet vores fire forskellige længder risikovindue på [36, 60, 90, 120] måneder findes den absolut laveste egenværdi over hele backtest-perioden (1942-2018) for vinduet på 36 måneder. Her fås en egenværdi på $-8.281 \cdot 10^{-15} < 0$, og kovariansmatricen er altså singulær, når der ikke krympes via θ . Egenværdierne vil dog stige, når længden af risikovinduet øges. Dette illustreres på følgende figur, hvor vi lader længden af risikovinduet løbe mellem [30 : 120]:



Figur 6: Mindste egenværdier for risikovinduelængder [30 : 120], $\theta = 0\%$

Figuren viser den mindste egenværdi for ethvert risikovindue mellem 30 og 120 måneder. Risikovinduer under 50 måneder har negative egenværdier til ethvert tidspunkt i testperioden. De negative egenværdier er dog meget tæt på nul, hvorfor det ikke er så tydeligt, at de rent faktisk er negative. Der kræves altså et vindue på 50 måneder eller derover, før Σ er invertibel. Den vil dog fortsat være relativt ustabil for

vinduer omkring de 50 måneder, da nogle af egenværdierne er tæt på nul. For vinduer over 53 bliver det mere tydeligt på figuren, at egenværdierne stiger og bevæger sig længere væk fra nul, hvorved Σ bliver mere stabil.

Vi kan dog undgå singularitetsproblemet for korte risikovinduer ved at krympe korrelationerne. Det er netop det, som EPO gør via θ , hvor korrelationerne krympes med $\theta = 5\%$. Nedenstående figur viser igen den mindste egenværdi for ethvert risikovidue mellem 30 og 120 måneder. Forskellen er, at korrelationerne her er krympet med $\theta = 5\%$:



Figur 7: Mindste egenværdier for risikovinduelængder [30 : 120], $\theta = 5\%$

Det ses, at egenværdierne har samme tendens som før: Jo længere risikovidue, des højere egenværdier. Dog er andenaksen forskudt 0.05 op, hvormed ingen egenværdier er negative (eller lig med nul). Korrelationskrympningen via θ gør det altså muligt at arbejde med korte risikovinduer, som eksempelvis 36 måneder, der ellers ville resultere i en singulær kovariansmatrix. Det gælder stadig, at kovariansmatricer med egenværdier tæt på nul er relativt ustabile, og at længere risikovinduer giver mere stabile kovariansmatricer. Dette kan også ses i vores in-sample resultater i Tabel 1, hvor korrelationerne krympes yderligere via w : For lave w præsterer eksempelvis Pf 1 dårligt relativt til den tilsvarende portefølje med højere w .

8.3 Realistiske porteføljer

De høje Sharpe ratios rapporteret i Tabel 1 for EPO-porteføljerne viser, at den empiriske EPO generelt leverer gode, robuste præstationer. In-sample slår alle porteføljerne benchmarks, og out-of-sample er det kun et enkelt benchmark, INDMOM, som nogle af porteføljerne ikke kan slå. Desuden viser Tabel 2, at alle porteføljer på nær Pf 6 og Pf 9 har et signifikant positivt alfa, når der justeres for INDMOM samt Fama og Frenchs fem risikofaktorer. Dette viser ligeledes, at EPO præsterer godt empirisk. Derudover kan EPO justeres til at opnå en ønsket gearing og turnover. Tabel 3 viser, at en højere værdi af w

medfører en mere stabil gearing – hvilket betyder, at der skal større kursfald til, før porteføljen bliver risikabel. Samtidig falder turnover, hvilket betyder, at der skal ske færre justeringer ved hver rebalancering. Som også beskrevet i det pågældende afsnit, går gearing og turnover ofte hånd i hånd. Analysen viser desuden, at EPO tilpasser sig markedsforholdene. I krisetider reduceres gearingen, hvilket mindsker risikoen. Omvendt ses det, at modellen i visse out-of-sample perioder vælger en lavere w , hvilket medfører højere gearing og dermed risiko for overeksponering. I sådanne et tilfælde vil porteføljen attraktiv.

Samlet set formår EPO at tilpasse sig forskellige markedsforhold og investeringsprofiler, hvilket understøtter modellens praktiske anvendelighed.

9 Konklusion

Vi har i dette projekt undersøgt de problemer ved MVO, der opstår i forbindelse med anvendelse af metoden. Problemerne adresseres ved at undersøge den alternative optimeringsmetode EPO, som først gennemgås teoretisk og herefter implementeres empirisk.

Teoretisk er MVO den metode, der leverer den bedste Sharpe ratio under antagelse af, at der hverken er fejl i estimeringen af kovarianser eller forventede afkast. Dog holder denne antagelse sjældent i praksis, hvilket leder til to primære problemer: Fejl i estimering af kovarianser og fejl i estimering af forventede afkast. Problemerne undersøges vha. Principal Components Analysis, hvoraf vi kan identificere problemporbeføljer. Problemporbeføljerne svarer til de principale komponentporbeføljer, hvor især de mindst betydningsfulde skaber udfordringer for MVO. For disse porbeføljer bliver risikoen ofte undervurderet og det forventede afkast overvurderet, hvilket kunstigt hæver den forventede Sharpe ratio. Som følge heraf allokerer MVO ofte store positioner til netop disse støjfyldte porbeføljer, hvilket i praksis fører til lavere performance.

På baggrund af identificeringen af problemporbeføljerne undersøges EPO som en metode til at adressere disse problemer. EPO adresserer begge problemer ved at krympe korrelationerne.

Krympningsparameteren, w , udgør en central rolle, da den reducerer problemporbeføljernes vægte og således implicit reducerer den forventede Sharpe ratio for problemporbeføljerne. Altså mindskes konsekvenserne af estimeringsfejl i både risiko og forventet afkast.

De empiriske resultater viser, at EPO generelt leverer en bedre og mere robust realiseret performance i

form af høje in-sample Sharpe ratios, der stemmer overens med porteføljekonstruktionernes out-of-sample Sharpe ratios. EPO-porteføljerne slår alle benchmarks, herunder $1/N$, $1/\sigma$, INDMOM og de fem Fama-French faktorer – dog undtaget få tilfælde, hvor en række out-of-sample porteføljer ikke slår INDMOM. I alle tilfælde genererer de højere Sharpe ratios end den klassiske MVO.

Når der regresseres på standardfaktorer, viser resultaterne, at alle porteføljekonstruktioner, på nær to, har et positivt signifikant alfa på et 5%-signifikansniveau. EPO-portefølernes stærke performance kan altså ikke fuldt forklares af eksponering mod Fama-French faktorerne. Generelt viser resultaterne, at EPO præsterer bedre end den klassiske MVO på tværs af varierende porteføljekonstruktioner.

Til sidst fremhæves porteføljekonstruktionernes gearing og turnover. Her viser resultaterne, at nogle porteføljer er mere realistiske at implementere i praksis end andre, da der under visse forhold ses højt gearede porteføljer. Resultaterne viser således, at EPO generelt konstruerer mere robuste porteføljer end MVO. Det ses både i overensstemmelsen mellem in-sample og out-of-sample performance samt i lavere gearing og turnover, hvilket indikerer en mere stabil og praktisk anvendelig porteføljekonstruktion. Sluttligt er det dog væsentligt at understrege, at resultaterne er skabt på baggrund af et forenklet investeringsmiljø. Således kan modellen altså ikke direkte implementeres i praksis uden yderligere justeringer, selvom EPO empirisk er mere robust end MVO.

9.1 Perspektivering

Selvom EPO i vores projekt viser sig at være mere robust end MVO, vil det være relevant at undersøge, hvordan metoden klarer sig under mere krævende forhold. Her ville det være oplagt at teste metoden mod hårdere benchmarks såsom Risk-Based Optimization, som dækker over porteføljeoptimeringsmetoder, der søger at minimere risici i porteføljen. Man kunne også teste EPO mod Black-Litterman metoden, der fokuserer på at mindske støj i det forventede afkast. På baggrund heraf fås et mere realistisk bedømmelsesgrundlag til vurdering af metodens performance.

Videre forskning kan også indebærer inddragelse af et mere komplekst investeringsmiljø, hvor elementer som transaktionsomkostninger, kapitalbegrænsninger, short-selling restriktioner og/eller skattemæssige forhold inkluderes for således at være i stand til at vurdere, om EPO fortsat leverer stærke resultater i praksis. Derudover kan metodens anvendelighed undersøges på tværs af forskellige aktivklasser, såsom obligationer, råvarer eller kryptovaluta, hvor afkaststrukturer og risikoforhold adskiller sig væsentligt fra aktieindekser, der anvendes i dette projekt. Disse yderligere undersøgelser vil samlet set kunne bidrage til vurdering af metodens anvendelighed i praksis.

Litteratur

- ACS. (2025). Hentet 6. maj 2025, fra
<https://www.acs.org/education/whatischemistry/landmarks/syntheticrubber.html>
- Black, F., & Litterman, R. (1992). Global Portfolio Optimization. *Financial Analysts Journal*, 48(5), 28–43. <https://www.jstor.org/stable/4479577>
- Clarke, R. G., de Silva, H., & Thorley, S. (2006). Minimum-Variance Portfolios in the U.S. Equity Market. *The Journal of Portfolio Management*, 33(1), 10–24.
<https://doi.org/10.3905/jpm.2006.661366>
- Dalgaard, P. (2024). Notat: Flerdimensionale normalfordelinger [Statistiske modeller, HA(mat.), CBS].
- Fama, E. F., & French, K. R. (2015). A five-factor asset pricing model. *Journal of Financial Economics*, 116(1), 1–22. <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2014.10.010>
- French, K. R. (2025). Hentet 1. februar 2025, fra
https://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html
- Henderson, H. V., & Searle, S. R. (1981). On Deriving the Inverse of a Sum of Matrices. *SIAM Review*, 23(1), 53–60. <https://www.jstor.org/stable/2029838>
- Johnson, R. A., & Wichern, D. W. (2013). Applied Multivariate Statistical Analysis. Pearson Education UK. <https://ebookcentral-proquest-com.esc-web.lib.cbs.dk/lib/kbhnhh-ebooks/reader.action?docID=5138119>
- Kim, J. H., Lee, Y., Kim, W. C., Kang, T., & Fabozzi, F. J. (2024). An Overview of Optimization Models for Portfolio Management. *The Journal of Portfolio Management*, 51(2), 101–117.
<https://doi.org/10.3905/jpm.2024.1.643>
- Kolm, P. N., Ritter, G., & Simonian, J. (2021). Black–Litterman and Beyond: The Bayesian Paradigm in Investment Management. *The Journal of Portfolio Management*, 47(5), 91–113.
<https://doi.org/10.3905/jpm.2021.1.222>
- Kolm, P. N., Tütüncü, R., & Fabozzi, F. J. (2014). 60 Years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research*, 234(2), 356–371.
<https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.10.060>
- Ledoit, O., & Wolf, M. (2003). Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection. *Journal of Empirical Finance*, 10(5), 603–621.
[https://doi.org/10.1016/S0927-5398\(03\)00007-0](https://doi.org/10.1016/S0927-5398(03)00007-0)
- Loo, A. (2025). Hentet 6. maj 2025, fra
<https://corporatefinanceinstitute.com/resources/fixed-income/treasury-bills-t-bills/>

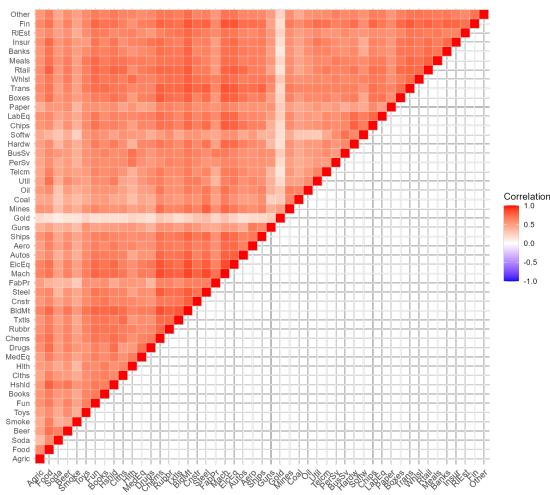
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77–91.
<https://doi.org/10.2307/2975974>
- Moskowitz, T. J., & Grinblatt, M. (1999). Do industries explain momentum? *Journal of Finance*, 54(10), 1249–1290. <https://doi.org/10.1111/0022-1082.00146>
- Moskowitz, T. J., Ooi, Y. H., & Pedersen, L. H. (2012). Time series momentum. *Journal of Financial Economics*, 104(2), 228–250. <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2011.11.003>
- Pedersen, L. H. (2015). Efficiently Inefficient : How Smart Money Invests and Market Prices Are Determined. Princeton University Press. <https://research-ebsco-com.esc-web.lib.cbs.dk/linkprocessor/plink?id=d269488e-13c9-34ca-a5e7-53f9b7cb6273>
- Pedersen, L. H., Babu, A., & Levine, A. (2021). Enhanced Portfolio Optimization. *Financial Analysts Journal*, 77(2), 124–151. <https://doi.org/10.1080/0015198X.2020.1854543>
- Rønn-Nielsen, A. (2024). Notat: Multipel lineær regression [Matematisk statistik, HA(mat.), CBS].

10 Bilag

A Link til kode

<https://github.com/N219Meyer/EPO>

B Heat-map korrelationer



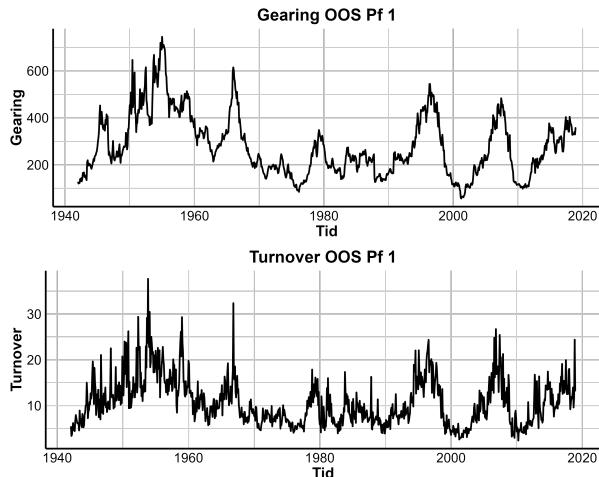
Figur 8: Caption

C FF5 korrelationer

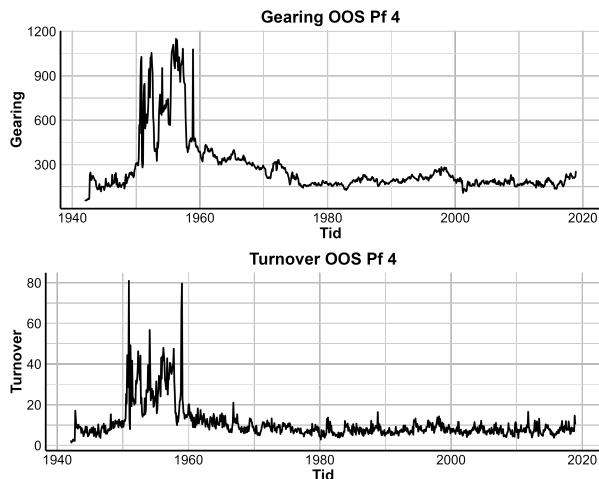
Tabel 4: Korrelationer mellem FF5, INDMOM og 1/N

	Mkt-RF	SMB	HML	RMW	CMA	INDMOM	1/N
Mkt-RF	1.00	0.28	-0.25	-0.22	-0.39	-0.13	0.96
SMB	0.28	1.00	-0.07	-0.35	-0.10	-0.07	0.40
HML	-0.25	-0.07	1.00	0.07	0.69	-0.12	-0.17
RMW	-0.22	-0.35	0.07	1.00	-0.04	0.06	-0.14
CMA	-0.39	-0.10	0.69	-0.04	1.00	0.02	-0.33
INDMOM	-0.13	-0.07	-0.12	0.06	0.02	1.00	-0.19
1/N	0.96	0.40	-0.17	-0.14	-0.33	-0.19	1.00

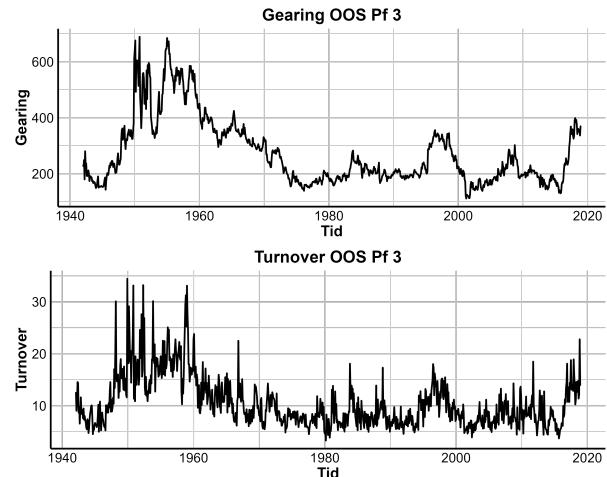
D Gearing og turnover, OOS



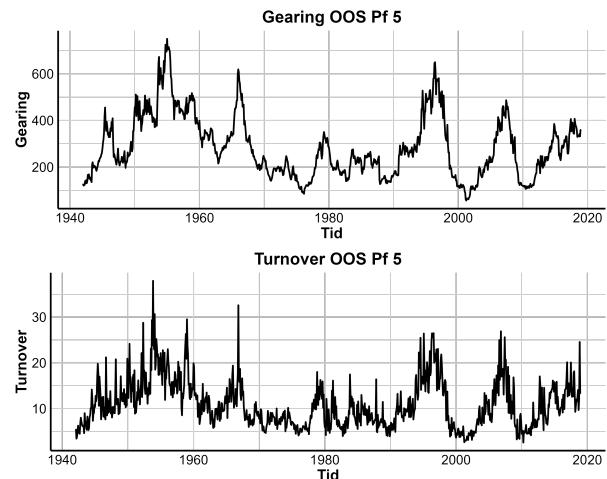
Figur 9: Gearing og turnover for Pf 1 OOS, 1942–2018



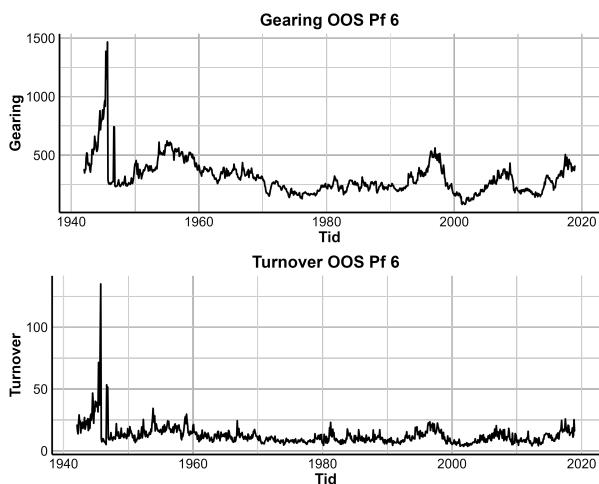
Figur 11: Gearing og turnover for Pf 4 OOS, 1942–2018



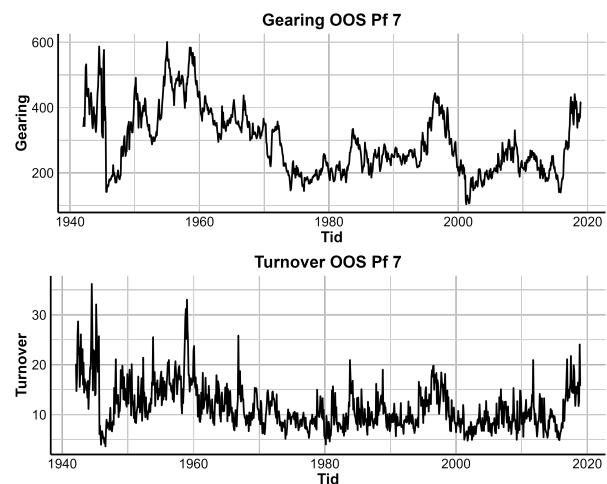
Figur 10: Gearing og turnover for Pf 3 OOS, 1942–2018



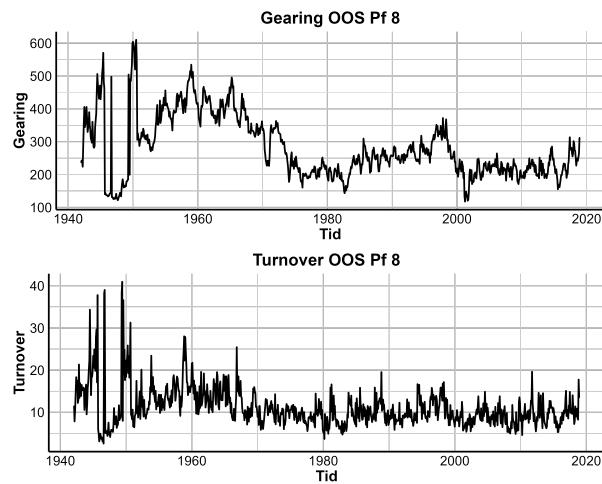
Figur 12: Gearing og turnover for Pf 5 OOS, 1942–2018



Figur 13: Gearing og turnover for Pf 6 OOS, 1942–2018



Figur 14: Gearing og turnover for Pf 7 OOS, 1942–2018



Figur 15: Gearing og turnover for Pf 8 OOS, 1942–2018